

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

FLAVIA MESCKO FERNANDES

POLÍGONOS E POLIEDROS EQUIDECOMPONÍVEIS

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2018

FLAVIA MESCKO FERNANDES

POLÍGONOS E POLIEDROS EQUIDECOMPONÍVEIS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientador: Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós

CURITIBA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

F363p
2018

Fernandes, Flavia Mescko
Polígonos e poliedros equidecomponíveis / Flavia Mescko
Fernandes.-- 2018.
116 f.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.
Texto em português com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal
do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional, Curitiba, 2018.
Bibliografia: f. 109-111.

1. Wallace, William, 1768-1843. 2. Bolyai, Farkas,
1775-1856. 3. Gerwien, Paul. 4. Hilbert, David, 1862-1943. 5.
Demonstração automática de teoremas. 6. Polígonos. 7.
Poliedros. 8. Isometria (Matemática). 9. Geometria. 10.
Matemática - Estudo e ensino. 11. Professores de matemática -
Formação. 12. Matemática - Dissertações. I. Nós, Rudimar Luiz,
orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 22 -- 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba - UTFPR
Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 47

A Dissertação de Mestrado intitulada **Polígonos e poliedros equidecomponíveis**, defendida em sessão pública pelo(a) candidato(a) **Flavia Mescko Fernandes**, no dia 07 de fevereiro de 2018, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). Rudimar Luiz Nós - Presidente - UTFPR

Prof(a). Dr(a). Márcio Rostirolla Adames - UTFPR

Prof(a). Dr(a). Carlos Eduardo Durán Fernández - UFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 07 de fevereiro de 2018.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

Dedico este trabalho a Jesus Cristo e à minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pois dele procede toda a boa dádiva e todo dom perfeito. Sou grata por me dar sabedoria em cada etapa e o prazer de conquistas como esta.

À minha família, que sempre esteve ao meu lado, por sempre acreditar que posso chegar onde eu nem imagino que posso e ainda se oferecer para trilharmos o caminho juntos.

Aos amigos que viveram esta jornada junto comigo em um programa tão incrível como o PROFMAT. Percurso repleto de emoções e companheirismo em que celebramos muitas conquistas.

Ao meu orientador, Rudimar, por me inspirar a ser uma professora melhor a cada nova descoberta matemática. Pelos conselhos, conversas e estudos. Bem como aos demais professores do curso, por nos proporcionarem momentos de muito aprendizado.

À Sociedade Brasileira de Matemática, que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo”.

Galileu Galilei (1564-1642)

Nesta frase, Galileu revela o Criador como um grande geômetra.

RESUMO

FERNANDES, Flavia Mescko. **Polígonos e poliedros equidecomponíveis**. 116 f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. Curitiba, 2018.

Apresentamos neste trabalho o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e o terceiro problema de Hilbert. Empregamos o primeiro para demonstrar a área de figuras geométricas planas por equicomposição e, o segundo, para mostrar que a demonstração de relações para o cálculo de volumes nem sempre pode ser feita por equicomposição. Ainda, analisamos alguns livros didáticos da Educação Básica para avaliar o quanto a equicomposição é utilizada para estabelecer relações para o cálculo de áreas e de volumes. Sugerimos também atividades lúdico-manipulativas para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio explorando a equicomposição em duas e em três dimensões.

Palavras-chave: o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien; o terceiro problema de Hilbert; isometrias; área; volume.

ABSTRACT

FERNANDES, Flavia Mescko. **Polygons and polyhedrons equivalent by decomposition.** 116 f. Dissertation – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. Curitiba, 2018.

We show in this work the Wallace-Bolyai-Gerwien theorem and Hilbert's third problem. We use the first to prove by equicomposition the area of plane geometric figures and the second to show that the demonstration of relations for volumes can not always be done by equicomposition. Also, we have analyzed some textbooks of Basic Education to evaluate how much equicomposition is used to establish relations for areas and volumes. We also suggest ludic-manipulative activities for Elementary and High School by exploring the equicomposition in two and three dimensions.

Keywords: Wallace-Bolyai-Gerwien theorem; Hilbert's third problem; isometries; area; volume.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – (a) Tangram (ESCOLAR, 2015); (b) composição com as peças do Tangram	17
FIGURA 1.2 – (a) <i>Stomachion</i> de Arquimedes (LÓPEZ, 2016); (b) composição com as peças do <i>Stomachion</i>	17
FIGURA 2.1 – Transformações geométricas que preservam medidas e forma: (a) no plano; (b) no espaço tridimensional (SILVA, 2005)	21
FIGURA 2.2 – Reflexão de pontos pertencentes a semirretas opostas	22
FIGURA 2.3 – Reflexão de pontos pertencentes à mesma semirreta	23
FIGURA 2.4 – Translação na reta	23
FIGURA 2.5 – Translação na reta: 1º caso	24
FIGURA 2.6 – Translação na reta: 2º caso	24
FIGURA 2.7 – Retas perpendiculares	25
FIGURA 2.8 – Simetria em torno de um ponto	26
FIGURA 2.9 – Reflexão do ponto X em torno da reta r	26
FIGURA 2.10– Reflexão em torno de uma reta - 2º caso: (a) $X, Y \notin r$; (b) $Y \in r$	27
FIGURA 2.11– Reflexão em torno de uma reta - 3º caso: (a) $X, Y \notin r$; (b) $X \in r$	28
FIGURA 2.12– Reflexão em torno de uma reta - 4º caso	28
FIGURA 2.13– Reflexão de uma figura	29
FIGURA 2.14– Translação no plano: (a) $X \in \overline{AB}$; (b) $X \notin \overline{AB}$	30
FIGURA 2.15– Translação no plano - 1º caso: (a) $\overline{XX'} \cap \overline{YY'} = \emptyset$; (b) $\overline{XX'} \cap \overline{YY'} = \{Y\}$	30
FIGURA 2.16– Translação no plano - 2º caso	31
FIGURA 2.17– Translações na obra <i>Three Birds n28</i> de Escher (TESSELLATION, 2017)	32
FIGURA 2.18– Rotação	33
FIGURA 2.19– Rotação de um segmento	33
FIGURA 2.20– Rotação de um segmento cujos extremos X e Y são colineares ao centro O : (a) X está entre O e Y ; (b) O está entre X e Y	34
FIGURA 2.21– Rotação de um segmento cujos extremos X e Y não são colineares ao centro O	34
FIGURA 2.22– Rotação na obra <i>Shells and Starfish</i> de Escher (TESSELLATION, 2017)	35
FIGURA 2.23– (a) Reflexão com deslizamento; (b) reflexão com deslizamento de uma figura	35
FIGURA 2.24– Reflexão em torno de um plano	37
FIGURA 2.25– Rotação em torno de uma reta	38
FIGURA 2.26– Rotação em torno de uma reta: XY não está contido em Π ou em um plano paralelo a Π	39
FIGURA 2.27– Translação de um segmento no espaço	39
FIGURA 2.28– Reflexão com deslizamento no espaço	40
FIGURA 2.29– Rotação refletida no espaço	40
FIGURA 2.30– Figuras congruentes: (a) trapézios; (b) prismas (SILVA, 2005)	41
FIGURA 2.31– Pirâmides congruentes: (a) de base triangular (SILVA, 2005); (b) de base hexagonal (SILVA, 2005)	41
FIGURA 2.32– Isoedros (MATHPUZZLE, 2017)	43

FIGURA 3.1 – Decomposição de um quadrado (MATHEMA, S.d.)	45
FIGURA 3.2 – Triangulações de um polígono não convexo (MARQUES, 2012)	45
FIGURA 3.3 – Triangulação de um polígono qualquer: 1° caso	47
FIGURA 3.4 – Triangulação de um polígono qualquer: 2° caso	48
FIGURA 3.5 – Triângulo ABC equicomposto ao retângulo $ABFE$	50
FIGURA 3.6 – Paralelogramos equicompostos: 1° caso	51
FIGURA 3.7 – Paralelogramos equicompostos: 2° caso	51
FIGURA 3.8 – Paralelogramos equicompostos: 3° caso	52
FIGURA 3.9 – Retângulos equicompostos	53
FIGURA 3.10– Polígono equicomposto a um retângulo	54
FIGURA 3.11– Quadrado e triângulo equicompostos (WIKIPEDIA, 2017)	55
FIGURA 3.12– Construção do quadrado equidecomponível ao retângulo de lados a e b	56
FIGURA 3.13– Decomposição de um retângulo em um quadrado	57
FIGURA 3.14– Equicomposição de um triângulo equilátero e um quadrado	58
FIGURA 3.15– Equicomposição de um triângulo equilátero e um quadrado segundo Dudeney (KAGOIKI, 2001)	58
FIGURA 3.16– Quadrados $ABCD$ e $DEGF$, equicompostos ao quadrado $BIGH$	59
FIGURA 3.17– Demonstração do teorema de Pitágoras por equicomposição: a prova de Euclides ou a cadeira da noiva ou o moinho de vento (BOYER, 1974)	60
FIGURA 3.18– Prova do teorema de Pitágoras por equicomposição: (a) com o Tangram; (b) usando o Lema 3.5 (WIKIBOOKS, 2017)	61
FIGURA 3.19– Demonstração de Perigal para o teorema de Pitágoras por equicomposição de quadrados	62
FIGURA 3.20– Retângulos de bases congruentes	64
FIGURA 3.21– Paralelogramo equicomposto a um retângulo	66
FIGURA 3.22– Losango equicomposto a um retângulo	67
FIGURA 3.23– Trapézio equicomposto a um retângulo	68
FIGURA 3.24– Hexágono equicomposto a um paralelogramo	69
FIGURA 4.1 – Poliedros convexos: (a) tetraedro triakis (poliedro de Catalan); (b) dodecaedro truncado (poliedro de Arquimedes); (c) bipirâmide quadrada giroalongada (poliedro de Johnson)	70
FIGURA 4.2 – Prisma convexo de bases paralelas	71
FIGURA 4.3 – Paralelepípedos reto retângulos de bases congruentes	73
FIGURA 4.4 – Poliedros equivalentes segundo o princípio de Cavalieri (LEONI, 2017)	76
FIGURA 4.5 – Sólidos equivalentes formados por folhas de papel sulfite	76
FIGURA 4.6 – Prismas equivalentes	77
FIGURA 4.7 – Prisma triangular reto equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo	78
FIGURA 4.8 – Prisma pentagonal oblíquo equicomposto a um prisma pentagonal reto	79
FIGURA 4.9 – Seção paralela à base de um tetraedro	81
FIGURA 4.10– Tetraedros equivalentes	82
FIGURA 4.11– Decomposição de um prisma triangular em três tetraedros equivalentes (PAIVA, 2013)	83
FIGURA 4.12– Pirâmide decomposta em tetraedros de alturas congruentes	84
FIGURA 5.1 – Partição de um retângulo: (a) em duas peças; (b) em 4 peças (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2015)	87
FIGURA 5.2 – Figuras geométricas formadas por peças do Tangram (BIGODE, 2015)	87
FIGURA 5.3 – Atividades com figuras geométricas formadas por peças do Tangram (BIGODE, 2015)	88

FIGURA 5.4 – Figuras equivalentes (BIANCHINI, 2015)	88
FIGURA 5.5 – Polígonos equivalentes e o Stomachion de Arquimedes (GAY, 2014) ...	89
FIGURA 5.6 – Figuras equivalentes (SILVEIRA, 2015)	89
FIGURA 5.7 – Área do paralelogramo (BIANCHINI, 2015)	90
FIGURA 5.8 – Decomposição do paralelogramo em um retângulo (BIANCHINI, 2015)	91
FIGURA 5.9 – Equicomposição do paralelogramo (GAY, 2014)	91
FIGURA 5.10– Área do paralelogramo (SOUZA; PATARO, 2015)	92
FIGURA 5.11– Transformação de um triângulo em um retângulo (GAY, 2014)	93
FIGURA 5.12– Área do triângulo (GAY, 2014)	93
FIGURA 5.13– Equivalência de triângulos (BIANCHINI, 2015)	94
FIGURA 5.14– (a) Área do trapézio; (b) área do losango (GAY, 2014)	95
FIGURA 5.15– (a) Área do trapézio; (b) área do losango (SILVEIRA, 2015)	95
FIGURA 5.16– Demonstrações nas orientações para o professor (GAY, 2014)	96
FIGURA 5.17– Volume de uma pirâmide triangular (PAIVA, 2013)	97
FIGURA 5.18– Tetraedros equivalentes na decomposição do prisma triangular (PAIVA, 2013)	98
FIGURA 5.19– Volume da pirâmide (DANTE, 2010)	99
FIGURA 6.1 – Construção do tangram	101
FIGURA 6.2 – ENEM 2008	102
FIGURA 6.3 – Q. C. Quadrado (VIEGAS et al., 2017)	102
FIGURA 6.4 – Questão 24 do Banco de questões da OBMEP 2016	103
FIGURA 6.5 – Retângulos equivalentes - Adaptado de (DOLCE; POMPEO, 2013b) ...	103
FIGURA 6.6 – Puzzle tridimensional: pirâmide de 4 peças congruentes	104
FIGURA 6.7 – Cubic Kaleidocycle Disney	105
FIGURA 6.8 – Cubo-tangram	105
FIGURA 6.9 – Caixote (VIEGAS et al., 2017)	106
FIGURA 6.10– Puzzles tridimensionais: (a) cubo (YAROSLAVSKIY, 2008); (b) prisma (YA- ROSLAVSKIY, 2008)	107
FIGURA A.1 – Possíveis construções geométricas: (a) retângulos; (b) polígonos conve- xos com todas as peças	112
FIGURA A.2 – Exemplos de polígonos convexos com metade da área do quadrado inicial	113
FIGURA A.3 – O tangram e o teorema de Pitágoras	113
FIGURA A.4 – Primeira decomposição para a questão 6.2.7(b)	114
FIGURA A.5 – Segunda decomposição para a questão 6.2.7(b) - Banco de questões da OBMEP	114
FIGURA A.6 – Paralelepípedos reto retângulos compostos por 8 cubos	115
FIGURA A.7 – Cubo decomposto em 6 pirâmides congruentes	115
FIGURA A.8 – Construções possíveis na questão 6.3.5(a)	116
FIGURA A.9 – Prismas cujo volume é a metade do volume do cubo-tangram	116

LISTA DE SÍMBOLOS

:	tal que
\forall	para todo
\in	pertence
\notin	não pertence
\cup	união com
\cap	intersecção com
\rightarrow	seta de função, de...para
\Rightarrow	condicional, implica, se...então
\neq	não é igual a
\leq	menor do que ou igual a
\geq	maior do que ou igual a
\subset	está contido em
\supset	contém
\equiv	congruente a
\sim	semelhante a
\perp	perpendicular a
\emptyset	conjunto vazio
\overline{AB}	segmento de reta de extremos nos pontos A e B ou o comprimento do segmento
\overrightarrow{AB}	semirreta de origem no ponto A e que passa pelo ponto B ou o vetor AB
\overleftrightarrow{AB}	reta que passa pelos pontos A e B
\widehat{AVB}	ângulo de vértice V e lados \overline{VA} e \overline{VB}

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
1.1 JUSTIFICATIVA	16
1.2 OBJETIVOS	17
1.2.1 Objetivo geral	17
1.2.2 Objetivos específicos	17
1.3 METODOLOGIA	18
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO	19
2 ISOMETRIAS	21
2.1 CONCEITO	21
2.2 ISOMETRIAS NA RETA	22
2.2.1 Reflexão em torno de um ponto	22
2.2.2 Translação	23
2.3 ISOMETRIAS NO PLANO	24
2.3.1 Simetria em torno de um ponto	25
2.3.2 Reflexão em torno de uma reta	26
2.3.3 Translação	29
2.3.4 Rotação	32
2.3.5 Reflexão com deslizamento	35
2.4 ISOMETRIAS NO ESPAÇO	36
2.4.1 Simetria em torno de um ponto	36
2.4.2 Reflexão em torno de um plano	36
2.4.3 Rotação em torno de uma reta	37
2.4.4 Translação	39
2.4.5 Reflexão com deslizamento	40
2.4.6 Rotação refletida	40
2.5 FIGURAS CONGRUENTES	40
2.6 ISOEDROS	42
3 POLÍGONOS EQUIDECOMPONÍVEIS	44
3.1 DEFINIÇÕES	44
3.2 EQUICOMPOSIÇÃO	46
3.3 O TEOREMA DE WALLACE-BOLYAI-GERWIEN	54
3.4 ALGUMAS DECOMPOSIÇÕES	56
3.4.1 A equicomposição de Perigal para o teorema de Pitágoras	61
3.5 ÁREA	63
3.5.1 Retângulo	63
3.5.2 Triângulo	66
3.5.3 Paralelogramo	66
3.5.4 Losango	67
3.5.5 Trapézio	68
3.5.6 Hexágono regular	69
4 POLIEDROS EQUIDECOMPONÍVEIS	70

4.1	DEFINIÇÕES	70
4.2	VOLUME DO PRISMA CONVEXO	72
4.2.1	Volume fundamental	72
4.2.2	Volume do paralelepípedo reto retângulo	74
4.2.3	Princípio de Cavalieri	75
4.2.4	Volume do prisma	77
4.3	EQUICOMPOSIÇÃO DE PRISMAS	78
4.4	O TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT	79
4.5	VOLUME DA PIRÂMIDE CONVEXA	80
5	ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS	86
5.1	POLÍGONOS EQUIDECOMPONÍVEIS	86
5.2	ÁREA	90
5.2.1	Paralelogramo	90
5.2.2	Triângulo	92
5.2.3	Trapézio e losango	94
5.2.4	Outras decomposições	95
5.3	VOLUME DA PIRÂMIDE	96
6	PROPOSTAS DE ATIVIDADES	100
6.1	ATIVIDADE 1: POLÍGONOS EQUIDECOMPONÍVEIS	100
6.1.1	Análise da Atividade 1: Polígonos equidecomponíveis	103
6.2	ATIVIDADE 2: POLIEDROS EQUIDECOMPONÍVEIS	104
6.2.1	Análise da Atividade 2: Poliedros equidecomponíveis	106
7	CONCLUSÕES	108
	REFERÊNCIAS	109
	Apêndice A – RESPOSTAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS	112
A.1	ATIVIDADE 1: POLÍGONOS EQUIDECOMPONÍVEIS	112
A.2	ATIVIDADE 2: POLIEDROS EQUIDECOMPONÍVEIS	115

1 INTRODUÇÃO

1.1 JUSTIFICATIVA

O cálculo de áreas foi uma das necessidades mais antigas das civilizações. Talvez pelo fato do quadrado ser a figura mais simples, os antigos geômetras tentaram estudar a área de outras figuras, como a do círculo por exemplo, relacionando-as com o quadrado. Assim, a expressão “quadratura” era empregada no sentido de se determinar um quadrado com área igual à área da figura em estudo, ou seja, de se construir um quadrado equivalente à figura. E nesse processo, era preciso decompor a figura para recompô-la formando o quadrado.

