Trigonometria: um estudo teórico e seu ensino em sala de aula com o auxílio do software Geogebra

por

GLAUCIA MARIA QUEIROZ DE FREITAS

Orientador: FERNANDO PEREIRA DE SOUZA

UFMS - Três Lagoas
Dezembro de 2016

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFMS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Pólo de Três Lagoas

Trigonometria: um estudo teórico e seu ensino em sala de aula com o auxílio do software Geogebra

por

Glaucia Maria Queiroz de Freitas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza (Orientador)
UFMS/CPTL

Prof. Dra. Selma Helena Marchiori Hashimoto
UFGD

Prof. Dr. Edivaldo Romanini
UFMS/CPTL

Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi
UFMS/CPTL

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, o Senhor da minha vida, que em todos os momentos esteve sempre ao meu lado e me sustentou em pé nas diversidades, a oportunidade de concretizar este sonho.

À minha família, aos meus filhos, à minha mãe Wayne da S Queiroz, pelas orações e constante incentivo.

Aos meus colegas de turma, pelos momentos de estudo e a alegria dos almoços aos sábados.

Aos meus amigos e parceiros de estudos por acreditar em mim, mesmo quando eu mesma não mais acreditava, pelo apoio por estarem sempre disponíveis a me ajudar, por permanecerem sempre ao meu lado nos momentos difíceis: Antonio Carlos Canoa de Oliveira, Flávio Henrique Silva, Glória Marcy Bastos Fonzar, José Haddad Alli, Júlio César Calvoso e Paulo Vitor Pereira.

Aos meus professores do curso Profmat-UFMS Três Lagoas pela dedicação, pelo constante apoio e incentivo, principalmente na pessoa do meu orientador Prof. Dr. Fernando Pereira Souza pelo carinho e atenção que sempre dispensaram à minha pessoa.

Aos meus alunos, professores e à direção da E.E. “João Brembatti Calvoso” por participarem e permitirem que as atividades, por mim elaboradas fosse desenvolvidas nesta unidade escolar.

Enfim, a todos que acreditaram e torceram por mim, com palavras de força e orações para que eu continuasse nesta caminhada.

Eu tentei 99 vezes e falhei. Mas na centésima tentativa eu consegui. Nunca desista dos seus objetivos, mesmo que eles pareçam impossíveis. A próxima tentativa pode ser a vitoriosa.
Albert Einstein

A todas as pessoas que amam: estudar, aprender, aprimorar-se, como eu e minha filha Beatriz Freitas Queiroz.

Resumo

No ensino de matemática sempre existiram muitos estudos e pesquisas buscando, em sua maioria, alternativas para aprimorar e dinamizar o trabalho do professor em sala de aula. Os fatores que motivaram o presente trabalho foram facilitar a abordagem do tema pelos docentes e melhorar o interesse e a compreensão dos discentes em relação ao estudo da Trigonometria, pois durante os mais de 20 anos de magistério, pode-se constatar a grande dificuldade dos alunos em relação ao conteúdo. A trigonometria é um conteúdo de extrema importância no currículo do ensino médio, pois proporcionará aos alunos as habilidades necessárias para a compreensão de vários conceitos na física e fenômenos naturais que usam funções periódicas para serem retratados. O presente trabalho propõe um estudo dos principais conceitos e definições necessários para que o ensino e aprendizagem da Trigonometria na educação básica tenham uma maior consistência, com demonstrações e gráficos, facilitando a visualização, interpretação e compreensão dos conceitos trigonométricos.

Palavras-chave: Trigonometria, identidades trigonométricas, funções trigonométricas, gráficos.

Abstract

There have always been many studies in the teaching of Mathematics, most of which searching for alternatives to improve and dynamize the teacher's work in his/her classroom. The main reasons that motivated the present work were to facilitate the educators' approach of the theme and enhance pupils' interest and comprehension of what concerns the study of Trigonometry. Over more than 20 years of teaching, I have been able to notice a great difficulty of the students regarding this subject. Trigonometry is a subject of extreme importance in the high school course, since it provides students with the necessary abilities to understand several physics and natural phenomena concepts, which use periodic functions to be demonstrated. This work proposes a study of the main concepts and definitions which are essential for the teaching of Trigonometry in elementary education to be more consistent, counting on practical demonstrations and graphs, facilitating the visualization, interpretation and comprehension of the trigonometrical concepts.

Key-words: Trigonometry, trigonometrical identities, trigonometrical-graphs functions

Sumário

Introdução

Este trabalho é o resultado de uma reflexão, que faço como professora de matemática há 21 anos. Neste estudo gostaria de despertar em meus alunos um olhar que enxergasse a beleza e a necessidade da matemática em nossas vidas. Ainda, se possível, ajudar meus colegas professores da área no intuito de despertar a paixão por essa ciência milenar, dinâmica e atual.

Nesses anos de magistério pude observar, no cotidiano do professor de matemática, que o ensino de Trigonometria é visto pelos alunos e também por alguns professores como um bicho papão, sendo o mesmo de difícil compreensão e quase impossível aplicação. Entretanto, sempre apreciei a Trigonometria, pois num mundo onde o homem viaja pelo universo calculando distâncias inimagináveis, constrói usinas com turbinas imensas que geram bilhões de quilowatts/hora, etc. Acredito que o estudo da tigonometria pode tornar-se muito palpável ao aluno.

Através de uma pesquisa exploratória, pude constatar que,no caso do ensino de matemática onde o professor inicia o conteúdo com as definições, explicações orais, exemplos, demonstrações e propriedades, seguidos de exercícios de fixação e aplicações. Pressupõe-se que o aluno aprenda por "repetição", considera, ainda, que a repetição ou reprodução estando correta ocorra a aprendizagem. Alguns autores ainda hoje acreditam que dessa forma, um maior número de alunos é atingido. Acontece que para uma aprendizagem efetiva é necessário que haja alunos motivados e atentos à palavra do professor. Isto não costuma acontecer numa aula ministrada tradicionalmente para jovens que vivem, numa sociedade com diversas outras motivações, como os recursos tecnológicos.

Algumas concepções sobre o ensino e aprendizagem da matemática significativa surgem com as ideias construtivistas, que ainda são pouco exploradas. A filosofia construtivista preconiza que o aluno deve ser o protagonista do seu conhecimento, responsabilizando-o pela descoberta, pela busca e confronto das suas ideias até chegar ao conceito correto pretendido pelo professor. Dessa forma, o professor será o mediador e orientador do processo sendo o aluno é considerado o centro da aprendizagem. Após as descobertas dos alunos, o professor irá sistematizar os novos conceitos, acreditando-se que ambos busquem e compartilhem novos conhecimentos para aprimorar-se, num processo de aprendizagem mais dinâmico e sólido, tornando o aluno mais ativo e reflexivo dentro de uma aprendizagem que acontece através da interação aluno/professor, sem perder o rigor matemático.

Lembro-me que em meados dos anos 80 quando estudei Trigonometria no segundo ano colegial da E.E. "Antonio Miziara" deAndradina SP, o tema era visto pela maioria dos alunos como "difícil, chato e cansativo", pois era abordado pelos professores com aplicações de fórmulas prontas que deveriam ser decoradas, um estudo mecânico e técnico, fato que impossibilitava a construção de um conhecimento sólido pelos alunos. Ainda hoje, muitos colegas professores não se preocupam, ou não se sentem à vontade, em trabalhar de forma contextualizada, o que torna o tema irreal, temido e muitas vezes inacessível ao aluno.

A discussão sobre o processo de ensino e aprendizagem de matemática de forma tradicional e mecânica, como uma ciência de regras e fórmulas a serem decoradas, vem enraizada há anos em nossa sociedade. Essa forma mecânica e técnica também acontece na abordagem da Trigonometria, que afastada do cotidiano dos alunos e desconectada das aplicações, contraria as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+).

De acordo com Dante, (2005), a palavra Trigonometria é formada por três radicais gregos: tri = três, gonía = ângulos e métron = medida. Do latim, a palavra Trigonometria refere-se às medidas feitas no triângulo (trigonon). Trata-se, assim, do estudo dos ângulos e lados de um triângulo, e as razões entre eles.

Os babilônios e egípcios já estudavam a trigonometria na antiguidade, mas sua origem é por muitos historiadores atribuídos à Matemática grega. A trigonometria é considerada uma criação da Matemática grega, que surgiu devido às necessidades da Astronomia, das Navegações e da Geografia. Desenvolveu-se um pouco da Trigonometria Plana para se chegar ao estudo da Trigonometria Esférica, o qual eles se dedicavam, pois trabalhavam, prioritariamente com Astronomia. Os últimos Pitagóricos, Euclides, Aristarco dos Santos, dentre outros estudaram Trigonometria Esférica com afinco. Com base nela, Aristarco dos Santos deduziu a distância da Terra ao Sol, os diâmetros da Terra e da lua e a razão entre os diâmetros do Sol e da Terra. Apolônio de Perga encontrou uma aproximação de décimos de milésimos para o π. No entanto, Hiparco de Nicéia que é considerado o "Pai da Trigonometria", seu fundador devido a seus estudos sobre Astronomia e Trigonometria. Conhecimentos empíricos babilônios em Astronomia foram organizados por ele, como a divisão do círculo em $360°$ e a tabela de cordas.

A Matemática Grega não utilizavam o seno de um ângulo, trabalhavam com a corda do arco duplo. Após Hiparco, Menelao de Alexandria já apresentava uma trigonometria bem desenvolvida, tendo inclusive realizado várias demonstrações de teoremas sobre triângulos esféricos. Foi com Cláudio Ptolomeu que a Trigonometria Grega atingiu seu ápice e seu principal trabalho foi o "Almagesto" sobre Astronomia. Nesse trabalho ele descreveu matematicamente o funcionamento do sistema solar, em teoria geocêntrica. É dele também as demonstrações do seno da soma de dois arcos e da igualdade $sen^2A + cos^2A = 1$, com A ângulo agudo. A Trigonometria de Ptolomeu em o "Almagesto" foi padrão até o Renascimento. A Astronomia grega fez constante uso da Trigonometria, já na Topografia recorria-se a geometria Euclidiana. Os hindus aboliram as tábuas de cordas, adotando as tábuas de senos no século V depois de Cristo, mas aplicavam a Trigonometria na Astronomia. A Trigonometria grega era prioritariamente geométrica, enquanto que a Trigonometria hindu era aritmética.

Os árabes herdaram a Trigonometria dos gregos e hindus, dando mais ênfase a Trigonometria aritmética. Deve-se a eles a introdução da tangente, cotangente, secante e cossecante. Conheciam também a Lei dos senos para triângulos, tendo sido realizado uma demonstração dessa lei pelo matemático árabe al-Biruni. A eles é atribuído também o uso da palavra "seno". Os conhecimentos da Trigonometria da época foram sistematizados pelo árabe Nasir-Eddin, em sua obra "Tratado sobre o Quadrilátero". Foi a partir do renascimento, com a expansão marítima europeia, que Trigonometria passou a ser usada em Cartografia e Topografia, e não apenas em Astronomia. Fibonnaci propõe isso em seu trabalho "Prática da Geometria", de 1920. A adoção progressiva do sistema solar heliocêntrico de Copérnico (1423-1543) é outro fator do desenvolvimento da Trigonometria. Aliás, Copérnico demonstrou grande domínio da Trigonometria em seus trabalhos.

Os trabalhos de Tycho Brahe e Kepler lançaram mão dos conhecimentos da Trigonometria para obter mais precisão nos estudos sobre Astronomia. Deve-se aos alemães parte do desenvolvimento da Trigonometria no Renascimento. George Peurbach (1423-1461) alemão traduz do grego o Almagesto de Ptolomeu e realiza correções. João Regiomontano (1436-1476), seu aluno, estudou a Trigonometria no triângulo retângulo, fez uma demonstração da Lei dos senos, calculou duas tabelas dos senos e tabelas das tangentes. Foi um dos primeiro a enxergar a Trigonometria, como parte da matemática, independente da Astronomia. Outros matemáticos também construíram tabelas trigonométricas: George Joaquim Rético, Vieta e Bartolomeu Pitisco. É a Bartolomeu Pitisco (1561-1613) que devemos a palavra Trigonometria, cujo significado é medida dos ângulos de um triângulo. A George Joaquim Rético (1514-1576) deve-se a formulação da Trigonometria do triângulo retângulo, como a conhecemos atualmente. Vieta (1540-1603) sistematizou o estudo da Trigonometria esférica e demonstrou a fórmula da diferença de senos, além de deduzir o $sen(n\theta)$ e o $cos(n\theta)$. Na Europa, dos séculos XVI e XVII várias identidades trigonométricas foram descobertas e utilizadas, como $2cos\,A\,cos\,B = cos(A+B)+cos(A-B)$, uma das fórmulas usadas na "prostaférese". A "prostaférese" é anterior aos logaritmos na função de simplificar cálculos. Tycho Barhe a adotou em seus cálculos astronômicos. A partir de Galileu houve grande avanço da Trigonometria, com o aparecimento das funções trigonométricas. A Topografia, a Navegação e a Astronomia utilizavam largamente das funções trigonométricas. Nos séculos XVIII e XIX, problemas da Matemática e Física foram essencialmente resolvidos com o auxílio da Trigonometria. As séries de Fourier mostraram a importância das funções trigonométricas na Análise da Matemática Moderna e suas aplicações.

Esse trabalho vem propor que, mesmo sem deixar de lado a História da Trigonometria, suas demonstrações e os conceitos básicos, pode-se desenvolver um estudo contextualizado, priorizando as aplicações com o uso de recursos tecnológicos e problemas, valendo dos conhecimentos prévios dos alunos, como ângulos, razão e proporção, relações métricas num triângulo retângulo, semelhança de triângulos, Teorema de Pitágoras e outros, dando um maior significado à sua aprendizagem.

Para realizar este trabalho, primeiramente foi feito um estudo bibliográfico, que constitui na leitura de livros e artigos científicos com o propósito de fundamentar e averiguar os conceitos teóricos relevantes e primordiais do assunto, e pesquisar na História da Trigonometria como esses conceitos foram descobertos, demonstrados e aplicados através dos tempos. Em seguida, foi realizada uma investigação sobre a aplicabilidade da trigonometria, analisando como trabalhá-la, afim de adaptá-la à realidade da sala de aula.

Nesse trabalho, desenvolvemos um projeto mostrando como podemos fazer uma aprendizagem significativa no estudo da Trigonometria, estudando um pouco de sua História. Os resultados encontrados demonstram a necessidade de se desenvolver estes conteúdos de forma a envolver recursos da informática e questões contextualizadas, mostrando assim um maior significado para o seu estudo, e ao mesmo tempo, valorizando os conhecimentos prévios do aluno.

Numa sala com 45 alunos do segundo ano do Ensino Médio foram aplicados três questionários, primeiramente para conhecer os conhecimentos prévios dos alunos em sala de aula. Já na sala de informática, um segundo questionário foi usado para conhecer os conhecimentos prévios das razões e funções trigonométricas e, a priori, um questionário e problemas contextualizados durante a realização e conclusão das atividades na sala de tecnologia. Para finalizar, foi elaborado uma avaliação para averiguar e analisar a metodologia e os resultados dos trabalhos realizados.

A estrutura deste trabalho está dividida da seguinte forma:

No capítulo 1, intitulado Trigonometria do Triângulo Retângulo, foi estudado conceitos básicos de ângulos agudos, as funções trigonométricas de um ângulo qualquer e as diversas formas de se calcular a área de um triângulo empregando trigonometria.

No capítulo 2, com o título de Identidades Trigonométricas, foram abordados os temas: Leis do Seno e Cosseno, soma e diferença de ângulos agudos e obtusos e as formas de Werner e Prostaférese.

No capítulo 3, com o título Gráficos e Propriedades das Funções Trigonométricas, foram analisados alguns gráficos e suas propriedades estudando as variações dos quatro parâmetros.

No último capítulo, com o título de Estudo Dirigido em Sala de Aula, foram analisadas as atividades desenvolvidas com a classe do segundo ano do ensino médio, as conclusões dos alunos e do professor sobre os resultados do trabalho.

Capítulo 1

Trigonometria do Triângulo Retângulo

A Trigonometria se distingue da geometria elementar, em parte, pelo seu uso extensivo de certas funções de ângulos, conhecidas como as funções trigonométricas. Antes de discutir as funções, vamos rever algumas terminologias básicas sobre ângulos.

1.1 Ângulos

A ideia de ângulo vem de um modelo matemático de figuras que sugerem duas semirretas de mesma origem não coincidentes. Cada uma dessas regiões junto com as semirretas de mesma origem são denominadas ângulos. Neste modelo podemos observar que as semi-retas de mesma origem, dividem o plano em dois ângulos: um convexo e um não-convexo.

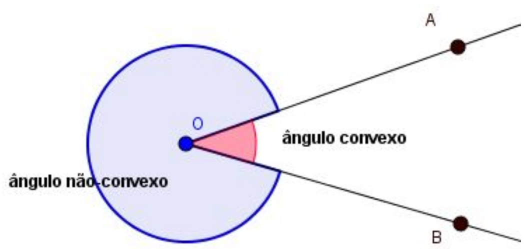


Figura 1.1: Regiões do plano determinadas por duas semirretas não coincidentes.

Em termos geométricos, sempre é considerado o ângulo convexo, ou simplesmente, ângulo. O ponto O, é denominado vértice do ângulo. As semiretas OA e OB são os lados do ângulo. Adotaremos a notação $A\widehat{O}B$. para indicar o ângulo da figura 1.1

Os ângulos podem ser classificados em:

(a) Um ângulo é **agudo** se sua medida está entre 0° e 90°.
(b) Um ângulo é **reto** se sua medida é 90°.
(c) Um ângulo é **obtuso** se sua medida está entre 90° e 180°.
(d) Um ângulo é **raso** se sua medida é 180°.

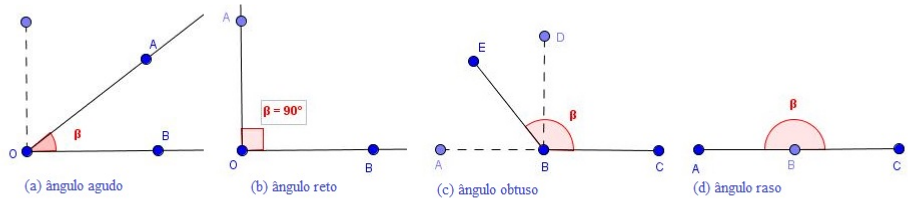


Figura 1.2: Tipos de ângulos.

Na geometria elementar, ângulos são sempre considerados positivos e não maior do que 360°. Neste texto utilizaremos as seguintes definições:

Ângulos Complementares: Dois ângulos são ditos complementares se a soma de suas medidas é 90°.

Ângulos Suplementares: Dois ângulos são ditos suplementares se a soma de suas medidas é 180°.

Ângulos Replementares: Dois ângulos são ditos replementares se a soma de suas medidas é 360°.

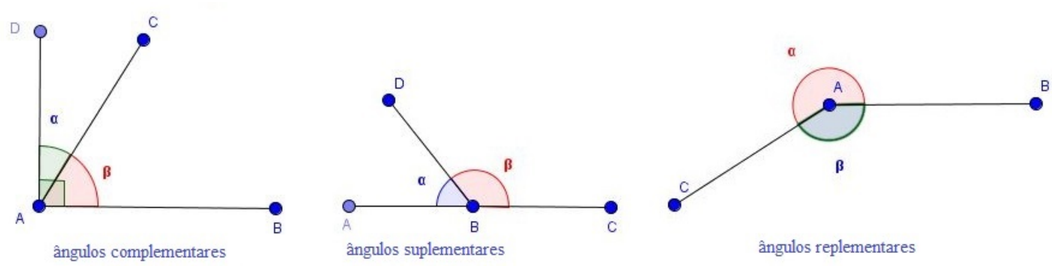


Figura 1.3: Tipos de pares de ângulos.

Definição 1 *Um triângulo é uma figura geométrica formada por três retas que se encontram duas a duas e não passam pelo mesmo ponto, formando três lados e três ângulos.*

Uma propriedade importante dos triângulos é que a soma dos ângulos internos em qualquer triângulo é, sempre, igual a 180°. Podemos classificar os triângulos de duas formas: quanto à medida dos lados e quanto à medida dos ângulos.

Quanto aos lados, um triângulo pode ser:

Equilátero: possuem três lados congruentes.
Exemplo: ΔABC equilátero (figura 1.4), onde temos $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$.

Isósceles: possui dois lados congruentes e um lado de medida diferente.
Exemplo: ΔDEF isósceles (figura 1.4), temos $\overline{DE} = \overline{FD}, \overline{EF} \neq \overline{DE}$

Escaleno: possuem três lados de medidas diferentes.
Exemplo: ΔGHI escaleno (figura 1.4), temos $\overline{GH} \neq \overline{HI} \neq \overline{IG}$.

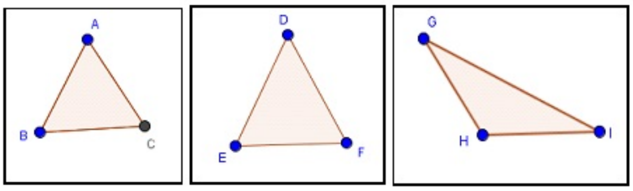


Figura 1.4: Triângulos: Equilátero, Isóceles, Escaleno.

Quanto aos ângulos um triângulo pode ser:

Acutângulo: possuem os três ângulos agudos.
Retângulo: possui um ângulo reto.
Obtusângulo: possui um ângulo obtuso.

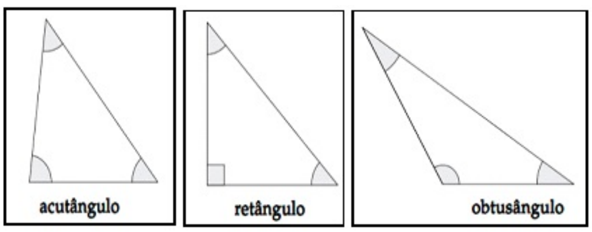


Figura 1.5: Triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo.

Em um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa**, e os outros dois lados são chamados de **catetos**. A hipotenusa é sempre o lado maior do triângulo retângulo. Ao conhecer os comprimentos dos dois lados de um triângulo retângulo, o comprimento do terceiro lado pode ser determinada usando o teorema de Pitágoras:

Teorema 1 *Teorema de Pitágoras: O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.*

Dem: Consideremos um triângulo retângulo ΔABC de hipotenusa a e catetos b e c.

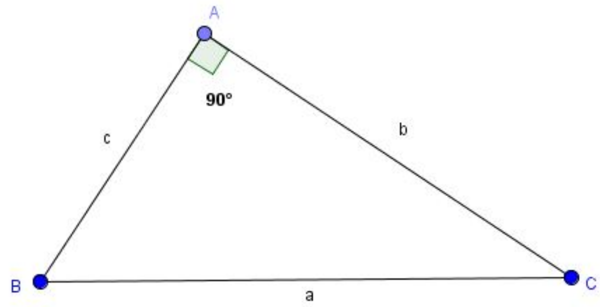
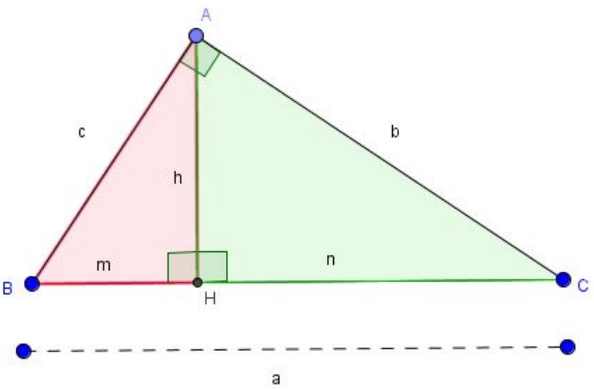


Figura 1.6: Triângulo Retângulo

Traçamos a altura AH relativa ao lado BC, essa altura divide o triângulo ΔABC em dois outros triângulos retângulos: ΔABH e ΔACH.



