



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Felipe Ramos Menezes

A geometria das abelhas na construção de seus alvéolos

Rio de Janeiro

2017

Felipe Ramos Menezes

A geometria das abelhas na construção de seus alvéolos



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof.^a Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido

Coorientadora: Prof.^a Dra. Maria Lúcia Scerni Barbosa

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

M542 Menezes, Felipe Ramos.
A geometria das abelhas na construção de seus alvéolos / Felipe Ramos Menezes. – 2017.
73f. : il.

Orientadora: Cláudia Ferreira Reis Concordido.
Coorientadora: Maria Lúcia Scerni Barbosa.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Construções geométricas - Teses. 2. Abelha - Teses. 3. Cálculo diferencial - Teses. 4. Cálculo integral - Teses. I. Concordido, Cláudia Ferreira Reis. II. Barbosa, Maria Lúcia Scerni. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU514.114

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Felipe Ramos Menezes

A geometria das abelhas na construção de seus alvéolos

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 21 de agosto de 2017.

Banca Examinadora:

Prof.^a Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido (Orientadora)

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.^a Dra. Maria Lúcia Scerni Barbosa (Coorientadora)

Universidade Federal Fluminense

Prof.^a Dra. Patrícia Nunes da Silva

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.^a Dra. Walcy Santos

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2017

DEDICATÓRIA

Para o autor e consumidor da minha fé Nosso Senhor Jesus Cristo.

AGRADECIMENTOS

Às Professoras Cláudia Concordido, Maria Lúcia S. Barbosa e Jeanne Bezerra de Barros, que com competência e firmeza aliadas à ternura e carinho, orientaram, estimularam quando o desânimo me abatia e apontaram os objetivos a serem conquistados.

Aos professores do PROFMAT por toda a base adquirida durante as aulas.

Aos professores que já passaram na minha vida estudantil e profissional, especialmente aqueles que me apresentaram de forma fascinante a Rainha das Ciências.

Aos colegas da turma de Mestrado que me enriqueceram como ser humano, como professor e me animaram a seguir nessa profissão de suma importância ao país.

Aos meus alunos que sempre me surpreendem ano após ano que com um estudo aplicado e disciplinado alcançam seus sonhos tão esperados.

A Alberto Reboeiras, que me deu apoio em um momento crucial neste projeto, inclusive auxiliando-me nas traduções dos artigos.

Aos meus amigos, namorada e familiares, por compreenderem minha ausência.

A meus pais, que sempre estimularam o gosto pelo estudo e que me possibilitaram ser o que sou hoje.

A Nosso Senhor Jesus Cristo e Nossa Senhora do Perpétuo Socorro, sempre me auxiliando nos momentos difíceis (e foram muitos!).

RESUMO

MENEZES, Felipe R. **A geometria das abelhas na construção de seus alvéolos.** 2017. 73f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

Este trabalho apresenta uma pesquisa sobre a construção geométrica dos alvéolos das abelhas. Utilizou-se o cálculo diferencial e integral como a ferramenta para a compreensão da matemática natural (conceituação do matemático Keith Devlin) que, em particular, as abelhas possuem para a economia de trabalho e otimização da produção de mel. Destina-se a fazer uma abordagem das abelhas no mundo e no Brasil, fazendo uma classificação taxonômica e destacando a utilidade das abelhas com sua produção e principalmente sua importância ecológica. Apresenta a matemática sofisticada que as abelhas de forma inata ou naturalmente possuem. O cálculo diferencial e integral é utilizado aqui como a grande ferramenta capaz de solucionar o problema da construção visando uma melhor economia de cera e aumento da produtividade de mel. Apresentam-se algumas atividades pedagógicas que visam um melhor entendimento da transdisciplinaridade através da presença da matemática na natureza. Este estudo busca referência teórica principalmente em autores e matemáticos relacionados à história da Conjectura do Favo de Mel. Por fim, a pesquisa aponta a importância do trabalho visando uma melhor conscientização da sociedade para o papel que as abelhas desempenham na questão ecológica e ambiental uma vez que as abelhas são fundamentais no equilíbrio ecológico.

Palavras-chave: Abelhas. Matemática. Cálculo. Geometria.

ABSTRACT

MENEZES, Felipe R. **The geometry of the bees while building their bee-cells.** 2017. 73f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

This paper presents a research on the geometric construction of the bee alveoli. It was used the differential and integral calculus as the tool for the understanding of natural mathematics (conceptualization of the mathematician Keith Devlin) that, in particular, bees possess for the labor economy and optimization of honey production. It aims to make an approach of bees in the world and in Brazil, making a taxonomic classification and highlighting the usefulness of the bees with their production and especially its ecological importance. It presents the sophisticated mathematics that bees innately or naturally possess. The differential and integral calculus is used here as the great tool capable of solving the problem of construction aiming at a better economy of wax and increase of the honey productivity. It demonstrates some pedagogical activities aimed at a better understanding of transdisciplinarity through the presence of mathematics in nature. This study seeks theoretical reference mainly in authors and mathematicians related to the history of the Honeycomb Conjecture. Finally, the research points out the importance of the work aiming at a better awareness of the society for the role that bees play in the ecological and environmental issue since bees are fundamental for the ecological balance.

Keywords: Bees. Mathematics. Calculation. Geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Moeda grega 300-200 a.C.	15
Figura 2 – Grupos de táxons dos seres vivos.....	16
Figura 3 – Anatomia das abelhas.....	18
Figura 4 – Olhos das abelhas.....	19
Figura 5 – Aparelho bucal das abelhas.....	19
Figura 6 – Respiração das abelhas.....	20
Figura 7 – Tamanho das abelhas quanto à funcionalidade.....	20
Figura 8 – Abelha guardiã.....	21
Figura 9 – Mapa das abelhas nativas no Brasil.....	22
Figura 10 – Abelha Jandaíra.....	23
Figura 11 – Abelha Uruçu cinzenta.....	24
Figura 12 – Abelha Jataí.....	24
Figura 13 – <i>Apis mellifera adonsonni</i> (AMA).....	26
Figura 14 – Parque Nacional Bosque da Barra.....	27
Figura 15 – Colmeia das abelhas no Parque Nacional Bosque da Barra.....	28
Figura 16 – Favos de mel das abelhas.....	33
Figura 17 – Alvéolo das abelhas com ferrão.....	35
Figura 18 – Encaixe dos alvéolos das abelhas com ferrão.....	36
Figura 19 – Ângulos dos losangos da cobertura dos alvéolos.....	37
Figura 20 – Um losango da cobertura dos alvéolos.....	38
Figura 21 – Segmento $\overline{BB_1}$ e a altura dos alvéolos.....	39
Figura 22 – Alvéolo sobreposto ao prisma hexagonal.....	41
Figura 23 – Dois losangos da cobertura do alvéolo.....	42
Figura 24 – Parte do alvéolo sobreposto no plano tridimensional.....	43
Figura 25 – Polígonos regulares.....	48
Figura 26 – Figura da atividade 4.....	52
Figura 27 – Segmento $\overline{BB_1}$ e a altura do alvéolo.....	52
Figura 28 – Figura da atividade 5.....	53
Figura 29 – Dispositivo de Teodoro.....	55
Figura 30 – Figura da atividade 6 justificativa 1.....	55

Figura 31 – Figura da atividade 6 justificativa 2.....	56
Figura 32 – Figura da atividade 6 justificativa 3.....	57

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	11
1 CONHECENDO UM POUCO SOBRE AS ABELHAS	13
1.1 Abelhas no Mundo	15
1.2 Anatomia das abelhas.....	17
1.3 Organização funcional das abelhas.....	20
1.4 Abelhas no Brasil.....	22
1.4.1 <u>Abelhas silvestres brasileiras</u>	22
1.4.2 <u>Abelhas africanizadas</u>	25
1.5 Mata Atlântica e polinizadoras.....	27
1.6 Entrevista com um apicultor.....	28
2 A GEOMETRIA DAS ABELHAS.....	32
2.1 A conjectura do Favo de Mel.....	32
2.2 Geometria dos alvéolos das abelhas com ferrão.....	35
2.2.1 <u>O Problema de Réaumur</u>	36
2.2.2 <u>O volume dos alvéolos das abelhas com ferrão</u>	43
3 ATIVIDADES PROPOSTAS.....	45
3.1 Atividade 1.....	47
3.2 Atividade 2.....	48
3.3 Atividade 3.....	50
3.4 Atividade 4.....	51
3.5 Atividade 5.....	53
3.6 Atividade 6.....	54
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	59
REFERÊNCIAS.....	62
ANEXO A – A derivada primeira da função área total.....	65
ANEXO B – A derivada segunda da função área total no ponto é positiva.....	66
ANEXO C – A derivada primeira da função área total.....	68
ANEXO D – A derivada segunda da função área total no ponto é positiva.....	69
ANEXO E – O produto vetorial pelo teorema de Laplace.....	71
ANEXO F – Integração dupla na região Ω	72
ANEXO G- Síntese de Clairaut.....	73

INTRODUÇÃO

Ao se observar uma colmeia e, especificamente, o formato escolhido pelas abelhas para construir sua casa, depara-se com um exemplo de engenhosidade. Como esses seres irracionais conseguem montar seu habitat de forma inata, porém com tamanha complexidade? Talvez essa questão seja mais apropriada a um biólogo. No entanto, o interesse matemático também se faz presente. Dessa forma, utilizando o cálculo diferencial e integral como ferramenta procura-se nesse trabalho estudar a geometria dos alvéolos e justificar a escolha feita por esses insetos.

A temática que circunda essa dissertação é a sustentabilidade. O desenvolvimento sustentável é um tema que ganha cada vez mais importância no mundo, uma vez que lida com a preservação dos ecossistemas em que residimos. Não é por acaso que muitos líderes mundiais ao perceberem a problemática ressaltam e alertam o mundo para que todos possam pensar nessa questão de forma racional e não-ideológica. Um desses grandes líderes é o papa Francisco que no ano de 2015 escreveu sua encíclica *Laudato Si* com a finalidade de termos um olhar mais consciente para a educação no que diz respeito a nosso habitat natural, o qual ele chama de casa comum.

Muitas coisas devem reajustar seu próprio rumo, mas antes de tudo é a humanidade que precisa mudar. Falta a consciência de uma origem comum, de uma recíproca pertença e de um futuro compartilhado por todos. Esta consciência basilar permitiria o desenvolvimento de novas convicções, atitudes e estilos de vida. Surge, assim, um grande desafio cultural, espiritual e educativo que implicará longos processos de regeneração. (FRANCISCO, *Laudato Si*, § 202, 2015)

Quanto ao objetivo geral do trabalho, espera-se gerar uma conscientização no ambiente escolar da importância ecológica das abelhas para a vida terrestre. Além disso, demonstrar que esses seres, a partir do processo evolutivo da seleção natural, podem até mesmo surpreender a nós, seres humanos, na capacidade de adquirir uma matemática inata muito aguçada e engenhosa.

Sob o pressuposto da importância da transdisciplinaridade, propõem-se nessa dissertação seis atividades pedagógicas com base em exercícios para que alunos

do ensino básico possam perceber com mais clareza a relação existente entre diferentes disciplinas em seu cotidiano (em particular, matemática e biologia).

Parte considerável da matemática aqui envolvida será de difícil compreensão por muito dos alunos do ensino básico que ainda não estudaram cálculo diferencial e integral, mas essas seis atividades permitem que esses alunos possam entender parte do processo matemático presente na construção dos alvéolos e até se surpreender com tanta eficiência das abelhas.

Organizou-se essa dissertação em três capítulos. O primeiro capítulo aborda uma visão histórica dos fósseis de abelhas mais antigos já encontrados, sempre salientando sua importância ecológica e traçando um panorama das abelhas no mundo, incluindo sua classificação científica e anatômica enquanto ser vivo. Quanto a presença das abelhas no Brasil, enfocam-se as principais espécies existentes passando por um personagem histórico de relevância no cenário da apicultura nacional.

No segundo capítulo, exploram-se três resultados matemáticos relevantes para a compreensão do processo de construção dos alvéolos que as abelhas utilizam. O primeiro deles, conhecido como Conjectura do Favo de Mel, é um problema de alto grau de dificuldade que remonta ao século IV a.C., mas que foi solucionado somente no ano de 1999. O segundo resultado, um problema proposto entre dois amigos matemáticos, que possibilita uma compreensão da complexidade geométrica dos alvéolos das abelhas. Já o terceiro, uma curiosidade a respeito do volume desses alvéolos que corrobora para a beleza arquitetônica presente nos favos.

No terceiro e último capítulo, baseado em alguns artigos científicos, são apresentadas seis atividades pedagógicas que possibilitam no processo de ensino e de aprendizagem o acesso a essa beleza matemática que as abelhas proporcionam, valorizando e conscientizando-se da importância da sustentabilidade para o mundo.

1 CONHECENDO UM POUCO SOBRE AS ABELHAS

As abelhas são conhecidas como “insetos sociais”. Isto ocorre porque as abelhas conseguiram atingir certo grau de desenvolvimento social, agrupando-se em comunidades nas quais existe nítida distribuição de trabalhos e responsabilidade entre os indivíduos que a compõe, todos contribuindo para um fim comum: a sobrevivência do grupo. Por essas e outras qualidades naturais, as abelhas são insetos de grande utilidade para o homem. Dizemos para o homem, porque para a natureza todos os seres são úteis e têm sua razão de ser, fazendo parte de um contexto geral no qual o próprio homem tem o seu lugar. As abelhas, porém, fazem a polinização das flores e ainda nos fornecem cera, geleia real, mel, pólen, própolis e seu veneno, todos produtos amplamente aproveitados como alimento natural ou para finalidade medicinais preventivas e curativas.

O processo de polinização é a transferência de material genético da parte masculina para a parte feminina da flor o que provoca a fecundação gerando novos frutos e sementes que, germinando, fazem nascer novas plantas, garantindo a continuidade da vida vegetal. As abelhas são responsáveis por cerca de 80% da polinização das plantas cultivadas do planeta, segundo a Associação Brasileira de Estudos das Abelhas. Devido a esta porcentagem é que muitos cientistas afirmam que, com a extinção das abelhas ou a redução da sua área de distribuição geográfica, se observará uma diminuição na quantidade e na qualidade de frutos e sementes produzidos e, conseqüentemente, na produção mundial de alimentos. Atribui-se a Albert Einstein, um dos mais iminentes cientistas, possuía essa concepção acerca das abelhas: “Olhem as abelhas, se elas sumirem a humanidade tem um máximo de quatro anos de sobrevida, pois não haverá plantas e animais. A polinização é a grande responsável pela produção de alimentos”.