Sobre a quadratura, a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017) diz o seguinte:

Assim, a Geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume e nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura”). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau.

Dois *puzzles* da antiguidade, o tangram e o *Stomachion* de Arquimedes, são dois bons exemplos do processo de quadratura, como ilustram as Figuras 1.1 e 1.2. *Puzzle* é uma palavra inglesa usada para designar um enigma ou quebra-cabeça. O tangram é um quebra-cabeça chinês de sete peças poligonais que compõem um quadrado; o *Stomachion* de Arquimedes, um quebra-cabeça constituído de catorze peças poligonais que compõem um quadrado. Tanto no tangram quanto no *Stomachion*, o quociente entre a área de cada peça e a área do quadrado constituído por todas as peças é um número racional.

Todas as figuras formadas com as peças poligonais de cada um desses dois *puzzles* têm a mesma área e são equidecomponíveis, ou seja, têm a mesma decomposição. Essa relação pode

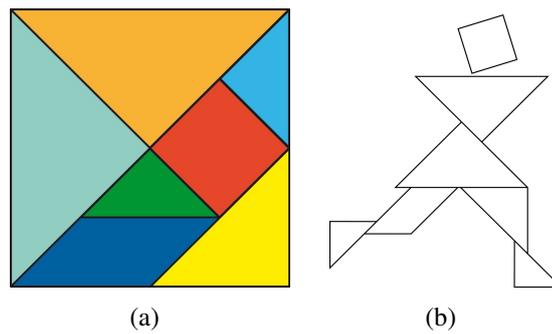


Figura 1.1: (a) Tangram (ESCOLAR, 2015); (b) composição com as peças do Tangram

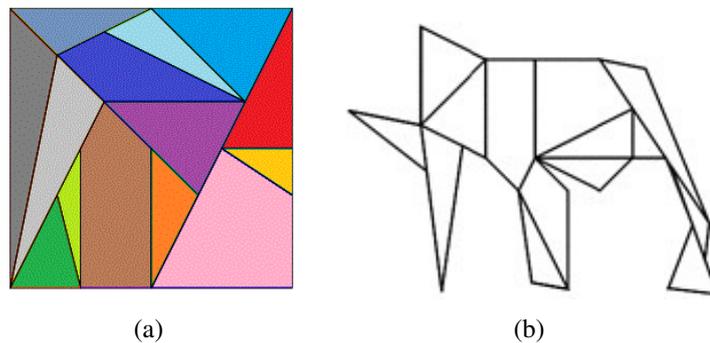


Figura 1.2: (a) *Stomachion* de Arquimedes (LÓPEZ, 2016); (b) composição com as peças do *Stomachion*

ser generalizada, isto é, dois polígonos que têm a mesma área são sempre equidecomponíveis? Mais, essa relação também vale para figuras tridimensionais, como os poliedros convexos? Fundamentados na BNCC e motivados por esses questionamentos, escolhemos o tema *Polígonos e poliedros equidecomponíveis* para desenvolver esta dissertação.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Estudar a equicomposição em duas e três dimensões, empregando-a para demonstrar relações para o cálculo de áreas e de volumes.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Estudar isometrias na reta, no plano e no espaço.
2. Analisar a abordagem da equicomposição em livros de matemática da Educação Básica aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em 2015 e em 2016.

3. Propor/organizar atividades didáticas sobre equicomposição para a Educação Básica.
4. Apresentar o cubo-tangram, um variante tridimensional do tangram, e empregá-lo na equicomposição de prismas.
5. Construir figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais no GeoGebra.

1.3 METODOLOGIA

Para discorrer sobre a equicomposição, efetuamos uma ampla revisão bibliográfica; para analisar como a equicomposição é abordada nas aulas de matemática da Educação Básica, analisamos alguns livros didáticos de matemática aprovados no PNLD em 2015 e em 2016 (<http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-editais/item/4032-pnld-2015>); para propor/organizar atividades didáticas sobre equicomposição para a Educação Básica, adotamos os jogos e a resolução de problemas como metodologias de ensino/estratégias de aprendizagem.

O jogo tem seu papel no ensino como “provocador” da aprendizagem, possibilitando ao estudante a oportunidade de criar planos para resolver problemas, determinar objetivos, executar jogadas e avaliar a eficácia das estratégias adotadas segundo os resultados obtidos. Diante de situações lúdicas, o estudante aprende a estrutura lógica da brincadeira e, concomitantemente, a estrutura matemática da mesma. Moura (MOURA, 1992) afirma que:

O jogo para ensinar matemática deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propiciar a aquisição de habilidades, permitir o desenvolvimento operatório do sujeito e, mais, estar perfeitamente localizado no processo que leva a criança do conhecimento primeiro ao conhecimento elaborado.

Já Petty (PETTY, 1995) destaca que:

Jogar é uma das atividades em que a criança pode agir e produzir seus próprios conhecimentos. (...) a ideia será sempre considerá-los (os jogos) como uma possibilidade de exercitar ou estimular a construção de conceitos e noções também exigidos para a realização de tarefas escolares. Neste sentido, o jogo serve para trabalhar conceitos que, quando excluídos de seu contexto, são muito abstratos, muito complicados para as crianças entenderem.

Outra maneira de desafiar e instigar a curiosidade dos estudantes é trabalhar com a resolução de problemas. Segundo Polya (POLYA, 1995):

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas, há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser

modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais numa idade suscetível poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

Assim, Polya estabelece quatro passos gerais para a resolução de qualquer tipo de problema: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução e retrospecto. Em *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*, ele apresenta vários exemplos e discute como abordá-los em sala de aula. Desta maneira, cumpre seu intuito declarado de convencer os leitores de que “a Matemática, além de indispensável ao conhecimento científico, pode ser divertida e também descortinar um panorama de atividade mental no mais profundo nível”. Contudo, alerta: “o aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo”.

Dessa forma, o professor que espera incutir esse desejo nos estudantes deve planejar atividades nas quais eles possam exercitar a arte de resolver problemas. Além disso, no momento de propor problemas, o professor deve considerar que “a diferença entre um problema fácil e outro difícil pode estar em conhecer-se ou não um outro problema já anteriormente resolvido, que tenha a mesma incógnita” (POLYA, 1995). Assim, a habilidade de resolver problemas será desenvolvida com a prática, seguida das orientações e questionamentos rotineiros do professor, além daqueles que, com o passar do tempo, o próprio estudante fará, estabelecendo um roteiro que o auxiliará na resolução de novos problemas.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Segundo George Polya: “A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar”. Foi com este intuito que organizamos os primeiros capítulos deste trabalho: ir um pouco além do mínimo necessário para analisar a equidecomposição de polígonos e poliedros, exceto no que diz respeito à *teoria das invariantes de Dehn*, relevante à equicomposição em três dimensões.

Inicialmente, apresentamos as isometrias na reta, no plano e no espaço, com especial destaque para a reflexão, a rotação e a translação. Em seguida, analisamos a equicomposição de polígonos com a demonstração do Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. As relações para o cálculo da área de alguns polígonos convexos são enunciadas e demonstradas. Na sequência, estendemos a equicomposição para o espaço, provando que um prisma reto é sempre equidecomponível a um paralelepípedo reto retângulo, uma decorrência direta do Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. Este resultado direciona o tema à pergunta feita por Hilbert em um dos seus

23 problemas: dois poliedros de mesmo volume são equidecomponíveis? Provamos ainda a decomposição de um prisma triangular em três tetraedros equivalentes, pré-requisito para demonstrarmos o volume de uma pirâmide convexa qualquer.

Finalizamos analisando livros de matemática da Educação Básica, a fim de identificar como os autores abordam os conceitos de equicomposição no plano e no espaço e também para propor atividades diferenciadas para a sala de aula empregando materiais manipulativos, como o tangram e o cubo-tangram, este um variante tridimensional do primeiro.

2 ISOMETRIAS

Neste capítulo, apresentamos algumas isometrias, transformações que preservem distâncias euclidianas, e as empregamos para definir figuras congruentes. Descrevemos as isometrias segundo Lima (LIMA, 2007).

2.1 CONCEITO

Etimologicamente, conforme Oliveira (OLIVEIRA, 1972), a palavra isometria é formada por duas palavras de origem grega: *isos*, que significa igual, e *metron*, que significa medida. Dessa forma, isometria é uma transformação geométrica que conserva distâncias, ou seja, é uma função que preserva as medidas e a forma das figuras, como ilustra a Figura 2.1.

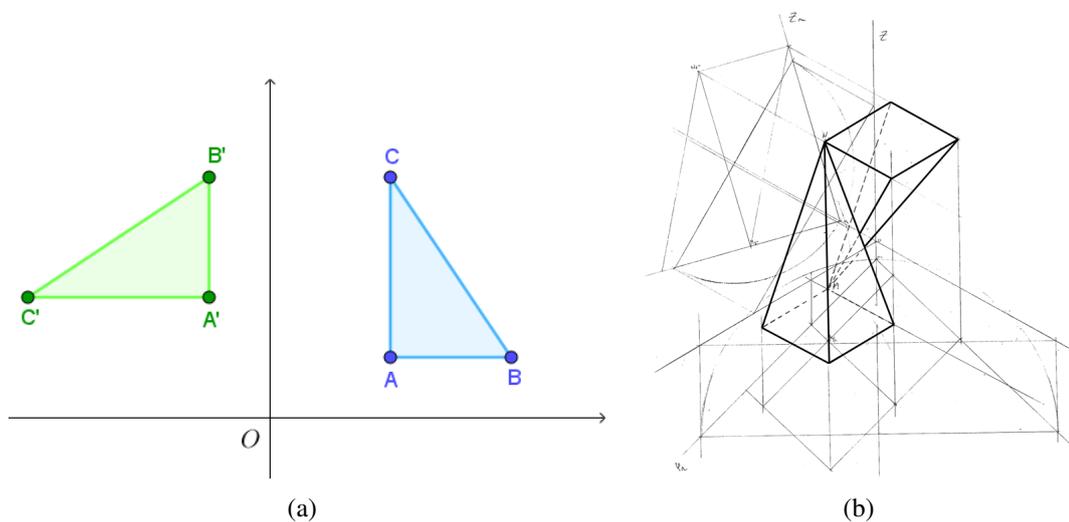


Figura 2.1: Transformações geométricas que preservam medidas e forma: (a) no plano; (b) no espaço tridimensional (SILVA, 2005)

De acordo com Tinocoe (TINOCOE, 2012):

Uma transformação geométrica é uma função que faz corresponder a cada ponto do plano, um novo ponto do plano; normalmente exige-se que essa função seja bijetiva (cada ponto do plano é a imagem de um e um só ponto do

plano), e que preserve as figuras geométricas: por exemplo a imagem de um triângulo seja ainda um triângulo, e a imagem de uma reta seja uma reta.

2.2 ISOMETRIAS NA RETA

Definição 2.1. Uma isometria entre duas retas r e s é uma função $T : r \rightarrow s$ que preserva a distância entre pontos. Assim, se dois pontos quaisquer $A, B \in r$ são transformados por T nos pontos $A' = T(A)$ e $B' = T(B)$, $A', B' \in s$, então $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB} \Leftrightarrow d(A', B') = d(A, B)$.

2.2.1 REFLEXÃO EM TORNO DE UM PONTO

Definição 2.2. Seja A um ponto pertencente à reta r . A reflexão em torno de A é a função $R_A : r \rightarrow r$ que associa a cada ponto $X \in r$ seu simétrico $X' = R_A(X)$ relativamente ao ponto A . Temos, portanto, que $R_A(A) = A$ e, para todo $X \neq A$ em r , A é o ponto médio do segmento de reta XX' , onde $X' = R_A(X)$.

Assim, X e X' pertencem a semirretas opostas de origem A e $\overline{AX} \equiv \overline{AX'}$.

Proposição 2.1. Toda reflexão em torno de um ponto é uma isometria na reta.

Demonstração.

Sejam os pontos $X, Y \in r$ e X', Y' seus simétricos em relação ao ponto A . Assim, temos dois casos para analisar.

1º caso: Se X e Y estão em lados opostos de A , conforme a Figura 2.2, então

$$d(X', Y') = d(X', A) + d(A, Y') = d(X, A) + d(A, Y) = d(X, Y).$$

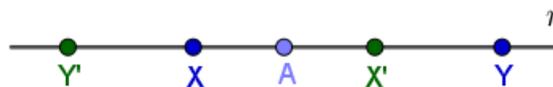


Figura 2.2: Reflexão de pontos pertencentes a semirretas opostas

2º caso: Se X e Y estão no mesmo lado de A , conforme a Figura 2.3, então

$$d(X', Y') = |d(X', A) - d(Y', A)| = |d(X, A) - d(Y, A)| = d(X, Y).$$

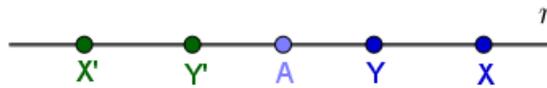


Figura 2.3: Reflexão de pontos pertencentes à mesma semirreta

Como, em qualquer um dos dois casos, a distância de $X' = R_A(X)$ a $Y' = R_A(Y)$ é igual à distância de X a Y , temos então que a função $R_A : r \rightarrow r$ é uma isometria. \square

Observa-se que o ponto A é o único ponto fixo da reflexão R_A , isto é, $X = A$ é a única solução da equação $R_A(X) = X$.

2.2.2 TRANSLAÇÃO

Definição 2.3. Sejam A e B dois pontos distintos pertencentes à reta r . A translação $T_{AB} : r \rightarrow r$ é a função que faz corresponder a cada ponto $X \in r$ o ponto $X' = T_{AB}(X)$, tal que $\overline{XX'} \equiv \overline{AB}$ e, além disso, o sentido de percurso de X para X' é o mesmo de A para B .

A noção de “sentido de percurso” sobre uma reta é intuitivamente clara. Em termos matemáticos, dizer que $d(X, X') = d(A, B)$ e que os sentidos de percurso $A \rightarrow B$ e $X \rightarrow X'$ coincidem equivale a afirmar que o ponto médio M do segmento AX' é também o ponto médio do segmento BX , conforme podemos observar na Figura 2.4.

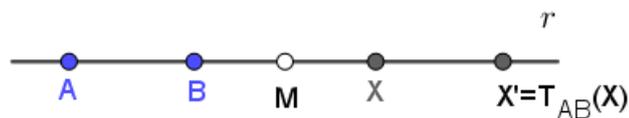


Figura 2.4: Translação na reta

Proposição 2.2. Toda translação na reta é uma isometria na reta.

Demonstração.

Sejam $X, Y \in r$, $T_{AB}(X) = X'$ e $T_{AB}(Y) = Y'$. Assim, $d(X, X') = d(Y, Y') = d(A, B)$.

Devemos mostrar que $d(X', Y') = d(X, Y)$. Para tanto, consideremos os casos descritos a seguir.

1º caso: Se os segmentos XX' e YY' não têm pontos interiores comuns, conforme a Figura 2.5, então $d(X', Y') = d(X', Y) + d(Y, Y') = d(X', Y) + d(X, X') = d(X, Y)$.



Figura 2.5: Translação na reta: 1º caso

2º caso: Se os segmentos XX' e YY' têm pontos interiores comuns, conforme a Figura 2.6, então $d(X', Y') = d(Y', Y) - d(X', Y) = d(X, X') - d(X', Y) = d(X, Y)$.



Figura 2.6: Translação na reta: 2º caso

Em ambos os casos, temos que $d(X', Y') = d(X, Y)$. □

2.3 ISOMETRIAS NO PLANO

Definição 2.4. Uma isometria entre dois planos Π e Π' é uma função $T : \Pi \rightarrow \Pi'$ que preserva distâncias. Logo, para dois pontos quaisquer $A, B \in \Pi$, com $A' = T(A)$ e $B' = T(B)$, $A', B' \in \Pi'$, temos que $d(A', B') = d(A, B)$.

Proposição 2.3. Toda isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi'$ transforma retas em retas.

Demonstração.

Sejam $A, B \in r$, $r \subset \Pi$, $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ e $r' \subset \Pi'$ a reta definida pelos pontos A' e B' . Dado qualquer $X \in r$, um dos três pontos A , B e X está entre os outros dois. Suponhamos que X esteja entre A e B , ou seja, que $X \in \overline{AB}$ (os outros dois casos são análogos). Assim, $\overline{AB} = \overline{AX} + \overline{XB}$. Logo, considerando $X' = T(X)$, temos que $\overline{A'B'} = \overline{A'X'} + \overline{X'B'}$. Portanto, $X' \in \overline{A'B'}$. Dessa forma, temos que os pontos A', B' e X' são colineares. Isto mostra que $X \in r \Rightarrow X' \in r'$. Logo, T é uma isometria entre r e r' , ou seja, $T(r) = r'$. □

Proposição 2.4. Toda isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi'$ transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.

Demonstração.

Sejam $r, s \subset \Pi$, com $r \perp s$ e $r \cap s = \{A\}$, os pontos $B, C \in r$, equidistantes de A , e um ponto $D \in s$, conforme a Figura 2.7. Dessa forma, a isometria T transforma a mediana \overleftrightarrow{AD} do triângulo isósceles BCD na mediana $\overleftrightarrow{A'D'}$ do triângulo isósceles $B'C'D'$. Logo, $\overleftrightarrow{A'D'}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{B'C'}$, ou seja, r' é perpendicular a s' .

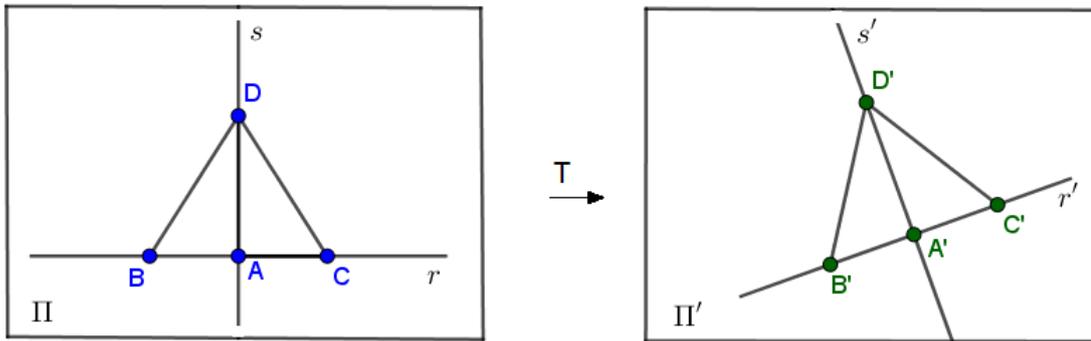


Figura 2.7: Retas perpendiculares

□

Proposição 2.5. *Toda isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi'$ é uma bijeção cuja inversa $T^{-1} : \Pi' \rightarrow \Pi$ é ainda uma isometria.*

Demonstração.