Como os dois ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares então os triângulos retângulos ΔABC, ΔABH e ΔACH são semelhantes, pelo caso AA. Da semelhança $\Delta ABC \approx \Delta ACH$, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{b}{a} = nb \Rightarrow b^2 = a \cdot n. \tag{1.1}$$

Da semelhança $\Delta ABC \approx \Delta ABH$, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot m. \tag{1.2}$$

Somando (1.1) e (1.2), obtemos:

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= a \cdot m + a \cdot n & (1.3)\\ &= a \cdot (m+n) & (1.4)\\ &= a^2. & (1.5) \end{aligned}$$

Vejamos um exemplo de aplicação do Teorema de Pitágoras.

Exemplo 1.1.1 *Suponhamos um trecho retilíneo de uma estrada, com um posto rodoviário no quilômetro zero. Suponhamos, também, que uma estação da guarda florestal esteja localizada a 40 km do posto rodoviário, em linha reta, e a 24 km de distância da estrada, conforme a figura abaixo.*

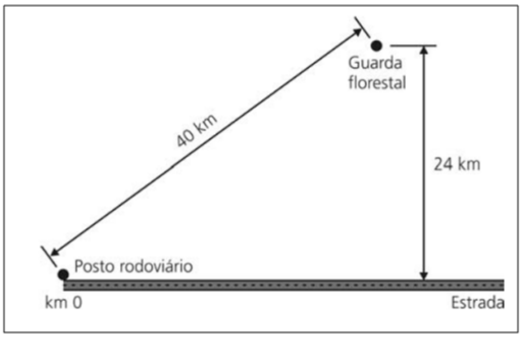


Figura 1.7: Fonte- Prova do vestibular UNICAMP/ 2011- 2ª fase

Duas antenas de rádio atendem a região. A área de cobertura da primeira antena, localizada na estação da guarda florestal, corresponde a um círculo que tangencia a estrada. O alcance da segunda, instalada no posto rodoviário, atinge, sem ultrapassar, o ponto da estrada que está mais próximo da estação da guarda florestal. Explicitar as duas desigualdades que definem as regiões circulares cobertas por estas antenas, e esboçar o gráfico, identificando a área coberta simultaneamente pelas duas antenas.

Solução: Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$40^2 = 24^2 + C^2 \Rightarrow C = 32.$$

A equação geral de um disco centrado em (x_0, y_0) e com raio r é dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2.$$

Como a primeira antena está situada na estação da guarda florestal e seu sinal atinge, mas não ultrapassa a estrada, temos $(x_0, y_0) = (32, 24)$ e $r = 24$. Logo, a área de cobertura da primeira antena será:

$$(x - 32)^2 + (y - 24)^2 \leq 24^2.$$

A segunda antena está situada no posto rodoviário e seu sinal também alcança, sem ultrapassar, o ponto a estrada $(32, 0)$, temos então $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $r = 32$. Logo, a área de cobertura da segunda antena será:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 \leq 32^2.$$

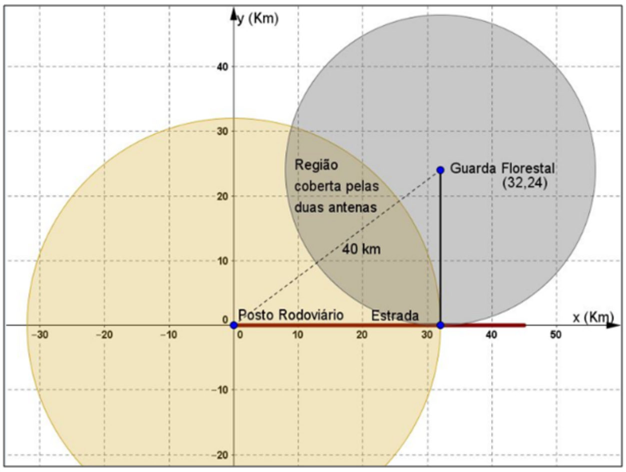


Figura 1.8: Fonte- Prova do vestibular UNICAMP/ 2011- 2ª fase

Portanto, as regiões de cobertura das antenas são dadas pelas desigualdades

$$(x - 32)^2 + (y - 24)^2 \leq 24^2$$

e

$$x^2 + y^2 \leq 32^2.$$

Essas regiões estão representadas no gráfico pelos círculos laranja (segunda antena) e azul (primeira antena). A região mais escura é aquela coberta pelas duas antenas.

1.2 Razões Trigonométricas do Ângulo Agudo

Consideremos um ângulo $A\hat{O}B = \theta$, $0° < \theta < 90°$, na semirreta OA localizamos os pontos: A_1, A_2 e A_3. Por A_1, A_2 e A_3 traçamos segmentos perpendiculares à semirreta OB, de tal forma que determinamos os pontos B_1, B_2 e B_3 nas intersecções dos segmentos perpendiculares com a semirreta OB.

Da construção, obtemos três triângulos: ΔOA_1B_1, ΔOA_2B_2 e ΔOA_3B_3, como estes triângulos possuem o ângulo θ em comum e ainda os ângulos $A_1\widehat{B_1}O = A_2\widehat{B_2}O = A_3\widehat{B_3}O = 90°$, podemos concluir que os triângulos anteriormente citados são semelhantes, pelo caso ângulo-ângulo.

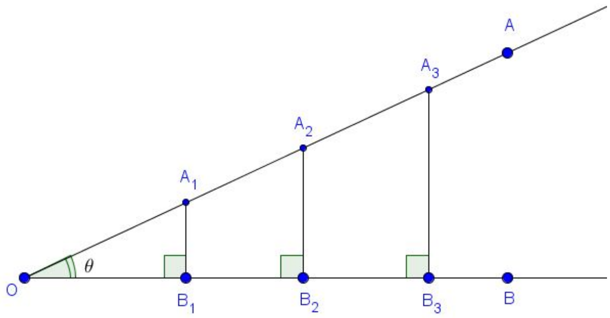


Figura 1.9: Triângulos semelhantes para determinação das constantes de proporcionalidade.

Assim, da semelhança de triânguos, podemos dizer que seus lados são proporcionais, aplicando os conceitos de razão e proporção, afirmamos que:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = K_1,$$

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = K_2,$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = K_3,$$

sendo $K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{R}$ constantes de proporcionalidade. Observando as razões acima, notamos que estas igualdades nos mostram que as mesmas independem das medidas dos lados dos triângulos, dependendo apenas da medida do ângulo θ. Estas razões são definidas como:

$$K_1 = sen\,\theta, \quad K_2 = cos\,\theta \quad \text{e} \quad K_3 = tg\,\theta.$$

$K_1 = sen\,\theta =$ (cateto oposto)/hipotenusa, o símbolo $sen\,\theta$ significa a razão trigonométrica seno do ângulo θ. A palavra seno tem sua origem do latim "sinus" que significa volta, cavidade, curva, alguns acreditam que este nome esteja relacionado ao fato do gráfico da função ter curvas sinuosas, mas, a verdade, é que "sinus" é a tradução da palavra latina "jaib", confundida pelos árabes na hora da tradução, que trocaram jaib por jiba por jiva (palavra hindu) que significa meia corda, foi no estudo das cordas de um ângulo numa circunferência que se originou o estudo dessa razão. Este termo "seno" foi universalizado por Fibonacci ao usar o termo sinus rectus arcus.

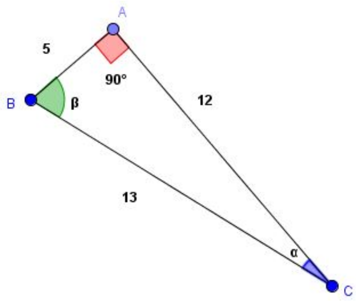
$K_2 = cos\,\theta =$ (cateto adjacente)/hipotenusa, o símbolo $cos\,\theta$ significa a razão trigonométrica cosseno de θ. A palavra cosseno teve sua origem da palavra seno, pois o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do seu complemento, ou vice-versa, assim cosseno = "seno do complemento".

$K_3 = tg\,\theta =$ (cateto oposto)/(cateto adjacente), o símbolo $tg\,\theta$ significa a razão trigonométrica tangente de θ. A palavra tangente tem origem da palavra latina "tangens"- o que toca, do verbo "tangere"-tocar, surgiu do estudo do comprimento da sombra produzida por um objeto, para depois ser associada aos estudos dos ângulos, a palavra "tangente" foi primeiramente utilizada por Thomas Fincke, em 1583.

Definidos as razões trigonométricas $sen\,\theta, cos\,\theta$ e $tg\,\theta$, definimos agora outras três razões trigonométricas:

$$sec\,\theta = \frac{1}{cos\,\theta}, \quad cossec\,\theta = \frac{1}{sen\,\theta}, \quad cotg\,\theta = \frac{1}{tg\,\theta}.$$

Exemplo 1.2.1 *Dado o triângulo retângulo ΔABC de hipotenusa $13cm$ e catetos $12cm$ e $5cm$, determine o valor das razões trigonométricas para o ângulo $B\widehat{C}A$.*



Calculando as razões trigonométricas, temos:

$$sen\,\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{5}{13} \qquad cossec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = \frac{13}{5},$$

$$cos\,\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{12}{13} \qquad sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha} = \frac{1}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12},$$

$$tg\,\alpha = \frac{cateto\ oposto)}{cateto\ adjacente} = \frac{5}{12} \qquad cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{1}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5}.$$

Existem alguns ângulos agudos que aparecem com maior frequência, como $30°, 45°$ e $60°$, por isso são chamados de ângulos notáveis. Para calcular as razões trigonométricas desses ângulos faremos o uso do Teorema de Pitágoras (Teorema 1).

Razões Trigonométricas de $30°$ **e** $60°$.

Dado um triângulo equilátero ABC de lado l, traçando a altura relativa ao vértice A, determinamos o ponto D, que coincide com o ponto médio do lado BC. Obtemos então $\overline{DC} = \frac{l}{2}$, chamando $AD = h$, pelo Teorema de Pitágoras teremos:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (h)^2 \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

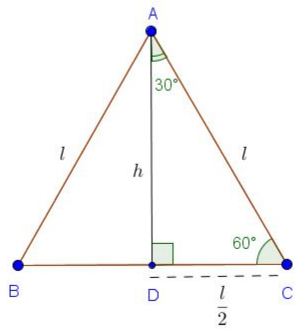


Figura 1.10: Triângulo equilátero para cálculo das razões trigonométricas de $30°$ e $60°$.

Aplicando as definições das razões trigonométricas, teremos:

$$sen\,30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}, \quad cos\,30° = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad tg\,30° = \frac{\frac{l}{2}}{h} = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$sen\,60° = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad cos\,60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}, \quad tg\,60° = \frac{h}{l} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}.$$

Razões Trigonométricas de $45°$.

Dado um quadrado $ABCD$ de lado l, traçamos a diagonal AC, chamando $\overline{AC} = d$, pelo Teorema de Pitágoras obtemos

$$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d = l\sqrt{2}.$$

Como a diagonal do quadrado coincide com a bissetriz, temos que $D\widehat{C}A = 45°$. Aplicando as definições de razões trigonométricas, teremos:

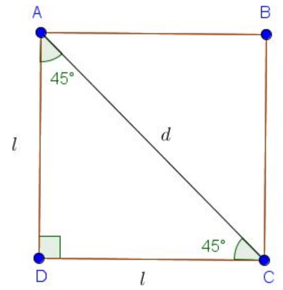


Figura 1.11: Quadrado para cálculo das razões trigonométricas de $45°$.

$$sen\, 45° = \frac{l}{d} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

de modo análogo, temos que $cos\, 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, além disso, temos

$$tg\, 45° = \frac{l}{l} = 1,$$

gerando então a seguinte tabela:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

1.3 Funções Trigonométricas de um ângulo qualquer

Para definir as funções trigonométricas de um ângulo qualquer, incluindo ângulos negativos ou maiores que $360°$, precisamos de uma definição mais geral de um ângulo, para isto, considere a circunferência de centro na origem O e de raio unitário, chamada de círculo trignométrico, do plano cartesiano com os eixos ortogonais Ox e Oy. Estes eixos dividem o círculo trigonométrico em quatro partes iguais denominadas "quadrantes".

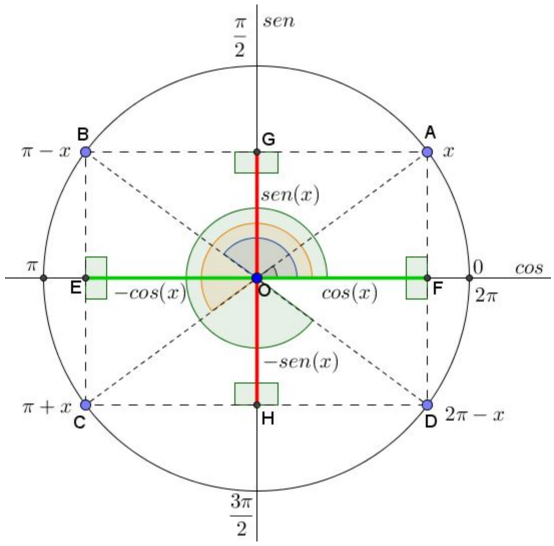


Figura 1.12: Correspondência dos arcos no circulo trignométrico

Os pontos A, B, C e D são as interseções entre a circunferência e os eixos ortogonais, a partir do ponto A iniciamos a numeração dos quadrantes, sendo:

$$1^{\circ} \text{ quadrante (de } A \text{ a } B): \ 0^{\circ} \leq x \leq 90^{\circ} \text{ ou em radianos } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$2^{\circ} \text{ quadrante (de } B \text{ a } C): \ 90^{\circ} \leq x \leq 180^{\circ} \text{ ou em radianos } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi,$$

$$3^{\circ} \text{ quadrante (de } C \text{ a } D): \ 180^{\circ} \leq x \leq 270^{\circ} \text{ ou em radianos } \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2},$$

$$4^{\circ} \text{ quadrante (de } D \text{ a } A): \ 270^{\circ} \leq x \leq 360^{\circ} \text{ ou em radianos } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi.$$

Partindo do ponto A para B temos o sentindo anti-horário adotado usualmente como positivo, já o sentido horário foi adotado como negativo. Considere um arco x onde um de seus lados está sob o eixo das abscissas e sua origem em $(0,0)$. Seja P um ponto da intersecção do outro lado do ângulo com a circunferência (veja figura 1.13).

A projeção do segmento OP sobre o eixo das ordenadas (vertical) é definido como o $sen(x)$ indicado pelo segmento OP''.

A projeção do segmento OP sobre o eixo das abiscissas (horizontal) é definido como o $cos(x)$ indicado pelo segmento OP'.

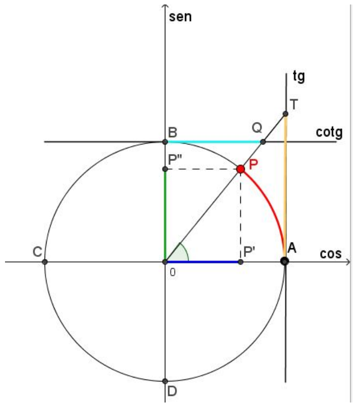


Figura 1.13: Circunferência trigonométrica e projeções do arco x nos eixos.

Seja r a reta vertical passando pelo ponto $A = (1, 0)$. A intersecção da reta OP com a reta r é definido como $tg(x)$ indicado pelo segmento AT.

Seja s a reta horizontal passando pelo ponto $B = (0, 1)$. A intersecção da reta s com a reta OP é definida como $cotg(x)$ indicado pelo segmento BQ.

Podemos também definir as razões secante (sec) e cossecante ($cossec$) no círculo trigonométrico, como vemos na Figura 1.14:

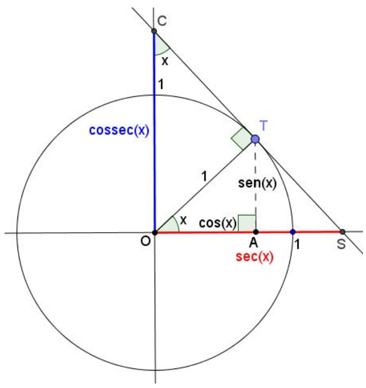


Figura 1.14: Circunferência trigonométrica e projeções do arco x nos eixos.

Observando a figura 1.14, podemos constatar que os triângulos ΔOTA, ΔOST e ΔCOT, são semelhantes pelo caso AA (ângulo/ângulo). Devido a semelhança dos triângulos OTA e OST temos que:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}},$$

ou seja,

$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)}.$$

Do mesmo modo, da semelhança entre os triângulos OTA e COT podemos concluir que:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{AT}},$$

assim

$$cossec(x) = \frac{1}{sen(x)}.$$

Notemos que no caso de um ângulo agudo estas definições são equivalente as nossas definições em termos de triângulos retângulos.

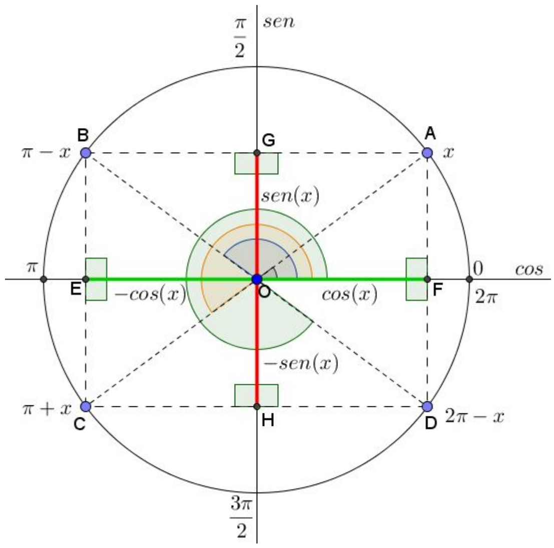


Figura 1.15: Sinal de $sen\, x$ e $cos\, x$ nos quadrantes trigonométricos

Observando o circulo trignométrico Figura 1.15, temos que o retângulo $ABCD$ está dividido em quatro retângulos menores pelos pontos médios de seus lados E, F, G e H. Sendo esses retângulos menores $AGOF, GBEO, OECH$ e $FOHD$ congruentes por construção, logo temos $\overline{OG} = \overline{OH}$ e $\overline{OF} = \overline{OE}$. Como $\overline{OG} = sen(x)$ e $\overline{OF} = cos(x)$, então:

$$\overline{OG} = sen(x) = sen(\pi - x),$$

$$\overline{OH} = -sen(x) = sen(\pi + x) = sen(2\pi - x),$$

$$\overline{OF} = cos(x) = cos(2\pi - x),$$

$$\overline{OE} = -cos(x) = cos(\pi + x) = cos(\pi - x).$$

1.4 Área de um Triângulo

Dado um triângulo ABC, traçamos a altura $\overline{AD} = h$, relativa ao vértice A, como mostra a figura a seguir.

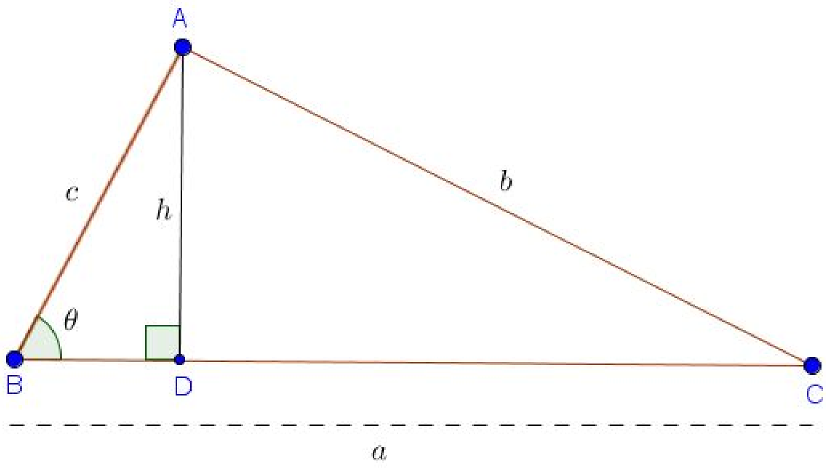


Figura 1.16: Triângulo para dedução da fórmula da área.

Da geometria elementar, sabemos que a área do triângulo ΔABC é dada por $A = \dfrac{a \cdot h}{2}$ em que a é a basee h é aaltura. Vamos utilizar um pouco de trigonometria para encontrarmos outros modos de encontrar a área do triângulo.

Se conhecermos as medidas dos lados AB e BC e a medida do ângulo $A\widehat{B}C$, então podemos encontrar a área do triângulo. De fato, no triângulo ΔABD, encontramos

$$sen\,\theta = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot sen\,\theta. \tag{1.6}$$

Assim, obtemos a seguinte fórmula:

$$A = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot sen\,\theta. \tag{1.7}$$

Suponhamos um triângulo ΔABC em que são conhecidos os três lados. Podemos calcular a área do triângulo usando a fórmula de Heron. Para tanto, precisamos do seguinte Lema:

Lema 1 *Consideremos um triângulo ΔABC, e sejam $\widehat{A} = C\widehat{A}B$, $\widehat{B} = A\widehat{B}C$ e $\widehat{C} = B\widehat{C}A$ os ângulos internos do triângulo. Então é válida a seguinte igualdade:*

$$tg\frac{\widehat{A}}{2}\cdot tg\frac{\widehat{B}}{2} + tg\frac{\widehat{A}}{2}\cdot tg\frac{\widehat{C}}{2} + tg\frac{\widehat{B}}{2}\cdot tg\frac{\widehat{C}}{2} = 1. \tag{1.8}$$

Teorema 2 (Fórmula de Heron) *Considere um triângulo ΔABC, com lados medindo a, b e c, seja $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Então a área A do triângulo é dada por*

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dem: Consideremos o triângulo ΔABC, onde $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a$, e $\overline{AC} = b$. Inscrevendo uma circunferência neste triângulo, conforme figura 1.17, denotamos por P, Q e R os pontos de tangência da circunferência com o triângulo.

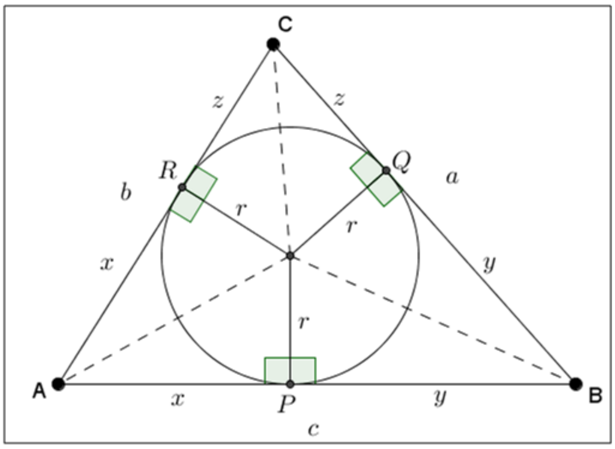


Figura 1.17: Ilustação para a fórmula de Heron

Obervemos que

$$x + y = c, \quad y + z = a, \quad x + z = b,$$

e pelo fato de que $x + y + z = s$, temos:

$$\begin{cases} x + a &= s, \\ y + b &= s, \\ z + c &= s. \end{cases} \quad \text{ou ainda,} \quad \begin{cases} x &= s - a, \\ y &= s - b, \\ z &= s - c. \end{cases}$$

Denotando por r o raio da circunferência inscrita no triângulo, temos as seguintes relações

$$tg\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{r}{x}, \quad tg\frac{\widehat{B}}{2} = \frac{r}{y}, \quad tg\frac{\widehat{C}}{2} = \frac{r}{z}.$$

Agora, utilizando (1.8), obtemos

$$\frac{r}{x}\frac{r}{y} + \frac{r}{x}\frac{r}{z} + \frac{r}{y}\frac{r}{z} = 1,$$

que implica em

$$r^2 s^2 = sxyz. \tag{1.9}$$

Notemos que a área do triângulo pode ser escrita como

$$A = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{ar + br + cr}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2} = sr, \tag{1.10}$$

segue de (1.9) e (1.10) que:

$$r^2 s^2 = sxyz \Leftrightarrow (sr)^2 = sxyz \Leftrightarrow A^2 = s.(s-a).(s-b).(s-c).$$

Como queríamos demonstrar.

Nesse primeiro capítulo fizemos um breve estudo sobre ângulos, triângulos, diversas formas de cálculo da área de um triângulo, razões trigonométricas. No próximo capítulo, faremos um estudo sobre identidades trigonométricas.