Segundo a revista Veja, em 2016, pela primeira vez, as abelhas entraram na lista de espécies ameaçadas de extinção nos Estados Unidos. Sete espécies da família Hylaeus (*Hylaeus anthracinus*, *Hylaeus longiceps*, *Hylaeus assimulans*, *Hylaeus facilis*, *Hylaeus hiliaris*, *Hylaeus kuaeka* e *Hylaeus mana*) foram colocadas nessa lista pelo Serviço Americano de Pesca (U.S. Fish and Wildlife Service) após um profundo estudo realizado em conjunto com a Sociedade Xerces, uma

organização americana de conservação de invertebrados. Essas abelhas são todas nativas do Havaí.

Segundo as pesquisas, no começo do século XX, as abelhas listadas eram as mais abundantes da região, mas a principal linha de investigação para a diminuição dessas referidas abelhas é a inclusão de espécies de plantas e animais invasores predadores que desequilibram a fauna local. Entretanto, o problema da extinção das abelhas não se restringe ao Havaí. De 1940 até hoje, o número de abelhas diminuiu pela metade nos Estados Unidos, o país mais afetado pelo problema. Somente do período de 2012 a 2013, nesse país a queda de abelhas foi de 31%, na Europa, nesse mesmo período o número chegou a 53%, e no Brasil, a quase 30%.

Os cientistas ainda tentam desvendar essa diminuição, mas existe um consenso de que foi um somatório de razões que ocasionou esse cenário cruel para esses insetos. As abelhas estão perdendo seu habitat quando florestas e jardins dão lugar a construções ou mesmo a plantações de uma única cultura, uma vez que a espécie necessita de uma alimentação variada para a sobrevivência. Além disso, a diminuição do uso de pesticidas que enfraquecem as colônias, a ação de parasitas que atacam o organismo do animal e a poluição ambiental contribuem para esse cenário. Outra possível razão é uma doença que algumas espécies sofrem chamada Síndrome do Colapso da Colônia (Colony Collapse Disorder - CCD), na qual as abelhas simplesmente abandonam suas colmeias sem que nenhuma interferência incomum aconteça. As causas que levam esta ainda são um mistério para a comunidade científica. No Brasil, existem alguns casos suspeitos de CCD na região Sudeste. A pesquisadora da Agência Paulista de Tecnologia dos Agronegócios (APTA) Érica Weinstein Teixeira afirma:

É preciso ter em mente as características específicas da síndrome, para que não seja confundida com outros tipos de colapsos, como enxameações, abandonos devidos a intempéries, falta de recurso no campo, além de colapsos causados por doenças ou intoxicações ou mesmo por manejo ineficiente. Fonte: <http://www.apta.sp.gov.br/noticia_apta.php?id=4767>

Em trabalho recente, a pesquisadora concluiu que o fungo *Nosema ceranae* que alguns pesquisadores internacionais acreditavam ser o principal responsável pela síndrome CCD, já estava presente no país há pelo menos 30 anos.

Mostramos que ele não é recente e que não é a principal causa da síndrome. Atualmente, lidamos com a CCD considerando seu caráter multifatorial, no qual vários fatores podem estar atuando ao mesmo tempo, deixando as abelhas mais vulneráveis e debilitando seus mecanismos de defesas. Fonte: <http://www.apta.sp.gov.br/noticia_apta.php?id=4767>

1.1 Abelhas no Mundo

Pelas pesquisas arqueológicas, sabe-se que as abelhas existem há aproximadamente 100 milhões de anos quando um fóssil foi encontrado em uma mina no Vale de Hukawng no norte de Myanmar pelo zoólogo George Poinar Jr. no ano de 2006. Essa espécie mede 2,95 mm, sendo batizada como *Melittosphex burmensis*, em referência ao lugar em que foi encontrado. De acordo com os registros históricos os egípcios foram os pioneiros na criação das abelhas para que, em seguida, viessem os gregos e romanos aperfeiçoar as técnicas de criação.

As abelhas tinham muita importância entre os homens primitivos, na história encontra-se a abelha na mitologia, nas moedas gregas (figura 1), nas leis, na economia e na literatura da Idade Média, e até na Bíblia. Entre os séculos XV a XVII foi utilizada como símbolo de poder e riqueza em mantos, objetos reais e armas de guerra.

Figura 1 – Moeda grega 300-200 a.C.

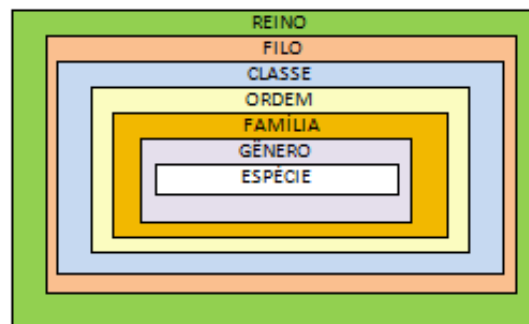


Fonte: <<https://br.pinterest.com/pin/341147740508260287/>>

As abelhas assim como qualquer ser vivo são classificadas de acordo com a estruturação hierárquica definida por Carl Linnaeus, também conhecido como Carl

Von Linné (1707-1778), botânico sueco e fundador dessa moderna sistemática, agrupando os organismos em classes, ordens, gêneros e espécies. Essa classificação consiste em atribuir nomes a diferentes espécies adotando a nomenclatura binomial (ou binominal). Por esse sistema, que ainda hoje é adotado, o nome científico de uma espécie é composto de dois termos, escritos em latim, grafados com destaque (em itálico ou sublinhado). O primeiro termo correspondente ao gênero chamado de epíteto genérico, que deve ser escrito com inicial maiúscula; o segundo termo, que é o nome específico denominado epíteto específico, escreve-se com inicial minúscula.

Figura 2- Grupos de táxons dos seres vivos



Fonte: < <https://www.infoenem.com.br/conheca-e-entenda-a-classificacao-dos-seres-vivos/> >

Assim, a abelha europeia é classificada cientificamente como *Apis mellifera* e a classificação de qualquer abelha é composta de grupos de táxons dispostos em Reino, Filo, Classe, Ordem, Família, Gênero e Espécie conforme a tabela 1.

Tabela 1 – Classificação taxonômica das abelhas

Reino	Filo	Classe	Ordem	Família	Gênero
<i>Animalia</i>	<i>Arthropoda</i>	<i>Insecta</i>	<i>Hymenoptera</i>	<i>Apidea</i>	<i>Apis</i>

1.2 Anatomia das abelhas

Uma vez apresentada a classificação taxonômica das abelhas, podemos enumerar segundo Lopes (1998) e Mercadante (1999) algumas características gerais dos animais classificados no filo *Arthropoda* e na classe *Insecta*. O filo *Arthropoda* (Artrópodes) reúne o maior número de espécies do Reino Animal, compreendendo cerca de 75% do total das espécies conhecidas como, por exemplo, aranhas, caranguejos e escorpiões. Verifica-se nesses animais uma tendência à fusão de segmentos, formando unidades funcionais denominadas tagmas. São exemplos de tagmas: a cabeça, o tórax e o abdome dos insetos.

A característica mais marcante dos artrópodes, e a grande responsável pelo sucesso ecológico do grupo, é a presença de um exoesqueleto quitinoso que reveste todo o corpo do animal. Esse exoesqueleto é formado por placas que se articulam, propiciando os movimentos do corpo e de seus apêndices, como é o caso das pernas. Aliás, vale ressaltar que foi a presença de pernas articuladas que deu origem ao nome do grupo (*arthro* = articulação, *poda* = pé). Por ser rígido, o exoesqueleto atua como uma estrutura de proteção e suporte do corpo, e, por ser articulado, não impede a mobilidade do animal. Essa combinação entre proteção e suporte sem sacrifício da mobilidade é uma característica do exoesqueleto dos artrópodes.

Além das características descritas, merece especial atenção o movimento das asas dos insetos. Os insetos são os únicos invertebrados com adaptações para o voo, possuindo asas que são movimentadas por músculos inseridos na face interna da placa torácica dorsal e ventral. A contração desses músculos desloca a placa dorsal para baixo, determinando a elevação da asa, e o relaxamento provoca elevação da placa dorsal determinando o abaixamento da asa. A locomoção dos artrópodes está, portanto, associada a músculos que movem partes esqueléticas rígidas. Eles não apresentam mais um padrão de locomoção que envolve musculatura e pressão do líquido celomático, como ocorre nos anelídeos, grupo que inclui, por exemplo, as minhocas e do qual os artrópodes provavelmente derivaram.

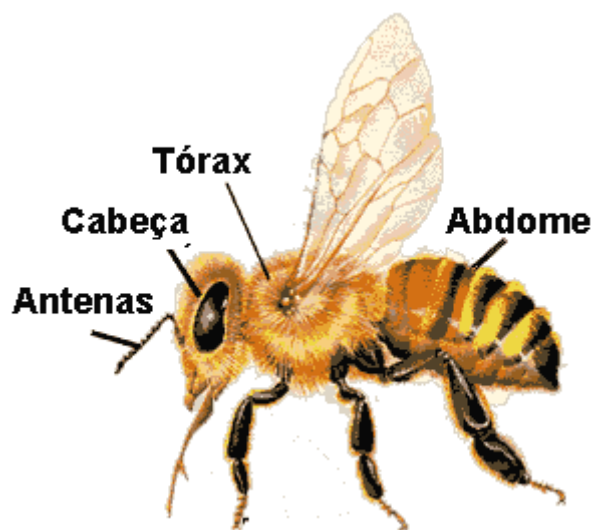
Outra característica relevante nesse filo dos artrópodes é que o seu sistema nervoso apresenta, em geral, gânglios cerebrais bem desenvolvidos, de onde parte o cordão nervoso central, ganglionar. Os órgãos dos sentidos são bem desenvolvidos, com grandes olhos, antenas táteis ou quimiorreceptoras, cerdas e pelos táteis.

A classe *Insecta* reúne o maior número de espécies animais que se conhece, sendo, portanto, o grupo mais diversificado entre os artrópodes e, conseqüentemente, entre todos os animais, dentre eles encontram-se gafanhotos, formigas e borboletas. A maioria dos insetos é terrestre, embora existam algumas espécies que se adaptaram à vida no ambiente aquático.

O grande sucesso do grupo no meio terrestre pode ser atribuído principalmente a seu exoesqueleto quitinoso e à evolução do voo, que lhes permitiram eficiente e rápido modo de deslocamento, fuga de predadores e busca de novas fontes de alimento e de outros locais com condições mais adequadas à sua sobrevivência.

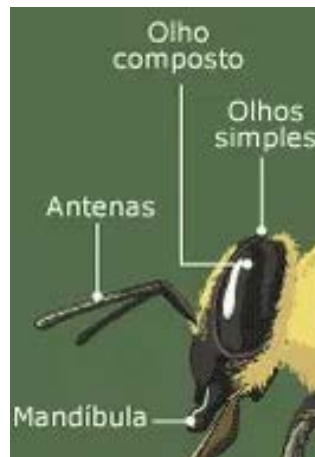
O nome *Insecta* deriva do latim e significa dividido, referindo-se ao fato de esses animais terem o corpo nitidamente dividido em três regiões: cabeça, tórax e abdome (figura 3).

Figura 3- Anatomia das abelhas



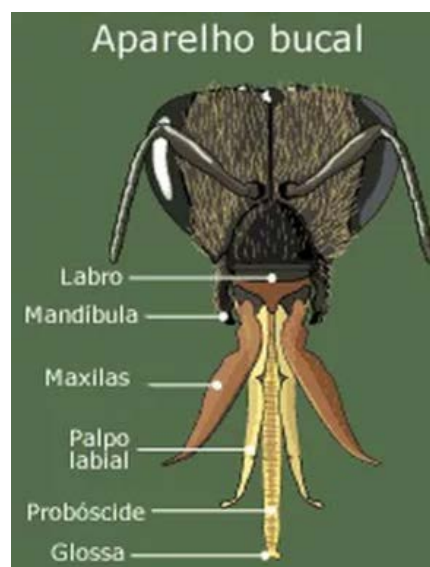
A cabeça dos insetos forma uma peça única, com os segmentos que a compõem completamente fundidos. Nela estão presentes tipicamente um par de antenas, um par de olhos compostos (olhos formados por várias unidades denominadas omatídios), três olhos simples (figura 4), além dos apêndices bucais, entre os quais se destaca um par de mandíbulas (figura 5). As antenas são estruturas sensoriais que lhes permitem perceber odores, como o perfume das flores e o cheiro dos frutos. Os olhos compostos permitem uma excelente visão de formas e cores.

Figura 4 – Olhos das abelhas



Fonte:< <http://abelhudasdeplantaowixsite.com/abelhudasdeplantaowixsite.com/corpo-das-abelhas>>

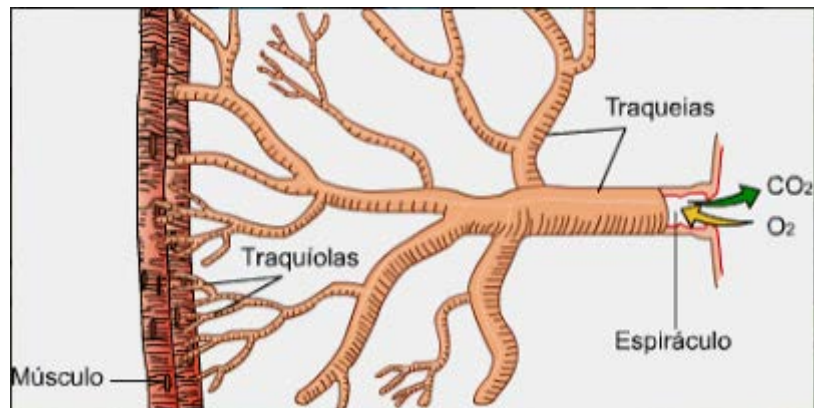
Figura 5 – Aparelho bucal das abelhas



Fonte:< <http://abelhudasdeplantaowixsite.com/abelhudasdeplantaowixsite.com/corpo-das-abelhas>>

Já o tórax é resultante da fusão de três segmentos, cada um deles apresentando um par de pernas. O segundo e o terceiro segmentos são os que contêm as asas. E por fim, o abdome é formado por nove a onze segmentos, e sua respiração é feita através de estruturas típicas denominadas traqueias (figura 6).

Figura 6 – Respiração das abelhas

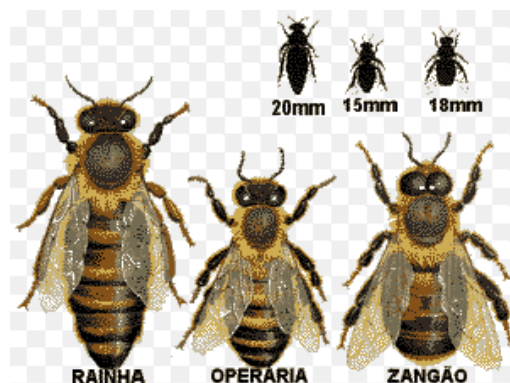


Fonte: < <http://mundodosartropodes.blogspot.com.br/2015/05/blog-post.html>>

1.3 Organização funcional das abelhas

Especificamente sobre as características funcionais das abelhas podemos destacar o heteromorfismo que consiste em apresentarem diferenças morfológicas relacionadas à função que desempenham dentro da colmeia. Elas apresentam três tipos morfológicos: rainhas, operárias e zangão (figura 7).

