Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Nathália López Trocado

Uma proposta didática para um curso básico de análise combinatória

Rio de Janeiro

2017

Nathália López Trocado

Uma Proposta Didática para um Curso Básico de Análise Combinatória

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luiz Silva

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

T843 Trocado, Nathália López.
Uma proposta didática para um curso básico de análise combinatória / Nathália López Trocado. – 2017.
133 f. : il.

Orientador: Sérgio Luiz Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística

1. Análise Combinatória - Teses 2. Matemática – Estudo e ensino – Teses.. I. Silva, Sérgio Luiz. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 519.1

Nathália López Trocado

Uma proposta didática para um curso básico de análise combinatória

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 26 de setembro de 2017.
Banca Examinadora:

Prof. Dr. Sérgio Luiz Silva (Orientador)

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Fábio Silva de Souza

Faculdade de Formação de Professores - UERJ

Prof. Dr. Luiz Amancio Machado de Sousa Júnior

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro - UNIRIO

Rio de Janeiro

2017

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao amor da minha vida, Leonar Pires Ribeiro Vieira, que nunca me permitiu duvidar de mim mesma.

AGRADECIMENTOS

Ao Sérgio Luiz Silva, melhor professor que eu já tive.

A minha mãe, Dalva López López, que me inspirou a me tornar quem sou. A mulher mais incrível que já conheci. Meu exemplo. Quem eu sempre me esforcei para orgulhar.

A minha família, que vibra com todas as minhas conquistas.

Aos meus colegas de turma, com os quais eu aprendi mais do que os livros são capazes de ensinar.

Ao Roberto, por sua infinita ajuda e carinho.

Ao meu marido, que me deu toda a estrutura necessária para estudar, enxugou minhas lágrimas quando achei que não conseguiria e me lembrou todos os dias de tudo que eu era – e sou – capaz.

Educação não transforma o mundo. Educação muda pessoas. Pessoas transformam o mundo.

Paulo Freire

RESUMO

TROCADO, Nathália López. *Uma proposta didática para um curso básico de análise combinatória.* 2017. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional / PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

O Ensino da Análise Combinatória, na maior parte das escolas, atualmente, é pautado em decorar fórmulas e encaixar os problemas propostos em uma das fórmulas previamente conhecidas. Esse método desperta grande desinteresse e desmotivação nos alunos e professores em geral – o que causa um aprendizado extremamente deficiente e superficial acerca do assunto. Usando metodologia de pesquisa bibliográfica e de campo, acreditando estar na Combinatória uma das maiores armas para desenvolver o raciocínio lógico do aluno a partir de conhecimentos intuitivos, viso com esse trabalho propor uma sequência didática do conteúdo de Análise Combinatória básico que deve ser visto no Ensino Médio e explora ao máximo a intuição e o direcionamento do pensamento do aluno para a resolução dos problemas propostos sem o uso exacerbado de fórmulas. Apliquei esta proposta em uma turma de Segundo Ano do Ensino Médio do Colégio Pedro II – Humaitá II e analisei o interesse dos alunos, as principais dúvidas e resultados obtidos nas avaliações. O principal objetivo desse trabalho é contribuir para o Ensino da Matemática Básica ser mais atrativo e eficiente.

Palavras-chave: Análise combinatória. Ensino médio. Sequência didática. Direcionamento do pensamento. Matemática básica.

ABSTRACT

TROCADO, Nathália López. *A Didactic proposal for a basic course in combinatorial analysis.* 2017. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional / PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

Currently, the teaching of Combinatorial Analysis in most schools is based on memorizing formulas and matching the proposed problems with one of previously known formulas. This method arouses great lack of interest and motivation in students and teachers in general - which causes an extremely poor and superficial learning of the subject. Using bibliographical and field research, believing that the Combinatorial is one of the greatest tools to develop the logical reasoning of the student from intuitive knowledge, I aim with this work to propose a didactic sequence of the content of Basic Combinatory Analysis that must be seen in the High School, exploring the intuition and the direction of the student's thinking to solve the proposed problems without the overuse of formulas. I applied this proposal in a Second Year High School class of the Pedro II - Humaitá II High School and analyzed the students' interest, the main doubts and the results obtained in the evaluations. The main objective of this work is to contribute to the teaching of Basic Mathematics to be more attractive and efficient.

Keywords: Combinatorial analysis. High school. Didactic sequence. Direction of thought. Basic math.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Problema das pontes.. 15
Figura 2 – Primeiro grafo da história... 15
Figura 3 – Exemplo do Teorema de Ramsey.. 16

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CESGRANRIO	Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FGV	Fundação Getúlio Vargas
FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular
IME	Instituto Militar de Engenharia
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
PROFMAT	Programa em Matemática em Rede Nacional
UECE	Universidade Estadual do Ceará
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFF	Universidade Federal Fluminense
UFES	Universidade Federal do Espírito Santo
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UNIFESO	Centro Universitário Serra dos Orgãos
UNIGRANRIO	Universidade do Grande Rio
UNIRIO	Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO..	12
1	**UM POUCO DE HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA**............	14
2	**UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA UM CURSO BÁSICO DE COMBINATÓRIA**...	18
2.1	**Aula 01**..	18
2.1.1	Princípio fundamental da contagem...	18
2.1.2	Desafio para a próxima aula..	29
2.2	**Aula 02**..	29
2.2.1	Atividade..	31
2.2.2	Exercícios propostos...	32
2.2.3	Exercícios de fixação do conteúdo..	40
2.2.4	Desafio para a próxima aula..	47
2.3	**Aula 03**..	48
2.3.1	Permutações simples...	48
2.3.2	Fatorial de um número...	50
2.3.3	Exercícios propostos...	52
2.3.4	Exercícios de fixação do conteúdo..	56
2.3.5	Desafio para a próxima aula..	58
2.4	**Aula 04**..	58
2.4.1	Permutações com repetições – Parte I...	58
2.4.2	Exercício proposto..	60
2.4.3	Desafio para a próxima aula..	64
2.5	**Aula 05**..	64
2.5.1	Permutações com repetições – Parte II..	65
2.5.2	Atividade..	69
2.5.3	Exercício proposto..	72
2.5.4	Exercícios de fixação do conteúdo..	74
2.5.5	Desafio para a próxima aula..	77
2.6	**Aula 06**..	77

2.6.1 Permutações Circulares.. 77
2.6.2 Exercícios propostos... 80
2.6.3 Exercícios de fixação do conteúdo.. 82
2.6.4 Desafios para a próxima aula... 84
2.7 **Aula 07**... 84
2.7.1 Arranjos... 84
2.7.2 Combinações.. 86
2.7.3 Desafios para a próxima aula... 90
2.8 **Aula 08**... 90
2.8.1 Atividade.. 91
2.8.2 Exercícios propostos... 92
2.8.3 Exercícios de fixação do conteúdo.. 104
2.8.4 Desafios para a próxima aula... 109
2.9 **Aula 09**... 109
2.9.1 Princípio das gavetas.. 110
2.9.2 Atividade.. 111
2.9.3 Exercícios propostos... 111
2.9.4 Exercícios de fixação do conteúdo.. 113
2.10 **Aula 10**... 114
3 **ANÁLISE DOS DADOS OBTIDOS** 115
CONCLUSÃO.. 126
REFERÊNCIAS.. 127
APÊNDICE A – Gabarito da seção 2.2.3... 128
APÊNDICE B – Gabarito da seção 2.3.4... 129
APÊNDICE C – Gabarito da seção 2.5.4... 130
APÊNDICE D – Gabarito da seção 2.6.3... 131
APÊNDICE E – Gabarito da seção 2.8.3... 132
APÊNDICE F – Gabarito da seção 2.9.4... 133

INTRODUÇÃO

Quando reflito a respeito da profissão que escolhi sempre me questiono em relação ao meu papel na sociedade. Por que ensinar matemática? Por que aprender matemática? Acredito que o nosso maior objetivo como educadores é de estimular o raciocínio lógico e ensinar nossos alunos a pensar. Sendo esse o meu maior objetivo, a matéria que mais me possibilita focar as aulas nessa questão é a Análise Combinatória - minha grande paixão.

Me causa profundo estranhamento o fato de que a maioria dos meus colegas de profissão não veem esse tema com os mesmos olhos carinhosos que eu. Além disso, os alunos em geral têm uma dificuldade além da habitual de resolver as questões desse assunto. Por quê? Acredito que a justificativa para essas duas perguntas é a mesma: Não podemos limitar a infinidade de problemas de contagem que existem em fórmulas e algoritmos matemáticos.

Meu objetivo com este trabalho é de propor e aplicar uma sequência didática para o Estudo da Análise Combinatória centrada em incitar soluções para problemas de contagem pautadas no princípio fundamental da contagem, sem o uso exacerbado de fórmulas e algoritmos.

Para isso, fiz uma pesquisa bibliográfica ampla e posteriormente uma pesquisa de campo. No primeiro capítulo, fiz um resumo histórico do início dos estudos da Análise Combinatória e da motivação para tal.

No capítulo seguinte, apresentei minha proposta didática que foi executada no Colégio Pedro II – Humaitá II em 2016. As seis primeiras aulas foram dadas exatamente como o explicitado a seguir e interrompidas por uma greve. Ao retornarmos foi estabelecido pela direção que nenhuma matéria nova seria abordada até o término do Ano Letivo. Sendo assim, as quatro aulas seguintes correspondem ao meu planejamento e expectativa, totalizando 10 aulas de 1 hora e 30 minutos.

No terceiro e último capítulo, explicitei como foi a minha experiência com a aplicação dessa sequência didática, apontando as maiores dúvidas dos alunos e expondo como busquei saná-las. Além disso, apresentei algumas questões cobradas em avaliações e descrevi o desempenho dos meus alunos.

Com isso, resta a dúvida: Será que é possível ensinar de maneira coesa a resolução de problemas de contagem sem o uso exagerado de fórmulas? Esse método é mais eficaz que o tradicional?

1 **Um pouco de História da Análise Combinatória**

Um dos primeiros problemas ligados a Análise Combinatória surgiu em torno de 300 a.C., sendo ele o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$, para $n=2$. O matemático hindu Báskhara (1114-1185?) no século XII, já sabia calcular o número de permutações, arranjos e combinações de n objetos. O nome coeficiente binomial foi introduzido mais tarde por Michael Stifel (1486?-1567), no século XVI, que mostrou como calcular $(1+x)^n$ a partir do desenvolvimento de $(1+x)^{n-1}$. Pascal (1623 – 1662) publicou um tratado em 1654 mostrando como utilizar os números binomiais para achar os coeficientes de $(a+b)^n$ e Jaime Bernoulli demonstrou que

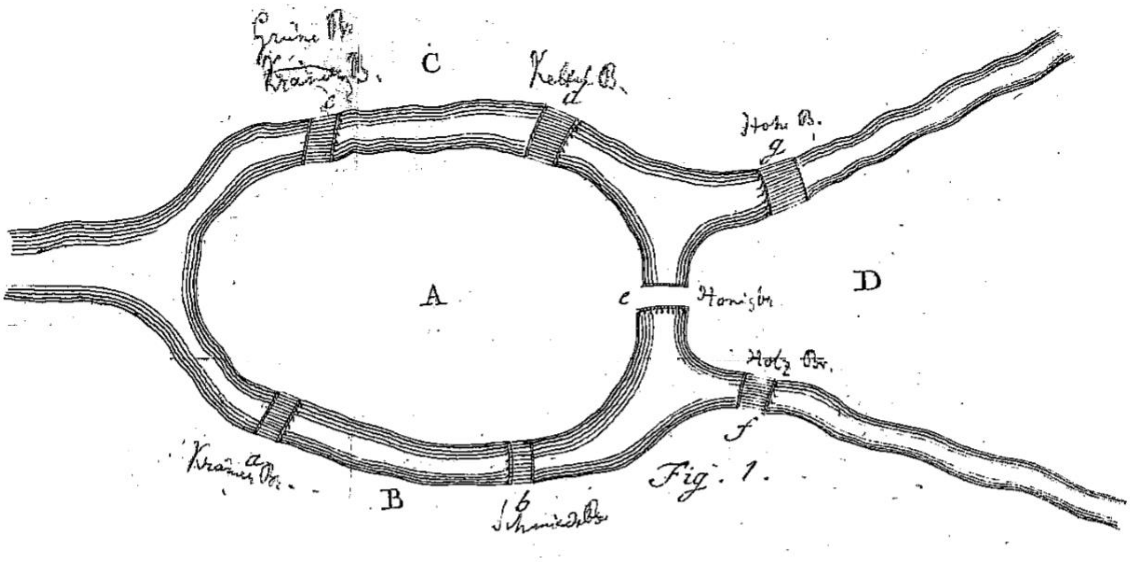
$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} x^{n-i}y^i$$

usando o feito de Pascal, no livro *Ars Conjectandi*, de 1713. Já na segunda parte do mesmo, tratou-se de combinações e permutações.

Leonhard Euler (1707 – 1783), no século XVIII, escreveu várias obras relativas a probabilidade nas quais foram obtidos importantes resultados da Análise Combinatória. Entre eles, devemos destacar o enunciado e a solução do Problema das Sete Pontes de Königsberg, resolvido em 1736, cuja solução negativa originou a teoria dos grafos.

Esse problema teve como base a cidade de Königsberg, onde há duas grandes ilhas que, juntas, formam um complexo que continha sete pontes. Os moradores da cidade discutiam se haveria uma maneira de atravessar todas as pontes sem repetir nenhuma.

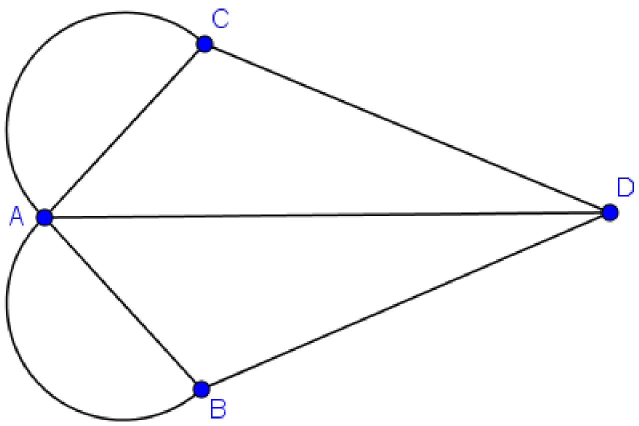
Figura 1 – Problema das Pontes



Fonte: Leonhard Euler: Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis

Euler transformou os caminhos em linhas e marcou os pontos de interseção das mesmas, criando provavelmente o primeiro grafo da história.

Figura 2 – Primeiro grafo da história

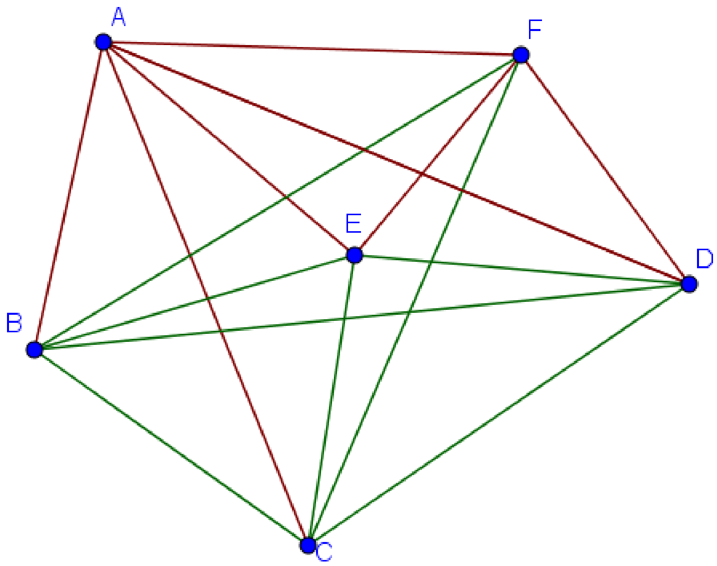


Com isso, ele percebeu que só seria possível atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte se houvesse exatamente zero ou dois pontos de onde saísse um número ímpar de caminhos. Ou seja, em cada ponto deve haver um número par de caminhos (um para "entrar" e outro para "sair"). Já os dois pontos com caminhos ímpares referem-se ao início e ao fim, ou seja, se houverem dois pontos ímpares, o caminho começa em um lugar e termina em outro, já se não houver nenhum, o caminho começa e termina no mesmo lugar. Com isso, ele provou que não existia caminho que possibilitasse tais restrições.

Já nas últimas décadas, o estudo da Análise Combinatória ganhou muita força, devido a necessidade de resolver problemas ligados a grafos e algoritmos, como sistemas de armazenamento de dados bancários e problemas de pesquisa operacional.

No início do século XX, Frank Plumpton Ramsey (1903-1930) criou uma teoria que garante a existência de certas configurações. Podemos exemplificar essa teoria com o Teorema de Ramsey que afirma que se tivermos no plano 6 ou mais pontos sendo 3 deles nunca colineares e ligarmos todos esses pontos dois a dois aleatoriamente usando duas cores distintas, certamente teríamos um ou mais triângulos com todos os lados de mesma cor.

Figura 3 – Exemplo do Teorema de Ramsey



Aqui temos o triângulo AFD com todos os lados vermelhos e os triângulos BCF, BCE, BED e CED com todos os lados verdes.

Em 1937, George Pólya (1887-1985) criou uma maneira de enumerar configurações não-equivalentes relativamente a um grupo de permutações dado. Podemos imaginar por exemplo um cubo e tentar calcular o número de maneiras de pintar suas faces de branco e preto de modo a obter cubos "diferentes", ou seja, cubos que ainda que rotacionados sejam distintos dos demais. Teremos assim, os seguintes cubos:

- Todas as faces brancas;
- Uma face branca e as outras pretas;
- Duas faces brancas e as outras pretas, sendo essas duas brancas faces adjacentes;
- Duas faces brancas e as outras pretas, sendo essas duas brancas faces opostas;
- Três faces brancas e as outras pretas, sendo essas três brancas adjacentes duas a duas;
- Três faces brancas e as outras pretas, sendo essas três brancas, duas adjacentes e a terceira adjacente a segunda e oposta a primeira;
- Duas faces pretas e as outras brancas, sendo essas duas pretas faces adjacentes;
- Duas faces pretas e as outras brancas, sendo essas duas pretas faces opostas;
- Uma face preta e as outras brancas;
- Todas as faces pretas.

Totalizando 10 cubos distintos.

2 **UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA UM CURSO BÁSICO DE COMBINATÓRIA**

2.1 **Aula 01**

Objetivo: Introduzir o conceito do princípio fundamental da contagem. Espera-se que o aluno aprenda a fazer diagramas de árvore e utilizar o princípio multiplicativo em problemas simples.

A Análise Combinatória é o setor da matemática que visa desenvolver métodos de contagem. Algumas vezes é viável fazer a contagem listando as possibilidades, porém, em várias situações será necessário utilizar métodos de contagem eficientes para fazê-lo.

No século XII, o matemático hindu Báskhara (1114-1185?) – o mesmo da “Fórmula de Báskhara” – já possuía conhecimentos avançados de Combinatória. No século XVIII, Euler já havia publicado livros a respeito de probabilidade que utilizavam vários importantes conceitos de Análise Combinatória.

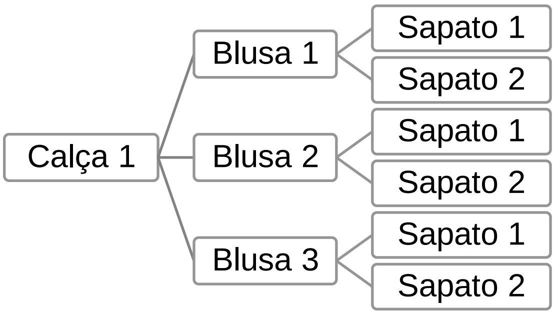
A necessidade do estudo de Combinatória na humanidade se deu para resolver problemas como o desenvolvimento do Binômio $(a + b)^n$, problemas associados com grafos, jogos de azar e problemas relativos ao cálculo de probabilidades.

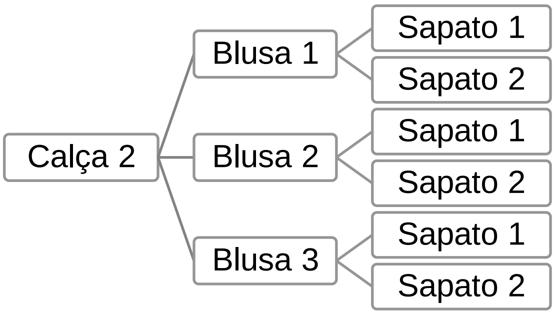
2.1.1 Princípio fundamental da contagem

Observe as situações a seguir:

1. De quantas maneiras posso me vestir escolhendo uma entre duas calças, uma entre três blusas e um entre dois pares de sapato?

Para ilustrar essa situação, faremos um diagrama de árvore:





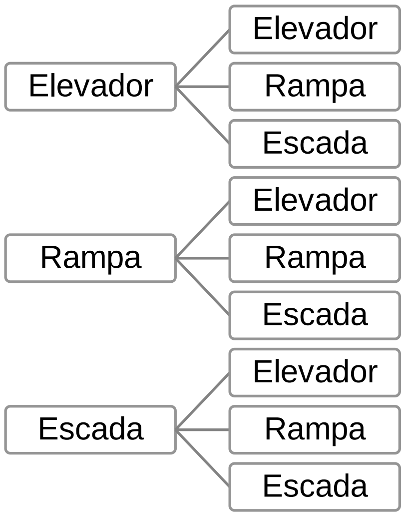
Temos assim para cada uma das opções de calça, 3 opções de blusa, ou seja, 2 x 3 = 6 opções de escolha de calça e blusa e para cada uma delas temos 2 opções de sapato, sendo assim, temos 6 x 2 = 12 possibilidades.

2. Em uma escola, determinado professor chega ao colégio e pretende ir para a sala de aula. Para isso, ele precisa subir um andar para pegar seu material na sala dos professores e depois subir outro andar para chegar na sala de aula. Os andares podem ser acessados por elevador, escada ou rampa.

a) De quantas maneiras distintas ele pode fazer esse trajeto?

Temos 3 opções para ir do térreo para o primeiro andar e para cada uma dessas 3 ainda temos outras 3 opções para sair da sala dos professores e ir para a sala de aula, tendo assim 3 x 3 = 9 maneiras distintas de fazer esse trajeto.

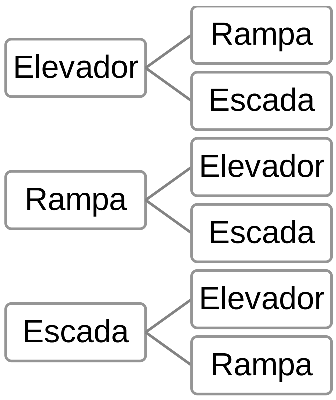
Podemos ilustrar essa situação usando um *diagrama de árvore*:



b) E se o professor não quiser subir da sala do primeiro andar para o segundo da mesma maneira que subir do térreo para o primeiro andar?

Continuaremos com 3 opções para ir do térreo para o primeiro andar mas teremos uma opção a menos para ir do primeiro andar para o segundo, portanto, teremos 3 x 2 = 6 maneiras de fazer esse trajeto.

Podemos ilustrar essa situação usando um *diagrama de árvore* similar ao anterior:



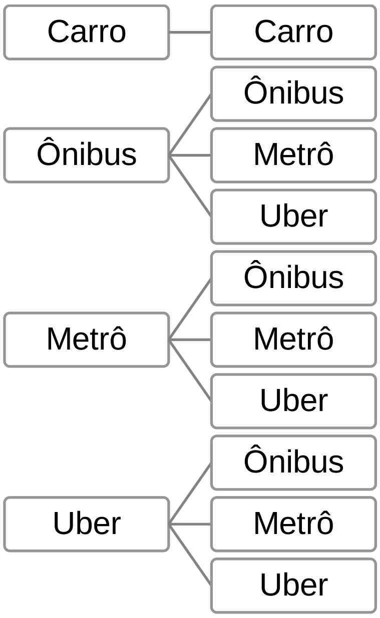
3. Para ir de casa para a universidade, Leonar tem 4 opções de meio de transporte: Ônibus, metrô, uber ou seu próprio carro. Caso ele vá com seu próprio carro, ele precisará voltar com ele para casa, além disso, ele só poderá voltar com seu próprio carro para casa se tiver ido com ele. Caso ele vá utilizando outro meio de transporte, poderá voltar usando o mesmo

ou outro diferente, mas não o seu próprio carro. De quantas maneiras diferentes Leonar pode ir para a universidade e voltar para casa?

Para ir para a universidade ele pode ir e voltar com seu próprio carro (1 possibilidade). Caso ele não vá com o seu próprio carro, ele terá 3 opções para ir e para cada uma delas 3 opções para voltar, tendo assim 3 x 3 = 9 possibilidades.

Sendo assim, Leonar têm 1 + 9 = 10 possibilidades no total.

Podemos ilustrar essa situação usando um *diagrama de árvore*:



4. Nathália e Leonar são casados. Ela tem 3 amigas heterossexuais solteiras: Karine, Laura e Gabriela. Ele, por sua vez, tem 5 amigos heterossexuais solteiros: Bruno, Frederico, Igor, Vinicius e Marcos. Determinados a formar um casal, eles marcam um jantar com esses 8 convidados. De quantas maneiras distintas essa noite pode terminar com um casal formado?