Capítulo 2

Identidades Trigonométricas

Neste capítulo faremos um estudo das Identidades Trigonométricas, identidades essas que envolvem Funções Trigonométricas, sendo verdadeiras para todos os valores das variáveis envolvidas, são aplicadas para simplificar expressões trigonométricas, conseguindo novas transformações mais úteis para dada aplicação.

2.1 Lei dos Senos

A lei dos senos diz que "em um triângulo qualquer, a razão entre os lados e os respectivos senos dos ângulos opostos é constante e igual do dobro do raio da circunferência que o circunscreve". Na figura a seguir, é possível ilustrar a lei dos senos aplicada para um triângulo qualquer:

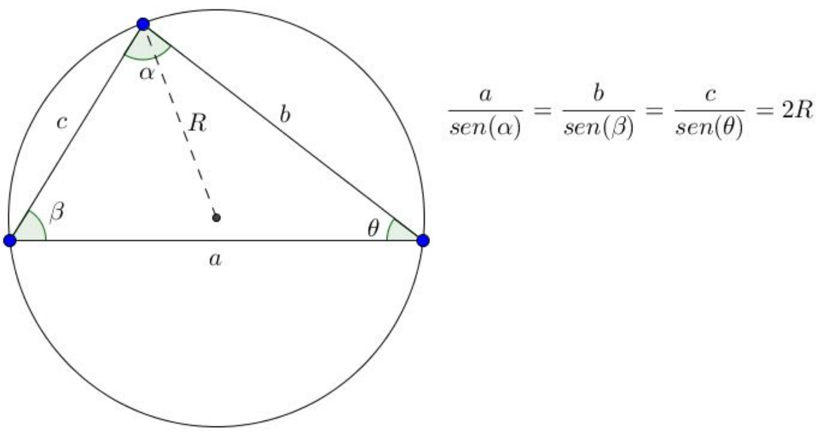


Figura 2.1: Triângulo qualquer inscrito numa circunferência de raio R.

Para a sua demonstração, será necessário inicialmente estabelecer o conceito de que em uma circunferência, a medida de um ângulo central é o dobro daquela determinada pelo ângulo inscrito que possui o mesmo arco. A próxima figura, ilustra com detalhes este conceito a fim de justificá-lo.

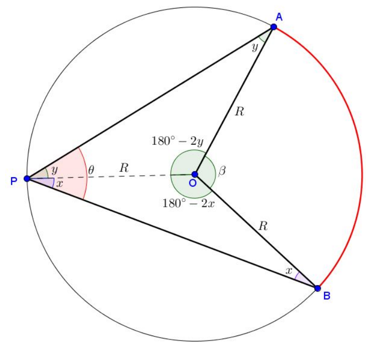


Figura 2.2: Ângulo $A\widehat{P}B$ inscrito e ângulo $A\widehat{O}B$ central numa circunferência de raio R.

Notemos que os triângulos ΔAPO e ΔBOP são isósceles, onde seus lados iguais correspondem ao raio R da circunferência. Decorrente deste fato, obtemos os ângulos $A\widehat{O}P = 180° - 2y$ e $B\widehat{O}P = 180° - 2x$. Assim, podemos escrever:

$$A\widehat{O}P + B\widehat{O}P + \beta = 360°,$$

ou ainda,

$$180° - 2y + 180° - 2x + \beta = 360°.$$

Portanto, $\beta = 2x + 2y = 2(x + y) = 2\theta$.

Lei dos Senos para Triângulos Acutângulo

Agora, apoiando na construção a seguir, será demonstrada uma das razões da lei dos senos a partir de um triângulo acutângulo inscrito numa circunferência de raio R :

$$\frac{b}{sen\,\beta} = 2R.$$

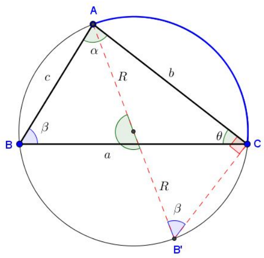


Figura 2.3: Ângulo $A\widehat{B}C$ inscrito e ângulo $A\widehat{O}C$ central numa circunferência de raio R.

Analisando a Figura 2.3, notamos que o ponto B pode ser deslocado sobre a circunferência sem alterar o valor do ângulo β devido à propriedade do ângulo inscrito demonstrada anteriormente. Desta forma, é possível criar um novo triângulo $\Delta AB'C$, retângulo em C, onde podemos escrever a seguinte relação trigonométrica:

$$sen\,\beta = \frac{b}{2R} \Rightarrow \frac{b}{sen\,\beta} = 2R.$$

Analogamente, se A for deslocado gerando um ponto A' e, C para um ponto C', construímos as razões $\dfrac{a}{sen\,\alpha} = 2R$ e $\dfrac{c}{sen\,\theta} = 2R$. Portanto, concluimos que:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\theta} = 2R.$$

Lei dos Senos para Triângulos Obtusângulo

Consideremos um triângulo Obtusângulo ΔABC, onde o ângulo $C\widehat{A}B$ é obtuso, inscrito em uma circunferência de raio R, conforme a Figura 2.4

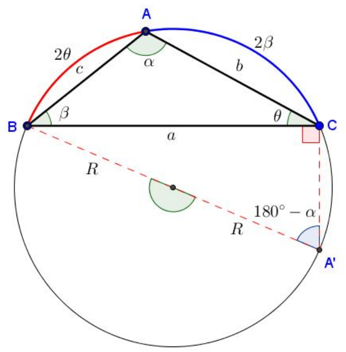


Figura 2.4: Triângulo obtusângulo ΔABC inscrito numa circunferência de raio R.

Notemos que o vértice A, foi deslocado até obter o triângulo $\Delta BCA'$ retângulo em C. Utilizando novamente a propriedade do ângulo inscrito temos que o arco de extremidades A e B, (em vermelho) tem medida 2θ e, o arco de extremidades A e C (em azul), tem medida 2β. Assim, para calcularmos a medida do ângulo $B\widehat{A'}C$, podemos escrever:

$$B\widehat{A'}C = \frac{2\theta + 2\beta}{2},$$

ou seja,

$$B\widehat{A'}C = \theta + \beta. \tag{2.1}$$

Como $\alpha + \beta + \theta = 180°$, segue que $\theta + \beta = 180° - \alpha$, substituindo em 2.1, temos:

$$B\widehat{A'}C = 180° - \alpha.$$

Agora, finalmente no triângulo retângulo $\Delta BA'C$, é possível escrever a seguinte relação trigonométrica:

$$sen(B\widehat{A'}C) = sen(180° - \alpha) = sen\,\alpha = \frac{a}{2R}.$$

Portanto,

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = 2R.$$

Para obter as outras duas razões, basta deslocar os vértices B e C de forma análoga. Assim, concluimos que a lei dos senos é válida para qualquer triângulo.

Exemplo 2.1.1 *Para calcular a distância entre duas árvores situadas nas margens opostas de um rio, nos pontos A e B, um observador que se encontra junto a A afasta-se $20m$ da margem, na direção da reta AB, até o ponto C e depois caminha em linha reta até o ponto D, a $40m$ de C, do qual ainda pode ver as árvores. Tendo verificado que os ângulos $D\widehat{C}B$ e $B\widehat{D}C$ medem, respectivamente, $15°$ e $120°$, qual valor ele encontrou para a distância entre as árvores, se usou a aproximação $\sqrt{6} = 2,4$?*

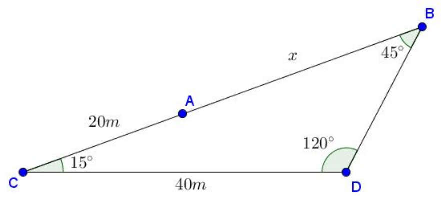


Figura 2.5: Ilustação do exemplo 2.1.1

Utilizando a lei dos senos para o triângulo ΔABC, temos:

$$\frac{40}{sen\,45°} = \frac{20+x}{sen\,120°} \Rightarrow \frac{40}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{20+x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

onde encontramos $x = 28m$.

2.2 Lei dos Cossenos

A lei dos cossenos diz que "o quadrado de um lado de um triângulo qualquer é igual à soma dos quadrados dos outros dois menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo que eles formam".

Na figura 2.6, é possível ilustrar a lei dos cossenos aplicada para cada um dos lados do triângulo:

Lei dos Cossenos para Triângulos Acutângulo

Considere um triângulo acutângulo ΔABC, traçamos a altura AH conforme a figura 2.7

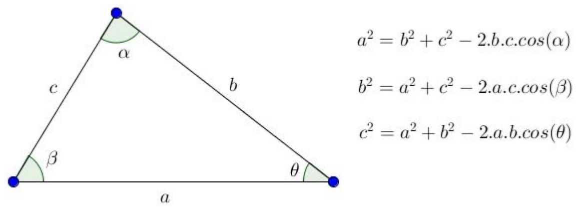


Figura 2.6: Ilustação do exemplo 2.1.1

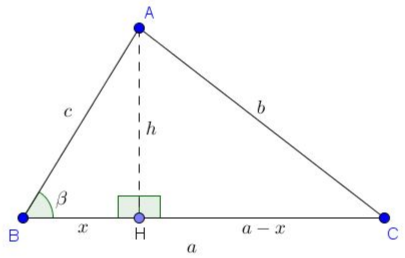


Figura 2.7: Triângulo acutângulo ΔABC

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ΔAHC, temos:

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + (a - x)^2 \\ &= (h^2 + x^2) + a^2 - 2ax. \end{aligned} \tag{2.2}$$

No triângulo retângulo ΔAHB, também podemos escrever:

$$c^2 = h^2 + x^2 \quad \text{e} \quad cos\,\beta = \frac{x}{c},$$

onde $x = c\,cos\,\beta$. Substituindo na equação 2.2, obtemos finalmente uma das relações para a lei dos cossenos:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2accos\,\beta.$$

Lei dos Cossenos para Triângulos Obtusângulo

Consideremos um triângulo obtusângulo ΔABC, traçamos a altura AH conforme a figura 2.8

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ΔBHC, temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (b + x)^2 \\ &= b^2 + (h^2 + x^2) + 2.b.x \end{aligned} \tag{2.3}$$

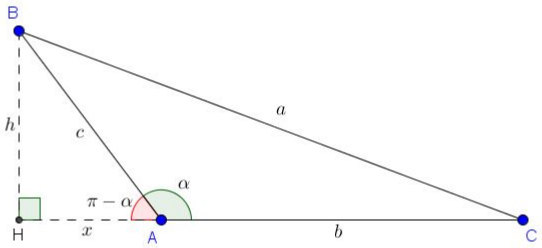


Figura 2.8: Triângulo Obtusângulo ΔABC

No triângulo retângulo ΔBHA, também podemos escrever:

$$c^2 = h^2 + x^2 \quad \text{e} \quad cos(\pi - \alpha) = -cos\,\alpha = \frac{x}{c},$$

onde $x = -c\,cos\,\alpha$. Substituindo na equação 2.3, obtemos finalmente uma relação para a lei dos cossenos num triângulo obtusângulo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\,\alpha.$$

Desta forma, concluimos que a lei dos cossenos é válida para qualquer triângulo.

Exemplo 2.2.1 *Seja um objeto submetido à duas forças* $F_1 = 10N$ *e* $F_2 = 8N$ *cujas direções formam um ângulo de* $60°$. *Qual a força resultante exercida sobre o objeto?*

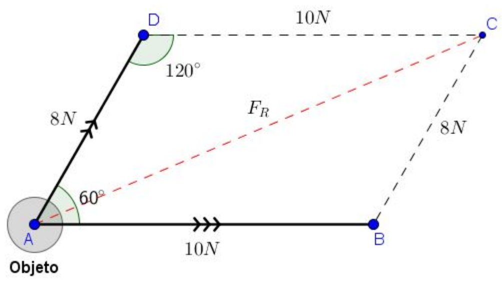


Figura 2.9: Obtenção da Força resultante F_R aplicada a dois vetores de força F_1 e F_2.

A força resultante F_R será representada pela diagonal AC do paralelogramo, onde poderá ser calculada utilizando a lei dos cossenos no triângulo

ΔADC da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F_R^2 &= F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot cos\,\alpha \\ &= 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot cos 120^\circ \\ &= 100 + 64 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 244. \end{aligned}$$

Portanto $F_R \cong 15,62N$.

2.3 Soma e Diferença de Ângulos Agudos

Nesta seção vamos mostrar algumas identidades trigonométricas para a soma e diferença de dois ângulos.

Proposição 1 *Consideremos* α, β *ângulos agudos tais que* $0 < \alpha + \beta < 90^\circ$. *Vale a seguinte identidade*

$$sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\beta\,cos\,\alpha. \tag{2.4}$$

Dem: Para demonstrarmos (2.4) consideremos o triângulo ΔABC, onde $C\widehat{A}B = \alpha + \beta$ e a altura AD relativa ao vértice A, satisfazendo $D\widehat{A}B = \alpha$ e $C\widehat{A}D = \beta$ como mostrado na Figura 2.10

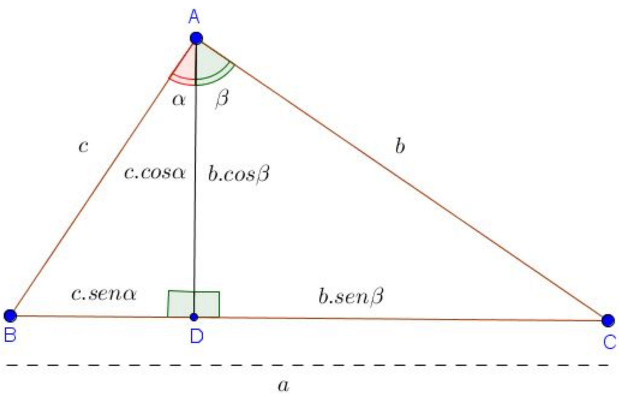


Figura 2.10: Triângulo para demonstração da fórmula $sen(\alpha + \beta)$.

Aplicando as razões trigonométricas nos triângulos ΔABD e ΔADC, podemos observar que $\overline{AD} = c \cdot cos\,\alpha$ e $\overline{AD} = b \cdot cos\,\beta$.

Aplicando a fórmula da área (1.7) nos triângulos $\Delta ABC, \Delta ABD$ e ΔADC, obtemos

$$\Delta ABC \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot sen\,(\alpha+\beta),$$

$$\Delta ABD \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot cos\,\beta \cdot sen\,\alpha,$$

$$\Delta ACD \Rightarrow A_3 = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot cos\,\alpha \cdot sen\,\beta.$$

Como $A_1 = A_2 + A_3$, temos:

$$\frac{1}{2} b \cdot c \cdot sen\,(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot cos\,\beta \cdot sen\,\alpha + \frac{1}{2} b \cdot c \cdot cos\,\alpha \cdot sen\,\beta.$$

Dividindo a igualdade acima por $\frac{1}{2} \cdot b \cdot c$ obtemos finalmente:

$$sen\,(\alpha+\beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\beta \cdot cos\,\alpha. \tag{2.5}$$

Como consequência, temos que se $\alpha = \beta$, então:

$$sen\,2\alpha = 2 sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha, \text{ (seno do arco duplo).}$$

Proposição 2 *Sejam α, β ângulos agudos tais que $0 < \alpha + \beta < 90°$. Então*

$$sen(\alpha-\beta) = sen\,\alpha\, cos\,\beta - sen\,\beta\, cos\,\alpha, \tag{2.6}$$

$$cos(\alpha-\beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta + sen\,\alpha\, sen\,\beta. \tag{2.7}$$

Dem: Para demonstrarmos (2.6) e (2.7) consideremos um triângulo retângulo ΔAFE, talque $E\hat{A}F = \beta, E\widehat{F}A = 90°$, hipotenusa $\overline{AE} = 1$. Consideremos o retângulo $ABCD$ circunscrito no triângulo ΔAFE como mostrado na figura 2.11.

Sendo os ângulos $E\hat{A}F = \beta$ e $F\hat{A}D = \alpha$, logo $E\hat{A}D = \alpha - \beta$. Sendo $0 < \alpha, \beta < 90°$, podemos escrever as razões trigonométricas para o ângulo β no triângulo ΔAFE, obtendo

$$sen\,\beta = \frac{\overline{EF}}{1} \Rightarrow \overline{EF} = sen\,\beta,$$

$$cos\,\beta = \frac{\overline{AF}}{1} \Rightarrow \overline{AF} = cos\,\beta.$$

Escrevendo, também as razões trigonométricas para o ângulo $E\hat{A}D = \alpha - \beta$ no triângulo ΔADE, temos:

$$sen\,(\alpha-\beta) = \frac{\overline{DE}}{1} \Rightarrow \overline{DE} = sen\,(\alpha-\beta), \tag{2.8}$$

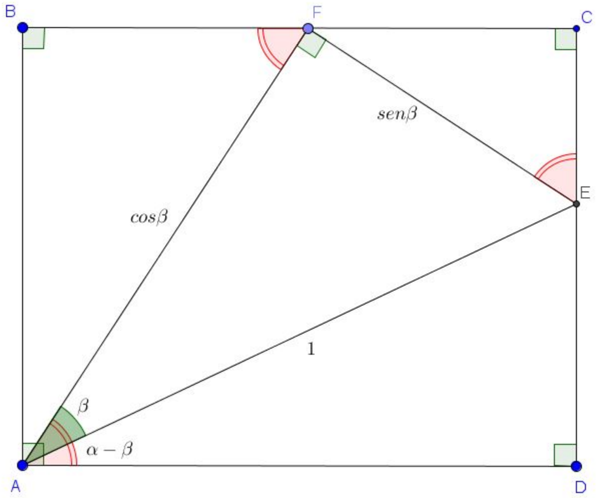


Figura 2.11: Retângulo com triângulo AFE, retângulo em F, inscrito, auxiliar para dedução das fórmulas $cos(a-b)$ e $sen(a-b)$.

$$cos\,(\alpha-\beta) = \frac{\overline{AD}}{1} \Rightarrow \overline{AD} = cos(\alpha-\beta) \tag{2.9}$$

Observando, a figura 2.11, podemos perceber que $F\hat{A}D = A\hat{F}B = C\hat{E}F = \alpha$, desse modo aplicando as razões trigonométricas no triângulo ΔFBA, temos:

$$sen\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{cos\,\beta} \Rightarrow \overline{AB} = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta, \tag{2.10}$$

$$cos\,\alpha = \frac{\overline{BF}}{cos\,\beta} \Rightarrow \overline{BF} = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta. \tag{2.11}$$

No triângulo ΔECF, temos:

$$sen\,\alpha = \frac{\overline{CF}}{sen\,\beta} \Rightarrow \overline{CF} = sen\,\alpha \cdot sen\,\beta, \tag{2.12}$$

$$cos\,\alpha = \frac{\overline{CE}}{sen\,\beta} \Rightarrow \overline{CE} = sen\,\beta \cdot cos\,\alpha. \tag{2.13}$$

Notemos que $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED}$, utilizando (2.8), (2.10) e (2.13), teremos:

$$sen\,\alpha \cdot cos\,\beta = sen\,\beta \cdot cos\,\alpha + sen\,(\alpha - \beta),$$

ou ainda,

$$sen\,(\alpha - \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\beta \cdot cos\,\alpha.$$

Analogamente, como $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FC}$, então de (2.9), (2.11) e (2.12) temos:

$$cos\,(\alpha - \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta.$$

Proposição 3 *Sejam* α, β *ângulos agudos tais que* $0 < \alpha + \beta < 90°$. *A seguinte identidade é válida*

$$cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta. \tag{2.14}$$

Dem : Consideremos um triângulo ΔAEF, retângulo em E, de hipotenusa igual a 1 e inscrito em um retângulo $ABCD$, onde $E\hat{A}F = \alpha$ e $D\hat{A}E = \beta$, veja a Figura 2.12

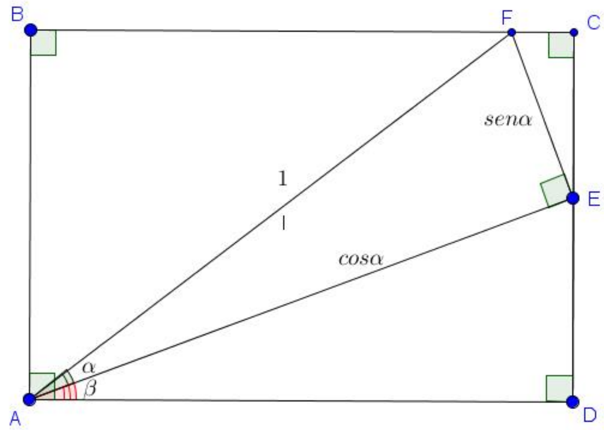


Figura 2.12: Retângulo auxiliar com triângulo ΔAEF, retângulo em E, inscrito, auxiliar para dedução das fórmulas $cos(a + b)$.

Escrevendo as razões trigonométricas para o ângulo α no triângulo ΔAEF, obtemos:

$$sen\,\alpha = \frac{\overline{EF}}{1} \Rightarrow \overline{EF} = sen\,\alpha,$$

$$cos\,\alpha = \frac{\overline{AE}}{1} \Rightarrow \overline{AE} = cos\,\alpha.$$

Escrevendo, também as razões trigonométricas para o ângulo β no triângulo ΔADE, temos:

$$sen\,\beta = \frac{\overline{DE}}{cos\,\alpha} \Rightarrow \overline{DE} = sen\,\beta \cdot cos\,\alpha, \tag{2.15}$$

$$cos\,\beta = \frac{\overline{AD}}{cos\,\alpha} \Rightarrow \overline{AD} = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta. \tag{2.16}$$

Observando a figura 2.12, podemos concluir que $A\widehat{F}B = \alpha + \beta$ e $C\widehat{E}F = \beta$, desse modo aplicando as razões trigonométricas no triângulo ΔABF, temos:

$$sen\,(\alpha+\beta) = \frac{\overline{AB}}{1} \Rightarrow \overline{AB} = sen\,(\alpha+\beta), \tag{2.17}$$

$$cos\,(\alpha+\beta) = \frac{\overline{BF}}{1} \Rightarrow \overline{BF} = cos\,(\alpha+\beta). \tag{2.18}$$

No triângulo ECF, temos então:

$$sen\,\beta = \frac{\overline{CF}}{sen\,\alpha} \Rightarrow \overline{CF} = sen\,\alpha \cdot sen\,\beta, \tag{2.19}$$

$$cos\,\beta = \frac{\overline{CE}}{sen\,\alpha} \Rightarrow \overline{CE} = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta. \tag{2.20}$$

Completando, então a Figura 2.13, com as igualdades (2.15)-(2.20), teremos:

Analogamente, pela definição de retângulo, $BC//DA$ e $\overline{BC} \equiv \overline{DA}$, então temos:

$$\begin{aligned} cos\,(\alpha+\beta) + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta &= cos\,\alpha \cdot cos\,\beta \\ cos\,(\alpha+\beta) &= cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta. \end{aligned}$$

Demonstraremos agora a fórmula da tangente da Soma e diferença de Ângulos.

Proposição 4 *Dados dois ângulos α e β, sendo $0 < \alpha + \beta < 90°$. Vale as seguintes identidades:*

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} \tag{2.21}$$

$$tg\,(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}. \tag{2.22}$$

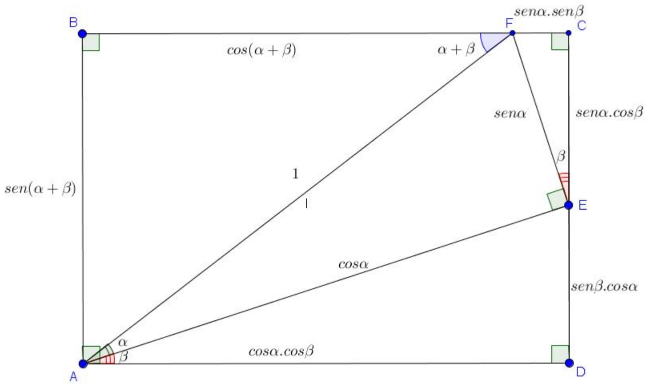


Figura 2.13: Dedução da fórmula $cos(a+b)$.

