UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

JEFERSON SANTOS DA SILVA

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS UTILIZADAS NOS MÉTODOS DE DECISÃO DE INVESTIMENTOS BASEADOS NO VPL E TIR

CURITIBA

2018

JEFERSON SANTOS DA SILVA

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS UTILIZADAS NOS MÉTODOS DE DECISÃO DE INVESTIMENTOS BASEADOS NO VPL E TIR

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.
Orientador: Prof. Dr. Ronie Peterson Dario

CURITIBA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S586e Silva, Jeferson Santos da
2018 Equações algébricas e progressões geométricas utilizadas nos métodos de decisão de investimentos baseados no VPL e TIR / Jeferson Santos da Silva.-- 2018.
60 f.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.
Texto em português com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2018
Bibliografia: f. 59-60.

1. Matemática financeira - Estudo e ensino. 2. Equações. 3. Álgebra. 4. Séries geométricas. 5. Investimentos - Análise. 6. Valor presente líquido. 7. Retorno sobre patrimônio líquido. 8. Processo decisório. 9. Matemática - Dissertações. I. Dario, Ronie Peterson, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 22 – 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba – UTFPR
Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 42

A Dissertação de Mestrado intitulada “Equações algébricas e progressões geométricas utilizadas nos métodos de decisão de investimentos baseados no VPL e TIR”, defendida em sessão pública pelo(a) candidato(a) Jeferson Santos da Silva, no dia 15 de dezembro de 2017, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). Ronie Peterson Dario - Presidente – UTFPR
Prof(a). Dr(a). João Luis Gonçalves – UTFPR
Prof(a). Dr(a). Airton Kist - UEPG

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 15 de dezembro de 2017.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

AGRADECIMENTOS

A Deus autor e consumador da minha fé.

À minha esposa Maiara por me entender e respeitar a minha ausência para os estudos, a minha pequena filha Lorena que fez os meus dias mais felizes quando envolvido em tanto trabalho e estudo, a minha mãe que muito me incentivou e a minha colega Franciele que muito me ajudou.

Ao Prof. Ronie Peterson Dario pelo valorozo tempo de orientação e ensino.

Aos membros da banca examinadora pelas contribuições que ajudaram a melhorar a qualidade e a redação final do texto.

Aos amigos conquistados no decorrer do curso.

RESUMO

SILVA, Jeferson Santos da. **Equações algébricas e progressões geométricas utilizadas nos métodos de decisão de investimentos baseados no VPL e TIR**. 60 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018

Muitos problemas financeiros recaem sobre a necessidade de tomada de decisão entre duas ou mais alternativas de investimentos e/ou empréstimos. Neste ínterim, os métodos determinísticos de análise de investimentos constituem uma ferramenta bastante útil e possuem muitas aplicações práticas. Neste trabalho apresentamos três métodos de tomadas de decisão: o método do Valor Presente Líquido (VPL), o método do Valor Anual Uniforme Equivalente (VAUE) e o método da Taxa Interna de Retorno (TIR). Do ponto de vista matemático, os dois primeiros são bastante simplistas, já o terceiro envolve um problema mais interessante, pois implica em uma discussão sobre a existência e unicidade das taxas envolvidas, que por sua vez traduz-se em estudar raízes de equações algébricas. A matemática envolvida nestes métodos é um tema muitas vezes neglicenciado nos escritos em português nessa área. Nosso trabalho visa sanar ao menos parcialmente este problema e também resignificar a própria definição da TIR. Utilizamos a Regra de Sinais de Descartes para demonstrar a existência e unicidade da Taxa Interna de Retorno de um projeto financeiro com fluxo de caixa convencional. Ao final apresentamos um método de tomada de decisão via TIR mesmo com TIRs múltiplas. Fazemos também algumas aplicações práticas e elementares, que podem ser úteis no ensino do tema.

Palavras-chave: valor presente líquido, taxa interna de retorno, TIRs múltiplas.

ABSTRACT

SILVA, Jeferson Santos da. **Algebraic equations and geometric sequences in investiment decisions methods based on NPV and IRR**. 60 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018

We present three classical methods of financial decision making: the Net Present Value (NPV), the Equivalent Annual Equivalent Value and the Internal Rate of Return (IRR). The first two are rather simplistic. The third one involves an interesting mathematical problem, since it implies a discussion about the existence and uniqueness of the rates involved. This is a theme often neglected in the writings in Portuguese in this area. Our work aims, at least partially, solving this problem and also refining the very definition of this rate. We used the Descartes Signal Rule to demonstrate the existence and uniqueness of the Internal Rate of Return of a conventional cash flow project. We also present a method of decision making via IRR even with multiple IRRs. Finally, we explored some practical and elementary applications that can be useful in teaching the subject.

Keywords: net present value, internal rate of return, multiple IRRs.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Com frequência nos deparamos com a necessidade de tomar uma decisão entre projetos financeiros. Nesse ínterim, estão os financiamentos habitacionais, os investimentos, a aquisição de bens diversos, bem como os empréstimos. Para um investidor há várias opções de aplicação, como a Caderneta de Poupança, o CDB (Certificado de Depósito Bancário), os títulos públicos (Tesouro Direto), etc. Cada opção tem sua taxa de juros definida em função do prazo de aplicação e dos riscos envolvidos. Analogamente, os tomadores de empréstimos tem várias opções de financiamento cujas taxas variam em função dos prazos de pagamento e das garantias oferecidas. Quanto maior o número de opções, mais delicadas são as análises.

Para se tomar decisões entre projetos financeiros, entre outras opções, pode-se fazer o uso de técnicas que analisem o dinheiro ao longo do tempo. Essas técnicas são chamadas de métodos determinísticos de análise de investimentos.

Entendemos que uma forma de aprimorar a utilização das técnicas de análise de investimentos é estruturar adequadamente a matemática envolvida nos métodos. Na maior parte das vezes, basta entender e aplicar a capitalização composta e inversamente, utilizar o conceito de deflação. Contudo, em diversas situações práticas, mostra-se necessário o estudo de alguns conceitos mais elaborados do que os tradicionalmente expostos na literatura brasileira de matemática/administração financeira.

Um dos conceitos preferidos pelos analistas financeiros é o de Taxa Interna de Retorno (TIR) de um investimento. Costuma-se defini-la como a taxa de desconto que iguala o valor presente dos fluxos de caixa futuros ao valor do investimento inicial.

Ocorre que uma TIR é uma raiz de um polinômio com grau tão elevado quanto o número de entradas ou saídas de caixa após o investimento inicial. Desta forma, somente em situações muito específicas haverá uma única TIR. Uma delas é no caso de um fluxo de caixa aqui denominado de convencional (uma saída de caixa na data zero com apenas retornos a partir da data um). Este fluxo ocorre, por exemplo, em um investimento em um título público federal com ou sem pagamento semestral de cupom de juros.

No caso de um fluxo de caixa convencional utilizamos a Regra de Sinais de Descartes para mostrar que a Taxa Interna de Retorno é única. Essencialmente, este é o único caso tratado nas referências brasileiras, inclusive em materiais oficiais, e em geral sem se preocupar com a matemática envolvida (FILHO NELSON; HARTMUT KOPITKE, 2000) (PUCCINI, 2011).

Existem exemplos de ordem prática em que uma TIR sequer existirá como número real. Na literatura brasileira esse caso sequer é abordado. Contudo, em (HARTMAN J. C.; SCHAFRICK, 2004), é exposto um método para análise de um projeto de investimento deste tipo.

A ocorrência de múltiplas TIRs começou a ser estudada a partir do clássico exemplo (LORIE J.H.; SAVGE, 1995) sobre prospecção de petróleo também citado em (ZENTGRAF, 2007). Tornou-se tema de pesquisa matemática/econômica. Veja, por exemplo, (HARTMAN J. C.; SCHAFRICK, 2004) e (ZHANG, 2005), onde são propostos métodos mais avançados.

No primeiro capítulo deste trabalho abordamos as aplicações financeiras mais populares instigando o leitor a questionar a segurança garantida pelo Fundo Garantidor de Créditos (FGC). Ao leitor que já estiver familiarizado com os conceitos destas aplicações, a leitura do primeiro capítulo é opcional para o entendimento geral do trabalho.

No capítulo seguinte abordamos os principais métodos determinísticos para análise de projetos financeiros: o método do Valor Presente Líquido (VPL), o método do Valor Anual Uniforme Equivalente (VAUE) e o método da Taxa Interna de Retorno (TIR). Neste capítulo demonstramos os resultados principais. Rediscutimos a definição da TIR e apresentamos a demonstração da Regra de Sinais de Descartes. Aplicamos este resultado na verificação da existência e unicidade da TIR de um fluxo de caixa convencional.

O terceiro capítulo traz algumas aplicações sobre cada um dos três métodos mostrando onde cada um deles tem melhor aplicação. Também abordamos as tomadas de decisão via TIR com destaque para a Taxa de Fisher, taxa esta que torna equivalentes duas ou mais aplicações pelo método TIR.

Na última seção do terceiro capítulo expomos o que seria a continuidade natural do assunto, o estudo de projetos financeiros com múltiplas taxas de retorno. Atualmente, este é um importante tema de pesquisa na matemática/administração financeira. Abordamos brevemente um dos métodos para se tomar a decisão via TIR mesmo com TIRs múltiplas (HARTMAN J. C.; SCHAFRICK, 2004).

No quarto capítulo mostramos algumas aplicações dos métodos de análise de investimentos na educação básica.

Em todas as seções apresentamos exemplos práticos que evidenciam a utilidade dos assuntos abordados.

Faremos agora uma rápida introdução de alguns conceitos de matemática financeira que utilizaremos neste trabalho.

Quase na sua totalidade as operações financeiras são realizadas através do regime composto de capitalização de juros - juros compostos, no qual os juros que se formam ao final de cada período k, pela aplicação da taxa correspondente i_k, participam da geração de juros do período seguinte. Assim, ao final de um tempo dado t, um capital C_0 transforma-se em um montante $M(t)$ dado por

$$M(t) = C_0 \prod_{k=1}^{t} (1 + i_k). \tag{1}$$

Para o caso prático utilizado neste trabalho teremos $t \in \mathbb{N}$ e utiliza-se indução sobre t

para demonstrar (1). Já no regime de capitalização contínua, t é um número real qualquer e a correspondente fórmula para $M(t)$ pode ser vista em (MORGADO A.C. ; CARVALHO, 2013).

O caso $M(t) = 0$ corresponde à existência de um k_0 tal que $i_{k_0} = -1$. Apesar de plenamente possível, é um caso um tanto extremista, e por isso vamos sempre assumir as taxas maiores que -1.

Um caso particular bastante frequente ocorre quando a taxa de juros acordada na operação financeira é constante e igual a i. Decorre da última equação que

$$M(t) = C_0(1+i)^t. \tag{2}$$

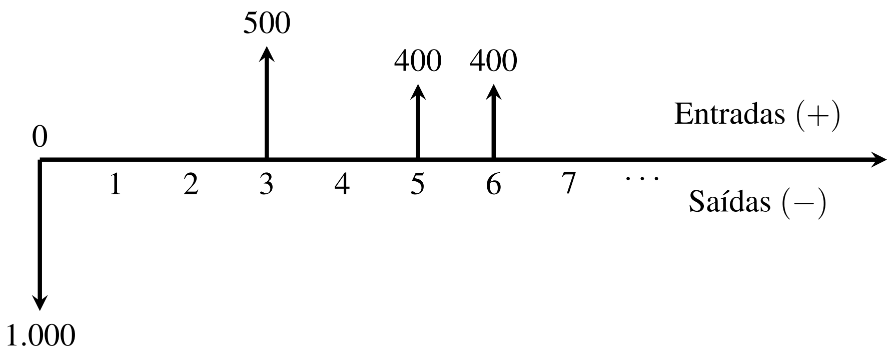
Neste caso, o valor presente do montante $M(t)$ à taxa i é dado por

$$V(t) = \frac{M(t)}{(1+i)^t}.$$

Concluiremos esta parte introdutória expondo uma ferramenta elementar e útil para estudar um determinado projeto financeiro, o fluxo de caixa.

Fluxo de caixa é a movimentação de entradas e/ou saídas de recursos monetários de uma pessoa (física ou jurídica) com previsão de ocorrência durante certa lacuna de tempo. Na prática, é uma representação gráfica do fluxo do dinheiro ao longo do tempo (ocupação dos problemas financeiros).

Figura 1 – Fluxo de Caixa



Fonte: imagem do autor

Com frequência utiliza-se uma escala horizontal de tempo (ano, mês, dia, etc.) com a progressão do tempo sendo feita da esquerda para a direita. Estes períodos aparecem representados em intervalos contíguos de modo que cada número representa os períodos acumulados. As setas para cima representam as entradas e as setas para baixo representam as saídas de caixa. A unidade de tempo deve coincidir com o período de capitalização dos juros considerados.

Em um fluxo de caixa geralmente não há preocupação de que o tamanho das setas sejam proporcionais aos valores aos quais se referem, pois em geral estes valores são explicitados nas setas.

O diagrama da Figura 1 representa uma saída de caixa hoje no valor de R$ 1.000,00 com uma entrada de R$ 500,00 no final do terceiro período e duas entradas de caixa iguais a R$ 400,00 no final do quinto e do sexto períodos, respectivamente (MATHIAS W.F.; GOMES, 2002).

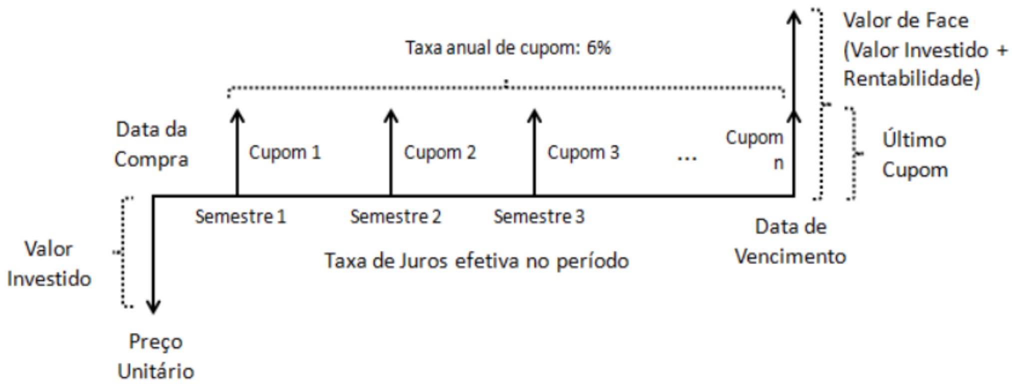
Vejamos outro exemplo interessante, referente a um título público. Abordaremos o assunto com mais detalhes no primeiro capítulo.

O título negociado no Tesouro Direto chamado de Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais (antiga NTN-F) possui rentabilidade vinculada à variação do IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo), acrescida de juros definidos no momento do investimento. Semestralmente há o pagamento de cupom de juros.

No vencimento há o pagamento do valor de face (ou valor nominal) do título, juntamente com o pagamento do último cupom de juros.

A Figura 2 ilustra o fluxo de caixa do investimento.