Para formar um casal heterossexual, precisamos escolher uma mulher e um homem. Temos 3 opções de mulheres e cada uma delas pode formar um casal com 5 homens diferentes, então temos 3 x 5 = 15 maneiras distintas de formar um casal. Os casais possíveis são:

Karine e Bruno	Laura e Bruno	Gabriela e Bruno
Karine e Frederico	Laura e Frederico	Gabriela e Frederico
Karine e Igor	Laura e Igor	Gabriela e Igor
Karine e Vinicius	Laura e Vinicius	Gabriela e Vinicius
Karine e Marcos	Laura e Marcos	Gabriela e Marcos

Depois de resolver os 4 problemas já descritos, propor que os alunos resolvam sozinhos os problemas 5 e 6 a seguir (resolvendo-os em seguida):

5. Em um restaurante, na hora do almoço, um “prato executivo” é montado escolhendo-se um item de cada um dos grupos a seguir:

I - Proteína:

- Medalhões de filé
- Peito de frango
- Hambúrguer de soja
- Filé de peixe

II – Salada:

- salada verde
- salada caprese

III – Acompanhamento:

- Arroz branco
- Arroz integral
- Purê de mandioca
- Batata frita

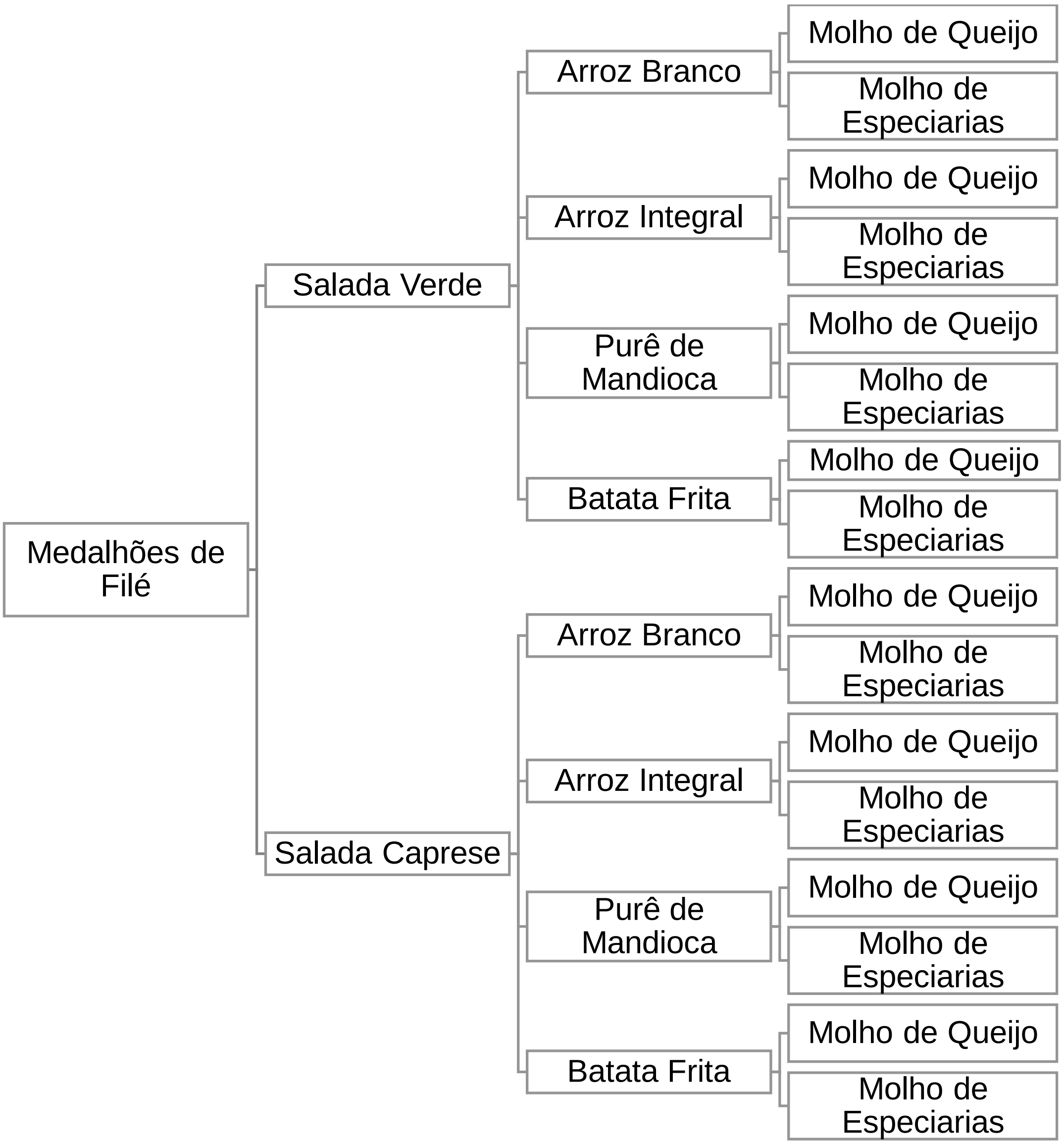
IV – Molho:

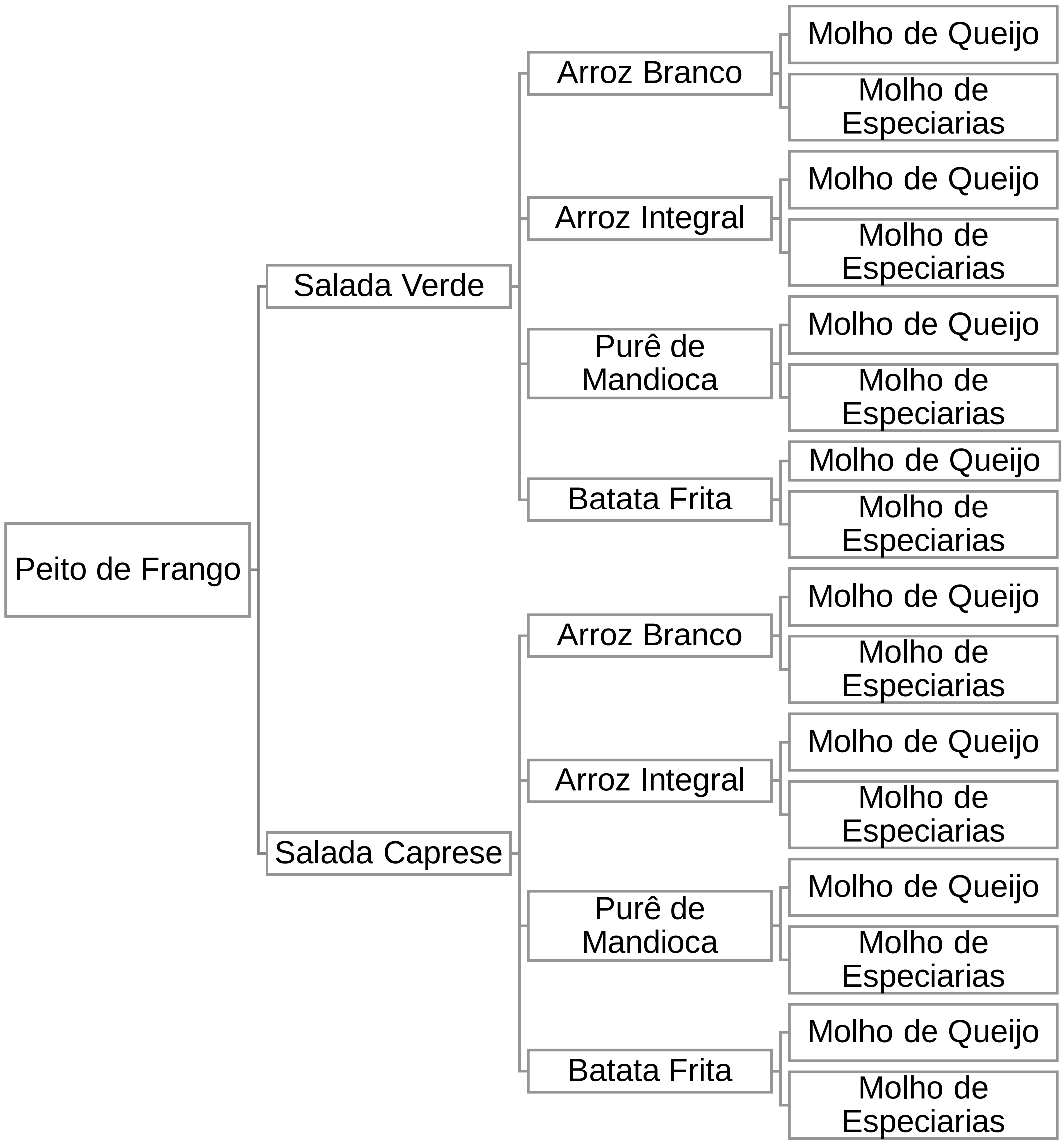
- Molho de queijo
- Molho de especiarias

Quantos pratos executivos distintos podem ser montados?

Para resolver esse problema, note que temos 4 opções para a proteína a ser escolhida. Para cada uma dessas 4 opções podemos escolher a salada de 3 maneiras distintas, totalizando assim 4 x 3 = 12 maneiras de escolher um item do grupo I e outro do item II. Para cada uma dessas 12 maneiras podemos ainda escolher um acompanhamento de 4 maneiras distintas, tendo assim 12 x 4 = 48 possibilidades até então. Por último, para cada um dos 48 pratos já montados escolheremos um molho entre as 2 opções disponíveis, tendo assim 48 x 2 = 96 pratos possíveis a serem montados.

Podemos ainda montar um *diagrama de árvore* para ilustrar esses 96 pratos:




Peito de Frango
Salada Verde
Arroz Branco
Molho de Queijo
Molho de Especiarias
Arroz Integral
Molho de Queijo
Molho de Especiarias
Purê de Mandioca
Molho de Queijo
Molho de Especiarias
Batata Frita
Molho de Queijo
Molho de Especiarias
Salada Caprese
Arroz Branco
Molho de Queijo
Molho de Especiarias
Arroz Integral
Molho de Queijo
Molho de Especiarias
Purê de Mandioca
Molho de Queijo
Molho de Especiarias
Batata Frita
Molho de Queijo
Molho de Especiarias


Hamburgúer de Soja
Salada Verde
Arroz Branco
Molho de Queijo
Molho de Especiarias
Arroz Integral
Molho de Queijo
Molho de Especiarias
Purê de Mandioca
Molho de Queijo
Molho de Especiarias
Batata Frita
Molho de Queijo
Molho de Especiarias
Salada Caprese
Arroz Branco
Molho de Queijo
Molho de Especiarias
Arroz Integral
Molho de Queijo
Molho de Especiarias
Purê de Mandioca
Molho de Queijo
Molho de Especiarias
Batata Frita
Molho de Queijo
Molho de Especiarias

Note que tivemos 4 escolhas a fazer e 4 opções para a primeira delas, 3 opções para a segunda, 4 opções para a terceira e 2 opções para a última, totalizando assim 4 x 3 x 4 x 2 = 96 pratos distintos. Nessa situação a quantidade de casos já é elevada, por isso, escrevê-los começa a ficar cansativo. O uso do diagrama nesse caso já não é mais uma maneira prática de resolver o problema.

6. A primeira fase da prova da OBMEP de 2016 foi composta por 20 questões de múltipla escolha com 5 opções em cada uma delas. De quantas maneiras distintas podemos preencher o cartão de respostas?

A primeira questão pode ser respondida de 5 modos distintos. Para cada um deles temos 5 opções para a segunda questão, totalizando assim $5 \times 5 = 5^2$

maneiras distintas de responder as duas primeiras questões. Para cada uma dessas 5^2 maneiras, ainda temos 5 opções para a terceira questão, tendo assim $5^2 \times 5 = 5^3$ jeitos de preencher o cartão de respostas até então. Prosseguindo dessa maneira, teremos: $5 \times 5 \times 5 \times ... \times 5 = 5^{20}$ maneiras distintas de preencher o cartão de respostas.

Como 5^{20} = 95.367.431.640.625, é inviável resolver essa questão usando um *diagrama de árvore*.

7. Quantos números de cinco algarismos existem?

Solução 1:

Para calcular a quantidade de números de cinco algarismos podemos calcular a diferença entre o maior número de cinco algarismos e o menor e depois adicionar uma unidade: 99999 – 10000 + 1 = 90.000 números

Observação: Somamos 1 à diferença entre o primeiro e o último número citado pois nos interessa saber quantos números há de 10.000 até 99.999, então as duas extremidades nos interessam. Ao fazer 99999 – 10000 estamos desprezando o próprio *10000* do intervalo. Por exemplo, de 5 a 9 existem 9 – 5 + 1 = 5 números (5, 6, 7, 8 e 9).

Solução 2:

Para escrevermos um número de cinco algarismos, o primeiro deles terá 9 opções (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9), pois se começasse por zero não teria 5 algarismos (por exemplo: 01237 = 1237 que é um número de quatro algarismos significativos). Já os outros quatro algarismos têm 10 opções cada (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9). Temos, assim: $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ = 90.000 números

8. Quantos números de cinco algarismos distintos existem?

Para escrevermos um número de cinco algarismos, o primeiro deles terá 9 opções (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9). Os outros quatro algarismos têm 10 opções cada (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9), porém, como os algarismos devem ser distintos, o segundo algarismo não poderá ser igual ao primeiro, sobrando assim 9 opções. O terceiro não poderá ser igual ao primeiro nem ao segundo, sobrando assim 10 – 2 = 8 opções. O quarto não poderá ser igual ao primeiro, nem ao segundo, nem ao terceiro, sobrando assim 10 – 3 = 7 opções. O quinto não poderá ser igual ao primeiro, nem ao segundo, nem ao terceiro, nem ao quarto, sobrando assim 10 – 4 = 6 opções. Temos, assim: 9 x 9 x 8 x 7 x 6 = 27.216 números.

9. Quantos números ímpares de cinco algarismos existem?

Solução 1:

A metade dos números de 5 algarismos são números ímpares, e a outra metade são números pares. Por isso, podemos usar o resultado obtido no item 7 para calcular. Teremos assim: 90000 / 2 = 45.000 números

Solução 2:

Primeiramente, devemos lembrar que para um número ser ímpar basta que o seu último algarismo seja ímpar (1, 3, 5, 7 ou 9).

Dessa maneira, o primeiro algarismo terá 9 opções (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9). Os três algarismos que o seguem têm 10 opções cada (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9), e o último algarismo terá 5 opções (1, 3, 5, 7 ou 9). Temos, assim: 9 x 10 x 10 x 10 x 5 = 45.000 números

10. Quantos números ímpares de cinco algarismos distintos existem?

A diferença desse item para o anterior é que agora temos algarismos distintos. Como os números de algarismos distintos não são todos consecutivos, a primeira solução não faz mais sentido. Já a segunda solução é interessante para nos basearmos para tal. O problema da mesma, é que se começarmos preenchendo os algarismos da esquerda para a direita, quando formos analisar a quantidade de possibilidades para o último algarismo não saberemos quantas são as opções, já que os algarismos utilizados até então podem ser pares ou ímpares.

Por isso, começaremos preenchendo o último algarismo, com uma das 5 opções. Depois, preencheremos o primeiro algarismo com uma das 8 opções restantes (qualquer algarismo existente, menos o zero e o algarismo que já foi utilizado) e depois preencheremos os 3 algarismos do meio com 8 opções (qualquer algarismo menos os dois que já foram utilizados), 7 opções (qualquer algarismo menos os três que já foram utilizados) e 6 opções (qualquer algarismo menos os quatro que já foram utilizados) respectivamente. Temos, assim: 8 x 8 x 7 x 6 x 5 = 13.440 números

2.1.2 Desafio para a próxima aula

1. Quantos números pares de cinco algarismos existem?
2. Quantos números pares de cinco algarismos distintos existem?

2.2 **Aula 02**

Objetivo: Reforçar o conceito do Princípio Multiplicativo e formalizá-lo. Espera-se que o aluno identifique e resolva problemas de contagem nos quais seja necessária a divisão em casos.

Iniciar a aula retomando os desafios propostos na aula anterior:

1. Quantos números pares de cinco algarismos existem?

Análogo ao número 9 da aula anterior.

2. Quantos números pares de cinco algarismos distintos existem?

Solução 1:

Essa questão é similar a de número 10. Porém, se fizermos da mesma maneira, teremos 5 opções para o último dígito (0, 2, 4, 6 ou 8) e para o primeiro dígito teremos quantas opções? Se o zero for utilizado no último dígito, qualquer um dos outros 9 existentes poderá preencher o primeiro algarismo, já se o último dígito for um dos outros 4, o primeiro não poderá ser zero (pois se começar por zero não terá 5 algarismos) nem pelo outro algarismo já utilizado, tendo assim 8 opções. Dessa maneira, não sabemos quantas opções temos para o primeiro dígito.

Assim, precisamos separar em casos:

1º caso: O último algarismo é o zero (1 opção). Assim, o primeiro tem 9 opções (qualquer algarismo menos o zero), o segundo tem 8 opções (qualquer algarismo menos os dois já utilizados), o terceiro tem 7 opções (qualquer algarismo menos os três já utilizados), o quarto tem 6 opções (qualquer algarismo menos os quatro já utilizados). Temos, assim: 9 x 8 x 7 x 6 x 1 = 3.024 números pares de cinco algarismos distintos terminados em zero.

2º caso: O último algarismo é par mas não é o zero (4 opções). Assim, o primeiro tem 8 opções (qualquer algarismo menos o zero e o já utilizado no último algarismo), o segundo tem 8 opções (qualquer algarismo menos os dois já utilizados), o terceiro tem 7 opções (qualquer algarismo menos os três já utilizados), o quarto tem 6 opções (qualquer algarismo menos os quatro já utilizados). Temos, assim: 8 x 8 x 7 x 6 x 4 = 10.752 números pares de cinco algarismos distintos terminados em 2, 4, 6 ou 8.

Total: 3024 + 10752 = 13.776 números

Solução 2:

Podemos calcular o total de números de cinco algarismos distintos (item 8) e calcular a quantidade de números ímpares de cinco algarismos distintos (item 10). Depois disso, basta concluir que para um número natural ser par, basta que não seja ímpar, por isso, subtraímos do total a quantidade de ímpares: 27216 – 13440 = 13.776 números

Podemos generalizar que se há x_1 modos de tomar uma primeira decisão e x_2 modos de tomar uma segunda decisão, então há $x_1.x_2$ modos de tomar sucessivamente a primeira decisão e depois a segunda decisão. Se houver uma terceira decisão que puder ser tomada de x_3 maneiras, devemos multiplicar o resultado anteriormente obtido por x_3. Teremos, assim, $x_1.x_2.x_3$ modos de tomar as três decisões sucessivamente. Indutivamente, se precisarmos tomar n decisões sucessivamente cada uma delas puder ser tomada de x_i maneiras, poderemos fazê-lo de $x_1.x_2.x_3 \ldots x_n$ maneiras.

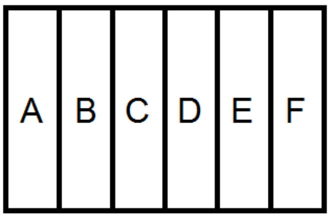
2.2.1 Atividade:

Dividir a turma em duplas para resolver o problema a seguir e discutir as soluções obtidas. Indicar uma das duplas para explicar para todos a sua resolução (preferencialmente buscando uma dupla que não tenha obtido a resposta certa). Caso esteja errada, apontar o erro e pedir que outra dupla com resolução diferente explique seu raciocínio até que a resposta certa seja mencionada.

Uma bandeira é formada por 6 listras que podem ser coloridas de amarelo, verde, marrom ou preto. Duas listras seguidas não podem ter a mesma cor. Sendo assim, de quantas maneiras distintas a bandeira pode ser colorida?

Resolução Esperada:

Nomearemos as regiões a serem coloridas de A, B, C, D, E e F como representado na figura a seguir:.



Começaremos colorindo a listra mais à esquerda da bandeira (região A) com qualquer uma das 4 cores disponíveis. Para cada uma dessas opções, teremos 3 opções de cor para a listra adjacente a ela (região B) - qualquer uma das 4 cores menos a que já foi usada na região A. Teremos assim, até então, 4 x 3 = 12 maneiras distintas de colorir as duas primeiras listras (regiões A e B). Para cada uma dessas 12 opções, teremos ainda 3 opções para colorir a região C - qualquer uma das 4 cores menos a que já foi usada na região B, tendo assim 4 x 3 x 3 = 36 maneiras distintas de colorir as 3 primeiras faixas (regiões A, B e C).

Usando o mesmo raciocínio, teremos ainda 3 opções distintas para cada uma das regiões D, E e F, sucessivamente, pois em cada uma delas poderemos usar qualquer uma das 4 cores disponíveis menos a que tiver sido utilizada na faixa à esquerda da mesma. Teremos, assim, 4 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 = 972 maneiras distintas de colorir a bandeira.

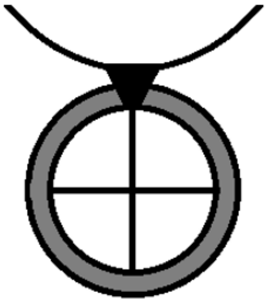
Posteriormente, perguntar as outras duplas se alguém obteve o mesmo resultado com outro raciocínio e ressaltar que não importa qual faixa iniciaremos pintando, a resposta encontrada será a mesma.

2.2.2 <u>Exercícios propostos</u>

1. No Brasil, as placas dos carros são compostas por três letras (entre as 26 do alfabeto) seguidas de quatro algarismos. Quantas placas distintas podem existir?

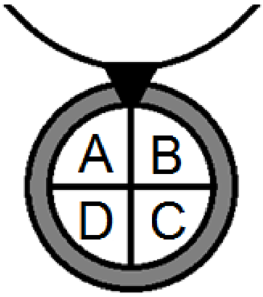
A primeira letra da placa poderá ser qualquer uma das 26 letras do alfabeto. Para cada uma delas poderemos preencher a segunda letra com as mesmas 26 opções. Temos até então 26 x 26 = 676 maneiras distintas de escolher as duas primeiras letras da placa. Para cada uma dessas 676 maneiras podemos ainda preencher a terceira letra da placa com 26 letras distintas, tendo assim 26 x 26 x 26 = 17576 maneiras distintas de preencher as três letras da placa. Para cada uma dessas 17576 maneiras de preencher as três letras da placa temos 10 maneiras distintas de preencher cada um dos quatro dígitos, resultando assim em 26 x 26 x 26 x 10 x 10 x 10 x 10 = 175.760.000 placas distintas.

2. Uma joalheria produz pingentes redondos que são divididos em 4 setores circulares, cada um com uma pedra. Essas pedras são escolhidas entre ametista, citrino, esmeralda, rubi, safira e turmalina. Dois setores adjacentes não podem ser preenchidos com o mesmo tipo de pedra. Quantos pingentes distintos podem ser fabricados?



Fonte: O próprio Autor.

Nomearemos as regiões nas quais encaixaremos uma pedra de A, B, C e D como representado na figura a seguir:



Fonte: O próprio Autor.

A princípio podemos pensar em preencher a região A com qualquer uma das 6 pedras disponíveis. Teremos assim, para cada uma dessas 6 opções de pedra, 5 opções para a região B – qualquer uma menos a pedra já utilizada na região A. Temos até então 6 x 5 = 30 maneiras distintas de escolher as duas primeiras pedras. Já a terceira pedra escolhida (região C), terá também 5 opções (qualquer uma das pedras menos a utilizada na região B), resultando assim, até então, em 6 x 5 x 5 = 150 maneiras distintas de escolher as 3 primeiras pedras. Ao analisar quantas são as opções de pedra para a última região a ser preenchida (região D), teremos um impasse: caso as pedras das regiões A e C sejam distintas, teremos 4 opções para a região D (qualquer uma menos as duas já utilizadas em A e C). Porém, caso as pedras das regiões A e C sejam do mesmo tipo, teremos 5 opções para a região D (qualquer uma menos a que foi usada nas regiões A e C).

Quando nos deparamos com esse tipo de problema, separamos em casos. Um dos casos seria o que as regiões A e C serão preenchidas com o mesmo tipo de pedra (caso 1) e o outro em que as regiões A e C serão preenchidas com pedras distintas (caso 2).

Caso 1: Teremos 6 possibilidades para a pedra da região A, 5 possibilidades para a pedra da região B (qualquer uma menos a já utilizada em A), 1 possibilidade para a região C (a mesma de A) e 5 possibilidades para a região D (qualquer pedra que não seja do tipo que foi utilizado em A e C). Teremos assim 6 x 5 x 1 x 5 = 150 maneiras distintas de produzir o pingente com o mesmo tipo de pedra nas regiões A e C.

Caso 2: Teremos 6 possibilidades para a pedra da região A, 5 possibilidades para a pedra da região B (qualquer uma menos a já utilizada em A), 4 possibilidades para a região C (qualquer uma menos as já utilizadas em A e B) e 4 possibilidades para a região D (qualquer pedra que não seja dos tipos que foram utilizados em A e C). Teremos assim 6 x 5 x 4 x 4 = 480 maneiras distintas de produzir o pingente com o pedras de tipos diferentes nas regiões A e C.

Teremos, assim, no total, 150 + 480 = 630 pingentes distintos a serem fabricados.

3. De um baralho comum (de 52 cartas) serão extraídas duas cartas. Quantas sequências distintas podem ser obtidas sendo a primeira delas uma dama e a segunda uma carta de espadas? E se a primeira carta for reposta?

Inicialmente, podemos pensar que temos 4 opões para a primeira carta a ser extraída do baralho (pois existem 4 damas: uma de ouros, uma de copas, uma de espadas e uma de paus). Porém, se pensarmos dessa maneira, não saberemos quantas opções teremos para a segunda carta. Se a dama que foi retirada foi a de espadas, restaram 12 opções de carta de espadas para a segunda extração (todas as 13 cartas de espadas que existem no baralho menos a dama que já foi retirada). Já se a primeira carta foi uma dama de outro naipe, restam ainda 13 opções para a segunda carta a ser retirada (qualquer carta de espadas – inclusive a dama). Como a quantidade de opções para a segunda decisão **depende** da carta que foi retirada anteriormente, deveremos separar em dois casos:

Caso 1: A carta da primeira extração foi a dama de espadas.

Temos, então, 1 opção para a primeira extração e 12 opções para a segunda extração. Ou seja, 1 x 12 = 12 maneiras distintas.

Caso 2: A carta da primeira extração não foi a dama de espadas.

Temos, então, 3 opções para a primeira extração (dama de ouros, dama de copas ou dama de paus) e 13 opções para a segunda extração. Ou seja, 3 x 13 = 39 maneiras distintas.

Teremos, assim, no total, 12 + 39 = 51 maneiras distintas de retirar sucessivamente duas cartas, sendo a primeira uma dama e a segunda uma carta de espadas (sem reposição).

Já se houver reposição da primeira carta, não enfrentaremos o mesmo impasse. Teremos 4 opções para a primeira carta (qualquer dama) e 13 opções para a segunda carta (qualquer carta de espadas).

Teremos, assim, 4 x 13 = 52 maneiras distintas de retirar sucessivamente duas cartas, sendo a primeira uma dama e a segunda uma carta de espadas com reposição da primeira.

4. Quantos números de 5 algarismos distintos escolhidos entre {1, 2, 6, 7, 9} são maiores que 60.000?

Para um número de 5 algarismos distintos ser maior que 60.000, basta que o primeiro algarismo seja o próprio 6 ou um número maior que 6. Temos então 3 opções para o primeiro algarismo (6, 7 ou 9). Já o segundo algarismo poderá ser qualquer um dos cinco disponíveis menos o algarismo que já foi utilizado no primeiro (4 opções). O terceiro dígito terá 3 opções (qualquer um menos os dois que já foram utilizados). O quarto dígito terá apenas 2 opções (os dois algarismos restantes) e o último, terá apenas uma opção (o único dígito que ainda não foi utilizado).

Teremos, assim, 3 x 4 x 3 x 2 x 1 = 72 números.

5. Quantos números de 5 algarismos distintos escolhidos entre {2, 3, 5, 7, 8} são maiores que 52.378?

Para organizarmos o raciocínio, separaremos esse problema em problemas menores:

I. Números que começam por um algarismo maior que 5:

Teremos apenas duas opções para o primeiro dígito (7 e 8). Para os dígitos seguintes não teremos nenhuma restrição além de não poder repetir os dígitos já utilizados. Temos, assim, 2 x 4 x 3 x 2 x 1 = 48 números.

II. Números que começam por 5 e o segundo algarismo é maior que 2:

O primeiro dígito é o 5 (uma opção). Teremos apenas três opções para o segundo dígito (3, 7 e 8 – não pode ser o 5 porque já foi utilizado no primeiro dígito). Para os dígitos seguintes não teremos nenhuma restrição além de não poder repetir os dígitos já utilizados. Temos, assim, 1 x 3 x 3 x 2 x 1 = 18 números.

III. Números que começam por 5 seguido do 2 e o terceiro algarismo é maior que 3:

O primeiro dígito é o 5 (uma opção). O segundo dígito é o 2 (uma opção). Teremos apenas duas opções para o terceiro dígito (7 e 8 – não pode ser o 5 porque já foi utilizado no primeiro dígito). Para os dígitos seguintes não teremos nenhuma restrição além de não poder repetir os dígitos já utilizados. Temos, assim, 1 x 1 x 2 x 2 x 1 = 4 números.

IV. Números que começam por 5 seguido do 2 e do 3 e o quarto algarismo é maior que 7:

O primeiro dígito é o 5 (uma opção). O segundo dígito é o 2 (uma opção). O terceiro dígito é o 3 (uma opção). Teremos apenas uma opção para o quarto dígito (8). Para último dígito, usaremos o único algarismo restante (uma opção). Temos, assim, 1 x 1 x 1 x 1 x 1 = 1 número.

V. Números que começam por 5 seguido do 2, do 3 e do 7 e o quinto algarismo é maior que 8:

Nenhum número. Pois não temos algarismo maior que 8 disponível.