Dem: Pela definição da função tangente e usando (2.4) e (2.14) temos:

$$\begin{aligned} tg(\alpha+\beta) &= \frac{sen\,(\alpha+\beta)}{cos\,(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{sen\,\alpha\cdot cos\,\beta + sen\,\beta\cdot cos\,\alpha}{cos\,\alpha\cdot cos\,\beta - sen\,\alpha\cdot sen\beta}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Dividindo a igualdade (2.23) por $cos\,\alpha\cdot cos\,\beta$, teremos:

$$\begin{aligned} tg(\alpha+\beta) &= \frac{\frac{sen\,\alpha\cdot cos\,\beta}{cos\,\alpha\cdot cos\,\beta} + \frac{sen\,\beta\cdot cos\,\alpha}{cos\,\alpha\cdot cos\,\beta}}{1-\frac{sen\,\alpha\cdot sen\beta}{cos\,\alpha\cdot cos\,\beta}}. \\ &= \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta} \end{aligned}$$

Analogamente, podemos concluir que:

$$tg\,(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}.$$

2.4 Soma e Diferença de Ângulos Obtusos

A cada ponto no plano cartesiano corresponde a um par ordenado (x,y) de números reais. Assim, dados dois pontos $A=(x_0,y_0)$ e $B=(x_1,y_1)$ distintos do plano cartesiano, podemos calcular a distância entre esses pontos, aplicando o Teorema de Pitágoras.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2_{A,B} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2. \tag{2.24}$$

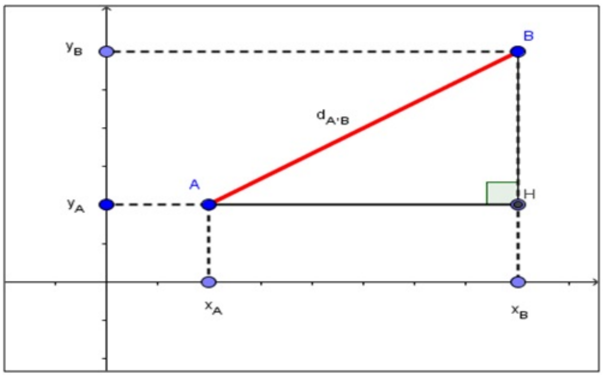


Figura 2.14: Dedução da fórmula $cos(a + b)$.

Vamos agora demonstrar as identidades para as funções trigonométricas da soma e diferença de dois ângulos. Sejam α, β dois ângulos arbitrários e consideremos os pontos $P = (cos\,\beta, sen\,\beta)$ e $Q = (cos\,\alpha, sen\,\alpha)$. De (2.24) temos que

$$\begin{aligned} d^2_{Q,P} &= (cos\,\alpha - cos\,\beta)^2 + (sen\,\alpha - sen\,\beta)^2 \\ &= cos^2\,\alpha - 2cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + cos^2\,\beta + sen^2\,\alpha \\ &\quad -2sen\,\alpha \cdot sen\,\beta + sen^2\,\beta \\ &= 2 - 2(cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Rotacionando os eixos x e y, em α radianos, teremos assim as novas coordenadas dos pontos $P = (cos(\beta - \alpha), sen(\beta - \alpha))$ e $Q = (1, 0)$.

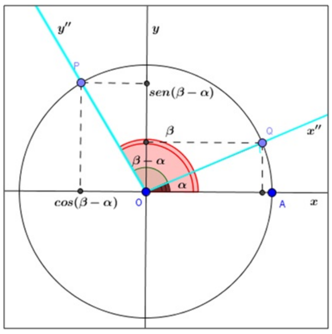


Figura 2.15: Novas coordenadas dos pontos P e Q nos eixos rotacionados x" e y".

Aplicando novamente (2.24) entre os dois pontos P e Q, segue que:

$$d^2_{Q,P} = (cos(\beta - \alpha) - 1)^2 + (sen(\beta - \alpha) - 0)^2$$

$$\begin{aligned} &= cos^2(\beta-\alpha) - 2\cdot cos(\beta-\alpha) + 1 + sen^2(\beta-\alpha) \\ &= 2 - 2\cdot cos(\beta-\alpha). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Portanto, de (2.25) e (2.26) temos

$$2 - 2\cdot cos(\beta-\alpha) = 2 - 2(cos\,\beta\cdot cos\,\alpha + sen\,\beta\cdot sen\,\alpha),$$

ou seja,

$$cos(\beta-\alpha) = cos\,\beta\cdot cos\,\alpha + sen\,\beta\cdot sen\alpha.$$

Para mostrarmos a fórmula da soma do cosseno de dois ângulos basta utilizarmos que $cos(-\alpha) = cos\,\alpha$ e $sen(-\alpha) = -sen\,\alpha$. Desta forma temos:

$$\begin{aligned} cos(\beta+\alpha) &= cos(\beta-(-\alpha)) \\ &= cos\,\beta\cdot cos(-\alpha) + sen\,\beta\cdot sen(-\alpha) \\ &= cos\,\beta\cdot cos\,\alpha - sen\,\beta\cdot sen\,\alpha. \end{aligned}$$

2.5 Fórmulas de Werner e Prostaférese

Desde o século XVI, com as grandes navegações, o comércio, a astronomia, entre outras áreas, sentiram a necessidade de fazerem operações matemáticas com números muito grandes ou muito pequenos. Fato este que demandava muito tempo, para facilitar esses cálculos, os matemáticos da época, como Johannes Werner (1468 – 1528), John Napier (1550 – 1617) usavam um método chamado de Prostaférese, em grego "prosthaphaeresis", que significa "adição" e "subtração", (EVES 1997; FLORIANI, 2000; LIMA, 1996, FLORIANI, 2000), este método usavam fórmulas trigonométricas para obter produtos e quocientes utilizando adições e subtrações, substituindo-as multiplicações e divisões, simplificando-as, pois o algoritmo da adição e subtração são muito mais simples. Estas fórmulas ficaram conhecidas como as fórmulas de Werner, provavelmente porque Johannes Werner $(1468-1528)$ as utilizou para facilitar cálculos na Astronomia (EVES, 2004, p. 343). Como, desde a época Ptolomaica, já existiam tabelas com os valores trigonométricos, era possível simplificar multiplicações e divisões, e vice-versa.

Na segunda metade do século XVI, a Dinamarca tornou-se um centro cultural, que se preocupava com os problemas relacionados com a navegação. Dois matemáticos dinamarqueses Wittich (1584) e Clavius (1593), este ultimo com a obra, "O Astrolábio" (1593), sugeriram o uso desse método para abreviar os cálculos.

Em alguns problemas matemáticos podemos obter o valor numérico de determinadas expressão aplicando cálculos diretos, em outras precisamos transformá-las ou fatorá-las para sua resolução. Veremos que estas transformações de soma e diferença de funções trigonométricas em produto, proporcionaram recursos para adaptar algumas fórmulas trigonométricas ao cálculo de logaritmos e realizar fatorações, que são utilizadas na resolução de equações trigonométricas.

Fazendo algumas operações com as fórmulas de adição e subtração de arcos já conhecidas e demonstradas anteriormente, temos:

$$cos(a+b) = cos\,a \cdot cos\,b - sen\,a \cdot sen\,b, \tag{2.27}$$
$$cos(a-b) = cos\,a \cdot cos\,b + sen\,a \cdot sen\,b \tag{2.28}$$
$$sen(a+b) = sen\,a \cdot cos\,b + sen\,b \cdot cos\,a, \tag{2.29}$$
$$sen(a-b) = sen\,a \cdot cos\,b - sen\,b \cdot cos\,a. \tag{2.30}$$

Somando as equações (2.27) e (2.28), obtemos:

$$\begin{aligned} cos(a+b) + cos(a-b) &= cos\,a \cdot cos\,b - sen\,a \cdot sen\,b + cos\,a \cdot cos\,b \\ &\quad + sen\,a \cdot sen\,b \\ &= 2cos\,a \cdot cos\,b. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Subtraindo (2.28) de (2.27), temos:

$$\begin{aligned} cos(a+b) - cos(a-b) &= cos\,a \cdot cos\,b - sen\,a \cdot sen\,b - cos\,a \cdot cos\,b \\ &\quad - sen\,a \cdot sen\,b \\ &= -2sen\,a \cdot sen\,b. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Somando as equações (2.29) e (2.30), chegamos a:

$$\begin{aligned} sen(a+b) + sen(a-b) &= sen\,a \cdot cos\,b + sen\,b \cdot cos\,a + sen\,a \cdot cos\,b \\ &\quad - sen\,b \cdot cos\,a \\ &= 2sen\,a \cdot cos\,b. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Subtraindo (2.30) de (2.29) temos:

$$\begin{aligned} sen(a+b) - sen(a-b) &= sen\,a \cdot cos\,b + sen\,b \cdot cos\,a - sen\,a \cdot cos\,b \\ &\quad + sen\,b \cdot cos\,a \\ &= 2sen\,b \cdot cos\,a. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Essas identidades trigonométricas são denominadas Fórmulas de Werner ou Fórmulas de Reversão. Nas igualdades acima, podemos observar que nos primeiros membros temos soma ou diferença de dois arcos, denotando $a+b = p$ e $a-b = q$ encontramos que $a = \dfrac{p+q}{2}$ e $b = \dfrac{p-q}{2}$. Substituindo os valores de a e b em (2.31)-(2.34) encontraremos as quatro fórmulas denominadas de Fórmulas de Prostaférese:

$$\begin{aligned}
cos\, p + cos\, q &= 2cos\frac{p+q}{2}cos\frac{p-q}{2}, \\
cos\, p - cos\, q &= -2sen\frac{p+q}{2}sen\frac{p-q}{2}, \\
sen\, p + sen\, q &= 2sen\frac{p+q}{2}cos\frac{p-q}{2}, \\
sen\, p - sen\, q &= 2cos\frac{p+q}{2}sen\frac{p-q}{2}.
\end{aligned}$$

Nesse segundo capítulo estudamos e demonstramos as identidades trigonométricas, algumas aplicações e um breve relato de suas Histórias.

No Capítulo 3 estudaremos as Funções Trigonométricas e seus gráficos, com construções feitas no software GeoGebra.

Capítulo 3

Gráficos e Propriedades das Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas podem ser representadas graficamente como qualquer outra função. Nos gráficos sempre usaremos radianos para a medida dos ângulos.

3.1 Gráficos das Funções Trigonométricas

A primeira função que iremos representar graficamente é a função seno. Vamos descrever uma forma geométrica para criar o gráfico, usando o círculo unitário. Vemos na Figura 3.1 que qualquer ponto $P = (x, y)$ no círculo unitário tem coordenadas $(x, y) = (cos\,\theta, sen\,\theta)$, onde θ é o ângulo que o segmento OP faz com o eixo x positivo. Assim como o ponto (x, y) gira em torno do círculo, sua coordenada y é o $sen\,\theta$.

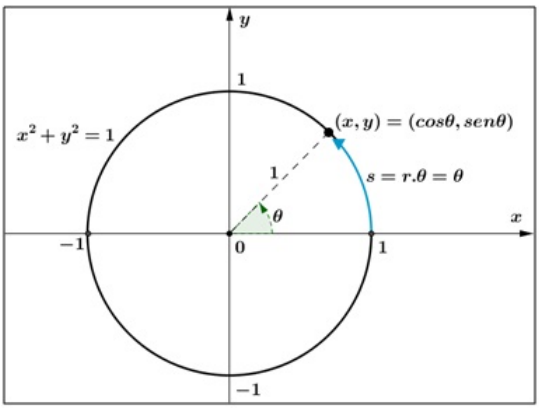


Figura 3.1: Círculo Unitário

Nós, assim, obtemos uma correspondência entre as ordenadas y no círculo unitário e os valores de $f(\theta) = sen\,\theta$, como mostrado na figura 3.2 para os ângulos $\theta = 0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}$.

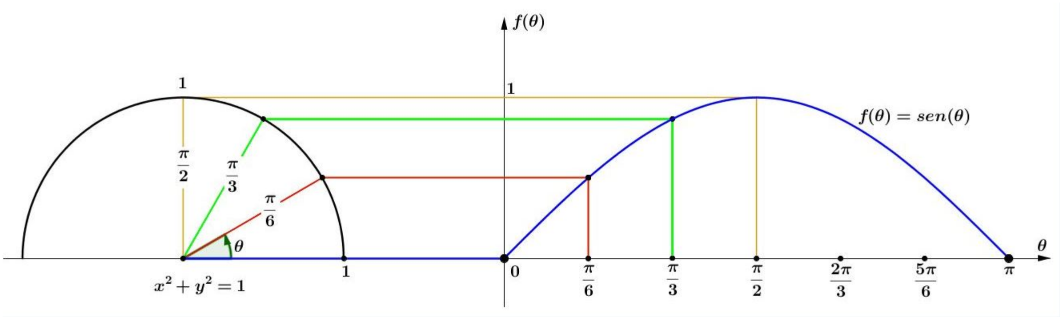


Figura 3.2: Gráfico da função seno com base na coordenada y dos pontos do circulo unitário

Podemos estender a figura acima para incluir os ângulos de 0 a 2π radianos, como na Figura 3.3.

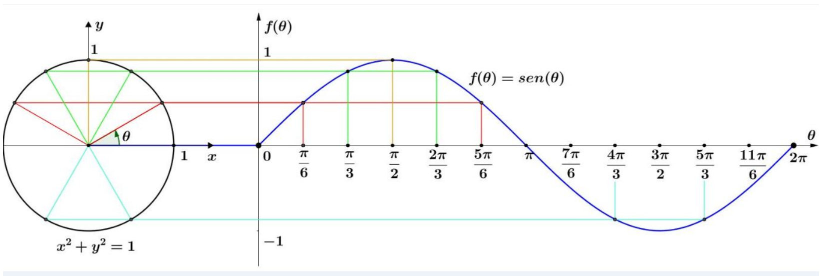


Figura 3.3: Função seno no circulo unitário

Uma vez que as funções trigonométricas se repetem a cada 2π radianos ($360°$), temos, o seguinte gráfico da função $y = sen\,x$:

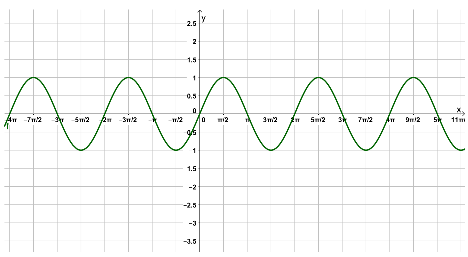


Figura 3.4: gráfico da função $y = sen\,x$

Para representar graficamente a função cosseno, utilizaremos o fato que $cosx = sen(x + \frac{\pi}{2})$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Deste modo o gráfico da função cosseno é apenas o gráfico da função seno deslocado para a esquerda por $\frac{\pi}{2}$ radianos, como mostra a Figura 3.5:

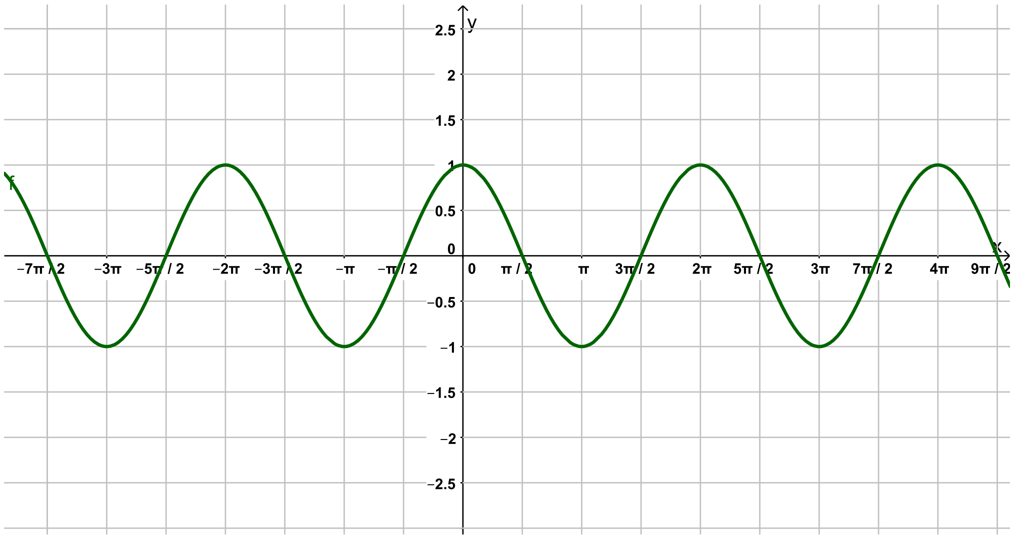


Figura 3.5: gráfico da função $y = cos\, x$

Para representar graficamente a função tangente, usaremos $tg\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$, notemos aqui que a tangente não está definida nos pontos onde $cos\, x = 0$, assim obtemos o seguinte gráfico:

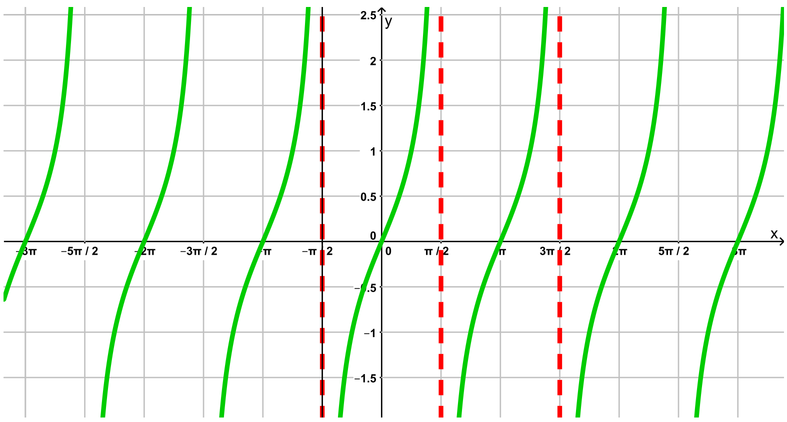


Figura 3.6: gráfico da função $y = tg\, x$

Observamos que a função tangente é positiva para ângulos nos quadrantes

I e III, e é negativa nos quadrantes II e IV, além disso $tg\,x$ não está definido quando $cos\,x = 0$, isto é, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Notemos que para x no primeiro quadrante e próximo de $\dfrac{\pi}{2}$, as funções $sen\,x$ e $cos\,x$ são ambas positivas, com o $sen\,x$ muito próximo de 1 e $cos\,x$ próximo de 0, então o quociente $tg\,x = \dfrac{sen\,x}{cos\,x}$ é um número positivo que é muito grande, quanto mais perto x está de $\dfrac{\pi}{2}$, maior será o valor de $tg\,x$. Assim, a reta $x = \dfrac{\pi}{2}$ é uma assíntota vertical do gráfico de $y = tg\,x$.

Para x no segundo quadrante próximo de $x = \dfrac{\pi}{2}$, $sen\,x$ está próximo de 1 enquanto que $cos\,x$ é negativo e muito próximo de 0, então o quociente $tg\,x = \dfrac{sen\,x}{cos\,x}$ é um número negativo que é muito grande, e fica maior no sentido negativo quando x se aproxima de $x = \dfrac{\pi}{2}$. O gráfico 3.6 mostra isso. Assim, obtemos as assíntotas verticais em $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$, e $x = -\frac{3\pi}{2}$, como na Figura 3.6. Notemos que o gráfico da função tangente repete a cada π radianos, ou seja, duas vezes mais rápido que os gráficos de seno e cosseno.

Para analisarmos o gráfico da função $cosec\,x = \dfrac{1}{sen\,x}$, podemos apenas olhar para o gráfico de $y = senx$ e inverter os valores. Encontramos as assíntotas verticais quando $sen\,x = 0$, ou seja, para $x = k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$. A Figura 3.7 apresenta o gráfico de $y = cosec\,x$,

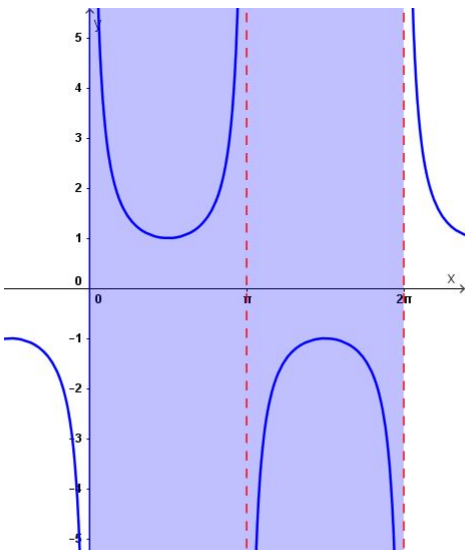


Figura 3.7: gráfico da função $y = cosec\,x$

A Figura 3.8 mostra o gráfico de $y = sec\,x$. Observemos as assíntotas verticais em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Observemos também que o gráfico é apenas o gráfico da função cosecante deslocado para a esquerda por $\dfrac{\pi}{2}$ radianos.

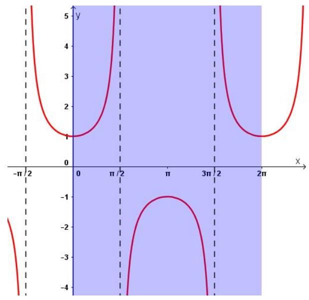


Figura 3.8: gráfico da função $y = sec\, x$

O gráfico de $y = cotg\, x$ pode ser determinado usando a relação $cotg\, x = -tg(x + \dfrac{\pi}{2})$, deste modo o gráfico da função co-tangente é apenas o gráfico da função tangente deslocado para a esquerda por $\dfrac{\pi}{2}$ radianos e depois refletido em torno do eixo x, tal como na Figura 3.9:

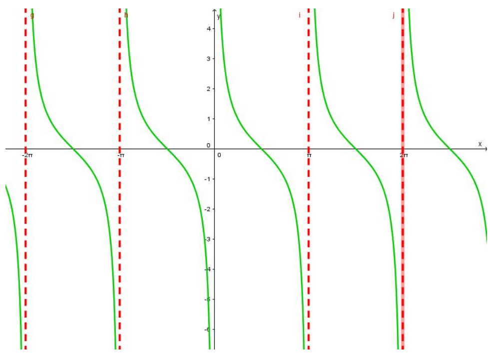


Figura 3.9: gráfico da função $y = cotg\, x$

3.2 Propriedades de Gráficos de Funções Trigonométricas

Vimos na Seção anterior como os gráficos das funções trigonométricas se mostram periódicos, os gráficos de seno e cosseno se repetem a cada 2π radianos, o gráfico da tangente se repete a cada π radianos, etc. Nesta seção, vamos discutir as propriedades dos gráficos, especialmente para as funções senoidais (seno e cosseno). Em primeiro lugar, lembremos que o domínio de uma função f é o conjunto de todos os números de x real para o qual a função está definida. Por exemplo, o domínio de $f(x) = sen\,x$ é o conjunto de todos os números reais, enquanto que o domínio de $g(x) = tg\,x$ é o conjunto de todos os números reais, exceto $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ onde $k \in \mathbb{Z}$. A imagem de uma função f é o conjunto de todos os valores que f pode assumir em seu domínio. Por exemplo, a imagem de $f(x) = sen\,x$ é o conjunto de todos os números reais entre -1 e 1 (i.e. o intervalo $[-1, 1]$), ao passo que a imagem de $f(x) = tg\,x$ é o conjunto de todos os números reais, como podemos ver na Figura 3.6.

Definição 2 *Uma função f é dita ser periódica, se existe um número $k \in \mathbb{R}^+$ tais que $x + k$ pertence ao domínio da função f, e se a seguinte relação se mantém:*

$$f(x+k) = f(x), \quad \forall\, x \in Dom\, f.$$

Pode haver infinitos k satisfazendo a propriedade anterior, se houver um menor número k, chamamos esse número de o período da função f.

Definição 3 *A amplitude de uma função periódica f é definido como a metade da diferença entre o maior e o menor valor que $f(x)$ assume, ou seja,*

$$Amplitude\ de\ f(x) = \frac{(Máximo\ de\ f(x)) - (Mínimo\ de\ f(x))}{2}.$$

Exemplo 3.2.1 *As funções $sen\,x, cos\,x, cossec\,x$, e $sec\,x$ possuem o mesmo período: 2π radianos. As funções $tg\,x$ e $cotg\,x$ têm um período de π radianos. A amplitude das funções $sen\,x$ e $cos\,x$ é igual a 1, enquanto que as funções $cossec\,x, sec\,x, tg\,x$ e $cotg\,x$ não possuem amplitude pelo fato de não serem limitadas.*

Faremos agora uma análise do comportamento do gráfico das funções

$$y(x) = a + bsen(cx + d) \qquad y(x) = a + bcos(cx + d),$$

quanto ao período, amplitude e imagem, onde a, b, c e d são números reais.