Figura 7 – Tamanho das abelhas quanto à funcionalidade



Fonte: < <http://www.saudeanimal.com.br/2015/11/26/rainha-e-o-voo-nupcial/>>

A função da rainha na colmeia é reprodutiva. Ou seja, sua função consiste em colocar ovos que se transformarão nas futuras abelhas operárias ou novas rainhas. A abelha que é escolhida para ser a rainha é alimentada basicamente por geleia real, um tipo especial de alimento que a nutre para que ela desempenhe seu papel reprodutivo. Quando a futura rainha atinge um determinado tempo de vida sai para o chamado voo nupcial, encontrando-se com o zangão para reprodução. Após a cópula retorna à colmeia para a proteção dos ovos. Somente as abelhas rainhas podem viver por até cinco anos, já as abelhas zangões e operárias possuem uma durabilidade em média de 28 a 48 dias.

A função do zangão, que é o macho, também é reprodutiva. Ele realiza o voo nupcial, fecunda a abelha rainha e, em algumas espécies, morre após a cópula ou é abandonado pela colônia de abelhas por perder sua funcionalidade dentro do enxame.

Já as abelhas operárias são estéreis e executam diversas funções dentro da colmeia. Algumas são responsáveis pela alimentação da rainha e zangão. Outras cuidam da estruturação da colmeia para que seja mantida fazendo reparos nas células, limpando a colmeia e construindo novas células para o armazenamento de mel ou abrigar os ovos postos pela rainha. Além das funções internas, as operárias guardam a entrada da colmeia (figura 8) e outras saem para visitar as flores de plantas onde procuram néctar e pólen.

Figura 8 – Abelha guardiã



1.4 Abelhas no Brasil

Das 20 mil espécies de abelhas, no Brasil (figura 9) existem 5 mil espécies e, dentre estas, na Amazônia há aproximadamente 400 espécies de abelhas sem ferrão, as quais constroem colmeias com uma arquitetura diferente, os alvéolos têm a forma de um octaedro truncado ou potes elipsoidais.

Figura 9- Mapa das abelhas nativas no Brasil



Fonte: <<http://meliponariojandaira.blogspot.com.br/2011/10/mapa-das-abelhas-nativas-sem-ferrao.html>>

1.4.1 Abelhas silvestres brasileiras

As abelhas silvestres ou nativas são abelhas sem ferrão ou com ferrão atrofiado e são classificadas dentro da subfamília *Meliponinae* que distribui-se em duas tribos, *Meliponini*, formada apenas pelo gênero *Melipona*, encontrado, exclusivamente, na região Neotropical (América do Sul, Central e Ilhas do Caribe), e *Trigonini*, que agrupa um grande número de gêneros. As abelhas silvestres mais encontradas no Brasil são Uruçu do nordeste (*Melipona scutellaris*), Mandaçaia

(*Melipona quadrifasciata*), Tiúba (*Melipona compressipes*), Jandaíra (*Melipona subnitida*), dentre outras. Entre as *Trigonini* podemos citar as Jataí (*Tetragonisca angustula*), a mais comum no estado de São Paulo e que produz mel de excelente qualidade. Na figura 10, apresentamos um grupo de abelhas da espécie Jandaíra.

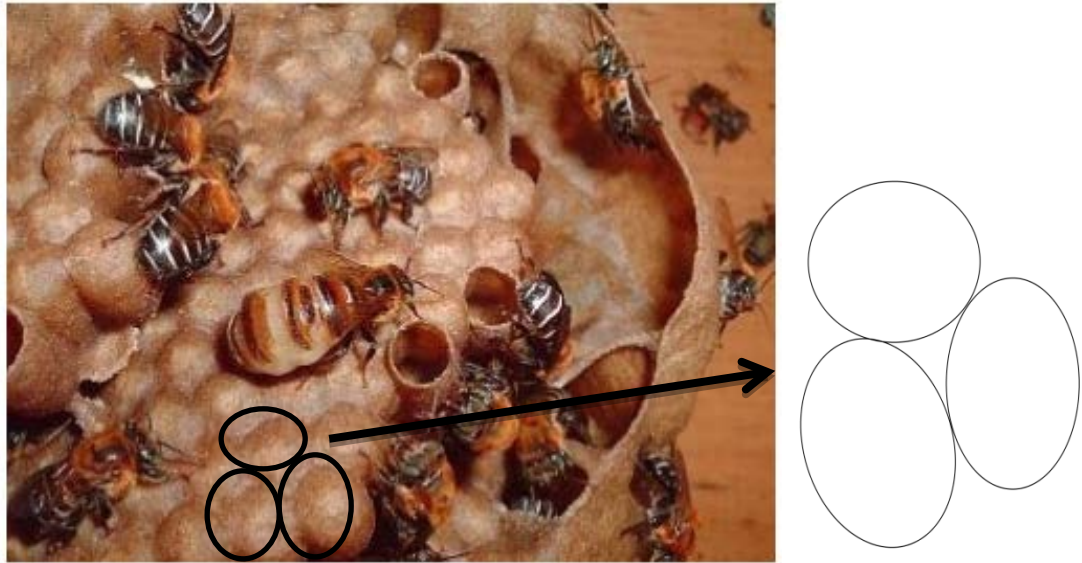
Figura 10- Abelha Jandaíra (*Melipona subnitida*)



Fonte:< <http://meliponariodosertao.blogspot.com.br/p/jandaira-melipona-subnitida.html>>

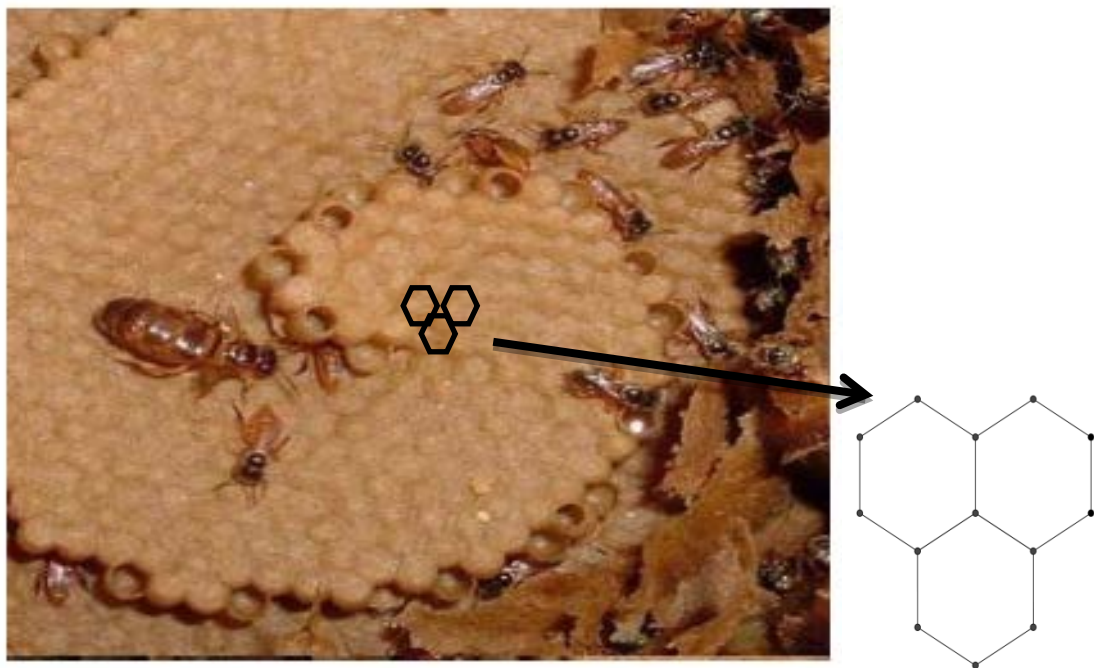
Existe uma grande diferença entre as abelhas indígenas sem ferrão e as *Apis melliferas*. Os favos ou células das abelhas *Apis* são construídos no sentido vertical, justapostos, enquanto que os das abelhas sem ferrão são feitos horizontalmente, estilo assobradado. As *Meliponinae* depositam o pólen nas células, misturando-o com mel. Depois que a rainha deposita os ovos, as células são fechadas e logo que as larvas nascem, já encontram alimento suficiente para se desenvolverem e tornarem-se adultas. Outra diferença marcante é que as melíponas armazenam seu mel, em potes elipsoidais (figura 11), diferentemente das *Apis*, que o armazenam em favos hexagonais (figura 12).

Figura 11- Abelha Uruçu cinzenta (*Melipona scutellaris*)



Fonte:< <http://meliponariodaserra.blogspot.com.br/2010/04/abelha-urucu-melipona-scutellaris.html>>

Figura 12- Abelha Jataí (*Tetragonisca angustula*)



Fonte:< <http://abelhasdomato.webnode.com.pt/abelha-jatai/>>

Independente da espécie, as *Meliponinae* são insetos sociais, isto é, vivem em colônias constituídas por um grande número de abelhas operárias, que realizam a construção e a manutenção da estrutura física da colmeia, a coleta e o processamento do alimento e a proteção da cria. Vivem em média 30 a 40 dias, sendo brancas ao saírem dos favos, escurecendo com o passar do tempo. A rainha, quando fecundada, apresenta o ventre bem dilatado, podendo ser detectado a olho nu. Geralmente, habita a área de cria, circulando por entre os favos. As rainhas, nos meliponídeos, são incapazes de voar, havendo poucos relatos de sua fuga. Os machos, que são produzidos geralmente nas épocas de abundância em alimentos, com a presença de células reais (mostrando que, em breve, haverá a fecundação de rainhas virgens), podem realizar algumas tarefas dentro da colmeia, mas a principal função é a fecundação das rainhas durante o voo nupcial. Após o acasalamento, os machos são enxotados dos cortiços. Os mais insistentes são inutilizados.

O processo de multiplicação dos meliponídeos é lento. Após localizar uma cavidade adequada, as operárias transportam material da colmeia mãe para fundar a estrutura do novo ninho. Após tudo pronto, a rainha virgem sai da colmeia mãe para realizar o voo nupcial com apenas um macho. Após fecundada, ela assume o novo ninho iniciando a postura.

1.4.2 Abelhas africanizadas

As abelhas africanas originárias do leste africano foram introduzidas no Brasil em 1956 pelo geneticista e engenheiro agrônomo Warwick Estevam Kerr em Camaquã na região de Rio Claro São Paulo com a finalidade de se executar um programa de melhoramento genético que fosse capaz de aumentar a produção de mel do país associando a uma baixa agressividade, uma vez que essas abelhas atacam em grande número e em apenas trinta segundos são capazes de injetar oito vezes mais toxinas do que uma abelha européia. Kerr trouxe 51 abelhas rainhas. Entretanto, dois anos depois, devido a um descuido, um técnico no apiário deixou que as rainhas africanas que estavam em quarentena escapassem ocorrendo uma enxameação de vinte e seis colméias. Esse incidente levou a um processo de

cruzamentos naturais com as abelhas européias já presentes no Brasil propiciando à formação das chamadas abelhas africanizadas (figura 13).

Figura 13- *Apis mellifera adonsonni* (AMA)



Fonte: < <https://www.g-sat.net/showthread.php?109453-Abelha> >

Tal abelha chamada abelha mellifera africanizada (AMA), embora muito produtiva, causou um impacto negativo devido ao alto grau de agressividade que elas apresentavam, juntamente com as deficiências dos apicultores e da população em geral que não sabiam como trabalhar e conviver com elas. Com isso, ocorreram muitas mortes e a produção de mel praticamente zerou, o que ficou conhecido como o caos da apicultura brasileira. Entretanto, com o passar do tempo, os apicultores foram ganhando experiência no manejo dessas abelhas e na reformulação de técnicas de exploração das áreas apícolas. Outro fator decisivo para a mudança de rumos na apicultura nacional foi a criação da Confederação Brasileira de Apicultura nos anos 1970, o que possibilitou o crescimento da atividade e transferiu o país da vigésima sétima posição para a sétima posição de maiores produtores mundiais de mel nos anos 80, o que ficou conhecida como a explosão do mel. Nos últimos dados divulgados pelo IBGE (BRASIL 2016), o Brasil produziu 37.815 toneladas no ano de 2015 arrecadando 81,7 milhões de dólares, o que o deixa na segunda posição na América do Sul perdendo somente para a Argentina, e na oitava colocação na exportação de mel mundial.

A maior contribuição da introdução das abelhas africanas no Brasil foi o desenvolvimento das pesquisas científicas realizadas em diversas universidades gerando a formação de vários centros multiplicadores com os programas de pós-graduação. Ou seja, a ótica visionária do professor Stevan Kerr levou não somente a

resultados positivos na produção científica e econômica do país como, também, na questão ecológica já que as abelhas africanas produzem mais mel e cera e atuam como polinizadores das flores contribuindo para a produção de melhores frutos e sementes. Esse processo é essencial para a natureza, pois os frutos e sementes estão na base da pirâmide ecológica. Concluindo, apicultura (criação das abelhas) é uma atividade de desenvolvimento sustentável. Os estudos dos polinizadores em áreas de florestas são ainda baixos no país mesmo em biomas como a Mata Atlântica e a Floresta Amazônica. É, neste sentido, que essa dissertação também espera contribuir, mesmo que minimamente, para uma melhor conscientização a respeito do tema.

1.5 Mata Atlântica e polinizadoras

Um dos principais estado da federação em que está localizado o bioma da Mata Atlântica é o Rio de Janeiro. Nesse estado, existem diversos locais em que os biólogos especializados estudam abelhas nativas tais como: Parque Estadual da Pedra Branca, Parque Nacional da Floresta da Tijuca, Parque Natural Municipal do Marapendi e Parque Municipal Natural Bosque da Barra (figuras 14 e 15).

Figura 14 – Parque Nacional Bosque da Barra



Fonte: Autor, 2016.

Figura 15 – Colmeia das abelhas no Parque Nacional Bosque da Barra



Fonte: Autor, 2016.

O Parque Estadual da Pedra Branca é o pioneiro nas atividades com abelhas nativas em unidade de conservação no Estado do Rio de Janeiro. O meliponicultor, profissional que cria abelhas sem ferrão, Christiano Figueira diz que preservar as abelhas nativas polinizadoras será a única forma de manter as árvores produzindo sementes férteis e gerarem descendentes. Ele também faz uma afirmação que vem ao encontro do objetivo desse trabalho de conscientizar a escola para a importância das abelhas:

Se investirmos na meliponicultura como ferramenta fundamental na educação ambiental nas escolas e no aprendizado de nossas crianças vamos ter um futuro promissor dentro da atividade e na preservação dessas espécies como também para o meio ambiente. Fonte:<
<http://www.abelhasdobrasil.com.br/>>

1.6 Entrevista com um apicultor

Nesta seção, apresentamos uma entrevista com o apicultor Almir Salgado Coelho que possibilitará ao leitor uma melhor compreensão sobre esse importante

trabalho não somente para a economia de um país como também para seu desenvolvimento sustentável.