Assim, temos, no total: 48 + 18 + 4 + 1 + 0 = 71 números

6. Quantos números de 4 algarismos tem pelo menos dois algarismos iguais?

Podemos pensar que para que o número tenha pelo menos dois algarismos repetidos basta que não tenha todos os algarismos distintos.

Primeiramente, calcularemos quantos são os números de 4 algarismos: Há 9 opções para o primeiro algarismo (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, pois caso comece por zero não terá 4 algarismos significativos) e 10 opções para cada algarismo que o segue (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9). Ou seja, temos 9 x 10 x 10 x 10 = 9000 números de quatro algarismos. Desses 9000 números, descobriremos quantos tem 4 algarismos distintos: Temos 9 opções para o primeiro dígito (analogamente), já para o segundo dígito teremos 9 opções já que pode ser zero mas tem que ser diferente do anterior. O terceiro dígito terá 8 opções (qualquer dígito menos os dois já utilizados e o último dígito terá as 7 opções restantes. Teremos, assim 9 x 9 x 8 x 7 = 4536 números de 4 algarismos distintos. Finalmente, basta subtrair do total de números de 4 algarismos os que tem os algarismos distintos.

Temos, assim, 9000 – 4536 = 4464 números de 4 algarismos com pelo menos dois dígitos repetidos.

7. Em relação ao número 75.600 responda:

a) Quantos são os seus divisores positivos?

b) Quantos são os seus divisores positivos e pares?

c) Quantos são os seus divisores positivos e múltiplos de 10?

d) Quantos são os seus divisores positivos e quadrados perfeitos?

a)

Começaremos escrevendo o número na forma fatorada: $75600 = 2^4.3^3.5^2.7^1$. Agora utilizaremos que para que um número divida o 75600 basta que em sua forma fatorada não existam fatores primos diferentes de 2, 3, 5, e 7 e que os expoentes dos fatores primos do divisor nunca sejam maiores que os expoentes desses fatores no 75600. Sendo assim, todo divisor poderá ser escrito na forma $2^x.3^y.5^z.7^w$. Observe que todo número diferente de zero, quando elevado a zero resulta em 1, então quando dissermos que o expoente do fator pode ser zero, estamos incluindo o fato de que aquele pode não ser um fator primo do divisor. Sendo assim, o expoente x terá 5 opções (0, 1, 2, 3 ou 4); o expoente y terá 4 opções (0, 1, 2 ou 3); o expoente z terá 3 opções (0, 1 ou 2) e o expoente w terá 2 opções (0 ou 1).

Temos, assim, 5 x 4 x 3 x 2 = 120 divisores.

b)

Para o divisor ser par, ele deve ser um múltiplo de 2. Assim, em sua forma fatorada o fator primo 2 deve estar presente (ou seja, seu expoente não poderá ser zero), dessa forma, teremos 4 opções para x (1, 2, 3 ou 4). Já os outros expoentes não terão nenhuma restrição adicional em relação ao item anterior.

Teremos assim: 4 x 4 x 3 x 2 = 96 divisores pares.

c)

Para o divisor ser múltiplo de dez, ele deve ser um múltiplo de 2 e de 5. Assim, em sua forma fatorada o fator primo 2 deve estar presente e o fator 5 também (ou seja, os expoentes de 2 e 5 não poderão ser zero), dessa forma, teremos 4 opções para x (1, 2, 3 ou 4) e teremos duas opções para z (1 ou 2). Já os outros expoentes não terão nenhuma restrição adicional em relação ao item a.

Teremos assim: 4 x 4 x 2 x 2 = 64 divisores múltiplos de dez.

d)

Para o divisor ser um quadrado perfeito, todos os seus fatores primos devem ter expoentes pares. Assim, teremos apenas 3 opções para x (0, 2 ou 4), 2 opções para y (0 ou 2), 2 opções para z (0 ou 2) e uma opção para w (0).

Teremos assim: 3 x 2 x 2 x 1 = 12 divisores quadrados perfeitos.

8. (UFF-2008) A comunicação eletrônica se tornou fundamental no nosso cotidiano, mas infelizmente, todo dia recebemos muitas mensagens indesejadas: propagandas, promessas de emagrecimento imediato, propostas de fortuna fácil, correntes, etc. Isto está se tornando um problema para os usuários da internet, pois o acúmulo de “lixo” nos computadores compromete o desempenho da rede.

   Pedro iniciou uma corrente enviando uma mensagem pela internet a dez pessoas, que por sua vez, enviaram, cada uma, a mesma mensagem a outras dez pessoas. E estas, finalizando a corrente, enviaram, cada uma, a mesma mensagem a outras dez pessoas.

   O número máximo de pessoas que receberam a mensagem enviada por Pedro é igual a:

   (A) 30 (B) 110 (C) 210 (D) 1110 (E) 11110

Para supormos que o máximo de pessoas receberam a mensagem iremos supor que ninguém recebeu a mensagem mais de uma vez, ou seja, que cada mensagem enviada representa uma pessoa a mais lendo a mensagem, Inicialmente sabemos que 10 pessoas receberam a mensagem. Posteriormente, cada uma dessas 10 mandou a mensagem para outras 10 pessoas, tendo assim mais 10 x 10 = 100 pessoas recebendo a mensagem. Posteriormente, cada uma dessas 100 pessoas enviou a mensagem para outras 10 pessoas, ou seja, mais 100 x 10 = 1000 pessoas receberam a mensagem.

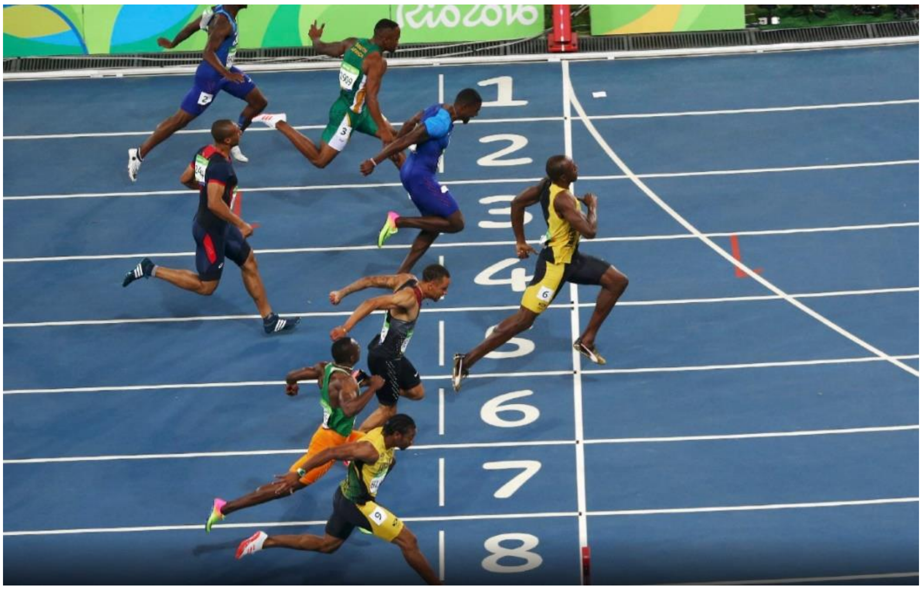
Sabemos assim que 10 + 100 + 1000 = 1110 pessoas receberam a mensagem.

Alternativa D.

2.2.3 Exercícios de fixação do conteúdo

1. Três rodovias distintas ligam a cidade A e a cidade B. Cinco rodovias distintas ligam as cidades B e C. De quantas maneiras distintas podemos ir da cidade A para a cidade C, passando pela cidade B?

2. Na Olimpíada do Rio de 2016, os atletas Usain Bolt, Justin Gatlin, Andre De Grasse, Yohan Blake, Akani Simbine, Ben Youssef Meite, Jimmy Vicaut e Trayvon Bromell foram classificados para a final dos 100 metros masculino no atletismo. Sabendo que não houve empate, quantos resultados possíveis existem para o 1º, o 2º e o 3º lugar?



Fonte: http://olimpiadas.uol.com.br/album/2016/08/14/rio-2016-usain-bolt-na-disputa-dos-100m-rasos.htm

3. Uma grande marca lançou um relógio que pode ser montado escolhendo-se uma caixa (que pode ser prateada, dourada, cinza-espacial ou rose) e uma pulseira (que pode ser esportiva, de nylon, de couro, aço inoxidável ou de elos). Quantos relógios distintos podem ser montados?

4. Uma loja especializada em chocolates produz bombons recheados com uma camada de chocolate. Esse recheio pode ser de nozes, castanha de caju,

pistache, brigadeiro, creme de avelã ou coco, já o chocolate pode ser branco, ao leite ou amargo. Quantos bombons distintos podem ser preparados?

5. Para uma viagem, coloquei na mala três calças jeans, duas saias, doze blusas e três pares de sapato. Ao chegar no destino, com todas essas roupas disponíveis, de quantas maneiras distintas posso escolher uma roupa de baixo, uma roupa de cima e um par de sapatos?

6. O Etios Cross Modelo 2017 pode ser comprado com câmbio manual ou automático. A cor deve ser escolhida entre Branco Bossa Nova, Prata Lua Nova, Prata Premium, Azul Journey, Vermelho Fúria, Cinza Cosmopolitan, Preto Infinito ou Branco Perolizado. De quantas maneiras distintas esse carro pode ser montado?

7. Uma sala tem 6 lâmpadas que podem ser acesas de forma independente. De quantas maneiras distintas essa sala pode ser iluminada?

8. Na cidade A os telefones móveis são compostos por 9 dígitos. Dalva comprou um celular em determinada operadora dessa cidade que usa para o primeiro dígito o número 9 e para o segundo dígito o número 9, e para o terceiro dígito 7, 8 ou 9. Mais tarde, ao chegar em casa, esqueceu o número do seu celular novo, mas lembrava que os quatro últimos dígitos dele formavam o ano de nascimento dela. Com essa configuração, quantas opções de números de telefone são possíveis para Dalva?

9. Um executivo tem 6 ternos, 15 camisas e 10 gravatas. De quantas maneiras ele pode escolher um terno, uma camisa e uma gravata?

10. Para embrulhar presentes, uma loja utiliza papel azul, verde, cinza, rosa, vermelho ou amarelo e uma fita que pode ser branca, dourada ou vermelha. A loja nunca usa a mesma cor para o papel e a fita. De quantas maneiras distintas um presente pode ser embalado nessa loja?

11. Uma prova tem 10 sentenças que devem ser classificadas em verdadeiras ou falsas. De quantas maneiras distintas podemos responder a prova?

12. (Fundamentos de Matemática Elementar) Duas pessoas, Antônio e Benedito, praticam um jogo no qual em cada partida há um único vencedor. O jogo é praticado até que um deles ganhe duas partidas consecutivas ou quatro partidas tenham sido jogadas, o que ocorrer primeiro. Quais as sequências possíveis de ganhadores?
Sugestão: Construa o diagrama de árvore.

13. Um carro possui 5 lugares, um para o motorista, um ao lado do motorista e três no banco traseiro. Uma família é composta por um casal, dois filhos adolescentes e filho de 5 anos. De quantas maneiras distintas eles podem se distribuir no carro sabendo que nenhum dos filhos pode dirigir e que a criança de 5 anos não pode sentar no banco da frente?

14. Uma moeda é lançada 5 vezes. Quantas sequências distintas podem ser obtidas?

15. Um prédio de seis andares possui 6 colunas, cada uma com uma janela por andar. De quantas maneiras pode ter uma janela acesa em cada andar de modo que cada coluna tenha apenas uma janela acesa?

16. Usando os algarismos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5}:
a) quantos números de três algarismos distintos podemos formar?
b) quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar?
c) quantos números ímpares de três algarismos distintos podemos formar?
d) quantos múltiplos de cinco de três algarismos distintos podemos formar?
e) quantos múltiplos de quatro de três algarismos distintos podemos formar?
f) quantos números de três algarismos ímpares distintos podemos formar?

17. Usando os algarismos do conjunto {0, 3, 5, 8, 9}:
a) quantos números de três algarismos distintos podemos formar?
b) quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar?

c) quantos números ímpares de três algarismos distintos podemos formar?
d) quantos múltiplos de cinco de três algarismos distintos podemos formar?
e) quantos múltiplos de quatro de três algarismos distintos podemos formar?
f) quantos números de três algarismos ímpares distintos podemos formar?

18. Quantos divisores positivos possui o número $2^a.3^b.5^c.7^d.11^e$?

19. Quantos divisores positivos e pares possui o número $2^a.3^b.5^c.7^d.11^e$?

20. Determine o valor de x sabendo que o número $N = 18.10^x$ possui 36 divisores positivos.

21. Um código de barras é composto por 20 barras. Cada uma delas pode ser fina ou grossa. Quantos códigos de barra distintos existem?

22. (ENEM 2004) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

23. (ENEM 2011) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e em nenhum deles apareceram dígitos pares.

    Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

    (A) 24. (B) 31. (C) 32. (D) 88. (E) 89.

24. (ENEM 2012) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens em uma casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

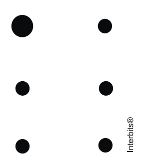
    Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não deve ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

    O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

    (A) 10 alunos a mais do que as possíveis respostas distintas.
    (B) 20 alunos a mais do que as possíveis respostas distintas.
    (C) 119 alunos a mais do que as possíveis respostas distintas.
    (D) 260 alunos a mais do que as possíveis respostas distintas.
    (E) 270 alunos a mais do que as possíveis respostas distintas.

25. (ENEM) A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.

    Por exemplo, a letra A é representada por



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é

(A) 12 (B) 31 (C) 36 (D) 63 (E) 720

26. (UECE) Se X e Y são conjuntos que possuem 6 e 12 elementos respectivamente, então o número de funções injetivas f: X → Y que podem ser construídas é

(A) 665.280. (B) 685.820. (C)656.820. (D) 658.820.

27. (UFES) Em um grupo de 60 mulheres e 40 homens existem exatamente 25 mulheres e 12 homens que tocam algum instrumento musical. De quantas maneiras podemos formar uma dupla de um homem e uma mulher de modo que pelo menos uma das pessoas da dupla toque algum instrumento?

(A) 300 (B) 720 (C) 1.000 (D) 1.420 (E) 1.720

28. (UERJ 2008)

Uma bicicleta de marchas tem três engrenagens na coroa, que giram com o pedal, e seis engrenagens no pinhão, que giram com a roda traseira. Observe a bicicleta abaixo e as tabelas que apresentam os números de dentes de cada engrenagem, todos de igual tamanho.

engrenagens da coroa	nº de dentes
1ª	49
2ª	39
3ª	27

engrenagens do pinhão	nº de dentes
1ª	14
2ª	16
3ª	18
4ª	20
5ª	22
6ª	24

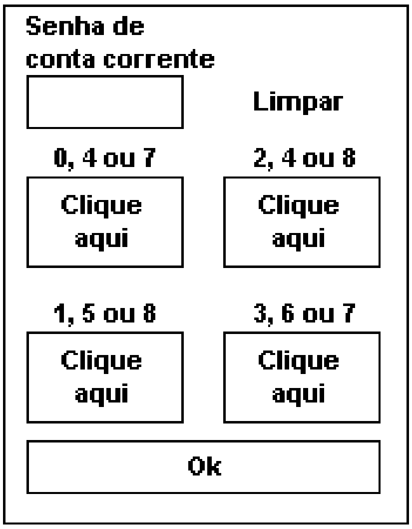
Cada marcha é uma ligação, feita pela corrente, entre uma engrenagem da coroa e uma do pinhão.

Um dente da 1ª engrenagem da coroa quebrou. Para que a corrente não se desprenda com a bicicleta em movimento, admita que a engrenagem danificada só deva ser ligada à 1ª ou à 2ª engrenagem do pinhão.

Nesse caso, o número máximo de marchas distintas que podem ser utilizadas para movimentar a bicicleta é de:

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16

29. (UFF) Hoje em dia, é possível realizar diversas operações bancárias a partir de um computador pessoal ligado à Internet. Para esse acesso, o cliente de determinado banco, após digitar o número de sua agência e conta corrente, deverá introduzir uma senha de quatro dígitos a partir de um teclado virtual como o da figura.



Para inserir um dígito da senha da sua conta corrente, o cliente deste banco deve clicar em um dos quatro botões indicados pela inscrição "clique aqui"; isto é, para inserir o dígito 4, por exemplo, pode-se clicar no botão "clique aqui" situado abaixo dos dígitos "0, 4 ou 7" ou naquele situado abaixo dos dígitos "2, 4 ou 8".

Pode-se afirmar que o número total de senhas compostas por quatro dígitos distintos que estão associadas à sequência de "cliques", primeiro, no botão correspondente aos dígitos 1, 5 ou 8; depois, no botão correspondente aos dígitos 0, 4 ou 7; novamente no botão correspondente aos dígitos 1, 5 ou 8 e, por último, no botão correspondente aos dígitos 0, 4 ou 7, é igual a:

(A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 54 (E) 81

30. (ENEM) O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de

uma barra escura, no número 1. Observe a seguir um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.

Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.

Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é

(A) 14. (B) 12. (C) 8. (D) 6. (E) 4.

31. (UERJ) Ana dispunha de papéis com cores diferentes. Para enfeitar sua loja, cortou fitas desses papéis e embalou 30 caixinhas de modo a não usar a mesma cor no papel e na fita, em nenhuma das 30 embalagens.

    A menor quantidade de cores diferentes que ela necessitou utilizar para a confecção de todas as embalagens foi igual a:

    (A) 30 (B) 18 (C) 6 (D) 3

2.2.4 <u>Desafio para a próxima aula</u>

1. De quantas maneiras distintas quatro pessoas podem se organizar em uma fila?

2. Anagramas são sequências de letras, com ou sem sentido, que podem ser formadas com todas as letras de uma determinada palavra. Quantos são os anagramas da palavra DELTA?

2.3 **Aula 03**

Objetivo: Introduzir o conceito de permutações. Espera-se que o aluno aprenda a resolver problemas que envolvam permutações simples.

Iniciar a aula retomando os desafios propostos na aula anterior.

2.3.1 Permutações simples

São as possíveis ordenações de itens que podem ser ordenados. Observe os exemplos a seguir:

1. De quantas maneiras distintas quatro pessoas podem se organizar em uma fila?

Chamaremos de A, B, C e D essas quatro pessoas e analisaremos as possibilidades:

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB
ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA
ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

Assim, temos 4 opções para a primeira pessoa da fila, 3 opções (qualquer uma das quatro menos a que já está na primeira posição) para a segunda delas, 2 opções para a penúltima e uma opção apenas para a última posição na fila, resultando assim em 4 x 3 x 2 x 1 = 24 possibilidades distintas.

2. Anagramas são sequências de letras, com ou sem sentido, que podem ser formadas com todas as letras de uma determinada palavra. Quantos são os anagramas da palavra DELTA?

   Primeiramente, listaremos todos os anagramas:

DELTA	EDLTA	LDETA	TDELA	ADELT
DELAT	EDLAT	LDEAT	TDEAL	ADETL
DETAL	EDTLA	LDTEA	TDLEA	ADLET
DETLA	EDTAL	LDTAE	TDLAE	ADLTE
DEATL	EDALT	LDAET	TDAEL	ADTEL
DEALT	EDATL	LDATE	TDALE	ADTLE
DLETA	ELDTA	LEDTA	TEDLA	AEDLT
DLEAT	ELDAT	LEDAT	TEDAL	AEDTL
DLAET	ELTDA	LETDA	TELDA	AELDT
DLATE	ELTAD	LETAD	TELAD	AELTD
DLTAE	ELATD	LEATD	TEADL	AETDL
DLTEA	ELADT	LEADT	TEALD	AETLD
DTELA	ETDLA	LTDEA	TLDEA	ALDET
DTEAL	ETDAL	LTDAE	TLDAE	ALDTE
DTAEL	ETLDA	LTEDA	TLEDA	ALEDT
DTALE	ETLAD	LTEAD	TLEAD	ALETD
DTLAE	ETADL	LTAED	TLAED	ALTED
DTLEA	ETALD	LTADE	TLADE	ALTDE
DAELT	EADLT	LATDE	TADEL	ATDEL
DAETL	EADTL	LATED	TADLE	ATDLE
DALET	EATDL	LAETD	TAEDL	ATEDL
DALTE	EATLD	LAEDE	TAELD	ATELD
DATEL	EALTD	LADTE	TALDE	ATLED
DATLE	EALDT	LADET	TALED	ATLDE

Podemos resolver essa questão de outra maneira, usando os conhecimentos anteriormente adquiridos: Para a primeira letra do anagrama temos 5 opções de letra. Para cada uma dessas 5 opções, temos 4 opções para a segunda letra (qualquer uma das 5 menos a que já foi utilizada para a primeira letra). Para cada uma das 5 x 4 opções que já temos, a próxima letra escolhida tem 3 opções (as três que sobram quando retiramos das 5 letras da palavra DELTA as duas que já foram utilizadas). Para a quarta letra temos as duas opções restantes e a última letra é a que sobra (uma opção).

Temos, assim, 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 anagramas.

3. De quantas maneiras podemos organizar em uma prateleira 10 livros distintos?

O primeiro livro a ser colocado na prateleira tem 10 opções. Já o segundo livro pode ser qualquer um dos 9 restantes. O terceiro livro poderá ser qualquer um dos 8 restantes e assim por diante até que o último livro seja colocado.

Teremos assim 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 3628800 maneiras distintas de organizá-los.

2.3.2 Fatorial de um número

Chamamos de fatorial de um número natural maior que 1 o produto do mesmo por todos os seus antecessores inteiros e positivos. O fatorial de n pode ser também definido pela quantidade de permutações de n elementos distintos.

Sendo assim, temos: $n! = n.(n-1).(n-2). \ldots . 1$

Exemplo: 10! = 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 3628800

4. Quantos são os anagramas da palavra HIPOTENUSA?

Como a palavra tem 10 letras, temos 10! = 3628800 anagramas.

5. Quantos são os anagramas da palavra HIPOTENUSA que começam e terminam por consoante?

A primeira letra tem 5 opções pois temos 5 consoantes disponíveis (H, P, T, N ou S). Já a última letra tem 4 opções (qualquer uma das 5 consoantes menos a que já está posicionada na primeira letra). As oito letras entre a primeira e a última podem ser permutadas de 8! maneiras.

Temos, assim: 5 x 8! x 4 = 806400 anagramas.

6. Quantos são os anagramas da palavra HIPOTENUSA que tem a sílaba SA?

Para ter a sílaba SA, basta que façamos a permutação das letras da palavra HIPOTENU[SA] considerando a sílaba SA um dos itens da permutação. Sendo assim, deveremos permutar 9 itens (as letras H, I, P, O, T, E, N, U e a sílaba SA), tendo assim 9! = 362880 anagramas.

7. Quantos são os anagramas da palavra HIPOTENUSA que tem as letras S e A juntas?

Começaremos de maneira similar ao item anterior, fazendo a permutação das letras da palavra HIPOTESU[SA] considerando a sílaba SA um dos itens da permutação. Sendo assim, deveremos permutar 9 itens (as letras H, I, P, O, T, E, N, U e a sílaba SA), tendo assim, inicialmente, 9! = 362880 anagramas. Porém, em todos esses anagramas as letras S e A entre si estão em uma ordem pré-definida. Para permutá-las, faremos 2! = 2.

Para calcular o total de anagramas, devemos perceber que cada um dos anagramas que contamos inicialmente pode acontecer de 2! maneiras (AS ou SA). Sendo assim, temos: 9! x 2! = 362880 x 2 = 725760 anagramas.

Podemos generalizar que para permutar n itens distintos, teremos:

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

2.3.3 Exercícios propostos

1. Quantos são os anagramas da palavra LOPEZ:
   a) Possíveis?
   b) Quantos deles terminam pela letra Z?
   c) Quantos deles terminam por consoante?
   d) Quantos deles começam e terminam com uma consoante?
   e) Quantos deles tem vogais e consoantes alternadas?
   f) Quantos tem a sílaba PEZ?
   g) Quantos tem as letras P, E e Z juntas?

a) Para calcular o número de anagramas da palavra LOPEZ, basta permutar livremente as 5 letras da palavra.
   Temos, assim, 5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 anagramas.

b) Como a única restrição que temos é que termine pela letra Z, começaremos satisfazendo essa condição dizendo que temos apenas 1 opção para a última letra (ser a letra Z). Já as outras 4 letras do anagrama (L, O, P e E) podem permutar livremente.
   Temos, assim, 1 x 4! = 1 x 4 x 3 x 2 x 1 = 24 anagramas.

c) Como a única restrição que temos é que termine por uma consoante, começaremos satisfazendo essa condição dizendo que temos apenas 3 opções para a última letra (L, P ou Z). Já as outras 4 letras do anagrama (entre as 5 letras da palavra LOPEZ descartaremos apenas a consoante que já foi utilizada para a última letra) podem permutar livremente.
   Temos, assim, 3 x 4! = 3 x 4 x 3 x 2 x 1 = 72 anagramas.

d) Se os anagramas devem começar e terminar por consoantes, devemos iniciar a questão satisfazendo essas duas condições. Temos 3 opções para a primeira letra (L, P ou Z) e 2 opções para a última (qualquer uma das 3 consoantes menos a que já foi utilizada para a primeira letra. Já as três letras do meio da palavra podem ser escolhidas entre as 5 letras da palavra LOPEZ,

descontando apenas as letras que já foram utilizadas Podemos assim, permutar livremente as 3 letras restantes.
Temos, assim, 3 x 2 x 3! = 3 x 2 x 3 x 2 x 1 = 36 anagramas

e) Para ter vogais e consoantes alternadas, deveremos ter um anagrama do tipo:

[consoante] [vogal] [consoante] [vogal] [consoante]

O que mudará de um anagrama para o outro será a ordem das consoantes entre si (que poderão ordenar-se de 3! maneiras), e a ordem das vogais entre si (que poderão ordenar-se de 2! maneiras).
Teremos, assim, 3! X 2! = 3 x 2 x 1 x 2 x 1 = 12 anagramas

f) Para que o anagrama possua a sílaba PEZ, consideraremos as letras P, E e Z como um item só que deverá ser permutado com as letras L e O. Sendo assim, basta fazer a permutação de 3 itens.
Teremos, assim, 3! = 3 x 2 x 1 = 6 anagramas

g) Começaremos de maneira similar ao item anterior, considerando PEZ como um item a ser permutado com as letras L e O. Dessa forma, teremos 3! = 6 anagramas. Porém, cada um desses 6 anagramas pode ser obtido com as letras P, E e Z em 3! ordens (PEZ, PZE, EPZ, EZP, ZEP e ZPE).
Teremos, assim, 3! x 3! = 3 x 2 x 1 x 3 x 2 x 1 = 36 anagramas

2. Uma palavra é formada por x vogais distintas e x consoantes distintas, sendo x um inteiro positivo. Quantos anagramas podem ser formados cujas vogais e consoantes estejam alternadas?

Primeiramente, faremos um exemplo. Dada a palavra CABIDE que possui 3 vogais distintas e 3 consoantes distintas, para ter vogais e consoantes alternadas, podemos ter dois tipos de anagramas:

I. [consoante] [vogal] [consoante] [vogal] [consoante] [vogal]

Teríamos 3 opções para a primeira letra (C, B ou D), para cada uma delas, 3 opções para a segunda letra (A, I ou E), 2 opções para a terceira letra (uma das duas consoantes que sobrou), 2 opções para a quarta letra (uma das vogais restantes), 1 opção para a quinta letra (a consoante restante) e 1 opção para a última letra (a vogal que ainda não foi utilizada). Sendo assim, o que mudará de um anagrama para o outro será a ordem das consoantes entre si (que poderão ordenar-se de 3! maneiras), e a ordem das vogais entre si (que poderão ordenar-se de 3! maneiras). Teremos, assim, 3 x 3 x 2 x 2 x 1 x 1 = 3! x 3! = $(3!)^2$ anagramas.