Exemplo 3.2.2 *Qual a amplitude e o conjunto imagem das funções*

$$y = bsen\,x \quad e \quad y = bcos\,x,$$

onde b é uma constante não nula.

Solução: Sabemos que $-1 \leq sen\, x \leq 1$ e $-1 \leq cos\, x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, para uma constante $b \neq 0$, temos

$$-|b| \leq bsen\, x \leq |b| \quad \text{e} \quad -|b| \leq bcos\, x \leq |b|,$$

para todos os valores de x. Neste caso, a amplitude das funções $y = bsen\, x$ e $y = bcos\, x$ é igual a $|b|$. O conjunto imagem é alterado da seguinte forma:

$$y(x) = b\, sen\, x \Rightarrow Im\, y = [-b, b].$$

A variação do parâmetro b pode ser observado na Figura 3.10:

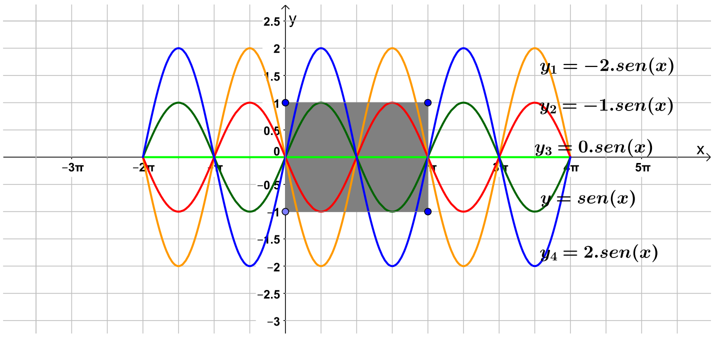


Figura 3.10: Estudo da função $y = bsen\, x$

$$\begin{aligned}
&b = -2: \; y(x) = -2sen\, x \Rightarrow Im\, y = [-1.(-2), 1.(-2)] = [-2, 2],\\
&b = -1: \; y(x) = -1.sen\, x \Rightarrow Im\, y = [-1(-1), 1.(-1)] = [-1, 1],\\
&b = 1: \; y(x) = sen\, x \Rightarrow Im\, y = [-1.1, 1.1] = [-1, 1],\\
&b = 2: \; y(x) = 2.sen\, x \Rightarrow Im\, y = [-1.2, 1.2] = [-2, 2].
\end{aligned}$$

Exemplo 3.2.3 *Encontrar o conjunto imagem das funções*

$$y(x) = a + sen\, x, \quad e \quad y(x) = a + cos\, x.$$

Solução: Observemos que:

$$-1 \leq sen\, x \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq cos\, x \leq 1$$

então

$$a - 1 \leq a + sen\, x \leq a + 1, \quad \text{e} \quad a - 1 \leq a + cos\, x \leq a + 1$$

ou seja:

$$y(x) = a + sen(x) \Rightarrow Im\, y = [a - 1, a + 1],$$

e

$$y(x) = a + cos(x) \Rightarrow Im\, y = [a - 1, a + 1].$$

Atribuindo alguns valores para o parâmetro a observamos que:

$$\begin{aligned}
&a = 0: \ y(x) = sen(x) \Rightarrow Im\, y = [-1, 1],\\
&a = 1: \ y(x) = 1 + sen(x) \Rightarrow Im\, y = [-1 + 1, 1 + 1] = [0, 2],\\
&a = 2: \ y(x) = 2 + sen(x) \Rightarrow Im\, y = [-1 + 2, 1 + 2] = [1, 3],\\
&a = -1: \ y(x) = -1 + sen(x) \Rightarrow Im\, y = [-1 - 1, 1 - 1] = [-2, 0].
\end{aligned}$$

Observando a Figura 3.11, ao variar o parâmetro a ocorre uma "translação vertical" no gráfico.

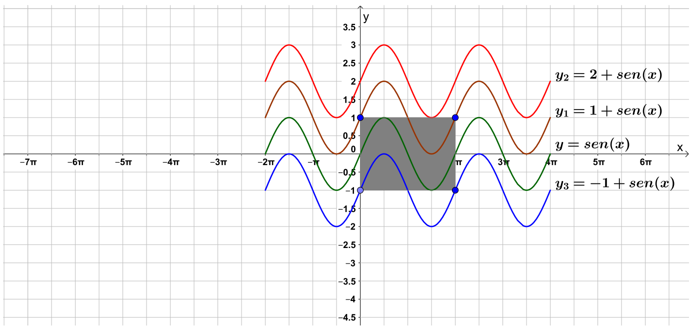


Figura 3.11: Estudo da função $y = a + sen\, x$

Exemplo 3.2.4 *Encontrar o período da função*

$$y(x) = sen(cx),$$

onde c é uma constante positiva.

O gráfico de $y = sen(cx)$, com $c = 2$ e $1/2$ é mostrado na Figura 3.12, juntamente com o gráfico de $y = sen(x)$ para comparação.

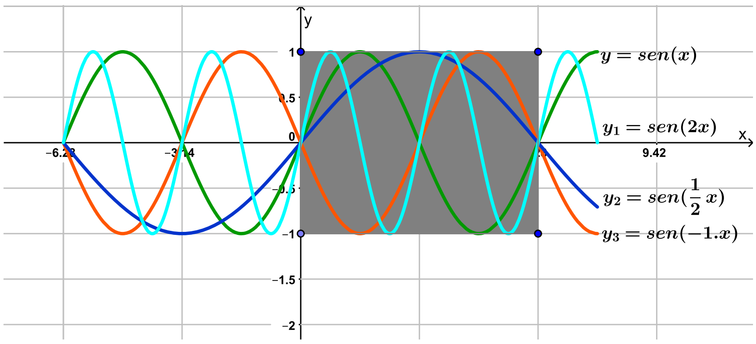


Figura 3.12: Estudo da função $y = sen(cx)$

Note que, se variando x de 0 a $\frac{\pi}{2}$, $sen(x)$ varia de 0 a 1, enquanto que $sen(2x)$ é capaz de variar de 0 a 1 mais rápido, apenas no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$. Enquanto o $sen(x)$ possui um período de 2π radianos, a função $sen\,(2x)$ passa por um ciclo completo em π radianos. Assim, o período de $sen(2x)$ é π radianos. No caso geral temos que $y(x) = sen(cx)$ tem período $\frac{2\pi}{c}$, pois

$$y(x + \frac{2\pi}{c}) = sen\,c(x + \frac{2\pi}{c}) = sen(cx + 2\pi) = sen(cx) = y(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, deste modo, o período p de $y(x) = sen(cx)$ é no máximo $\frac{2\pi}{c}$, por nossa definição de período. Temos que mostrar que $p > 0$ não pode ser menor do que $\frac{2\pi}{c}$. Para fazer isso, vamos utilizar uma prova por contradição.

Suponhamos que $0 < p < \frac{2\pi}{c}$, então $0 < cp < 2\pi$, e portanto

$$\begin{aligned} sen(cx) &= y(x) \\ &= y(x+p) \text{ (estamos assumindo que } p \text{ é o período de } y(x)) \\ &= sen\,c(x+p) \\ &= sen(cx+cp). \end{aligned}$$

Uma vez que qualquer número $u \in \mathbb{R}$ pode ser escrito como cx, isto significa que $sen(u) = sen(u+cp)$ para todos os números reais u, e, portanto, o período de $sen(x)$ é no máximo cp. Isto é uma contradição, pois o período de $sen(x)$ é $2\pi > cp$. Assim, o período p de $sen(cx)$ não pode ser inferior a $\frac{2\pi}{c}$, então o período deve ser igual a $\frac{2\pi}{c}$.

De modo análogo, o mesmo argumento pode ser usado para mostrar que o período da função $y(x) = cos(cx)$ é $\frac{2\pi}{c}$.

No caso onde $c < 0$ usamos que $sen(-A) = -senA$ e $cos(-A) = cos\,A$, e portanto concluímos que o período das funções $y(x) = sen(cx)$ e $y(x) = cos(cx)$ é $\frac{2\pi}{|c|}$.

Exemplo 3.2.5 *Considere a função*

$$y = sen(x + d),$$

onde d é uma constante arbitrária. Mostrar que o gráfico da função sofre um deslocamento horizontal com a variação do parâmetro d.

Solução: A função *seno* passa por um ciclo completo quando o seu ângulo vai de 0 a 2π. Aqui, estamos aplicando *seno* do ângulo $x + d$. Assim, quando $x + d$ vai de 0 a 2π, a função $y = sen(x + d)$ passa por um ciclo completo. Esse ciclo começa quando

$$x + d = 0 \Rightarrow x = -d,$$

e termina quando

$$x + d = 2\pi \Rightarrow x = 2\pi - d.$$

O gráfico de $y = sen(x + d)$ é apenas o gráfico de $y = sen(x)$ deslocado horizontalmente d, como na Figura 3.13. O gráfico é deslocado para a direita, quando $d < 0$, e para a esquerda quando $d > 0$.

Assim, a variação dos parâmetros a, b, c e d nas funções $y(x) = a + bsen(cx + d)$ e $y(x) = a + bcos(cx + d)$ se resume no seguinte resultado:

Proposição 5 *Sejam a, b, c e d constantes com $b \neq 0, c \neq 0$. Consideremos as funções*

$$y(x) = a + bsen(cx + d) \quad e \quad y(x) = a + bcos(cx + d).$$

O período é $\frac{2\pi}{|c|}$, amplitude igual a $|b|$ e o conjunto imagem é $[a-b, a+b]$.

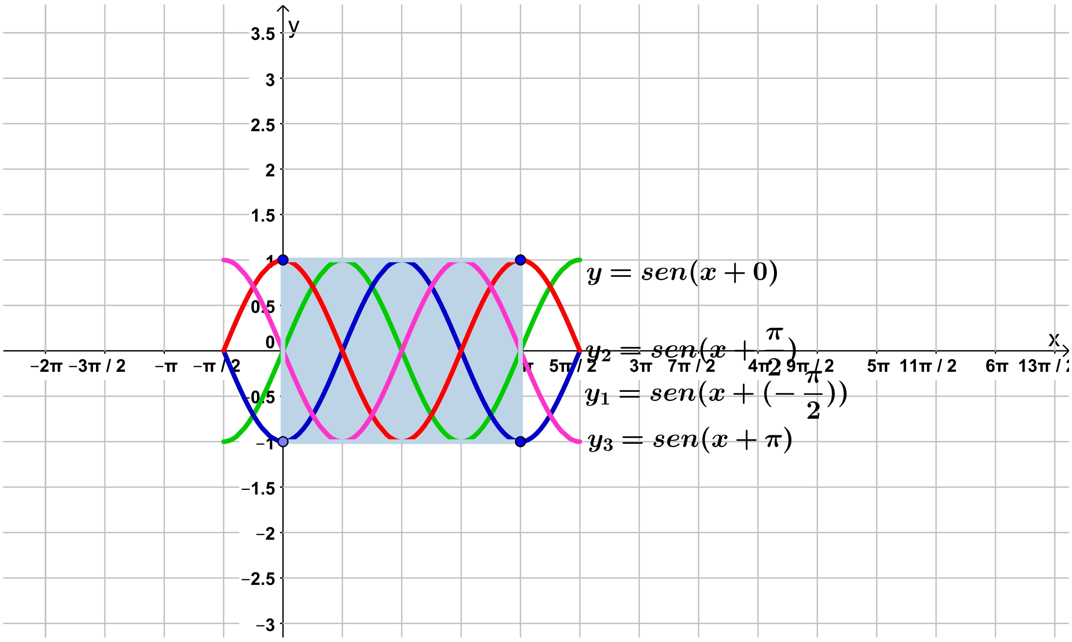


Figura 3.13: Estudo da função $y = sen(cx)$

Exemplo 3.2.6 *Encontrar o período, a amplitude, a imagem e esboçe o gráfico da seguinte função*

$$y(x) = 2 + 4sen(3x - 1).$$

Solução: Neste caso temos que $c = 3$, logo o período é $\dfrac{2\pi}{3}$. Temos também que $b = 4$, assim a amplitude é 4. O conjunto imagem é o intervalo $[-2, 6]$.

Agora, que finalizamos este estudo das Funções Trigonométricas, seus gráficos e as variações dos parâmetros, relataremos no próximo capítulo um estudo realizado em sala de aula com os alunos.

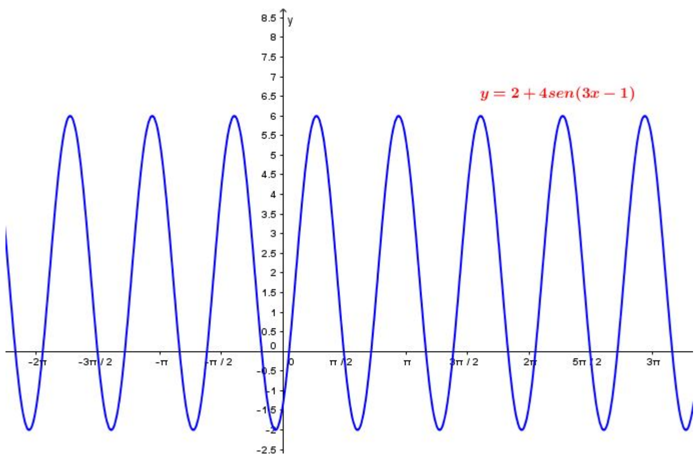


Figura 3.14: Gráfico da função $y(x) = 2 + 4sen(3x - 1)$.

Capítulo 4

Estudo Dirigido em Sala de Aula

Durante o período de magistério com aulas no ensino médio público, percebemos a dificuldade dos alunos em aplicar, construir, visualizar e analisar problemas de razões trigonométricas e os gráficos das funções trigonométricas.

Percebemos, ainda ser indispensável tornar o ensino da matemática, mais especificamente da trigonometria, inovador e mais atraente para os alunos. Era também necessária uma percepção, pelos alunos, de um sentido para a aprendizagem desse conteúdo.

Por essas razões, optemos pelo uso do software "Geogebra", para trabalharmos em sala. Este programa foi criado por Markus Hohenwarter, em 2001, escrito em JAVA e disponível em português. Este software pode ser instalado facilmente em computadores com sistemas operacionais distintos. Para instalá-lo, basta clicar no site
http://www.geogebra.org/cms/em/download/ e seguir as orientações, pois este é um software gratuito de matemática dinâmica, que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo, permitindo, dentre tantas aplicações, realizar a construção de gráficos de funções reais, entre essas, as funções trigonométricas.

Como o software é de fácil manuseio e de livre acesso, por ser gratuito, provavelmente seria de grande aceitação por parte dos alunos.

Inicialmente, entreguamos a cada aluno um termo de autorização (anexo 1).

Em sala de aula, foi realizado um levantamento prévio dos conhecimentos acerca de Trigonometria (Questionário I- anexo 2).

Na semana seguinte, o grupo de alunos foi ao laboratório de informática da escola para, sob minha orientação, construir e analisar gráficos das funções trigonométricas básicas.

Nos próximos dois encontros, em semanas sucessivas, o grupo retornou ao laboratório para analisar a influência da variação dos quatro parâmetros nos gráficos das funções trigonométricas, ocasião em que também aplicaram seus conhecimentos na resolução de exercícios contextualizados.

4.1 Contextualização da Pesquisa

A pesquisa foi realizada sobre o conteúdo de Trigonometria, especificamente sobre gráficos de Funções Trigonométricas e resolução de problemas que apliquem esses conceitos básicos, com 20 alunos de segundos anos do Ensino Médio, no final do primeiro bimestre de 2016, na escola E.E. "João Brembatti Calvoso", escola tradicional de rede pública estadual, situada na avenida principal da cidade do interior paulista, Andradina.

A escola conta com 833 alunos matriculados, divididos em Ensino fundamental e Médio, sendo 511 no Ensino fundamental e 322 no Ensino Médio.

O corpo docente é formado por professores doutores, mestres, especialistas entre outros, uma diretora e uma vice-diretora, uma professora coordenadora pedagógica, duas professoras mediadoras e uma supervisora de ensino.

A escola tem 73 anos de existência, conta com 16 salas de aulas, três laboratórios, sendo dois de ciências da natureza e um de informática, uma ampla biblioteca, com um grande acervo, um amplo anfiteatro, com palco e camarins, duas quadras poliesportivas, sendo uma coberta.

O período matutino conta com 15 salas, sendo sete do Ensino Fundamental e oito do Ensino Médio. O período vespertino conta com nove salas, sendo duas de Ensino Médio. A escola não trabalha no período noturno.

Dentre as três salas de segundo ano de Ensino Médio escolhemos trabalhar, para realização deste projeto, com a sala do período matutino, por ser a professora titular da classe. Dessa sala foram selecionados 20 alunos segundo o critério de comprometimento e interesse em ciências exatas, para que o projeto fosse desenvolvido a contento.

4.2 Caracterização da Pesquisa

Para o desenvolvimento do estudo dirigido em sala de aula, optamos por uma abordagem qualitativa com os alunos, conduzidos por mim, professora da turma, onde assumimos os trabalhos de intervenção e mediação no desenvolvimento das atividades propostas. Foram promovidos seis encontros para o desenvolvimento desse projeto, sendo três em sala de aula e três no laboratório de informática, no contra turno; um encontro por semana, com duração de duas horas, ou seja, duas aulas cada encontro.

1° **Encontro:**

O primeiro encontro foi realizado, em grupo, na sala de aula. Iniciamos explicando aos alunos que este trabalho fazia parte de uma monografia de mestrado e perguntei se eles gostariam de partilhar esta experiência conosco. Depois de agradecer por eles aceitarem, entregamos o termo de autorização de voz e imagem (anexo 1), então começamos a conversar com eles sobre o desenvolvimento e aplicação deste projeto. Após esta explanação, iniciamos fazendo uma retrospectiva sobre os estudos de ângulos, triângulos, semelhança de triângulos, triângulos retângulos, razões entre os lados do triângulo, entre outros para, só depois, entregar-lhes uma avaliação diagnóstica (anexo 2), para averiguar-lhes os conhecimentos prévios sobre o assunto. Esta avaliação, que consta dos anexos deste trabalho, teve o intuito de avaliar a capacidade dos alunos em aplicar conceitos das razões trigonométricas e construir e analisar gráficos trigonométricos de fenômenos periódicos.

Figura 4.1: Alunos do 2° A, sentados em grupo, respondendo avaliação diagnóstica.

2° **Encontro:**

Na semana seguinte, em contra turno, foi realizada no laboratório de informática a apresentação do software "Geogebra". Primeiramente, os alunos tiveram contato com o software Geogebra e seus comandos básicos, através de uma apresentação em data-show. Após as orientações, cada aluno fez uso de um computador para construir com o software gráfico de funções elementares, como função polinomial do 1° e 2°, função exponencial e logarítmica, para que pudessem se familiarizar com os comandos do software.

Durante todo o trabalho, fomos auxiliando os mesmos em suas dificuldades de manusear o software. Alguns alunos serviram de monitores dos colegas, pois apresentaram facilidade em trabalhar com a ferramenta.

No decorrer da realização das atividades propostas, fomos questionando os alunos sobre as propriedades e características dos gráficos construídos direcionando-os durante as atividades.

Figura 4.2: Alunos na sala de informática aprendendo a manusear o software "GeoGebra".

3° **Encontro:**

Dando prosseguimento ao trabalho, no terceiro encontro, em sala de aula, os alunos foram separados em grupos e, posteriormente, sob nossa orientação, foi apresentado um roteiro das atividades para serem desenvolvidas neste dia.

Entregamos um questionário sobre as funções trigonométricas, que já haviam sido estudadas anteriormente da maneira tradicional. Este questionário consta de tabelas variando os quatro parâmetros das funções trigonométricas (anexo 3). Inicialmente, cada parâmetro teve sua influência analisada separadamente. Os grupos preencheram as tabelas fazendo os cálculos necessários, com os valores fornecidos. Deixei que trabalhassem com consulta aos livros didáticos disponíveis [18] e [23] e calculadoras.

Neste encontro, percebemos que os alunos, em sua maioria, apesar de realizar os cálculos, não conseguiam visualizar os resultados, por exemplo, se havia ocorrido uma ampliação, redução, se a alteração foi no conjunto imagem, no período, na amplitude. Estavam confusos, por isso no próximo encontro, fomos ao laboratório de informática para trabalhar com o software, de forma a visualizar melhor as variações dos parâmetros.

Figura 4.3: Alunos em sala, preenchendo o questionário. Questionários preenchidos pelos alunos.

4° **e** 5° **Encontro:**

No quarto e quinto encontro, no laboratório de informática, foram tiradas dúvidas remanescentes do encontro anterior, principalmente, em relação à construção dos gráficos das funções trigonométricas básicas. Sanadas as dúvidas e com as tabelas já preenchidas em sala, eles construíram novamente os gráficos variando os parâmetros, porém agora no GeoGebra. Na tela do computador, puderam comparar, arrastar os gráficos, discutir e anotar as mudanças ocorridas em função da variação de valores do parâmetro estudado, analisando os seus resultados em grupo, contudo agora muito mais fácil de visualizar no computador. Puderam perceber o que acontecia quando havia uma translação na horizontal que alterava o período; na vertical, alterava o conjunto imagem, e assim sucessivamente. Após os grupos terminarem essa atividade, cada grupo apresentou sua conclusão. Durante as apresentações, quando necessário, realizavamos algumas intervenções pertinentes, encaminhando-os para que chegassem às próprias conclusões.

Em seguida, finalizamos concluindo com eles cada tabela, sistematizando e generalizando cada situação. Inicialmente, os alunos apresentaram grandes dificuldades, mas, no decorrer das atividades, foram se familiarizando com o software e seus comandos e, ao final do quinto encontro, já apresentavam segurança em manusear o software.

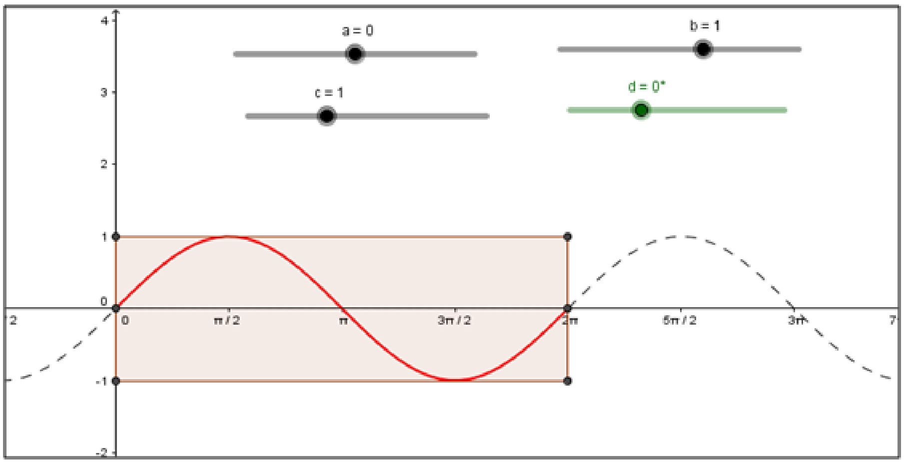


Figura 4.4: Tela do computador no Geogebra do aluno variando os parâmetros.

Figura 4.5: Fotos dos alunos no quarto encontro: trabalhando com o Geogebra variando os parâmetros.

6° **Encontro – Último encontro**

Neste encontro, os alunos responderam, em sala de aula, uma prova de avaliação externa proposta pela Secretária da Educação do Estado de São Paulo "11^a AAP- Avaliação de Aprendizagem em Processo" (anexo 4). Essa é uma avaliação externa individual realizada ao final dos bimestres. Nesta, em especial, o enfoque principal foi o conteúdo de Trigonometria. Como a sua aplicação coincidiu com o final do projeto, aproveitamos para avaliar o desempenho dos alunos.