Autor: Qual sua profissão? O que você faz atualmente?

Entrevistado: Sou aposentado do setor de aviação e metroviário. Depois que me aposentei fui fazer o que gosto que é a apicultura e agricultura no meu sítio localizado em Tinguá no estado do Rio de Janeiro. A apicultura é a criação das abelhas com ferrão.

Autor: Qual é a diferença entre a apicultura e a meliponicultura?

Entrevistado: A meliponicultura é a criação das abelhas melíferas sem ferrão. As abelhas com ferrão não são nativas do Brasil. É claro que existem algumas poucas exceções como as abelhas chamadas popularmente de besouros que são abelhas solitárias. Essas abelhas sem ferrão não são destituídas de defesa. Elas possuem algumas pequenas garras e também os chamados líquidos cáusticos. As abelhas com ferrão são manejadas com vestimentas brancas (cor que acalma as abelhas). Eu, além de usar essas vestimentas, utilizo a lavagem da roupa com capim ou erva de cidreira, pois o cheiro parece com o cheiro da rainha e as acalma ainda mais. Outra diferença é que nós usamos a fumaça, pois as abelhas “pensam” que a colmeia está pegando fogo e, com isso, enchem seus papos com mel para se transferirem para outra localidade, porém com o papo cheio elas não conseguem se flexionar para ferroar o apicultor. Já no caso dos meliponicultores não há nenhuma necessidade do uso da vestimenta e nem da fumaça. Eu cheguei a fazer curso também de meliponicultura e guardo comigo ainda algumas caixas das abelhas jataí (uma espécie de abelha sem ferrão). A produção de mel nas abelhas sem ferrão é muito inferior em relação às abelhas com ferrão, embora a polinização seja superior. Inclusive existem algumas plantas que só conseguem ser polinizadas pelas abelhas sem ferrão, como exemplo posso citar plantas que geram os tomates, berinjelas e os jilós.

Autor: Qual diferença na coleta do pólen entre as abelhas com ferrão e sem ferrão?

Entrevistador: As abelhas sem ferrão vibram a coletarem o pólen. Essa vibração acontece, pois as plantas que só podem ser polinizadas pelas abelhas sem ferrão possuem o pólen internamente. A abelha ao pousar na planta com seu próprio peso faz com que ela se incline, e ao vibrar o pólen é coletado. Já as abelhas com

ferrão, coletam o pólen colocando-o nas porbículas (duas maiores pernas traseiras) e ao chegarem na colmeia elas o misturam com o néctar para produzirem o mel.

Autor: No manejo das abelhas existe algum procedimento padrão em termos de medida das caixas que são utilizadas?

Entrevistado: Sim, a medida das caixas tem muita relevância na produção de mel tanto que é atribuído um nome para os espaços que devemos deixar nessas caixas para que possamos manejá-las. Esses espaços recebem o nome de espaço abelha que mede exatamente 8 milímetros a fim de que abelhas possam circular. Essas caixas de manejo são compostas aproximadamente por 10 quadros de madeira onde se localizam as lâminas de cera (favos). Nós já poupamos tempo em colocar a cera nesses quadros uma vez que as abelhas demoram o dobro do tempo para produzirem a cera em relação ao mel. Ainda sobre esse espaço abelha, os 8 milímetros devem ser cumpridos, pois caso essa medição aumente esse espaço as abelhas podem construir no espaço vago novos favos impossibilitando que a caixa seja aberta com facilidade, ou caso o espaço fique curto elas podem preenchê-lo com cera ocasionando uma dificuldade em fechar a caixa. Na média uma caixa de manejo possui 30 mil abelhas, mas eu já tive caixas com até 80 mil e foi uma experiência ruim, pois com o aumento delas em um espaço limitado aumenta-se a sua ferocidade.

Autor: Quais as espécies de abelhas que você mais trabalha?

Entrevistado: As espécies que mais trabalho são as africanizadas (*Apis mellifera adonsonii*) e as jataís típicas da minha região.

Autor: Quais seriam os principais conselhos que você daria em relação a possíveis ataques das abelhas com ferrão?

Entrevistado: Ao se aproximar de uma colmeia caso alguma abelha se dirija próximo a você não a mate, pois ao morrerem elas liberam um odor que atrai o ataque das demais abelhas. Esse odor é chamado de feromônio.

Autor: Por que a picada das abelhas dói tanto?

Entrevistado: Elas têm um veneno chamado apitoxina que possui uso medicinal principalmente em relação às doenças respiratórias. Outra curiosidade interessante, uma grama de apitoxina é mais caro que uma grama de ouro.

Autor: Com o mel e a cera podemos fabricar quais outros tipos de produtos?

Entrevistado: Em relação a cera o uso é muito variado. Já com o mel já verifiquei que possuem 13 tipos de antibióticos naturais podendo este número

aumentar ainda mais com o avanço da medicina. É importante salientar que além da cera e do mel as abelhas produzem o pólen e o própolis e em quantidade muito reduzida a geleia real.

Autor: Você já trabalhou ou ainda trabalha retirando colmeias de abelhas das residências?

Entrevistado: Eventualmente, eu já fiz esse trabalho, mas nunca o fiz de forma remunerada. Se fizer novamente, farei pois sei da necessidade que a pessoa terá de retirar a colmeia.

Autor: Por que você se interessou em ser um apicultor?

Entrevistado: É muito antigo esse meu interesse. Remonta aos meus tempos de criança que ficava fascinado pela beleza das abelhas e quando me aposentei tendo mais tempo para me dedicar ao que eu realmente tinha como paixão fui sem pensar muito para essa profissão que tornou-se meu passa tempo predileto.

Autor: Você se sente realizado com essa nova função?

Entrevistado: Eu me sinto muito realizado, pois a cada dia vamos acrescentando algum conhecimento a mais sobre as belezas naturais que Deus nos presenteou.

O entrevistado também citou a importância das abelhas para o equilíbrio ecológico afirmando que elas são as principais responsáveis pela polinização das plantas. Como essa informação foi bastante desenvolvida nessa dissertação, essa pergunta não foi apresentada aqui. Vale ainda ressaltar que o entrevistado quando perguntado sobre sua percepção a respeito das diferentes formas geométricas das diversas espécies de abelhas não tinha esse conhecimento, pois ele trabalha somente com as abelhas jataís e as africanizadas.

2 A GEOMETRIA DAS ABELHAS

O interesse do autor da dissertação em relação à temática da geometria das abelhas consiste em tentar desvendar o mistério de como seres vivos irracionais seguindo seu instinto de sobrevivência conseguem resolver problemas matemáticos difíceis de forma eficiente. Tal dúvida começou a se dissipar quando tive acesso ao livro *O instinto matemático* de autoria de Keith Devlin, professor e um dos principais divulgadores da matemática nos Estados Unidos. O professor afirma que há dois tipos de matemática: a natural e a simbólica. A matemática natural evolui há milhões de anos, proporcionando – tanto a humanos quanto a animais – inacreditáveis habilidades matemáticas relacionadas à necessidade de sobrevivência, senso de direção e captura de presas. A matemática simbólica é exclusiva dos homens e tem pelo menos 3000 anos. Segundo Devlin (2009), nossos cérebros não tiveram tempo de desenvolver as estruturas especializadas para matemática natural, por isso foi preciso explorarmos outros métodos de sobrevivência. Ele argumenta que por esta razão muitas pessoas sofrem com as leis abstratas impostas pelo aprendizado escolar. Devlin conclui seu livro afirmando que podemos aprender com esses seres da natureza a matemática natural que deve ser empregada para melhorarmos nossas habilidades matemáticas. Sendo assim, esse capítulo abordará o processo de construção dos alvéolos das abelhas utilizando um conteúdo visto por universitários das ciências exatas chamado cálculo diferencial e integral.

2.1 A Conjetura do Favo de Mel

Qualquer pessoa sabe que para construir uma casa é necessário um planejamento que será feito mediante um desenho de uma planta. Para isto, a trigonometria torna-se um conhecimento imprescindível para as fases subsequentes do processo de construção. Sem essa ferramenta precisa, o resultado do projeto pode ser desastroso.

Entretanto, o homem não é a única criatura que projeta edifícios. Dentre as diversas estruturas criadas por outras criaturas, quando se trata de elegância geométrica, a beleza da forma dos favos de mel das abelhas é insuperável. As abelhas as criam para o armazenamento do mel que fabricam.

Desde o geômetra grego Pappus de Alexandria (350 a.C. – 290 a.C) o estudo da geometria em forma hexagonal dos favos de mel vem intrigando o mundo matemático. Em geral acreditava-se que o padrão hexagonal repetitivo que se vê no corte transversal de um favo de mel (figura 16) era a opção arquitetônica que usava a menor quantidade de cera possível para construir as separações. O próprio Pappus sugeriu essa hipótese, que ficou conhecida como a Conjectura do Favo de Mel, em um ensaio que ele denominou de *“A sagacidade das abelhas”*. A hipótese resistiu a todas as tentativas de demonstração até 1999, quando o matemático Thomas Hales, da Universidade de Michigan (atualmente ele leciona na Universidade de Pittsburgh), anunciou que finalmente conseguira solucionar esse difícil problema.

Figura 16 – Favos de mel das abelhas



Inicialmente algumas perguntas surgem quando nos deparamos com esta conjectura. Por que as abelhas escolhem o corte transversal hexagonal? Por que elas não fazem cada célula triangular, ou quadrada, ou com outra forma poligonal qualquer? Por que os lados são retos? Afinal, a cera quente poderia igualmente ser moldada na forma de paredes curvas. Embora um favo de mel seja um objeto tridimensional, como todas as células são cilíndricas, a área total das paredes de cera depende somente da forma e do tamanho do corte transversal de cada célula. Assim, a priori o problema torna-se de geometria plana. Ou seja, a questão se resumiria a encontrar a forma bidimensional que pudesse ser repetida indefinidamente para cobrir uma grande área plana, de modo que o comprimento total dos perímetros das células fosse o menor possível, o que resultaria no favo de mel cuja área total das paredes seja a menor possível.

Os matemáticos estabeleceram alguns fatos com facilidade. Por exemplo, existem três tipos de polígonos regulares que podem ser postos lado a lado para cobrir um plano: triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares. Das três formas de preencher o plano com polígono regulares, aquela com hexágonos regulares resulta no menor perímetro total possível. Esses problemas de ladrilhamento e de perímetro serão melhor abordados no capítulo 3 dessa dissertação. Contudo, se você combinar polígonos de todos os tipos, a dificuldade aumenta. Desse problema mais geral sabia-se relativamente pouco até 1943, quando o matemático húngaro L. Fejes Tóth em seu artigo *What The Bees Know and What They Do Not Know* usou um argumento engenhoso para provar que o padrão com hexágonos regulares resulta no menor perímetro total dentre todos os padrões compostos por combinações de polígono. Todavia, que aconteceria se os lados pudessem ser curvos? O problema torna-se cada vez mais difícil. Nesse caso, Tóth achava que o padrão com hexágonos regulares ainda seria mais eficiente do que qualquer outro, mas ele não tinha ferramentas para a demonstração.

Em uma única célula de favo de mel, se uma parede se curvar para fora, você poderá armazenar mais mel naquela célula com a mesma área de parede que usava quando esta era reta. Célula por célula, paredes que se curvam para fora fornecem um modo mais eficiente de armazenar mel. Mas quando todas células são arrumadas lado a lado, uma parede, que se curva para fora em um célula, curva-se para dentro na célula adjacente, resultando em menos mel armazenado nesta

última. A pergunta é: pode existir todo um favo de mel de células com paredes curvas em que o aumento líquido da eficiência causado pelas saliências é maior do que a diminuição líquida causada pelas reentrâncias? Se existisse tal modelo, a Conjectura do Favo de Mel seria falsa.

Intuitivamente, as saliências deveriam compensar as reentrâncias e é por isso que Tóth achava que o padrão hexagonal seria melhor. Esta intuição de Tóth acabou mostrando estar certa quando Hales provou tal conjectura publicada em *The Honeycomb Conjecture Discrete & Computational Geometry*. Ou seja, Hales precisou de 19 páginas de argumentação matemática de alto grau de dificuldade para demonstrar que as protuberâncias se anulavam.

2.2 Geometria dos alvéolos das abelhas com ferrão

No ano de 1619, o astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630) descreveu com precisão o formato de um alvéolo: prisma reto hexagonal regular cujo fundo é a união de três losangos congruentes determinando um triedro que possui seus ângulos diédricos medindo 120° (figura 17). As abelhas constroem esses alvéolos como descrito acima visando também um melhor encaixe entre esse conjunto de alvéolos denominados células (figura 18).

Figura 17 – Alvéolo das abelhas com ferrão

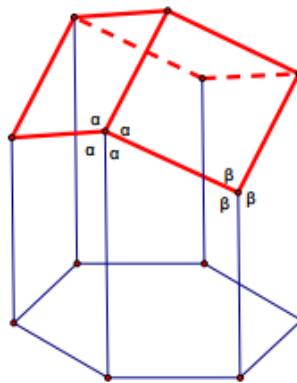
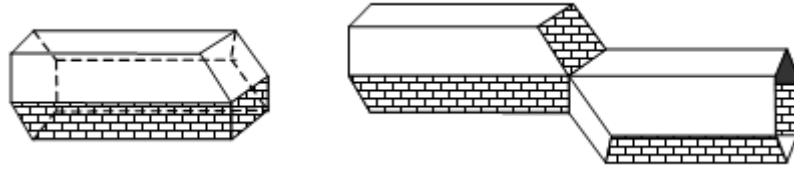


Figura 18 - Encaixe dos alvéolos das abelhas com ferrão



Fonte: SARAIVA, 1999.

2.2.1 O problema de Réaumur

Com a geometria dos alvéolos estabelecida, o biólogo e físico René-Antoine Ferchault de Réaumur (1683-1757) retomou o assunto da economia de cera e propôs a seu amigo e matemático Johann Samuel König (1712-1757) o seguinte problema:

Problema - Dado um prisma de base hexagonal, devemos fechá-lo em uma das extremidades com três losangos congruentes, colocados inclinadamente, para obter o maior volume com um gasto mínimo de material. Quais são os ângulos internos dos losangos que satisfazem à condição?