Precisamos mostrar que toda isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi'$ injetiva é sobrejetiva. De fato, T é uma função injetiva pois $X \neq Y \Rightarrow d(X', Y') = d(X, Y) > 0 \Rightarrow X' \neq Y'$. Para provar a sobrejetividade, consideremos um ponto arbitrário $X' \in \Pi'$ e determinemos um ponto $X \in \Pi$ tal que $T(X) = X'$. Para tanto, traçemos uma reta $r \subset \Pi$. A imagem de r por T é uma reta $r' \subset \Pi'$. Se $X' \in r'$, então, por definição de imagem, existe um ponto $X \in r$ tal que $T(X) = X'$. Caso contrário, sejam s' a perpendicular baixada de X' sobre r' e $\{Y'\} = r' \cap s'$. Como $Y' \in r'$, existe $Y \in r$ tal que $T(Y) = Y'$. Seja s a reta perpendicular a r passando por Y . A imagem de s pela isometria T é perpendicular a r' e contém Y' . Logo, $T(s) = s'$. Como $X' \in s'$, existe $X \in s$ tal que $T(X) = X'$. □

2.3.1 SIMETRIA EM TORNO DE UM PONTO

Definição 2.5. *Seja $A \in \Pi$. A simetria em torno de A é a função $S_A : \Pi \rightarrow \Pi$ tal que $S_A(A) = A$ e, para $X \neq A$, $S_A(X) = X'$ é o simétrico de X relativamente a A . Em outras palavras, A é o ponto médio do segmento XX' .*

Proposição 2.6. *Toda simetria em torno de um ponto é uma isometria no plano.*

Demonstração.

Dados $X, Y \in \Pi$, conforme a Figura 2.8, temos que:

$$\begin{aligned} \overline{AX} &\equiv \overline{AX'}, \text{ pela definição de simetria;} \\ \widehat{XAY} &\equiv \widehat{X'AY'}, \text{ pois são ângulos opostos pelo vértice;} \\ \overline{AY} &\equiv \overline{AY'}, \text{ pela definição de simetria.} \end{aligned}$$

Logo, pelo caso *LAL* (lado-ângulo-lado), $\Delta AXY \equiv \Delta AX'Y'$ e $\overline{XY} \equiv \overline{X'Y'}$.

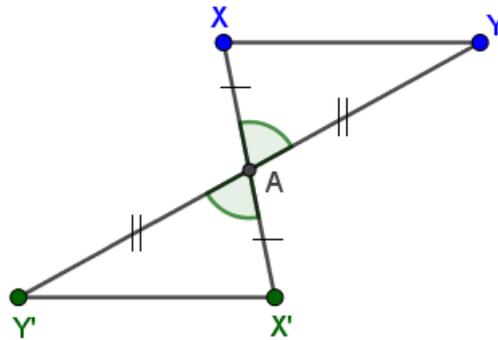


Figura 2.8: Simetria em torno de um ponto

□

2.3.2 REFLEXÃO EM TORNO DE UMA RETA

Definição 2.6. Seja $r \subset \Pi$. A reflexão do ponto X em torno da reta r é a função $R_r : \Pi \rightarrow \Pi$ definida como:

- i) $R_r(X) = X, \forall X \in r$;
- ii) $R_r(X) = X', \forall X \notin r$, sendo a reta r a mediatriz do segmento XX' , ou seja, se o ponto Y é o pé da perpendicular baixada de X sobre r , então Y é o ponto médio do segmento XX' , conforme mostra a Figura 2.9.

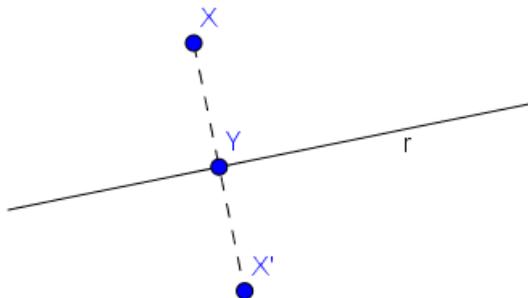


Figura 2.9: Reflexão do ponto X em torno da reta r

Proposição 2.7. *Toda reflexão em torno de uma reta é uma isometria no plano.*

Demonstração.

Precisamos mostrar que $\overline{XY} \equiv \overline{X'Y'}$, onde X e Y são dois pontos quaisquer e X' e Y' são, respectivamente, as reflexões de X e de Y em torno da reta r . Para tanto, analisamos os quatro casos possíveis, descritos a seguir.

1º caso Se $X, Y \in r$, então $X = X'$ e $Y = Y'$ e, portanto, $\overline{XY} \equiv \overline{X'Y'}$.

2º caso: O segmento XY , ou o seu prolongamento, é perpendicular à reta r .

Consideremos os pontos X e Y e a reta r , como na Figura 2.10(a), e o referencial do sistema como sendo o ponto de intersecção do prolongamento do segmento XY com a reta r . Assim, as coordenadas desse ponto são $(0, 0)$. Designando m como a ordenada de X e n como a ordenada de Y , temos que $d(X, Y) = |m - n|$. Pela definição de reflexão, as ordenadas de X' e Y' são, respectivamente, $-m$ e $-n$. Dessa forma, $d(X', Y') = |(-m) - (-n)| = |n - m| = |m - n| = d(X, Y)$, ou seja, $\overline{XY} \equiv \overline{X'Y'}$.

Caso um dos pontos X ou Y pertença à reta r , como na Figura 2.10(b), a demonstração é análoga.

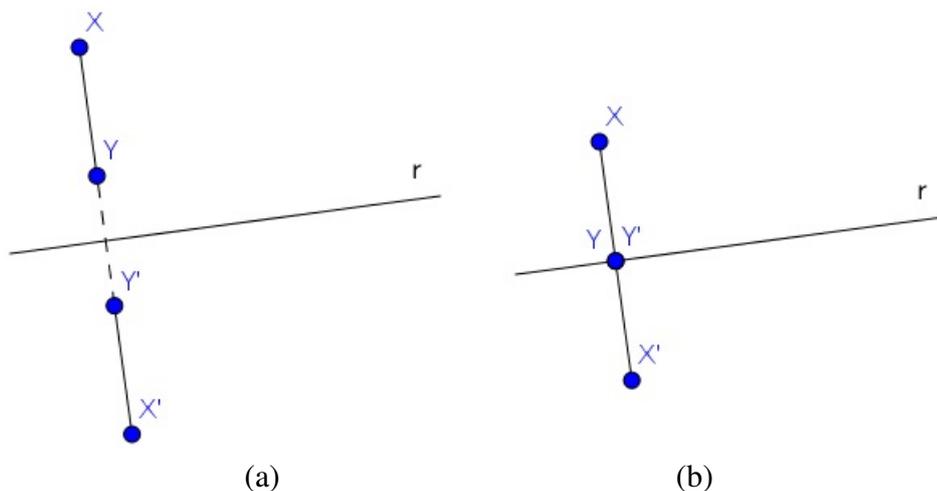


Figura 2.10: Reflexão em torno de uma reta - 2º caso: (a) $X, Y \notin r$; (b) $Y \in r$

3º caso: O segmento XY , ou o seu prolongamento, não é perpendicular à reta r e os pontos X e Y pertencem ao mesmo semiplano que tem a reta r como origem.

Consideremos os pontos X e Y e a reta r , como na Figura 2.11(a). Traçemos os segmentos XA e $X'A'$, paralelos a r , onde X' e Y' são, respectivamente, as reflexões dos pontos X e Y em torno da reta r e $A, A' \in \overline{YY'}$. Os triângulos retângulos XAY e $X'A'Y'$ têm os catetos congruentes. Logo, pelo caso de congruência LAL (lado-ângulo-lado), suas hipotenusas são

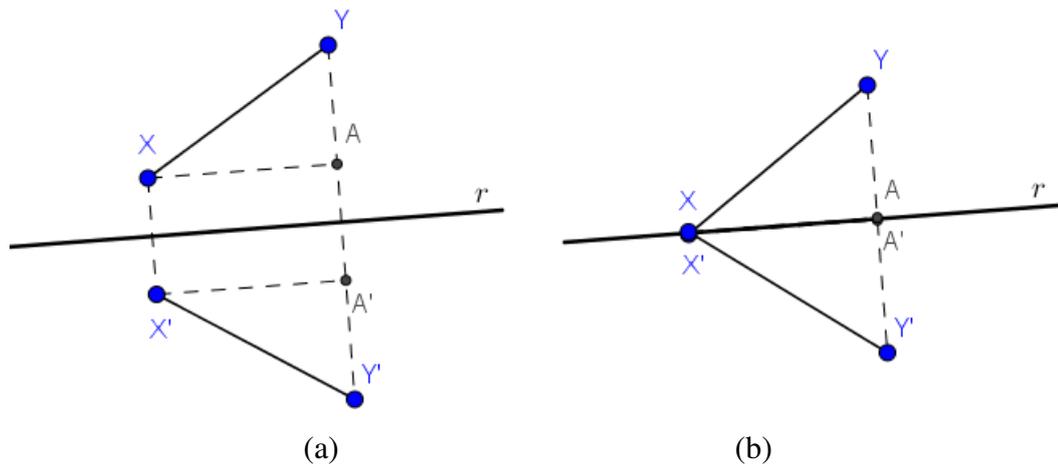


Figura 2.11: Reflexão em torno de uma reta - 3º caso: (a) $X, Y \notin r$; (b) $X \in r$

congruentes, isto é, $\overline{XY} \equiv \overline{X'Y'}$.

Caso um dos pontos X ou Y pertença à reta r , como na Figura 2.11(b), a demonstração é análoga.

4º caso: Os pontos X e Y estão em lados opostos da reta r .

Sejam A , B e C os pontos de intersecção da reta r com os segmentos XY , XX' e YY' , respectivamente, onde X' e Y' são, respectivamente, as reflexões dos pontos X e Y em torno da reta r , como mostra a Figura 2.12.

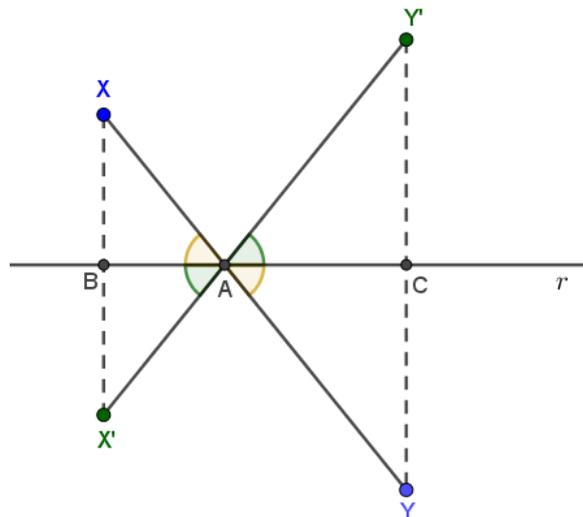


Figura 2.12: Reflexão em torno de uma reta - 4º caso

Os triângulos retângulos ABX e ABX' têm o cateto AB comum e $\overline{BX} \equiv \overline{BX'}$. Logo, suas hipotenusas são congruentes, ou seja, $\overline{AX} \equiv \overline{AX'}$. Analogamente, $\overline{AY} \equiv \overline{AY'}$. Assim, os triângulos AXX' e AYY' são isósceles. Portanto, as medianas relativas aos lados $\overline{XX'}$ e $\overline{YY'}$

são também bissetrizes, isto é, $\widehat{XAB} \equiv \widehat{X'AB}$ e $\widehat{YAC} \equiv \widehat{Y'AC}$. Por outro lado, $\widehat{XAB} \equiv \widehat{YAC}$, por serem ângulos opostos pelo vértice. Analogamente, $\widehat{X'AB} \equiv \widehat{Y'AC}$. Então, $\widehat{XAB} + \widehat{X'AB} = \widehat{YAC} + \widehat{Y'AC}$. Como $\widehat{YAC} + \widehat{Y'AC}$ e $\widehat{XAB} + \widehat{X'AB}$ são suplementos do ângulo $\widehat{XAY'}$, então os pontos X' , A e Y' são colineares. Portanto,

$$\overline{X'Y'} = \overline{X'A'} + \overline{A'Y'} = \overline{XA} + \overline{AY} = \overline{XY}.$$

□

A reflexão é uma isometria que fixa os pontos que pertencem ao eixo de reflexão e inverte o sentido dos ângulos. Podemos identificar o eixo de reflexão como sendo um espelho que reflete a imagem, conforme ilustra a Figura 2.13.



Figura 2.13: Reflexão de uma figura

2.3.3 TRANSLAÇÃO

Definição 2.7. *Sejam A e B dois pontos distintos do plano Π . A translação $T_{AB} : \Pi \rightarrow \Pi$ é a função definida da seguinte forma:*

- i) *se o ponto X pertence à reta AB , sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ é dada pelo ponto X' de \overleftrightarrow{AB} tal que $\overline{XX'} \equiv \overline{AB}$, como ilustra a Figura 2.14(a), e, além disso, o sentido de percurso de X para X' é o mesmo de A para B ;*
- ii) *se o ponto $X \notin \overleftrightarrow{AB}$ é qualquer outro ponto do plano Π , sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem \overline{AB} e \overline{AX} como lados, como ilustra a Figura 2.14(b).*

Assim, qualquer que seja a posição de X no plano Π , sua imagem X' por T_{AB} fica caracterizada pelo fato de que os segmentos AX' e BX têm o mesmo ponto médio M .

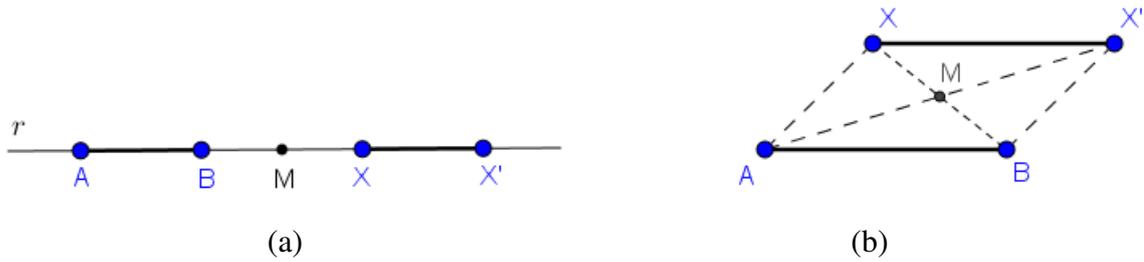


Figura 2.14: Translação no plano: (a) $X \in \overline{AB}$; (b) $X \notin \overline{AB}$

Na definição da translação T_{AB} , a ordem em que os pontos A e B são mencionados é fundamental: no segmento orientado AB , o ponto A é a origem e o ponto B é a extremidade; no segmento orientado BA , o ponto B é a origem e o ponto A é a extremidade. Dessa forma, a translação T_{AB} é diferente da translação T_{BA} . De fato, uma é inversa da outra, ou seja, $T_{BA} = (T_{AB})^{-1}$.

Em uma translação não há pontos fixos e a orientação dos ângulos é preservada.

Proposição 2.8. *Toda translação é uma isometria no plano.*

Demonstração.

Precisamos mostrar que $d(X, Y) = d(X', Y')$, onde $X' = T_{AB}(X)$ e $Y' = T_{AB}(Y)$. Para tal, analisamos os dois casos possíveis, descritos a seguir.

1º caso: A reta r definida pelos pontos X e Y é paralela ou coincidente à reta s que contém \overline{AB} .

Como $T_{AB}(X) = X'$ e $T_{AB}(Y) = Y'$, então

$$d(X, X') = d(Y, Y') = d(A, B). \quad (2.1)$$

Dados $X, Y \in r$, os segmentos XX' e YY' ou não tem pontos interiores comuns, como na Figura 2.15(a), ou tem pontos interiores comuns, como na Figura 2.15(b).

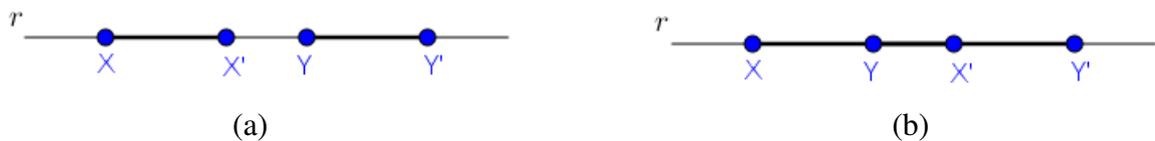


Figura 2.15: Translação no plano - 1º caso: (a) $\overline{XX'} \cap \overline{YY'} = \emptyset$; (b) $\overline{XX'} \cap \overline{YY'} = \{Y\}$

Para estas duas situações, usando (2.1), valem, respectivamente, as seguintes relações:

$$d(X', Y') = d(X', Y) + d(Y, Y') = d(X', Y) + d(X, X') = d(X, Y);$$

$$d(X', Y') = d(Y, Y') - d(X', Y) = d(X, X') - d(X', Y) = d(X, Y).$$

Portanto, nas duas situações, $d(X, Y) = d(X', Y')$.

2º caso: A reta r definida pelos pontos X e Y não é paralela nem coincidente à reta s que contém \overline{AB} .

Os segmentos XX' e YY' são lados opostos de um paralelogramo, pois $\overline{XX'} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{YY'}$ e $d(X, X') = d(A, B) = d(Y, Y')$, o mesmo ocorrendo com os segmentos XY e $X'Y'$, como mostra a Figura 2.16. Portanto, temos que

$$d(X', Y') = d(X, Y).$$

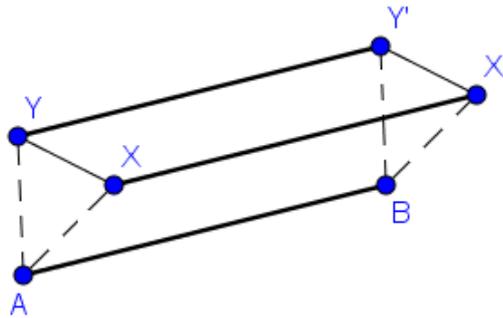


Figura 2.16: Translação no plano - 2º caso

□

De acordo com Lima (LIMA, 2007):

A noção de translação está intimamente relacionada com o conceito de *vetor* (do Latim “vehere”= transportar). Na realidade podemos definir vetores do plano a partir das translações.

Dizemos que dois segmentos orientados AB e CD , no plano Π , são *equipolentes* quando $T_{AB} = T_{CD}$ (isto ocorre somente quando \overline{AB} e \overline{CD} são paralelos, têm o mesmo comprimento e o mesmo sentido, o que equivale a afirmar que os pontos médios de \overline{AB} e \overline{CD} coincidem). O vetor $v = \overrightarrow{AB}$, de origem A e extremidade B , é o conjunto dos segmentos orientados equipolentes a \overline{AB} . Assim, podemos denotar a translação por T_v , a *translação de vetor* v , ao invés de T_{AB} .