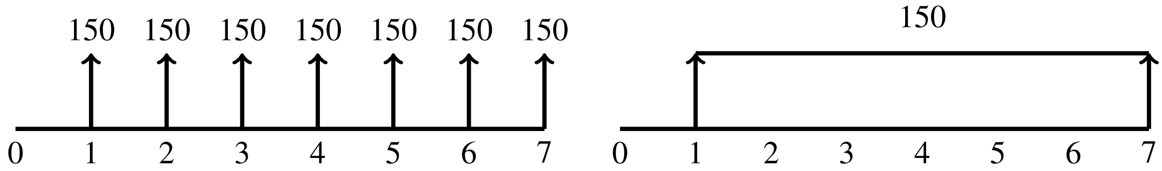
Figura 2 – Fluxo de Caixa da NTN-B



Fonte: (FAZENDA., 2016, Acesso em: 23 set. 2016)

Quando todos os valores que aparecem no fluxo de caixa representam somente entradas, ou somente saídas, e os valores são todos iguais, então a série de rendimentos ou investimentos é chamada de série uniforme. É o caso das prestações constantes e das tabelas de financiamento elaboradas através do modelo PRICE, que não abordaremos neste trabalho. Na Figura 3 está ilustrada uma série uniforme.

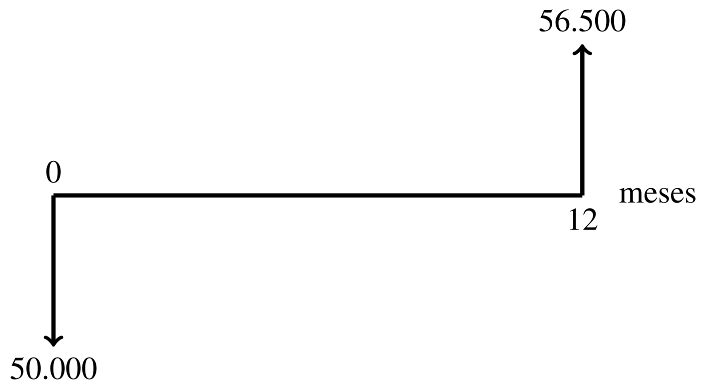
Figura 3 – Séries Uniformes



Fonte: imagem do autor

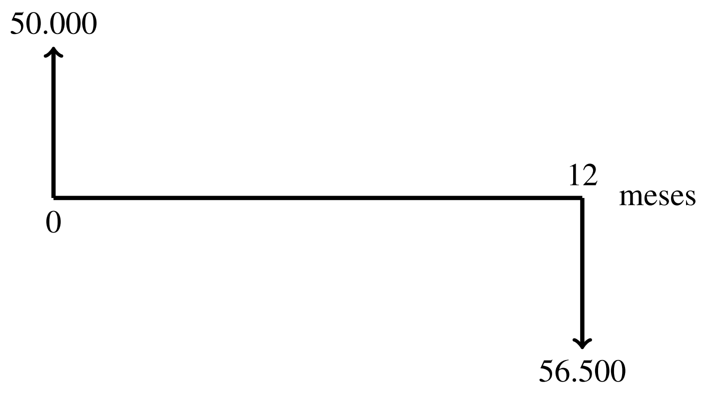
É importante lembrar que o fluxo de caixa de uma operação depende do ponto de vista dos envolvidos. Por exemplo, suponha que uma pessoa aplicou R$ 50.000,00 em um banco e recebeu R$ 6.500,00 de juros após 12 meses. Veja a Figura 4 e a Figura 5.

Figura 4 – Fluxo de Caixa Ponto de Vista do Aplicador



Fonte: imagem do autor

Figura 5 – Fluxo de Caixa Ponto de Vista do Banco



Fonte: imagem do autor

1 APLICAÇÕES FINANCEIRAS

Neste capítulo abordaremos na primeira seção a definição de aplicações financeiras subdividindo-as nas mais comuns presentes no mercado financeiro, com particular destaque ao Tesouro Direto. Terminamos a primeira seção fazendo um comparativo entre Caderneta de Poupança e Tesouro Direto.

Aplicação financeira é toda compra de ativos financeiros vislumbrando que num dado espaço de tempo produza um retorno financeiro em forma de juros agregado ao capital investido.

Na prática, geralmente quando é realizada uma operação de aplicação ou empréstimo, há a intermediação de uma instituição financeira. Esta capta recursos de um lado e os empresta de outro. Em geral a captação é feita a uma taxa menor que a de empréstimo e a diferença é a remuneração da instituição.

São várias as opções de aplicação (também chamadas de instrumentos) que um investidor tem a sua disposição. Por exemplo, a Caderneta de Poupança, o CDB (Certificado de Depósito Bancário), Títulos Públicos (Tesouro Direto) e outros. Vamos expor com mais detalhes algumas aplicações logo em seguida. Cada opção tem sua taxa em função do prazo de aplicação e dos riscos envolvidos. Analogamente, os tomadores de empréstimos tem as várias opções de financiamento cujas taxas variam em função dos prazos de pagamento e das garantias oferecidas.

1.1 CADERNETA DE POUPANÇA

A Caderneta de Poupança foi criada no Brasil por ordem de D. Pedro II, sendo legitimada pelo decreto nº 2.723, de 12 de janeiro de 1861(MEC, 2016, Acesso em: 25 set. 2016).

Trata-se de um dos investimentos mais populares do país, que conta com simplicidade e baixo risco. A poupança é garantida pelo Fundo Garantidor de Crédito (FGC) limitada a R$ 250.000,00 por CPF e por instituição financeira. As regras de funcionamento da poupança são reguladas pelo Banco Central.

Os valores depositados em poupança são remunerados com base na TR, acrescida de juros conforme exposto na sequência. Os valores depositados e mantidos em depósito por prazo inferior a um mês não recebem remuneração alguma. A TR utilizada é aquela do dia do depósito. Os juros acrescidos aos valores depositados em poupança são, desde 04 de maio de 2012, vinculados à taxa SELIC, da seguinte forma:

- $0,5\%$ ao mês, enquanto a meta da taxa SELIC ao ano for superior a $8,5\%$ ou;
- 70% da meta da taxa SELIC ao ano, mensalizada, vigente na data de início do período de rendimento, enquanto a meta da taxa SELIC ao ano for igual ou inferior a 8,5%.

Para os depósitos antigos, ou seja, aqueles efetuados até 03 de maio de 2012, os valores são remunerados à taxa de juros de 0,5% ao mês, aplicada sobre os saldos atualizados monetariamente pela TR (MEC, 2016, Acesso em: 25 set. 2016).

1.2 CERTIFICADO DE DEPÓSITO BANCÁRIO (CDB)

Os CDB's são títulos emitidos pelos bancos para a captação de recursos junto aos clientes, aos quais renderão juros no decorrer de um prazo previamente combinado, e de acordo com algumas condições definidas por ocasião da aplicação.

Os CDB's tem sua garantia dada pelo banco emissor e pelo FGC. As garantias do FGC se limitam a R$ 250.000,00 por CPF e por instituição financeira. Isso implica que esse fundo não pagará mais do que R$ 250.000,00 em caso de liquidação de uma instituição financeira. Em caso de contas conjuntas o teto de garantia continua sendo de R$ 250.000,00, ou seja, se em uma conta conjunta de duas pessoas houver R$ 450.000,00, em caso de liquidação da instituição financeira cada um receberá R$ 125.000,00. Nesse caso para se receber o dinheiro de volta, em média leva-se em torno de 90 dias. Além disto, o FGC somente garante um percentual pequeno do sistema bancário brasileiro, de forma que dependendo de quais instituições forem liquidadas, o fundo não terá obrigação alguma de garantir os títulos correspondentes. Entendemos que este é um risco relevante e em geral não muito divulgado.

A Figura 6 é um recorte nos casos de liquidação de algumas instituições financeiras. A tabela completa desde 1995, quando foi fundado o FGC encontra-se em (CREDITOS., 2017, Acesso em: 14 set. 2017).

Figura 6 – Recorte - Liquidação Extrajudicial

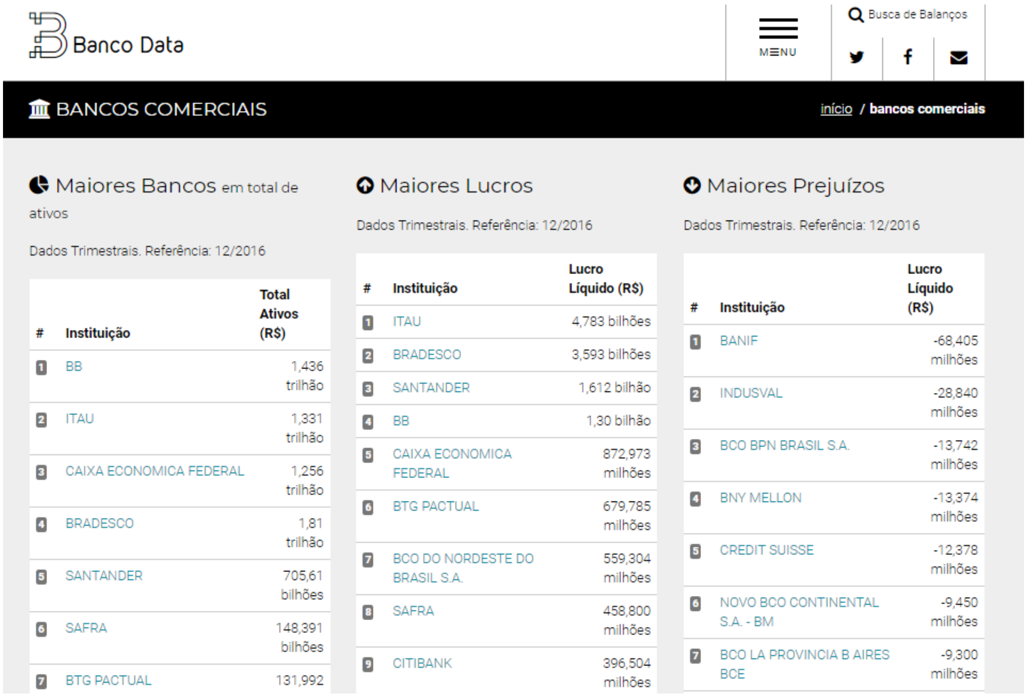
fgc Fundo Garantidor de Créditos

Instituição Financeira	Decretação do Regime	Pagamento Inicial	Intervalo: Decretação X Pagamento (Garantia Ordinária)
Banco Lavra S.A.	13/04/2000	10/12/1999	- 4m3d (b)
Banco Hexabanco	13/07/2000	31/07/2000	0
Banco Interior de São Paulo S.A.	07/02/2001	12/03/2001	1m5d
Banco Araucária S.A.	27/03/2001	16/05/2001	1m20d
Banco Interpart S.A.	28/03/2001	16/07/2001	3m18d
Banco Santos Neves S.A.	01/08/2001	03/09/2001	1m2d
Banco Royal de Investimento S.A.	22/05/2003	28/07/2003	2m6d
Banco Santos S.A.	12/11/2004	27/12/2004	1m15d
Banco Morada S.A.	28/04/2011	27/06/2011	2m
Oboé CFI S.A.	15/09/2011	01/11/2011	1m15d
Banco Cruzeiro do Sul S.A.	14/09/2012	22/11/2012	2m8d
Banco Prosper S.A.	14/09/2012	18/02/2013	5m4d
Banco BVA S.A.	19/10/2012	04/03/2013	4m12d
Banco Rural S.A.	02/08/2013	08/11/2013	3m6d (c)
Banco BRJ S.A.	13/08/2015	09/09/2015	27d
Banco Azteca do Brasil S.A.	08/01/2016	24/02/2016	1m17d

Fonte: (CREDITOS., 2017, Acesso em: 14 set. 2017)

É bem verdade que a possibilidade de quebra de um grande banco como Itaú ou Bradesco ou outro grande banco qualquer é bem pequena. Todavia, bancos de médio e pequeno porte, que em geral oferecem opções de investimentos com rentabilidade melhor do que o grandes bancos, como títulos privados (CDB, LCI, LCA, LC), podem não gozar de boa saúde financeira o que pode ser constatado na Figura 7. Esta figura é apenas um recorte, as informações completas podem ser encontradas em (DATA., 2017, Acesso em: 14 set. 2017).

Figura 7 – Recorte - Saúde Financeira


Banco Data

MENU

Busca de Balanços

BANCOS COMERCIAIS

início / bancos comerciais

Maiores Bancos em total de ativos

Dados Trimestrais. Referência: 12/2016

#	Instituição	Total Ativos (R$)
1	BB	1,436 trilhão
2	ITAU	1,331 trilhão
3	CAIXA ECONOMICA FEDERAL	1,256 trilhão
4	BRADESCO	1,81 trilhão
5	SANTANDER	705,61 bilhões
6	SAFRA	148,391 bilhões
7	BTG PACTUAL	131,992

Maiores Lucros

Dados Trimestrais. Referência: 12/2016

#	Instituição	Lucro Líquido (R$)
1	ITAU	4,783 bilhões
2	BRADESCO	3,593 bilhões
3	SANTANDER	1,612 bilhão
4	BB	1,30 bilhão
5	CAIXA ECONOMICA FEDERAL	872,973 milhões
6	BTG PACTUAL	679,785 milhões
7	BCO DO NORDESTE DO BRASIL S.A.	559,304 milhões
8	SAFRA	458,800 milhões
9	CITIBANK	396,504 milhões

Maiores Prejuízos

Dados Trimestrais. Referência: 12/2016

#	Instituição	Lucro Líquido (R$)
1	BANIF	-68,405 milhões
2	INDUSVAL	-28,840 milhões
3	BCO BPN BRASIL S.A.	-13,742 milhões
4	BNY MELLON	-13,374 milhões
5	CREDIT SUISSE	-12,378 milhões
6	NOVO BCO CONTINENTAL S.A. - BM	-9,450 milhões
7	BCO LA PROVINCIA B AIRES BCE	-9,300 milhões

Fonte: (DATA., 2017, Acesso em: 14 set. 2017)

1.3 TÍTULOS PÚBLICOS (TESOURO DIRETO)

O Tesouro Direto é um programa que surgiu em 2002 em uma parceria com a BM&F BOVESPA para venda de títulos públicos federais para pessoas físicas. Seu objetivo é permitir o acesso democrático aos títulos públicos, haja vista que permite aplicações com apenas R$$30,00$.

Através do Tesouro Direto, as alternativas de investimentos disponíveis no mercado podem ser diversificadas, uma vez que oferece títulos com rentabilidades variadas.

Outro fator importante a respeito do Tesouro Direto é o fato de ser acessível e oferecer rentabilidade e liquidez diária.

Os títulos públicos negociados através do Tesouro Direto são ativos de renda fixa, ao contrário dos ativos de renda variável (ações, por exemplo) em que o retorno não pode ser previsto no momento da aplicação. Contudo, o efeito da marcação a mercado pode fazer o valor presente de um título variar bastante. Desta forma, um título público pode ser visto de fato como renda fixa sempre que o investidor leve-o ao vencimento, isto é, não o venda antes do prazo de vencimento.