Figura 4.6: Aplicação da 11ª AAP- Avaliação de Aprendizagem em Processo.

4.3 Análise Prévia dos Resultados

A classe do segundo ano A, do Ensino Médio, possui 38 alunos, porém os que participaram de todos os encontros, com assiduidade total, foram vinte alunos.

No início, observamos que alguns deles não se lembravam das fórmulas básicas das razões trigonométricas e nem conseguiram construir o gráfico elementar; percebemos também maiores dificuldades nos problemas.

Os alunos alegaram que esse conteúdo não tinha sido visto por eles nas séries anteriores. Outros disseram ainda, que já tinham visto o conteúdo, mas que fora trabalhado de forma superficial, e não conseguiam aplicar esse conhecimento para resolver problemas ou construir os gráficos. Segue a seguir um gráfico do desempenho dos alunos na avaliação diagnóstica do primeiro encontro.

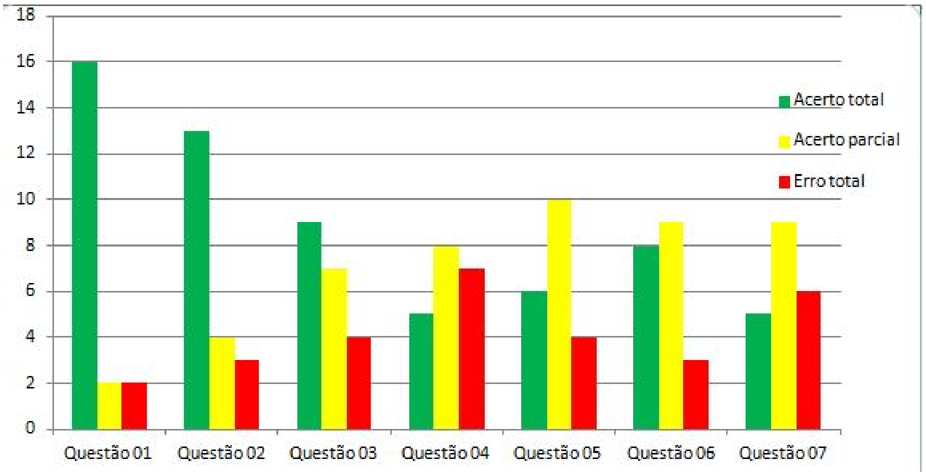


Figura 4.7: Gráfico dos resultados da avaliação diagnóstica (Questionário 1)

Quando apresentamos os resultados da avaliação diagnóstica aos alunos, eles relataram que seria pior se a mesma não tivesse sido resolvida em grupo.

No decorrer dos encontros, observamos que o interesse deles foi aumentando, à medida que começaram a compreender e realizar as atividades propostas. Os problemas apresentados no início, os quais os alunos não conseguiram, em sua maioria, nem começar a resolver, foram resolvidos, no último encontro, por praticamente todos.

No laboratório de informática, o interesse e o envolvimento dos alunos foram crescente a cada novo encontro.

Após a correção da prova, fizemos a devolutiva para os alunos, apresentando as questões em data-show, discutindo-as e, constatamos que, na parte gráfica das funções, houve um grande progresso, já que eles fizeram com mais segurança e obtiveram um bom índice de acertos; os menores índices de acertos foram nos problemas. Por isso, propusemos mais problemas contextualizados de fenômenos periódicos, os quais os alunos resolveram nos grupos, socializando, ao final, suas resoluções. No anexo 5 deste trabalho, encontram-se algumas das questões apresentadas aos alunos.

Analisando os resultados da 11ª AAP – Avaliação de Aprendizagem em Processo do Estado de São Paulo, resolvida de forma individual, pudemos constatar que os alunos do segundo ano A do Ensino Médio que participaram do trabalho, obtiveram um melhor desempenho nessa avaliação, na qual, praticamente, só foi cobrado Trigonometria, conforme a planilha abaixo constante do relatório oficial da Escola Estadual João Brembatti Calvoso.

PROVA: AAP 11a Edicao - 2a serie do Ensino Medio - Matematica
DIRETORIA: ANDRADINA
ESCOLA: JOAO BREMBATTI CALVOSO
Disciplina: MATEMATICA

TURMA	QUESTÕES														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2 SERIE A MANHA	91%	72%	81%	81%	40%	51%	64%	35%	64%	56%	78%	64%	59%	51%	54%
2 SERIE C TARDE	40%	26%	39%	22%	11%	47%	30%	12%	50%	0%	54%	11%	20%	12%	6%
2 SERIE B MANHA	85%	32%	50%	67%	23%	17%	8%	55%	73%	8%	64%	20%	70%	20%	44%
MEDIA GERAL	72%	43,33%	56,67%	56,67%	24,67%	38,33%	34%	34%	62,33%	21,33	65,33%	31,67	49,67%	27,67%	34,67%

Figura 4.8: Fonte: www.educacao.sp.gov.br/cgeb/secretaria-escolar-digital/

Os alunos relataram que o projeto foi muito bom, pois eles entenderam melhor e agora conseguiam interpretar, aplicar esse conhecimento em problemas.

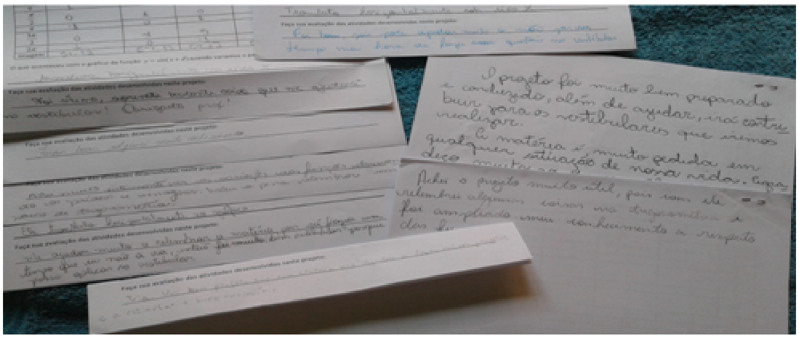


Figura 4.9: Avaliação final dos alunos.

Conclusões

Nossos alunos são frequentemente avaliados, tanto em avaliações internas quanto externas, como SARESP - Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio, AAP – Avaliação da Aprendizagem em Processo do Estado de São Paulo, dentre outras. Para que obtenham bons resultados, precisamos de aulas dinâmicas e bem preparadas, com atividades contextualizadas, que envolvam, além dos conceitos básicos teóricos, também os recursos tecnológicos, de modo que ajudem nossos alunos não só a contextualizar, mas a adquirir a habilidade de ler, interpretar, abstrair e generalizar.

Nessa relação, professor e aluno devem se sentir desafiados a fazer uma aula diferente. O professor, quando faz o planejamento de sua aula, deve procurar proporcionar aos alunos tarefas em que os mesmos se sintam desafiados a trabalhar para atingir os objetivos propostos.

Por isso, neste trabalho, usamos o software "Geogebra" nas aulas de laboratório, pois assim, além de aumentar o interesse dos alunos, também os faz desenvolverem habilidades de análise e percepção de propriedades, difíceis de serem visualizadas na lousa.

No intuito de dinamizar e melhorar o desempenho no estudo da Trigonometria, propusemos a realização deste trabalho, pois como já dissemos anteriormente, é um conteúdo em que os alunos apresentam grandes dificuldades. Procuramos estudar uma fundamentação teórica, e depois trabalhar com recursos tecnológicos, como o software "GeoGebra", pois o uso desta ferramenta nas aulas desperta o interesse e motiva os alunos a realizarem e explorarem atividades, aumentando a visualização e a argumentação por meio do processo de construir, arrastar as figuras na tela do computador, fazendo inúmeros e sucessivos testes.

Deparamo-nos também com desvantagens, como o número limitado de computadores da escola e, muitas vezes, máquinas desatualizadas, o que dificultou um pouco o trabalho.

No entanto, pensamos ter alcançado nosso objetivo, quando analisamos os resultados da 11ª AAP – Avaliação de Aprendizagem em Processo, na qual pudemos constatar que os alunos participantes da experiência obtiveram um melhor desempenho do que as outras turmas, em que o conteúdo foi trabalhado de forma tradicional (lousa/caderno).

A Trigonometria possibilita ao aluno descobrir medidas imensuráveis, visualizar e interpretar o Universo e o mundo que o cerca, ao relacionarem os resultados numéricos, equações e fórmulas com formas, contextos e figuras do dia a dia. Por isso, a variedade de aplicações e visualizações, também é um facilitador do processo de ensino-aprendizagem.

Não temos aqui a pretensão de afirmar que as dificuldades em Trigonometria foram todas sanadas, mas acreditamos que, na construção do conhecimento, conseguimos acrescentar alguns tijolos, o que já nos deixa imensamente felizes e motivados a continuar estudando, investindo e reconhecendo que cada um pode fazer a diferença nesse processo educacional tão deficitário que nosso país enfrenta.

Referências Bibliográficas

[1] ABBOTT,P. Trigonometria; tradução Luiz Roberto de G. Vidal. São Paulo: Hemus Editora Ltda, 1982.

[2] ARCONCHER, Cláudio, O Conceito de Ângulo. Explorando o Ensino da Matemática: Artigos, volume 1. Brasília: Ministério da Educação-Secretaria da Educação Básica, p.149-151, 2004.

[3] BOYER, Carl B.. História da Matemática. 3ª edição – tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: editora Edgard Blucher Ltda, 2010.

[4] BRASIL, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília, DF, 1996.

[5] BRASIL, Ministério da educação, Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares nacionais: Matemática; 1998.

[6] BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio: Matemática. Brasília, DF, 1999.

[7] BRASIL, Ministério da educação, Secretaria da Educação Básica. PCN + (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais); Volume 2, 2002.

[8] BRASIL, Ministério da educação, Secretaria da Educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio; Volume 2, 2006.

[9] CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. Coleção do Professor de Matemática. Trigonometria/Números Complexos: 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[10] CLASSIFICAÇÃO DE TRIÂNGULO. Disponível em: ¡https://reforcandomatematica.blogspot.com.br/2013/06/classificacao-dos-triangulos.html¿.Acesso em 23 jul. 2016.

[11] DANTE, Luiz Roberto. Matemática (Ensino médio), volume único. 1° ed. São Paulo: Ed. Ática, 2005.

[12] DEFINIÇÕES E IGUALDADES TRIGONOMÉTRICAS. Disponível em: ¡http://amatematicapura.blogspot.com.br/2012/08/geometria-com-contas-parte-i.html¿. Acesso em 11 fev. 2016.

[13] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos da Matemática Elementar. Geometria Plana: 6.ed.v.9. São Paulo: ED. Atual, 1985.

[14] EVES, Howard. História da Geometria; tradução Hygino H. Domingues, Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Hist. Geometria. São Paulo: Atual Editora, 1992.

[15] FILHO, Edgard de Alencar. Exercícios e Formulário de Trigonometria Plana. 8.ed. São Paulo: Livraria Nobel S. A., 1970.

[16] FÓRMULAS DE PROSTAFÉRESE. Disponível em: ¡http://www.colegioweb.com.br/funcoes-circulares-inversas/transformacao-em-produto.html#ixzz3zvFnNWRd¿, ¡http://www.profcardy.com/cardicas/prostaferese.php¿. Acesso em 11 fev. 2016.

[17] GUELLI, Cid A.; IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo. Trigonometria. São Paulo: Editora Moderna Ltda, [s. d.].

[18] LEONARDO, Fabio Martins de. Conexões com a Matemática: 2 ed. vol.2. São Paulo: Editora Moderna Ltda, 2013.

[19] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. Coleção do Professor de Matemática. A Matemática do Ensino Médio: 9. ed. v.1. Rio de Janeiro: SBM, p.240-261, 2006.

[20] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. Coleção do Professor de Matemática. Temas e Problemas Elementares: 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, p.61-121, 2006.

[21] MACHADO, Antonio dos Santos. Matemática, Temas e Metas. Trigonometria e Progressões. v.2.São Paulo: Atual Editora, 1986

[22] MELLO, José Luiz Pastore. Trigonometria e um antigo problema de otimização. Explorando o Ensino da Matemática: Artigos, volume 1. Brasília: Ministério da Educação-Secretaria da Educação Básica, p.152-155, 2004.

[23] SOUZA, Joamir Roberto de. Coleção Novo Olhar. Matemática: 1. ed. vol. 2. São Paulo: FTD, 2010.

ANEXO 1

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM E VOZ

Neste ato, e para todos os fins em direito admitidos, autorizo expressamente a utilização da minha imagem e voz, em caráter definitivo e gratuito, constante em fotos e filmagens decorrentes da minha participação no projeto do TCC de Glaucia Maria Queiroz de Freitas do Curso de PROFMAT da UFMS polo de Três Lagoas - MS, a seguir discriminado:

Programa – PROFMAT
Título do projeto TCC – Um estudo em trigonometria
Pesquisador – Glaucia Maria Queiroz de Freitas
Orientador – Prof. Dr. Fernando Souza

Objetivos principais:
Investigar e desenvolver atividades com as funções trigonométricas no Software Geogebra

As imagens e a voz poderão ser exibidas: nos relatórios parcial e final do referido projeto, na apresentação áudio-visual do mesmo, em publicações e divulgações acadêmicas, em festivais e premiações nacionais e internacionais, assim como disponibilizadas no banco de imagens resultante da pesquisa e na Internet, fazendo-se constar os devidos créditos.

O aluno fica autorizado a executar a edição e montagem das fotos e filmagens, conduzindo as reproduções que entender necessárias, bem como a produzir os respectivos materiais de comunicação, respeitando sempre os fins aqui estipulados.

Por ser esta a expressão de minha vontade, nada terei a reclamar a título de direitos conexos a minha imagem e voz ou qualquer outro.

Andradina, 08 de dezembro de 2015.

Eu,____________________________________, portador do RG n°______________,

residente à Rua_____________________________, n º _____,

Bairro________________, Autorizo, meu filho ______________________________

RG_____________, estudante na E.E. “João Brembatti Calvoso” a participar no projeto acima citado, no dia 08 de dezembro de 2015, das 8:00 às 10:00 horas.

____
Assinatura do responsável

____
Assinatura do aluno

Anexo 2

JUSTIFICATIVA:

Você participará de atividades por mim desenvolvidas, direcionadas a alunos do terceiro e segundo anos do Ensino Médio Público do Estado de São Paulo, para investigar e aprofundar seus conhecimentos sobre funções trigonométricas, elaboradas no software GEOGEBRA, isto é, um aplicativo de matemática que une conceitos de álgebra e geometria dinâmica em um único software. Sua distribuição é livre. Escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas, no endereço www.geogebra.org. A partir da versão 5.0 também é possível trabalhar com geometria em três dimensões.

Esta investigação faz parte do desenvolvimento de meu T.C.C. do Mestrado PROFMAT, em um programa da SBM na UFMS polo de Três Lagoas, MS.

Identificação:

Nome:____

Questionário:

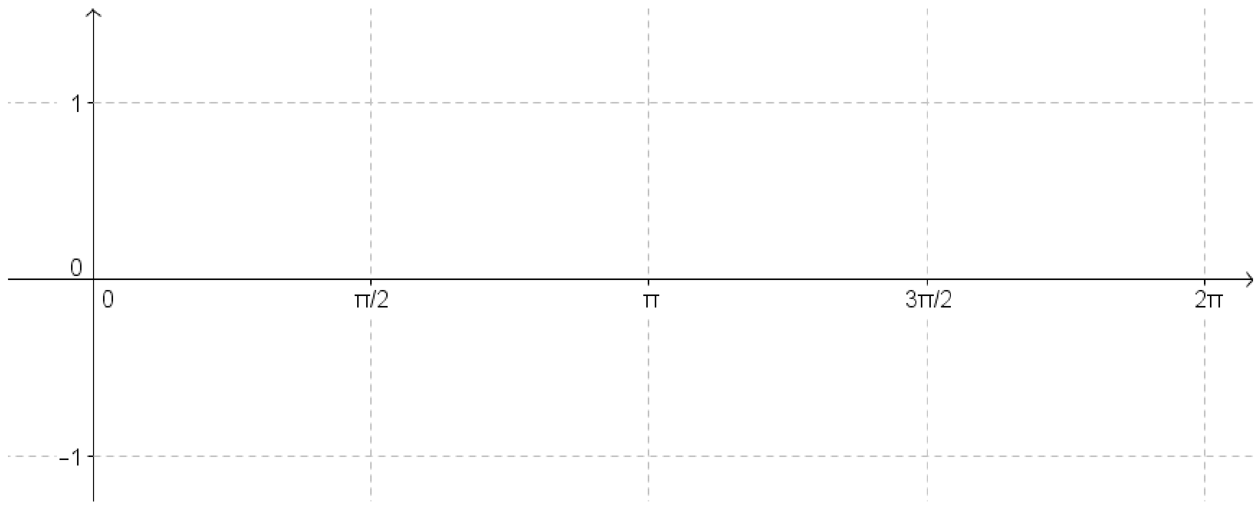
1) Quais são as três razões trigonométricas básicas?

2) Enuncie as fórmulas para determiná-las.

3) Complete a tabela que se segue:

Grau	Radiano	$\text{sen}\, x$	$\cos x$	$\text{tg}\, x$
$0°$				
$90°$				
$180°$				
$270°$				
$360°$				

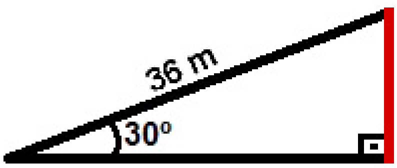
4) Esboce o gráfico da função $f(x) = \text{sen}\, x$. Qual seu domínio e imagem? Esta função é Periódica? Se sim, qual seu período?



Aplicando as razões trigonométricas básicas que você escreveu na questão (1), resolva os problemas abaixo:

5) Construa a tabela com seno, cosseno e tangente dos arcos notáveis 30º, 45º e 60º :

6) Uma rampa plana, de 36 m de comprimento, faz um ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe a rampa inteira eleva-se verticalmente de :



(A) $6\sqrt{3}$ m

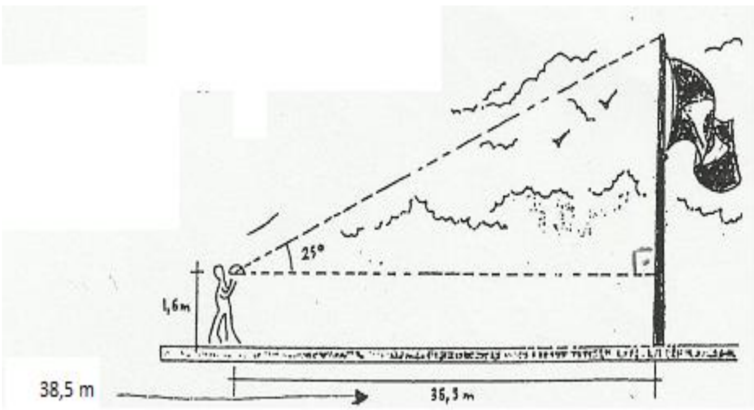
(B) 12 m

(C) 13,6 m

(D) $9\sqrt{3}$ m

(E) 18 m.

7) Qual é a altura, aproximada, do mastro da bandeira? (sen 25º = 0,42; cos 25º = 0,90 e tg 25º = 0,46).



ANEXO 3

<u>Questionário II:</u>

Seja $f(x): R \to R$ tal que $f(x) = a + b.\sin(cx + d)$, sendo a, b, c e d números reais, chamados de parâmetros da função.

Variaremos os valores dos parâmetros na função, para verificar a influência de cada parâmetro no comportamento gráfico da função: domínio, imagem e sua periodicidade.

I) Conservando: $b = 1,\ c = 1,\ d = 0$ e variando o parâmetro "a":

	a= 0	a = – 2	a = – 1	a = 1	a = 2	...	a = n
x	$y = 0 + \sin(x)$	$y = -2 + \sin(x)$	$y = -1 + \sin(x)$	$y = 1 + \sin(x)$	$y = 2 + \sin(x)$	...	$y = n + \sin(x)$
0							
$\frac{\pi}{2}$							
π							
$\frac{3\pi}{2}$							
2π							
Imagem							

O que aconteceu com o gráfico da função $y = a + \sin(x)$ quando variamos o parâmetro "a"?

____

____

____

II) Conservando: $a = 0,\ c = 1,\ d = 0$ e variando o parâmetro "b":

	b= 0	b = – 2	b = – 1	b = 1	b = 2	...	b = n
x	$y = 0.\sin(x)$	$y = -2.\sin(x)$	$y = -1.\sin(x)$	$y = 1.\sin(x)$	$y = 2.\sin(x)$	...	$y = n.\sin(x)$
0							
$\frac{\pi}{2}$							
π							
$\frac{3\pi}{2}$							
2π							
Imagem							

O que aconteceu com o gráfico da função $y = b.\sin(x)$ quando variamos o parâmetro "b"?

____

____

____

III) Conservando: $a = 0,\ b = 1,\ d = 0$ e variando o parâmetro "c":

	c = – 1	$c = \frac{1}{2}$	c = 1	c = 2	...	c = n
x	$y = \sin(-1x)$	$y = \sin(\frac{1}{2}x)$	$y = \sin(1.x)$	$y = \sin(2.x)$	...	$y = \sin(n.x)$
0						
$\frac{\pi}{2}$						
π						
$\frac{3\pi}{2}$						
2π						
Imagem						
Período						

O que aconteceu com o gráfico da função $y = \sin(c.x)$ quando variamos o parâmetro "c"?

____

____

____

IV) Conservando: $a = 0,\ b = 1,\ c = 1$ e variando o parâmetro "d":

	$d = -\frac{\pi}{2}$	$d = 0$	$d = \frac{\pi}{2}$	$d = \pi$	...	$d = n$
x	$y = \sin\left(x + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$	$y = \sin(x + 0)$	$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$y = \sin(x + \pi)$	...	$y = \sin(x + n)$
0						
$\frac{\pi}{2}$						
π						
$\frac{3\pi}{2}$						
2π						
Imagem						

O que aconteceu com o gráfico da função $y = \sin(x + d)$ quando variamos o parâmetro "d"?

____

____

____

EM

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

Matemática

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

2ª série do Ensino Médio **Turma** ____________________

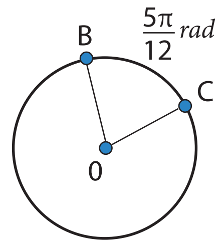
1º Bimestre de 2016 **Data** ______ / ______ / ______

Escola ____

Aluno ____

Questão 1

A figura a seguir ilustra um arco BC de comprimento $\frac{5\pi}{12}$ radianos. Então, a medida, em graus, do ângulo central $B\hat{O}C$ é de



(A) 18,75.

(B) 37,50.

(C) 75,00.

(D) 150,00.

RESOLUÇÃO:

Questão 2

Uma circunferência tem 12 cm de comprimento e 2 cm de comprimento de arco.

A medida do arco, em radianos, será de:

(A) $\frac{1}{3\pi}$.

(B) $\frac{\pi}{3}$.

(C) $\frac{12}{\pi}$.

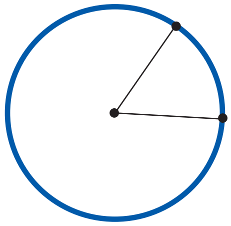
(D) 2π.