Dados o segmento orientado AB e o ponto P , ambos no plano Π , existe um único ponto Q em Π tal que os segmentos orientados AB e PQ são equipolentes, isto é, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} = v$.

O ponto Q é o quarto vértice do paralelogramo que tem \overline{AB} e \overline{AP} como lados. Dessa forma, $Q = P + v = T_{AB}(P) = T_v(P)$ e dizemos que o vetor $v = \overrightarrow{AB}$ transportou o ponto P para a posição Q . Além disso, introduzimos o *vetor nulo* $0 = \overrightarrow{AA}$ para indicar o vetor para o qual a origem coincide com a extremidade. Isto corresponde a incluir a função identidade como translação, denotada por T_0 .

A translação está presente em muitas obras de Escher ¹ e pode ser observada em trabalhos como *Three Birds n28*, de 1938, ilustrado na Figura 2.17, no qual podemos notar o mesmo padrão (desenho) sendo deslocado para os lados, para cima e para baixo.

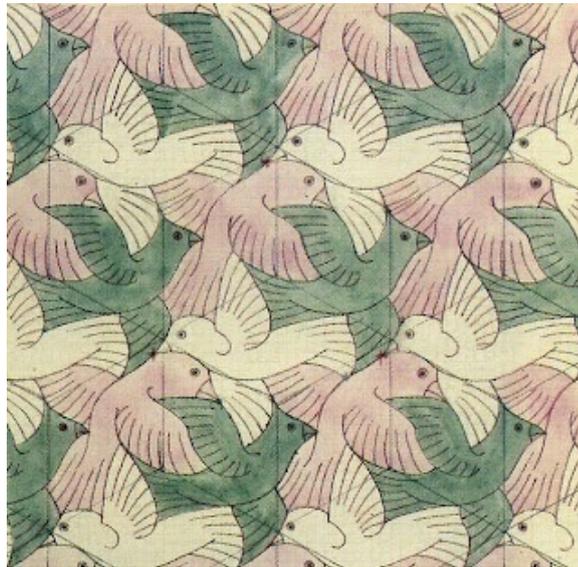


Figura 2.17: Translações na obra *Three Birds n28* de Escher (TESSELLATION, 2017)

2.3.4 ROTAÇÃO

Uma rotação $\rho_{O,\alpha}(O)$ é caracterizada pelo centro de rotação O e pela amplitude α . Essa transformação fixa um único ponto, o centro de rotação O , e preserva a orientação dos ângulos. Quanto ao sentido da rotação, temos que:

1. se $\alpha > 0$, a rotação é feita no sentido positivo ou anti-horário;
2. se $\alpha < 0$, a rotação é feita no sentido horário.

A rotação de amplitude 0° , ou identidade, fixa todos os pontos. A rotação de um ponto P pelo centro de rotação O e amplitude α está ilustrada na Figura 2.18.

¹Maurits Cornelis Escher (1898-1972), artista gráfico holandês famoso pelo emprego de isometrias em xilogravuras e litografias.

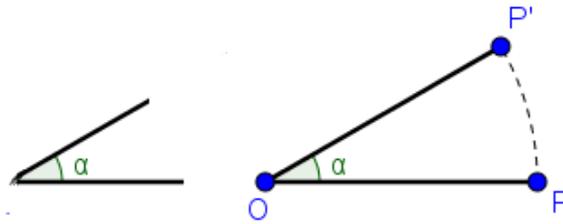


Figura 2.18: Rotação

Definição 2.8. *Sejam o ponto O pertencente ao plano Π e o ângulo $\alpha = \widehat{AOB}$, de vértice O . A rotação de ângulo α em torno do ponto O é a função $\rho_{O,\alpha} : \Pi \rightarrow \Pi$ definida como:*

i) $\rho_{O,\alpha}(O) = O$;

ii) *para todo ponto $X \neq O$ em Π , $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ é o ponto do plano Π tal que*

$$d(X, O) = d(X', O), \widehat{XOX'} = \alpha,$$

e o “sentido de rotação” de A para B é o mesmo de X para X' .

Geometricamente, a condição $\widehat{XOX'} = \alpha$ significa que se considerarmos os pontos A e B tais que $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OX} \equiv \overline{OX'}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{XX'}$. A exigência de que o sentido de rotação de X para X' seja o mesmo que o de A para B pode ser justificada pelo fato de que os ângulos \widehat{BOX} e $\widehat{AOX'}$ têm a mesma bissetriz, conforme ilustra a Figura 2.19.

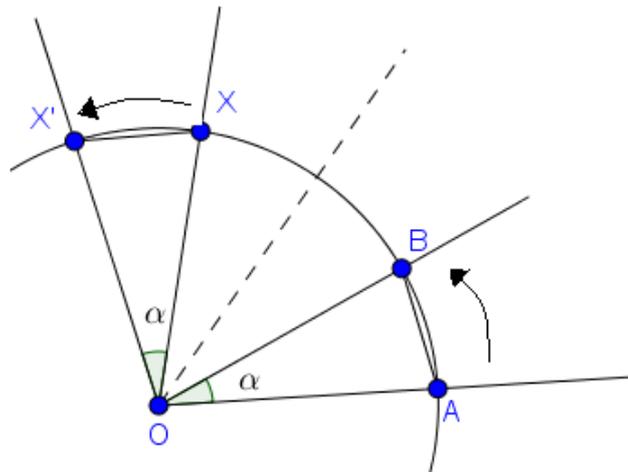


Figura 2.19: Rotação de um segmento

Proposição 2.9. *Toda rotação é uma isometria no plano.*

Demonstração.

Precisamos mostrar que $\overline{XY} \equiv \overline{X'Y'}$, onde $X' = \rho_{O,\alpha}(X)$ e $Y' = \rho_{O,\alpha}(Y)$. Para tanto, analisamos os dois casos possíveis, descritos a seguir.

1º caso: Os pontos O , X e Y são colineares.

Neste caso, dependendo da localização dos pontos X e Y em relação a O , podem ocorrer duas situações distintas, representadas na Figura 2.20.

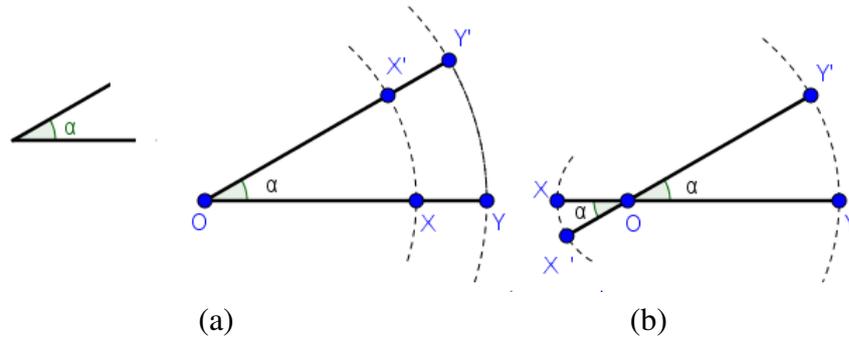


Figura 2.20: Rotação de um segmento cujos extremos X e Y são colineares ao centro O : (a) X está entre O e Y ; (b) O está entre X e Y

Os segmentos OX e OX' são congruentes, pois são raios da mesma circunferência de centro O . Analogamente, $OY \equiv OY'$. Assim, para as situações representadas nas Figuras 2.20(a) e 2.20(b), respectivamente, temos que:

$$\overline{XY} = \overline{OY} - \overline{OX} = \overline{OY'} - \overline{OX'} = \overline{X'Y'};$$

$$\overline{XY} = \overline{XO} + \overline{OY} = \overline{X'O} + \overline{OY'} = \overline{X'Y'}.$$

2º caso: Os pontos O , X e Y não são colineares.

Neste caso, ilustrado na Figura 2.21, os ângulos $X'OY$ e XOY' têm a mesma bissetriz. Assim, $\widehat{XOY} \equiv \widehat{X'OY'} = \alpha$. Como $\overline{OX} \equiv \overline{OX'}$ e $\overline{OY} \equiv \overline{OY'}$, temos, pelo caso de congruência de triângulos LAL (lado-ângulo-lado), que $\Delta XOY \equiv \Delta X'OY'$. Logo, $\overline{X'Y'} \equiv \overline{XY}$.

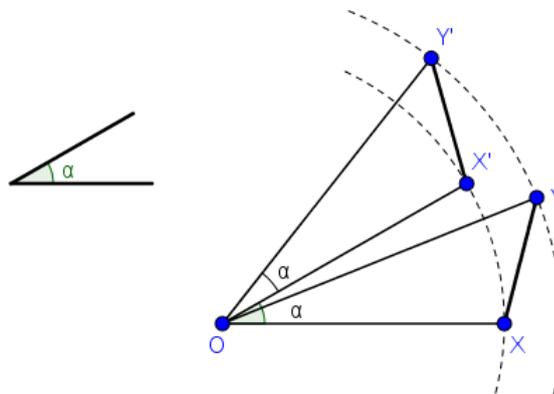


Figura 2.21: Rotação de um segmento cujos extremos X e Y não são colineares ao centro O

A rotação também está presente nas obras de Escher, como no trabalho *Shells and Starfish*, de 1941, representado na Figura 2.22.



Figura 2.22: Rotação na obra *Shells and Starfish* de Escher (TESSELLATION, 2017)

2.3.5 REFLEXÃO COM DESLIZAMENTO

Definição 2.9. Sejam $v = \overrightarrow{AB}$ um vetor não nulo e r uma reta paralela a v no plano Π . A reflexão com deslizamento, determinada pelo vetor v e pela reta r , é a função composta

$$T = T_v \circ R_r : \Pi \rightarrow \Pi,$$

obtida fazendo a translação T_v seguir-se à reflexão R_r .

A reflexão com deslizamento, como a translação T_v , não possui pontos fixos, como podemos observar na Figura 2.23.

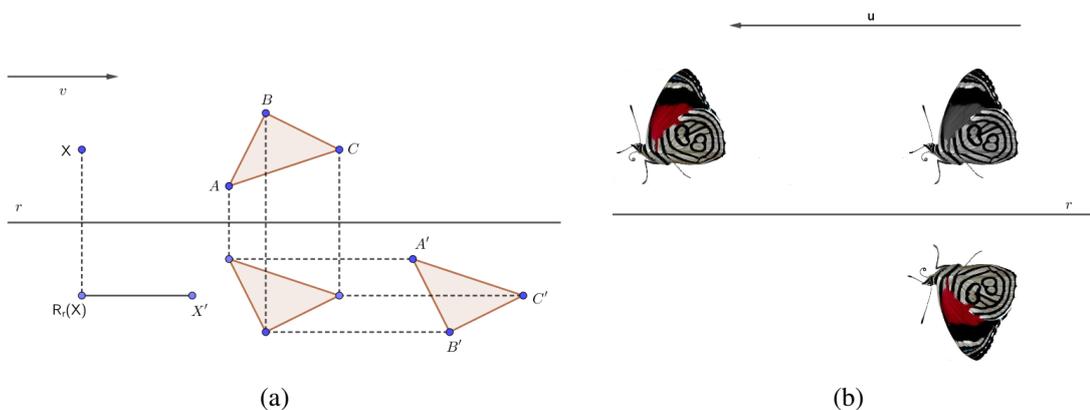


Figura 2.23: (a) Reflexão com deslizamento; (b) reflexão com deslizamento de uma figura

2.4 ISOMETRIAS NO ESPAÇO

Denotaremos por E o espaço euclidiano tridimensional. Assim como no plano, uma isometria no espaço preserva a distância entre dois pontos.

Definição 2.10. *Uma isometria em E é uma função $T : E \rightarrow E$ que preserva a distância entre dois pontos quaisquer $A, B \in E$, ou seja, $d(T(A), T(B)) = d(A, B)$.*

Proposição 2.10. *A imagem de um plano $\Pi \subset E$ por uma isometria $T : E \rightarrow E$ é um plano $\Pi' \subset E$.*

Proposição 2.11. *Seja $T : E \rightarrow E$ uma isometria. Se a reta r é perpendicular ao plano Π , então sua imagem $r' = T(r)$ é perpendicular ao plano $\Pi' = T(\Pi)$.*

Proposição 2.12. *Toda isometria $T : E \rightarrow E$ é uma bijeção, cuja inversa $T^{-1} : E \rightarrow E$ também é uma isometria.*

As demonstrações das Proposições 2.10, 2.11 e 2.12 encontram-se em Lima (LIMA, 2007).

2.4.1 SIMETRIA EM TORNO DE UM PONTO

Definição 2.11. *Fixado um ponto A no espaço E , a simetria em torno de A é a função $S_A : E \rightarrow E$ que faz corresponder a cada ponto $X \in E$ o ponto $X' = S_A(X)$, tal que A é o ponto médio do segmento XX' .*

Proposição 2.13. *Toda simetria em torno de um ponto é uma isometria no espaço.*

Demonstração.

Dados $X, Y \in E$, se X, Y e A forem pontos não colineares, então X, Y e A determinam um plano Π , restrito ao qual S_A é ainda a simetria em torno de A . Logo, pela Proposição 2.6,

$$d(S_A(X), S_A(Y)) = d(X, Y).$$

□

2.4.2 REFLEXÃO EM TORNO DE UM PLANO

Definição 2.12. *Seja $\Pi \subset E$ um plano. A reflexão em torno de Π é a função $R_\Pi : E \rightarrow E$ que associa cada ponto $X \in E$ o ponto $X' = R_\Pi(X)$, tal que Π é o plano mediador² do segmento XX' .*

²Plano mediador de um segmento de reta é o conjunto de pontos de E que equidistam dos extremos do segmento. Esse plano é perpendicular ao segmento de reta e a intersecção de ambos é o ponto médio do segmento.

Isto significa que XX' é perpendicular a Π e, além disso, se $\{A\} = XX' \cap \Pi$, então $\overline{XA} \equiv \overline{AX'}$.

Assim, para todo $B \in \Pi$, temos também que $\overline{XB} \equiv \overline{BX'}$.

Proposição 2.14. *Toda reflexão em torno de um plano é uma isometria no espaço.*

Demonstração.

Sejam $X, Y \in E$, com $X' = R_{\Pi}(X)$ e $Y' = R_{\Pi}(Y)$. Analisamos a seguir os dois casos possíveis.

1º caso: Se $X, Y \in \Pi$, então $X' = X$ e $Y' = Y$. Logo, $d(X', Y') = d(X, Y)$.

2º caso: Se $X \notin \Pi$ (demonstração análoga para $Y \notin \Pi$) - Figura 2.24, consideremos o plano Π' contendo a perpendicular $\overleftrightarrow{XX'}$ a Π e o ponto Y . Seja $r = \Pi \cap \Pi'$. Assim, restrito ao plano Π' , temos que R_{Π} coincide com a reflexão $R_r : \Pi' \rightarrow \Pi'$, em torno de r . Da Proposição 2.7, segue que $d(X', Y') = d(X, Y)$.

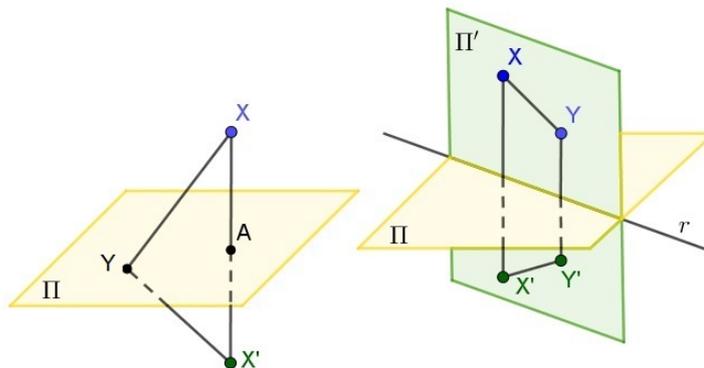


Figura 2.24: Reflexão em torno de um plano

□

2.4.3 ROTAÇÃO EM TORNO DE UMA RETA

Definição 2.13. *Sejam a reta r e o ângulo $\alpha = \widehat{AOB}$ cujo vértice O pertence a r e cujos lados estão contidos em um plano perpendicular a r . Como na Definição 2.8, o ângulo α é orientado, isto é, subentende-se que OA é o primeiro lado e OB é o segundo. Assim, definimos a rotação de ângulo α em torno da reta r como a função $\rho = \rho_{r,\alpha} : E \rightarrow E$ que faz corresponder a cada ponto X o ponto $X' = \rho(X)$, este determinado pelas seguintes condições, conforme a Figura 2.25:*

1. X' pertence ao plano Π que passa por X e é perpendicular a r ;

2. se $\{O\} = \Pi \cap r$, então $\overline{OX} \equiv \overline{OX'}$;
3. $\widehat{XOX'}$ é um ângulo orientado, sendo $\widehat{XOX'} = \alpha$.

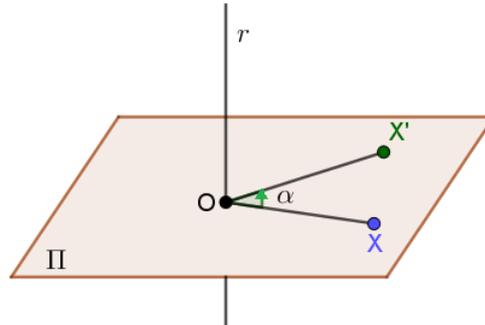


Figura 2.25: Rotação em torno de uma reta

Proposição 2.15. *Toda rotação em torno de um plano é uma isometria no espaço.*

Demonstração.

Sejam $X, Y \in E$, tais que $X' = \rho(X)$ e $Y' = \rho(Y)$. Devemos mostrar que $\overline{X'Y'} \equiv \overline{XY}$.

Seja Π o plano perpendicular a r que passa pelos pontos X e X' . Consideremos os pontos Y_0 e Y'_0 , projeções ortogonais sobre Π dos pontos Y e Y' , respectivamente, conforme a Figura 2.26. Temos dois casos possíveis para analisar.

1º caso: Se o segmento de reta XY está contido em Π ou em um plano paralelo a Π , recaímos no 1º caso da Proposição 2.9, ou seja, a rotação restrita ao plano é uma rotação no plano. Assim, temos que $\overline{X'Y'} \equiv \overline{XY}$.

2º caso: Se o segmento de reta XY não está contido em Π ou em um plano paralelo a Π , temos que \overline{XY} é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são $\overline{XY_0}$ e $\overline{Y_0Y}$, sendo Y_0 o pé da perpendicular a Π por Y . Analogamente, $\overline{X'Y'}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo $X'Y'_0Y'_0$, cujos catetos são $\overline{X'Y'_0}$ e $\overline{Y'_0Y'}$, onde Y'_0 é o pé da perpendicular a Π por Y' , conforme a Figura 2.26. Assim, temos que:

$$\overline{X'Y'_0} \equiv \overline{XY_0}, \text{ pela definição de simetria;}$$

$$\widehat{XY_0Y} \equiv \widehat{X'Y'_0Y'} = 90^\circ;$$

$$\overline{Y_0Y} \equiv \overline{Y'_0Y'}, \text{ pois } Y \text{ e } Y' \text{ pertencem a um mesmo plano perpendicular a } r.$$

Logo, pelo caso *LAL* (lado-ângulo-lado), $\Delta XY_0Y \equiv \Delta X'Y'_0Y'$ e, conseqüentemente, $\overline{XY} \equiv \overline{X'Y'}$.