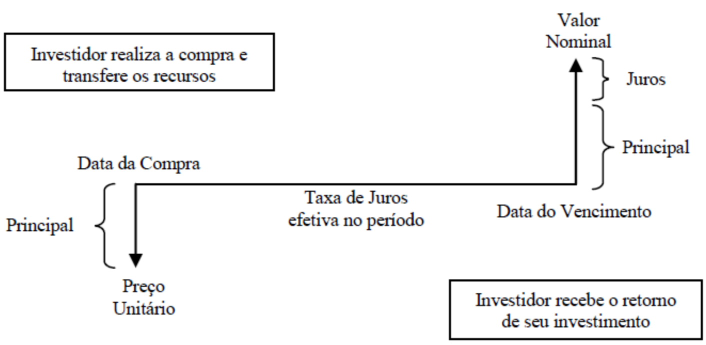
Em síntese, quando alguém compra um título público, essa pessoa está emprestando dinheiro para o governo vislumbrando receber no futuro uma remuneração por esse empréstimo que definimos anteriormente como juros.

O investimento no Tesouro Direto é de longe o investimento de menor risco da economia brasileira, uma vez que os títulos públicos são integralmente garantidos pelo Tesouro Nacional.

Abaixo, listamos os principais títulos públicos disponíveis consultados em (FAZENDA., 2016, Acesso em: 23 set. 2016). Este é o site do Ministério da Fazenda que é o órgão responsável por planejar, formular e executar as políticas econômicas nacionais. Todos os assuntos relacionados à administração dos recursos públicos estão sob sua responsabilidade, assim como as regras de condução e fiscalização de operações de crédito, arrecadação tributária federal, preços e tarifas públicas, seguros, consórcio e previdência privada.

- Tesouro Prefixado (antiga LTN): títulos com rentabilidade definida (taxa fixa) no momento da compra. Forma de pagamento: no vencimento.

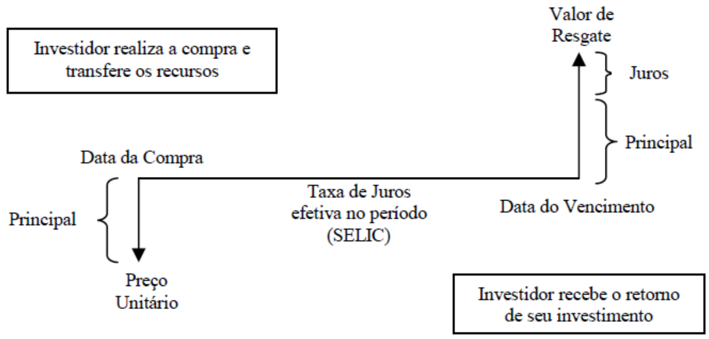
Figura 8 – Tesouro Prefixado (LTN)



Fonte: (FAZENDA., 2016, Acesso em: 23 set. 2016)

- Tesouro SELIC (antiga LFT): títulos com rentabilidade diária vinculada à taxa de juros básica da economia (taxa média das operações diárias com títulos públicos registrados no sistema SELIC, ou, simplesmente, taxa SELIC). Forma de pagamento: no vencimento. Veja a Figura 9.

Figura 9 – Tesouro SELIC (LFT)

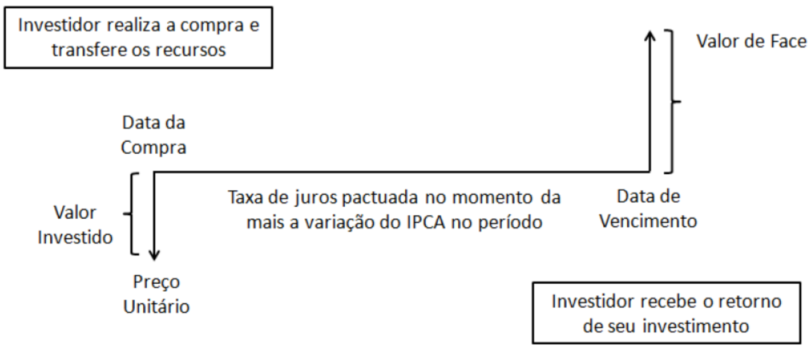


Fonte: (FAZENDA., 2016, Acesso em: 23 set. 2016)

- Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais (NTN-B): título com rentabilidade vinculada à variação do IPCA, acrescida de juros definidos no momento da compra. Forma de pagamento: semestralmente (juros) e no vencimento (principal). Representado na Figura 2.

- Tesouro IPCA+ (NTN-B Principal): título com rentabilidade vinculada à variação do IPCA, acrescida de juros definidos no momento da compra. Não há pagamento de cupom de juros semestral. Forma de Pagamento: no vencimento. Veja a Figura 10.

Figura 10 – Tesouro IPCA+ (NTN-B Principal)



Fonte: (FAZENDA., 2016, Acesso em: 23 set. 2016)

- Tesouro Prefixado com Juros Semestrais (antiga NTN-F): títulos com rentabilidade prefixada, acrescida de juros definidos no momento da compra. Forma de pagamento: semestralmente (juros) e no vencimento (principal).

1.4 COMPARAÇÃO ENTRE POUPANÇA E TESOURO DIRETO

Vamos fazer um comparativo entre o título Tesouro SELIC e a Caderneta de Poupança. Este título é o mais conservador dos títulos do Tesouro Direto, sendo o ideal para o curto prazo, ou quando não há a certeza de que se conseguirá manter o dinheiro investido até o vencimento.

O risco do Tesouro SELIC cabe ao governo já o da poupança cabe ao banco (é por esse fato que a garantia da poupança é fornecida pelo FGC). Em geral, o tesouro SELIC rende mais. Todavia, pesa sobre ele a incidência do imposto de renda.

Vamos a uma simulação feita em (BRASIL., 2015, Acesso em: 26 set. 2015) "Calculadora do Cidadão". Veja a Figura 11 e a Figura 12.

Figura 11 – Calculadora do Cidadão - Correção Pela Poupança

Resultado da Correção pela Poupança

Dados básicos da correção pela Poupança	
Dados informados	
Data inicial	26/09/2015
Data final	26/09/2016
Valor nominal	R$ 1.000,00 (REAL)
Regra de correção	Nova
Dados calculados	
Índice de correção no período	1,0824887
Valor percentual correspondente	8,2488700%
Valor corrigido na data final	R$ 1.082,49 (REAL)

Fazer nova pesquisa | Imprimir

Fonte: (BRASIL., 2015, Acesso em: 26 set. 2015)

Figura 12 – Calculadora do Cidadão - Correção Pela SELIC

Resultado da Correção pela Selic

*A data informada não é dia útil, a data utilizada para este cálculo refere-se ao primeiro dia útil subsequente

Dados básicos da correção pela Selic	
Dados informados	
Data inicial	28/09/2015*
Data final	26/09/2016
Valor nominal	R$ 1.000,00 (REAL)
Dados calculados	
Índice de correção no período	1,140301861620545
Valor percentual correspondente	14,030186162054527 %
Valor corrigido na data final	R$ 1.140,30 (REAL)

Fazer nova pesquisa | Imprimir

Fonte: (BRASIL., 2015, Acesso em: 26 set. 2015)

O resumo das figuras anteriores encontra-se na *Tabela (1)*.

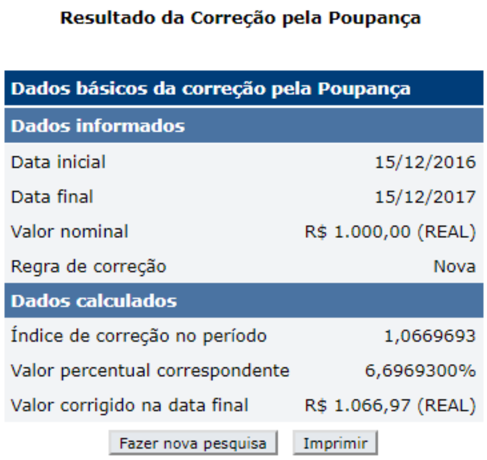
Tabela 1 – Poupança x Tesouro SELIC

	Poupança	Tesouro SELIC
Data inicial	26/09/2015	26/09/2015
Data final	26/09/2016	26/09/2016
Valor a ser corrigido	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00
Resultado:	R$ 1.082,49	R$ 1.140,30
Rendimento:	8,25%	14,03%
Desconto do imposto de renda (1 ano)	0	17,50%
Rendimento:	0	11,57%
Desconto da taxa do tesouro direto	0	0,30%
Rendimento:	8,25%	11,27%

Assim, o tesouro SELIC rendeu $\frac{11,27}{8,25} = 1,3661$ ou seja, 136,61% da poupança mesmo depois da incidência do imposto de renda e da taxa do Tesouro Direto.

Vamos a uma nova simulação, com a SELIC mais atualizada, feita em (BRASIL., 2018, Acesso em: 03 jan. 2018) “Calculadora do Cidadão”. Veja as Figuras 13 e 14.

Figura 13 – Calculadora do Cidadão - Correção Pela Poupança


Resultado da Correção pela Poupança

Dados básicos da correção pela Poupança	
Dados informados	
Data inicial	15/12/2016
Data final	15/12/2017
Valor nominal	R$ 1.000,00 (REAL)
Regra de correção	Nova
Dados calculados	
Índice de correção no período	1,0669693
Valor percentual correspondente	6,6969300%
Valor corrigido na data final	R$ 1.066,97 (REAL)

Fazer nova pesquisa | Imprimir

Fonte: (BRASIL., 2018, Acesso em: 03 jan. 2018)

Figura 14 – Calculadora do Cidadão - Correção Pela SELIC

Resultado da Correção pela Selic

Dados básicos da correção pela Selic	
Dados informados	
Data inicial	15/12/2016
Data final	15/12/2017
Valor nominal	R$ 1.000,00 (REAL)
Dados calculados	
Índice de correção no período	1,103187493473463
Valor percentual correspondente	10,318749347346321 %
Valor corrigido na data final	R$ 1.103,19 (REAL)

Fazer nova pesquisa | Imprimir

Fonte: (BRASIL., 2018, Acesso em: 03 jan. 2018)

O resumo do que ocorre na *Figura (13)* e na *Figura (14)* encontra-se na *Tabela (2)*

Tabela 2 – Poupança x Tesouro SELIC

	Poupança	Tesouro SELIC
Data inicial	15/12/2016	15/12/2016
Data final	15/12/2017	15/12/2017
Valor a ser corrigido	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00
Resultado	R$ 1.066,97	R$ 1.103,19
Rendimento	6,70 %	10,32 %
Desconto do imposto de renda (1 ano)	0	17,50 %
Rendimento	0	8,51 %
Desconto da taxa do tesouro direto	0	0,30 %
Rendimento	6,70 %	8,21 %

O tesouro SELIC rendeu $\frac{8,21}{6,70} = 1,2254$ ou seja, 122,54% da poupança, depois da incidência do imposto de renda e da taxa do Tesouro Direto.

As diferenças apresentadas nas tabelas anteriores ressaltam o cuidado que se deve ter com os diferentes valores da SELIC e o impacto que esta exerce inclusive sobre a remuneração da poupança.

2 MÉTODOS DETERMINÍSTICOS DE ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

Neste capítulo mostraremos três métodos determinísticos de análise de investimentos, suas particularidades e a matemática envolvida em cada um deles. No primeiro método, denominado Valor Presente Líquido (VPL), conceituamos Taxa de Mínima Atratividade (TMA) - também chamada de custo de oportunidade de capital - e conceito importante na análise de qualquer empreendimento.

Na seção seguinte discorremos sobre o segundo método chamado na literatura de Valor Anual Uniforme Equivalente (VAUE), sendo este de certa forma, um caso particular do VPL. Na exposição do VAUE mostramos como aplicação o modelo básico de anuidades, muito conhecido em matemática financeira.

Na seção que se segue tratamos do método que é o protagonista desse trabalho chamado Taxa Interna de Retorno (TIR). Usamos a Regra de Sinais de Descartes para fundamentar a discussão sobre as raízes de um dado polinômio envolvido no método.

2.1 MÉTODO DO VALOR PRESENTE LÍQUIDO (VPL)

Trata-se de uma técnica de fluxo de caixa que leva em conta o valor temporal da moeda. Nesse método, calculamos o valor presente de cada capital da sequência trazendo-os para a data zero, isto é, deflacionamos os capitais para a data zero. Essa deflação de capitais é feita utilizando a Taxa de Mínima Atratividade (TMA), aqui representada por κ.

Decide-se assim se é melhor realizar o projeto ou simplesmente utilizar o capital disponível para investir, por exemplo, em um título de renda fixa com maturação no mesmo período do projeto. No Brasil isto é especialmente relevante, dado que o governo ainda oferece altas taxas de juros nos títulos públicos. Não a toa, o Brasil é conhecido como o país da renda fixa.

A definição de κ em determinado projeto é de caráter subjetivo, mas uma vez definida, será utilizada para determinar a viabilidade do projeto.

Em especial, a TMA é um parâmetro de avaliação de um investimento. É o menor valor que deve ter a taxa de juros de um investimento para ele ser interessante ao investidor. Essa taxa de juros também é chamada de custo de oportunidade do capital isto é, a taxa de juros abaixo da qual a empresa ou investidor considera não atrativa a realização do investimento/empreendimento (FILHO NELSON; HARTMUT KOPITKE, 2000).

Uma vez definida a taxa κ e estabelecido o fluxo de caixa previsto para o projeto, a viablidade da realização do mesmo pode ser estabelecida analisando o seu Valor Presente Líquido (VPL), conforme a Definição 2.1. Como já citado, assumiremos sempre $\kappa \neq -1$.

Definição 2.1. *Considere uma série de capitais $c_0, \ldots, c_t$ e a taxa mínima de atratividade κ. O **valor presente líquido** (VPL, ou simplesmente V) relativo a esta série e taxa é definido como*

$$V = V(\kappa, c_0, \ldots, c_t) = \sum_{j=0}^{t} \frac{c_j}{(1+\kappa)^j}. \tag{2.1}$$

Claramente, V depende de cada capital c_j e de κ.

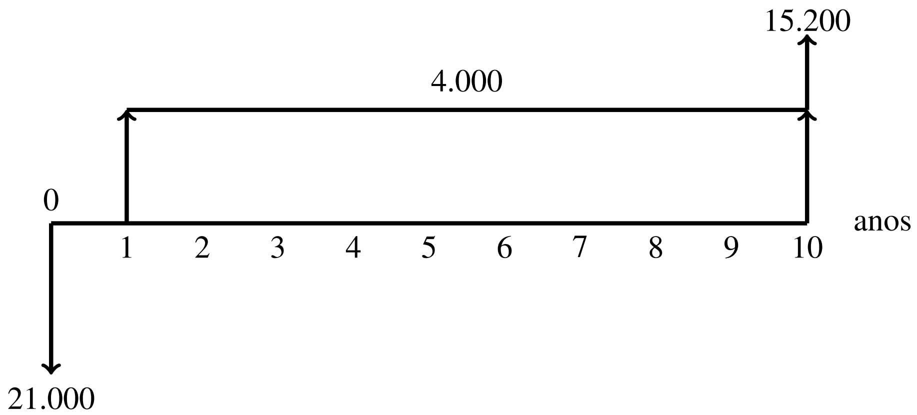
A primeira parcela na soma que compõe V é c_0. Se o projeto se tratar, por exemplo, de um investimento (com retornos positivos), c_0 pode ser entendido como o investimento inicial, seguido de entradas de caixa $c_1, \ldots, c_t$.

Ainda no caso de um investimento, se o VPL for zero, os fluxos de caixa somente conseguem recuperar o capital investido e proporcionar o retorno equivalente à TMA.