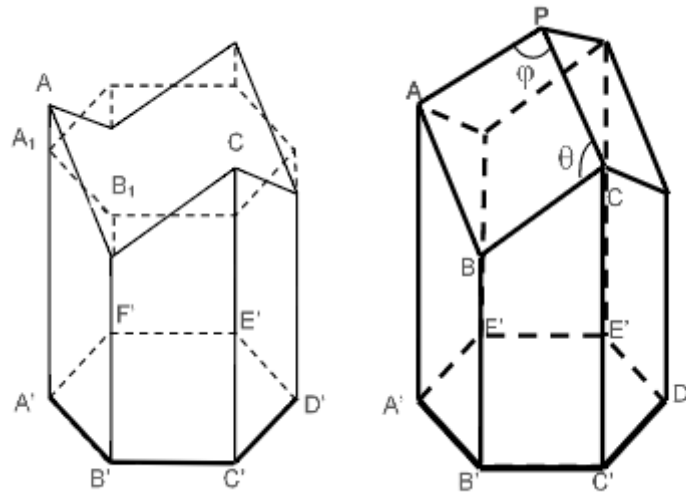
Embora König tenha conseguido responder de forma relativamente satisfatória a questão proposta, ele utilizou em sua demonstração uma tabela de logaritmos um pouco imprecisa. Sendo assim, coube ao matemático escocês Colin Mac-Laurin (1698-1746) uma resolução mais precisa.

Nessa seção apresentaremos duas maneiras distintas utilizando o cálculo diferencial para responder tal interrogação. Na primeira resolução, utilizamos a função área total dependendo do ângulo agudo de um dos losangos da cobertura do alvéolo. Já na segunda resolução o cálculo da área total foi feito dependendo de um segmento que nivelaria a cobertura com o hexágono regular inexistente do alvéolo.

Resolução 1- Considerando θ e $\varphi = 180^\circ - \theta$ os ângulos internos de cada um dos três losangos congruentes que compõem o chamado ápice triédico, conforme mostra a figura 19, podemos determinar tais ângulos encontrando uma

expressão para a área total desse alvéolo em função de θ , e em seguida, derivá-la igualando-a a zero.

Figura 19 - Ângulos dos losangos da cobertura dos alvéolos



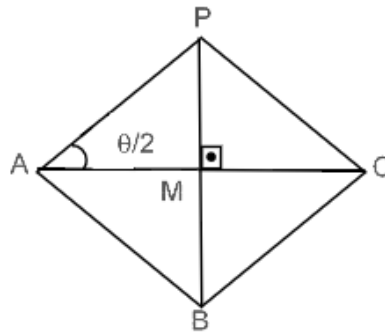
Fonte: VAIANO, A. Z.; MÁRQUEZ, R. G.; ARAÚJO J. p. 5, 2015.

O primeiro cálculo consiste em encontrar a área de cada um dos três losangos congruentes (A_L). Sendo l a medida de cada lado do hexágono regular $A'B'C'D'E'$ e observando a figura 19, tem-se que a diagonal \overline{AC} pode ser projetada ortogonalmente no plano da base hexagonal gerando o segmento $\overline{A'C'}$ que possui mesma medida. Sabendo que o triângulo $A'B'C'$ é isósceles, aplicando a lei dos cossenos teremos

$$AC^2 = l^2 + l^2 - 2.l^2 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow AC = l\sqrt{3}$$

Como as diagonais de um losango são perpendiculares, se encontram nos pontos médios M de ambas e são bissetrizes dos ângulos internos (figura 20).

Figura 20- Um losango da cobertura dos alvéolos



Fonte: VAIANO, A. Z.; MÁRQUEZ, R. G.; ARAÚJO J. p. 6, 2015.

Logo,

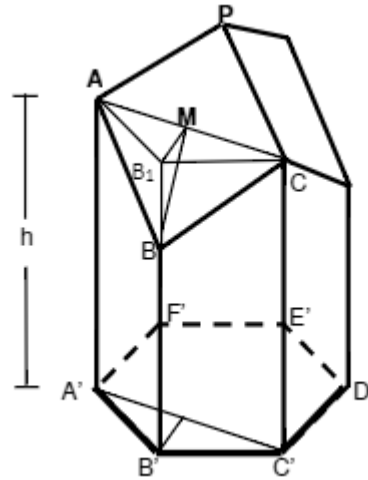
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\overline{PM}}{l\sqrt{3}/2} = \frac{2 \cdot \overline{PM}}{l\sqrt{3}} \Rightarrow 2 \cdot \overline{PM} = l\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

o que implica que a área (A_L) de cada losango é dada por

$$A_L = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{2 \cdot \overline{PM} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{3l^2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}.$$

O segundo cálculo consiste em determinar a área de cada trapézio (A_T) que compõe a área lateral do alvéolo. Para isso, devemos traçar o prolongamento do segmento $\overline{BB'}$ até o ponto B_1 de tal forma que o triângulo AB_1C esteja contido em um plano paralelo à base do alvéolo. Sendo assim, deduzimos que o triângulo BB_1M é retângulo em B_1 . Para encontrarmos a área de cada trapézio, devemos determinar a medida do segmento $\overline{BB_1}$. Vale ressaltar também que a altura h do alvéolo é a medida entre a base hexagonal e os vértices A e C .

Figura 21- Segmento $\overline{BB_1}$ e a altura do alvéolo



Fonte: VAIANO, A. Z.; MÁRQUEZ, R. G.; ARAÚJO J. p. 6, 2015.

Observando que a medida do segmento \overline{BM} equivale à medida do segmento \overline{PM} e que o segmento $\overline{B_1M}$ equivale à altura do triângulo $A'B'C'$ conforme mostra a figura 21, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BB_1M , obtém-se

$$BB_1^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow BB_1 = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}$$

Assim, a área (A_T) de cada trapézio é dada por

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{(\overline{BB'} + \overline{CC'}) \cdot \overline{B'C'}}{2} = \frac{l}{2} \cdot \left(h - \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1} + h \right) \cdot l \\ &= \frac{l}{2} \cdot \left(2h - \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1} \right) \end{aligned}$$

Logo, a área total do alvéolo em função de θ é dada por

$$A(\theta) = 3 \cdot A_L + 6 \cdot A_T = \frac{9l^2}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3l \left(2h - \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1} \right)$$

Portanto, para determinarmos o ângulo interno que minimiza a área total do alvéolo devemos derivar em relação a θ tal função e igualar a zero. Segue que

$$A'(\theta) = \frac{9l^2}{4} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}}\right] \quad (\text{Anexo I}).$$

Logo,

$$A'(\theta) = \frac{9l^2}{4} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}}\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sec\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

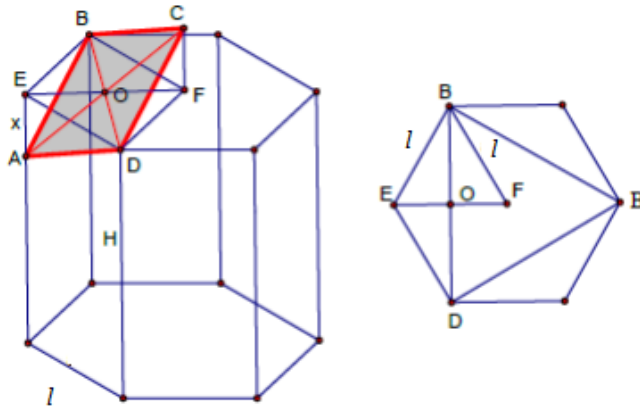
Entretanto, admitindo que o ângulo θ é agudo e φ seu suplemento, teremos $\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \theta = 2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Tal ponto é um ponto de mínimo, pois

$$A''\left(2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{81\sqrt{2}}{16} \cdot l^2 > 0. \quad (\text{Anexo II})$$

Portanto, o ângulo determinado é $\theta = 70,52878^\circ \approx 70^\circ 32'$, e consequentemente, $\varphi = 109^\circ 28'$.

Resolução 2 - Conforme a figura 22, fazendo uma seção transversal que passa pela diagonal \overline{BD} do hexágono regular superior gera-se um segmento \overline{AE} de altura x . Repetindo o mesmo processo para os outros dois losangos congruentes, o alvéolo de volume V e altura H , dependendo de x , que possui a menor área (sem contar a base hexagonal inferior) é aquele em que $x = \frac{l\sqrt{2}}{4}$ (l é a medida do lado de hexágono regular). Faremos essa demonstração para que possamos concluir que os dois ângulos internos do losango possuem mesmas medidas das apresentadas na resolução 1.

Figura 22 - Alvéolo sobreposto ao prisma hexagonal



Fonte: <https://www.ime.usp.br/caem/anais_mostra_2015/arquivos_auxiliares/oficinas/Oficina03_Elvia_Debora.pdf>

A área do losango ABCD é dada por $A_L = \frac{AC \cdot BD}{2}$. Da figura 22, tem-se que $EO = \frac{1}{2}$ e, pelo teorema de Pitágoras no triângulo AEO, tem-se $AO = \sqrt{x^2 + \frac{1^2}{4}}$. Como $AC = 2 \cdot AO$, tem-se $AC = 2 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1^2}{4}}$. Por outro lado, como $BD = 2 \cdot BO$ e BO é a medida da altura do triângulo equilátero BEF de lado l , tem-se que $BD = 2 \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = l\sqrt{3}$. Logo, $A_L = \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1^2}{4}} \cdot l\sqrt{3}}{2} = l\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1^2}{4}}$. Portanto, a área do alvéolo sem a base hexagonal é dada por $A(x) = 3 \cdot A_L + A_{LAT} - 6 \cdot A_{\Delta AEO}$, onde A_{LAT} é a área lateral do alvéolo e $A_{\Delta ADE}$ é a área do triângulo ADE (existem seis triângulos congruentes a esse que devemos retirar). Assim,

$$A(x) = 3l\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1^2}{4}} + 6 \cdot lh - 6 \cdot \frac{1 \cdot x}{2} = 3l\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{1^2}{4}} + 6 \cdot lh - 3 \cdot lx$$

Derivando essa função (Anexo III) e igualando a zero, tem-se que:

$$A'(x) = \frac{3l\sqrt{3} \cdot x}{\sqrt{x^2 + \frac{1^2}{4}}} - 3l = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{3}x = \sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}} \Rightarrow$$

$$3x^2 = x^2 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{l^2}{8} \Rightarrow$$

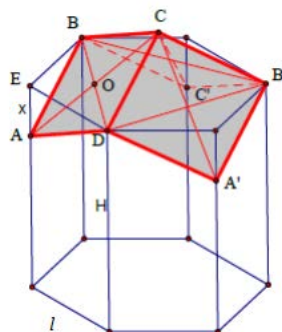
$$x = \frac{l\sqrt{2}}{4}$$

Fazendo a derivada segunda e aplicando $x = \frac{l\sqrt{2}}{4}$ na função, tem-se que $x = \frac{l\sqrt{2}}{4}$ minimiza a área (Anexo IV).

Como $AC = 2 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}}$, substituindo o valor de x , segue-se que $AC = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{6}}{2}$. No triângulo ADE, pelo teorema de Pitágoras, tem-se $AD = \sqrt{x^2 + l^2}$. Substituindo o valor de x , tem-se $AD = \sqrt{\left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right)^2 + l^2} = \frac{3l\sqrt{2}}{4}$. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ADC, vem que

$$\left(\frac{l\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3l\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3l\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3l\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot \cos \widehat{ADC} \Rightarrow \cos \widehat{ADC} = \frac{1}{3}.$$

Figura 23 – Dois losangos da cobertura do alvéolo

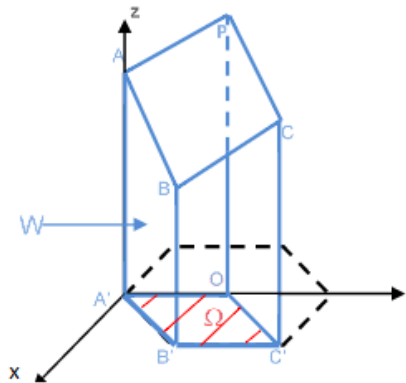


Como $\cos \widehat{ADC} = \frac{1}{3}$, então $\widehat{ADC} = \arccos \frac{1}{3} \approx 70^\circ 32'$. Portanto, os ângulos dos losangos medem $70^\circ 32'$ e $109^\circ 28'$ (suplemento).

2.2.2 O volume dos alvéolos das abelhas com ferrão

Nosso próximo objetivo consiste em demonstrar que o volume de cada alvéolo das abelhas com ferrão é numericamente igual ao volume de um prisma de base hexagonal. Para isso, devemos dividir cada alvéolo em três sólidos congruentes. Para um estudo auxiliado pela geometria analítica de cada alvéolo, devemos inseri-lo no \mathbb{R}^3 com a origem centrada no ponto A' (figura 24). Assim, as coordenadas dos pontos que compõem a base serão $A' = (0, 0, 0)$, $B' = \left(\frac{1\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ e $C' = \left(\frac{1\sqrt{3}}{2}, \frac{31}{2}, 0\right)$, conforme figura 24. Observemos ainda que a projeção ortogonal do ponto P no plano xy é o centro O do hexágono $A'B'C'D'E'F'$.

Figura 24- Parte do alvéolo sobreposto no plano tridimensional



Fonte: VAIANO, A. Z.; MÁRQUEZ, R. G.; ARAÚJO J. p. 7, 2015.

Conseqüentemente, os pontos que determinam o plano ABCP para fins de integração são:

$$A = (0, 0, h), B = \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}, \frac{l}{2}, h - \frac{l}{2} \sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1} \right), C = \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}, \frac{l}{2}, h \right)$$

Para simplificarmos a integração, chamaremos $w = \sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}$. Em seguida, iremos determinar a equação geral do plano ABCP, a partir dos parâmetros diretores da normal a esse plano. Os parâmetros diretores de \overline{AB} e \overline{BC} são, respectivamente, $\overline{AB} = B - A = \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}, \frac{l}{2}, -\frac{l}{2}w \right)$ e $\overline{BC} = C - B = \left(0, l, \frac{l}{2}w \right)$. Agora, devemos calcular os parâmetros diretores da normal pelo produto vetorial $\overline{AB} \times \overline{BC} = \left(\frac{3l^2}{4}w, -\frac{l^2\sqrt{3}}{4}w, \frac{l^2\sqrt{3}}{2} \right)$ (Anexo V). Assim, a equação geral do plano ABCP que passa pelo ponto $A = (0, 0, h)$ é dada por:

$$\frac{3l^2}{4}w(x - 0) - \frac{l^2\sqrt{3}}{4}w(y - 0) + \frac{l^2\sqrt{3}}{2}(z - h) = 0, \text{ ou seja, } z = h - \frac{\sqrt{3}}{2}wx + \frac{wy}{2}$$

Logo, o volume V_W da região W (figura 24) é dado por:

$$V_W = \iint_{\Omega} \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}wx + \frac{wy}{2} \right) dydx = \frac{l^2\sqrt{3}}{2}h \text{ (Anexo VI)}$$

Logo, o volume de cada alvéolo é $V = 3 \cdot V_W = \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2h$. Sabendo que o volume de um prisma de base hexagonal regular de altura h e aresta da base l é dado por $\frac{3\sqrt{3}}{2}l^2h$, conclui-se que o volume de cada alvéolo de uma abelha com ferrão é numericamente igual ao volume de um prisma de base hexagonal regular.