□

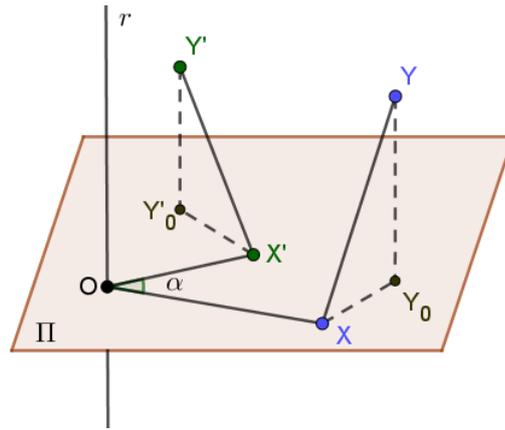


Figura 2.26: Rotação em torno de uma reta: XY não está contido em Π ou em um plano paralelo a Π

2.4.4 TRANSLAÇÃO

Definição 2.14. *Sejam A e B dois pontos distintos de E . A translação $T_{AB} : E \rightarrow E$ é a função que faz corresponder a cada ponto $X \in E$ o ponto X' tal que $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, ou seja, $\overline{XX'} \equiv \overline{AB}$, sendo que $\overline{XX'}$ é paralelo a \overline{AB} e o sentido de percurso $X \rightarrow X'$ coincide com o sentido de $A \rightarrow B$.*

Proposição 2.16. *Toda translação é uma isometria no espaço.*

Demonstração.

Sejam $X, Y \in E$, com $X' = T_{AB}(X)$ e $Y' = T_{AB}(Y)$. Assim, temos que $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{YY'}$. Logo, os segmentos XX' e YY' são equipolentes, ou seja, os pontos médios de $\overline{XY'}$ e $\overline{X'Y}$ coincidem, conforme a Figura 2.27. Isto significa que $\overline{X'Y'}$ e \overline{XY} também são equipolentes. Em particular, $\overline{X'Y'} \equiv \overline{XY}$.

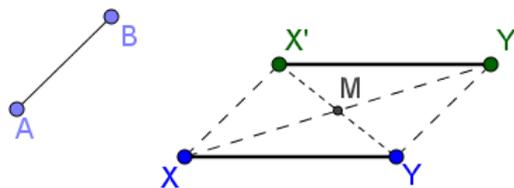


Figura 2.27: Translação de um segmento no espaço

□

As definições a seguir descrevem que a composição de isometrias é uma isometria.

2.4.5 REFLEXÃO COM DESLIZAMENTO

Definição 2.15. A reflexão com deslizamento é uma isometria do tipo $R = T_{AB} \circ R_{\Pi} = R_{\Pi} \circ T_{AB}$, onde $R_{\Pi} : E \rightarrow E$ é a reflexão em torno de um plano Π e T_{AB} e o segmento AB é paralelo ao plano Π ou está contido nele - Figura 2.28.

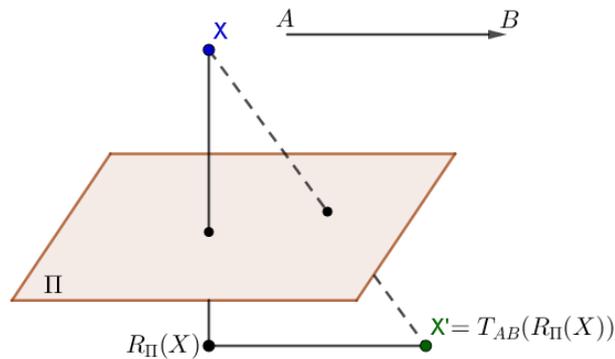


Figura 2.28: Reflexão com deslizamento no espaço

2.4.6 ROTAÇÃO REFLETIDA

Definição 2.16. Uma rotação refletida $T : E \rightarrow E$ é a função composta $T : R_{\Pi} \circ \rho_{r,\alpha} = \rho_{r,\alpha} \circ R_{\Pi}$, onde R_{Π} é a reflexão em torno de um plano Π e $\rho_{r,\alpha}$ é a rotação de ângulo α em torno de uma reta r perpendicular a Π - Figura 2.29.

Quando $\alpha = 180^\circ$, a rotação refletida coincide com a simetria em torno do ponto O , interseção de Π com r .

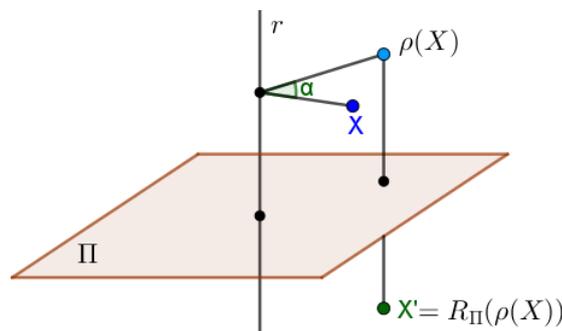


Figura 2.29: Rotação refletida no espaço

2.5 FIGURAS CONGRUENTES

Duas figuras geométricas são congruentes quando uma delas pode ser transformada na outra por isometrias, ou seja, uma combinação de translações, rotações e reflexões. Assim,

duas figuras geométricas congruentes têm o mesmo tamanho e a mesma forma, como ilustram as Figuras 2.30 e 2.31.

Definição 2.17. *Dois subconjuntos A e B do espaço euclidiano \mathbb{R}^n são ditos congruentes se existir uma isometria $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(A) = B$.*

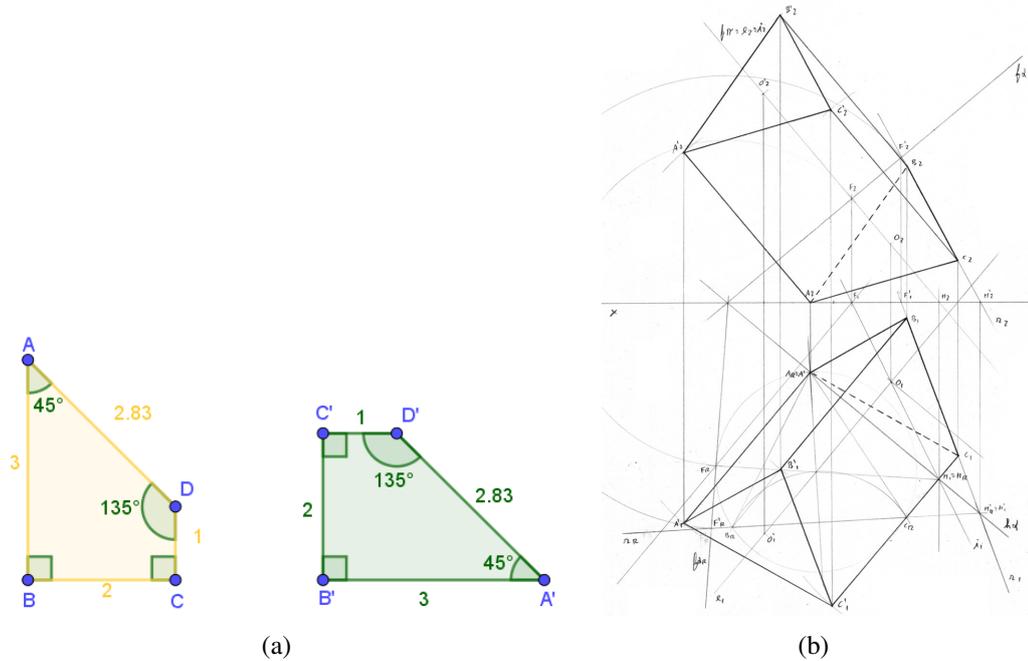


Figura 2.30: Figuras congruentes: (a) trapézios; (b) prismas (SILVA, 2005)

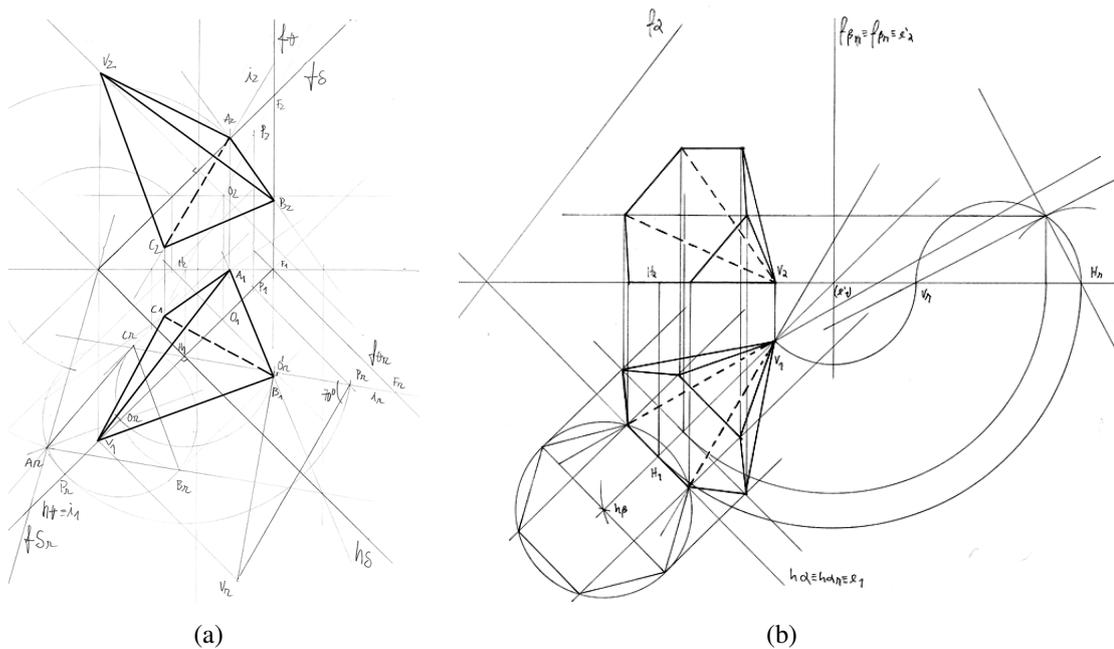


Figura 2.31: Pirâmides congruentes: (a) de base triangular (SILVA, 2005); (b) de base hexagonal (SILVA, 2005)

Duas figuras geométricas congruentes podem ou não ser sobrepostas por movimentos de rotação e/ou translação. Os conceitos de *isometria própria* e *isometria imprópria*, abordados em Lima (LIMA, 2007), esclarecem quando duas figuras geométricas congruentes são superponíveis ou não.

2.6 ISOEDROS

Segundo Bortolossi (BORTOLOSSI, 2009), isoedros são poliedros convexos para os quais qualquer face pode ser levada para qualquer outra face por uma rotação, uma reflexão ou uma composição de ambas, transformando o poliedro em si mesmo. Já em (WOLFRAM, 2017):

O isoedro é um poliedro convexo com simetrias que atuam de forma transitiva em suas faces em relação ao centro de gravidade. Todo isoedro tem um número par de faces (Grünbaum 1960). O isoedro faz dados justos, e há 30 deles (incluindo sólidos finitos e infinitas classes de sólidos).

Sherman (SHERMAN, 2017) descreve as vinte e cinco classes de isoedros com um número finito de faces (4, 6, 8, 12, 20, 24, 30, 48, 60 ou 120). Nesta classificação, estão inclusos os cinco poliedros de Platão e os treze poliedros de Catalan, duais dos poliedros de Arquimedes. Há ainda cinco classes de isoedros com uma infinidade de faces possíveis. A Figura 2.32 ilustra alguns isoedros.

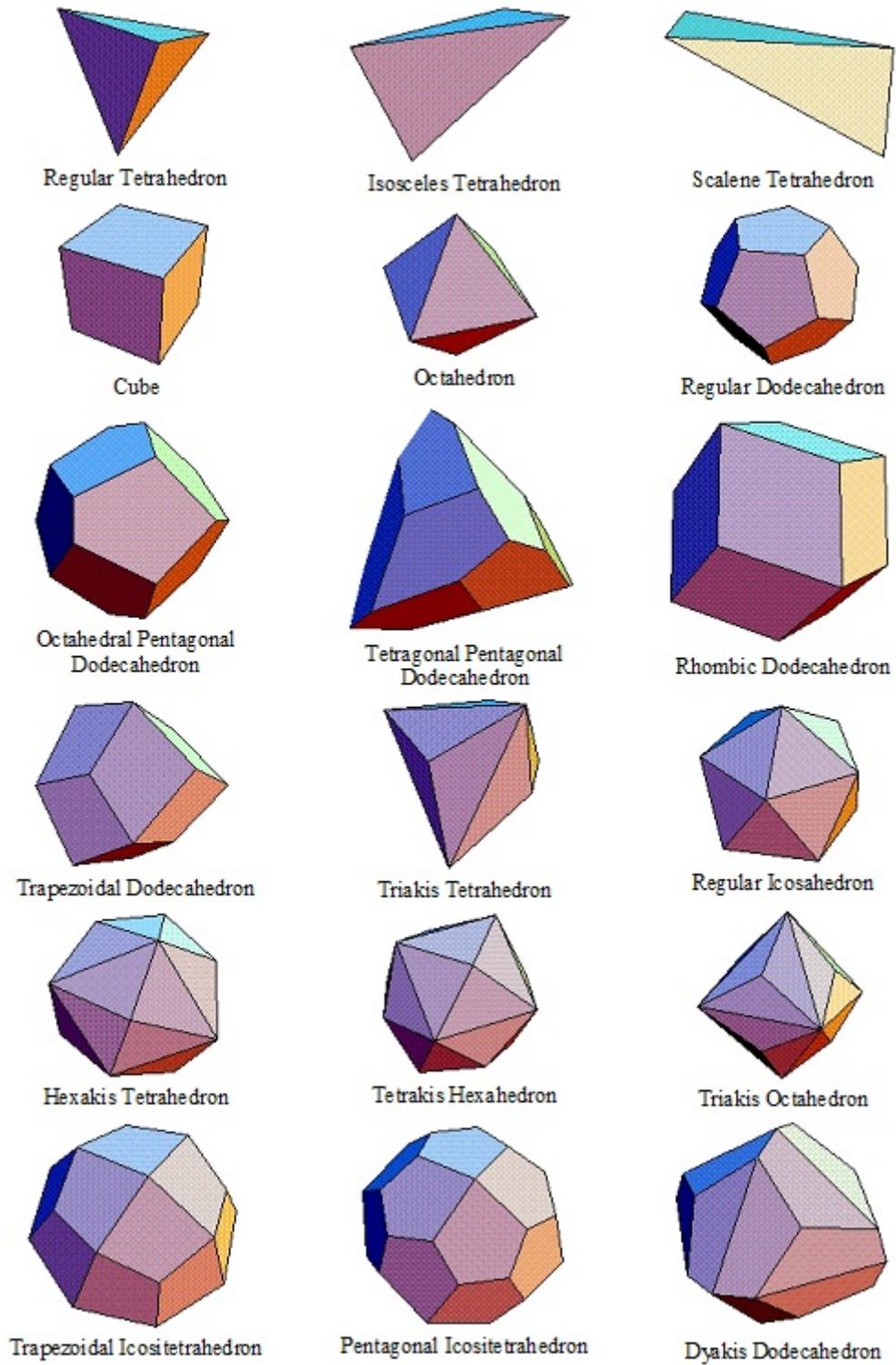


Figura 2.32: Isoedros (MATHPUZZLE, 2017)

3 POLÍGONOS EQUIDECOMPONÍVEIS

Neste capítulo, apresentamos, fundamentados em (BOLTJANSKI, 1996), (HILBERT, 2003), (LIMA, 1985) e (MARQUES, 2012), os teoremas sobre equicomposição de polígonos.

3.1 DEFINIÇÕES

Definição 3.1 (Polígono). *Dada uma sequência de n pontos distintos $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ do plano, com $n \geq 3$, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1} , A_n e A_1 , assim como A_n , A_1 e A_2 , denomina-se polígono $\mathcal{P} = A_1A_2\dots A_n$ à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$, se estiverem satisfeitas as seguintes condições:*

- *a intersecção de dois segmentos não consecutivos é vazia;*
- *dois segmentos quaisquer com uma extremidade comum não pertencem à mesma reta.*

Definição 3.2 (Polígono convexo). *O polígono $\mathcal{P} = A_1A_2\dots A_n$ é convexo se, e somente se, toda reta determinada por dois vértices consecutivos deixa os demais $(n - 2)$ vértices em um mesmo semiplano dos dois que ela determina.*

A região poligonal correspondente ao polígono $A_1A_2\dots A_n$ é a região do plano delimitada pelos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$, ou seja, é a união do polígono com o seu interior. Neste trabalho, usaremos frequentemente expressões do tipo *a área de um polígono*, quando queremos dizer *a área da região poligonal cuja fronteira é o polígono considerado*.

Área é a quantidade de espaço bidimensional ocupada por uma figura geométrica plana (ou uma superfície limitada). Podemos estabelecer uma noção intuitiva de área determinando quantos quadrados unitários, isto é, de lado $1u.c.$ (uma unidade de comprimento), cabem dentro da figura plana da qual se quer a área.

Definição 3.3 (Área). *A área \mathcal{A} de um polígono é um número real positivo associado a ele, de forma que:*

i) *polígonos congruentes*¹ *têm áreas iguais;*

ii) *se dois polígonos \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 têm interiores disjuntos, isto é, de intersecção vazia, então*

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{P}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{P}_2);$$

iii) *se um polígono \mathcal{P}_1 está contido em um polígono \mathcal{P}_2 , então*

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_1) \leq \mathcal{A}(\mathcal{P}_2);$$

iv) *a área do quadrado unitário (lado de medida 1u.c.) é 1u.a. (uma unidade de área).*

Definição 3.4 (Polígonos equivalentes). *Dois polígonos são equivalentes se têm a mesma área.*

Um polígono é decomposto quando recortes (subdivisões) dividem o polígono original em polígonos menores, como ilustra a Figura 3.1.



Figura 3.1: Decomposição de um quadrado (MATHEMA, S.d.)