Se o VPL for positivo todos os recursos investidos são recuperados e remunerados pela TMA e ainda estarão produzindo um ganho adicional. Por assim dizer, riqueza foi adicionada.

Exemplo 2.2. *Suponha que um pequeno empresário deseje adquirir uma máquina no valor de R$ 21.000,00, visando aumentar sua produção. Com a aquisição, a empresa aumentará suas receitas em R$ 5.000,00 anuais. Por outro lado, as despesas anuais com a manutenção deste bem perfazem R$ 1.000,00. Após dez anos de vida econômica, a máquina tem valor residual de R$ 15.200,00. Supondo que a TMA é de 18% ao ano, vejamos se é vantajosa a aquisição do equipamento.*

Figura 15 – Fluxo de Caixa Para o *Exemplo (2.2)*



Fonte: imagem do autor

Na notação da Definição 2.1,

$$V(18\%, c_0, \ldots, c_{10}) = -21.000 + \sum_{j=1}^{10} \frac{4.000}{(1,18)^j} + \frac{15.200}{(1,18)^{10}} = 20.880,53 - 21.000 = -119,47.$$

Portanto, a aquisição não é viável.

A técnica pode ser utilizada para decidir entre duas opções distintas de projetos financeiros. Neste caso, há de se comparar os respectivos Valores Presentes Líquidos das opções envolvidas. Caso seja uma aquisição, por exemplo, a indicação é a opção pelo projeto com menor VPL.

Vejamos um caso prático desta situação.

Exemplo 2.3. *Suponha que um comprador tem duas opções para adquirir um imóvel. A primeira opção é à vista por R\$* $228.000,00$. *A segunda é a prazo em três prestações mensais de R\$ 80.000,00, sendo que a primeira prestação vence um mês após o fechamento do negócio, sendo que o comprador pode aplicar seu dinheiro à uma taxa de* 6% *ao mês. Na notação da Definição 2.1, vamos simplificar R\$* $1.000,00 = k$. *Na primeira opção temos simplesmente*

$$V_1 = V_1(0, 228k) = 228.000,00.$$

Na segunda opção temos

$$V_2 = V_2(6\%, 0, 80k, 80k, 80k) = 80.000\left(\frac{1}{1,06} + \frac{1}{(1,06)^2} + \frac{1}{(1,06)^3}\right) = 226.288,91.$$

Como $V_2 < V_1$, *temos que a melhor opção para o comprador é a segunda, isto é, comprar a prazo e ir mantendo o saldo após os pagamentos aplicados no período.*

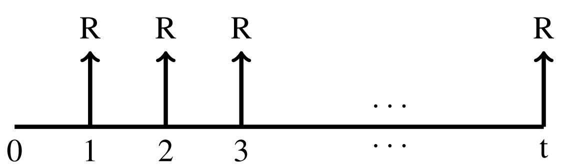
Em várias situações práticas a série de capitais é constante a partir de $t = 1$. Assim, c_j é igual a um certo R, para todo $j \geq 1$. O exemplo acima é um caso. Tal situação é frequente numa compra parcelada no cartão de crédito ou em um empréstimo pessoal contraído junto à uma instituição financeira. Para séries constantes, o valor presente líquido pode ser diretamente calculado por meio do Teorema 2.4.

Teorema 2.4. *O Valor Presente Líquido* V *de uma sequência de capitais de* t *valores todos iguais a* R *ocorridos a partir da data* $t = 1$ *e a uma TMA* κ *é:*

$$V = V(\kappa, t, R) = \frac{R}{\kappa}(1 - (1+\kappa)^{-t}). \tag{2.2}$$

Demonstração. O fluxo de caixa representado na Figura 16 esquematiza a situação:

Figura 16 – Série Uniforme R a Partir da data t=1



Fonte: imagem do autor

Usando a soma dos termos de uma progressão geométrica de primeiro termo e razão iguais a $x = \dfrac{1}{1+\kappa}$ e a Equação 2 com $i = \kappa$, temos

$$V = R\sum_{j=1}^{t} x^j = R\frac{x(x^t - 1)}{x - 1} = \frac{R}{\kappa}(1 - (1+\kappa)^{-t}).$$

□

Naturalmente podemos considerar a série de capitais de t valores iguais a R ocorridos a partir de $t = 0$. Basta somar R à Equação 2.2 para obtermos

$$V = V(\kappa, t, R) = \frac{R}{\kappa}(1 + \kappa - (1+\kappa)^{-t}).$$

Em situações como recebimento de benefício (aposentadoria, por exemplo) ou mesmo aluguel de um imóvel, é conveniente considerar uma sequência infinita de capitais. Por simplicidade, vamos considerá-los constantes (iguais a R) e a partir de $t = 1$. Neste caso, tomando o limite quando t tendo ao infinito na Equação 2.2, obtemos:

Corolário 2.5. *Na notação acima,* $V = V(\kappa, R) = \dfrac{R}{\kappa}$.

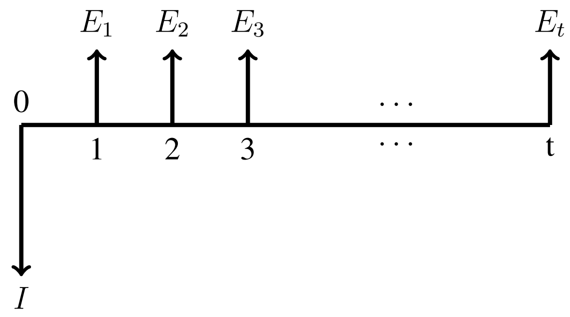
Exemplo 2.6. *Um apartamento é alugado por R$ 5.000,00 por mês. Dada uma TMA de 2% ao mês, temos que uma primeira estimativa para o valor deste imóvel é V =* $\dfrac{5.000}{0,02} = 250.000,00.$

Caso estejamos analisando alternativas para o pagamento de um bem ou serviço, utilizando a TMA calculamos o valor atual de cada alternativa. Aquela que produzir um custo menor (menor valor atual) deve ser a alternativa escolhida (FONSECA, 2009).

Por outro lado, caso se esteja analisando alternativas de investimentos (no caso convencional um investimento inicial I seguido de entradas de caixa $E_1, \cdots, E_t$ - Figura 17) calcula-se o valor presente líquido V das entradas de caixa, usando-se a TMA, e compara-se com o investimento inicial I.

Se $V > I$, então deve-se aceitar o investimento. Caso $V < I$, deve-se rejeitá-lo.

Figura 17 – Investimentos e Entradas de Caixa



Fonte: imagem do autor

Exemplo 2.7. *Uma pessoa irá adquirir uma casa nas seguintes condições: R$ 40.000,00 de entrada mais seis prestações iguais à entrada vencendo cada uma ao final de cada um dos anos subsequentes, Considerando TMA =* κ *de 6% ao ano, o preço a vista da casa é dado por*

$$V = 40.000\left(\frac{1+0,06-(1+0,06)^{-6}}{0,06}\right) = 236.692,97.$$

Uma observação pertinente ao método VPL é que ele cobre periodicidade, ou seja, pode ser aplicado tanto para uma sequência de valores uniformes como variáveis (séries diferidas, por exemplo).

Outra observação sobre o VPL é o fato de que esta técnica de análise de investimento não explicita a rentabilidade do projeto.

2.2 MÉTODO DO VALOR ANUAL UNIFORME EQUIVALENTE (VAUE)

Trata-se de uma técnica de fluxo de caixa que se propõe a tornar equivalente um fluxo de caixa de investimentos (custos ou receitas) à Taxa de Mínima Atratividade (TMA), com uma série uniforme anual.

Dentro deste contexto temos o conceito de modelo básico de anuidade. Entende-se por anuidade uma série de pagamentos ou recebimentos referidos às respectivas datas dada uma taxa de juros qualquer. Neste ínterim, as anuidades podem ser classificadas segundo (MATHIAS W.F.; GOMES, 2002) como temporárias ou perpétuas, no que diz respeito ao prazo; constantes ou variáveis, quando estivermos nos referindo ao valor dos termos; imediatas (postecipadas ou antecipadas) ou diferidas (postecipadas ou antecipadas) quanto à forma de pagamento ou recebimento; e ainda periódicas ou não periódicas quando a referência for a periodicidade da mesma.

O modelo básico de anuidade, que é o que cabe como aplicação do método VAUE, são as anuidades que são ao mesmo tempo: temporárias - constantes - imediatas e postecipadas - periódicas.

Definição 2.8. *Seja V o valor presente líquido de uma série de capitais $c_0, ..., c_t$ e uma taxa de mínima atratividade κ. O* ***valor anual uniforme equivalente*** *(VAUE, ou simplesmente V'), relativo a V e κ, é definido como*

$$V' = V'(V, \kappa) = V\left(\frac{\kappa}{1-(1+\kappa)^{-t}}\right). \tag{2.3}$$

Exemplo 2.9. *Um carro custa à vista R\$ 10.000,00. Como opção, um comprador pode adquiri-lo em 4 prestações mensais iguais. As prestações serão pagas a partir do mês seguinte ao da compra e o vendedor está cobrando uma taxa de juros de 2% ao mês. Assim o valor de cada prestação será*

$$V' = 10.000\left(\frac{0,02}{1-(1+0,02)^{-4}}\right) = 2.626,24.$$

Esse método tem grande utilidade em atividades nas partes operacionais das empresas onde alguns investimentos comumentes se repetem. Outra grande utilidade do método VAUE é determinar a vida econômica de equipamentos em geral ou veículos. Veja por exemplo (FILHO NELSON; HARTMUT KOPITKE, 2000).

2.3 MÉTODO DA TAXA INTERNA DE RETORNO (TIR)

Todo projeto de investimento traz implicitamente ao menos uma medida de rentabilidade, que pode ser entendida como uma taxa de retorno sobre o capital a ser utilizado. Desta forma, projetos distintos podem ser comparados por meio destas taxas. Analistas financeiros utilizam muito esta ideia, pois ela mostra o quão rentável é um investimento.

Aplicar o método da Taxa Interna de Retorno (TIR) na análise de um investimento , pode ser considerado como não adequado, uma vez que esse método apresenta uma série de inconvenientes, por isso faz-se necessário cautela ao aplicá-lo (ZENTGRAF, 2007).

A cautela a ser tomada para se tomar uma decisão de investimento via método da taxa interna de retorno dá-se pelo fato de que ela envolve uma equação polinomial que pode não ter raiz real e caso tenha, ela pode não ser única, conforme veremos na sequência.

Para determinar tais taxas, novamente utiliza-se a ideia de trazer os capitais a valor presente. Depois, considerar as taxas que fazem o valor presente do projeto ser nulo, conforme a definição abaixo.

Definição 2.10. *Uma* ***taxa interna de retorno*** *para a série de capitais $c_0, \ldots, c_t$ é uma taxa $\rho \neq -1$ tal que*

$$\sum_{j=0}^{t} \frac{c_j}{(1+\rho)^j} = 0.$$

Calcular ρ, em síntese, consiste em resolver a equação dada por

$$c_0 + \frac{c_1}{(1+\rho)^1} + \cdots + \frac{c_t}{(1+\rho)^t} = 0. \tag{2.4}$$

Fazendo $x = \dfrac{1}{1+\rho}$, deve-se encontrar as raízes não nulas do polinômio de grau t dado por

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_t x^t. \tag{2.5}$$

A restrição $\rho \neq -1$ já era assumida antes. De fato, era hipótese geral sobre todas as taxas. Na sequência iremos adicionalmente assumir $\rho > -1$, quando ρ for real. Isto se justifica porque neste caso isto é equivalente a $x > 0$. Do ponto de vista prático, não entendemos como uma restrição muito relevante. Porém, e necessária nos resultados a seguir.

O clássico Teorema Fundamental da Álgebra garante o polinômio 2.5 admite exatamente t raízes (contando as multiplicidades) no corpo dos números complexos, eventualmente representadas por números complexos puros.

Por exemplo, considere um projeto financeiro com exatamente três entradas ou saídas de caixa, digamos c_0, c_1 e c_2, tais que o discriminante $\Delta = c_1^2 - 4c_0c_2$ seja menor que zero. A fórmula quadrática garante que há exatamente duas raízes complexas não reais para o polinômio 2.5. Fluxos de caixa com taxas de retorno todas complexas não necessariamente precisam ser descartados. Contudo, isto dificulta bastante o problema. Uma análise deste caso é feita em (HARTMAN J. C.; SCHAFRICK, 2004).

Desta forma, devido à natureza do problema, somente **quando existir uma única raiz real positiva para o polinômio 2.5, essa raiz será assumida como a (única) TIR do projeto em questão, independentemente da existência de outras raízes complexas.** Em especial, estaremos levando isto em conta quando nos referirmos à existência e unicidade da TIR de um projeto.

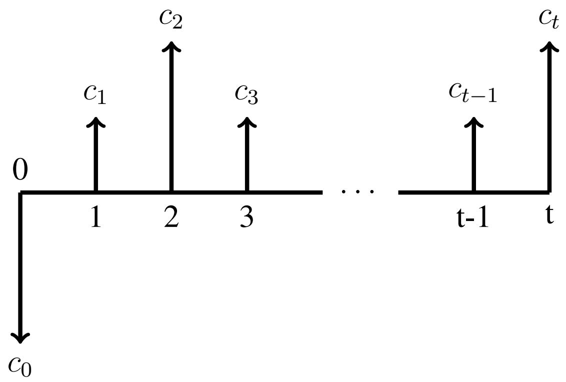
Conforme mencionado anteriormente, estamos interessados em demonstrar a existência e unicidade da TIR no caso de um projeto financeiro que possui o chamado fluxo de caixa convencional, isto é, um desembolso inicial na data zero ($c_0 < 0$) e retornos $c_i > 0$, a partir da data 1, conforme a Figura 18. Este não é o caso do exemplo do parágrafo anterior. De fato, nestas condições, se tivéssemos $\Delta < 0$, note que teríamos também $c_1^2 < 0$, o que é um absurdo.

Primeiramente precisamos de uma análise mais precisa a partir dos coeficientes do polinômio 2.5 e do sinal de suas raízes reais, se existirem. Para isto, será necessário o Teorema 2.11, cuja demonstração está baseada em (ARAUJO, 2002, p.35).

Teorema 2.11 (Regra de Sinais de Descartes)**.** *O número de raízes reais positivas do polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, com $a_i \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$, é igual ao número de variações de sinal dos números $a_0, \cdots, a_{n-1}, a_n$, ou um número inferior mas de mesma paridade.*

Demonstração. Utilizaremos indução sobre o grau de p. Note que no caso $n = 1$ podemos assumir $a_0 \neq 0$. Assim, a única raiz de $p(x) = a_0 + a_1 x$ é real. Ainda, é positiva se e somente se a_0 e a_1 tiverem sinais opostos. Na sequência, podemos assumir $a_n > 0$, sem perda de generalidade. Se $a_0 = p(0) > 0$, então o número de variações de sinal de $a_0, \cdots, a_{n-1}, a_n$ é

Figura 18 – Fluxo de Caixa Convencional



Fonte: imagem do autor

obrigatoriamente par, uma vez que o primeiro e o último termo da sequência são positivos. Por outro lado, note que $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ e isto implica que o número de raízes positivas também é par. Argumento idêntico pode ser usado no caso de $a_0 = p(0) < 0$. Neste caso, tanto o número de variações de sinal da sequência dos coeficientes de p como o número de raízes positivas de p são ímpares. Desse modo, conclui-se que o número de raízes positivas tem a mesma paridade do número de variações de sinal. Basta agora mostrar que o número de variações de sinal limita o número de raízes positivas. Somente agora utilizaremos a hipótese de indução, de que a afirmação é válida para polinômios de grau $\leq n-1$. Suponha que p tem m raízes reais positivas e que a quantidade de variações da sequência de seus coeficientes é $K < m$. Sendo assim, é necessário ter $m \geqslant K+2$ para manter a paridade. Contudo, pelo Teorema de Rolle, $p'(x) = a_1 + a_2x + \ldots + a_nx^{n-1}$ tem que ter pelo menos $K+1$ raízes reais positivas. Mas isso contraria a hipótese indutiva, já que a quantidade de variações de sinal dos coeficientes de p' é menor que K. Assim $m \leqslant K$. □

Finalmente, podemos demonstrar a existência e unicidade da TIR de um fluxo de caixa convencional.