II. [vogal] [consoante] [vogal] [consoante] [vogal] [consoante]

De maneira similar ao item anterior, o que mudará de um anagrama para o outro será a ordem das vogais entre si (que poderão ordenar-se de 3! maneiras), e a ordem das consoantes entre si (que poderão ordenar-se de 3! maneiras). Teremos, assim, 3! x 3! =$(3!)^2$ anagramas.

Teremos, assim, no total, $(3!)^2 + (3!)^2 = 2 \times (3!)^2$ anagramas.

Se pensarmos analogamente para x vogais e x consoantes, teremos em cada um dos dois casos $x!$ maneiras de reordenar as vogais entre si e $x!$ maneiras de reordenar as consoantes entre si.

Sendo assim, temos, no total, $(x!)^2 + (x!)^2 = 2 \cdot (x!)^2$

3. O elenco do Espetáculo Roleta Russa, que estreou em 2016 no Teatro Clara Machado é composto por 6 homens e 3 mulheres. No final de cada apresentação, o elenco faz um agradecimento alinhado no palco, como exemplifica a imagem a seguir:

Fonte: http://www.paulohlima.com.br/portfolio/teatro/35745-teatro-roleta-russa

De quantas maneiras distintas eles podem organizar-se em linha:

a) No total?

b) Em quantas delas os homens estão juntos?

c) Em quantas delas as mulheres estão juntas?

d) Em quantas delas os homens estão juntos e as mulheres também estão juntas?

1. Para calcular o número de maneiras dos atores se organizarem em linha basta permuta-los livremente:

   Temos, assim, 9! = 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 362880 maneiras.

2. Para que os homens estejam juntos, começaremos considerando-os como um item que deverá ser permutado com as 3 mulheres do elenco. Teremos assim que permutar livremente o grupo de homens com as 3 mulheres, ou seja, 4 itens (4!). Porém, para cada um desses 4! modos de permutar os itens, os homens poderão organizar-se entre si de 6! maneiras.

   Temos, assim, 4! x 6! = 4 x 3 x 2 x 1 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 17280 maneiras.

3. Para que as mulheres estejam juntas, começaremos considerando-as como um item que deverá ser permutado com os 6 homens do elenco. Teremos assim que permutar livremente o grupo de mulheres com os 6 homens, ou seja, 7 itens (7!). Porém, para cada um desses 7! modos de permutar os itens, as mulheres poderão organizar-se entre si de 3! maneiras.
   Temos, assim, 7! x 3! = 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 x 3 x 2 x 1 = 30240 maneiras.

4. Para que os homens estejam juntos, começaremos considerando-os como um item. Para que as mulheres também estejam juntas, consideraremos que o grupo de mulheres é outro item. Teremos assim que permutar os dois grupos entre si (2!). Porém, para cada um desses 2! modos de permutar os grupos, os homens poderão organizar-se entre si de 6! maneiras e as mulheres poderão organizar-se entre si de 3! maneiras.
   Temos, assim, 2! x 6! x 3! = 2 x 1 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 x 3 x 2 x 1 = 8640 maneiras.

2.3.4 Exercícios de fixação do conteúdo

1. Simplifique ao máximo as expressões, sendo $, x \in \mathbb{N}$:
   a) $\frac{x! + (x-1)!}{(x+1)!}, x \geq 1$

   b) $\frac{(x+1)! - x.(x-1)!}{x!}, x \geq 1$

   c) $\frac{x.x!}{(x+2)! - 2.x!}, x \geq 1$

2. Determine o algarismo das unidades do resultado da soma 1! + 2! + 3! + 4! + ... + 2016!.

3. Quantos são os anagramas da palavra BRASIL:
   a) Possíveis?
   b) Quantos deles começam pela letra B?
   c) Quantos deles terminam por consoante?

d) Quantos deles começam e terminam com uma consoante?
e) Quantos deles tem vogais separadas?
f) Quantos tem a sílaba BRA?
g) Quantos tem as letras B, R e A juntas?

4. Silvio e Solita são casados e têm 10 filhos. Todo ano eles posam lado a lado para uma foto de família. De quantas maneiras distintas eles podem fazê-lo de forma que Silvio e Solita saiam juntos na foto?

5. (FUVEST 1991) Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possíveis sequências dessas músicas serão necessários aproximadamente:
(A) 100 dias. (B) 10 anos. (C) 1 século. (D) 10 séculos. (E) 100 séculos.

6. De quantas maneiras cinco pessoas podem sentar-se em uma fileira de cinco cadeiras no cinema, sabendo que duas delas não se falam e por isso não podem sentar-se lado a lado?

7. Quantos anagramas da palavra NETFLIX começam por NET?

8. Calcule o número de anagramas da palavra CAMILA cujas vogais se mantêm nas respectivas posições.

9. Uma prova de múltipla escolha possui 5 questões, cada uma delas com 5 opções: A, B, C, D e E. De quantas maneiras distintas essa prova pode ser respondida sem que duas questões sejam respondidas com a mesma letra?

10. Em uma estante quero colocar os onze volumes da coleção “Fundamentos da Matemática Elementar” e os quatro volumes de “Um Curso de Cálculo” - Guidorizzi, Hamilton Luiz. De quantas maneiras posso fazê-lo de modo que livros de uma mesma coleção fiquem sempre juntos? E se, além de juntos, os livros de mesma coleção precisarem estar em uma ordem pré-definida?

11. Em um banco, Átila, Camila, Nathália, Rodrigo e mais 6 pessoas estão aguardando para ser atendidos. De quantas maneiras podemos enfileirar essas 10 pessoas:
    a) no total?
    b) se Camila e Nathália, devem ficar juntas?
    c) se Átila e Rodrigo, devem ficar separados?
    d) se Camila e Nathalia, devem ficar juntas e Átila e Rodrigo, devem ficar separados?

12. (CESGRANRIO) Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes no município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele varia a ordem de suas visitas. De quantas formas diferentes esse fiscal pode organizar o calendário de visita mensal a essas empresas? (A) 180 (B) 120 (C) 100 (D) 48 (E) 21

2.3.5 Desafio para a próxima aula:

1. Quantos são os anagramas da palavra MALA?
2. Quantos são os anagramas da palavra URUBU?

2.4 **Aula 04**

Objetivo: Estender o conceito de permutações para as que envolvam repetições.

Iniciar a aula retomando os desafios propostos na aula anterior:

2.4.1 Permutações com Repetições – Parte I

1. Quantos são os anagramas da palavra MALA?

Primeiramente, faremos como nos itens anteriores. Como a palavra tem 4 letras, espera-se que tenha 4! = 24 anagramas. Faremos uma lista deles para analisá-los:

MALA	AMLA	LMAA	AMLA
MAAL	AMAL	LMAA	AMAL
MALA	ALMA	LAMA	ALMA
MAAL	ALAM	LAAM	ALAM
MLAA	AAML	LAMA	AAML
MLAA	AALM	LAAM	AALM

Note que por mais que uma das letras A esteja colorida de cinza, quando trocamos A por A entre si, obtemos o mesmo anagrama. Sendo assim, como A e A permutam entre si 2! vezes, contamos 2! vezes o número de anagramas que realmente existe. Sendo assim, para corrigir esse erro, devemos dividir o resultado obtido anteriormente por 2!.

Temos, assim, 4!/2! = 12 anagramas.

2. Quantos são os anagramas da palavra URUBU?

Como vimos no item anterior, primeiramente, permutaremos letras da palavra URUBU de maneira usual. Como a palavra tem 5 letras, espera-se que tenha 5! = 120 anagramas. Agora, perceberemos que como temos a letra U três vezes nessa palavra, quando trocarmos uma com a outra de lugar obteremos o mesmo anagrama. Sendo assim, podemos perceber que contamos mais anagramas do que os que de fato existem. Note que as letras U da palavra URUBU podem trocar de lugar entre si de 3! maneiras, sendo assim, cada anagrama que de fato existe foi contado 3! Vezes. Por exemplo, a própria palavra URUBU:

URUBU URUBU URUBU URUBU URUBU URUBU

Note que por mais que tenham sido usadas cores distintas para as três letras U, esse anagrama que contamos seis vezes é na verdade um anagrama só. Esse mesmo erro foi cometido em todos os outros anagramas. Sendo assim, para corrigir esse erro, devemos dividir o resultado obtido anteriormente por 3!.

Temos, assim, 5!/3! = 20 anagramas.

3. Quantos são os anagramas da palavra ARARA?

Como a palavra tem 5 letras, faremos inicialmente 5!. Como a palavra tem três letras A, para anular a permutação entre elas, dividiremos o resultado obtido anteriormente por 3!. Além disso, como a palavra também tem duas letras R, dividiremos o novo resultado por 2!.

Temos, assim: 5!/3!/2! que equivale a 5!/(3! . 2!) = 10 anagramas.

4. Quantos são os anagramas da palavra MATEMATICAMENTE?

Como a palavra tem 15 letras, faremos inicialmente 15!. Por ter três letras A, dividiremos por 3!, por ter três letras M dividiremos novamente por 3!, por ter três letras T, dividiremos mais uma vez por 3! e por fim, por ter três letras E, dividiremos por 3! outra vez.

Teremos, assim: 15!/(3! . 3! . 3! . 3!) = 1009008000 anagramas.

5. De quantas maneiras distintas podemos ordenar 8 livros em uma estante sendo 3 deles indistinguíveis e todos os outros distintos?

Representaremos por A, B, C, D e E os livros distintos e por F, F e F os livros iguais. Cada sequência de livros na estante poderá assim ser representada por um anagrama da palavra ABCDEFFF. Sendo assim, calcularemos os anagramas da palavra ABCDEFFF: 8!/3! = 6720 anagramas.

Por bijeção, concluímos que há 6720 maneiras distintas de arrumar os livros na estante.

Podemos generalizar que para permutar n itens, com x_1 itens repetidos do tipo 1, x_2 itens do tipo 2, x_3 itens do tipo 3, e assim por diante, teremos:

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}^{x_1,x_2,x_3,\dots} = \frac{\boldsymbol{n}!}{x_1!\,x_2!\,x_3!\dots}$$

2.4.2 <u>Exercício proposto</u>

Quantos são os anagramas da palavra PARALELAMENTE:

a) possíveis?

b) que começam pela letra P?
c) que começam por uma consoante?
d) que terminam pela letra E?
e) que terminam por vogal?
f) que começam por consoante e terminam com uma vogal?
g) tem a sílaba MEN?
h) tem as letras M, E e N juntas?
i) tem as sílabas PA, RA, LE, LA, MEN e TE?

a) Para calcular o número de anagramas da palavra PARALELAMENTE, basta permutar as 13 letras da palavra (13!) e dividir o resultado obtido pela permutação das três letras A (3!), das duas letras L (2!) e das três letras E (3!), como fizemos nos exemplos 1, 2, 3 e 4 da seção "Permutações com Repetições".
Temos, assim, 13!/(3!x2!x3!) = 86486400 anagramas.

b) Como a única restrição que temos é que comece pela letra P, começaremos satisfazendo essa condição dizendo que temos apenas 1 opção para a primeira letra (ser a letra P). Já as outras 12 letras do anagrama (A, R, A, L, E, L, A, M, E, N, T e E) podemos permutar livremente, ou seja, faremos 12! e dividiremos o resultado obtido pela permutação das três letras A (3!), das duas letras L (2!) e das três letras E (3!).
Temos, assim, 12!/(3!x2!x3!) = 6652800 anagramas.

c) Nesse item, o problema de fazermos de forma análoga ao item "c" das questões 3 e 4, é que se dissermos que temos 6 opções para a primeira letra (P, R, L, M, N ou T), ao permutar as outras 12 letras da palavra não saberemos se entre elas estarão duas letras L ou apenas uma. Por isso, deveremos separar em casos:

I. Palavras que começam pela letra L:
Se a palavra começa pela letra L, temos apenas uma opção para a primeira letra (ser a letra L). Já as outras 12 letras (P, A, R, A, E, L, A, M, E, N, T e E) podem permutar livremente, ou seja, faremos 12! e dividiremos o resultado

por 3! já que temos três letras A e por 3! já que temos três letras E. Temos, assim, 1 x 12!/(3! x 3!) = 13305600 anagramas.

II. Palavras que começam por P, R, M, N ou T:

Se a palavra começa por P, R, M, N ou T, temos cinco opções para a primeira letra. Já as outras 12 letras restantes podem permutar livremente, ou seja, faremos 12! e dividiremos o resultado por 3! já que temos três letras A, por 2! por termos duas letras L e por 3! já que temos três letras E (observe que por mais que não saibamos qual letra foi a primeira a ser utilizada não foi A, nem L, nem E, por isso sabemos que entre essas 12 letras restantes continuamos tendo as três letras A, as duas letras L e as três letras E). Temos, assim, 5 x 12!/(3! x 2! x 3!) = 33264000 anagramas.

Temos, assim, no total, 13305600 + 33264000 = 46569600 anagramas.

d) Como a única restrição que temos é que termine pela letra E, começaremos satisfazendo essa condição dizendo que temos apenas 1 opção para a última letra (ser a letra E). Já as outras 12 letras do anagrama (P, A, R, A, L, E, L, A, M, E, N e T) podem permutar livremente, ou seja, faremos 12! e dividiremos o resultado obtido pela permutação das três letras A (3!), das duas letras L (2!) e das duas letras E restantes (2!).
Temos, assim, 1 x 12!/(3!x2!x2!) = 19958400 anagramas.

e) Como a única restrição que temos é que termine por uma vogal, começaremos satisfazendo essa condição dizendo que temos apenas 2 opções para a última letra (E ou A). Já as outras 12 letras do anagrama podem permutar livremente, ou seja, faremos 12! e dividiremos o resultado obtido pela permutação das duas letras L (2!) e pela permutação das letras A entre si e das letras E entre si que tiverem restado (3! x 2!). Note que a palavra original possui a mesma quantidade de letras A e letras E, por isso, independente da letra que tiver sido usada para a última do anagrama restarão ainda as 3 de um tipo e 2 do outro tipo.
Temos, assim, 2 x 12!/(3!x2!x2!) = 39916800 anagramas.

f) De maneira análoga ao item c, deveremos separar em casos:

I. Palavras que começam pela letra L:

Se a palavra começa pela letra L, temos apenas uma opção para a primeira letra (ser a letra L) e já que deve terminar por uma vogal, terá duas opções para a última letra (A ou E). Já as outras 11 letras podem permutar livremente, ou seja, faremos 11! e dividiremos o resultado por 3! e por 2! já que temos três vogais de um tipo e duas vogais de outro tipo repetidas. Temos, assim, 1 x 2 x 11!/(3! x 2!) = 6652800 anagramas.

II. Palavras que começam por P, R, M, N ou T:

Se a palavra começa por P, R, M, N ou T, temos cinco opções para a primeira letra e já que deve terminar por uma vogal, terá duas opções para a última letra (A ou E). Já as outras 11 letras podem permutar livremente, ou seja, faremos 12! e dividiremos o resultado por 3! e por 2! já que temos três vogais de um tipo e duas vogais de outro tipo repetidas e dividiremos o resultado também por 2! pois ainda teremos duas letras L. Temos, assim, 5 x 2 x 11!/(3! x 2! x 2!) = 16632000 anagramas.

Temos, assim, no total, 6652800 + 16632000 = 23284800 anagramas.

g) Para que o anagrama possua a sílaba MEN, consideraremos as letras M, E e N como um item só que deverá ser permutado com as outras letras da palavra (P, A, R, A, L, E, L, A, T e E). Sendo assim, basta fazer a permutação de 11 itens (11!) e dividir o resultado obtido por 3! para desconsiderar como distintas as permutações das três letras A entre si, por 2! para desconsiderar como distintas as permutações das duas letras E entre si e por 2! para desconsiderar como distintas as permutações das duas letras E entre si.

Observe que mesmo tendo três letras E na palavra, uma delas foi fixada na sílaba MEN, por isso, não permutou com as demais, não havendo assim sentido em "anular" a permutação dela com as outras duas letras E.

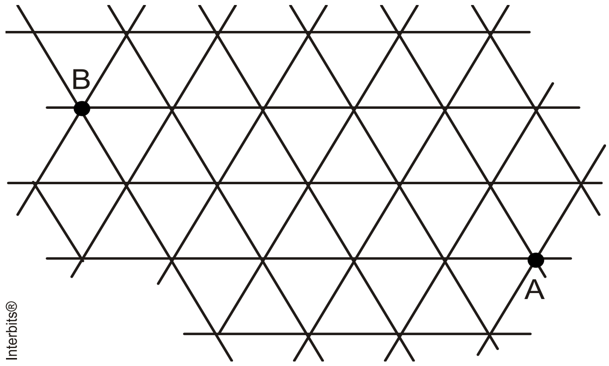
Teremos, assim, 11!/(3! x 2! x 2!) = 1663200 anagramas

h) Começaremos de maneira similar ao item anterior, considerando MEN como um item a ser permutado com as outras letras da palavra. Dessa forma, teremos 11!/(3! x 2! x 2!) = 1663200 anagramas. Porém, cada um desses 1663200 anagramas pode ser obtido com as letras M, E e N em 3! ordens (MEN, MNE, EMN, ENM, NEM e NME).
Teremos, assim, [11!/(3! x 2! x 2!)] x 3! = 9979200 anagramas

i) Cada sílaba será considerada um item a ser permutado com os demais. Faremos então a permutação de 6 itens (PA, RA, LE, LA, MEN e TE)
Teremos, assim, 6! = 720 anagramas

2.4.3 <u>Desafio para a próxima aula</u>

(UERJ 2011) Uma rede é formada de triângulos equiláteros congruentes, conforme a representação abaixo.



Uma formiga se desloca do ponto A para o ponto B sobre os lados dos triângulos, percorrendo X caminhos distintos, cujos comprimentos totais são todos iguais a d.
Sabendo que d corresponde ao menor valor possível para os comprimentos desses caminhos, X equivale a:
(A) 20 (B) 15 (C) 12 (D) 10

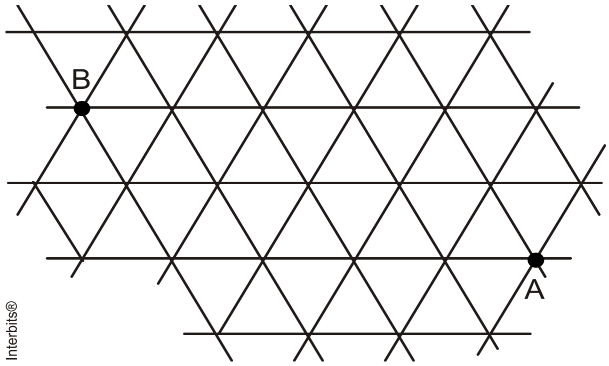
2.5 **Aula 05**

<u>Objetivo:</u> Estender o conceito de permutações com repetições para problemas de contagem mais sofisticados. Espera-se que o aluno aprenda a fazer bijeções.

Iniciar a aula retomando o desafio proposto na aula anterior:

2.5.1 Permutações com Repetições – Parte II

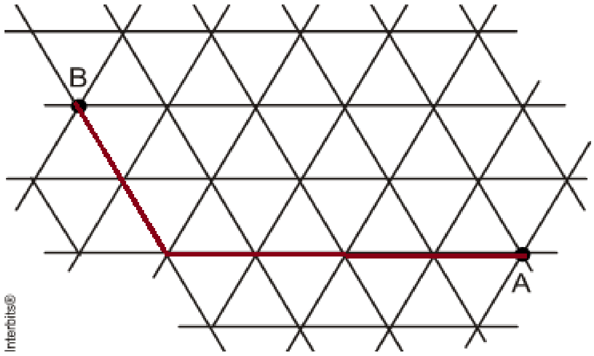
1. (UERJ 2011) Uma rede é formada de triângulos equiláteros congruentes, conforme a representação abaixo.



Uma formiga se desloca do ponto A para o ponto B sobre os lados dos triângulos, percorrendo X caminhos distintos, cujos comprimentos totais são todos iguais a d.
Sabendo que d corresponde ao menor valor possível para os comprimentos desses caminhos, X equivale a:
(A) 20 (B) 15 (C) 12 (D) 10

Para resolver esse tipo de questão, é interessante que observemos algumas possibilidades e que representemos essas possibilidades de alguma forma que possamos posteriormente criar uma bijeção entre as sequencias obtidas e os caminhos distintos a serem percorridos.

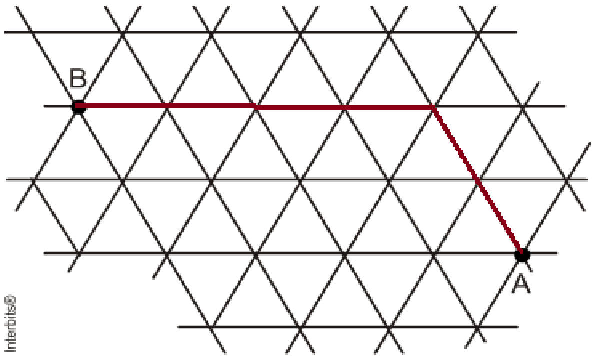
Primeiro exemplo: Nos deslocaremos 4 lados de triângulo para a esquerda e posteriormente dois lados para cima:



Fonte: O próprio Autor.

Representaremos esse caminho por EEEECC.

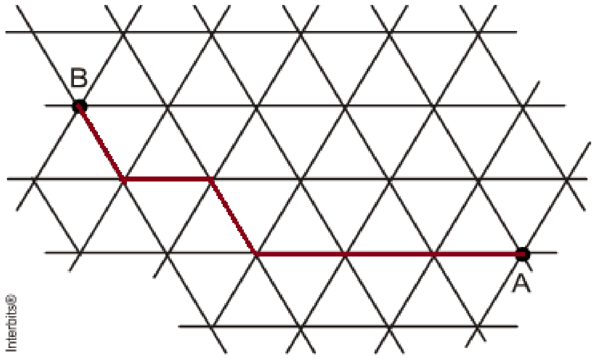
Segundo exemplo: Nos deslocaremos dois lados para cima e posteriormente quatro lados de triângulo para a esquerda:



Fonte: O próprio Autor.

Representaremos esse caminho por CCEEEE.

Terceiro exemplo: Nos deslocaremos três lados de triângulo para a esquerda, um lado para cima, um lado para a esquerda e finalmente, um lado para cima:



Fonte: O próprio Autor.

Representaremos esse caminho por EEECEC.

Note que todos os caminhos desse tipo podem ser representados por um anagrama de EEEECC. Caso a formiga vá mais de quatro vezes para a esquerda ela terá que “voltar” para a direita, o que aumentará o percurso. Além disso, caso ela vá mais de duas vezes para cima, terá que “voltar” para baixo, o que também alongaria o caminho. Sendo assim, todo caminho de menor tamanho possível consiste em 4 idas para a esquerda e duas para cima, o que muda de um para o outro é apenas a ordem. Sendo assim, faremos a permutação de 6 letras que consiste em 6! E dividiremos isso por 4! por termos quatros letras E e por 2! por termos duas letras C.

Teremos, assim: $6!/(4! \cdot 2!) = 15$ caminhos distintos.

Alternativa B.

2. Uma cervejaria produz garrafas de cerveja do tipo LAGER, IPA e WEISS. De quantas maneiras distintas posso comprar 6 garrafas de cerveja nessa cervejaria?

Para resolver esse tipo de questão, assim como a anterior, é interessante que observemos algumas possibilidades de compra e que as representemos de alguma forma que possamos posteriormente criar uma bijeção entre as sequências obtidas e as maneiras distintas de realizar a compra.

Por exemplo, se a compra for composta por 2 garrafas de cerveja LAGER, 3 garrafas de cerveja IPA e 1 garrafa de cerveja WEISS. Representaremos essa compra com a sequência:

CC|CCC|C

As barras separam as cervejas de cada tipo. A quantidade de garrafas de cerveja do tipo LAGER estará representada pela quantidade de letras C antes da primeira barra, a quantidade de garrafas do tipo IPA estará representada pela quantidade de letras C entre as duas barras e a quantidade de garrafas do tipo WEISS serão representadas pela quantidade de letras C após a segunda barra.

Dessa forma, cada sequência composta por 6 letras C e duas barras representará uma maneira distinta de realizar a compra. Por exemplo, a sequência CC|CCCC| representa duas garrafas de cerveja LAGER e 4 garrafas de cerveja IPA.

Agora, precisamos calcular quantas sequências desse tipo existem. Para isso, basta permutarmos os 8 itens (as 6 letras C e as duas barras). Teremos assim, inicialmente, 8!. Porém, se eu trocar uma letra C de lugar com outra, obterei a mesma sequência. Para corrigir esse problema, teremos que dividir o resultado anterior por 6!. Além disso, se trocarmos uma barra de lugar com a outra, obteremos a mesma sequência, então dividiremos também por 2!.

Teremos, assim, 8!/(6! . 2!) = 28 maneiras distintas de realizar a compra.

3. Uma cervejaria produz cervejas LAGER, IPA e WEISS. De quantas maneiras distintas posso comprar 10 garrafas de cerveja nessa cervejaria, sabendo que desejo levar pelo menos uma garrafa de cada tipo?

Primeiramente, pensaremos em satisfazer a condição pedida. Para isso, começaremos reservando uma garrafa de cada tipo. Sendo assim, agora basta que as outras 10 – 3 = 7 garrafas sejam escolhidas livremente, como fizemos no item anterior.

Podemos, por exemplo, escolher 7 garrafas de IPA, que eu representaria, seguindo a mesma ideia do item anterior por |CCCCCCC|. Por mais que eu não tenha escolhido nenhuma LAGER e nenhuma WEISS, uma cerveja de cada já foi reservada inicialmente, então a compra final nesse exemplo seria: 1 garrafa de LAGER, 8 garrafas de IPA e 1 garrafa de WEISS.

Para saber o total de compras possíveis, basta permutarmos 9 itens (7 letras C e duas barras), e dividirmos pela permutação das 7 letras C entre si e pela permutação das duas barras entre si.

Teremos, assim: 9!/(7! . 2!) = 36 maneiras distintas de realizar a compra.

4. Uma cervejaria produz cervejas LAGER, IPA e WEISS. De quantas maneiras distintas posso comprar 20 garrafas de cerveja nessa cervejaria, sabendo que desejo levar pelo menos uma garrafa de LAGER, pelo menos 5 de IPA e pelo menos 2 de WEISS?

Usaremos a mesma lógica da questão anterior. Começaremos satisfazendo as condições pedidas, reservando 1 garrafa de cerveja LAGER, 5 garrafas de IPA e 2 garrafas de WEISS. Sendo assim, reservamos 1 + 5 + 2 = 8 garrafas. Precisamos ainda escolher as 20 – 8 = 12 garrafas restantes livremente.

Um exemplo para essa escolha das 12 restantes seria: 6 garrafas de LAGER e 6 de IPA, que podemos representar por CCCCCC|CCCCCC|. Por mais que nessa escolha não seja satisfeita a condição de pelo menos 2 garrafas de WEISS, quando juntarmos essas garrafas as que já estão previamente reservadas, ficaremos com 7 garrafas de LAGER, 11 de IPA e 2 de WEISS, tendo assim todas as condições satisfeitas.

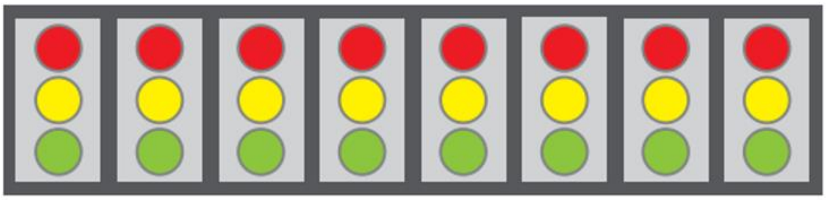
Para saber o total de compras possíveis, basta permutarmos 14 itens (12 letras C e duas barras), e dividirmos pela permutação das 12 letras C entre si e pela permutação das duas barras entre si.