Definição 3.5 (Triangulação de um polígono). *Seja \mathcal{P} um polígono qualquer. Um segmento que liga dois vértices não consecutivos de \mathcal{P} denomina-se diagonal de \mathcal{P} . Esta diagonal é uma diagonal interior de \mathcal{P} se, com exceção de seus extremos, estiver contida no interior de \mathcal{P} . Uma triangulação de \mathcal{P} é uma coleção de triângulos cujos lados são lados de \mathcal{P} e/ou diagonais interiores de \mathcal{P} , de modo que os triângulos, quando se intersectam, o fazem em lados comuns ou em vértices de \mathcal{P} , e a reunião desses triângulos e seus interiores é a região determinada por \mathcal{P} . A Figura 3.1 apresenta um polígono não convexo com duas formas diferentes de triangulação.*

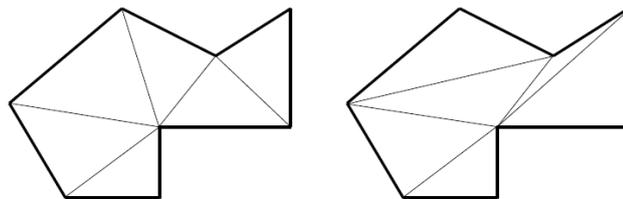


Figura 3.2: Triangulações de um polígono não convexo (MARQUES, 2012)

Hilbert (HILBERT, 2003) define polígonos equidecomponíveis da seguinte forma:

¹Dois polígonos \mathcal{P} e \mathcal{Q} são congruentes se existe uma isometria f tal que $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$, ou seja, dois polígonos são ditos congruentes quando um deles pode ser deslocado no plano, sem deformá-lo, até coincidir com o outro.

Dois polígonos simples dizem-se equidecomponíveis, quando se puderem decompor em um número finito de triângulos congruentes entre si dois a dois.

Na tentativa de explicar o conceito de equicomposição de uma forma mais simples, Souza (SOUZA, 1973) define figuras equidecomponíveis da seguinte forma:

Duas figuras são equidecomponíveis quando podem ser decomponíveis em partes respectivamente iguais.

Definição 3.6 (Polígonos equidecomponíveis). *Dois polígonos \mathcal{P} e \mathcal{P}' são equidecomponíveis quando existem decomposições $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \dots \cup \mathcal{P}_n$ e $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_1 \cup \mathcal{P}'_2 \cup \mathcal{P}'_3 \cup \dots \cup \mathcal{P}'_n$, de tal modo que cada polígono \mathcal{P}_i é congruente ao polígono \mathcal{P}'_i , com $1 \leq i \leq n$. Além disso, exige-se que o polígono \mathcal{P} tenha suas partições disjuntas², exceto suas fronteiras, o mesmo ocorrendo com o polígono \mathcal{P}' .*

Segundo Boltianski (BOLTIANSKI, 1996):

Duas figuras são equicompostas (ou equidecomponíveis) se é possível decompor uma das figuras em um número finito de partes, e, por meio de um rearranjo dessas partes, compor a outra figura.

Os rearranjos possibilitam a composição da nova figura por meio de rotações, translações e reflexões, isometrias apresentadas no Capítulo 2.

3.2 EQUICOMPOSIÇÃO

Proposição 3.1. *Todo polígono de n lados, $n \geq 4$, admite uma triangulação.*

Demonstração.

a) \mathcal{P} é um polígono convexo

Seja $\mathcal{P} = A_1A_2\dots A_n$ um polígono convexo. Para todo $1 \leq j \leq n-1$, sejam Π_j o semiplano determinado por $\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ que contém pontos de \mathcal{P} e Π_n o semiplano determinado por $\overleftrightarrow{A_nA_1}$ que contém pontos de \mathcal{P} . As diagonais $A_1A_3, A_1A_4, \dots, A_1A_{n-1}$ estão, com exceção de seus extremos, contidas em todos esses semiplanos. Logo, são diagonais interiores de \mathcal{P} . Consideremos os triângulos $\Delta_1 = A_1A_2A_3, \Delta_2 = A_1A_3A_4, \dots, \Delta_{n-2} = A_1A_{n-1}A_n$. O polígono \mathcal{P} está contido na reunião desses triângulos e o interior de \mathcal{P} está contido na reunião dos interiores desses triângulos e dos lados que estão no interior de \mathcal{P} . Portanto, os triângulos $\Delta_j, 1 \leq j \leq n-2$, formam uma triangulação de \mathcal{P} .

²Intersecção vazia.

b) \mathcal{P} é um polígono qualquer

Suponhamos, por absurdo, que a tese não seja verdadeira. Então, podemos obter um polígono \mathcal{P} de n lados que não pode ser decomposto em triângulos. Escolhemos \mathcal{P} de modo que n seja o menor possível (para que a tese não seja válida). Consideremos uma reta r que não intersecta \mathcal{P} e que não seja paralela a nenhum dos lados de \mathcal{P} . Sejam ainda B o vértice do polígono \mathcal{P} localizado à menor distância de r , e A e C os vértices adjacentes a B , conforme ilustra a Figura 3.3. Temos dois casos para analisar.

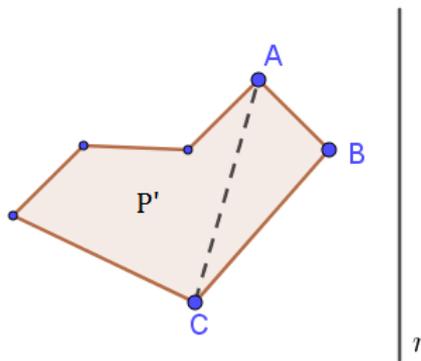


Figura 3.3: Triangulação de um polígono qualquer: 1° caso

1° caso: Os pontos A , B e C são os únicos vértices de \mathcal{P} que pertencem à região triangular ABC . O polígono \mathcal{P}' , obtido do polígono \mathcal{P} substituindo-se os lados AB e BC por AC - Figura 3.3, tem $(n - 1)$ lados. No entanto, por hipótese, n é o menor número de lados para o qual a tese não vale. Assim, \mathcal{P}' pode ser decomposto em triângulos adjacentes. Juntando a \mathcal{P}' o triângulo ABC , obtemos uma decomposição de \mathcal{P} em triângulos justapostos.

2° caso: O triângulo ABC contém outros vértices do polígono \mathcal{P} . Dentre estes vértices, seja D o mais distante do lado AC , como mostra a Figura 3.4. Dessa forma, a diagonal BD não intersecta nenhum lado de \mathcal{P} fora dos pontos B e D . O segmento BD divide \mathcal{P} em dois polígonos adjacentes, \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' , ambos com um número de lados menor do que o número de lados de \mathcal{P} . Como, novamente, n é o menor número de lados para o qual a tese não vale, os polígonos \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' podem ser decompostos em triângulos adjacentes. Unindo estas decomposições, temos uma triangulação para \mathcal{P} .

□

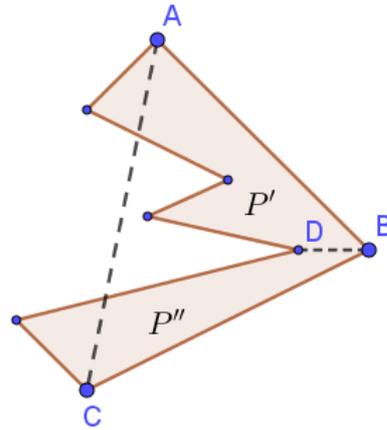


Figura 3.4: Triangulação de um polígono qualquer: 2º caso

Teorema 3.1. *Todo polígono de n lados, $n \geq 4$, pode ser decomposto em $(n - 2)$ triângulos justapostos cujos vértices são vértices do polígono.*

Demonstração.

Pela Proposição 3.1, sabemos que todo polígono admite uma triangulação. Assim, provaremos por indução finita sobre o número de lados (ou de vértices) que, dado um polígono \mathcal{P} de n lados, com $n \geq 4$, em qualquer triangulação de \mathcal{P} o número de triângulos é finito e igual a $(n - 2)$.

i) *Base de indução*

Para $n = 4$, temos que um quadrilátero pode ser dividido em $n - 2 = 4 - 2 = 2$ triângulos, o que é verdade (basta traçar uma diagonal interior de \mathcal{P}).

ii) *Passo de indução*

Suponhamos que a tese é válida para todo polígono \mathcal{P} com k lados, com $k < n$ (*hipótese de indução*). Acrescentando um lado (ou um vértice) ao polígono \mathcal{P} , temos que $n = k + 1$. Escolhemos uma diagonal d que divide \mathcal{P} em dois polígonos \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 , com k_1 e k_2 lados, respectivamente, $k_1, k_2 < (k + 1)$. Sabemos que

$$k_1 + k_2 = (k + 1) + 2, \quad (3.1)$$

pois a diagonal d é um lado comum a \mathcal{P}_1 e a \mathcal{P}_2 , sendo contado duas vezes. A hipótese indutiva implica que \mathcal{P}_1 é decomponível em $(k_1 - 2)$ triângulos e \mathcal{P}_2 em $(k_2 - 2)$ triângulos.

Então,

$$\begin{aligned} k_1 - 2 + k_2 - 2 &= k_1 + k_2 - 4 \\ &\stackrel{(3.1)}{=} (k + 1) + 2 - 4 \\ &= (k + 1) - 2 \end{aligned}$$

é o número de triângulos que compõem \mathcal{P} .

Assim, o polígono \mathcal{P} de $k + 1$ lados pode ser decomposto em $(k + 1) - 2$ triângulos.

□

Lema 3.1. *Se \mathcal{P} , \mathcal{Q} e \mathcal{R} são polígonos equidecomponíveis, então as seguintes relações são satisfeitas:*

- i) Reflexiva: \mathcal{P} é equidecomponível a \mathcal{P} ;*
- ii) Simétrica: se \mathcal{P} é equidecomponível a \mathcal{Q} , então \mathcal{Q} é equidecomponível a \mathcal{P} ;*
- iii) Transitiva: se \mathcal{P} é equidecomponível a \mathcal{Q} e \mathcal{Q} é equidecomponível a \mathcal{R} , então \mathcal{P} é equidecomponível a \mathcal{R} .*

Demonstração.

Segundo o Teorema 3.1, um polígono sempre é decomponível em um número finito de triângulos. Suponhamos então que os polígonos \mathcal{P} , \mathcal{Q} e \mathcal{R} são decomponíveis em triângulos

$$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \dots, \mathcal{P}_n, \quad \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3, \dots, \mathcal{Q}_n \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \dots, \mathcal{R}_n,$$

$n \in \mathbb{N}^*$, respectivamente.

- i) Como todo triângulo \mathcal{P}_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, é congruente a si mesmo, temos que

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \dots \cup \mathcal{P}_n = \mathcal{P}.$$

- ii) Suponhamos \mathcal{P} equidecomponível a \mathcal{Q} . Assim, por definição, temos que

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \dots \cup \mathcal{P}_n \quad \text{e} \quad \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 \cup \mathcal{Q}_3 \cup \dots \cup \mathcal{Q}_n,$$

com \mathcal{P}_i congruente a \mathcal{Q}_i para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Como a congruência de triângulos é simétrica, então \mathcal{Q}_i é congruente a \mathcal{P}_i para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Portanto, \mathcal{Q} é equidecomponível a \mathcal{P} .

iii) Suponhamos \mathcal{P} equidecomponível a \mathcal{Q} e \mathcal{Q} equidecomponível a \mathcal{R} . Dessa forma, por definição, temos que

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \dots \cup \mathcal{P}_n, \quad \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2 \cup \mathcal{Q}_3 \cup \dots \cup \mathcal{Q}_n \quad \text{e} \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 \cup \dots \cup \mathcal{R}_n,$$

com \mathcal{P}_i congruente a \mathcal{Q}_i e \mathcal{Q}_i congruente a \mathcal{R}_i para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Como a congruência de triângulos é transitiva, se \mathcal{P}_i é congruente a \mathcal{Q}_i e \mathcal{Q}_i é congruente a \mathcal{R}_i , então \mathcal{P}_i é congruente a \mathcal{R}_i para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Portanto, \mathcal{P} é equidecomponível a \mathcal{R} .

□

Proposição 3.2. *Dois polígonos equidecomponíveis têm a mesma área.*

Dois polígonos \mathcal{P} e \mathcal{P}' são equidecomponíveis quando é possível dividir cada um deles em um mesmo número de partes, com interiores disjuntos, e congruentes entre si. Este conceito está implícito na teoria de área de Euclides (EUCLIDES, 2009), ou seja, dois polígonos equidecomponíveis têm a mesma área. A recíproca desta proposição é conhecida como Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein. Assim, para calcularmos a área de uma figura basta decompormos a mesma em um número finito de partes, de tal modo que essas partes possam ser rearranjadas para formar uma figura cuja área seja conhecida ou o seu cálculo seja viável. Antes de demonstrarmos o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein, provaremos alguns lemas.

Lema 3.2. *Todo triângulo é equicomposto a um retângulo.*

Demonstração.

Sejam \overline{AB} o maior lado do triângulo ABC , ilustrado na Figura 3.5, e \overline{CD} a altura relativa a \overline{AB} . O ponto D , projeção ortogonal do ponto C sobre o lado \overline{AB} , encontra-se entre A e B , pois caso contrário um dos ângulos, \hat{A} ou \hat{B} , seria obtuso e, então, \overline{AB} não seria o maior lado.

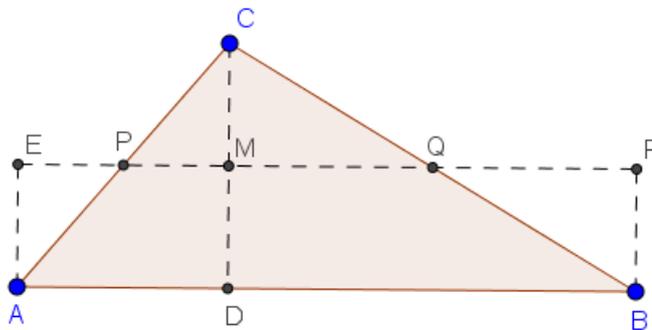


Figura 3.5: Triângulo ABC equicomposto ao retângulo $ABFE$

Pelo ponto médio M da altura \overline{CD} , tracemos uma reta paralela a \overline{AB} . Esta intersecta \overline{AC} e \overline{BC} nos seus respectivos pontos médios, P e Q . Baixemos agora as perpendiculares \overline{AE}

e \overline{BF} a essa reta. Pelo caso ALA_o (ângulo-lado-ângulo oposto), temos que $\Delta APE \equiv \Delta CPM$ e $\Delta BQF \equiv \Delta CQM$. Assim, o triângulo ABC e o retângulo $ABFE$ são compostos pelo trapézio $ABQP$ e pelos triângulos CPM e CQM . Portanto, o triângulo ABC é equicomposto ao retângulo $ABFE$.

□

Lema 3.3. *Se dois paralelogramos têm áreas iguais e uma base comum, então eles são equicompostos.*

Demonstração.

Sem perda de generalidade, consideremos os paralelogramos $ABCD$ e $ABC'D'$ de base comum \overline{AB} e alturas congruentes. Temos então três casos para analisar.

1° caso: Os segmentos CD e $C'D'$ têm um segmento comum $D'C$, como mostra a Figura 3.6.

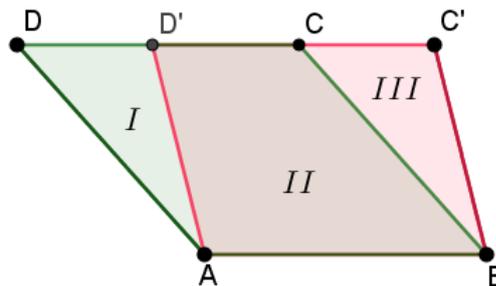


Figura 3.6: Paralelogramos equicompostos: 1° caso

Neste caso, temos que $\overline{CD} = \overline{CD'} + \overline{D'D}$ e $\overline{C'D'} = \overline{C'C} + \overline{CD'}$. Como $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$, então $\overline{C'C} \equiv \overline{D'D}$. Logo, pelo caso LLL (lado-lado-lado), $\Delta ADD' \equiv \Delta BCC'$ ($I = III$). Portanto, $ABCD$ ($I + II$) é equicomposto a $ABC'D'$ ($III + II = I + II$).

2° caso: Os segmentos CD e $C'D'$ têm somente um ponto comum, como ilustra a Figura 3.7.

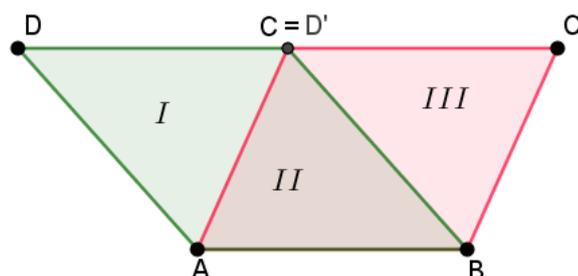


Figura 3.7: Paralelogramos equicompostos: 2° caso

Os triângulos ADD' e BCC' são congruentes pelo caso LLL ($I = III$), uma vez que:

$$\overline{DD'} \equiv \overline{CC'} \equiv \overline{AB}, \text{ por construção;}$$

$$\overline{AD'} \equiv \overline{BC'}, \text{ pois são lados opostos do paralelogramo } ABC'D';$$

$$\overline{AD} \equiv \overline{BC}, \text{ pois são lados opostos do paralelogramo } ABCD.$$

Então, temos que $ABCD$ ($I + II$) é equidecomposto a $ABC'D'$ ($III + II = I + II$).

3° caso: Os segmentos CD e $C'D'$ não têm pontos comuns, como mostra a Figura 3.8.

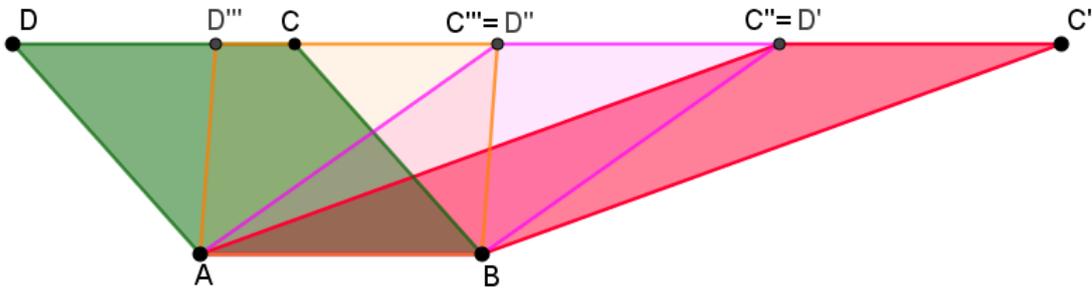


Figura 3.8: Paralelogramos equicompostos: 3° caso

Empregando o postulado de Arquimedes - que diz que “se CD e $C'D'$ são segmentos quaisquer, então existe um número natural n tal que a união de n segmentos congruentes a $C'D'$, construídos continuamente a partir de D' sobre a semirreta CD , conterà o ponto C'' ”, traçamos a partir do ponto D' esses segmentos. Assim, construímos paralelogramos auxiliares, como mostra a Figura 3.8. Cada um desses paralelogramos será equicomposto ao outro pelo 1° caso ou pelo 2° caso. Dessa forma, pela propriedade transitiva da equicomposição, $ABCD$ é equicomposto a $ABC'D'$ ³. \square

Lema 3.4. *Dois retângulos que têm áreas iguais são equicompostos.*

Demonstração.