3 ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo apresentaremos algumas atividades que alunos do ensino médio podem realizar a fim de compreender melhor a matemática envolvida na construção dos alvéolos das abelhas. Algumas delas foram baseadas em uma oficina de matemática realizada na USP por duas professoras, Élvia Mureb Sallun e Deborah Martins Rafael. Para estas desenvolvem-se novas soluções possíveis de serem elaboradas por alunos interessados na temática. Para tal, o leitor é convidado a demonstrar todas as afirmações antes de ler as justificativas aqui apresentadas. Antes de apresentarmos as atividades, vamos expor os objetivos, o tempo de duração, o material que pode ser utilizado e o segmento escolar em que será aplicada cada atividade.

Atividade 1

Objetivo: Apresentar ao aluno quais polígonos regulares podem ser utilizados para preencher um plano seguindo algumas condições iniciais. Esse procedimento é chamado de ladrilhamento. Para atingir esse objetivo, sugere-se ao professor expor uma aula sobre ângulos internos dos polígonos regulares.

Série destinada: 1º ano do ensino médio.

Tempo de duração: 50 minutos.

Material utilizado: Quadro branco e caneta pilot.

Atividade 2

Objetivo: Apresentar ao aluno qual polígono regular (de 3 lados, 4 lados ou 6 lados) possui menor perímetro uma vez que sua área é fixada. Para atingir esse objetivo, sugere-se ao professor expor uma aula sobre áreas dos principais polígonos regulares.

Série destinada: 1º ano do ensino médio.

Tempo de duração: 50 minutos.

Material utilizado: Quadro branco e caneta pilot.

Atividade 3

Objetivo: Apresentar ao aluno qual prisma regular reto (base de 3 lados, 4 lados ou 6 lados) possui menor área lateral fixado o volume e sua altura.

Série destinada: 2º ano do ensino médio.

Tempo de duração: 50 minutos

Material utilizado: Quadro branco e caneta pilot.

Atividade 4

Objetivo: Apresentar ao aluno a demonstração de uma afirmação utilizada nessa dissertação sobre os ângulos dos losangos utilizados na cobertura dos alvéolos de uma abelha. Para atingir esse objetivo, sugere-se ao professor expor uma aula sobre trigonometria.

Série destinada: 2º ano do ensino médio.

Tempo de duração: 50 minutos.

Material utilizado: Quadro branco e caneta pilot.

Atividade 5

Objetivo: Apresentar ao aluno a demonstração de uma afirmação curiosa envolvendo o ângulo agudo do losango utilizado na cobertura do alvéolo de uma abelha com o ângulo formado entre as diagonais de um cubo. Para atingir esse objetivo, sugere-se ao professor expor uma aula sobre prismas.

Série destinada: 2º ano do ensino médio.

Tempo de duração: 50 minutos.

Material utilizado: Quadro branco, caneta pilot e calculadora científica.

Atividade 6

Objetivo: Apresentar ao aluno a demonstração de uma afirmação curiosa envolvendo os ângulos do losango utilizado na cobertura do alvéolo de uma abelha com o ângulo formado pela mediana relativa à hipotenusa e a hipotenusa de um triângulo retângulo encontrado no conhecido dispositivo de Teodoro. Para atingir esse objetivo, sugere-se ao professor expor uma aula sobre triângulos retângulos.

Série destinada: 1º ano do ensino médio.

Tempo de duração: 50 minutos.

Material utilizado: Quadro branco, caneta pilot e calculadora científica.

3.1 Atividade 1

O ladrilhamento de um plano com polígonos regulares congruentes, de modo que a intersecção de dois polígonos é sempre um lado ou um vértice, é possível, se e somente se, os polígonos forem triângulos equiláteros ou quadrados ou hexágonos. Justifique a afirmação acima citada.

Resolução: Deve-se demonstrar que o ladrilhamento seguindo as restrições acima é possível de ser feito quando tem-se grupos de:

- a) 6 triângulos equiláteros ou
- b) 4 quadrados ou
- c) 3 hexágonos regulares

Sabe-se que um polígono regular de n lados possuem ângulos internos (a_i) medindo $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$. Assim, para existir ladrilhamento regular com m polígonos regulares com n lados ao redor de um vértice, deve-se ter

$$m \cdot \frac{180^\circ(n-2)}{n} = 360^\circ \Rightarrow (*)$$

$$m = \frac{2n}{n-2} \Rightarrow$$

$$m = \frac{2n-4+4}{n-2} \Rightarrow$$

$$m = \frac{2(n-2)+4}{n-2} \Rightarrow$$

$$m = 2 + \frac{4}{n-2}$$

Como m é inteiro, então $n-2$ é um divisor de 4 e as únicas possibilidades são:

Se $n = 3$, então $m = 6$ (Triângulos equiláteros)

Se $n = 4$, então $m = 4$ (Quadrados)

Se $n = 6$, então $m = 3$ (Hexágonos regulares)

OBS: No passo (*) a divisão por $n-2$ é possível pois não existe um polígono de 2 lados.

3.2 Atividade 2

Fixada a área de um polígono regular de três, quatro ou seis lados, o polígono de menor perímetro é o hexágono regular. Justifique a afirmação acima citada.

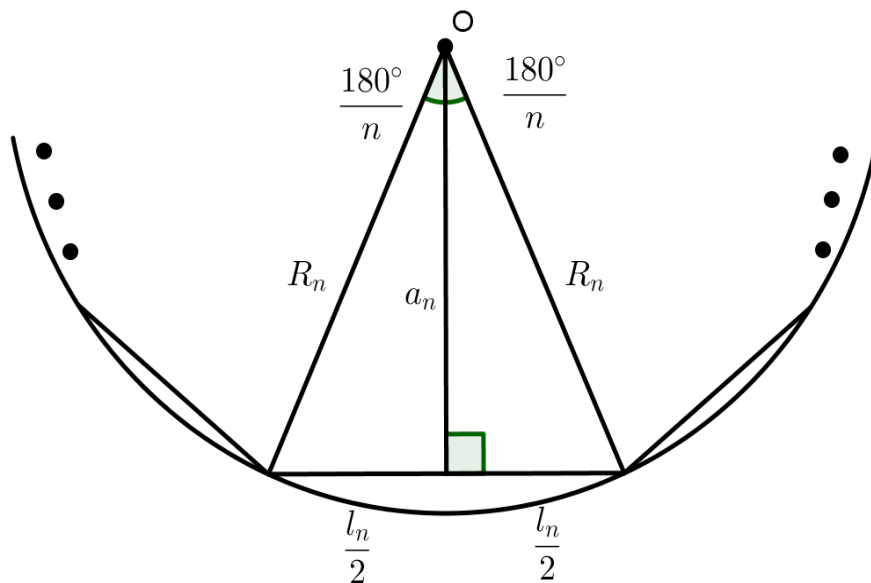
Resolução 1:

Sabendo que a área (A_n) de todo polígono regular é dada pelo produto do seu semiperímetro (P_n) e seu apótema (a_n), temos:

$$A_n = P_n \cdot a_n \Rightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{P_n}{A_n} \quad (I)$$

Da geometria dos polígonos regulares, temos:

Figura 25 – Polígonos Regulares



Fonte: Autor, 2017.

Assim,

$$a_n = R_n \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \quad (II) \text{ e } \frac{l_n}{2} = R_n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \quad (III)$$

Da equação (III), temos:

$$P_n = \frac{n \cdot l_n}{2} = n \cdot R_n \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

Da figura 25, temos que a área (A_n) do polígono regular é dada por:

$$A_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot R_n \cdot R_n \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right) = \frac{n}{2} \cdot R_n^2 \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right)$$

Como a área dos três polígonos regulares é fixa, temos:

$$\begin{aligned} A_3 = A_4 = A_6 = A &\Rightarrow \frac{3}{2} \cdot R_3^2 \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{3} \right) = \frac{4}{2} \cdot R_4^2 \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{4} \right) = \frac{6}{2} \cdot R_6^2 \cdot \text{sen} \left(\frac{360^\circ}{6} \right) \\ &\Rightarrow 3 \cdot R_3^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \cdot R_4^2 \cdot 1 = 6 \cdot R_6^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} R_3^2 = 2R_6^2 \\ R_4^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot R_6^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Da equação (II), temos:

$$a_n^2 = R_n^2 \cdot \cos^2 \left(\frac{180^\circ}{n} \right) \Rightarrow \begin{cases} a_3^2 = R_3^2 \cdot \cos^2 60^\circ = R_3^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot 2R_6^2 = \frac{1}{2} \cdot R_6^2 \\ a_4^2 = R_4^2 \cdot \cos^2 45^\circ = R_4^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot R_6^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot R_6^2 \\ a_6^2 = R_6^2 \cdot \cos^2 30^\circ = R_6^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot R_6^2 \end{cases}$$

Das três equações, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_3^2} &= \frac{2}{R_3^2} \\ \frac{1}{a_4^2} &= \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{R_4^2} \\ \frac{1}{a_6^2} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{R_6^2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{a_6^2} < \frac{1}{a_4^2} < \frac{1}{a_3^2} \Rightarrow \frac{1}{a_6} < \frac{1}{a_4} < \frac{1}{a_3}$$

Da equação (I), temos:

$$\frac{P_6}{A_6} < \frac{P_4}{A_4} < \frac{P_3}{A_3}$$

Contudo, como a área é fixa, temos

$$\frac{P_6}{A} < \frac{P_4}{A} < \frac{P_3}{A} \Rightarrow P_6 < P_4 < P_3$$

Resolução 2:

Seja L_n o lado do polígono regular de n lados de área da base $A_n = A$. Tem-se

$$A_3 = A = \frac{L_3^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow L_3 = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3}} \Rightarrow 2p = \frac{6\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3}}$$

$$A_4 = A = L_4^2 \Rightarrow L_4 = \sqrt{A} \Rightarrow 2p = 4\sqrt{A}$$

$$A_6 = A = \frac{3L_6^2 \sqrt{3}}{2} \Rightarrow L_6 = \frac{\sqrt{2A\sqrt{3}}}{3} \Rightarrow 2p = 2\sqrt{2A\sqrt{3}}$$

Como $2\sqrt{2\sqrt{3}} < 4 < \frac{6}{\sqrt[4]{3}}$ (para demonstrar a validade dessa dupla desigualdade basta que se elevem os membros à quarta potência), segue que o hexágono regular é o polígono regular de menor perímetro.

3.3 Atividade 3

Dentre todos os prismas retos de base regular com três, quatro ou seis lados, fixado o volume V e a altura H , o de menor área lateral é o prisma hexagonal. Justifique a afirmação acima citada.

Resolução 1:

Como o volume V e altura H são fixos, a área da base é fixa. Por outro lado, a área lateral de um prisma reto é dada pelo produto do perímetro pela altura. Portanto, o prisma de menor área lateral será o prisma de menor perímetro. Segue da atividade 2 que o prisma regular de base hexagonal possui menor área lateral.

Resolução 2:

Seja V o volume, H a altura e L_n o lado do polígono regular da base do prisma. Tem-se

$$V = \frac{L_3^2 \sqrt{3}}{4} H \Rightarrow L_3 = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{\frac{V}{H}} \Rightarrow 2p = \frac{6}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{\frac{V}{H}}$$

$$V = L_4^2 H \Rightarrow L_4 = \sqrt{\frac{V}{H}} \Rightarrow 2p = 4 \sqrt{\frac{V}{H}}$$

$$V = \frac{3L_6^2\sqrt{3}}{2}H \Rightarrow L_6 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2V\sqrt{3}}{H}} \Rightarrow 2p = 2\sqrt{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{V}{H}}$$

Como a área lateral é dada por $A_L = 2p \cdot H$, então:

$$A_{L3} = \frac{6H}{\sqrt[4]{3}} \sqrt{\frac{V}{H}}$$

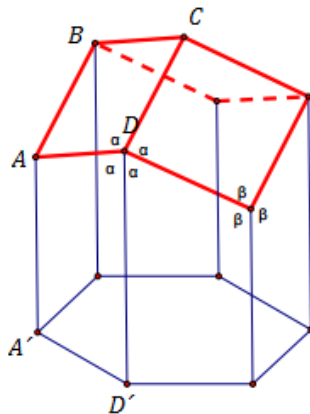
$$A_{L4} = 4H \cdot \sqrt{\frac{V}{H}}$$

$$A_{L6} = 2H\sqrt{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{V}{H}}$$

Como $2\sqrt{2\sqrt{3}} < 4 < \frac{6}{\sqrt[4]{3}}$, segue que o prisma de menor área lateral é o prisma hexagonal regular.

3.4 Atividade 4

Para a figura abaixo, demonstre que os ângulos \widehat{ADC} e $\widehat{ADD'}$ são congruentes.

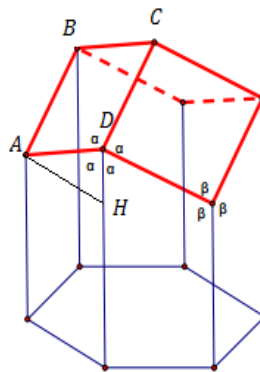


Resolução:

Para demonstração dessa atividade, é necessário o conhecimento prévio que o segmento $\overline{AD} = \frac{3l\sqrt{2}}{4}$ e que o segmento $\overline{BB_1}$ referente à seção 2.2.1 dessa

dissertação (figura abaixo) mede $\frac{l\sqrt{2}}{4}$. Conforme a figura 25, traçando o segmento AH paralelo à aresta da base do alvéolo, tem-se no triângulo retângulo ADH.

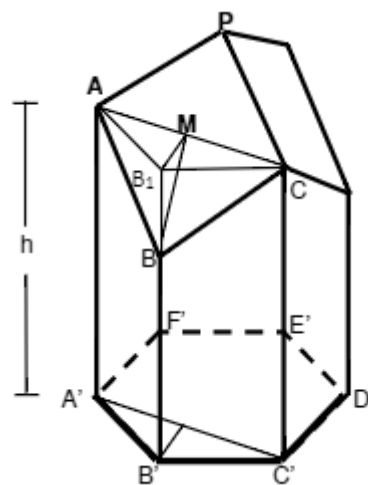
Figura 26 – Figura da atividade 4



Fonte: Adaptada de

<https://www.ime.usp.br/caem/anais_mostra_2015/arquivos_auxiliares/oficinas/Oficina03_Elvia_Debora.pdf>.