Teorema 2.12. *Existe uma única* [1] *taxa interna de retorno ρ para um fluxo de caixa convencional.*

Demonstração. Conforme a Definição 2.10, considere a equação

$$\sum_{j=0}^{t} \frac{c_j}{(1+\rho)^j} = 0. \tag{2.6}$$

Fazendo a troca de variáveis $x = \dfrac{1}{1+\rho}$, temos $p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_tx^t = 0$. Dado que $c_0 < 0$ e $c_j > 0$, $j = 1, \ldots, t$, os coeficientes da equação possuem apenas uma inversão de sinais. Pelo Teorema 2.11, o número de variações de sinal é igual ao número de mudanças no

[1] Veja o texto em negrito da página anterior

fluxo de caixa. Assim, essa equação tem apenas uma raiz real positiva x. Consequentemente, há exatamente uma taxa $\rho > -1$. $\square$

Tendo-se um projeto financeiro com fluxo de caixa convencional, pode-se utilizar a TIR como critério para realização ou não deste projeto. A comparação deve ser feita com a taxa mínimia de atratividade TMA, que aqui foi denotada por κ. Por exemplo:

- Para um projeto de investimento, é necessário que $\rho > \kappa$,
- Do ponto de vista de um tomador de um empréstimo, deve-se ter $\rho < \kappa$.

Entre dois ou mais projetos financeiros distintos com fluxo de caixa convencional, pode ser conveniente comparar suas respectivas taxas internas, conforme o exemplo a seguir.

Exemplo 2.13. *Suponha que um investidor possua um capital de R$ 120.000,00 que pode ser investido de duas formas. Na primeira opção os retornos serão de R$ 95.000,00 após 3 anos, R$ 70.000,00 após 5 anos e R$ 90.000,00 após 7 anos. Na segunda alternativa, os retornos são de R$ 50.000,00 após o primeiro ano, R$ 80.000,00 após 2 anos e R$ 35.000,00 após 3 anos. Vejamos qual é a melhor alternativa, admitindo uma $\kappa = 18\%$ ao ano. Para a primeira alternativa, temos*

$$120.000 = \frac{95.000}{(1+\rho_1)^3} + \frac{70.000}{(1+\rho_1)^5} + \frac{90.000}{(1+\rho_1)^7}.$$

Fazendo a troca de variáveis $\dfrac{1}{1+\rho_1} = x$ e dividindo todos os termos por 5.000, temos

$$18x^7 + 14x^5 + 19x^3 - 24 = 0.$$

Esta equação possui como única raiz real $x \approx 0,852770865$. Voltando na troca de variáveis, temos $\rho_1 = 17,26\%$ ao ano.
Na segunda opção temos

$$120.000 = \frac{50.000}{(1+\rho_2)} + \frac{80.000}{(1+\rho_2)^2} + \frac{35.000}{(1+\rho_2)^3}.$$

Seguindo o mesmo processo, obtemos

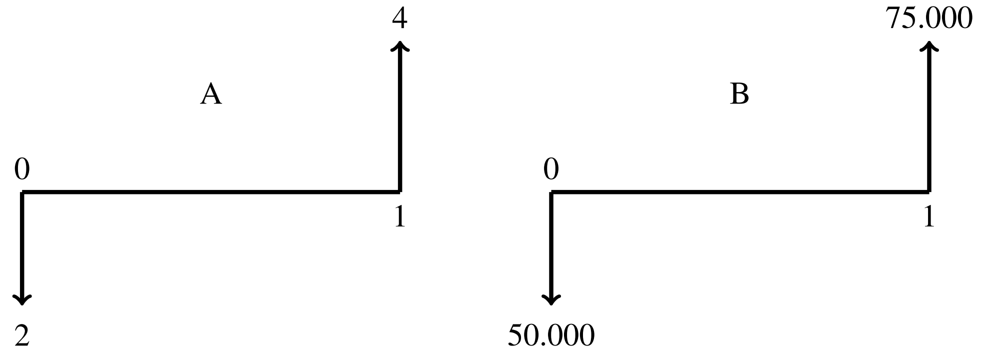
$$7x^3 + 16x^2 + 10x - 24 = 0,$$

cuja única raiz real é $x \approx 0,843117068$. Finalmente, $\rho_2 = 18,61\%$ ao ano.

Portanto, ρ_1 é menor que ρ_2. Ainda, $\rho_1 < \kappa$, o que nos leva a um VPL negativo para a primeira alternativa. Por outro lado, $\rho_2 > \kappa$, o que nos dá um VPL positivo para a segunda opção. Segue que a alternativa escolhida deve ser a segunda.

Olhar somente a TIR não é condição suficiente para afirmar que se $\rho_A > \rho_B$ então A deve ser preferido a B. Por exemplo, poder-se-ia ter duas alternativas de investimentos mutuamente excludente, como as mostradas na Figura 19, para uma κ de 20%.

Figura 19 – ρ de Alternativas Mutuamente Excludentes



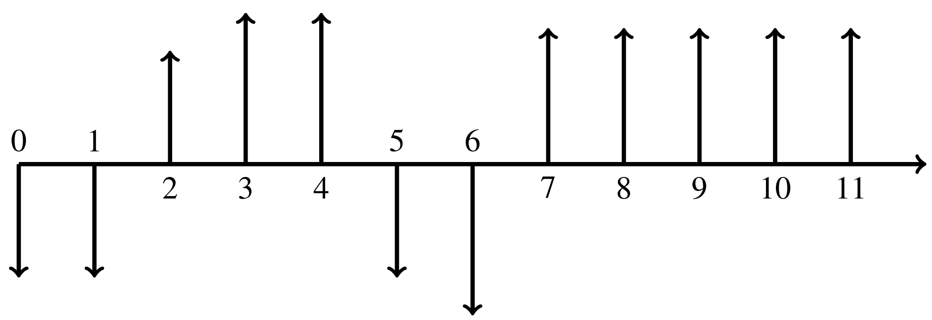
Fonte: imagem do autor

Temos que ρ_A é de 100% e ρ_B é de 50%. Contudo, em A temos uma quantia tão pequena, tendo também um rendimento tão baixo, que mesmo ela rendendo percentualmente o dobro de B, uma vez que haja a disponibilidade de recursos, a alternativa B deve ser escolhida. Este impasse pode ser solucionado aplicando à κ as diferenças entre os investimentos e as parcelas que retornam.

Fluxos de caixas que geram mais de uma TIR são ditos não convencionais e geram mais de uma inversão de sinais em seus fluxos. Pelo Teorema 2.11, a equação polinomial correspondente poderá ter mais de uma raiz positiva.

Um bom exemplo no qual ocorre mais de uma inversão de sinal dos fluxos de caixa é o que existe no setor de petróleo. Nele, inicialmente são realizadas despesas com pesquisas etc, seguindo-se uma série de períodos em que predominam as receitas. Depois tem-se outros períodos nos quais são feitas novas prospecções e despesas a fim de gerar receitas nos anos subsequentes. A Figura 20 ilustra esse fato.

Figura 20 – Receitas e Despesas - Prospecção de Petróleo



Fonte: imagem do autor

3 APLICAÇÕES E VIABILIDADE DOS MÉTODOS DE ANÁLISE DE INVESTIMENTOS

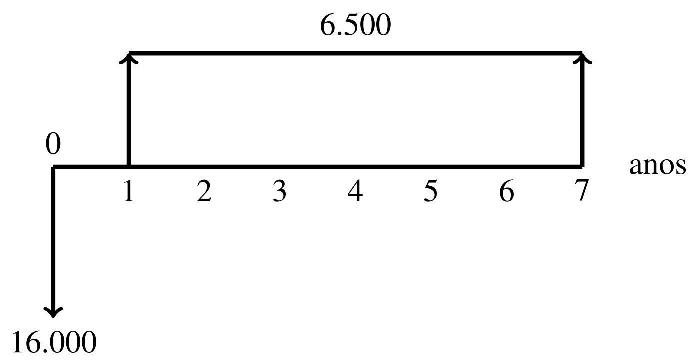
As tomadas de decisões via VPL podem ser utilizadas especialmente quando da existência de duas ou mais alternativas de investimentos. Caso as alternativas possuam a mesma vida útil, a melhor será aquela que apresentar o maior VPL. Uma vez que as alternativas possuam durações diferentes, é necessário verificar se elas são passíveis de renovação nas mesmas condições iniciais. Se sim, os investimentos deverão ser repetidos considerando-se o mínimo múltiplo comum, mmc, das durações, que será o horizonte de planejamento. Feito isso, a alternativa a ser aceita deve ser aquela que apresenta o maior VPL.

No método Valor Anual Uniforme Equivalente VAUE calcula-se a partir da TMA uma série uniforme de pagamentos e/ou recebimentos de cada uma de duas ou mais alternativas de empreendimentos. Aquela que possuir maior VAUE deve ser a escolhida. Um cuidado adicional deve ser tomado para a aplicação deste método, que é o fato de as alternativas terem vidas econômicas iguais e serem ou não passíveis de renovação.

Consideremos a seguinte situação hipotética explicitada no exemplo que segue:

Exemplo 3.1. *Uma pequena empresa dispõe de R$ 20.000,00 e conta com duas alternativas para investir em um tipo de equipamento. Alternativa 1: exige um investimento inicial de R$ 16.000,00 e dá um retorno anual de R$ 6.500,00 durante 7 anos. Alternativa 2: exige um investimento inicial de R$ 20.000,00 e dá um retorno anual de R$ 8.000,00 durante 7 anos. Verifiquemos qual é a melhor alternativa para uma TMA de 30% ao ano.*

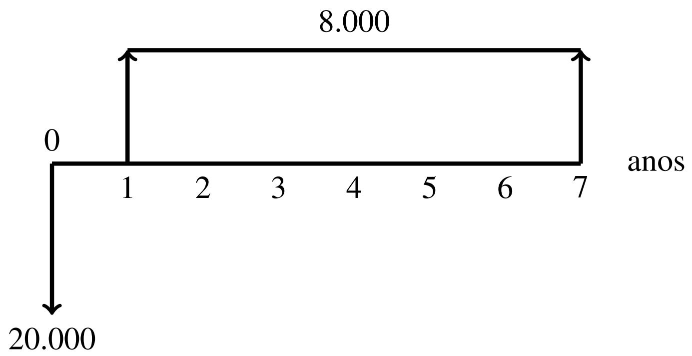
Figura 21 – Alternativa 1



Fonte: imagem do autor

$$V_1' = 6.500 - 16.000\left(\frac{0,3}{1-(1+0,3)^{-7}}\right) = 790,02.$$

Figura 22 – Alternativa 2



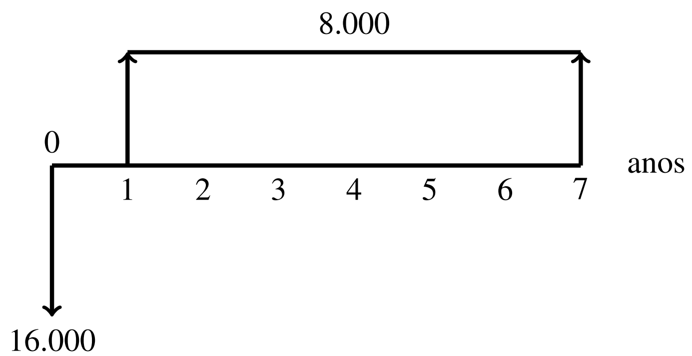
Fonte: imagem do autor

$$V_2' = 8.000 - 20.000\left(\frac{0,3}{1-(1+0,3)^{-7}}\right) = 862,53.$$

Ambas as alternativas são viáveis economicamente pois V' é positivo nas duas, mas a alternativa 2 é ainda uma opção mais viável que 1 uma vez que $V_2' > V_1'$.

Exemplo 3.2. *O mesmo problema anterior só que agora a empresa não dispõe mais de R\$ 20.000,00 para investir e sim R\$ 16.000,00. A taxa de cobrança de um suposto empréstimo é de 40% ao ano, pagável ao final do ano. A alternativa 1 não se altera, $V_1' =$ R\$ $790,02$. Reanalizando a alternativa 2 temos:*

Figura 23 – Alternativa 2



Fonte: imagem do autor

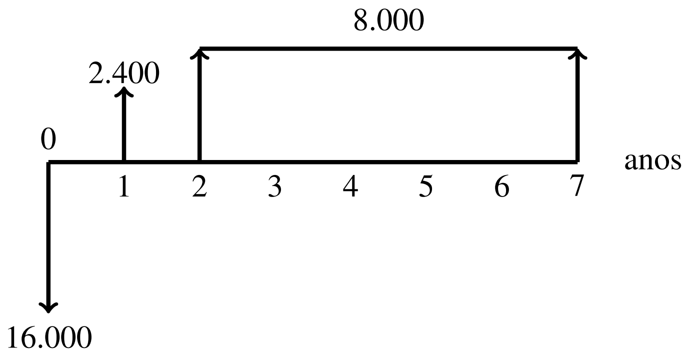
O custo do empréstimo deve ser calculado com κ = 40% ao ano.

Figura 24 – Custo do Empréstimo

Fonte: imagem do autor

Fluxo final, κ de 30% ao ano.

Figura 25 – Fluxo Final



Fonte: imagem do autor

$$V_2' = 6.462,70 - 5.709,98 = R\$\ 752,72.$$

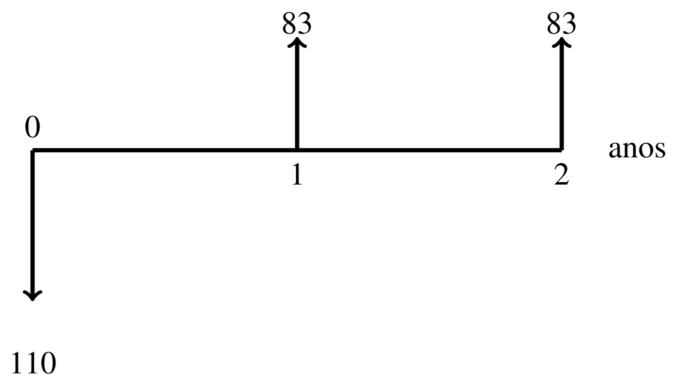
Nessas condições de ter que fazer um empréstimo de R$ 4.000,00, a alternativa 1 *seria mais viável.*

Uma última análise a partir do método do VAUE fará referência a situações de aplicações e/ou investimentos que envolvam alternativas com vidas diferentes, ou seja, os horizontes de planejamento são distintos.