RESOLUÇÃO:

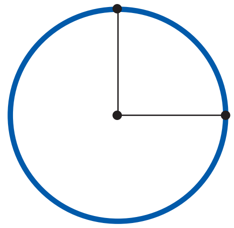
Questão 3

Dentre as figuras a seguir, aquela que representa o ângulo que tem a medida mais próxima de 1 radiano é:

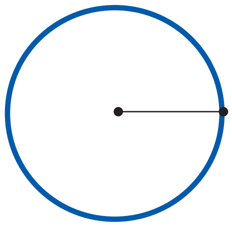
(A)



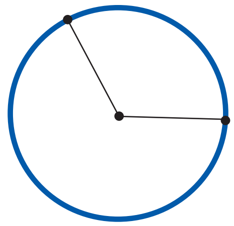
(B)



(C)



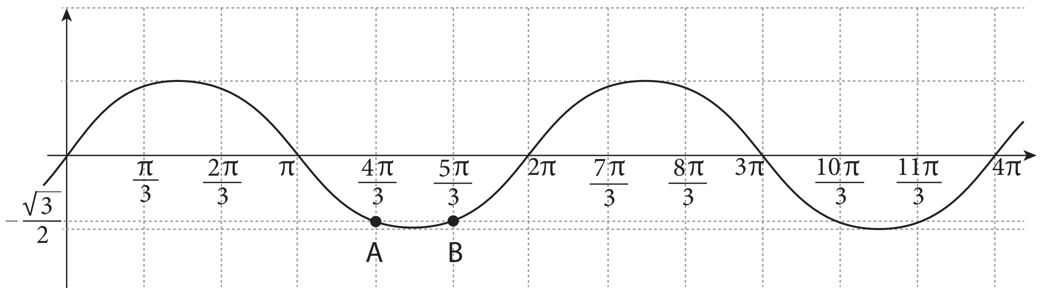
(D)



RESOLUÇÃO:

Questão 4

Dado o gráfico da função y = sen x, no intervalo $[0 \text{ a } 4\pi]$. Neste gráfico, estão indicados dois valores de x, representados por A e B que são soluções da equação: $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi]$. Desta forma, as soluções dos pontos dessa equação no intervalo $[2\pi, 4\pi]$ serão:



(A) 2π e $\dfrac{7\pi}{3}$.

(B) $\dfrac{7\pi}{3}$ e $\dfrac{8\pi}{3}$.

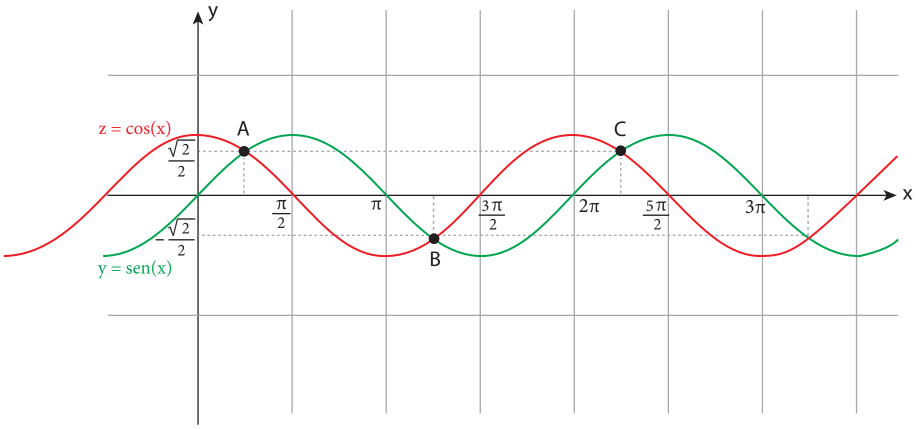
(C) $\dfrac{10\pi}{3}$ e $\dfrac{11\pi}{3}$.

(D) $\dfrac{16\pi}{3}$ e $\dfrac{17\pi}{3}$.

RESOLUÇÃO:

Questão 5

A figura a seguir representa os gráficos das funções seno e cosseno.



Pela figura, podemos verificar que existem pontos em que sen(x) = cos(x).

Desta forma, tomando-se o ponto C como referência, o próximo valor para x, em radianos, no qual $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ será:

(A) $\frac{9\pi}{4}$.

(B) $\frac{13\pi}{4}$.

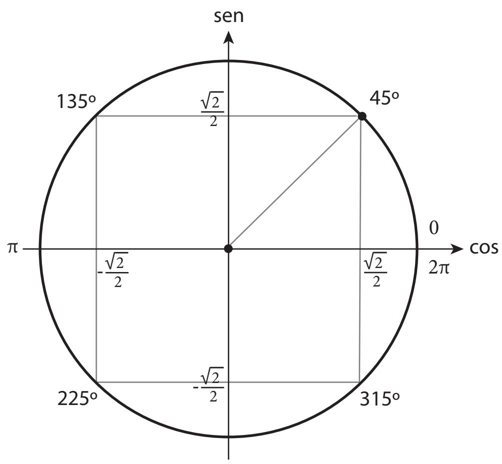
(C) $\frac{17\pi}{4}$.

(D) $\frac{10\pi}{4}$.

RESOLUÇÃO:

Questão 6

Consultando o ciclo trigonométrico a seguir:



Os valores de x quando sen(x) = cos(x), considerando 0º ≤ x ≤ 360º, são:

(A) 135º e 315º

(B) 45º e 225º

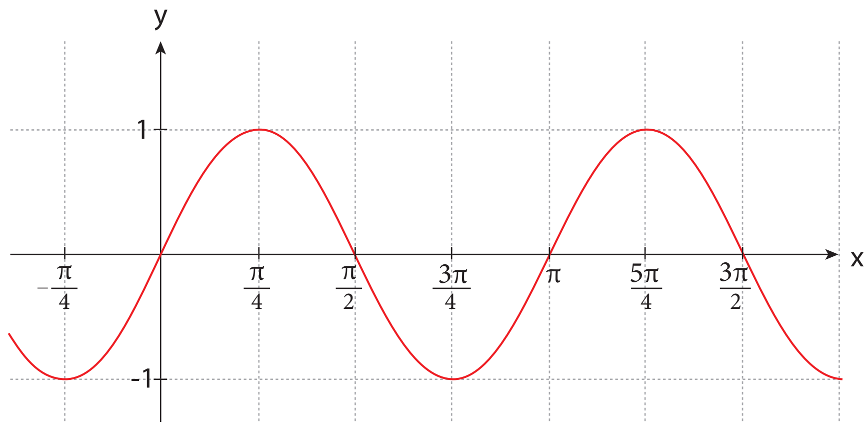
(C) 135º e 225º

(D) 45º e 315º

RESOLUÇÃO:

Questão 7

Dado o gráfico a seguir.



A função trigonométrica que representa este gráfico será:

(A) $y = \cos x$

(B) $y = \operatorname{sen} x$

(C) $y = \cos 2x$

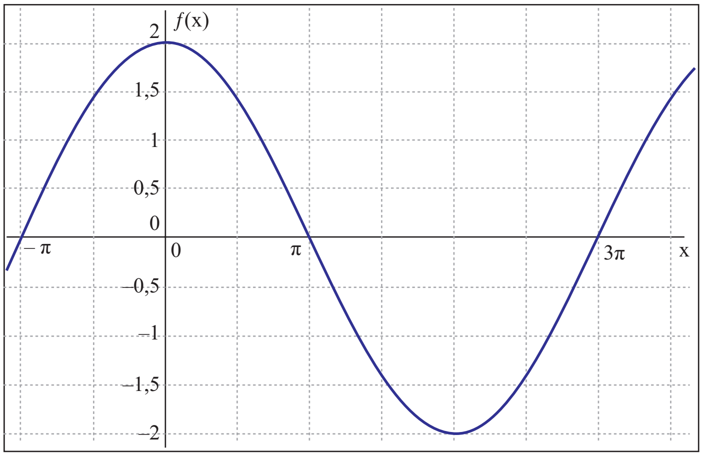
(D) $y = \operatorname{sen} 2x$

RESOLUÇÃO:

Questão 8

Na figura a seguir tem-se parte do gráfico da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por:

$f(x) = k \cdot \cos(tx)$



Nessas condições, calculando-se K – t, obtém-se:

(A) $-\dfrac{3}{2}$.

(B) –1.

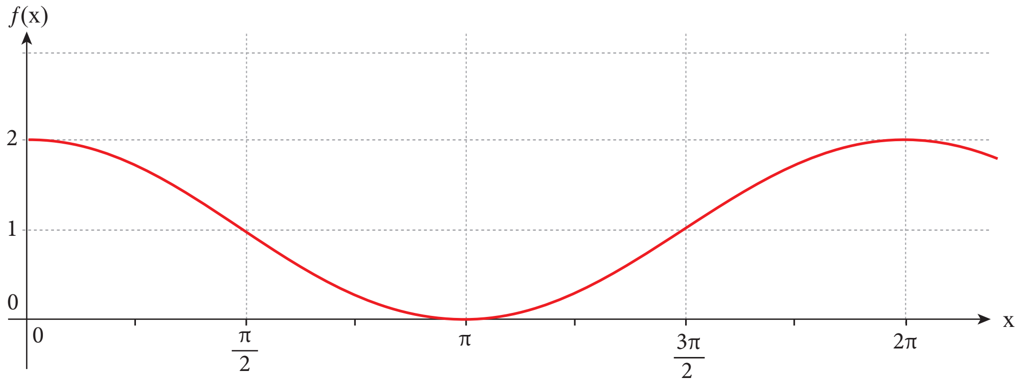
(C) 0.

(D) $\dfrac{3}{2}$.

RESOLUÇÃO:

Questão 9

O gráfico a seguir representa uma função trigonométrica de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



Esta função é dada por:

(A) $f(x) = 1 - \cos x$

(B) $f(x) = 1 + \cos x$

(C) $f(x) = \cos(x - 1)$

(D) $f(x) = \cos(x + 1)$

RESOLUÇÃO:

Questão 10

Uma empresa produz diariamente x dezenas de certo tipo de um produto. Sabe-se que o custo de produção em milhares de reais é dado por

$$C(x) = 2 - \cos\left(x \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$

e o valor de venda em milhares de reais, por

$$V(x) = 3\sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(x \cdot \frac{\pi}{12}\right), 0 \leq x \leq 6$$

O lucro em reais, obtido na produção de 3 dezenas de peças é de:

(A) 1000.

(B) 2000.

(C) 3000.

(D) 5000.

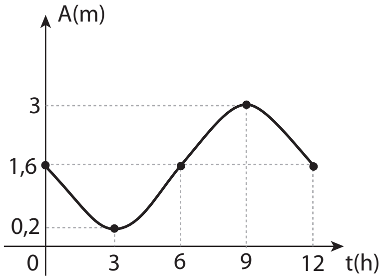
RESOLUÇÃO:

Questão 11

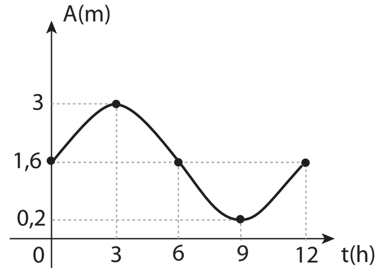
A função $A(t) = 1{,}6 - 1{,}4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ retrata a modelagem matemática da altura (A) da maré, dada em metros, em um espaço de tempo não muito grande.

Na função, a variável t representa o tempo decorrido, em horas, a partir da meia-noite de certo dia. Nesse contexto, conclui-se que a função A, no intervalo [0,12], está representada pelo gráfico:

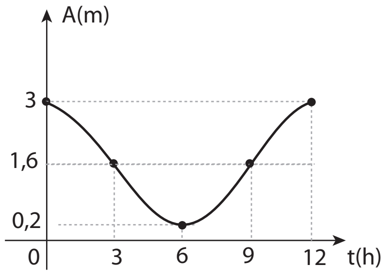
(A)



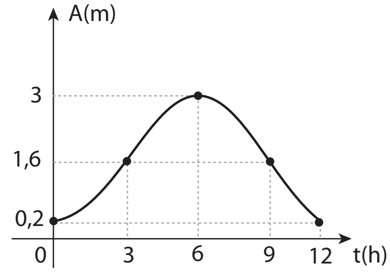
(B)



(C)



(D)



RESOLUÇÃO:

Questão 12

Supõe-se que em um determinado local a intensidade média I da radiação solar possa ser expressa em função do tempo s, em semanas, pela função:

$$I(s) = 400 + 200 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{s - 11}{52}\right)\right]$$

A maior incidência de radiação ocorre na

(A) décima primeira semana.

(B) vigésima quarta semana

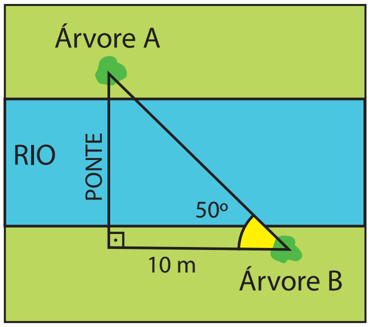
(C) quinquagésima semana.

(D) sexagésima terceira semana.

RESOLUÇÃO:

Questão 13

A prefeitura de uma cidade pretende construir uma ponte sobre um rio, num trecho em que as margens são aproximadamente retas e paralelas. Com a ajuda de alguns pontos de referência e de instrumentos de medida adequados, um engenheiro traçou um triângulo imaginário e descobriu algumas medidas, conforme mostra o desenho.



Então, o engenheiro consultou uma tabela trigonométrica e descobriu que tg50º ≈ 1,19. Desse modo, ele pode concluir que, em metros, o comprimento aproximado da ponte deverá ser

(A) 0,119 m.

(B) 1,19 m.

(C) 10 m.

(D) 11,9 m.

RESOLUÇÃO:

Questão 14

Na figura a seguir estão representados graficamente os números reais 0, x, y e 1.

A posição do número real $x \cdot y$ é

(A) à esquerda de zero.

(B) entre zero e x.

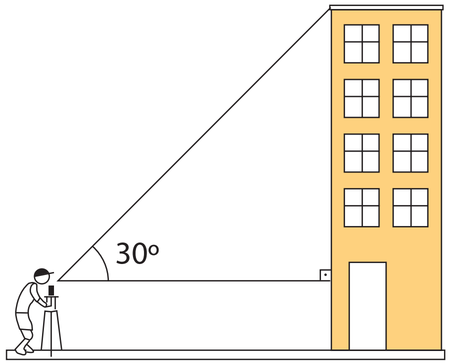
(C) entre y e 1.

(D) à direita de 1.

RESOLUÇÃO:

Questão 15

A figura a seguir mostra um topógrafo realizando a medida da altura de um prédio, com um instrumento chamado teodolito, que está a 1,5 m do solo.



Sabendo-se que a distância do teodolito até o prédio é de 200 metros e o ângulo de visão do teodolito até o topo do prédio é de 30º, pode-se concluir que dentre os valores a seguir, aquele que MELHOR se aproxima da altura do prédio em metros é de:

(A) 50,00.

(B) 115,50.

(C) 117,00.

(D) 231,00.

Considerar:
sen 30º = 0,5
cos 30º ≅ 0,866
tg 30º ≅ 0,577

RESOLUÇÃO:

Anotações do Professor

Anexo 5

Aplicação do Teorema de Pitágoras e razões trigonométricas

1) (Enem- Exame Nacional do Ensino Médio/2006)

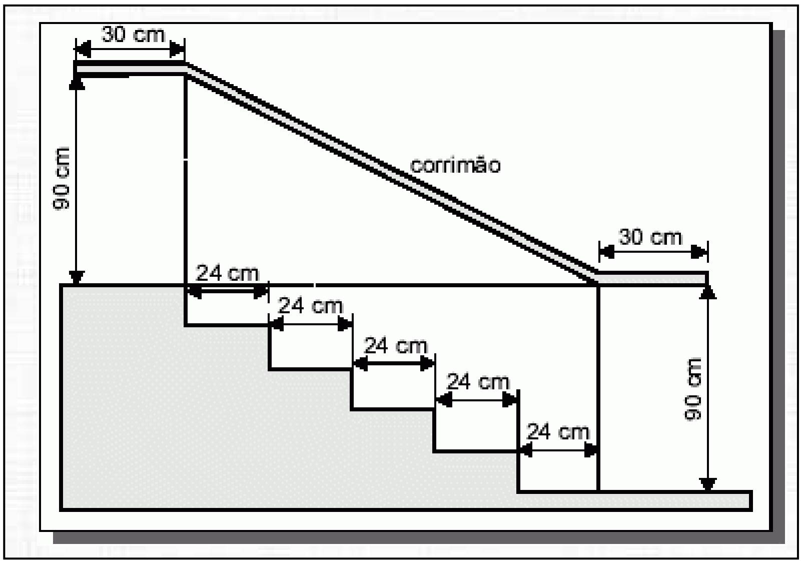


Figura 1: Fonte- Prova do Enem- Exame Nacional do Ensino Médio/2006

Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

a) 1,8 m

b) 1,9 m

c) 2,0 m

d) 2,1 m

e) 2,2 m

Resolução:

Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo abaixo, observa-se que:

$H^2 = C^2 + C^2$

$H^2 = 90^2 + 120^2 = 8100 + 14400 = 22500$

$H = \sqrt{22500} = 150$

Logo, a escada será a soma de $30 + 150 + 30 = 210$.

Portanto, a escada terá 210 cm ou 2,1 m (alternativa D).

2) Suponha um trecho retilíneo de uma estrada, com um posto rodoviário no quilômetro zero. Suponha, também, que uma estação da guarda florestal esteja localizada a 40 km do posto rodoviário, em linha reta, e a 24 km de distância da estrada, conforme a figura abaixo.

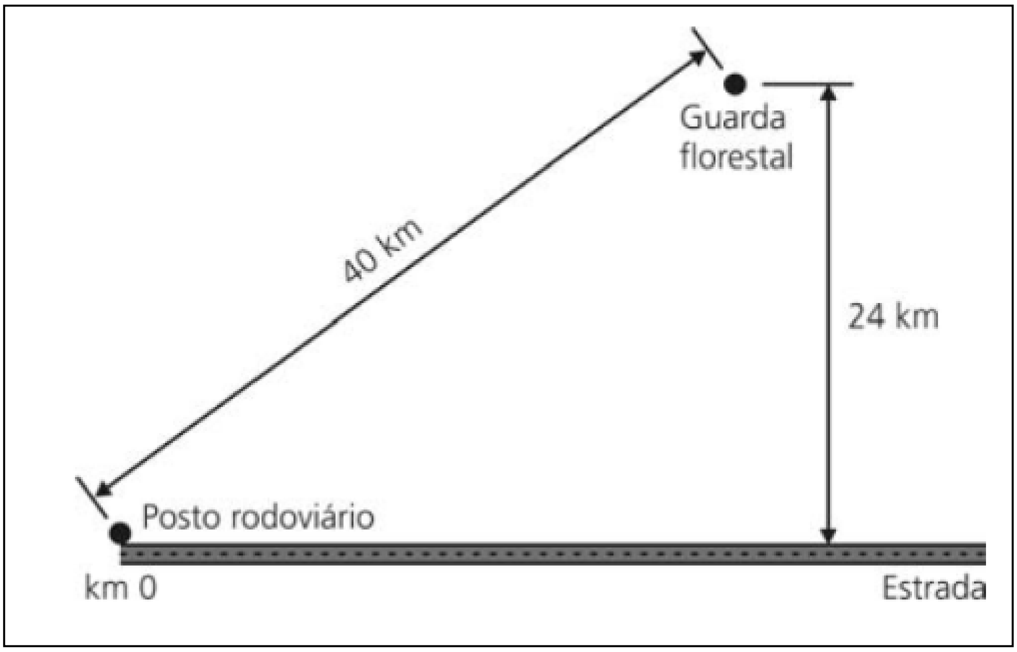


Figura 2: Fonte- Prova do vestibular UNICAMP/2011- 2ª fase

a) Duas antenas de rádio atendem a região. A área de cobertura da primeira antena, localizada na estação da guarda florestal, corresponde a um círculo que tangencia a estrada. O alcance da segunda, instalada no posto rodoviário, atinge, sem ultrapassar, o ponto da estrada que está mais próximo da estação da guarda florestal. Explicite as duas desigualdades que definem as regiões circulares cobertas por estas antenas, e esboce o gráfico abaixo, identificando a área coberta simultaneamente pelas duas antenas.

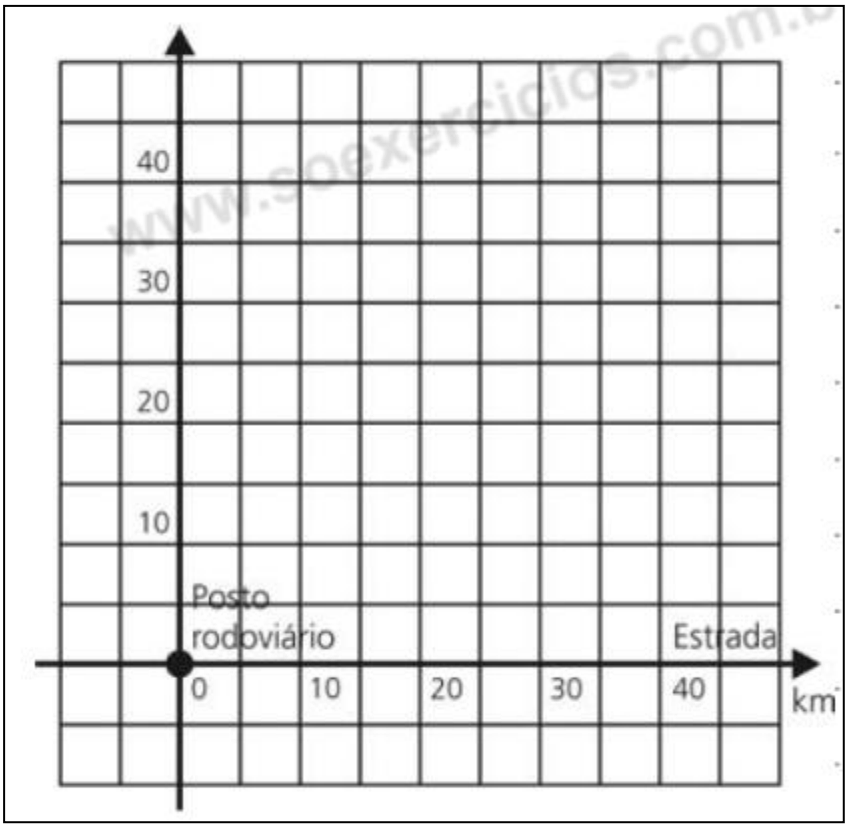


Figura 3: Fonte- Prova do vestibular UNICAMP/2011- 2ª fase

Resolução:

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo, temos:

$H^2 = C^2 + C^2$

$40^2 = 24^2 + C^2 \Rightarrow C^2 = 1600 - 576 \Rightarrow C = \sqrt{1024} \Rightarrow C = 32$

A equação geral de um círculo centrado em (x_0, y_0) e com raio r é $(x - x_0)^2 +$ $+(y - y_0)^2 \leq \mathrm{r}^2$.

Como a primeira antena está situada na estação da guarda florestal e seu sinal atinge, mas não ultrapassa a estrada, temos $(x_0, y_0) = (32{,}24)$ e $r = 24$.

Logo, a área de cobertura da primeira antena será:

$(x - 32)^2 + +(y - 24)^2 \leq 24^2$

A segunda antena está situada no posto rodoviário e seu sinal também alcança, sem ultrapassar, o ponto a estrada $(32, 0)$,temos $(x_0, y_0) = (0{,}0)$ e $r = 32$.