Figura 27 – Segmento $\overline{BB_1}$ e a altura do alvéolo



Fonte: VAIANO, A. Z.; MÁRQUEZ, R. G.; ARAÚJO J. p. 6, 2015.

$$\cos \widehat{ADH} = \frac{x}{AD} = \frac{\frac{l\sqrt{2}}{4}}{\frac{3l\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}$$

Como $\cos \widehat{ADC} = \cos \widehat{ADH}$ e os triângulos são acutângulos (síntese de Clairaut, anexo VII), então $\widehat{ADC} = \widehat{ADH}$.

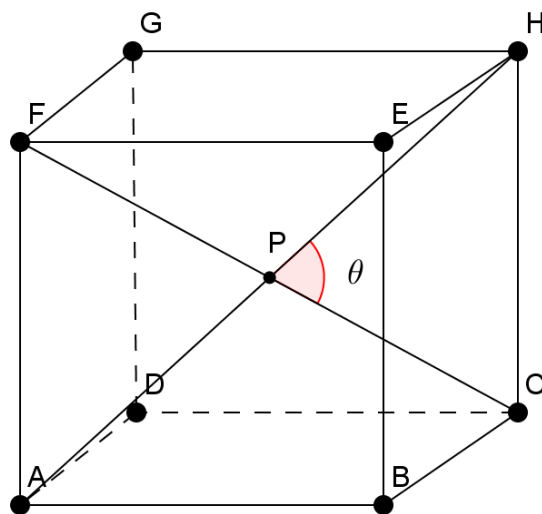
3.5 Atividade 5

Demonstre que o ângulo agudo formado entre as diagonais de um cubo tem mesma medida do ângulo agudo do losango do alvéolo, denominado de ângulo da cobertura rômbica.

Resolução:

Considere um cubo de aresta a e um ângulo θ formado pelas diagonais desse cubo conforme ilustrado na figura abaixo. Devemos demonstrar que $\theta = 70^\circ 32'$.

Figura 28 – Figura da atividade 5



Fonte: Autor, 2017.

Da figura 27, tem-se $PC = PH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Inicialmente, devemos demonstrar que o triângulo PCH é acutângulo. De fato, pela síntese de Clairaut (anexo VII), tem-se

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{2} > a^2$$

Pela lei dos cossenos nesse mesmo triângulo PCH , tem-se

$$a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \cos\theta$$

$$a^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{2} \cdot \cos\theta$$

$$a^2 = \frac{3a^2}{2} - \frac{3a^2}{2} \cdot \cos\theta$$

$$a^2 = \frac{3a^2}{2} \cdot (1 - \cos\theta)$$

$$1 - \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{3}$$

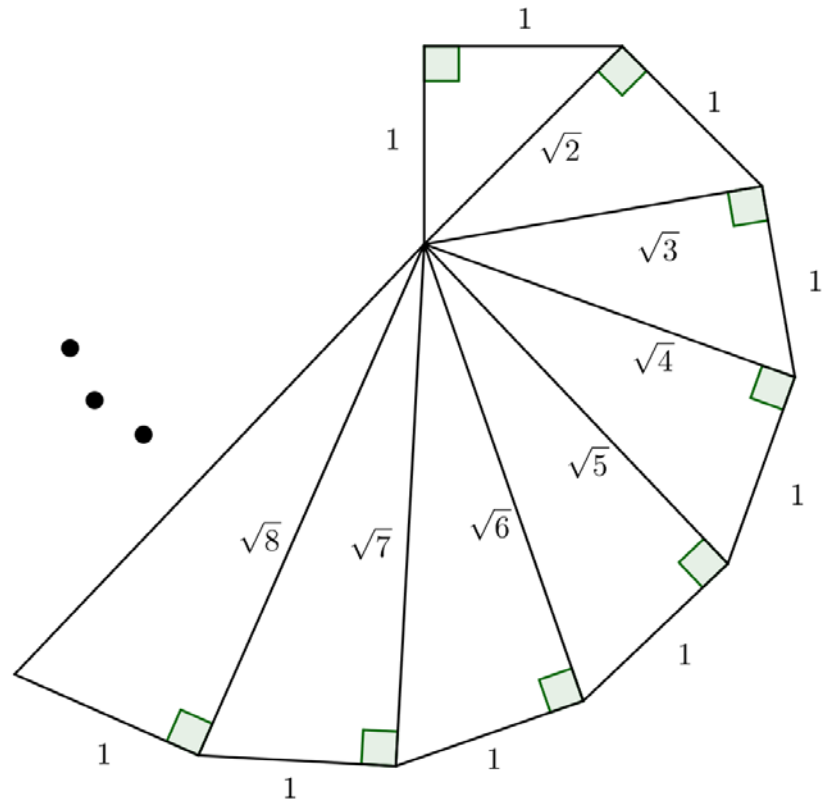
$$\theta = \arccos\frac{1}{3} \cong 70^\circ 32'$$

3.6 Atividade 6

Demonstre que os ângulos formados pela mediana relativa à hipotenusa e a hipotenusa do segundo triângulo retângulo do dispositivo de Teodoro são os ângulos que as abelhas utilizam para minimizar o trabalho na construção de seus alvéolos.

Dado: O dispositivo de Teodoro é um método de construção geométrica utilizando triângulos retângulos sobrepostos para obter raízes quadradas dos números naturais a partir de 2, conforme ilustra a figura 28.

Figura 29 - Dispositivo de Teodoro

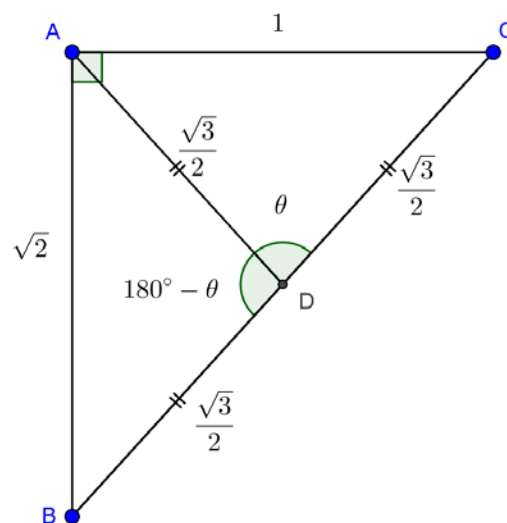


Fonte: Autor, 2017

Resolução 1:

O segundo triângulo retângulo do referido dispositivo de Teodoro será denotado por ABC , conforme a figura 29.

Figura 30 – Figura da atividade 6 justificativa 1



Fonte: Autor, 2017.

Sabendo que a mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa, traçando-a e aplicando a lei dos cossenos no triângulo ACD , tem-se

$$1^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \cos\theta$$

$$1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \cdot \cos\theta$$

$$1 = \frac{3}{2} \cdot (1 - \cos\theta)$$

$$1 - \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{3}$$

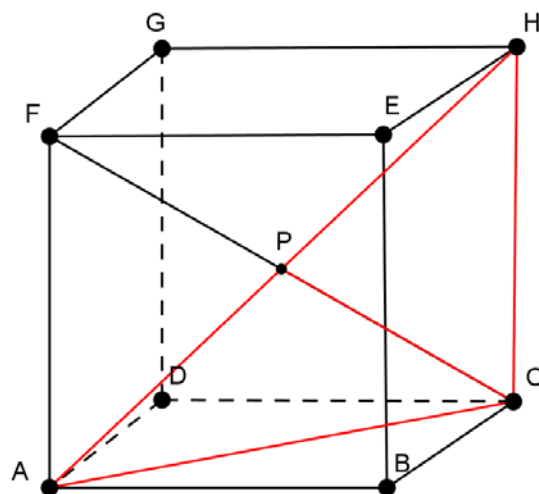
$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \cong 70^\circ 32'$$

Logo, os dois ângulos assim formados são $70^\circ 32'$ e $109^\circ 28'$.

Resolução 2:

Do cubo fixado da atividade 5, tem-se que o triângulo retângulo ACH destacado em vermelho (figura 30) é semelhante ao segundo triângulo retângulo do dispositivo de Teodoro.

Figura 31 – Figura da atividade 6 justificativa 2



$$\overline{CH} = a$$

$$\overline{AC} = a\sqrt{2}$$

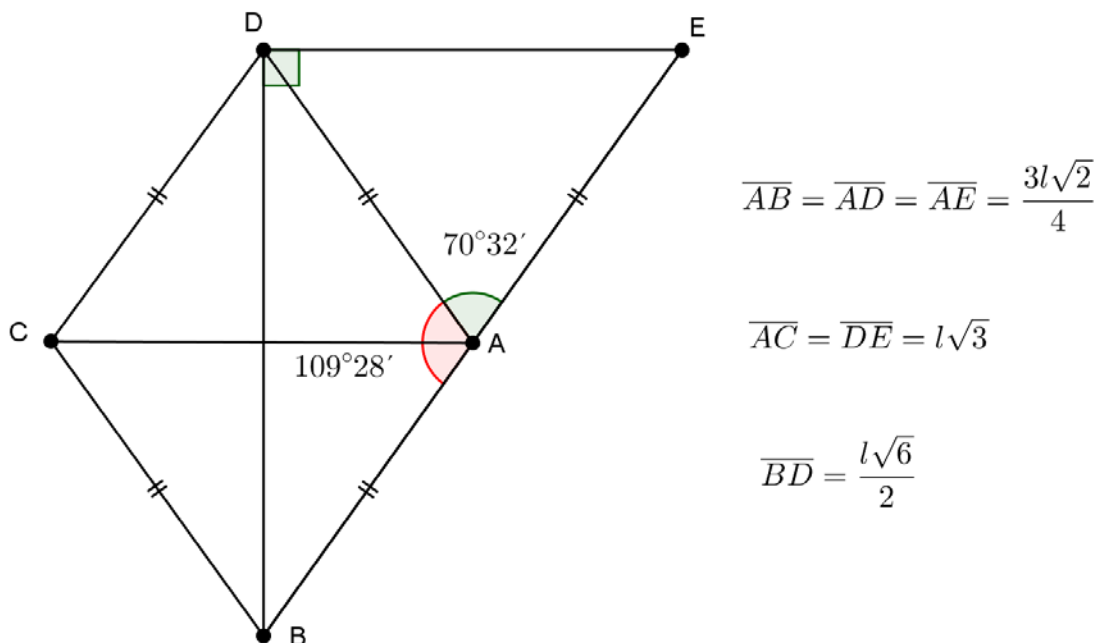
$$\overline{AH} = a\sqrt{3}$$

Como CH é a aresta do cubo, tem-se $CH = a$. Como AC é a diagonal do quadrado $ABCD$ de lado a , tem-se $AC = a\sqrt{2}$. Como AH é a diagonal do cubo de aresta a , tem-se $AH = a\sqrt{3}$.

Resolução 3:

Aproveitando um dos três losangos da cobertura rômbrica dos alvéolos das abelhas, pode-se construir um triângulo retângulo semelhante ao segundo triângulo retângulo citado no dispositivo de Teodoro. Na figura 31, translada-se o triângulo ABC até a posição do triângulo ADE . Assim, obtém-se o triângulo retângulo BDE cujos ângulos formados pela mediana \overline{AD} medem $70,32^\circ$ e $109,28^\circ$. As medidas dos lados dos losangos e de suas diagonais já foram obtidas na segunda resolução do tópico 2.3 dessa dissertação.

Figura 32 – Figura da atividade 6 justificativa 3



Fonte: Autor, 2017.

O triângulo retângulo BDE acima é semelhante ao segundo triângulo retângulo do dispositivo de Teodoro. De fato, atribuindo $a = \frac{l\sqrt{6}}{2}$, ou seja, $l = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tem-se

$$\overline{BD} = a$$

$$\overline{AC} = l\sqrt{3} = \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)\sqrt{3} = a\sqrt{2}$$

$$\overline{BE} = 2 \cdot \left(\frac{3l\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{3l\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)}{2} = a\sqrt{3}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação pudemos constatar que as abelhas possuem características típicas da matemática instintiva e natural, elas conseguem minimizar a quantidade de material (cera) utilizando o maior volume possível de mel com a construção de alvéolos em formato de prismas de base hexagonal com três losangos congruentes constituindo a chamada cobertura rômica. Para essa construção as abelhas, instintivamente ao longo de sua evolução, encontraram os melhores ângulos internos dessa cobertura rômica para que os alvéolos pudessem apresentar essa importante característica. Atualmente, com a matemática formal e abstrata que nós, seres humanos, temos como ferramenta, pudemos perceber que o cálculo diferencial e integral, conteúdo ensinado somente no ensino superior, é a melhor ferramenta que explica toda essa beleza arquitetônica que as abelhas utilizam.

Assim, pudemos apresentar não somente a matemática abstrata típica de trabalhos acadêmicos, como também a matemática natural, chamada assim por um dos mais importantes divulgadores da matemática, Keith Devlin, já citado anteriormente. Segundo ele, ambas constituem elementos de compreensão da maioria das pessoas ao ouvirem a palavra matemática. A diferença está na execução da matemática.

A distinção reside na forma como é executada. A matemática abstrata é simbólica e baseada em regras. Para lidar com ela você precisa aprender o que os símbolos representam e como seguir as regras. Isso não significa que não haja criatividade na matemática rigorosa. As regras simplesmente estabelecem a estrutura dentro da qual o matemático deve trabalhar. Além do mais, a própria formulação das regras é frequentemente um ato altamente criativo. Já a matemática natural surge naturalmente. (DEVLIN, p.243, 2009)

Pelo processo evolutivo da seleção natural, ideia atribuída a Charles Darwin, a natureza desenvolveu criaturas dotadas de habilidades específicas para realizarem os cálculos da matemática natural, não somente para a locomoção, como também para a captação de suas presas, para a percepção do tamanho de um

conjunto de objetos e até mesmo para possuírem noções tridimensionais, como, no exemplo já muito mencionado nesta dissertação, das abelhas em suas construções.

Em relação à evolução humana, Devlin afirma que nossos antepassados também adquiriram outra capacidade de desenvolvimento da matemática abstrata. Em vez de nós seres humanos ficarmos limitados a um pequeno número de truques matemáticos inatos específicos, mas de uma utilidade restrita, aproveitamos essa capacidade adicional de desenvolver métodos multifuncionais para a resolução de diversos problemas distintos. Devlin em seu livro *O Gene da Matemática* sustenta a argumentação de que a matemática abstrata foi desenvolvida pelo homem moderno, *Homo sapiens*, somente porque o mesmo adquiriu a linguagem (habilidade linguística).