Sejam os retângulos $ABCD$ e $AEJI$, ilustrados na Figura 3.20, sobrepostos e de mesma área, ou seja,

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{AI} \cdot \overline{AE}. \quad (3.2)$$

Seja ainda o segmento BI , que intersecta \overline{CD} em F e \overline{EJ} em G , isto é, $F = \overline{BI} \cap \overline{CD}$ e $G = \overline{BI} \cap \overline{EJ}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\frac{\overline{AB}}{2} \leq \overline{AE} \leq \overline{AB}$. Temos então três situações distintas para analisar.

³Todos os paralelogramos da Figura 3.8 têm base comum \overline{AB} e alturas congruentes iguais à $h = d(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{C'D'})$. Portanto, esses paralelogramos têm a mesma área, ou seja, são equivalentes. E o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien estabelece que polígonos que têm áreas iguais são equicompostos.

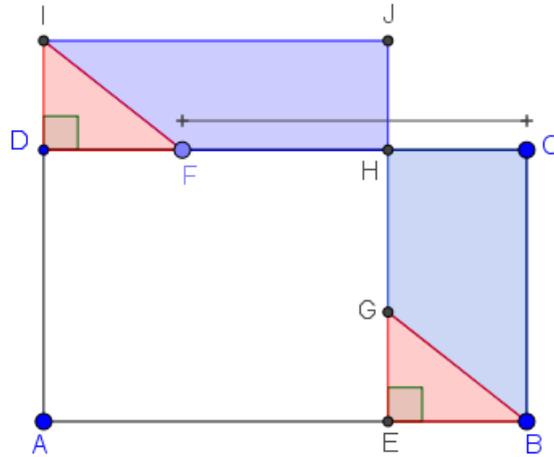


Figura 3.9: Retângulos equicompostos

(i) Se $\overline{AE} \equiv \overline{AB}$, então os dois retângulos são coincidentes e, portanto, equicompostos.

(ii) Se $\overline{AE} \equiv \frac{\overline{AB}}{2}$, ou seja, $F = H = G$, os triângulos EBG e DFI são congruentes pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo), uma vez que:

$$\widehat{GEB} \equiv \widehat{IDF} = 90^\circ;$$

$$\overline{EB} \equiv \overline{DF} = \overline{AB} - \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{2};$$

$$\widehat{EBG} \equiv \widehat{DFI}, \text{ pois são ângulos correspondentes.}$$

Analogamente, $\Delta JIF \equiv \Delta CGB$ ($F = G$). Portanto, os retângulos $ABCD$ e $AEIJ$ são equicompostos.

(iii) Se $\frac{\overline{AB}}{2} < \overline{AE} < \overline{AB}$, temos que os triângulos ABI e CFB são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo), uma vez que $\widehat{IAB} \equiv \widehat{BCF} = 90^\circ$ e \widehat{ABI} e \widehat{BFC} são ângulos alternos internos. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} &= \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}; \\ \overline{AB} \cdot \overline{BC} &= \overline{AI} \cdot \overline{CF}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Comparando (3.2) e (3.3), concluímos que $\overline{AE} \equiv \overline{CF}$ e, conseqüentemente, que $\overline{EB} \equiv \overline{DF}$ e $\overline{IJ} \equiv \overline{CF}$. Dessa forma, temos, pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo), que $\Delta IDF \equiv \Delta GEB$ e $\Delta IJG \equiv \Delta FCB$. Portanto, os retângulos $ABCD$ e $AEIJ$ são equicompostos.

□

Lema 3.5. *Todo polígono é equicomposto a um retângulo.*

Demonstração.

Segundo o Teorema 3.1, todo polígono pode ser decomposto em um número finito de triângulos. Cada um destes triângulos, conforme o Lema 3.2, é equicomposto a um retângulo. Mas, de acordo com o Lema 3.4, cada um desses retângulos é equicomposto a um retângulo de mesma área. Suponhamos então que b seja a medida da base de cada um desses retângulos. Dessa forma, por transitividade, os triângulos $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ nos quais foi decomposto o polígono original são equicompostos, respectivamente, aos retângulos I, II, III, IV, V, \dots de base b . Empilhando estes retângulos uns sobre os outros, obtemos um retângulo de base b , o qual é equicomposto ao polígono original, como ilustra a Figura 3.10.

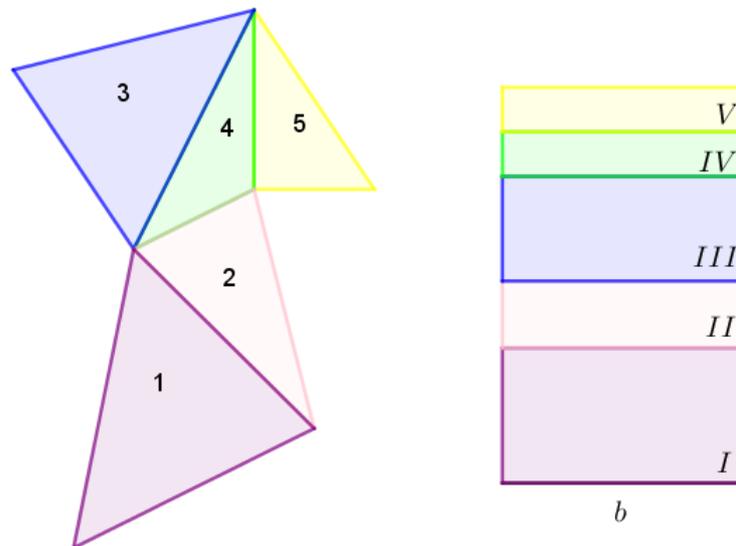


Figura 3.10: Polígono equicomposto a um retângulo

□

Agora estamos em condições de provar o teorema seguinte.

3.3 O TEOREMA DE WALLACE-BOLYAI-GERWIEN

Dois polígonos quaisquer, de mesma área, são equidecomponíveis, como mostra a Figura 3.11. Este teorema foi demonstrado por Farkas Bolyai⁴ em 1832 e, independentemente, em

⁴Farkas Wolfgang Bolyai (1775-1856), matemático húngaro, interessado nos fundamentos da geometria e no axioma das paralelas. Seu trabalho principal, o Tentamen, foi uma tentativa de estabelecer uma base rigorosa e sistemática para a geometria, a aritmética, a álgebra e a análise. Pai do famoso matemático Janos Bolyai, um dos criadores da geometria hiperbólica (juntamente com Lobatchevski e Gauss).

1833 por Paul Gerwien⁵. No entanto, Ian Stewart acrescenta que William Wallace⁶ apresentou a prova em 1807.

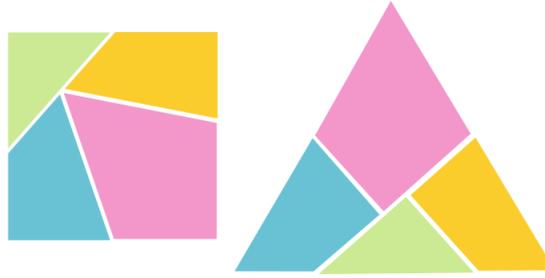


Figura 3.11: Quadrado e triângulo equicompostos (WIKIPEDIA, 2017)

Teorema 3.2 (Wallace-Bolyai-Gerwien). *Dois polígonos que têm áreas iguais são equicompostos.*

Demonstração.

Pelo Teorema 3.1, cada um dos polígonos pode ser decomposto em triângulos, os quais são, de acordo com o Lema 3.2, equicompostos a retângulos. Os dois retângulos obtidos da decomposição dos dois polígonos têm áreas iguais e, portanto, pelo Lema 3.4, são equicompostos. Logo, os dois polígonos são equicompostos.

□

O Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien abre um leque de possibilidades a serem investigadas. Dentre elas, temos a seguinte: É possível impormos condições extras sobre o número ou a disposição das partes com as quais se compõem os polígonos equivalentes? Em 1951, mais de um século depois da demonstração original, os matemáticos suíços H. Hadwiger e P. Glur refinaram o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e o enunciaram do seguinte modo, conforme (LIMA, 1985).

Teorema 3.3 (Hadwiger-Glur). *Dois polígonos \mathcal{P} e \mathcal{P}' são TR-equidecomponíveis quando admitem decomposições $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ e $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_1, \dots, \mathcal{P}'_n$ tais que, para $i = 1, 2, \dots, n$, pode-se obter \mathcal{P}'_i a partir de \mathcal{P}_i por meio de uma translação ou de uma rotação de 180° (com centro em um ponto qualquer do plano).*

⁵Paul Gerwien, matemático alemão amador.

⁶William Wallace (1768-1843), matemático e astrônomo escocês, inventor do pantógrafo, um instrumento geralmente feito de madeira utilizado para reproduzir desenhos em diferentes escalas. Entre 1801 e 1810, contribuiu com artigos sobre álgebra, seções cônicas e trigonometria, dentre outros, para a quarta edição da Enciclopédia Britânica.

O Teorema de Hadwiger-Glur diz que dois polígonos com áreas iguais são sempre TR-equidecomponíveis. A demonstração do Teorema 3.3 pode ser encontrada em (LIMA, 1985) e (BOLTIANSKI, 1996).

3.4 ALGUMAS DECOMPOSIÇÕES

Apresentamos nesta seção alguns polígonos equidecomponíveis a quadrados de mesma área. As construções foram baseadas em (KAGOIKI, 2001) e (SALLUM, S.d.).

Teorema 3.4. *Todo retângulo pode ser decomposto em um quadrado de mesma área.*

Demonstração.

Vamos demonstrar que todo retângulo de lados a e b pode ser transformado em um quadrado de lado c , decompondo-o com um número finito de cortes retilíneos e justapondo as peças. Como o quadrado deve ter área

$$c^2 = ab, \quad (3.4)$$

o lado do quadrado a ser formado deve medir $c = \sqrt{ab}$. De fato, este quadrado existe e pode ser construído com régua e compasso, como mostra a Figura 3.12, pois c é a média geométrica de a e b .

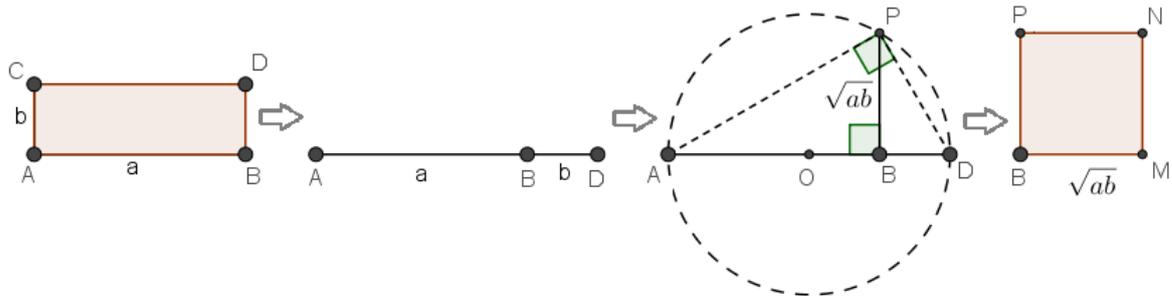


Figura 3.12: Construção do quadrado equidecomponível ao retângulo de lados a e b

Sejam o retângulo $ABCD$, de lados $\overline{AB} \equiv \overline{CD} = a$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC} = b$, e o quadrado $AEJI$, de lado $c = \sqrt{ab}$, sobrepostos, como ilustra a parte à esquerda da Figura 3.13. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a > b$, $F = \overline{BI} \cap \overline{CD}$ e $G = \overline{BI} \cap \overline{EJ}$.

Para mostrar que $ABCD$ é equicomposto a $AEJI$, temos que mostrar que $\triangle IJG \equiv \triangle FCB$ e que $\triangle IDF \equiv \triangle GEB$.

i) Como $\widehat{IDF} \equiv \widehat{IAB} = 90^\circ$ e \widehat{DIF} é ângulo comum, pelo caso AA (ângulo-ângulo) temos

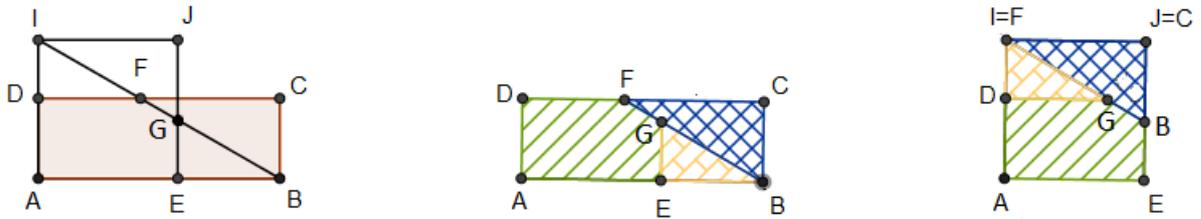


Figura 3.13: Decomposição de um retângulo em um quadrado

que $\triangle IDF \sim \triangle IAB$. Logo:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{ID}}{\overline{DF}} &= \frac{\overline{IA}}{\overline{AB}}; \\ \frac{c-b}{\overline{DF}} &= \frac{c}{a}; \\ ac - ab &\stackrel{(3,4)}{=} c\overline{DF}; \\ ac - c^2 &= c\overline{DF}; \\ c(a-c) &= c\overline{DF}; \\ \overline{DF} &= a - c.\end{aligned}$$

Mas, como $\overline{DF} = \overline{AB} - \overline{CF} = a - c$, então $\overline{CF} = c$.

Dessa forma:

$$\begin{aligned}\widehat{GIJ} &\equiv \widehat{BFC}, \text{ pois são ângulos correspondentes;} \\ \overline{IJ} &\equiv \overline{CF} = c; \\ \widehat{IJG} &\equiv \widehat{FCB} = 90^\circ.\end{aligned}$$

Assim, $\triangle IJG \equiv \triangle FCB$ pelo caso *ALA* (ângulo-lado-ângulo).

ii) Como:

$$\begin{aligned}\widehat{GEB} &\equiv \widehat{IDF} = 90^\circ; \\ \overline{EB} &\equiv \overline{DF}, \text{ uma vez que } \overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = a - c \text{ e } \overline{DF} = \overline{DC} - \overline{CF} = a - c; \\ \widehat{EBG} &\equiv \widehat{DFI}, \text{ pois são ângulos correspondentes,}\end{aligned}$$

temos pelo caso *ALA* (ângulo-lado-ângulo) que $\triangle IDF \equiv \triangle GEB$.

Portanto, o quadrado e o retângulo de mesma área são equidecomponíveis.

□

Teorema 3.5. *Todo triângulo equilátero pode ser decomposto em um quadrado de mesma área.*

Demonstração.

Pelo Lema 3.2, o triângulo é equicomposto a um retângulo; segundo o Teorema 3.4, o retângulo é equicomposto a um quadrado. A Figura 3.14 ilustra as decomposições.

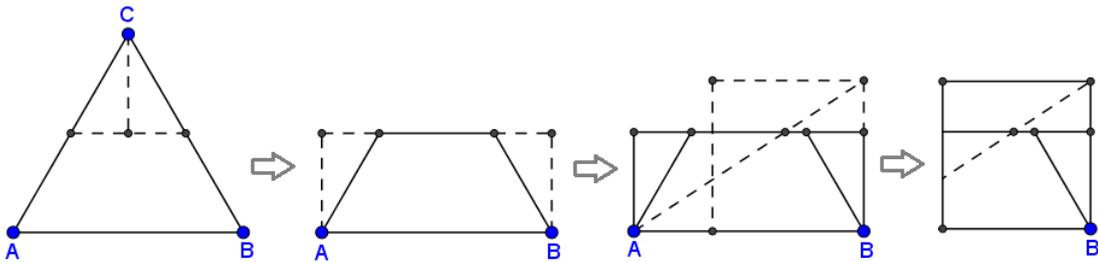


Figura 3.14: Equicomposição de um triângulo equilátero e um quadrado

□

Henry Dudeney (1857-1930), famoso inventor inglês de *puzzles*, publicou pela primeira vez em 1902 a decomposição clássica do triângulo equilátero em apenas 4 peças para compor o quadrado (KAGOIKI, 2001). A equicomposição de Dudeney está representada na Figura 3.15.

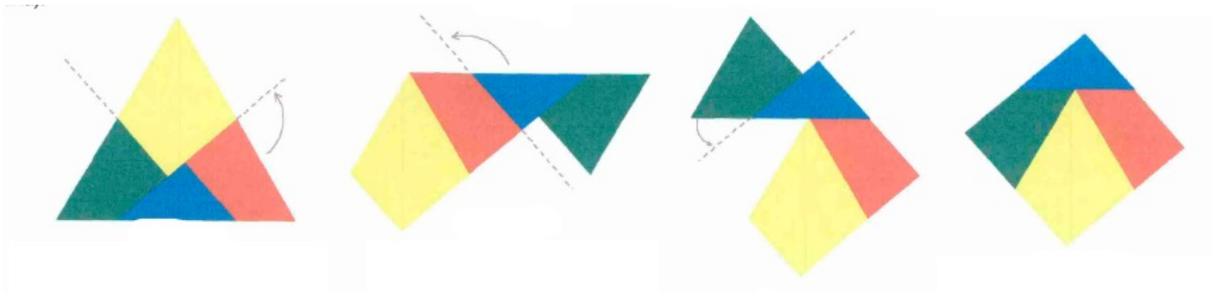


Figura 3.15: Equicomposição de um triângulo equilátero e um quadrado segundo Dudeney (KAGOIKI, 2001)

Teorema 3.6. *Dois quadrados são equidecomponíveis a um quadrado cuja área é igual à soma das áreas dos outros dois.*

Demonstração.

Sejam os quadrados $ABCD$ e $DEGF$, ilustrados na Figura 3.16. Tracemos \overline{BH} , tal que $H \in \overline{AD}$ e $\overline{AH} \equiv \overline{FG} = k$, \overline{HG} e as retas r e s , perpendiculares a \overline{BH} e \overline{HG} nos pontos B e G , respectivamente. Seja $I = r \cap s$.