Duas situações são possíveis. A primeira é a de que os investimentos podem ser repetidos nas mesmas condições iniciais. A outra é a de que os investimentos sejam realizados isoladamente, ou seja, sem repetição. Os casos com repetição tem sua aplicação na situação de substituição de equipamentos de produção por exemplo. Já os casos sem repetição aplicam-se, por exemplo, na compra de um equipamento provisório.

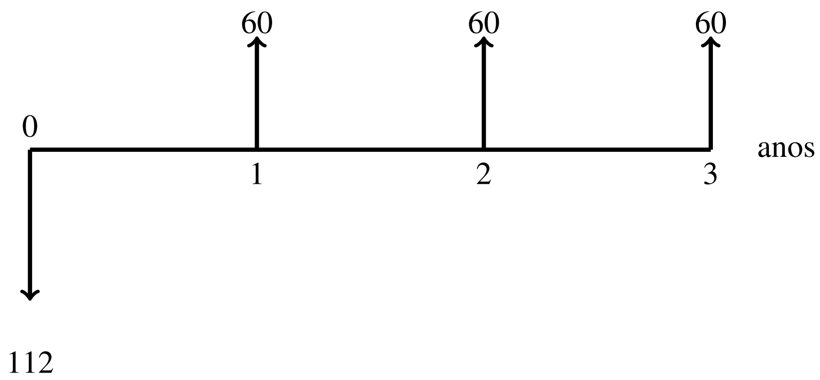
Exemplo 3.3. *Considere as alternativas de investimentos com vidas diferentes explicitadas pelos fluxos de caixa abaixo, κ = 10% ao ano.*

Figura 26 – Alternativa 1



Fonte: imagem do autor

Figura 27 – Alternativa 2

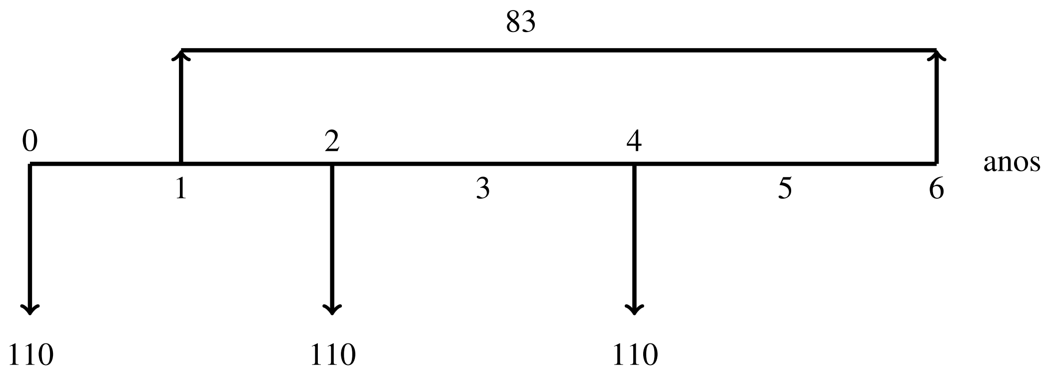


Fonte: imagem do autor

Verifiquemos qual a melhor alternativa na possibilidade de os investimentos poderem repetirem-se e na possibilidade de eles não poderem repetir-se.

No caso de os investimentos poderem repetir-se pode-se pensar que há a necessidade de tornar iguais os horizontes de planejamento. Isso pode ser feito tomando-se o mmc dos tempos, ou seja, mmc(2,3) = 6. Assim, o investimento 1 se repetiria duas vezes e o investimento 2 uma vez, e os fluxos de caixa ficariam assim:

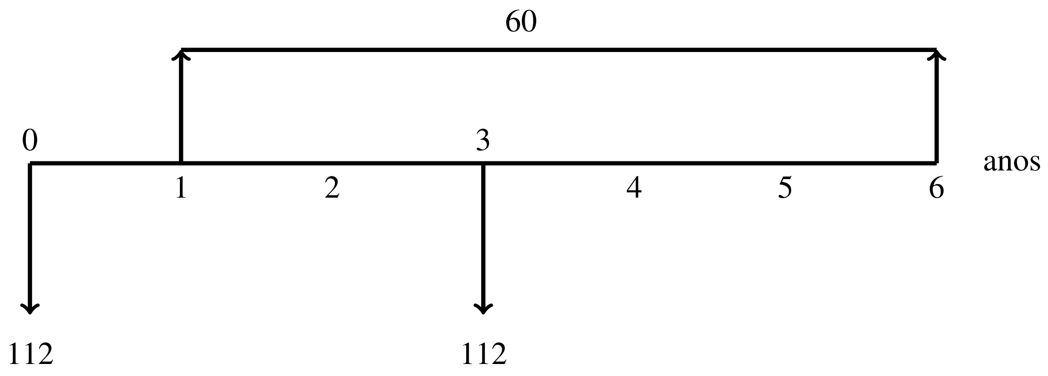
Figura 28 – Alternativa 1 Modificada



Fonte: imagem do autor

$$V' = 83 - \left(110 + \frac{110}{(1,1)^2} + \frac{110}{(1,1)^4}\right)\left(\frac{0,1}{1-(1,1)^{-6}}\right) \approx 19,62.$$

Figura 29 – Alternativa 2 Modificada

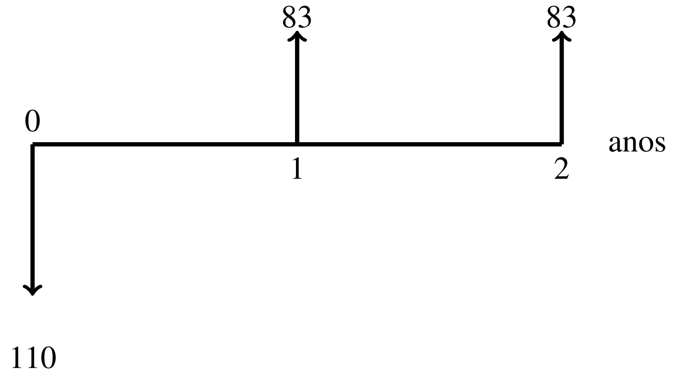


Fonte: imagem do autor

$$V' = 60 - \left(11 + \frac{112}{(1,1)^3}\right)\left(\frac{0,1}{1-(1,1)^{-6}}\right) \approx 14,96.$$

Contudo, fazendo os cálculos dos $V's$ sem igualar o horizonte de planejamento teríamos:

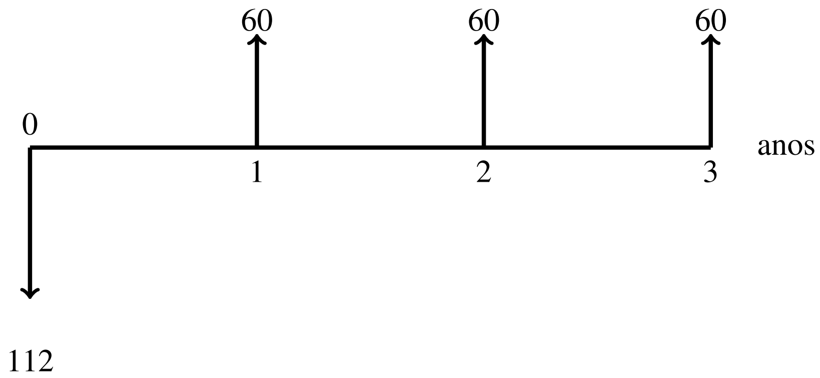
Figura 30 – Alternativa 1: κ = 10% ao ano.



Fonte: imagem do autor

$$V' = 83 - 110\left(\frac{0,1}{1-(1,1)^{-2}}\right) \approx 19,62.$$

Figura 31 – Alternativa 2: κ = 10% ao ano.



Fonte: imagem do autor

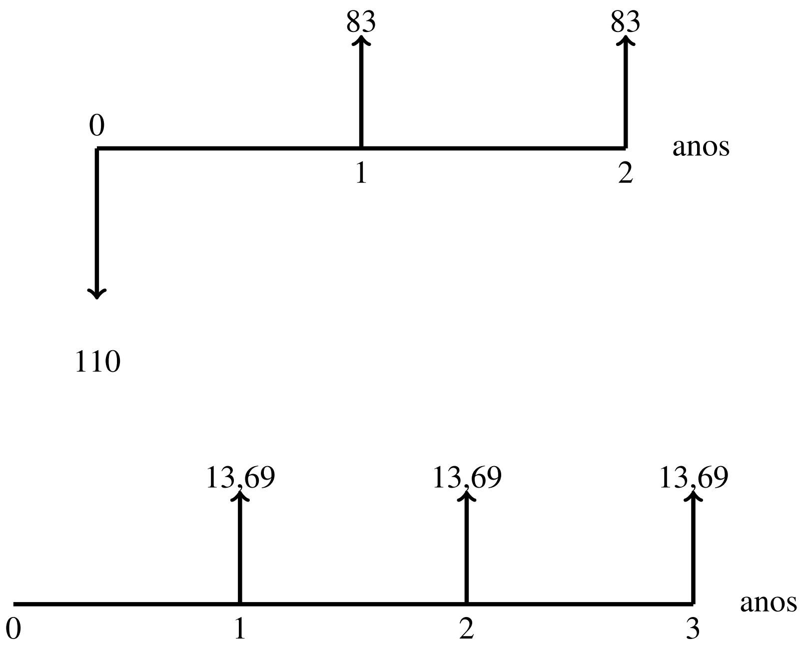
$$V' = 60 - 112\left(\frac{0,1}{1-(1,1)^{-3}}\right) \approx 14,96.$$

Sem igualar os horizontes de planejamento, obtemos os mesmos resultados.

Essa é a grande vantagem do uso do método do VAUE, o fato de o horizonte de planejamento estar implícito no método.

No caso de os investimentos não poderem repetir-se, como o investimento 1 possui um horizonte de planejamento menor, deve-se considerar que no período em que o investimento 1 difere do investimento 2, os valores estejam sendo aplicados à TMA. O fluxo de caixa então migra de dois para três anos.

Figura 32 – Alternativa 1 Migrando de 2 Para 3 Anos



Fonte: imagem do autor

$$V' = \left(\frac{83}{1+0,1} + \frac{83}{(1+0,1)^2} - 110\right)\left(\frac{0,1}{1-(1,1)^{-3}}\right) \approx .$$

Alternativa 2:

O horizonte de planejamento já é 3, portanto o V' permanece $14,96$.

Na condição de o investimento não poder repetir-se, o investimento 2 é melhor que o investimento 1.

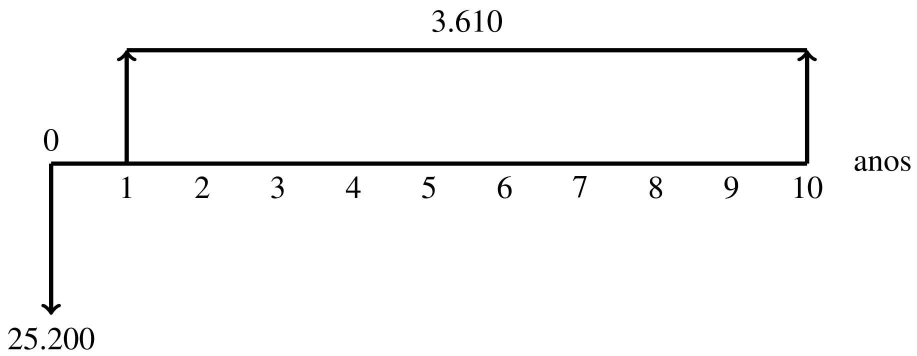
Casos sem repetição deve-se, por facilidade, utilizar o método VPL para a análise de um investimento. Já casos com repetição o mais recomendado é o VAUE.

3.1 TOMADA DE DECISÃO VIA TAXA INTERNA DE RETORNO

Como já citamos, muitos analistas financeiros optam por o método da TIR pelo fato de ele mostrar a rentabilidade de um investimento. Contudo, os inconvenientes que podem surgir com as tomadas de decisão via TIR merecem bastante atenção, pois recaem sobre a possibilidade da existência de múltiplas taxas internas de retorno em empreendimentos não convencionais (mais de uma inversão de sinais no fluxo de caixa) e o problema da taxa de reinvestimento.

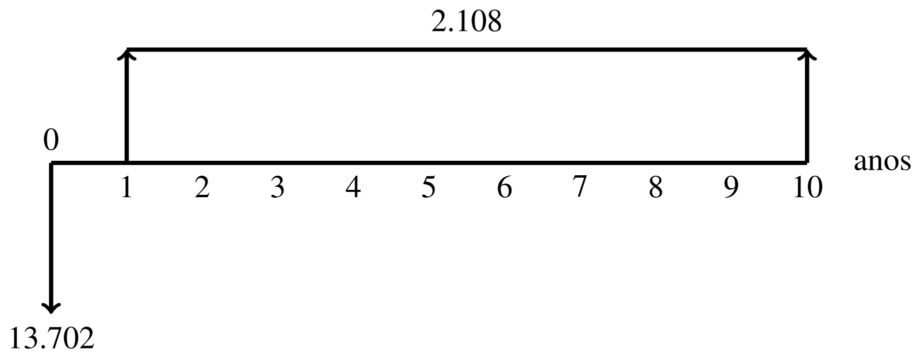
Para ilustrar este último aspecto (reinvestimento), vejamos a situação dos fluxos de caixa a seguir. Há duas opções de aplicação mutuamente excludentes, ou seja, o aplicador só pode optar por uma das duas. Admite-se, é claro, que há recursos suficientes para que o aplicador opte

Figura 33 – Aplicação 1



Fonte: imagem do autor

Figura 34 – Aplicação 2



Fonte: imagem do autor

por qualquer uma das aplicações, ou na pior das hipóteses, o dinheiro possa ser levantado a uma taxa de juros de mercado TMA. O tempo está em anos e a TMA é de 6% ao ano.

Para a TIR da aplicação 1, temos

$$25.200 = \frac{3.616}{(1+\rho)} + \frac{3.616}{(1+\rho)^2} + \cdots + \frac{3.616}{(1+\rho)^{10}}.$$

Substituindo $\dfrac{1}{1+\rho} = x$, temos

$$x^{10} + x^9 + \cdots + x - 7 = 0.$$

Esta equação possui única raiz real x_3 é aproximadamente $0,9339$. Voltando na substituição temos $\dfrac{1}{1+\rho} = 0,9339$. Segue que $\rho \approx 7,1\%$ ao ano.

Para a TIR da aplicação 2, temos

$$15.810 = \frac{2.108}{(1+\rho)} + \frac{2.108}{(1+\rho)^2} + \cdots + \frac{2.108}{(1+\rho)^{10}}.$$

Com a mesma substituição temos a equação

$$x^{10} + x^9 + \cdots + x - 6,5 = 0,$$

cuja única raiz real é aproximadamente $0,9199$. Segue que $\rho \approx 8,7\%$ ao ano.