A capacidade para a matemática abstrata resultou de um casamento da linguagem com as aptidões matemáticas inatas e instintivas que todos os seres humanos têm, muitas das quais compartilhamos com outras criaturas. Podemos expressar isso por meio de uma fórmula simples: capacidade matemática natural inata + capacidade linguística → capacidade para a matemática abstrata. (DEVLIN, 2008)

Conforme comentado nessa dissertação mediante um, dentre vários outros exemplos, os seres humanos não são os únicos que nascem com algumas capacidades inatas (instinto matemático). Algumas espécies parecem capazes de adquirir aptidões mediante um processo de treinamento repetitivo, mas essas habilidades são bastante limitadas. Nós, seres humanos, nascemos com uma capacidade verdadeiramente inigualável de alcançarmos uma quantidade gigantesca de novas habilidades. Certamente, fazer uso desse dom precioso é algo que você deve a si, caso seja ateu, ou deve a Deus caso seja deísta.

É mister ressaltar que essa dissertação apresenta diversas atividades pedagógicas que possibilitam ao professor envolver a matemática com outras disciplinas. A transdisciplinaridade aqui abordada é um conceito pedagógico que permite uma comunicação entre as diversas disciplinas, sempre utilizando um tema comum, chamado de tema transversal. A transdisciplinaridade confronta a segmentação do conhecimento nas diversas disciplinas escolares, pois apesar de cada uma guardar sua especificidade, passa a se evidenciar um diálogo constante

entres elas, o que possibilita inclusive o surgimento de novos campos do saber. O matemático Ubiratan D'Ambrosio afirma que

O essencial na transdisciplinaridade reside na postura de reconhecimento de que não há espaço nem tempo culturais privilegiados que permitam julgar e hierarquizar como mais corretos. A transdisciplinaridade repousa sobre uma atitude mais aberta, de respeito mútuo e mesmo de humildade em relação a mitos, religiões, sistemas de explicação e de conhecimentos, rejeitando qualquer tipo de arrogância e competência. (D'AMBROSIO, 1997)

Ainda em seu livro, ele continua afirmando que a transdisciplinaridade possibilita até mesmo a busca de uma convivência harmoniosa com a natureza. Essa consciência ambiental é exatamente o objetivo geral que esse trabalho tenta alcançar no ambiente escolar. A importância das abelhas para o desenvolvimento sustentável e para o equilíbrio ecológico é um fato incontestável que permeia toda essa dissertação.

REFERÊNCIAS

ANDOW, D. A. **Spread of Invading Organisms: Patterns of Spread. Landscape Ecology**, v.4. p.177-188.1993.

APACAME. **Importância das Abelhas**. Disponível em: <http://apacame.org.br/site/>. Acesso em 10/05/2016.

APIS GUIA. **Nome Científico de abelhas**. Disponível em: http://www.apisguia.com.br/?pagina=abelha_lsg&id=29. Acesso em 02/07/2016.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 3. ed., 127 p., 2003.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Produção da Pecuária Municipal**. v.43. Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: http://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/84/ppm_2015_v43_br.pdf. Acesso em 30/01/2017.

BUENO, J. **Sistema automatizado de classificação de abelhas baseado em reconhecimento de padrões**. In: Tese de doutorado em engenharia, USP. São Paulo, 2010.

CALEBANTE. **As abelhas sabem Cálculo Diferencial**. Disponível em: <http://calebante.blogspot.com.br/2012/02/abelhas-sabem-calculo-diferencial.html>. Acesso em 02/07/2016.

CAMPOS, L. A., PERUQUETTI, R. C. **Apiário Central – UFV**. Disponível em: www.apario.ufv.br. Acesso em 03/07/2016.

CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. **Ladrilhamentos**. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2015/10/monografia2.pdf>. Acesso em 04/12/2016.

D'AMBROSIO, U. **Transdisciplinaridade**. 3. ed. São Paulo: Palas Athena, 1997.

DEVLIN, K. **O gene da matemática**. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

_____. **O instinto matemático: Por que você é um gênio da matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 2009.

EMBRAPA. **Produção de Mel. Introdução e Histórico**. I2012. Disponível em: <http://sistemasdeproducao.cnptia.embrapa.br/FontesHTML/Mel/SPMel/historico2.ht>. Acesso em 03/07/2016.

FRANCISCO, Carta enc. **Laudato Sí**. Libreria Editricie Vaticana, 2015.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**, 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GLOBO CIÊNCIA. **‘Quero Saber’: qual é a importância das abelhas para o meio ambiente?**

Disponível em: <http://redeglobo.globo.com/globociencia/quero-saber/noticia/2013/10/quero-saber-qual-e-importancia-das-abelhas-para-o-meio-ambiente.html>. Acesso em 19/05/2016.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**, volume 1, 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

HALES, T. C. **The Honeycomb Conjecture. Discrete & Computational Geometry**, vol. 25, Vp. 1-22, 2001.

INFOESCOLA. **Abelha**.

Disponível em: <http://www.infoescola.com/insetos/abelha/> Acesso em 5/12/2016.

LOPES, S. **Bio**. 3. ed. 2 vol. Rio de Janeiro: Saraiva, 1998.

MESSAGE, D.; GONÇALVES, L. S. **Estudo da resistência comportamental à cria pútrida europeia em Apis melífera adansonii (africanizadas)**. In: IV Congresso Brasileiro de Apicultura, Curitiba. Anais. 1976. p.185-195.

MESSAGE, D.; TEIXEIRA E. W.; DE JONG, D. **Situação da sanidade das abelhas no Brasil**. In: Imperatriz-Fonseca et al, Polinizadores no Brasil: Contribuição e perspectivas para a biodiversidade, uso sustentável, conservação e serviços ambientais. São Paulo, EDUSP. 2012.

MERCADANTE, C. **Biologia**. 1. ed. vol. único Rio de Janeiro: Moderna, 1999.

MORGAN, F. **The Hexagonal Honeycomb Conjecture**. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 351, pp. 1753-1763, 1999.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SARAIVA, J. C. **A Matemática das abelhas**. In: Revista Eureka!, nº6, p 18-22. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática SBM, 1999.

TAHAN, M. **As maravilhas da matemática**. 6. Ed. Rio de Janeiro: Block Editores, 1987.

THOMPSON, D. W. **On Growth and Form**, Cambridge University Press, 1917.

TÓTH, L. F. **What The Bees Know and What They Do Not Know**. In: Bulletin of the AMS, vol 70, pp.468-481, 1964.

UFF. Abelhas e hexágonos.

Disponível em: .

<http://www.uff.br/sintoniamatematica/matematicaenatureza/matematicaenatureza-html/audio-abelhas-br.html>. Acesso em 21/11/2016.

USP. As abelhas conhecem geometria?

Disponível em:

https://www.ime.usp.br/caem/anais_mostra_2015/arquivos_auxiliares/oficinas/Oficina_03_Elvia_Debora.pdf. Acesso em 22/11/2016.

VAIANO, A. Z.; MÁRQUEZ, R. G.; ARAÚJO J. **Abelhas africanizadas e construções geométricas**. In: Congresso Scientiarum Historia VIII (In)certezas e (In)completudes, 9 p. Rio de Janeiro, 2015.

ANEXO A – A derivada primeira da função área total.

Como

$$A(\theta) = \frac{9l^2}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3l \left(2h - \frac{l}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1} \right)$$

Segue:

$$A'(\theta) = \frac{9l^2}{2} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + 3l \left(-\frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$A'(\theta) = \frac{9l^2}{4} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3l \left[\frac{-3l \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4 \cdot \sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}} \right]$$

$$A'(\theta) = \frac{9l^2}{4} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{9l^2}{4} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}} \right]$$

Assim:

$$A'(\theta) = \frac{9l^2}{4} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}} \right]$$

ANEXO B – A derivada segunda da função área total no ponto é positiva.

Como vimos no anexo I, temos:

$$A'(\theta) = \frac{9l^2}{4} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}} \right]$$

Segue:

$$A''(\theta) = \frac{9l^2}{4} \cdot \left[2 \sec\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sec\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}} \right) + \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(- \frac{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1} - \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{1}{2 \sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1} \right) \right]$$

$$A''(\theta) = \frac{9l^2}{4} \cdot \left[\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}} \right) - \frac{1}{2} \cdot \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1} - \frac{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{3 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1}} \right) \right]$$

Como $\theta = 2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$ e $\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Assim:

$$A'' \left(2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = \frac{9l^2}{4} \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3 \cdot \frac{1}{2} - 1}} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{1}{2} - 1} - \frac{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\sqrt{3 \cdot \frac{1}{2} - 1}}}{3 \cdot \frac{1}{2} - 1} \right) \right]$$

$$A'' \left(2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = \frac{9l^2}{4} \cdot \left[0 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{9\sqrt{2}}{4} \right) \right]$$

$$A'' \left(2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = \frac{9l^2}{4} \cdot \left[-\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

$$A'' \left(2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = \frac{9l^2}{4} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{81\sqrt{2}}{16} \cdot l^2 > 0$$

ANEXO C – A derivada primeira da função área total.

Como:

$$A(x) = 3l\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}} + 6 \cdot lh - 3 \cdot lx$$

Segue:

$$A'(x) = 3l\sqrt{3} \cdot \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}}} - 3l$$

$$A'(x) = \frac{3l\sqrt{3} \cdot x}{\sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}}} - 3l$$

ANEXO D – A derivada segunda da função área total no ponto é positiva.

Como vimos no anexo IV, temos:

$$A'(x) = \frac{3l\sqrt{3} \cdot x}{\sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}}} - 3l$$

Segue que:

$$A''(x) = 3l\sqrt{3} \cdot \left[\frac{1 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}}}}{\left(\sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}}\right)^2} \right]$$

$$A''(x) = 3l\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}}}}{x^2 + \frac{l^2}{4}} \right)$$

Como $x = \frac{l\sqrt{2}}{4}$, então $x^2 = \frac{l^2}{8}$. Assim:

$$A''\left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right) = 3l\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{l^2}{8} + \frac{l^2}{4}} - \frac{\frac{l^2}{8}}{\sqrt{\frac{l^2}{8} + \frac{l^2}{4}}}}{\frac{l^2}{8} + \frac{l^2}{4}} \right)$$

$$A''\left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right) = 3l\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{3l^2}{8}} - \frac{\frac{l^2}{8}}{\sqrt{\frac{3l^2}{8}}}}{\frac{3l^2}{8}} \right)$$

$$A''\left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right) = 3l\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\frac{l\sqrt{6}}{4} - \frac{l^2}{8}}{\frac{3l^2}{8}} \right)$$

$$A''\left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right) = 3l\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\frac{l\sqrt{6}}{4} - \frac{l\sqrt{6}}{12}}{\frac{3l^2}{8}} \right)$$

$$A''\left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right) = 3l\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\frac{l\sqrt{6}}{6}}{\frac{3l^2}{8}} \right)$$

$$A''\left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right) = 3l\sqrt{3} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{9l} = 4\sqrt{2} > 0$$

ANEXO E – O produto vetorial pelo teorema de Laplace.

Como $\overrightarrow{AB} = B - A = \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}, \frac{l}{2}, -\frac{l}{2}w\right)$ e $\overrightarrow{BC} = C - B = \left(0, l, \frac{l}{2}w\right)$, temos que:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{l\sqrt{3}}{2} & \frac{l}{2} & -\frac{l}{2}w \\ 0 & l & \frac{l}{2}w \end{vmatrix} = \left(\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}w - \left(-\frac{l}{2}w \cdot l\right)\right) \cdot \vec{i} - \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{l}{2}w\right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{l}{2}\right) \cdot \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \left(\frac{l^2}{4}w + \frac{l^2}{2}w\right) \cdot \vec{i} + \left(-\frac{l^2\sqrt{3}}{4}w\right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \vec{k}$$

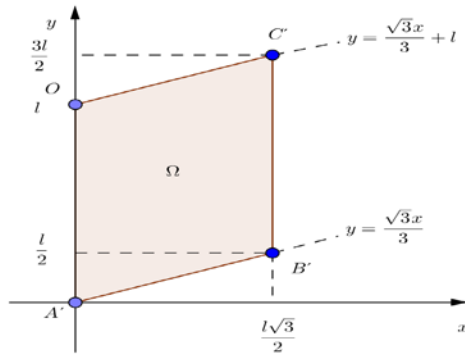
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \left(\frac{3l^2}{4}w\right) \cdot \vec{i} + \left(-\frac{l^2\sqrt{3}}{4}w\right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \vec{k}$$

Assim:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \left(\frac{3l^2}{4}w, -\frac{l^2\sqrt{3}}{4}w, \frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

ANEXO F - Integração dupla na região Ω .

Segue a região Ω na figura abaixo.



Logo:

$$\begin{aligned}
 V_W &= \iint_{\Omega} \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2} wx + \frac{wy}{2} \right) dy dx = \int_0^{\frac{l\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{\sqrt{3}x}{3}}^{\frac{\sqrt{3}x}{3}+l} \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2} wx + \frac{wy}{2} \right) dy dx \\
 &= \int_0^{\frac{l\sqrt{3}}{2}} \left[hy - \frac{\sqrt{3}}{2} wxy + \frac{wy^2}{4} \right]_{\frac{\sqrt{3}x}{3}}^{\frac{\sqrt{3}x}{3}+l} dx \\
 &= \int_0^{\frac{l\sqrt{3}}{2}} \left[\frac{h\sqrt{3}x}{3} + hl - \frac{wx^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} wxl + \frac{w}{4} \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2\sqrt{3}lx}{3} + l^2 \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} hx \right. \\
 &\quad \left. + \frac{wx^2}{2} - \frac{w}{4} \left(\frac{x^2}{3} \right) \right] dx \\
 &= \int_0^{\frac{l\sqrt{3}}{2}} \left[hl - \frac{\sqrt{3}}{2} wlx + \frac{wx^2}{12} + \frac{\sqrt{3}wlx}{6} + \frac{wl^2}{4} - \frac{wx^2}{12} \right] dx \\
 &= \left[hlx - \frac{\sqrt{3}}{4} wlx^2 + \frac{wx^3}{36} + \frac{\sqrt{3}wlx^2}{12} + \frac{wl^2x}{4} - \frac{wx^3}{36} \right]_0^{\frac{l\sqrt{3}}{2}} \\
 &= \left[hlx - \frac{\sqrt{3}}{4} wlx^2 + \frac{\sqrt{3}wlx^2}{12} + \frac{wl^2x}{4} \right]_0^{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \left[hlx - \frac{\sqrt{3}wlx^2}{6} + \frac{wl^2x}{4} \right]_0^{\frac{l\sqrt{3}}{2}} \\
 &= \left[\frac{hl^2\sqrt{3}}{2} - \frac{wl^3\sqrt{3}}{8} + \frac{wl^3\sqrt{3}}{8} \right] = \frac{hl^2\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

. **ANEXO G** – Síntese de Clairaut

Afirmação que consiste na classificação dos triângulos quanto aos ângulos.

Considere um triângulo qualquer de lados medindo a , b e c , sendo a o lado de maior medida.

Se $a^2 < b^2 + c^2$, então o triângulo é dito acutângulo.

Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é dito retângulo.

Se $a^2 > b^2 + c^2$, então o triângulo é dito obtusângulo.