Teremos, assim: 14!/(12! . 2!) = 91 maneiras distintas de realizar a compra.

2.5.2 Atividade

Dividir a turma em grupos de em média 4 alunos para que a metade dos grupos resolvam o problema 1 e a outra metade resolva o problema 2. Mediar essas soluções indicando aos grupos caminhos para o raciocínio necessário até que algum dos grupos chegue a resposta correta de cada um dos problemas. Pedir que um aluno que tenha resolvido cada um dos problemas explique seu raciocínio para a turma e abrir uma discussão para novas soluções.

1. (UERJ 2012) Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes - vermelha, amarela e verde. Observe a figura:



Considere as seguintes informações:

- cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez;
- qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas;
- duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

Calcule o número de mensagens distintas que esse sistema pode emitir.

Resolução Esperada:

Primeiramente, analisaremos algumas opções de mensagens que esse sistema pode emitir, usando o símbolo [V] para um módulo no qual a lâmpada vermelha está acesa, usando o símbolo [A] para um módulo no qual a lâmpada amarela está acesa, usando o símbolo [D] para um módulo no qual a lâmpada verde está acesa, usando o símbolo [P] para um módulo no qual todas as lâmpadas estão apagadas:

i. [V] [V] [V] [D] [D] [A] [P] [P] – essa sequência representa os três primeiros módulos com a lâmpada vermelha acesa, os dois seguintes com a lâmpada verde acesa, o próximo com a lâmpada amarela acesa e os dois últimos apagados.

ii. [V] [V] [V] [A] [D] [D] [P] [P] – essa sequência representa os três primeiros módulos com a lâmpada vermelha acesa, o seguinte com a lâmpada amarela acesa, os dois próximos com a lâmpada verde acesa e os dois últimos apagados.

iii. [P] [P] [V] [V] [V] [A] [D] [D]– essa sequência representa os dois primeiros módulos apagados, os três seguintes com a lâmpada vermelha acesa, o próximo com a lâmpada amarela acesa e os dois últimos com a lâmpada verde acesa.

Note que toda mensagem emitida com as especificações acima pode ser representadas por uma sequência desse tipo, com três símbolos [V], dois símbolos [D], um símbolo [A] e dois símbolos [P] e que cada sequência desse tipo representa exatamente uma mensagem. O que muda de um código para o outro e consequentemente de uma sequência para a outra, é a ordem entre esses itens. Dessa forma, para calcular o número de mensagens distintas basta permutar esses 8 itens (8!) e dividir esse resultado por 3! já que temos três símbolos [V], dividir por 2! já que temos dois símbolos [D] e dividir por 2! já que temos dois símbolos [P]
Teremos, assim, 8!/(3! x 2! x 2!) = 1680 mensagens

2. (UNIFESO 2013/2) Duas equipes W e Z, disputaram uma partida de futebol. Ao final do 1º tempo, o placar era 3 x 1 para a equipe W. No entanto, a equipe Z reagiu no 2º tempo e venceu o jogo por 6 x 5. Dessa forma, o placar foi alterado 7 vezes. Uma possível sequência de alterações do placar durante o 2º tempo é apresentada a seguir:

W 3 x 2 Z
W 3 x 3 Z
W 3 x 4 Z
W 4 x 4 Z
W 5 x 4 Z
W 5 x 5 Z
W 5 x 6 Z

O número total de possíveis sequências de alterações do placar durante o 2º tempo desse jogo é igual a
(A) 18 (B) 21 (C) 28 (D) 42 (E) 56

Resolução Esperada:
Primeiramente, analisaremos algumas opções de sequências de gols no segundo tempo, indicando por W cada gol que a equipe W fizesse e por Z cada gol que a equipe Z fizesse:

i. ZZZWWZZ – é a sequência de letras que representa o exemplo do enunciado do problema.
ii. ZZZZZWW – é a sequência de letras que representa a situação em que a equipe Z fez os primeiros cinco gols do segundo tempo e a equipe W fez os dois últimos.
iii. WZZZZZW – é a sequência de letras que representa a situação em que a equipe W fez o primeiro gol do segundo tempo, a equipe Z fez os 5 seguintes e a equipe W fez o último.

Note que todas as possíveis alterações sucessivas de placar do segundo tempo podem ser representadas por um anagrama da palavra WWZZZZZ, com duas letras W (pois a equipe W fez dois gols) e cinco letras Z (pois a equipe Z fez cinco gols) e que cada anagrama representa exatamente uma sequência de alterações do placar. Dessa forma, para calcular o número de possíveis alterações distintas basta calcular o número de anagramas da palavra WWZZZZZ, permutando essas 7 letras (7!) e dividindo esse resultado por 2! já que temos duas letras W e dividindo por 5! já que temos cinco letras Z.
Teremos, assim, 7!/(2! x 5!) = 21 possíveis sequências de alterações do placar.
Alternativa B.

2.5.3 Exercício proposto

Quantas são as soluções para a equação $x + y + z = 8$, nas quais todas as incógnitas são inteiras:

a) e não negativas?
b) e positivas?

c) tais que $x > 1$, $y > 1$ e $z > 0$?

a) Para resolver esse tipo de questão, é interessante que observemos algumas possibilidades de solução para a equação e que as representemos de alguma forma que possamos posteriormente criar uma bijeção entre as sequências obtidas e as soluções da equação.

Por exemplo, o terno ordenado (1, 3, 4) é uma das soluções não negativas dessa equação. Representaremos essa solução com a sequência:

U|UUU|UUUU

As barras separam as unidades correspondentes a cada incógnita. O valor de x estará representado pela quantidade de letras U antes da primeira barra, o valor de y estará representado pela quantidade de letras U entre as duas barras e o valor de z será representado pela quantidade de letras U após a segunda barra.

Dessa forma, cada sequência composta por 8 letras U e duas barras representará uma solução distinta da equação. Por exemplo, a sequência UUU|UUUUU| representa a solução (3, 5, 0).

Agora, precisamos calcular quantas sequências desse tipo existem. Para isso, basta permutarmos os 10 itens (as oito letras U e as duas barras). Teremos assim, inicialmente, 10!. Porém, se eu trocar uma letra U de lugar com outra, obterei a mesma sequência. Para corrigir esse problema, teremos que dividir o resultado anterior por 8!. Além disso, se trocarmos uma barra de lugar com a outra, obteremos a mesma sequência, então dividiremos também por 2!.

Teremos, assim, $10!/(8! \times 2!) = 45$ soluções.

b) Primeiramente, pensaremos em satisfazer a condição pedida. Para isso, começaremos reservando uma unidade para cada incógnita. Sendo assim, agora basta que as outras $8 – 3 = 5$ unidades sejam distribuídas livremente para as incógnitas, como fizemos no item anterior. Ou seja, resolveremos agora a equação $x' + y'+ z' = 5$, onde $x = x' + 1$; $y = y' + 1$ e $z = z' + 1$.

Uma solução da equação x' + y'+ z' = 5, por exemplo, seria (1, 4, 0) que pode ser representada, com a mesma lógica do item anterior, por U|UUUU|. A solução correspondente de x + y + z = 8 seria (2, 5, 1) na qual todas as incógnitas são de fato positivas.

Para saber o total de soluções estritamente positivas de x + y + z = 8, basta permutarmos 7 itens (cinco letras U e duas barras), e dividirmos pela permutação das 5 letras U entre si e pela permutação das duas barras entre si.
Teremos, assim: 7!/(5! x 2!) = 21 soluções.

c) Primeiramente, pensaremos em satisfazer a condição pedida. Para isso, começaremos reservando duas unidades para x (x > 1), duas unidades para y (y > 1) e uma unidade para z (z > 0). Sendo assim, agora basta que as outras 8 – 2 – 2 – 1 = 3 unidades sejam distribuídas livremente para as incógnitas, como fizemos nos itens anteriores. Ou seja, resolveremos agora a equação x' + y'+ z' = 3, onde x = x' + 2; y = y' + 2 e z = z' + 1.

Uma solução da equação x' + y'+ z' = 3, por exemplo, seria (2, 1, 0) que pode ser representada, com a mesma lógica dos itens anteriores, por UU|U|. A solução correspondente de x + y + z = 8 seria (4, 3, 1) na qual de fato x > 1, y > 1 e z > 0.

Para saber o total de soluções desse tipo, basta permutarmos 5 itens (três letras U e duas barras), e dividirmos pela permutação das 3 letras U entre si e pela permutação das duas barras entre si.
Teremos, assim: 5!/(3! x 2!) = 10 soluções.

2.5.4 Exercícios de fixação do conteúdo

1. Quantos são os anagramas da palavra TROCADO?

2. Quantos anagramas da palavra GALILEU tem as consoantes e as vogais alternadas?

3. Quantos anagramas da palavra CATETO tem as consoantes e as vogais alternadas?

4. Em um cilindro de acrílico de raio interno r serão colocadas 10 esferas maciças de raio r na vertical. Sabendo que duas delas são vermelhas, 3 são pretas e 5 são douradas, de quantas maneiras distintas podemos fazê-lo?

5. (Matemática Discreta – Coleção PROFMAT) Uma fila de cadeiras no cinema tem 10 poltronas. De quantas maneiras 3 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?

6. (FGV 2013) Um sapo está brincando de dar pulos, sucessivos, todos com o mesmo comprimento e sempre sobre uma mesma linha reta horizontal. A cada salto ele pode pular para a esquerda ou para a direita independentemente do sentindo do pulo anterior. O sapo está inicialmente em um ponto A sobre a reta. A seguir ele dá quatro pulos sucessivos terminando exatamente sobre o mesmo ponto A.

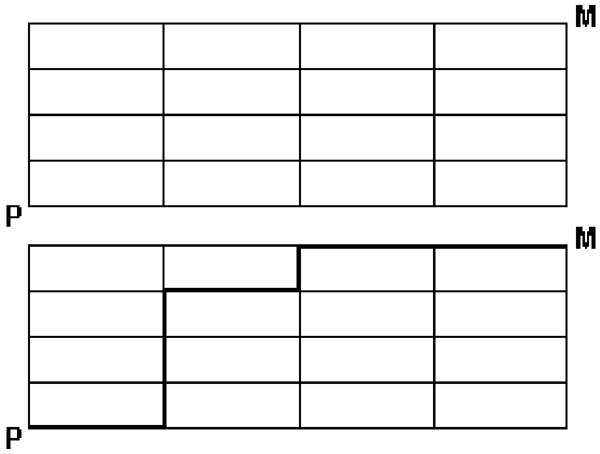
   A quantidade de sequências diferentes de pulos (esquerda/direita) que o sapo pode ter dado é:

   (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) 16

7. (UNIRIO 2000) Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo-se que podem ser compradas de zero a 6 empadas de cada tipo, de quantas maneiras diferentes esta compra pode ser feita?

8. **(CESGRANRIO)** Na figura a seguir, temos uma "malha" formada por 16 retângulos iguais.

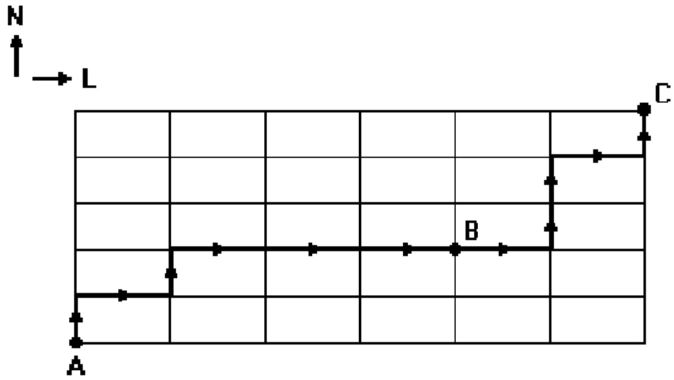
   Uma partícula deve ir do ponto P ao ponto M, percorrendo a menor distância possível, deslocando-se somente por sobre as linhas da figura e com velocidade média de 2cm/s. Como exemplo, temos, a seguir, uma representação de um desses caminhos.



Quantos são os possíveis caminhos que tal partícula poderá percorrer?

(A) 256 (B) 128 (C) 120 (D) 70 (E) 56

9. (FUVEST 1993) A figura a seguir representa parte do mapa de uma cidade onde estão assinalados as casas de João (A), de Maria (B), a escola (C) e um possível caminho que João percorre para, passando pela casa de Maria, chegar à escola. Qual o número total de caminhos distintos que João poderá percorrer, caminhando somente para o Norte ou Leste, para ir de sua casa à escola, passando pela casa de Maria?



10. Em uma loja vende-se garrafas de refrigerante de 4 tipos diferentes. De quantas maneiras uma pessoa pode comprar, nessa loja, 10 garrafas de refrigerante
    a) no total?
    b) se ela quiser comprar pelo menos uma garrafa de cada tipo?
    c) se ela quiser comprar pelo menos duas de cada tipo?

11. Uma fábrica produz 6 tipos de bombons que são vendidos em caixas de 20 bombons (de um mesmo tipo ou sortidos). Quantas caixas diferentes podem ser formadas?

2.5.5 Desafio para a próxima aula

De quantas maneiras distintas cinco crianças podem dar as mãos para fazer um círculo para brincar de roda?

2.6 **Aula 06**

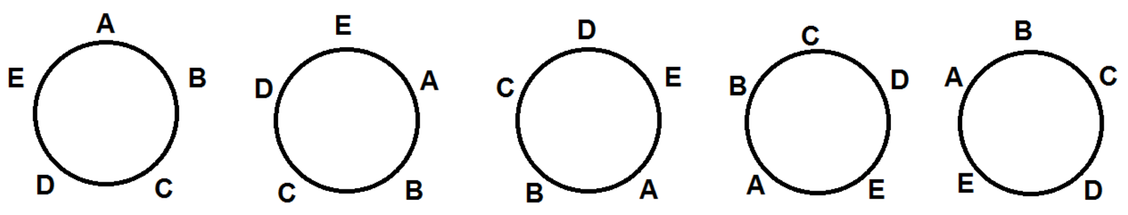
Objetivo: Introduzir o conceito de permutações circulares a partir de exemplos e formalizá-lo.

Iniciar a aula retomando o desafio proposto na aula anterior:

2.6.1 Permutações circulares

1. De quantas maneiras distintas cinco crianças podem dar as mãos para fazer um círculo para brincar de roda?

Representaremos por A, B, C, D e E essas cinco pessoas. O problema na hora de permutarmos de maneira circular, é que em uma roda não temos ponto de partida. Por isso, se fizermos 5! Contaremos várias vezes a mesma roda. Vejamos um desses casos:

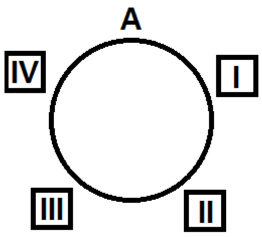


Fonte: O próprio Autor.

Note que essas 5 rodas apresentadas na verdade são a mesma. Para que esse problema seja solucionado, podemos dividir o resultado por 5, já que cada roda que de fato existe foi contada 5 vezes.

Teremos assim 5!/5 = 4! = 24 rodas possíveis.

Outro método eficiente para resolvermos permutações circulares é iniciar o processo criando um ponto fixo, ou seja, escolhendo uma das pessoas para fixar em um ponto da roda:



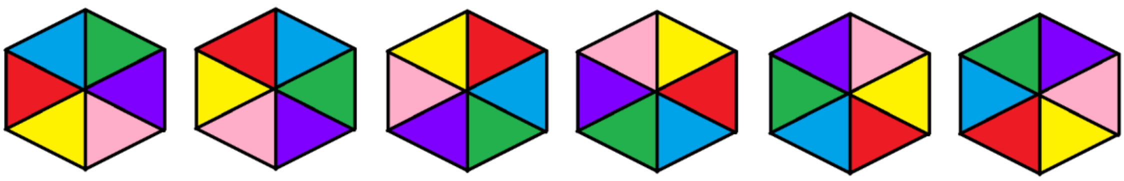
Fonte: O próprio Autor.

Fixando a pessoa A em um ponto da roda, teremos 4 opções de pessoa para posicionar à esquerda de A (na posição I), 3 opções de pessoa para preencher a posição II, 2 opções de pessoa para preencher a posição III e por fim 1 opção para a posição IV (a última pessoa).

Teremos assim 4 x 3 x 2 x 1 = 4! = 24 rodas possíveis.

2. Uma pirâmide regular hexagonal será colorida usando 6 cores distintas (azul, verde, roxo, rosa, amarelo e vermelho), uma em cada face lateral e a base será pintada de branco. De quantas maneiras distintas podemos fazê-lo?

Observe a vista superior da pirâmide. Note que essas 6 imagens representam a mesma pirâmide sendo rotacionada em torno do eixo da sua altura:



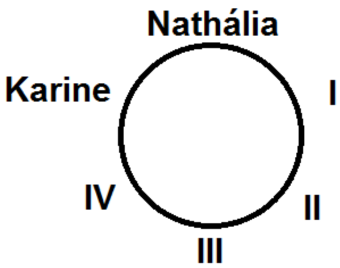
Fonte: O próprio Autor.

Para calcular o número de maneiras distintas para pintar suas faces laterais, usaremos uma delas como ponto de partida. Primeiramente, pintaremos uma das faces laterais de azul. Depois, teremos 5 opções de cor para a face adjacente para a direita da que já foi pintada. Para a próxima face teremos outras 4 opções de cor e assim por diante, totalizando em 5! = 120 maneiras distintas de pintá-la.

3. Nathália, Karine, Katharine, Laura, Gabriela e Carol foram para a praia juntas. Elas sentaram na areia formando um círculo. Por motivos pessoais, Nathália não gostaria de sentar ao lado da Gabriela mas faz questão que Karine sente ao seu lado. De quantas maneiras distintas elas podem se sentar?

Como Nathália está envolvida em duas condições, começaremos fixando-a. Dividiremos em dois casos:

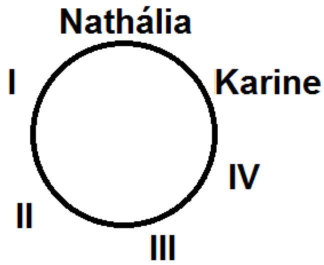
Primeiro caso: Karine senta-se à direita de Nathália.



Fonte: O próprio Autor.

A posição I poderá ser ocupada por qualquer uma das mulheres restantes menos a Gabriela (3 opções), já a posição II também terá 3 opções, pois a Gabriela poderá sentar-se. A posição III poderá ser ocupada por uma das 2 mulheres restantes e a posição IV terá apenas uma opção. Teremos, assim: 3 x 3! = 18 possibilidades no primeiro caso.

Segundo caso: Karine senta-se à Esquerda de Nathália.



Fonte: O próprio Autor.

De maneira análoga ao caso anterior, teremos: 3 x 3! = 18 possibilidades no segundo caso.

Assim, por fim teremos 3 x 3! x 2 = 36 possibilidades.

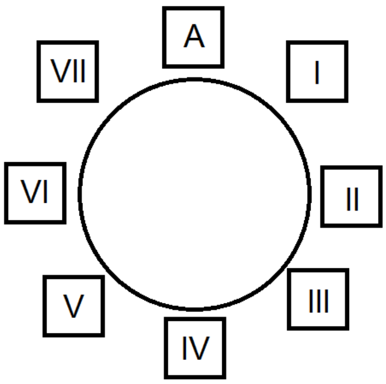
Podemos generalizar que para permutar de maneira circular n itens distintos, teremos:

$$\boldsymbol{P_n} = (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{1})!$$

2.6.2 <u>Exercícios propostos</u>

1. De quantas maneiras distintas 4 meninos e 4 meninas podem brincar de roda de modo que meninos e meninas fiquem intercalados?

Iniciaremos a resolução do problema fixando qualquer uma dessas 8 pessoas em um ponto da roda. Escolherei, por exemplo, uma das meninas e a representarei por A:



Fonte: O próprio Autor.

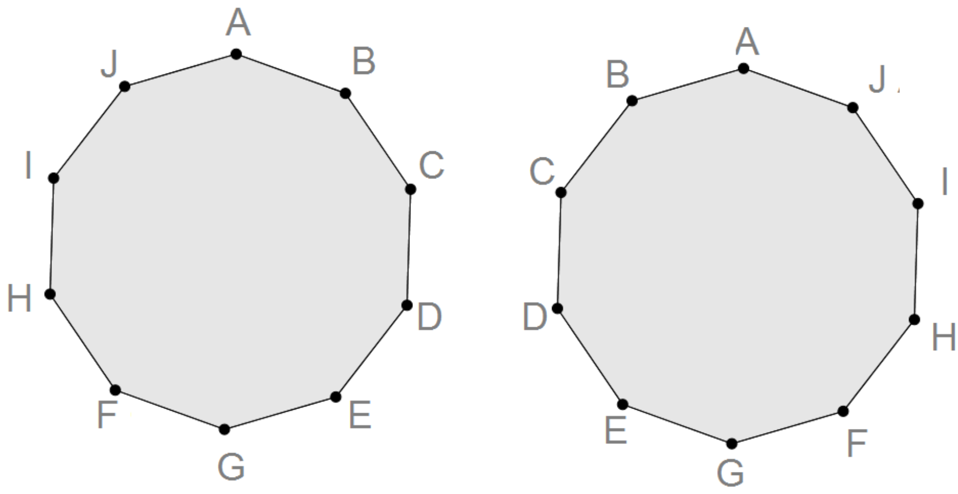
Fixando a menina A em um ponto da roda, teremos 4 opções de menino para a posição I(qualquer menino), 3 opções de menina para preencher a posição II (qualquer menina que não seja A), 3 opções de menino para preencher a posição III (qualquer menino menos o que já está na posição I), 2 opções de menina para a posição IV (qualquer menina restante), 2 opções de menino para a posição V (qualquer menino restante), 1 opção de menina para a posição VI (a última menina) e por fim 1 opção para a posição VII (o último menino).

Teremos assim 4 x 3 x 3 x 2 x 2 x 1 x 1 = 4! x 3! = 144 rodas possíveis.

2. De quantas maneiras podemos dispor as letras A, B, C, D, E, F, G, H, I e J, nos vértices de um decágono regular, de modo que as letras A e F não fiquem diametralmente opostas? São consideradas distintas duas distribuições que façam com o que o polígono não possa ser representado pela mesma sequência de letras.

Iniciaremos o processo criando um ponto fixo, porém, nessa situação, não deveremos escolhê-lo livremente. Como o problema tem uma restrição, deveremos começar pensando nela. Já que A e F não podem ser diametralmente opostos, começaremos fixando o ponto A. Posteriormente, analisaremos que temos 8 opções para posicionar o ponto F (qualquer vértice restante menos o que é diametralmente oposto a A). Já os outros 8 vértices podem ser escolhidos livremente de 8! maneiras. Temos, assim 8 x 8! = 322560 decágonos.

Porém, nessa resolução, contamos como diferentes (quando na verdade não são) os decágonos:



Fonte: O próprio Autor.

E todo os decágonos que contamos, o fizemos de duas maneiras distintas (pela direita e pela esquerda). Para corrigir esse erro, devemos dividir o resultado anteriormente obtido por 2.

Temos, assim, 8 x 8!/2 = 161280 decágonos distintos.

2.6.3 Exercícios de Fixação do Conteúdo

1. De quantas maneiras distintas 8 crianças podem brincar de roda:
   a) No total?
   b) De modo que entre elas, duas específicas devam ficar lado a lado?
   c) De modo que entre elas, duas específicas não devam ficar lado a lado?

2. (Matemática Discreta – Coleção PROFMAT) De quantos modos podemos formar uma mesa de buraco com 4 jogadores?

3. Uma pirâmide regular octogonal será colorida usando 8 cores distintas (azul, verde, roxo, rosa, amarelo, vermelho, marrom e preto), uma em cada face lateral e a base será pintada de branco. De quantas maneiras distintas podemos fazê-lo?

4. Para confeccionar uma pulseira de miçangas de determinado tamanho, utilizo 19 miçangas como mostra a figura a seguir:

Fonte: O próprio Autor.

Se eu quiser produzir uma pulseira com 19 miçangas de cores distintas, quantas pulseiras diferentes poderei produzir?

5. (UNIGRANRIO 2016) Quantos são os anagramas da palavra MEDICINA que possuem as quatro consoantes em ordem alfabética?
(A) 420 (B) 3360 (C) 20160 (D) 40320 (E) 840

6. (IME 1984) Determine a soma de todos os números inteiros que são obtidos permutando-se, sem repetição, os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

7. (IME 1972) Cinco rapazes e cinco moças devem posar para uma fotografia, ocupando cinco degraus de uma escadaria de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras diferentes podemos arrumar este grupo?

8. Em uma sala de aula há 30 alunos. Desses, 3 serão escolhidos para representar a turma em uma olimpíada de matemática. De quantas maneiras distintas essa escolha poderá ser feita?

2.6.4 Desafios para a próxima aula

1. De quantas maneiras distintas, em um grupo de 10 pessoas podemos escolher 3 delas para que a primeira ganhe um carro, a segunda ganhe uma moto e a terceira ganhe um patinete?
2. Os atletas Michael Phelps, Kōsuke Hagino, Wang Shun, Hiromasa Fujimori, Ryan Lochte, Philip Heintz, Thiago Pereira e Daniel Wallace foram classificados para a final dos 200m medley masculino nas Olimpíadas Rio 2016. De quantas maneiras distintas o pódio poderá ser formado se dois nadadores não concluírem a prova ao mesmo tempo? Em quantas dessas opções Michael Phelps será o primeiro colocado?

2.7 **Aula 07**

Objetivo: Introduzir o conceito de arranjos e combinações. Espera-se que o aluno aprenda a diferenciá-los e que resolva problemas simples a respeito do tema.

Iniciar a aula retomando os desafios propostos na aula anterior:

2.7.1 Arranjos

1. De quantas maneiras distintas, em um grupo de 10 pessoas podemos escolher 3 delas para que a primeira ganhe um carro, a segunda ganhe uma moto e a terceira ganhe um patinete?

Teremos 10 opções para quem receberá o carro. Para cada uma delas, teremos 9 opções para quem receberá a moto (qualquer uma delas menos quem já ganhou o carro). Para cada uma dessas 10 x 9 = 90 opções, ainda temos 8 opções para quem receberá o patinete (qualquer uma das 10 menos quem recebeu o carro e quem recebeu a moto).

Temos, assim: 10 x 9 x 8 = 720 maneiras distintas.

Observação: 10 x 9 x 8 = 10!/7! = 10!/(10-3)!

2. Os atletas Michael Phelps, Kōsuke Hagino, Wang Shun, Hiromasa Fujimori, Ryan Lochte, Philip Heintz, Thiago Pereira e Daniel Wallace foram classificados para a final dos 200m medley masculino nas Olimpíadas Rio 2016. De quantas maneiras distintas o pódio poderá ser formado se dois nadadores não concluírem a prova ao mesmo tempo? Em quantas dessas opções Michael Phelps será o primeiro colocado?

Teremos 8 opções de atleta para o primeiro lugar, 7 opções de atleta para o segundo lugar (qualquer um menos o que já chegou em primeiro) e 6 opções de atleta para o terceiro lugar (qualquer um menos os dois que já foram posicionados na primeira e na segunda posição).

Teremos, assim: 8 x 7 x 6 = 336 possibilidades.

Observação: 8 x 7 x 6 = 8!/5! = 8!/(8-3)!

Já se quisermos calcular apenas os casos em que Michael Phelps foi o primeiro colocado, teremos apenas 1 opção para o primeiro colocado, 7 opções para o segundo e 6 opções para o terceiro.