Logo, a área de cobertura da segunda antena será:

$(x-0)^2 + +(y-0)^2 \leq 32^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 32^2$

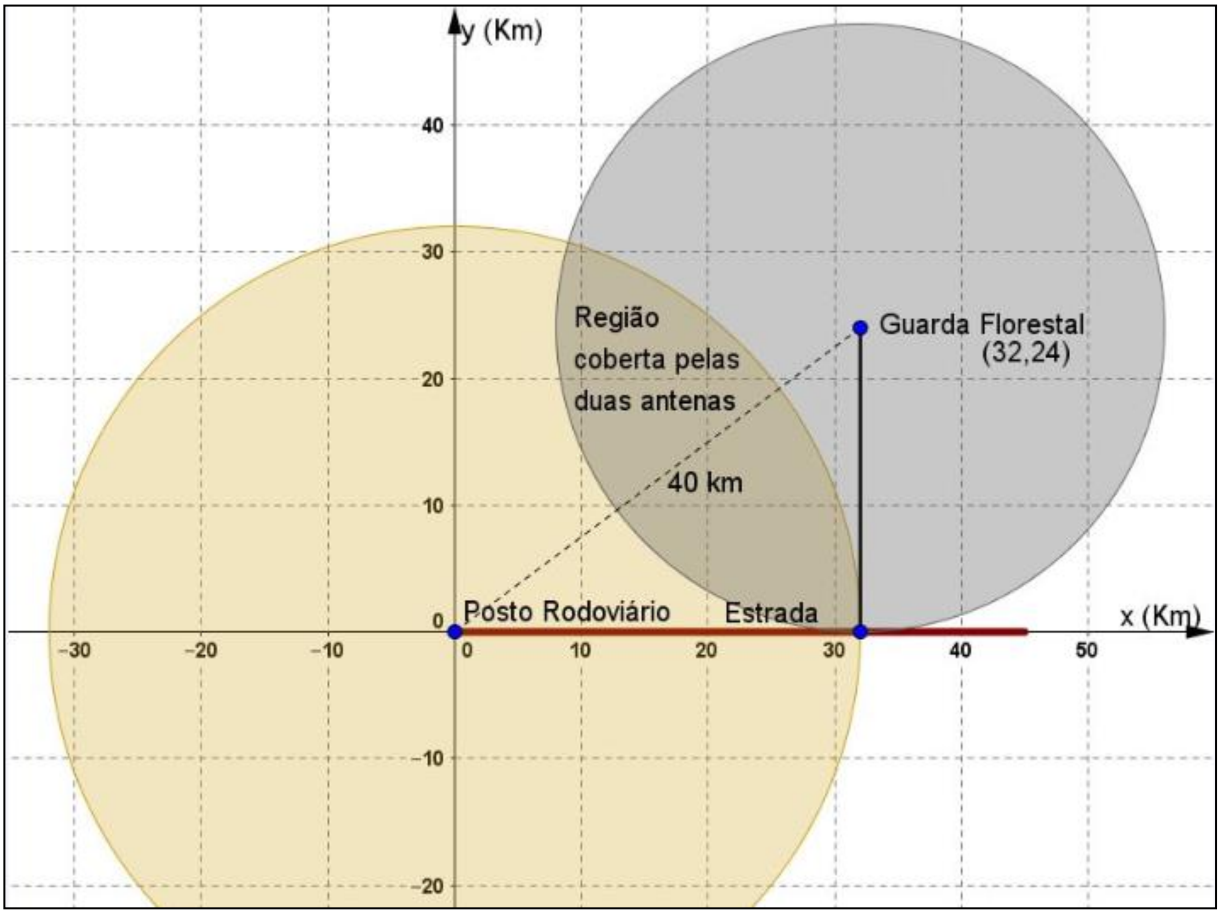


Figura 4: Fonte- Prova do vestibular UNICAMP/2011- 2ª fase

Portanto, as regiões de cobertura das antenas são dadas pelas desigualdades $(x-32)^2 + +(y-24)^2 \leq 24^2$ e $x^2 + y^2 \leq 32^2$. Essas regi~oes estão representadas no gráfico pelos círculos laranja segunda antena e azul primeira antena. A região mais escura é aquela coberta pelas duas antenas.

b) Pretende-se substituir as antenas atuais por uma única antena, mais potente, a ser instalada em um ponto da estrada, de modo que as distâncias dessa antena ao posto rodoviário e à estação da guarda florestal sejam iguais. Determine em que quilômetro da estrada essa antena deve ser instalada.

Resolução:

Para determinar a localização da nova antena, precisamos que este ponto pertença a estrada, logo este ponto será da forma $(x, 0)$ tal que a distância em relação a estação da guarda florestal e do posto rodoviário sejam iguais, isto é:

$$(x-0)^2 + +(0-0)^2 = (x-32)^2 + (0-24)^2$$

$$x^2 = x^2 - 64x + 1024 + 576$$

$$x = \frac{1600}{64} \Rightarrow 25$$

Portanto, A nova antena deve ser instalada no quilômetro 25 da estrada.

3) Dentro de uma caixa, em formato de paralelepípedo, estão uma aranha e uma mosca, conforme mostra a figura abaixo:

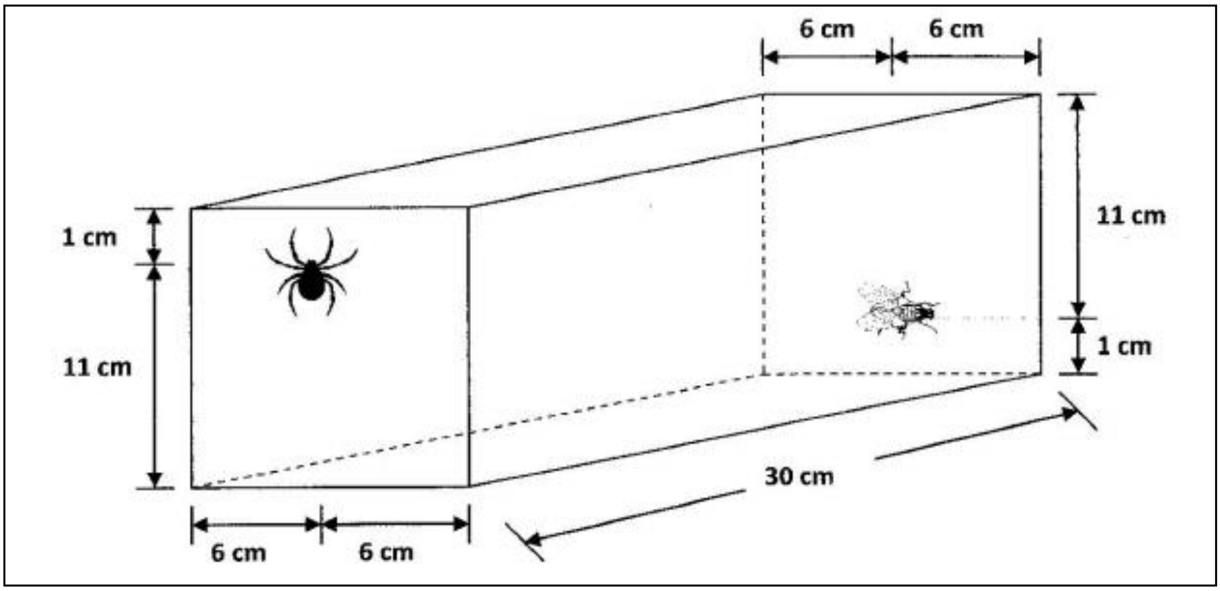


Figura 5: Fonte: Atividades: papmem-2014- 2ª listas-de-exercicios-prova-avaliacao.html

A aranha só pode chegar à mosca andando sobre as faces internas da caixa. O incrível é que a aranha consegue chegar até à mosca andando **apenas 40 cm**. Como isso é possível? Qual é o caminho percorrido pela aranha.

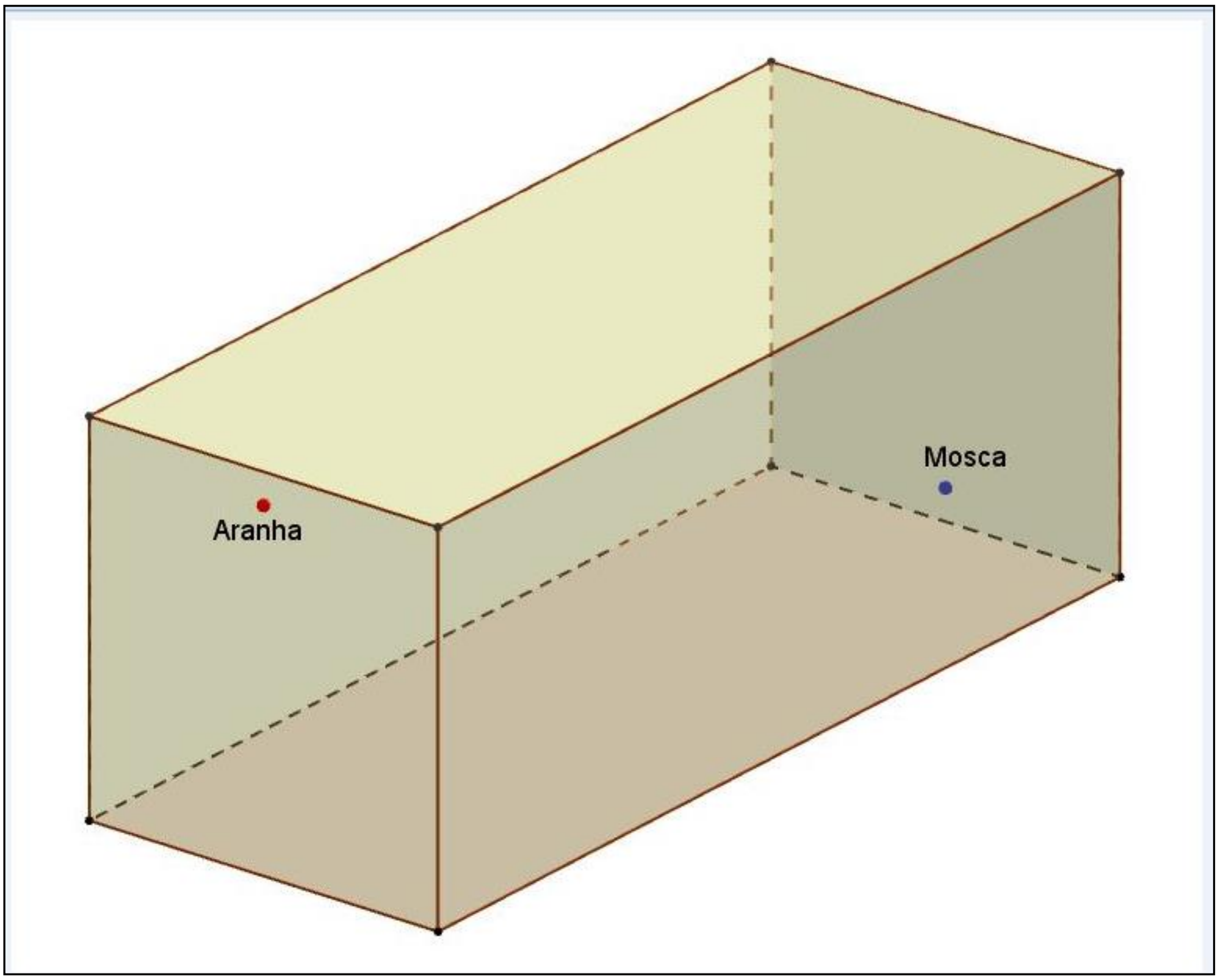


Figura 6: Fonte: Prisma retangular construído no geogebra, com ilustração da posição da aranha e da mosca.

Planificando o prisma, encontramos um triângulo retângulo de catetos 24 e 32, e a hipotenusa será a trajetória da aranha até a mosca.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo, temos:

$$H^2 = C^2 + C^2$$

$$H^2 = 24^2 + 32^2 \Rightarrow H^2 = 576 + 1024 \Rightarrow H = \sqrt{1600} \Rightarrow H = 40$$

Segue abaixo o caminho percorrido pela aranha.

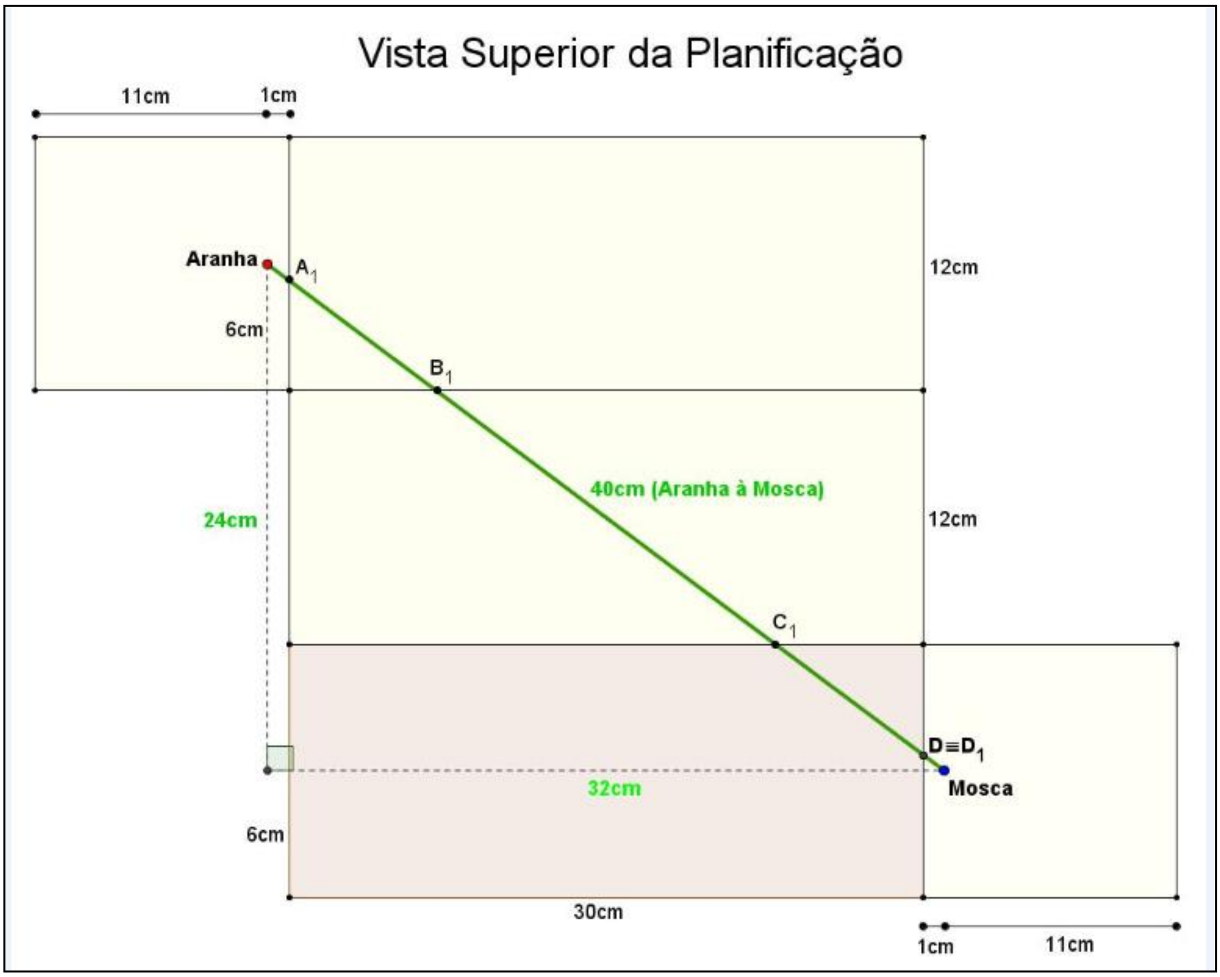


Figura 7: Fonte: Planificação do prisma retangular construído no geogebra, com ilustração da trajetória da aranha até a mosca.

Outra vista do caminho feito pela aranha em perspectiva.

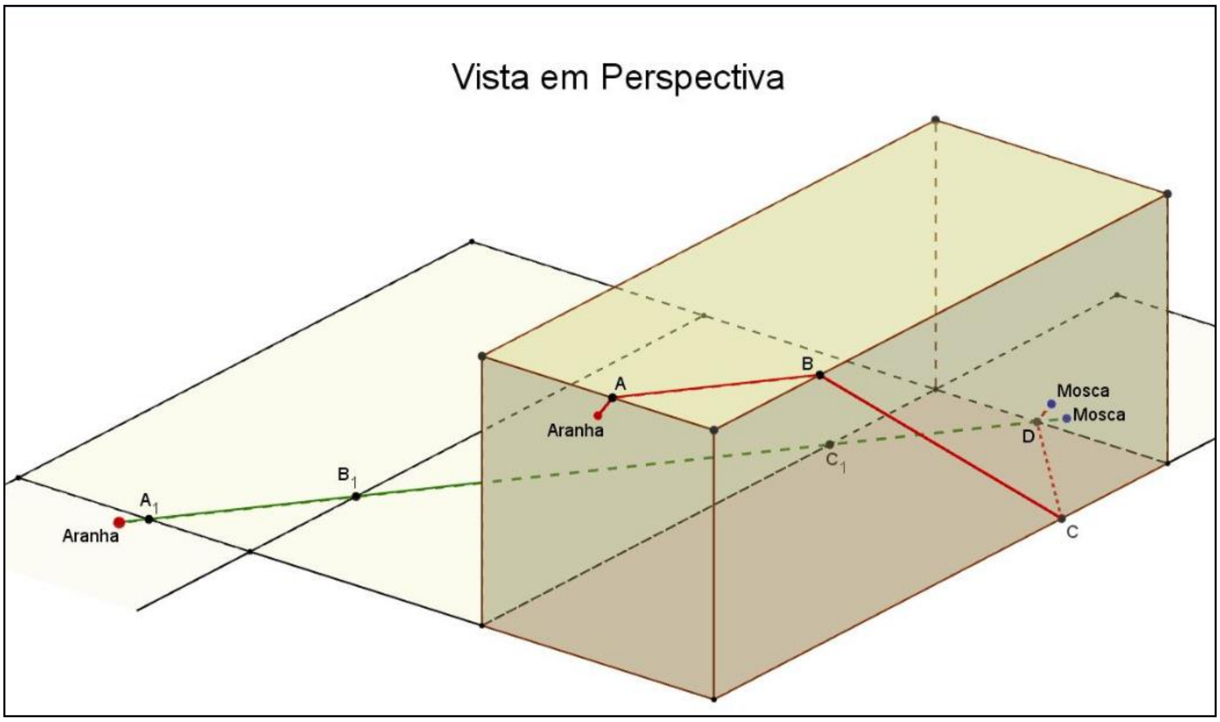
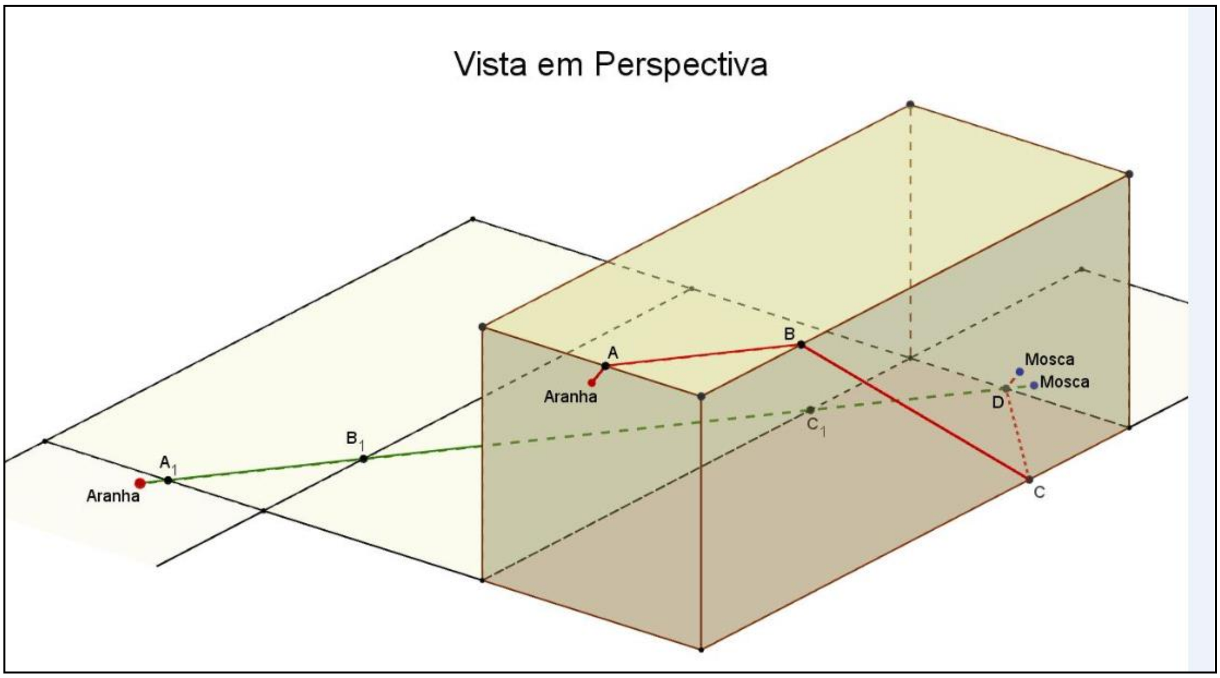


Figura 8: Fonte: Prisma retangular construído no geogebra, com vista sob perspectiva do caminho percorrido pela aranha até a mosca.



Problema da Torre e o raio da Terra:

(Aman – 2013) Em uma das primeiras tentativas de determinar a medida do raio da Terra, os matemáticos da antiguidade observavam, do alto de uma torre ou montanha de altura h conhecida, o ângulo α sob o qual se avistava o horizonte, tangente à Terra, considerada esférica. Segundo este raciocínio, obtenha a medida do raio terrestre R em função do ângulo α usando como apoio a seguinte figura:

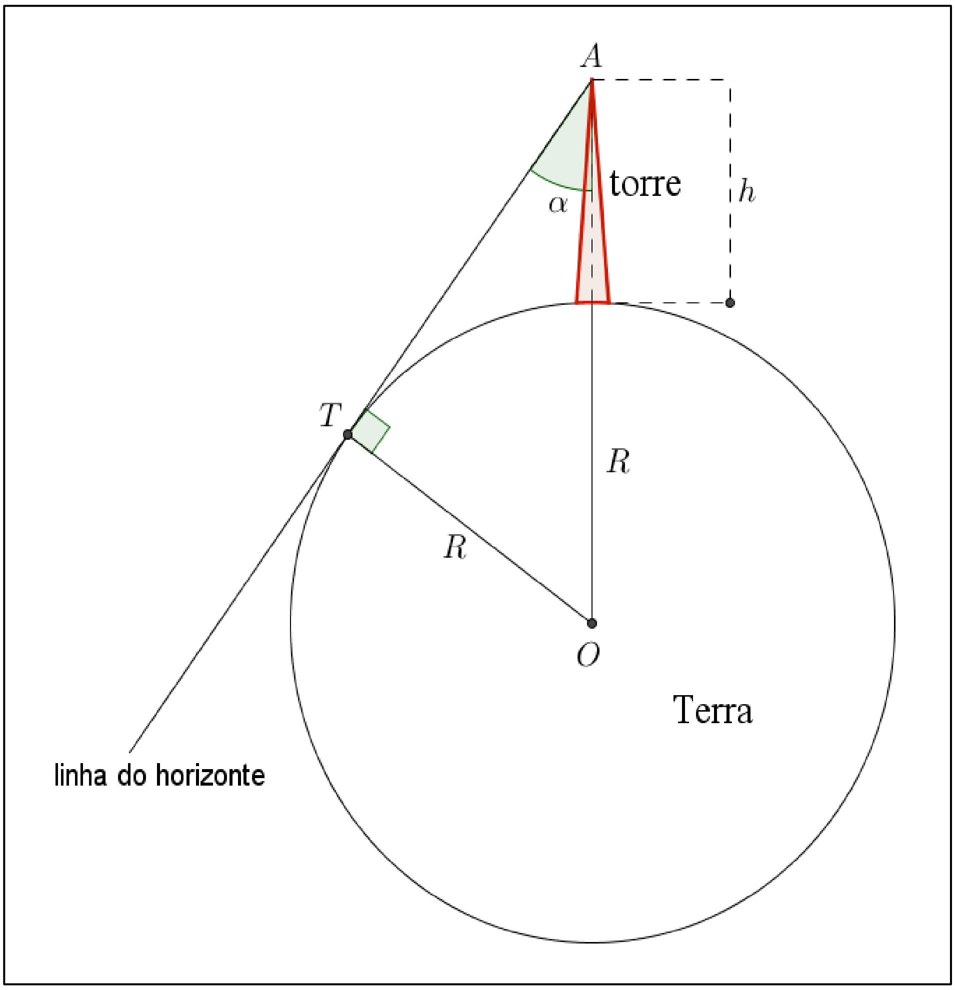


Figura 1: Ilustração problema da Torre e o raio da Terra.

Pela observação do triângulo retângulo ATO no desenho acima, podemos escrever a relação trigonométrica a seguir:

$$sen(\alpha) = \frac{raio\ \ da\ \ Terra}{raio\ \ da\ \ Terra\ +\ \ altura\ \ da\ \ torre} \quad \Rightarrow \quad sen(\alpha) = \frac{R}{R+h} \quad \Rightarrow$$

$$R.sen(\alpha) + h.sen(\alpha) = R \quad \Rightarrow \quad R.[1 - sen(\alpha)] = h.sen(\alpha)$$

$$\therefore \quad R = \frac{h.sen(\alpha)}{1 - sen(\alpha)}$$