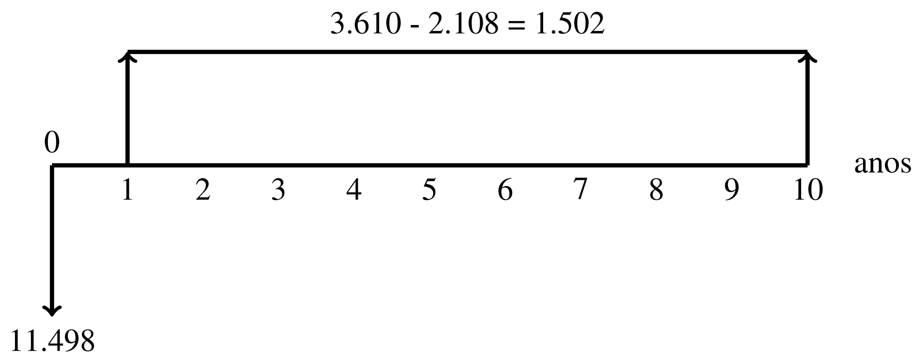
Como κ é de 6% ao ano, $\rho_1 \approx 7,1\%$ ao ano e $\rho_2 \approx 8,7\%$ ao ano, ambas as alternativas seriam viáveis. Tem-se também que $\rho_2 > \rho_1$, mas isso não é suficiente para dizer que 2 é preferível a 1. A tomada final de decisão via ρ só poderá ser feita levando-se em consideração como serão utilizados os recursos provenientes da diferença dos investimentos e ainda o que se fará com as parcelas que irão retornar do primeiro até o décimo ano. É o problema do reinvestimento. Calculando V_1 e V_2 às taxas de 5% ao ano e 6% ao ano temos:

$V_1(5\%) = 2.548,06$ e $V_2(5\%) = 2.452,78$ a 5% ao ano, logo $V_1 > V_2$.

$V_1(6\%) = 1.292,37$ e $V_2(6\%) = 1.710,44$ a 6% ao ano, logo $V_1 < V_2$.

Aplicar R$ 25.200,00 em 1 equivale a aplicar R$ 13.702,00 em 2 e R$ 11.498,00 em um investimento incremental $(1-2)$. O fluxo de caixa desse investimento incremental é:

Figura 35 – Fluxo de Caixa Incremental



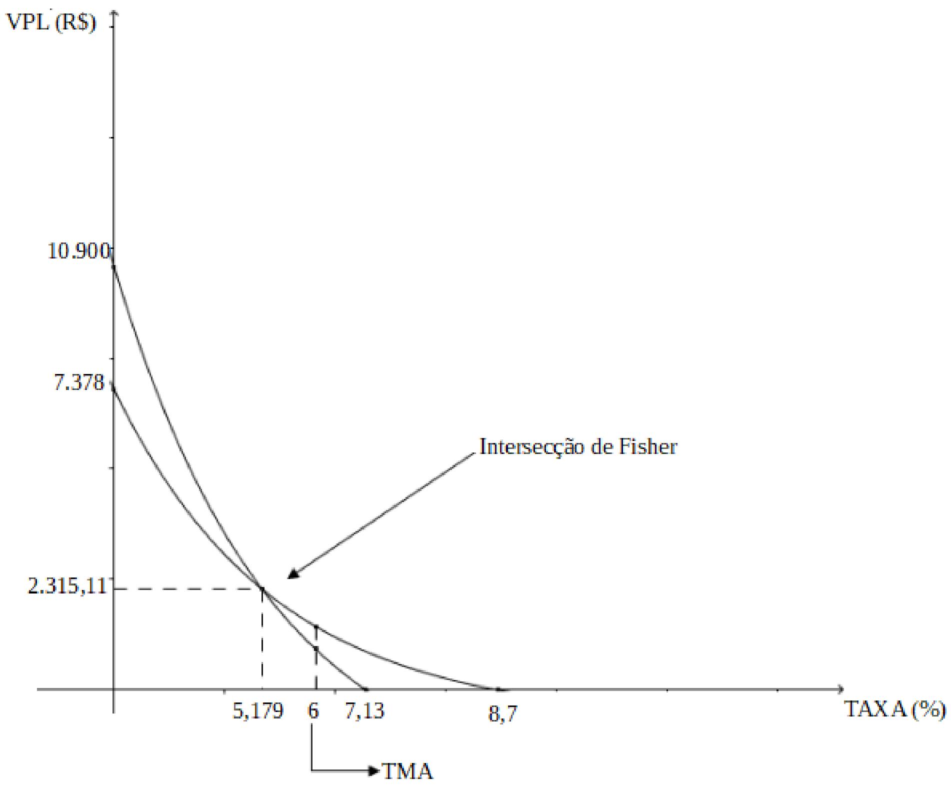
Fonte: imagem do autor

Neste caso $\rho_{(1-2)} = 5,179\%$ ao ano. Em resumo:

Tabela 3 – Resumo: Aplicação 1 x Aplicação 2

	Ano	Investimento (1)	Investimento (2)	Investimento (1 - 2)
Investimento Inicial	0	-25.200	-13.702	-11.498
Retornos	1 a 10	3.610	2.108	1.502
TIR		7,13%	8,7%	5,179%

Figura 36 – Intersecção de Fisher



Fonte: imagem do autor

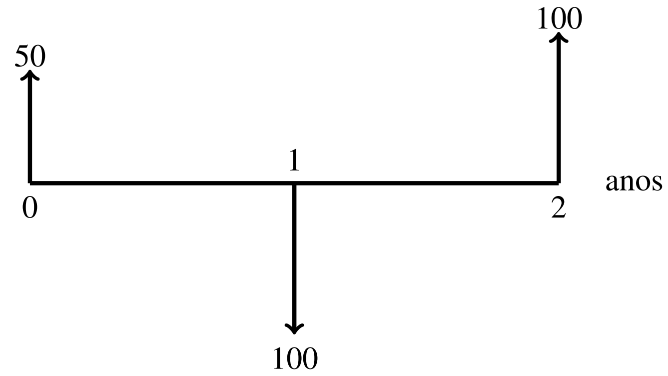
Observa-se que se os valores forem descontados a taxas inferiores a 5,179% ao ano a aplicação 1 é preferível pois apresenta VPL maior que o de 2. Para valores superiores a 5,179% ao ano a aplicação 2 é preferível pois apresenta VPL maior que o de 1. Exatamente a 5,179% ao ano as aplicações são equivalentes pelo método da TIR.

A taxa de 5,179% ao ano é chamada de Taxa de Fisher e o ponto (5,179 ; 2.315,11) é chamado de Intersecção de Fisher.

A existência dessa taxa deve-se ao fato de que o método da Taxa Interna de Retorno não leva em consideração o que é feito com a diferença entre as aplicações e entre os ganhos per si. Concluindo, como $\kappa > Fisher$ então de fato 2 é uma alternativa melhor que 1. Veja o gráfico $V($ R$) x Taxa representado na Figura 36.

Em última análise, levemos em consideração os seguintes fluxos de caixa.

Figura 37 – Fluxo de Caixa Sem Raízes Reais



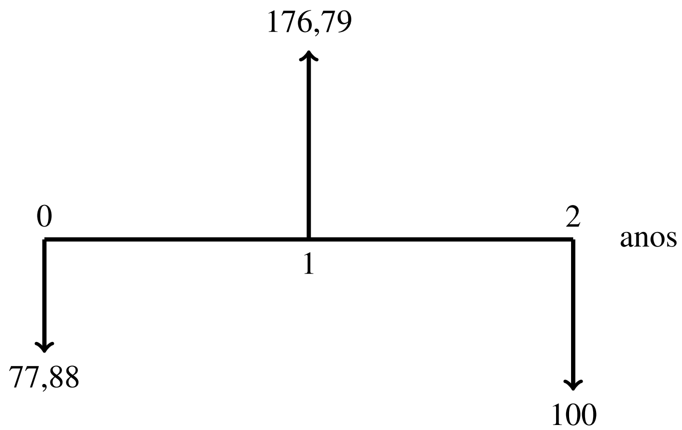
Fonte: imagem do autor

Primeiramente,

$$50 - \frac{100}{1+\rho} + \frac{100}{(1+\rho)^2} = 0,$$

donde $2x^2 - 2x + 1 = 0$. Como essa equação não possui raízes reais, apenas pela teoria aqui desenvolvida, não temos condições neste trabalho de analisar este fluxo de caixa. Uma maneira de verificar a viabilidade desse investimento encontra-se em (HARTMAN J. C.; SCHAFRICK, 2004).

Figura 38 – Fluxo de Caixa Com Raízes Múltiplas



Fonte: imagem do autor

Para o fluxo de caixa da Figura 38, temos $-77,88 + \dfrac{176,79}{1+\rho} - \dfrac{100}{(1+\rho)^2} = 0$, donde $-100x^2 + 176,79x - 77,88 = 0$. As raízes são $x_1 \approx 0,8333$ e $x_2 \approx 0,9346$. Segue que $\rho_1 \approx 20\%$ ao ano e $\rho_2 \approx 7\%$ ao ano.

Há duas taxas internas de retorno. Na seção seguinte mostraremos um método para sanar essa dificuldade.

3.2 TOMADA DE DECISÃO COM TIRS MÚLTIPLAS

Como visto anteriormente, uma das boas maneiras de testar a viabilidade de um investimento ou a preferência entre dois ou mais investimentos através do método da Taxa Interna de Retorno, é comparar a TIR com a TMA. Vimos também que o uso desse método pode enfrentar sérios problemas, como decidir o que fazer quando um projeto oferece mais de uma TIR. Essa é uma carência na literatura da área nos escritos em português.

Nesta seção, vamos buscar fomentar essa discussão pois entendemos ser ela de grande importância nos problemas de análise de investimentos.

A proposta de muitos autores quando nos deparamos com múltiplas Taxas Internas de Retorno é o abandono do método e a utilização de outro (como o VPL, por exemplo) para solucionar o problema. Aqui buscaremos uma maneira de tomar a decisão de investimento via TIR mesmo com TIRs múltiplas. Vamos expor brevemente o método proposto em (HARTMAN J. C.; SCHAFRICK, 2004).

Como já definido anteriormente, temos

$$V = V(\kappa, c_0, \cdots, c_t) = c_0 + \frac{c_1}{1+\kappa} + \frac{c_2}{(1+\kappa)^2} + \cdots + \frac{c_t}{(1+\kappa)^t}.$$

Uma Taxa Interna de Retorno ρ é uma taxa que torna nulo o Valor Presente Líquido. Assim:

$$\sum_{j=0}^{t} \frac{c_j}{(1+\rho)^j} = 0.$$

Considerando $c_0, \ldots, c_t$ constantes, definimos a inclinação da função $V = V(\kappa, c_0, \cdots, c_t)$ de acordo com sua primeira derivada como sendo

$$\frac{dV}{d\kappa} = -\frac{c_1}{(1+\kappa)^2} - \frac{2c_2}{(1+\kappa)^3} - \cdots - \frac{tc_t}{(1+\kappa)^{t-1}}.$$

Além disso, definimos que um investimento é viável quando $\frac{dV}{d\kappa} < 0$ no intervalo $(-1, \infty)$. Se for o caso de um empréstimo deve-se ter $\frac{dV}{d\kappa} > 0$ no intervalo $(-1, \infty)$.

Um ponto de máximo local ou de mínimo local da função polinomial V ocorre quando $\frac{dV}{d\kappa} = 0$. Exatamente nesse ponto um projeto muda de um investimento para uma oportunidade de empréstimo ou de uma oportunidade de empréstimo para um investimento.

Qualquer mudança na taxa de juros exerce influência sobre o Valor Presente Líquido. Uma mudança de sinal na inclinação da função de valor presente líquido significa que houve influência nos fluxos de caixa, mudando-os o bastante para alterar a "direção da função", mudando-a de um investimento para um empréstimo ou vice-versa.

Para solucionar o problema da existência de múltiplas TIRs vamos admitir por simplicidade que o polinômio que gera as TIRs não possui raízes complexas e possui no mínimo uma raiz real. Seguimos então o seguinte roteiro a seguir.

1) Definimos o Valor Presente Líquido como uma função da Taxa de Mínima Atratividade κ. Fazendo $V = V(\kappa, c_0, \cdots, c_t) = 0$, encontramos as TIRs ρ.

2) Tomamos a primeira derivada da função V e igualamos a zero para encontrarmos todos os pontos de máximos e mínimos $\overline{\rho}$. Para n taxas internas de retorno $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ existirão $n-1$ pontos de máximo ou de mínimo $\overline{\rho}_1, \overline{\rho}_2, \cdots, \overline{\rho}_{n-1}$.

3) Particionamos o domínio de acordo com os pontos $\overline{\rho}$, e determinamos se trata-se de um investimento ou de um empréstimo para cada partição. Para n TIRs, existirão n partições e no máximo uma TIR para cada partição.

(a) A primeira partição é definida como $(-1, \overline{\rho}_1)$.

(b) A última partição é definida como $(\overline{\rho}_{n-1}, \infty)$.

(c) Todas as outras partições são definidas como $(\overline{\rho}_j, \overline{\rho}_{j+1})$, para todo $j = 1, 2, \cdots, n-2$.

Baseado nas definições anteriormente estabelecidas, estaremos falando de um investimento se para todas as taxas de juros na partição tivermos $\dfrac{dV}{d\kappa} < 0$ ou falando de um empréstimo se para todas as taxas de juros na partição ocorrer $\dfrac{dV}{d\kappa} > 0$.

4) Localizamos a partição onde se encontra a TMA κ_0 do problema. Caso κ_0 seja um ponto de máximo ou de mínimo, deve-se escolher uma partição a direita e outra a esquerda desse ponto. As duas partições nos darão a mesma conclusão. A ρ que estiver na mesma partição que a κ_0 é a ρ relevante. Basta agora apenas fazer uma comparação entre κ_0 e a ρ relevante. Assim

(a) Em se tratando de um investimento:

Se $\rho > \kappa_0$, deve ser aceito.

Se $\rho = \kappa_0$, é indiferente[1].

Se $\rho < \kappa_0$, deve ser rejeitado.

(b) Em se tratando de um empréstimo:

Se $\rho < \kappa_0$, deve ser aceito.

Se $\rho = \kappa_0$, é indiferente.

Se $\rho > \kappa_0$, deve ser rejeitado.