Teremos, assim: 1 x 7 x 6 = 42 possibilidades.

Observação: 1 x 7 x 6 = 1 x 7!/5! = 1 x 7!/(7-2)!

3. Quantos são os anagramas da palavra VESTIBULAR cujas vogais não aparecem lado a lado?

Para resolver tal problema, começaremos ordenando as consoantes. Como são 6 consoantes, elas podem ser ordenadas de 6! = 720 maneiras. Para cada uma delas, deveremos analisar quantas são as possibilidades de encaixar as vogais sem que elas estejam lado a lado, ou seja, nas extremidades ou entre duas consoantes. Por exemplo. Na ordenação das consoantes VSTBLR podemos encaixar as vogais nas posições indicadas a seguir:

_V_S_T_B_L_R_

Temos, assim, 7 opções de lugar para encaixar a letra E, para cada uma delas 6 opções de lugar para a letra I (qualquer uma das sete anteriores menos onde eu já posicionei a letra E), 5 opções de lugar para encaixar a letra U e 4 opções de lugar para encaixar a letra A. Dessa forma, temos 7 x 6 x 5 x 4 = 840 maneiras distintas de formar um anagrama da palavra VESTIBULAR com as vogais separadas sendo a ordenação das consoantes VSTBLR.

Observação: 7 x 6 x 5 x 4 = 7!/3! = 7!/(7-4)!

Como há no total 720 maneiras de ordenar as consoantes, temos 720 x 840 = 604800 anagramas da palavra VESTIBULAR cujas vogais não aparecem lado a lado.

Podemos generalizar que para escolher p itens entre n itens distintos, importando a ordem de escolha, faremos:

$$\boldsymbol{A_{n,p}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!}$$

2.7.2 Combinações

1. De quantas maneiras distintas, em um grupo de 10 pessoas podemos escolher 3 delas para que cada uma delas ganhe um carro (sendo os três carros idênticos)?

Representaremos essas pessoas por A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Teremos 10 opções para a primeira pessoa escolhida. Para cada uma delas, teremos 9 opções para a segunda (qualquer uma delas menos quem já foi escolhido). Para cada uma dessas 10 x 9 = 90 opções, ainda temos 8 opções para a terceira (qualquer uma das 10 menos as duas já selecionadas), resultando assim em 10 x 9 x 8 = 720 casos. Porém, as três pessoas receberão o mesmo prêmio, com isso, a ordem de seleção não representa casos distintos. Note que as pessoas A, B e C serem as escolhidas foi contado 3! vezes: ABC, ACB, BCA, BAC, CAB e CBA, o que aconteceu também com todas as outras opções de três pessoas escolhidas. Para corrigir esse erro, devemos dividir o resultado anteriormente obtido por 3!.

Temos, assim: 10 x 9 x 8/3! = 720/3! = 120 maneiras distintas.

Observação: 10 x 9 x 8/3! = 10!/(7!.3!) = 10!/[(10-3)!.3!]

2. Uma loja de iogurte congelado tem 21 opções de coberturas para o cliente escolher. De quantas maneiras distintas um cliente pode montar seu iogurte congelado com 3 coberturas diferentes?

Fonte: http://www.foodographer.net/wp-content/uploads/2013/01/yogurt2.jpg

A primeira cobertura a ser escolhida tem 21 opções, já a segunda tem 20 opções (deve ser diferente da primeira) e a terceira tem 19 opções (deve ser diferente das duas primeiras), resultando assim em 21 x 20 x 19 = 7980. Porém, se eu escolher primeiro “gotas de chocolate preto”, depois “nozes” e depois “coco ralado” ou escolher primeiro “gotas de chocolate preto”, depois “coco ralado” e depois “nozes” eu estarei montando o mesmo iogurte congelado. Sendo assim, podemos notar que a ordem de escolha dessas 3 coberturas não altera o iogurte congelado final. Cada permutação dessas 3 coberturas escolhidas ocorre 3! = 6 vezes, por isso, devemos dividir o resultado anteriormente obtido por 3!.

Teremos, assim: 21 x 20 x 19 / 3! = 1330

Observação: 21 x 20 x 19/3! = 21!/(18!.3!) = 21!/[(21-3)!.3!]

3. Em uma sala de aula há 18 meninas e 10 meninos. De quantas maneiras distintas
   a) Podemos montar um grupo com 5 alunos?

O primeiro aluno a ser escolhido tem 28 opções, o segundo aluno 27 (qualquer um menos o que já foi escolhido), o terceiro aluno 26, o quarto 25 e o último 24 opções. Temos inicialmente 28 x 27 x 26 x 25 x 24 casos possíveis. Porém, como a ordem desses cinco alunos entre si não faz diferença para formar um grupo, contamos 5! vezes cada grupo que realmente existe. Por isso, devemos dividir o resultado anteriormente obtido por 5!.

Temos, assim: 28 x 27 x 26 x 25 x 24/5! = 98280 maneiras distintas de formar um grupo.

Observação: 28 x 27 x 26 x 25 x 24/5! = 28!/(23!.5!) = 28!/[(28-5)!.5!]

b) Podemos montar um grupo com 5 alunos, com exatamente 3 meninas?

Para formarmos um grupo com exatamente 3 meninas, devemos calcular separadamente de quantas maneiras distintas podemos escolher 3 meninas dessa turma e de quantas maneiras distintas podemos escolher 2 meninos nessa turma (para termos assim 3 + 2 = 5 membros no grupo).

Escolha de 3 meninas:

Teremos 18 opções para a primeira menina, 17 para a segunda (qualquer uma menos a que já faz parte do grupo) e 16 para a terceira. Depois dividiremos o resultado de 18 x 17 x 16 por 3!, pois ao mudar a ordem entre elas o grupo não muda e contamos 3! vezes o mesmo grupo. Temos assim 18 x 17 x 16/3! = 816 maneiras distintas de escolher as três meninas.

Observação: 18 x 17 x 16/3! = 18!/(15!.3!) = 18!/[(18-3)!.3!]

Escolha dos 2 meninos:

Teremos 10 opções para o primeiro menino e 9 para o segundo (qualquer um menos o que já faz parte do grupo). Depois dividiremos o resultado de 10 x 9 por 2!, pois ao mudar a ordem entre eles o grupo não muda e contamos 2! vezes o mesmo grupo. Temos assim 10 x 9/2! = 45 maneiras distintas de escolher os dois meninos.

Observação: 10 x 9/2! = 10!/(8!.2!) = 10!/[(10-2)!.2!]

Por fim, para cada umas das 816 possibilidades de escolha das três meninas temos 45 possibilidades de escolha dos dois meninos, então teremos 816 x 45 = 36720 maneiras distintas de formar um grupo com 3 meninas e 2 meninos.

c) Podemos montar um grupo com 5 alunos, com pelo menos 3 meninas?

Vimos no item anterior que temos 36720 maneiras distintas de formar um grupo com 3 meninas e 2 meninos. Agora basta calcular de quantas maneiras distintas podemos escolher 4 meninas e 1 menino e de quantas maneiras diferentes podemos escolher 5 meninas.

(I) 4 meninas e 1 menino:

De maneira análoga ao item anterior, primeiramente calcularemos o número de grupos de 4 meninas: Teremos 18 opções de escolha para a primeira menina, 17 para a segunda, 16 para a terceira e 15 para a quarta. Dividiremos o resultado de 18 x 17 x 16 x 15 por 4! já que a ordem de escolha não muda o grupo formado. Teremos, assim: 18 x 17 x 16 x 15/4! = 3060 maneiras distintas de escolher quatro meninas. Para cada uma delas há 10 maneiras distintas de escolher um menino, então o total de casos seria 3060 x 10 = 30600 maneiras distintas de escolher quatro meninas e um menino.

Observação: 18 x 17 x 16 x 15/4! = 18!/(14!.4!) = 18!/[(18-4)!.4!]

(II) 5 meninas:

Para formar um grupo com cinco meninas temos 18 opções de escolha para a primeira delas, 17 opções para a segunda, 16 para a terceira, 15 para a quarta e 14 para a última. Dividiremos o resultado de 18 x 17 x 16 x 15 x 14 por 5! já que a ordem de escolha não muda o grupo formado. Teremos, assim: 18 x 17 x 16 x 15 x 14/5! = 8568 maneiras distintas de escolher cinco meninas.

Observação: 18 x 17 x 16 x 15 x 14/5! = 18!/(13!.5!) = 18!/[(18-5)!.5!]

Temos, assim, no total, 36720 + 30600 + 8568 = 75888 maneiras distintas de formar um grupo de cinco alunos com pelo menos três meninas.

Podemos generalizar que para escolher p itens entre n itens distintos, sem importar a ordem de escolha, faremos:

$$\boldsymbol{C_{n,p}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!\,.\,\boldsymbol{p}!}$$

2.7.3 Desafio para a próxima aula

Em uma festa há 30 homens e 20 mulheres. Sabendo que todas as pessoas de mesmo sexo cumprimentam-se entre si com um aperto de mão e que um homem e uma mulher se cumprimentam com um abraço, determine:

a) Quantos apertos de mão foram dados na festa?
b) Quantos abraços foram dados na festa?

Observação: Considere que todas as pessoas da festa se cumprimentam exatamente uma vez.

2.8 **Aula 08**

Objetivo: Aprofundar a resolução de problemas de contagem que envolvam arranjos e combinações. Espera-se que o aluno se torne capaz de resolver problemas que envolvam raciocínios mais rebuscados ligados a combinações.

Iniciar a aula retomando o desafio proposto na aula anterior:

Em uma festa há 30 homens e 20 mulheres. Sabendo que todas as pessoas de mesmo sexo cumprimentam-se entre si com um aperto de mão e que um homem e uma mulher se cumprimentam com um abraço, determine:

a) Quantos apertos de mão foram dados na festa?
b) Quantos abraços foram dados na festa?

Observação: Considere que todas as pessoas da festa se cumprimentam exatamente uma vez.

a) Cada um dos 30 homens irá apertar a mão dos outros 29 homens que estão na festa (todos menos ele mesmo), formando 30 x 29 apertos de mão. Porém, o “Homem A” apertar a mão do “Homem B” e o “Homem B” apertar a mão do “Homem A” geram o mesmo aperto de mão. Sendo assim, contamos 2! vezes o mesmo caso. Para corrigir esse problema, dividiremos o resultado anteriormente obtido por 2!. Dessa forma, 30 x 29 / 2! = 435 apertos de mão dados por dois homens.

Cada uma das 20 mulheres irá apertar a mão das outras 19 mulheres que estão na festa, formando 20 x 19 apertos de mão. Para desconsiderar como distintas as permutações de duas mulheres entre si, dividiremos o resultado anteriormente obtido por 2!. Dessa forma, 20 x 19 / 2! = 190 apertos de mão dados por duas mulheres.

Temos assim, no total, 435 + 190 = 625 apertos de mão na festa.

b) Cada um dos 30 homens irá abraçar 20 mulheres diferentes. Sendo assim, temos um total de 30 x 20 = 600 abraços.

Observação: Por mais que no item b a ordem de escolha não influencie na situação não dividiremos o resultado obtido por 2!. Quando escolhemos itens de grupos distintos, a permutação entre os itens escolhidos não é contada ao multiplicar as quantidades de opções de cada decisão.
Por exemplo, no item a, o “Homem A” pode ter sido escolhido na primeira decisão e o “Homem B” na segunda e como a primeira decisão tem como opção cada um dos 30 homens, o “Homem B” pode ter sido escolhido na primeira decisão e o “Homem A” na segunda. Sendo assim, a permutação dos dois homens entre si foi considerada quando não deveria, por isso devemos corrigir o resultado obtido dividindo por 2!.
Já no item b, a primeira decisão pode ter sido escolher o “Homem A” e a segunda decisão pode ter sido escolher a “Mulher A”. Como a primeira decisão era escolher qualquer um dos 30 homens, em nenhum momento temos como opção a “Mulher A” e nas 20 opções da segunda decisão estamos escolhendo uma mulher, então em nenhum momento estamos escolhendo o “Homem A”. Sendo assim, as permutações entre eles não foram consideradas, por isso, não dividimos o resultado obtido por 2!.

2.8.1 Atividade

Dividir a turma em duplas para resolver os exercícios propostos e posteriormente resolvê-los no quadro promovendo uma discussão entre os resultados obtidos e os erros cometidos.

2.8.2 Exercícios propostos

1. Em uma reta r são marcados 5 pontos distintos (A, B, C, D e E) e em outra reta s, paralela a r, são marcados outros 4 pontos (F, G, H e I). Quantos triângulos podem ser formados com vértices em 3 dos pontos descritos?

Solução 1:

Primeiramente, notaremos que para um triângulo ser formado, ou temos dois pontos em r e um em s ou dois pontos em s e um em r. Caso tenhamos os três pontos marcados na mesma reta, nenhum polígono será formado, termos apenas um segmento de reta. Analisaremos então esses dois casos separadamente:

(I) Dois pontos em r e um ponto em s:

Para escolhermos dois pontos em r, teremos 5 opções para o primeiro ponto (A, B, C, D ou E) e 4 opções para o segundo ponto (qualquer um dos pontos de r menos o que já foi escolhido). Dessa forma, temos 5 x 4 maneiras de escolher dois pontos em r. Porém, se escolhermos os pontos A e B ou os pontos B e A formaremos o mesmo segmento AB. Sendo assim, contamos 2! vezes cada segmento que realmente existe. Para corrigir esse problema, dividiremos o resultado anteriormente obtido por 2!. Posteriormente, precisaremos escolher o terceiro ponto na reta s. Para cada uma das 5 x 4 / 2! maneiras de escolher os dois pontos de r teremos 4 opções para escolher o ponto de s a ser utilizado para formar o triângulo (F, G, H ou I).

Podemos, assim, formar [5 x 4 / 2!] x 4 = 40 triângulos com dois pontos em r e um em s.

(II) Dois pontos em s e um ponto em r:

Para escolhermos dois pontos em s, teremos 4 opções para o primeiro ponto (F, G, H ou I) e 3 opções para o segundo ponto (qualquer um dos pontos de s menos o que já foi escolhido). Dessa forma, temos 4 x 3 maneiras de escolher dois pontos em s. Porém, como a ordem dos pontos escolhidos não altera o segmento obtido, dividiremos o resultado por 2! para desconsiderar como distintas as permutações entre os pontos escolhidos. Para cada uma das 4 x 3 / 2! maneiras de escolher os dois pontos de s teremos 5 opções para escolher o ponto de r a ser utilizado para formar o triângulo (A, B, C, D ou E).

Podemos, assim, formar [4 x 3 / 2!] x 5 = 30 triângulos com dois pontos em r e um em s.

Teremos assim, no total, 40 + 30 = 70 maneiras de formar um triângulo com os vértices nos pontos dados.

Solução 2:

Outra maneira de resolvermos esse problema é inicialmente contarmos todas as maneiras de escolher três pontos entre os 9 pontos disponíveis e depois descontarmos os casos em que não formamos triângulo (todos os pontos na mesma reta):

(I) Escolher 3 pontos entre os 9 disponíveis:

Teremos 9 opções para o primeiro ponto (A, B, C, D, E, F, G, H ou I), 8 opções para o segundo ponto (qualquer um dos pontos menos o que já foi escolhido) e 7 opções para o último ponto a ser escolhido. Dessa forma, temos 9 x 8 x 7 maneiras de escolher 3 pontos entre os 9 disponíveis. Porém, como a ordem de escolha não altera quais foram os 3 pontos escolhidos, dividiremos o resultado anteriormente obtido por 3! para desconsiderar como distintas as permutações entre os pontos escolhidos.

Podemos, assim, escolher 3 pontos entre os 9 dados na questão de 9 x 8 x 7/3! = 84 maneiras distintas.

(II) Escolher 3 pontos em r:

Teremos 5 opções para o primeiro ponto (A, B, C, D ou E), 4 opções para o segundo ponto (qualquer um dos pontos menos o que já foi escolhido) e 3 opções para o último ponto a ser escolhido. Posteriormente, dividiremos o resultado anteriormente obtido por 3! para desconsiderar como distintas as permutações entre os pontos escolhidos.

Podemos, assim, escolher 3 pontos entre os 5 que estão em r de 5 x 4 x 3/3! = 10 maneiras distintas.

(III) Escolher 3 pontos em s:

Teremos 4 opções para o primeiro ponto (F, G, H ou I), 3 opções para o segundo ponto (qualquer um dos pontos menos o que já foi escolhido) e 2 opções para o último ponto a ser escolhido. Posteriormente, dividiremos o resultado anteriormente obtido por 3! para desconsiderar como distintas as permutações entre os pontos escolhidos.
Podemos, assim, escolher 3 pontos entre os 4 que estão em s de 4 x 3 x 2/3! = 4 maneiras distintas.

Temos assim, no total, 84 – 10 – 4 = 70 triângulos que podem ser formados.

2. Um químico possui 8 tipos de substâncias das quais duas, quando juntas, explodem. De quantas maneiras ele pode selecionar 4 dessas substâncias sem causar uma explosão?

Chamaremos de A e B as duas substâncias que quando juntas explodem.

Solução 1:
Podemos pensar em algumas hipóteses para que uma explosão não ocorra: Ou escolhemos as 4 substâncias sem usar A nem B, assim certamente não haverá uma explosão, ou escolheremos uma entre as substâncias A e B e depois 3 entre as 6 restantes para que A e B não estejam juntas na mistura.

(I) Selecionar 4 substâncias sem usar A nem B:

A primeira substância a ser escolhida tem 6 opções (qualquer uma menos as substâncias A e B), a segunda tem 5 opções (não pode ser a mesma da primeira), a terceira 4 opções e a última 3 opções. Tendo assim 6 x 5 x 4 x 3 maneiras de escolher as 4 substâncias. Como a ordem de escolha das substâncias não altera a mistura formada, precisamos desconsiderar como distintas as 4! permutações das substâncias escolhidas entre si, por isso corrigiremos o resultado anteriormente obtido dividindo-o por 4!.
Temos assim, 6 x 5 x 4 x 3 / 4! = 15 maneiras de escolher 4 substâncias sem escolher A nem B.

(II) Selecionar uma das substâncias entre A e B, e outras 3 substâncias entre as outras 6 restantes:

Primeiramente escolheremos de usaremos a substância A ou a substância B (2 opções). Posteriormente, escolheremos quais serão as outras 3 substâncias a ser escolhidas entre as 6 restantes (todas as substâncias tirando a substância A e a substância B). Teremos 6 opções para a primeira delas, 5 para a segunda e 4 para a terceira, tendo assim 6 x 5 x 4 maneiras de escolher as 3 substâncias restantes. Como a ordem de escolha das substâncias não altera a mistura formada, precisamos desconsiderar como distintas as 3! permutações das substâncias escolhidas entre si, por isso corrigiremos o resultado anteriormente obtido dividindo-o por 3!.

Temos assim, 2 x 6 x 5 x 4 / 3! = 40 maneiras de escolher 4 substâncias, escolhendo uma entre as substâncias A e B.

Temos no total, 15 + 40 = 55 maneiras de escolher 4 substâncias sem causar uma explosão.

Solução 2:

Podemos calcular o total de maneiras de selecionar 4 substâncias entre as 8 disponíveis e retirar desse total a quantidade de maneiras de haver uma explosão.

(I) Selecionar 4 substâncias:

A primeira substância a ser escolhida tem 8 opções (qualquer uma), a segunda tem 7 opções (não pode ser a mesma da primeira), a terceira 6 opções e a última 5 opções. Tendo assim 8 x 7 x 6 x 5 maneiras de escolher as 4 substâncias. Como a ordem de escolha das substâncias não altera a mistura formada, precisamos desconsiderar como distintas as 4! permutações das substâncias escolhidas entre si, por isso corrigiremos o resultado anteriormente obtido dividindo-o por 4!.

Temos assim, 8 x 7 x 6 x 5 / 4! = 70 maneiras de escolher 4 substâncias.

(II) Selecionar A, B e mais duas substâncias entre as 6 restantes:

Nesse caso só temos que nos preocupar em quantas maneiras podemos escolher as substâncias que irão acompanhar A e B na mistura. A primeira delas tem 6 opções (qualquer uma das restantes) e 5 para a segunda (não pode ser a mesma), tendo assim 6 x 5 maneiras de escolher as outras 2 substâncias da mistura. Como a ordem de escolha dessas duas substâncias não altera a mistura formada, precisamos desconsiderar como distintas as 2! permutações das substâncias escolhidas entre si, por isso corrigiremos o resultado anteriormente obtido dividindo-o por 2!.
Temos assim, 1 x 6 x 5 / 2! = 15 maneiras de formar uma explosão.

Para que **não** exploda, temos no total, 70 - 15 = 55 maneiras de escolher as 4 substâncias.

3. Uma livraria tem 15 livros em uma prateleira: 10 exemplares do livro "O Diário de uma Paixão" e 5 exemplares de "Amor Para Recordar". Considere que os livros com mesmo título sejam indistinguíveis.
   Determine de quantas maneiras diferentes podemos dispor os 15 livros na estante de modo que dois exemplares de "Amor Para Recordar" nunca estejam juntos.

Para resolver tal problema, começaremos fixando os 10 exemplares de "O diário de uma Paixão". Posteriormente, deveremos analisar quantas são as possibilidades de encaixar os 5 exemplares de "Amor Para Recordar" sem que eles estejam lado a lado, ou seja, nas extremidades ou entre dois livros já fixados. Dessa forma, podemos encaixar os livros "Amor Para Recordar" nas posições indicadas a seguir:

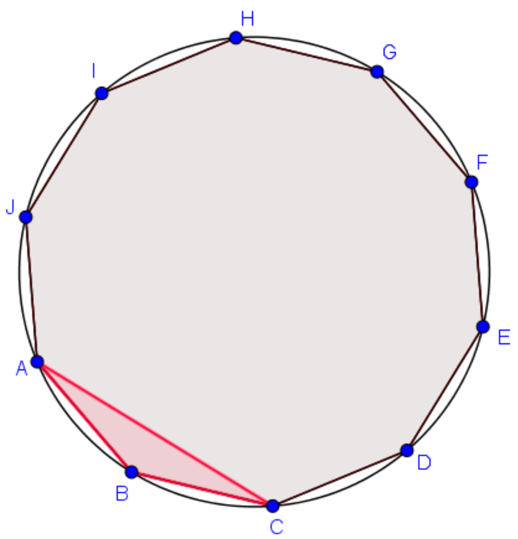
_D_D_D_D_D_D_D_D_D_D_

Temos, assim, 11 opções de lugar para encaixar o primeiro livro, para cada uma delas 10 opções de lugar para o segundo livro (qualquer uma das onze anteriores menos onde eu já posicionei o primeiro), 9 opções de lugar para encaixar o terceiro livro, 8 opções para encaixar o quarto livro e 7 opções para encaixar o último. Dessa forma, teríamos 11 x 10 x 9 x 8 x 7 maneiras distintas de posicionar os 15 livros na estante com os exemplares de "Amor Para Recordar" separados. Porém, como os 5 livros são indistinguíveis, precisamos dividir o resultado obtido por 5! para desconsiderar como distintas as permutações desses 5 livros entre si.

Temos, assim, 11 x 10 x 9 x 8 x 7 / 5! = 462 maneiras distintas de posicionar os 15 livros na estante com os exemplares de "Amor Para Recordar" separados.

4. Em uma circunferência são marcados 10 pontos que se ligados formam um decágono regular. Com vértices nesses pontos:
   a) Quantos triângulos podem ser formados?
   b) Quantos triângulos retângulos podem ser formados?

a) Para formar um triângulo devemos escolher 3 vértices entre os 10 disponíveis. Teremos 10 opções para o primeiro vértice a ser escolhido. Para cada uma delas teremos 9 opções para o segundo vértice escolhido (qualquer um dos dez, menos o que já foi escolhido) e as 8 opções restantes para o último vértice, tendo assim 10 x 9 x 8 de escolher os três pontos. Observe a figura:

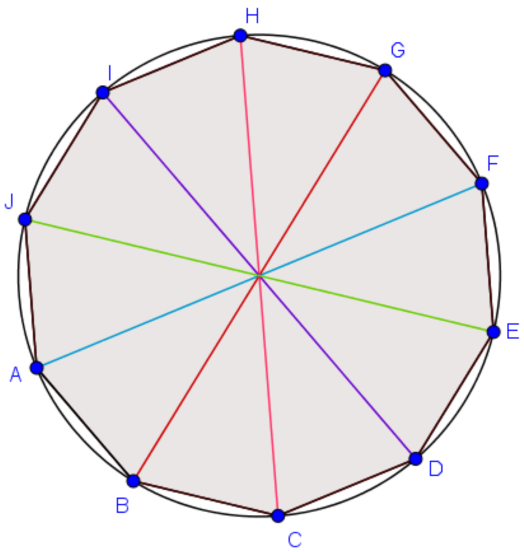


Fonte: O próprio Autor.

Como os triângulos ABC e CAB são idênticos, note que a permutação entre os vértices escolhidos são altera o triângulo formado. Sendo assim, devemos dividir o resultado anteriormente obtido por 3!.

Temos, assim, 10 x 9 x 8/3! = 120 triângulos distintos.

b) Lembrando que todo triângulo retângulo, quando inscrito em uma circunferência tem a hipotenusa como diâmetro, note que temos 5 opções para a hipotenusa: AF, BG, CH, DI e EJ, como mostra a imagem a seguir:



Fonte: O próprio Autor.

Para cada uma dessas 5 opções de hipotenusa, teremos 8 opções para o vértice cujo ângulo é reto (qualquer vértice menos os dois que estão nas extremidades da hipotenusa).
Temos, assim 5 x 8 = 40 triângulos retângulos distintos.

5. (Matemática Discreta – Coleção PROFMAT) De um baralho de pôquer (7, 8, 9, 10, valete, dama, rei e ás, cada um desses grupos aparecendo em 4 naipes: copas, ouros, paus e espadas), sacam-se simultaneamente 5 cartas.
   a) Quantas são as extrações possíveis?

   Quantas são as extrações na forma:
   b) um par (duas cartas em um mesmo grupo e as outras três de grupos diferentes)?
   c) dois pares (duas cartas em um grupo, duas cartas em um outro grupo e uma em um terceiro grupo)?
   d) uma trinca (três cartas em um grupo e as outras duas em dois outros grupos diferentes)?

e) um “four” (quatro cartas em um grupo e uma em outro grupo)?
f) um “full hand” (três cartas em um grupo e as outras duas em outro grupo)?
g) uma sequência (5 cartas de grupos consecutivos não sendo todas de mesmo naipe)
h) um “flush” (5 cartas de mesmo naipe, não sendo elas de 5 grupos consecutivos)?
i) um “straight flush” (5 cartas de grupos consecutivos, todas do mesmo naipe)?
j) um “royal straight flush” (10, valete, dama, rei e ás de um mesmo naipe)?

a) A primeira carta pode ser qualquer uma das 32 cartas disponíveis. A segunda carta terá 31 opções (qualquer uma menos a que já foi escolhida), a terceira 30 opções, a quarta 29 opções e a quinta 28 opções. Temos, assim, 32 x 31 x 30 x 29 x 28 maneiras de escolher essas 5 cartas. Porém, como a ordem de extração não influencia no jogo que você terá na mão, temos que desconsiderar como distintas as permutações das 5 cartas entre si, dividindo o resultado anteriormente obtido por 5!.
Temos, assim, 32 x 31 x 30 x 29 x 28/5! = 201376 extrações possíveis.

b) Teremos 8 opções para o grupo do par (7, 8, 9, 10, J, Q ou K). Para cada uma dessas 8 opções de grupo temos ainda que escolher os naipes das duas cartas do par. Quatro opções para a primeira carta (copas, ouros, paus ou espadas) e 3 opções para a segunda (qualquer naipe restante). Faremos então 8 x 4 x 3 e dividiremos o resultado obtido por 2! para desconsiderar como distintas as permutações dos naipes das duas cartas do par. Para cada uma dessas 8 x 4 x 3/2! = 48 maneiras de escolher o par, devemos ainda escolher as outras três cartas (que devem ter grupos distintos do grupo do par escolhido e diferentes entre si). Por isso, temos 7 opções para o grupo da primeira carta além do par, 6 opções de grupo para a segunda e 5 opções para a terceira, tendo assim, 7 x 6 x 5 maneiras de escolher os grupos das outras três cartas, tendo ainda que dividir o resultado obtido por 3! para desconsiderar como distintas as permutações desses três grupos. Temos ainda que escolher o naipe de cada uma dessas três cartas, tendo cada um deles 4 opções (copas, ouros, paus ou espadas).

Temos, assim, $48 \times (7 \times 6 \times 5/3!) \times 4^3 = 107520$ maneiras de obter exatamente um par.

c) Teremos 8 opções para o grupo do primeiro par e 7 opções para o grupo do segundo par. Como não importa qual deles é o primeiro par e qual deles é o segundo par, devemos dividir o resultado de 8 x 7 por 2! para desconsiderar como distintas as permutações dos grupos dos pares. Temos então $8 \times 7/2! = 28$ maneiras distintas de escolher os grupos dos dois pares. Para cada uma dessas 28 maneiras de escolher os grupos dos pares, devemos ainda escolher os naipes das cartas, tendo 4 opções de naipe para a primeira carta do par e 3 opções para a segunda. Dividiremos 4 x 3 por 2! para desconsiderar como distintas as permutações dos naipes dos pares. Dessa forma, teremos $28 \times (4 \times 3/2!)^2$ maneiras de escolher as cartas dos dois pares. Como iremos sacar 5 cartas do baralho, devemos ainda escolher a carta que sobra, que deve ser de um grupo diferente dos grupos dos pares (6 opções) e o naipe dessa carta (4 opções).

Temos, assim, $28 \times (4 \times 3/2!)^2 \times 6 \times 4 = 24192$ maneiras distintas de obter dois pares.

d) Teremos 8 opções para o grupo da trinca. Para cada uma dessas 8 opções de grupo temos ainda que escolher os naipes das três cartas da trinca. Quatro opções para o naipe da primeira carta, 3 opções para o naipe da segunda e 2 opções para o naipe da terceira. Faremos então 8 x 4 x 3 x 2 e dividiremos o resultado obtido por 3! para desconsiderar como distintas as permutações dos naipes das três cartas da trinca. Para cada uma dessas $8 \times 4 \times 3 \times 2/3! = 32$ maneiras de escolher a trinca, devemos ainda escolher as outras duas cartas (que devem ter grupos distintos do grupo da trinca já escolhido e diferentes entre si). Por isso, temos 7 opções para o grupo da primeira carta além da trinca e 6 opções de grupo para a segunda, tendo assim, 7 x 6 maneiras de escolher os grupos das outras três cartas, tendo ainda que dividir o resultado obtido por 2! para desconsiderar como distintas as permutações desses dois grupos. Temos ainda que escolher o naipe de cada uma dessas duas cartas, tendo cada um deles 4 opções (copas, ouros, paus ou espadas). Temos, assim, 32 x (7 x 6/2!) x 4^2 = 10752 maneiras de obter exatamente uma trinca.

e) Teremos 8 opções para o grupo do four. Como em um four temos as 4 cartas do naipe, não precisamos escolher os naipes como fizemos com as duplas e a trinca dos itens anteriores. Para cada uma dessas 8 opções de four temos ainda que escolher o grupo da outra carta (que não faz parte do four), para o qual temos 7 opções. Temos ainda que escolher o naipe dessa carta (4 opções).

   Temos, assim, 8 x 7 x 4 = 224 maneiras de obter um four.

f) Teremos 8 opções para o grupo da trinca. Para cada uma dessas 8 opções de grupo temos ainda que escolher os naipes das três cartas da trinca. Quatro opções para o naipe da primeira carta, 3 opções para o naipe da segunda e 2 opções para o naipe da terceira. Faremos então 8 x 4 x 3 x 2 e dividiremos o resultado obtido por 3! para desconsiderar como distintas as permutações dos naipes das três cartas da trinca. Para cada uma dessas 8 x 4 x 3 x 2/3! = 32 maneiras de escolher a trinca, devemos ainda escolher o grupo da dupla (7 opções) e os naipes dessas duas cartas (4 opções para o naipe da primeira e 3 para o naipe da segunda, lembrando-se de dividir o produto desses números por 2! para desconsiderar como distintas as permutações desses dois naipes).

   Temos, assim, 32 x (7 x 4 x 3/2!) = 1344 maneiras de obter um full hand.

g) Primeiro analisaremos quais são as sequências de grupos possíveis: (7, 8, 9, 10, J); (8, 9, 10, J, Q); (9, 10, J, Q, K) e (10, J, Q, K, A). – 4 opções de seleção dos grupos das cartas.

   Posteriormente, devemos analisar que para cada uma dessas 4 sequências os naipes devem ser escolhidos. Todas as cartas podem ter qualquer naipe contanto que as 5 cartas escolhidas não sejam do mesmo naipe. Sendo assim temos 4^5 maneiras de escolher os naipes das 5 cartas e devemos retirar os 4 casos em que as cinco cartas são de mesmo naipe (4 casos).

Temos, assim, 4 x (4^5 – 4) = 4080 maneiras distintas de obter uma sequência.

h) Devemos escolher os 5 grupos das cartas e excluir as possibilidades de serem grupos consecutivos (que são 4, de acordo com o item anterior). O primeiro grupo escolhido tem 8 opções, o segundo 7 opções, o terceiro 6 opções, o quarto 5 opções e o quinto 4 opções. Como a ordem de escolha dos grupos não altera a seleção de cartas, devemos dividir por 5! o resultado anteriormente obtido para desconsiderar como distintas as permutações desses cinco grupos entre si. Como o flush pode ser de qualquer naipe devemos multiplicar o resultado obtido pelo número de naipes do baralho (4 opções).

Temos, assim, (8 x 7 x 6 x 5 x 4/5! – 4) x 4 = 208 maneiras distintas de obter um flush.

i) Como vimos no item g, há 4 maneiras de escolher os grupos das cartas para que estejam em sequência. Se todas as cartas serão do mesmo naipe, devemos multiplicar a quantidade de sequencias de grupos pela quantidade de naipes.

Temos, assim, 4 x 4 = 16 maneiras distintas de obter um straight flush.

j) Temos apenas quatro opções de naipe quando temos a escolha dos grupos fixada.

Ou seja, temos 4 maneiras distintas de obter um royal straight flush.

6. (UERJ 2012) A tabela abaixo apresenta os critérios adotados por dois países para a formação de placas de automóveis. Em ambos os casos, podem ser utilizados quaisquer dos 10 algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto romano.

País	**Descrição**	**Exemplo**
X	3 letras e 3 algarismos, em qualquer ordem	M3MK09

Y	um bloco de 3 letras, em qualquer ordem, à esquerda de outro bloco de 4 algarismos, também em qualquer ordem	

Considere o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país X igual a n e no país Y igual a p. A razão n/p corresponde a:
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 6.

Placas no país X: Primeiramente, veremos quantas são as configurações possíveis para o formato da placa, que terá 3 números e 3 letras em qualquer ordem. Representaremos uma placa com três letras seguidas de 3 números por LLLNNN. Note que a placa do exemplo dado poderia ser representada no mesmo formato por LNLLNN (letra, número, duas letras e dois números). Perceba que todo formato de placa pode ser representado por uma das permutações de LLLNNN e que toda permutação está associada a exatamente um formato. Sendo assim, se calcularmos as permutações de LLLNNN estaremos calculando o número de configurações possíveis para o formato da placa.
Para permutar esses 6 símbolos faremos 6!, posteriormente dividiremos o resultado obtido por 3! por termos 3 símbolos iguais a “L” e por 3! novamente por termos 3 símbolos iguais a “N”. Temos então 6!/(3! x 3!) = 20 formatos possíveis para essas placas.
Para cada um desses formatos temos 26 opções para cada letra e 10 opções para cada número.
Sendo assim, temos: $n = 20 \times 26^3 \times 10^3$ placas distintas no país X.

Placas no país Y: Como o formato das placas é fixo, basta percebermos que cada letra tem 26 opções e cada algarismo tem 10 opções.
Temos, assim, $p = 26^3 \times 10^4$ placas distintas no país Y.

$$\frac{n}{p} = \frac{20\,.\,26^3\,.\,10^3}{26^3\,.\,10^4} = \frac{20}{10} = 2$$

Alternativa B

2.8.3 Exercícios de fixação do conteúdo

1. De quantas maneiras distintas, em um grupo de 8 pessoas podemos sortear 3 delas para que a primeira ganhe um prêmio de R$100.000,00; a segunda ganhe um prêmio de R$50.000,00 e a terceira ganhe um prêmio de R$25.000,00?

2. De quantas maneiras distintas, em um grupo de 8 pessoas podemos sortear 3 delas para que cada uma ganhe um prêmio de R$100.000,00?

3. Quantos são os anagramas da palavra MESTRADO cujas vogais não aparecem lado a lado?

4. Uma hamburgueria permite que seus clientes montem um hambúrguer da seguinte maneira:

   I - Escolhem o tipo de carne: frango, alcatra ou picanha.
   II - Escolhem o tipo de pão: branco ou integral.
   III - Escolhem o tipo de queijo: prato, minas padrão, gorgonzola ou cheddar.
   IV - Escolhem 3 adicionais diferentes entre: alface, bacon, cebola caramelizada, cogumelos, ovo frito, picles, presunto ou tomate.

   De quantas maneiras distintas um hambúrguer pode ser montado nessa hamburgueria?

5. Em uma turma de teatro há 15 meninas e 8 meninos. De quantas maneiras distintas
   1. Podemos montar um grupo com 4 alunos?
   2. Podemos montar um grupo com 4 alunos, com exatamente 2 meninas?
   3. Podemos montar um grupo com 4 alunos, com pelo menos 2 meninas?

6. Em um plano são marcados 10 pontos. Desses, cinco, e somente cinco, estão alinhados. De quantas maneiras distintas posso formar um triângulo com vértices nesses pontos?

7. Um grupo de 10 amigos criou um campeonato de kart amador. No final de doze corridas, suas pontuações são tabeladas e caso haja empate, vence o candidato mais pesado, pois teoricamente quem é mais leve tem vantagens ao dirigir um kart. O primeiro lugar receberá uma medalha de ouro, o segundo lugar uma medalha de prata e o terceiro lugar uma medalha de bronze. De quantas maneiras distintas pode haver essa distribuição de medalhas?

8. Quantos são os elementos de um conjunto que possui 45 subconjuntos com exatamente dois elementos?

9. Em uma reunião há o dobro de mulheres em relação ao número de homens. Sabendo que todas as pessoas se cumprimentaram uma única vez com um aperto de mão e que houve 36 apertos de mão, quantas pessoas haviam na reunião?

10. No Campeonato Brasileiro os 20 times que participam da primeira divisão jogam entre si duas vezes (turno e returno). Quantos jogos ocorrem, ao todo, no campeonato?

11. Uma prova consta de 12 questões das quais o aluno deve escolher exatamente 10 para resolver. De quantas maneiras distintas essa escolha pode ser feita?

12. Em um grupo de 9 amigos que jogam futebol de salão, dois deles gostam de jogar sempre no gol e os outros 7 só gostam de jogar na linha. De quantas maneiras posso selecionar 5 deles para formar um time respeitando suas preferências?

13. Em uma pequena escola há um total de 25 professores. Desses, quatro são professores de matemática. De quantas maneiras podemos formar uma comissão com 5 professores
    a) No total?
    b) De modo que exatamente 2 deles sejam de matemática?
    c) De modo que pelo menos dois deles sejam de matemática?
    d) De modo que nenhum seja de matemática?

14. Bruno, Frederico, Gabriel, João, Leonar, Marcos e Renato são amigos de infância. Ao fazer uma viagem juntos, eles precisam se dividir em dois quartos, um com 3 deles e o outro com os outros 4. Sabendo que Bruno e Marcos brigaram e não podem ficar juntos no mesmo quarto:
    a) De quantas maneiras distintas essa divisão pode ser feita?
    b) Frederico e Leonar são primos e gostariam de ficar no mesmo quarto. Dessa forma, de quantas maneiras distintas essa divisão pode ser feita?

15. Em uma estante de livros há 15 romances, 10 livros de autoajuda, 5 livros religiosos e 10 livros de assuntos matemáticos. De quantas maneiras distintas posso selecionar 4 livros dessa estante:
    a) Sendo todos romances?
    b) Sendo todos de assuntos matemáticos?
    c) Sendo dois de autoajuda e 2 religiosos?
    d) Sendo todos de mesma categoria?
    e) Sendo todos de categorias distintas?
    f) Sem escolher nenhum de assuntos matemáticos?
    g) Sendo pelo menos um de assuntos matemáticos?

16. Em uma circunferência são marcados 10 pontos distintos. Com vértices nesses pontos:
    a) Quantos triângulos podem ser formados?
    b) Quantos quadriláteros podem ser formados?
    c) Quantos pentágonos podem ser formados?
    d) Quantos hexágonos podem ser formados?

e) Quantos heptágonos podem ser formados?
f) Quantos octógonos podem ser formados?
g) Quantos eneágonos podem ser formados?
h) Quantos decágonos podem ser formados?
i) Quantos polígonos podem ser formados?

17. Quantas são as diagonais de um octógono convexo?

18. Quantas são as diagonais de um polígono convexo de n lados?

19. Quantas são as diagonais de um prisma pentagonal?

20. Quantos são os anagramas da palavra PARALELEPIPEDO que não possuem duas letras E lado a lado?

21. Uma mulher tem 5 amigas e 5 amigos e seu esposo tem 2 amigas e 7 amigos. Eles querem convidar 3 mulheres e 3 homens para um jantar na casa deles. Eles fazem questão que cada um convide 3 pessoas entre seu grupo de amigos e amigas. De quantas maneiras distintas essas pessoas podem ser escolhidas?

22. Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de determinado refrigerante traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda).

    Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

23. De quantos modos 12 alunos podem se dividir em 3 grupos de 4 alunos cada, sabendo que um dos grupos fará um trabalho sobre Pitágoras, outro sobre Tales e o terceiro sobre Hypatia?

24. De quantos modos 12 alunos podem se dividir em 3 grupos de 4 alunos cada, sabendo que todos os grupos farão um trabalho sobre Pitágoras?

25. (PUC – 1999) Um torneio de xadrez no qual cada jogador joga com todos os outros tem 351 partidas. O número de jogadores disputando é:

(A) 22. (B) 27. (C) 26. (D) 19. (E) 23.

26. (UERJ - 2010) Ao refazer seu calendário escolar para o segundo semestre, uma escola decidiu repor algumas aulas em exatamente 4 dos 9 sábados disponíveis nos meses de outubro e novembro de 2009, com a condição de que não fossem utilizados 4 sábados consecutivos.

Para atender às condições de reposição das aulas, o número total de conjuntos distintos que podem ser formados contendo 4 sábados é de:

(A) 80 (B) 96 (C) 120 (D) 126

27. (UERJ 2010)

O Globo, 18/03/2009

Considere como um único conjunto as 8 crianças – 4 meninos e 4 meninas – personagens da tirinha. A partir desse conjunto, podem-se formar n grupos, não vazios, que apresentam um número igual de meninos e de meninas.

O maior valor de n é equivalente a:

(A) 45 (B) 56 (C) 69 (D) 81

28. (UERJ 2007) Sete diferentes figuras foram criadas para ilustrar, em grupos de quatro, o Manual do Candidato do Vestibular Estadual 2007.

Um desses grupos está apresentado a seguir.

Considere que cada grupo de quatro figuras que poderia ser formado é distinto de outro somente quando pelo menos uma de suas figuras for diferente.

Nesse caso, o número total de grupos distintos entre si que poderiam ser formados para ilustrar o Manual é igual a:

(A) 24 (B) 35 (C) 70 (D) 140

29. (UFF 2007) A administração de determinado condomínio é feita por uma comissão colegiada formada de 8 membros: síndico, subsíndico e um conselho consultivo composto de seis pessoas. Note que há distinção na escolha de síndico e subsíndico enquanto não há esta distinção entre os membros do conselho consultivo.

    Sabendo que 10 pessoas se dispõem a fazer parte de tal comissão, determine o número total de comissões colegiadas distintas que poderão ser formadas com essas 10 pessoas.

30. Quantas são as senhas de 5 dígitos, nas quais exatamente dois dos dígitos são o algarismo 1, e os outros são distintos?

31. Quantos são os números naturais de 7 algarismos, nos quais exatamente dois deles são o algarismo 8, exatamente dois deles são o número 1 e os outros algarismos são distintos?

2.8.4 Desafio para a próxima aula

Um estudante possui, em uma das gavetas do seu armário, 10 meias brancas, 6 meias pretas, 8 meias vermelhas e 4 meias amarelas. Todas são indistinguíveis ao tato. Quantas meias ele precisa retirar da gaveta, sem olhar, para garantir que pelo menos duas das meias retiradas são brancas?

2.9 **Aula 09**

Objetivo: Ensinar o princípio das gavetas. Espera-se que o aluno reconheça e resolva tranquilamente problemas relativos ao tema.

Iniciar a aula retomando o desafio proposto na aula anterior:

2.9.1 Princípio das gavetas

1. Um estudante possui, em uma das gavetas do seu armário, 10 meias brancas, 6 meias pretas, 8 meias vermelhas e 4 meias amarelas. Todas são indistinguíveis ao tato. Quantas meias ele precisa retirar da gaveta, sem olhar, para garantir que pelo menos duas das meias retiradas são brancas?

Pode ser que retirando duas meias da gaveta, as mesmas sejam brancas e nosso problema tenha sido encerrado. Porém, para **garantirmos** que pelo menos duas meias brancas sejam retiradas, devemos pensar na pior hipótese que seria retirarmos da gaveta inicialmente todas as 6 + 8 + 4 = 18 meias que não são brancas. Posteriormente, já que todas as meias não brancas já foram retiradas, as próximas duas meias retiradas seriam brancas.

Assim, precisamos retirar 20 meias da gaveta.

2. Manoela e Renato foram a um bar e pediram uma porção com 12 pastéis, 6 de queijo e 6 de camarão. Só é possível descobrir o sabor ao comê-lo. Quantos pastéis Renato deve comer para garantir que comerá algum de camarão?

Novamente, note que pode ser que o Renato coma um pastel e seja esse um pastel de camarão. Porém, para **garantir** que ele coma um pastel de camarão, devemos pensar na pior hipótese que seria comer primeiramente todos os 6 pastéis de queijo e, posteriormente, como restarão apenas pastéis de camarão, o próximo que ele comer será o desejado.

Assim, ele precisará comer 6 + 1 = 7 pastéis.

3. Quantos alunos devem fazer uma prova com 10 questões que devem ser julgadas como verdadeiras ou falsas para que possamos garantir que pelo menos dois deles a responderão da mesma maneira?

Para resolver esse problema, inicialmente, seria interessante começarmos calculando quantas são as maneiras distintas de responder as questões dessa prova. A primeira questão poderá ser respondida de duas maneiras distintas (verdadeira ou falsa). Para cada uma dessas possibilidades há duas maneiras de responder a segunda questão (verdadeira ou falsa). Para cada uma dessas 2 x 2 = 4 maneiras de responder as duas primeiras questões há 2 maneiras distintas de responder a terceira questão (verdadeira ou falsa), tendo assim 4 x 2 = 8 maneiras distintas de responder as três primeiras questões. E assim sucessivamente para as 10 questões, temos 2^{10} = 1024 maneiras distintas de responder a prova.

Sendo assim, se 1025 alunos fizerem a prova poderemos garantir que pelo menos dois deles responderam do mesmo jeito, pois por mais que exista a possibilidade de 1024 deles responderem de maneiras distintas, se um aluno a mais resolver a prova poderemos garantir que ele responderá do mesmo jeito que um dos 1024 alunos anteriores.

Com esses exemplos, podemos entender o Princípio das Gavetas de Dirichlet: Se $n + 1$ objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.

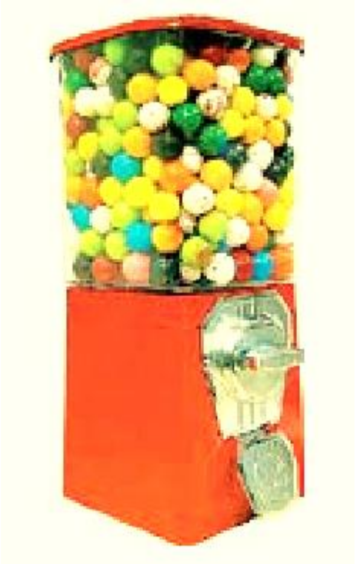
2.9.2 Atividade

Dividir os alunos em grupos de em média 4 integrantes para elaborar uma questão que envolva o Princípio das Gavetas. Posteriormente, analisar se as questões estão dentro do esperado e entregar cada uma dessas questões para que outro grupo resolva e apresente para a turma. Verificar se a resolução do grupo que recebeu a questão condiz com a expectativa do grupo que criou a questão e promover uma discussão a respeito.

2.9.3 Exercícios Propostos

1. (UERJ 2011) Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores diferentes, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda na máquina, uma bola é expelida ao acaso.

   Observe a ilustração:



   Para garantir a retirada de 4 bolas de uma mesma cor, o menor número de moedas a serem inseridas na máquina corresponde a:

   (A) 5 (B) 13 (C) 31 (D) 40

Note que pode ser que retiremos 4 bolas e que sejam todas de mesma cor. Porém, para **garantir** que tenhamos 4 de mesma cor, devemos pensar na pior hipótese que seria retirar primeiramente 10 bolas e serem todas de cores distintas, depois mais 10 bolas e serem todas de cores distintas novamente (totalizando duas de cada cor) e depois mais delas bolas de cores distintas (totalizando 3 bolas de cada cor, a próxima que retirarmos, independente da cor que possua, sera da mesma cor de um dos 10 grupos de 3 bolas de mesma cor que já temos, sendo assim, teríamos as 4 de mesma cor.

Assim, precisaremos retirar 3 x 10 + 1 = 31 bolas para **garantir** que 4 sejam de mesma cor.

Alternativa C

2. Quantos amigos devem fazer parte de um grupo para que pelo menos dois deles façam aniversário no mesmo mês?

Treze. Pois por mais que doze pessoas possam fazer aniversário em meses distintos, a décima terceira necessariamente fará aniversário no mesmo mês que uma das outras.

2.9.4 Exercícios de fixação do conteúdo

1. Carolina faz coleção de havaianas. Ela possui em uma sapateira 5 pares de havaianas brancas, 4 pares de havaianas douradas, 3 pares de havaianas rosas, 4 pares de havaianas azuis e 10 pares de havaianas estampadas. Todas elas são indistinguíveis ao toque e as havaianas de mesma cor são idênticas. Quantas havaianas ela precisa retirar da sapateira, sem olhar, para garantir que pelo menos duas das havaianas retiradas são brancas, sendo pelo menos uma própria para o pé esquerdo e pelo menos uma própria para o pé direito?

2. Uma urna possui 20 bolas com mesmo peso e formato, sendo 10 delas douradas, 5 prateadas e 5 pretas. Quantas bolas preciso retirar da urna para garantir
   a) que pelo menos duas delas serão pretas;
   b) que pelo menos duas delas serão de mesma cor;
   c) que pelo menos duas delas serão de cores distintas.

3. Leonar e Nathália foram a um restaurante asiático e pediram uma porção de 9 harumakis (3 de camarão, 3 de legumes e 3 de salmão). Só é possível descobrir o sabor ao comer cada um deles. Quantos harumakis Nathália deve comer para garantir que comerá pelo menos um de camarão?

4. Uma aluna entediada resolveu listar todos os anagramas que conseguisse da palavra DIRICHLET. Quantos ela deve escrever para garantir que pelo menos dois desses anagramas sejam iguais?

5. Uma loja vende empadas de frango, frango com queijo cremoso, camarão, camarão com queijo cremoso, palmito, queijo, carne seca e carne seca com queijo cremoso.

a) De quantas maneiras distintas posso escolher 3 empadas de sabores diferentes nessa loja?
b) De quantas maneiras diferentes posso escolher 3 empadas nessa loja?
c) Comprei 4 empadas de cada para levar para casa e minha mãe pediu para que eu reservasse pelo menos uma de palmito para ela. Quantas eu precisarei reservar para garantir que pelo menos uma seja de palmito? Considere as empadas indistinguíveis visualmente.

2.10 **Aula 10**

Objetivo: Sanar dúvidas que tenham surgido, referentes aos “exercícios de fixação” citados nas aulas anteriores.

3 ANÁLISE DOS DADOS OBTIDOS

3.1 Execução das aulas

A sequência didática, até a aula 06, foi aplicada na turma 1205 do Colégio Pedro II – Humaitá II, em 2016.

Na primeira aula (seção 2.1), senti que os alunos estavam curiosos e levemente entusiasmados com os problemas apresentados. Acredito que tenha ocorrido devido a proximidade dos assuntos dos problemas apresentados com o dia a dia deles. Eles sentiram facilidade em assimilar o Princípio Fundamental da Contagem nos problema iniciais e resolveram tranquilamente sozinhos o item 5 da seção 2.1.1. Porém, sentiram dificuldade para estender o raciocínio afim de resolver o item 6 da mesma. Posteriormente, quando expliquei esse item, eles compreenderam de imediato. Os itens seguintes transcorreram sem muitas dúvidas.

Na segunda aula (seção 2.2), ao serem questionados quanto aos desafios propostos (seção 2.1.2), os alunos disseram ter feito e achado fácil. Porém, por mais que eles tenham de fato acertado o primeiro dos itens, ninguém acertou o segundo item. Eles seguiram o raciocínio similar ao item 10 da seção 2.1.1, mas não perceberam que caso o último algarismo seja o zero, o primeiro tem 9 opções (qualquer um menos o zero) e caso o último algarismo seja outro número par, o primeiro tem 8 opções (qualquer um menos o zero e o algarismo par já utilizado). Sendo assim, parte da turma obteve 2016 como resposta e a outra parte obteve 1792 como resposta. Depois de questionados em relação ao "defeito" das suas resoluções, eles perceberam o porquê dos resultados distintos e eu os orientei a dividir em casos quando o problema não puder ser resolvido diretamente pelo PFC. Os alunos resolveram com facilidade a atividade em dupla proposta.

Nos exercícios propostos da seção 2.2.2, os alunos sentiram dificuldade em identificar sozinhos a necessidade de dividir em casos os itens 2, 3 e 5. O item 6 foi questionado pela maioria porque eles tentaram fazer de forma construtiva e se perderam no meio. Após a minha exposição da resolução destrutiva para esse item, eles entenderam com facilidade. Alguns alunos lembravam da fórmula aprendida no Ensino Fundamental para encontrar a quantidade de divisores naturais de um número natural e ficaram entusiasmados com a resolução da mesma pelo PFC no item 7. Os itens 1, 4 e 8 foram resolvidos sem dificuldades.

A terceira aula (seção 2.3) foi iniciada retomando os desafios propostos. Alguns alunos não compreenderam bem o que queria dizer um "anagrama" através do texto, mas exceto esses, todos os que tentaram resolveram os desafios sem maiores problemas. O conceito de permutações simples foi inserido sem grandes dificuldades. Quanto aos exercícios propostos (seção 2.3.3), eles sentiram dificuldade em resolver sozinhos o item 1e, e de diferenciar os itens 1f e 1g. Eles sentiram muita dificuldade em resolver o item 2.