Exemplo 3.4. *(HARTMAN J. C.; SCHAFRICK, 2004) Considere que uma empresa possui a seguinte possibilidade para um projeto refletido no fluxo de caixa:* $c_0 = -1$, $c_1 = 6$, $c_2 = -11$ *e* $c_3 = 6$. *Os valores estão em milhares de reais, o tempo está em anos e* $\kappa_0 = 10\%$ *ao ano. Vejamos se o projeto é viável. Temos*

$$V(\kappa) = -1 + \frac{6}{1+\kappa} + \frac{-11}{(1+\kappa)^2} + \frac{6}{(1+\kappa)^3},$$

[1] aceitar ou rejeitar

cujas raízes são 0, 1 *e* 2. *A primeira derivada é*

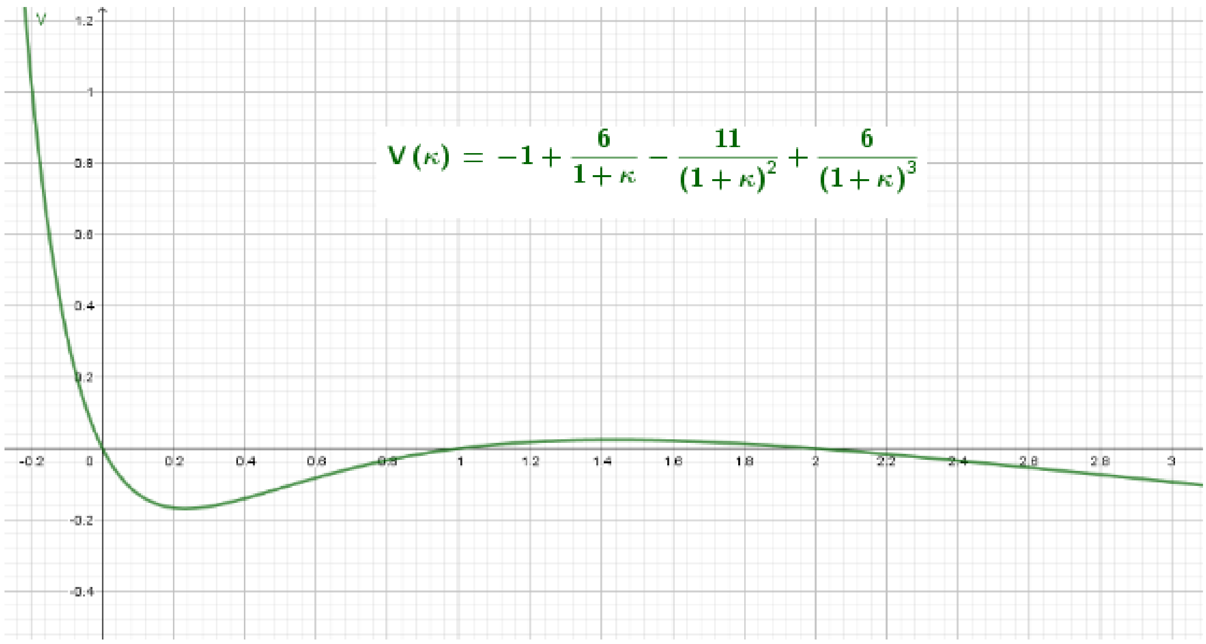
$$\frac{dV}{d\kappa} = -\frac{6}{(1+\kappa)^2} + \frac{22}{(1+\kappa)^3} - \frac{18}{(1+\kappa)^4}.$$

Os pontos de máximos e mínimos locais correspondem (aproximadamente) aos pontos $0,232408$ *e* $1,4342582$.

Obtemos assim a partição $(-1; 0,232)$, $(0,232; 1,434)$ *e* $(1,434; \infty)$.

Temos que $\kappa_0 = 10\%$ *ao ano se encontra no intervalo* $-1 < \kappa \leqslant 0,232$ *(veja a Tabela 4), ou seja, onde a TIR relevante é zero. Nesse caso, conforme a Tabela 4, deve-se rejeitar o projeto.*

Figura 39 – Taxa Interna de Retorno Relevante



Fonte: imagem do autor

Outras alternativas para se tomar uma decisão sobre um investimento quando da existência de TIRs múltiplas podem ser encontradas em (ZHANG, 2005) e em (ZENTGRAF, 2007). Neste último, a abordagem é feita através do que é conhecido na literatura como Taxa Interna de Retorno Modificada. Todavia, nesta técnica é preciso calcular o valor presente dos investimentos e o valor futuro das receitas.

Tabela 4 – Decisões de Investimentos Para Todas as Possíveis TMAs Para o Exemlo 3.4

PARTIÇÃO taxa de investimento	TIR relevante	Tipo de partição	TMA	Decisão
$-1 < \kappa \leq 0,232$	0	Empréstimo	$-1 < \kappa < 0$	Aceitar
			$\kappa = 0$	Indiferente
			$0 < \kappa \leq 0,232$	Rejeitar
$0,232 \leq \kappa \leq 1,434$	1	Investimento	$0,232 \leq \kappa < 1$	Rejeitar
			$\kappa = 1$	Indiferente
			$1 < \kappa \leq 1,434$	Aceitar
$\kappa \geq 1,434$	2	Empréstimo	$1,434 \geq \kappa < 2$	Aceitar
			$\kappa = 2$	Indiferente
			$\kappa > 2$	Rejeitar

4 APLICAÇÕES DOS MÉTODOS DE ANÁLISE DE INVESTIMENTOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

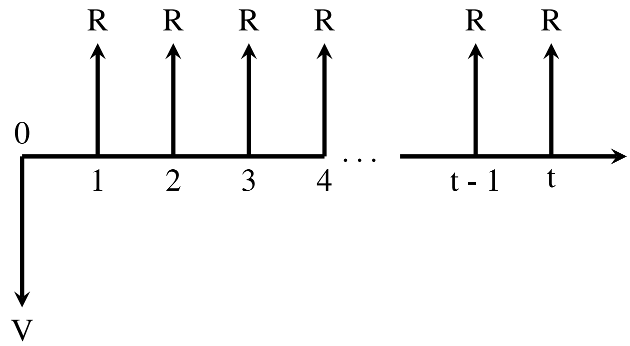
A matemática financeira de modo geral ocupa-se em deslocar o dinheiro no tempo. As operações financeiras quase que em sua totalidade são realizadas através do regime composto de capitalização de juros dados pela Equação 2.

Uma boa maneira de demonstrar a equação $M(t) = C_0(1+i)^t$ é observar que os valores do capital crescem a uma taxa constante i, e desse modo formam uma progressão geométrica (PG) de razão $1+i$.

Assim, a matemática financeira é uma das importantes aplicações de progressão geométrica, tema este abordado no ensino médio.

Para uma série de capitais uniformes, como por exemplo o fluxo de caixa dado pela Figura 40, e valendo-se da Equação 2, temos

Figura 40 – Série da Capitais Uniformes



Fonte: imagem do autor

$$V = R\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^t}\right].$$

Dentro dos colchetes temos a soma dos t primeiros termos de uma PG com primeiro termo e razão iguais a $\frac{1}{1+i}$. Lembre que a soma dos t primeiros termos de uma PG (a_i) de razão q e primeiro termo a_1 é dada por $S_t = a_1\left(\frac{1-q^t}{1-q}\right)$. Assim

$$V = R\left[\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}\right].$$

Em sua grande maioria, os livros texto de ensino médio demonstram a soma dos t primeiros termos da PG (a_i) da seguinte foma. Seja

$$S_t = a_1 + a_2 + \cdots + a_{t-1} + a_t.$$

Multiplicando por t obtemos

$$qS_t = a_2 + a_3 + \cdots + a_t + a_{t+1}.$$

Assim,

$$S_t - qS_t = a_1 - a_{t+1},$$

donde finalmente tem-se

$$S_t = a_1 \left(\frac{1 - q^t}{1 - q} \right).$$

Outra demonstração para a relação que nos dá a soma dos t primeiros termos de uma PG pode ser feita por indução sobre os números de parcelas da soma. Um roteiro para esta conta encontra-se na primeira avaliação da disciplina de Matemática Discreta (MA12) do PROFMAT, do ano de 2014, cujo recorte encontra-se abaixo.

Figura 41 – Recorte AV1 - MA12 - 2014

PROFMAT **MA12 – Matemática Discreta – AV1 – 2014** SBM

Questão 1 **[2,0 pt]**

(a) Defina progressão geométrica de primeiro termo a e razão q ($q \neq 0$ e $q \neq 1$).

(b) Conjecture uma fórmula para o termo geral a_n em função de a, n e q. Em seguida, prove essa fórmula por indução em n.

(c) Se $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, conjecture uma fórmula para S_n em função de a, n e q. Em seguida, prove essa fórmula por indução em n.

(d) A partir dos itens (b) e (c), obtenha uma fórmula para S_n em função a, a_n e q.

Fonte:(SBM., 2018, Acesso em: 03 jan. 2018)

Progressões geométricas encontram bastante lugar de aplicação nos métodos VPL e VAUE, como vimos em diversos exemplos neste trabalho.

Vejamos mais dois exemplos com apelo prático mais evidente.

Exemplo 4.1. *Maria tem duas opções de pagamento na aquisição de uma máquina de lavar roupas.*

1) Quatro prestações mensais de R\$ $170,00$ *cada.*

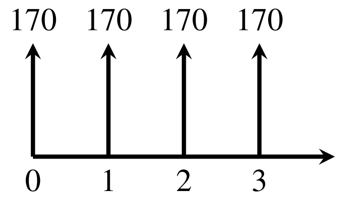
2) Dez prestações de R\$ $70,00$ *cada.*

Nas duas opções, a primeira prestação é paga no ato da compra[1]. *Se o dinheiro vale 2% ao mês para Maria, qual a melhor opção que ela possui?*

Para a primeira opção temos,

$$V = 170 + \frac{170}{1+0,02} + \frac{170}{(1+0,02)^2} + \frac{170}{(1+0,02)^3} = R\$\ 660,26$$

Figura 42 – 1ª opção para o Exemplo 4.2

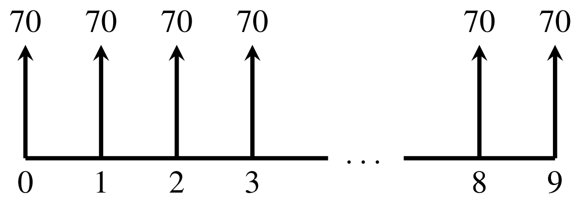


Fonte: imagem do autor

Já para a segunda opção temos

$$V = 70 + \frac{70}{1+0,02} + \frac{70}{(1+0,02)^2} + \cdots + \frac{70}{(1+0,02)^9} = R\$\ 641,36.$$

Figura 43 – 2ª opção para o Exemplo 4.2



Fonte: imagem do autor

Maria deve preferir o pagamento em 10 prestações. Cabe observar que poderia-se supor, de maneira incorreta, que o primeiro esquema é preferível em relação ao segundo pois o total pago no primeiro é R\$ $680,00$ *ante R\$* $700,00$ *no segundo esquema.*

Exemplo 4.2. *Um objeto cujo preço é R\$* $820,00$ *é vendido em* 12 *prestações mensais iguais. A primeira deverá ser paga um mês após a compra (postecipada). Se os juros são de* 3% *ao mês, determine o valor das prestações.*

$$820 = \frac{R}{0,03}(1-(1+0,03)^{-12}) \Rightarrow R = R\$\ 82,38.$$

[1] essas prestações são ditas antecipadas pois a primeira prestação é paga no ato da compra. Nos casos em que a prestação é paga um tempo depois da compra ela é dita postecipada, conforme citamos nos modelos de anuidades).

Vimos que encontrar uma TIR de um empreendimento consiste em estudar as raízes de um certo polinômio de grau t.

O ensino de equações polinomiais ocorre no terceiro ano do ensino médio.

Vimos neste trabalho que o estudo das equações polinomiais, mesmo de grau baixo, é bastante útil no caso da TIR. Em particular, quando o grau é 1 ou 2, estes problemas podem ser abordados no ensino médio.

De fato, caso o fluxo de caixa possua apenas uma entrada/saída de caixa, não sendo esta na data zero, a análise é a trivial aplicação da Equação 2.

Na condição de que o fluxo de caixa apresente entradas/saídas de caixa nas datas (0,1 e 2), (0 e 2), (1 e 2) ou apenas na data 2, o problema consiste em resolver uma equação quadrática.

Apesar da existência da Fórmula de Cardano para encontrar raízes da equação cúbica e do Método de Ferrari para quárticas, não é usual a utilização de tais abordagens no ensino médio.

Pode-se produzir ótimos exemplos de análise de investimento utilizando somente a fórmula quadrática para análise.

5 CONCLUSÃO

A temática de educação financeira está alinhada com as diretrizes para formação de professores de matemática e com o currículo do ensino básico.

Durante o percurso desse trabalho nos deparamos com muitos materiais das áreas de administração, matemática financeira e engenharia econômica e percebemos quão superficial é a abordagem da matemática envolvida nos métodos determinísticos de análise de investimentos, em particular do método da taxa interna de retorno.

Nos decepcionamos ao encontrar em muitos materiais de referência na área da engenharia econômica sugestões para abandonarmos o método TIR no caso de não haver TIRs reais ou de haver TIRs múltiplas, estão entre estes, materiais oficiais do Ministério da Educação e Cultura (MEC).

Entendemos que a literatura da área nos escritos em português precisa ser aprimorada nesse sentido, uma vez que, como dito no corpo do trabalho, o método TIR é o preferido pelos analistas financeiros uma vez que é um indicador da rentabilidade do projeto.

Este trabalho não sanou totalmente tais dificuldades, mas abriu um novo horizonte para pesquisas futuras nas tomadas de decisões entre projetos financeiros via TIR.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, A. L. M. **Análise numérica: engenharias mecânica e de materiais.** Disponível em: http://www.mat.uc.pt/ alma/aulas/anem/sebenta/cap2.pdf. Acesso em: 19 ago. 2017. Coimbra., 2002, p.35.

BRASIL., B. B. central do. **Calculadora do cidadão**. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/calculadora/calculadoracidadao.asp., 2015, Acesso em: 26 set. 2015.

BRASIL., B. B. central do. **Calculadora do cidadão**. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/calculadora/calculadoracidadao.asp., 2018, Acesso em: 03 jan. 2018.

CREDITOS., S. P. garantidor de. **Recorte - Liquidação extrajudicial**. Disponível em: http://www.fgc.org.br/Backend/Upload/media/arquivos/Nossos%20Numeros/Estatisticas., 2017, Acesso em: 14 set. 2017.

DATA., S. P. **Recorte - Saude financeira dos bancos**. Disponível em: https://bancodata.com.br/bancos., 2017, Acesso em: 14 set. 2017.

FAZENDA., B. M. da. **Tesouro direto**. Disponível em: http://www.tesouro. fazenda.gov.br/tesouro-direto., 2016, Acesso em: 23 set. 2016.

FILHO NELSON; HARTMUT KOPITKE, B. a. e. C. **Análise de investimentos: matemática financeira, engenharia econômica, tomada de decisão, estratégia empresarial**. São Paulo: Ed. Atlas., 2000.

FONSECA, J. W. F. d. **Análise e decisão de investimentos**. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 2009.

HARTMAN J. C.; SCHAFRICK, I. **The Engineering Economist, v. 49, n. 2, pp. 139-158.** Pennsylvania, USA, 2004.

LORIE J.H.; SAVGE, L. J. **Three problems in rationing capital. The Journal of Business, v. 28, n. 4, 1995, pp. 228-239.** Chicago, USA, 1995.

MATHIAS W.F.; GOMES, J. **Matemática financeira. 3a. ed.** São paulo: Atlas, 2002.

MEC, B. **Caderneta de poupança**. Disponível em: http://www.klickeducacao.com.br/conteudo/ pagina /0,6313,POR-5111-49913-,00.html., 2016, Acesso em: 25 set. 2016.

MORGADO A.C. ; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. Rio de janeiro: SBM., 2013.

PUCCINI, E. C. **Matemática financeira e análise de investimentos**. Florianópolis: UFSC; [Brasília] : CAPES : UAB., 2011.

SBM., R. de J. . **Provas Nacionais**. Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/provas-nacionais/, 2018, Acesso em: 03 jan. 2018.

ZENTGRAF, W. **Matemática financeira: com emprego de funções e planilhas, modelo Excel**. Rio de janeiro: Elsevier, 2007.

ZHANG, D. **A different perspective on using multiple internal rates of return: the IRR parity technique. The Engineering Economist, v. 50, n. 4, pp. 327-335.** Missouri, USA, 2005.