Na quarta aula (seção 2.4), ao serem questionados quanto ao desafio da aula anterior (seção 2.3.5), muitos alunos haviam simplesmente feito 4! no item 1 e 5! no item 2. Depois de listar os "24 anagramas" da palavra MALA, eles notaram que haviam contado duas vezes cada anagrama que realmente existia e concluíram que deveriam dividir 4! por dois. Porém, quando reapresentado o item 2, eles imediatamente quiseram dividir 5! por 3. Quando apresentei o mesmo anagrama escrito de 6 maneiras diferentes (permutando as letras iguais entre si), eles entenderam que deveriam dividir pela permutação de 3. Mesmo entendendo o conceito e fazendo o item 1a do exercício proposto (2.4.2) com facilidade, eles sentiram muita dificuldade nos outros itens do exercício proposto.

A aula 5 (seção 2.5) começou com muito interesse dos alunos pela resolução do desafio. Esse interesse foi devido a principalmente dois fatores:

1. Eles estão muito interessados no Vestibular da UERJ.
2. Nenhum deles conseguia perceber ligação do tópico que estava sendo estudado (permutações com repetições) e a questão apresentada.

Alguns alunos haviam encontrado a resposta correta por tentativa. Usando isso como arma, questionei a 3 alunos diferentes um dos caminhos possíveis para se deslocar de A para B e os listei como indicado na resolução do mesmo na seção 2.5.1. Os alunos acharam muito interessante formar esse tipo de bijeção, mas acharam difícil a percepção da mesma. Eu os orientei a buscar exemplos quando não souberem de imediato como atacar o problema.

A atividade da seção 2.5.2 foi muito interessante. A maior parte dos grupos teve dificuldade para organizar o raciocínio, mas com um pouco de orientação minha (ou muita, dependendo do grupo), todos conseguiram resolvê-la. Os alunos conseguiram resolver o exercício proposto na seção 2.5.3 sem maiores dificuldades.

Na sexta aula (seção 2.6), todos os alunos que fizeram o desafio (2.5.5) pensaram que a resposta correta seria 5!. Mostrei a eles a "rotatividade" da roda e eles perceberam o erro no resultado obtido. O conceito de permutações circulares foi ensinado sem maiores dificuldades. Eles resolveram com facilidade o item 1 da seção 2.6.2, mas sentiram muita dificuldade no item 2.

Posteriormente, as aulas foram interrompidas por uma greve. Na volta as aulas recebemos ordens da direção para revisar o conteúdo já ensinado e não começar nenhum tópico novo. Trabalhei com os exercícios de fixação das seções 2.2.3, 2.3.4, 2.5.4 e 2.6.3.

As seções 2.7, 2.8 e 2.9 explicitam como eu gostaria de prosseguir com o estudo do tema.

3.2 **Avaliações**

As avaliações do trimestre foram: um teste em dupla e uma prova. Como as avaliações são padronizadas em todas as turmas de segundo ano do Ensino Médio do Humaitá II em um mesmo turno e as outras turmas não chegaram em aplicações de permutações com repetições e permutações circulares, cobramos nas avaliações apenas os tópicos iniciais. Dentro delas, as questões do referido tema foram explicitadas a seguir, sendo as três primeiras contidas em testes e as duas últimas na prova:

1. (ENEM 2012) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens em uma casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.
   Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não deve ser sorteado mais de uma vez.

Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

(A) 10 alunos a mais do que as possíveis respostas distintas.

(B) 20 alunos a mais do que as possíveis respostas distintas.

(C) 119 alunos a mais do que as possíveis respostas distintas.

(D) 260 alunos a mais do que as possíveis respostas distintas.

(E) 270 alunos a mais do que as possíveis respostas distintas.

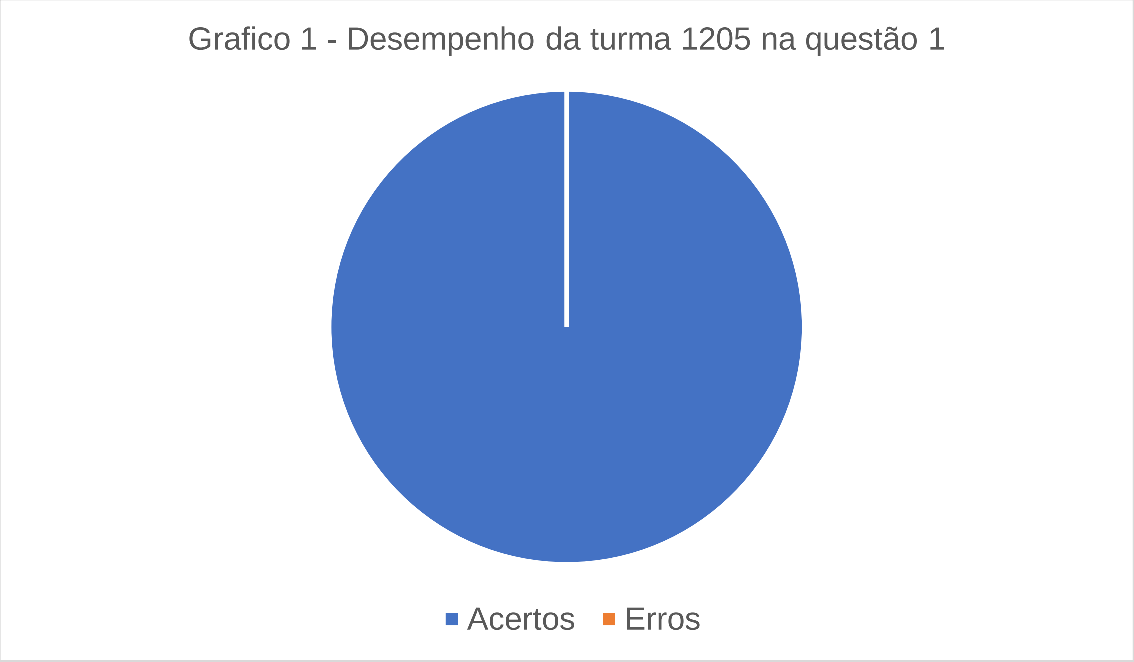
Resolução esperada:

Cada um dos 5 objetos pode ter sido escondido por cada um dos 6 personagens. Temos, assim, 5 x 6 = 30 maneiras distintas de escolher um objeto que será escondido por um personagem. Pra cada uma dessas 30 maneiras, podemos esconder o objeto em cada um dos 9 cômodos disponíveis, tendo, assim, no total, 30 x 9 = 270 respostas possíveis distintas.

Como todos os alunos darão respostas distintas e temos 280 alunos presentes, a alternativa correta é a letra A.

Desempenho dos meus alunos:

Todos acertaram.



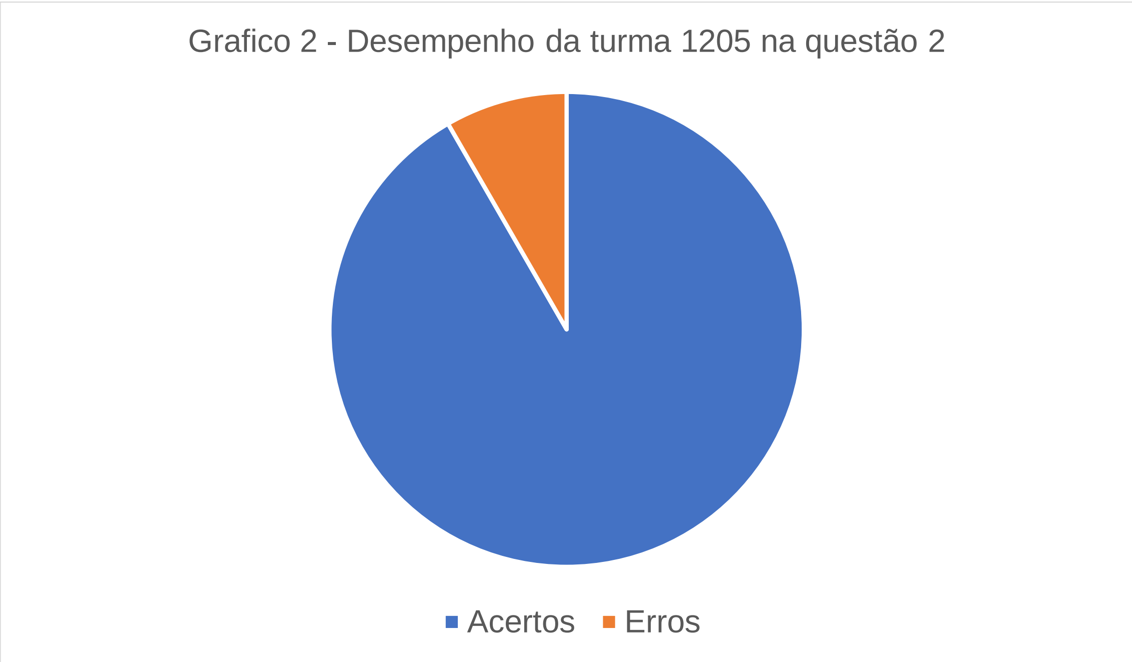
2. Duas cidades A e B são interligadas por 3 estradas distintas e as cidades B e C são interligadas por 4 estradas distintas. De quantas maneiras distintas podemos ir de A até C passando por B?

Resolução esperada:

Pra cada uma das 3 maneiras distintas que temos de ir de A para B, teremos 4 opções para ir de B até C. Sendo assim, temos 3 x 4 = 12 maneiras distintas de ir de A para C, passando por B.

Desempenho dos meus alunos:

Das vinte e duas duplas presentes, vinte e uma acertaram. Uma dupla errou. Esse erro foi cometido pelos alunos terem pensado que a segunda escolha dependia da primeira então precisaria “retirar” uma das opções da segunda escolha, fazendo então 3 x 3 = 9.



3. Quantos números pares de 4 algarismos distintos podem ser escritos com os algarismos {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}?

Resolução esperada:

Como o zero participa de duas restrições ao mesmo tempo (uma das opções de algarismo par que pode ser utilizada no último dígito e não pode ser o algarismo do milhar), precisaremos separar em dois casos:

1º caso: O último algarismo é o zero (1 opção). Assim, o primeiro tem 6 opções (qualquer algarismo do conjunto menos o zero), o segundo tem 5 opções (qualquer algarismo do conjunto menos os dois já utilizados) e o terceiro tem 4 opções (qualquer algarismo do conjunto menos os três já utilizados). Temos, assim: 6 x 5 x 4 x 1 = 120 números terminados em zero.

2º caso: O último algarismo é par mas não é o zero (3 opções: 2, 4 ou 6). Assim, o primeiro tem 5 opções (qualquer algarismo do conjunto menos o zero e o já utilizado no último algarismo), o segundo tem 5 opções (qualquer algarismo do conjunto menos os dois já utilizados) e o terceiro tem 4 opções (qualquer algarismo do conjunto menos os três já utilizados). Temos, assim: 5 x 5 x 4 x 3 = 300 números terminados em 2, 4 ou 6.

Total: 120 + 300 = 420 números

Desempenho dos meus alunos:

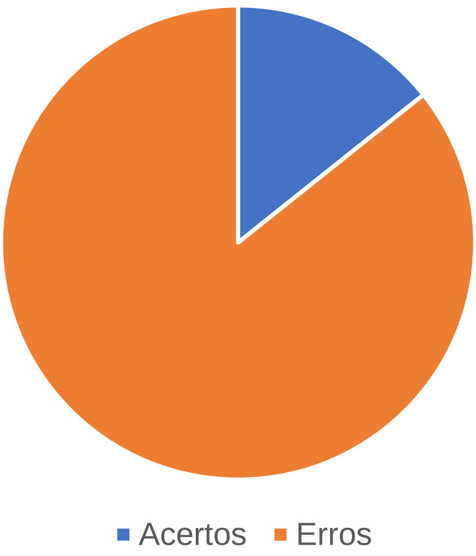
Das quatorze duplas presentes, apenas duas acertaram. Entre as duplas que erraram:

- Duas duplas erraram o “2º caso”. Fizeram 6x5x4x1 + 5x4x3x3 = 300. O erro foi desconsiderar que os algarismos do meio poderiam ser zero.
- Uma dupla errou o “1º caso”. Fizeram 6x6x5x1 + 5x5x4x3 = 480. O erro foi que eles não se atentaram para o fato de que o segundo algarismo deveria ser distinto do primeiro e do último.
- Seis duplas erraram por não dividir em dois casos. Quatro delas fizeram 5x5x4x4 = 400. O erro foi não perceberem que o primeiro algarismo só teria 5 opções se tivéssemos usado 2, 4 ou 6 para o último algarismo. Caso o último algarismo fosse o zero, o primeiro teria 6 opções (poderia ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6). Por isso, seria necessário separar em dois casos. Já as outras duas fizeram 6x5x4x4 = 400. O erro foi não perceberem que

o primeiro algarismo só teria 6 opções se tivéssemos usado zero para o último algarismo. Caso o último algarismo fosse o 2, 4 ou 6, o primeiro teria 5 opções (não poderia ser zero nem o algarismo já usado no último dígito). Por isso, seria necessário separar em dois casos.

- Uma dupla errou por ter feito 4! = 24. Não compreendi o raciocínio empregado. Questionei a dupla posteriormente e os alunos alegaram não lembrar do raciocínio utilizado.
- Duas duplas erraram por não dividir em dois casos e desconsiderar que o segundo algarismo deveria ser distinto do primeiro e do último. Fizeram 6x6x5x4 = 720.

Grafico 3 - Desempenho da turma 1205 na questão 3



4. Na ilustração a seguir, as 52 cartas de um baralho estão agrupadas em linhas com 13 cartas de mesmo naipe (ouros, espadas, copas e paus) e colunas com 4 cartas de mesmo valor (Ás, Rei, Dama, Valete, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2).

   De quantas maneiras distintas posso retirar duas cartas desse baralho sendo a primeira delas um Ás e a segunda uma carta de copas?

Resolução esperada:

A primeira carta a ser retirada tem 4 opções (qualquer um dos 4 Áses que existem no baralho). Já a segunda carta deve ser de copas, sendo assim teremos 13 opções. Porém, como são duas cartas diferentes, o Ás retirado pode ter sido o de copas, o que nos faria ter uma opção a menos para a segunda carta. Como a quantidade de opções para a retidada da segunda carta depende da primeira, separaremos em dois casos:

1º caso: Retirar o Ás de copas (1 opção) e posteriormente outra carta de copas (12 opções: qualquer uma menos o Ás que já foi retirado). Temos, assim, 1 x 12 = 12 maneiras de tirar o ás de copas e depois outra carta de copas.

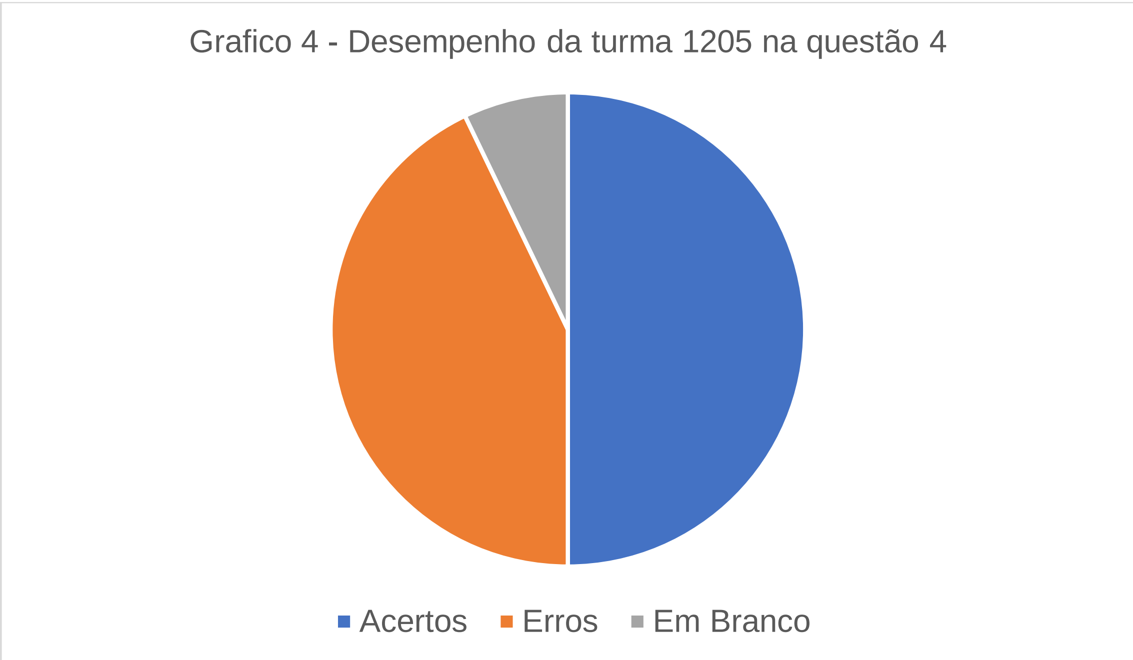
2º caso: Retirar um Ás que não seja de copas (3 opções: paus, espadas ou ouros) e posteriormente uma carta de copas (13 opções já que nenhuma foi retirada. Temos, assim, 3 x 13 = 39 maneiras de retirar um ás que não seja de copas e uma carta de copas.

Temos então, no total 12 + 39 = 51 maneiras de retirar um ás e uma carta de copas sucessivamente.

Desempenho dos meus alunos:

Dos vinte e oito alunos que realizaram a prova, quatorze acertaram. Dois alunos deixaram em branco. Entre os alunos que erraram:

- Cinco alunos fizeram 4 x 13 pois não perceberam que se a primeira carta fosse o Ás de copas teria uma possibilidade a menos para a segunda carta.
- Um aluno fez 4 x 12 pois excluiu o Ás de copas das possibilidades da segunda carta.
- Seis alunos encontraram respostas variadas as quais não fui capaz de identificar o raciocínio utilizado e quando questionados alegaram não lembrar do raciocínio utilizado ou ter escrito "qualquer coisa".



5. Dos anagramas da palavra CARNAVAL, determine:

   a) Quantos possuem as letras C e R juntas?

   b) Quantos começam por consoante e terminam por vogal?

Resolução esperada:

a) Para que o anagrama possua as letras C e R juntas, consideraremos as letras C e R como um item só que deverá ser permutado com as outras letras da palavra (A, N, A, V, A e L). Sendo assim, basta fazer a permutação de 7 itens (7!) e dividir o resultado obtido por 3! para desconsiderar como distintas as permutações das três letras A entre si. Porém, como as letras C e R entre si podem ser escritas de 2! maneiras possíveis (CR ou RC), para cada anagrama obtido anteriormente teremos na realidade dois.

Teremos, assim, 2! x 7!/3! = 1680 anagramas

b) Começaremos satisfazendo as condições pedidas: A primeira letra deverá ser uma consoante (5 opções – C, R, N, V ou L) e a última deverá ser uma vogal (1 opção – A). As outras 6 letras podem permutar livremente no meio da palavra de 6! maneiras. Porém, precisamos dividir o resultado anteriormente obtido por 2! para desconsiderar como distintas as permutações das duas letras A entre si.

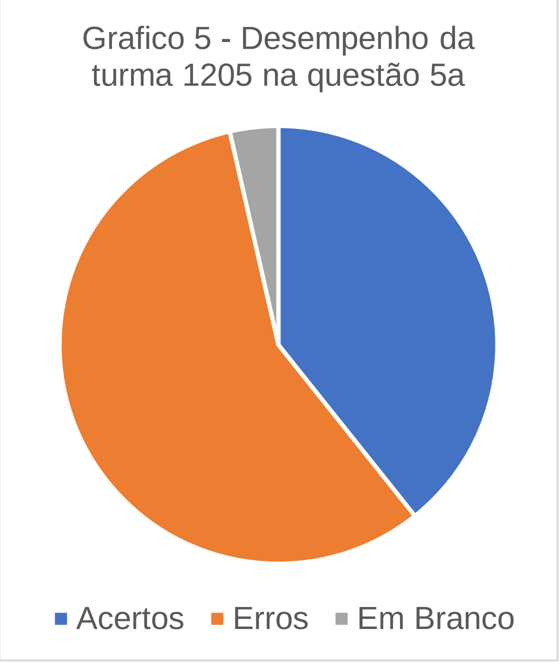
Teremos, assim, 5 x (6!/2!) x 1 = 1800 anagramas.

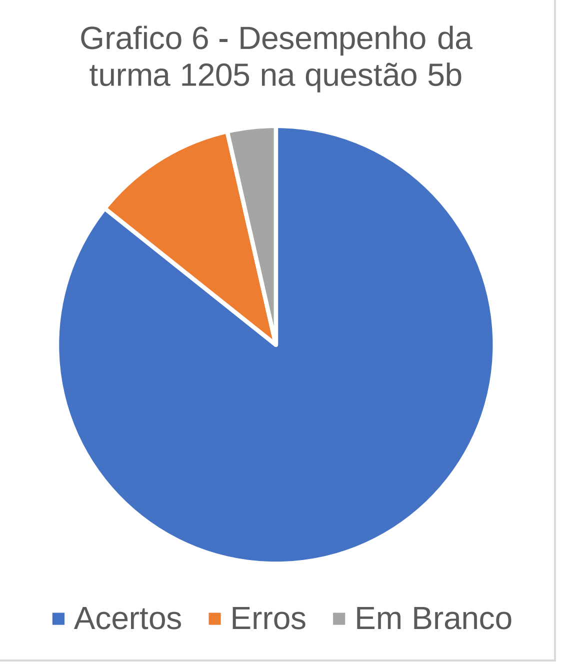
Desempenho dos meus alunos:

a) Dos 28 alunos que fizeram a prova, 11 acertaram esse item. Um aluno deixou em branco. Entre os que erraram:
   - Sete fizeram 7!/3! e erraram por não ter permutado as letras C e R entre si.
   - Dois fizeram apenas 7!, o que significa que além de não ter permutado as letras C e R entre si, também esqueceram de desconsiderar como distintas as permutações das 3 letras A entre si.
   - Cinco erraram por não ter desconsiderado que o item das letras C e R juntas permuta com as letras restantes. Fizeram 2! x 6!/3!.
   - Dois alunos encontraram respostas variadas as quais não fui capaz de identificar o raciocínio utilizado e quando questionados alegaram não saber mais o que os levou a fazer aquela resolução.

b) Dos 28 alunos que fizeram a prova, 24 acertaram esse item. Um aluno não o fez. Entre os alunos que erraram:

- Dois não desconsideraram distintas as permutações das duas letras A entre si. Eles fizeram 5 x 6! x 1.
- Um não percebeu que a letra A na qual termina a palavra não havia permutado com as outras duas e dividiu o resultado por 3! ao invés de dividir por 2!, ou seja, fez 5 x 6!/3! x 1.





CONCLUSÃO

Não faltam motivos para fomentar nos alunos e professores encantamento e curiosidade voltados para a Análise Combinatória. Desde a procedência histórica até jogos de azar, há uma infinidade de maneiras de abordar o tema de modo a despertar o interesse e a atenção dos estudantes. Tudo isso, somado a uma visão intuitiva e lógica dos conceitos matemáticos envolvidos, proporciona aos alunos grande chance de real aprendizado.

Como todos nós só somos capazes de gostar de assuntos que realmente entendemos, é importante que o professor de Matemática Básica esteja sempre em busca de aperfeiçoar seus conhecimentos e, além disso, aprender novas maneiras de ensinar matemática que atinjam diferentes tipos de discentes.

Infelizmente, não existe método suficientemente eficaz a ponto de ser o ideal para todos. Ao analisar as soluções apresentadas pelos meus alunos na sala de aula, nos testes e provas, pude perceber que muitas vezes o meu objetivo não foi alcançado. Porém, será que podemos quantificar o aprendizado por meio de testes e provas? Será que o erro em uma questão significa o não entendimento do assunto? Todos os erros são iguais?

Contudo, acredito que este trabalho seja uma contribuição importante para melhorar a compreensão de alunos e professores em relação ao referido tema. Cada sorriso entusiasmado de um aluno ao entender e gostar de um problema proposto em Análise Combinatória me faz acreditar que estou no caminho certo.

REFERÊNCIAS:

MORGADO, A. C. de Oliveira; CARVALHO, P. C. Pinto & FERNANDEZ, P. Analise Combinatória e Probabilidade. Sociedade Brasileira de Matemática.

MORGADO, A. C. de Oliveira & CARVALHO, P. C. Pinto. Matemática Discreta. Sociedade Brasileira de Matemática.

LIMA, E. A Matemática do Ensino Médio – Volume 2. Sociedade Brasileira de Matemática.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. & ALMEIDA, N. Matemática – Ciência e Aplicações. Volume 2. 5ª Edição. ATUAL EDITORA

HAZZAN, S. Fundamentos da Matemática Elementar – Volume 5. ATUAL EDITORA

NETO, A. C. M. Tópicos de Matemática Elementar – Volume 4.Sociedade Brasileira de Matemática.

EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentes.

APÊNDICE A – Gabarito da seção 2.2.3

1) 15
2) 336
3) 20
4) 18
5) 180
6) 16
7) 63
8) 300
9) 900
10) 17
11) $2^{10} = 1024$
12) AA, ABB, ABAB, ABAA, BB, BAA, BABA e BABB
13) 36
14) 32
15) 6! = 720
16) a) 60 b) 24 c) 36 d) 12 e) 12 f) 6
17) a) 48 b) 21 c) 27 d) 9 e) 6 f) 6
18) (a+1).(b+1).(c+1).(d+1).(e+1)
19) a.(b+1).(c+1).(d+1).(e+1)
20) 2
21) $2^{20} = 1048576$
22) B
23) E
24) A
25) D
26) A
27) D
28) C
29) C
30) C
31) C

APÊNDICE B – Gabarito da seção 2.3.4

1) a) 1/x b) x c) 1/(x+3)
2) 3
3) a) 720 b) 120 c) 480 d) 288 e) 480 f) 24 g) 144
4) 2.11! = 79833600
5) E
6) 72
7) 24
8) 6
9) 120
10) 48.11! = 1916006400 e 2
11) a) 10! = 3628800 b) 2.9! = 725760 c) 8.9! = 2903040 d) 14.8! = 564480
12) B

APÊNDICE C – Gabarito da seção 2.5.4

1) 2520
2) 72
3) 36
4) 2520
5) 1680
6) 6
7) 84
8) 70
9) 150
10) a) 286 b) 84 c) 10
11) 53130

APÊNDICE D – Gabarito da seção 2.6.3

1) a) 5040 b) 1440 c) 3600
2) 6
3) 5040
4) 18! = 6402373705728000
5) E
6) $40.(10^5 - 1) = 3999960$
7) $(5!)^2.2^5 = 460800$
8) 4060

APÊNDICE E – Gabarito da seção 2.8.3

1) 336
2) 56
3) 14400
4) 1344
5) a) 8855 b) 2940 c) 7945
6) 110
7) 720
8) 10
9) 9
10) 380
11) 66
12) 70
13) a) 53130 b) 7980 c) 8841 d) 20349
14) a) 20 b) 8
15) a) 1365 b) 210 c) 450 d) 1790 e) 7500 f) 27405 g) 63985
16) a) 120 b) 210 c) 252 d) 210 e) 120 f) 45 g) 10 h) 1 i) 968
17) 20
18) $n.(n-3)/2$
19) 10
20) $55.11!/6 = 365904000$
21) 2800
22) 12144
23) $12!/(4!)^3 = 34650$
24) $12!/[(4!)^3.3!] = 5775$
25) B
26) C
27) C
28) B
29) 2520
30) 5040
31) 66780

APÊNDICE F – Gabarito da seção 2.9.4

1) 48
2) a) 17 b) 4 c) 11
3) 7
4) 9!/2! + 1 = 181441
5) a) 56 b) 120 c) 29