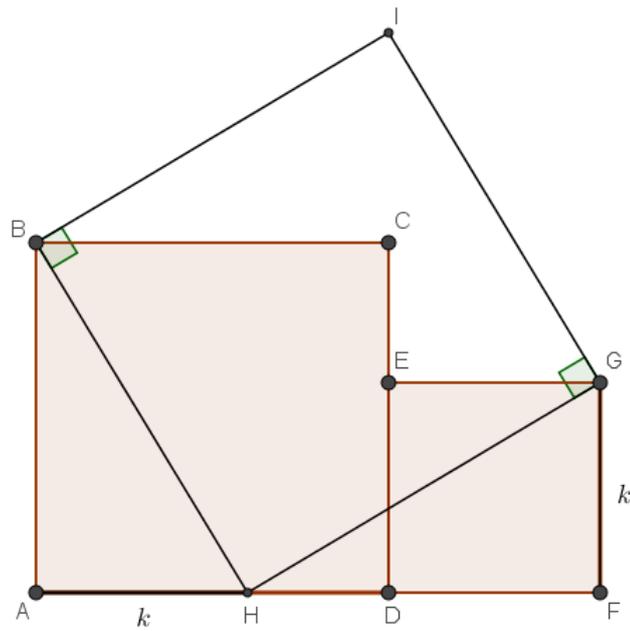


Figura 3.16: Quadrados $ABCD$ e $DEGF$, equicompostos ao quadrado $BIGH$

Como

$$\begin{aligned}\overline{AF} &= \overline{AD} + \overline{DF} = \overline{AH} + \overline{HF} = \overline{FG} + \overline{AB} \Rightarrow \overline{HF} \equiv \overline{AB}; \\ \widehat{BAH} &\equiv \widehat{HFG} = 90^\circ; \\ \overline{AH} &\equiv \overline{FG} = k,\end{aligned}$$

$\triangle BAH \equiv \triangle HFG$ pelo caso *LAL* (lado-ângulo-lado). Portanto:

$$\begin{aligned}\widehat{ABH} &\equiv \widehat{FHG}; \\ \widehat{AHB} &\equiv \widehat{FGH}; \\ \overline{BH} &\equiv \overline{HG}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Temos ainda que

$$\widehat{AHB} + \widehat{BHG} + \widehat{FHG} = 180^\circ\tag{3.6}$$

e, empregando (3.5), que

$$\widehat{AHB} = 90^\circ - \widehat{ABH} = 90^\circ - \widehat{FHG}.\tag{3.7}$$

Substituindo (3.7) em (3.6), concluímos que

$$\widehat{BHG} = 90^\circ.$$

Assim, como $\overline{BH} \equiv \overline{HG}$ e $\widehat{BHG} \equiv \widehat{HBI} \equiv \widehat{HGI} = 90^\circ$, $BIGH$ é um quadrado.

Temos também, pelo caso LAL_o (lado-ângulo-lado oposto) para triângulos retângulos, que $\triangle BAH \equiv \triangle BCI$ e $\triangle GFH \equiv \triangle GEI$. Logo, o quadrado $BIGH$ é equicomposto aos quadrados $ABCD$ e $DEGF$, sendo sua área dada por

$$A(BIGH) = \overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{FG}^2. \quad (3.8)$$

A expressão (3.8), na qual utilizamos o teorema de Pitágoras, estabelece que a área do quadrado $BIGH$ é a soma das áreas dos quadrados $ABCD$ e $DEGF$.

□

Podemos empregar o Teorema 3.6 para demonstrar o teorema de Pitágoras por equicomposição, como ilustram as Figuras 3.17 e 3.18. O professor e matemático americano Elisha Scott Loomis (1852-1940) era apaixonado pelo teorema de Pitágoras. No período de 1907 a 1927, ele colecionou demonstrações do teorema, agrupando-as em um livro denominado *The Pythagorean Proposition* (A proposição de Pitágoras). A primeira edição, publicada em 1927, continha 230 demonstrações; já a segunda edição, publicada em 1940, continha 370 demonstrações. Loomis (LOOMIS, 1968) classificou as demonstrações em dois grupos: no primeiro, as demonstrações algébricas; no segundo, as demonstrações geométricas. Dentre estas, há muitas demonstrações por equicomposição de quadrados.



Figura 3.17: Demonstração do teorema de Pitágoras por equicomposição: a prova de Euclides ou a cadeira da noiva ou o moinho de vento (BOYER, 1974)

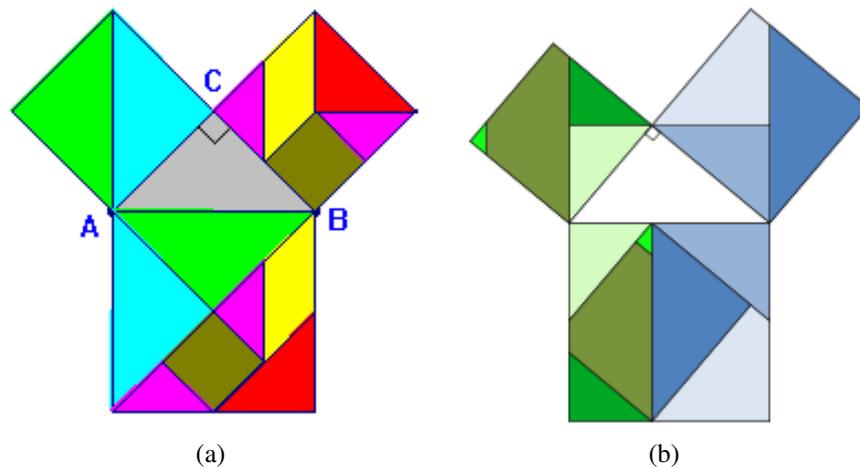


Figura 3.18: Prova do teorema de Pitágoras por equicomposição: (a) com o Tangram; (b) usando o Lema 3.5 (WIKIBOOKS, 2017)

3.4.1 A EQUICOMPOSIÇÃO DE PERIGAL PARA O TEOREMA DE PITÁGORAS

Conforme (WAGNER, 2015), Henry Perigal (1801-1898) publicou em 1873 a demonstração do teorema de Pitágoras indicada na Figura 3.19. A equicomposição de Perigal é uma equicomposição mais elaborada entre os quadrados construídos sobre os catetos e o quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo.

Perigal seccionou o quadrado $ACFG$, construído sobre o maior cateto \overline{AC} , por duas retas \overrightarrow{KL} e \overrightarrow{MN} passando pelo seu centro J , de tal forma que \overline{KL} é paralelo à hipotenusa \overline{BC} e perpendicular à \overline{MN} (\overline{KL} e \overline{MN} são as diagonais do losango $KMLN$, portanto perpendiculares). Dessa forma, o quadrado $ACFG$ é dividido em quatro quadriláteros congruentes. Essas quatro partes, mais o quadrado construído sobre o menor cateto, quando rotacionadas e transladadas, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa, como mostra a Figura 3.19.

Demonstração.

Sejam \overline{AF} e \overline{CG} as diagonais do quadrado $ACFG$. Temos então, pelo caso *ALA* (ângulo-lado-ângulo), que $\triangle NGJ \equiv \triangle MCJ$, pois:

$$\widehat{NGJ} \equiv \widehat{MCJ} = 45^\circ, \text{ pois são ângulos alternos internos e } \overline{CG} \text{ é a bissetriz de } \widehat{ACF} = 90^\circ;$$

$$\overline{GJ} \equiv \overline{CJ}, \text{ pois } J = \overline{CG} \cap \overline{AF};$$

$$\widehat{GJN} \equiv \widehat{CJM} = \alpha, \text{ pois são opostos pelo vértice.}$$

Portanto, $\overline{NG} \equiv \overline{MC}$. Analogamente, $\triangle KAJ \equiv \triangle LFJ$ e $\overline{KA} \equiv \overline{LF}$.

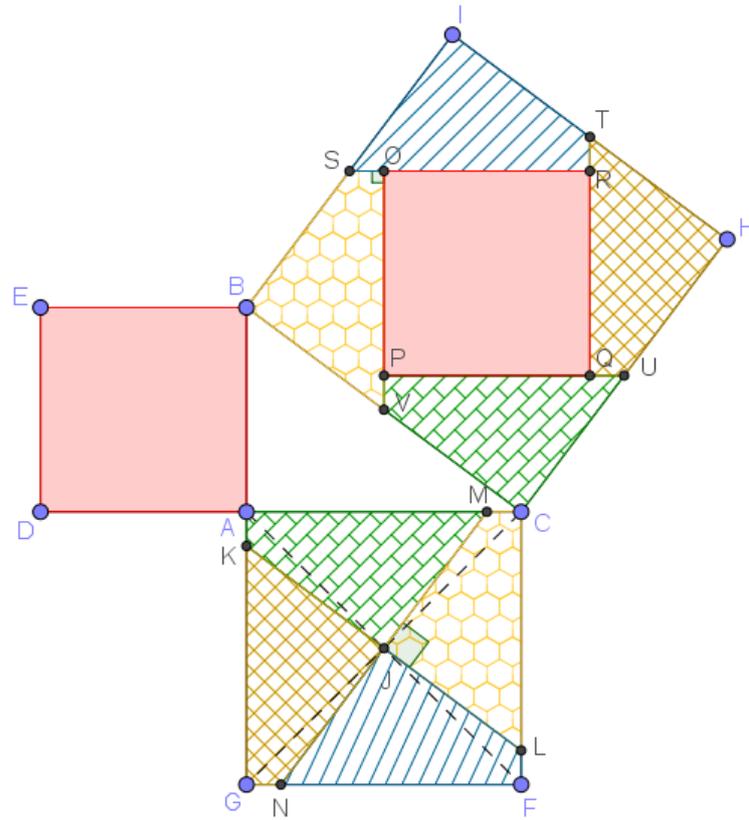


Figura 3.19: Demonstração de Perigal para o teorema de Pitágoras por equicomposição de quadrados

Como, por construção, $\overline{KJ} \perp \overline{JN}$ e $\widehat{GJN} = \alpha$, então $\widehat{KJG} = 90^\circ - \alpha$. Logo, pelo caso *ALA* (ângulo-lado-ângulo), $\Delta NGJ \equiv \Delta KAJ$ e, por transitividade,

$$\begin{aligned} \Delta KAJ &\equiv \Delta MCJ \equiv \Delta LFJ, \\ \overline{NG} &\equiv \overline{MC} \equiv \overline{KA} \equiv \overline{LF} = x. \end{aligned}$$

Portanto, $\Delta NJF \equiv \Delta LJC \equiv \Delta MJA \equiv \Delta KJG$ e os quadriláteros $AKJM$, $GNJK$, $FLJN$ e $CMJL$ são congruentes. Ao reagruparmos estes quadriláteros para formar o quadrado $BCHI$, como ilustra a Figura 3.19, constatamos que:

$$\begin{aligned} \overline{VB} &\equiv \overline{CV} \equiv \overline{UC} \equiv \overline{HU} \equiv \overline{TH} \equiv \overline{IT} \equiv \overline{SI} \equiv \overline{BS} \equiv \overline{KJ} \equiv \overline{NJ} \equiv \overline{LJ} \equiv \overline{MJ} = \frac{\overline{BC}}{2}; \\ \overline{NG} &\equiv \overline{MC} \equiv \overline{KA} \equiv \overline{LF} \equiv \overline{OS} \equiv \overline{RT} \equiv \overline{QU} \equiv \overline{PV} = x; \\ \overline{KB} &\equiv \overline{LC} \text{ (} KLCB \text{ é um paralelogramo por construção);} \\ \overline{KB} &\equiv \overline{OV}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como $\overline{KB} = \overline{AB} + \overline{KA} = \overline{AB} + x$ e $\overline{OV} = \overline{OP} + \overline{PV} = \overline{OP} + x$, de (3.9) temos que

$$\overline{OP} \equiv \overline{AB}.$$

Aplicando a mesma ideia para os segmentos PU , QT e RS ($\overline{KB} \equiv \overline{PU} \equiv \overline{QT} \equiv \overline{RS}$), concluímos que o quadrilátero $OPQR$ tem lados medindo \overline{AB} , isto é, a medida do lado do quadrado construído sobre o cateto \overline{AB} , e é, portanto, um quadrado, pois \widehat{POR} é suplementar de $\widehat{POS} = 90^\circ$, o mesmo valendo para os demais ângulos internos de $OPQR$.

□

3.5 ÁREA

Provaremos a área do retângulo e depois demonstraremos, por equicomposição, o cálculo da área de alguns polígonos convexos.

3.5.1 RETÂNGULO

Proposição 3.3. *A razão entre as áreas de dois retângulos de bases congruentes equivale à razão entre as suas alturas.*

Demonstração.

Sejam $R_1(b, h_1)$ e $R_2(b, h_2)$ as áreas de dois retângulos de alturas h_1 e h_2 , respectivamente, e bases de medida b . Precisamos mostrar que

$$\frac{R_1(b, h_1)}{R_2(b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Dividiremos a prova em duas etapas.

1º caso : as alturas h_1 e h_2 são comensuráveis.

Neste caso, como ilustra a Figura 3.20, existe um segmento de medida x tal que:

$$h_1 = px, p \in \mathbb{N}; \quad (3.10)$$

$$h_2 = qx, q \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

Dividindo (3.10) por (3.11), obtemos

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q}. \quad (3.12)$$

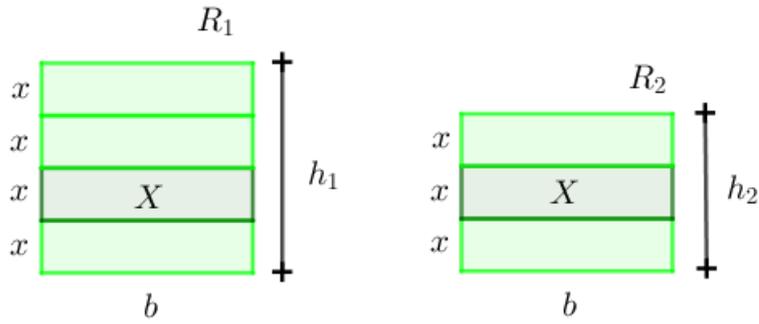


Figura 3.20: Retângulos de bases congruentes

Considerando o retângulo $X(b, x)$, temos que:

$$R_1(b, h_1) = pX(b, x), \quad p \in \mathbb{N}; \quad (3.13)$$

$$R_2(b, h_2) = qX(b, x), \quad q \in \mathbb{N}. \quad (3.14)$$

Dividindo (3.13) por (3.14), obtemos

$$\frac{R_1(b, h_1)}{R_2(b, h_2)} = \frac{p}{q}. \quad (3.15)$$

Comparando (3.12) e (3.15), concluímos que $\frac{R_1(b, h_1)}{R_2(b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}$.

2º caso : as alturas h_1 e h_2 são incomensuráveis.

Consideremos um segmento de medida y tal que

$$h_2 = ny, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.16)$$

Como h_1 e h_2 são incomensuráveis, y não cabe um número inteiro de vezes em h_1 (mas cabe um número inteiro de vezes em h_2 , pela propriedade Arquimediana em \mathbb{R}). Assim,

$$my < h_1 < (m+1)y, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.17)$$

Dividindo (3.17) por (3.16), obtemos

$$\frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{m+1}{n}. \quad (3.18)$$

Considerando o retângulo $Y(b, y)$, pela Definição 3.3 temos que:

$$R_2(b, h_2) = nY(b, y), \quad n \in \mathbb{N}; \quad (3.19)$$

$$mY(b, y) < R_1(b, h_1) < (m+1)Y(b, y), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.20)$$

Dividindo (3.20) por (3.19), obtemos

$$\frac{m}{n} < \frac{R_1(b, h_1)}{R_2(b, h_2)} < \frac{m+1}{n}. \quad (3.21)$$

Como y é uma medida arbitrária, podemos escolher y tão pequeno quanto quisermos. Assim:

$$\begin{aligned} y \rightarrow 0 &\Rightarrow n \rightarrow \infty; \\ n \rightarrow \infty &\Rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \rightarrow \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

Dessa forma, comparando (3.18) e (3.21), concluímos que, no limite ($y \rightarrow 0$ ou $n \rightarrow \infty$),

$$\frac{R_1(b, h_1)}{R_2(b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}.$$

□

Teorema 3.7. *A área do retângulo de dimensões a e b é ab .*

Demonstração.

Sejam os retângulos $R_1(a, b)$, $R_2(a, 1)$ e $R_3(1, 1)$, sendo este último o quadrado unitário conforme a Definição 3.3.

Como a Proposição 3.3 estabelece que a razão entre dois retângulos de bases congruentes equivale à razão entre as alturas, temos que:

$$\frac{R_1(a, b)}{R_2(a, 1)} = \frac{b}{1} = b; \quad (3.22)$$

$$\frac{R_2(a, 1)}{R_3(1, 1)} = \frac{R_2(1, a)}{R_3(1, 1)} = \frac{a}{1} = a. \quad (3.23)$$

Multiplicando membro a membro (3.22) e (3.23), concluímos que:

$$\begin{aligned} \frac{R_1(a, b)}{R_2(a, 1)} \cdot \frac{R_2(a, 1)}{R_3(1, 1)} &= ba; \\ \frac{R_1(a, b)}{R_3(1, 1)} &= ab. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Pela noção intuitiva de área, a igualdade (3.24) estabelece que o quadrado unitário “cabe” ab vezes no retângulo de dimensões a e b . Logo,

$$\mathcal{A}(R_1) = ab.$$

□

3.5.2 TRIÂNGULO

Teorema 3.8. A área do triângulo de base de medida b e altura de medida h é $\frac{b \times h}{2}$.

Demonstração.

Sejam, na Figura 3.5, $\overline{AB} = b$, $\overline{CD} = h$ e $\overline{BF} = \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{h}{2}$. Pelo Teorema 3.7, a área do retângulo $ABFE$ é

$$\mathcal{A}(ABFE) = \overline{AB} \times \overline{BF} = \frac{b \times h}{2}.$$

Como, pelo Lema 3.2, o triângulo ABC é equicomposto ao retângulo $ABFE$, temos que

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \mathcal{A}(ABFE) = \frac{b \times h}{2}.$$

□

3.5.3 PARALELOGRAMO

Teorema 3.9. A área do paralelogramo de base de medida b e altura de medida h é $b \times h$.

Demonstração.

Seja o paralelogramo $ABCD$, de base $\overline{AB} = b$ e altura $\overline{DG} \equiv \overline{BF} = h$, ilustrado na Figura 3.21. Conforme o Lema 3.5, o paralelogramo $ABCD$ é equicomposto ao retângulo $GECD$, de base $\overline{CD} \equiv \overline{AB} = b$ e altura $\overline{GD} = h$. Portanto, pelo Teorema 3.7, concluímos que:

$$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(GECD) = \overline{CD} \times \overline{DG} = \overline{AB} \times \overline{DG} = b \times h.$$



Figura 3.21: Paralelogramo equicomposto a um retângulo

□

As áreas dos demais polígonos convexos são decorrência direta do Lema 3.5. No entanto, faremos as demonstrações do cálculo das áreas dos seguintes polígonos convexos: losango, trapézio e hexágono regular.

3.5.4 LOSANGO

Teorema 3.10. A área do losango de diagonais de medida D e d é $\frac{D \times d}{2}$.

Demonstração.

Seja o losango $ABCD$, onde $\overline{AC} = D$ é a diagonal maior e $\overline{BD} = d$ é a diagonal menor, como mostra a Figura 3.22.

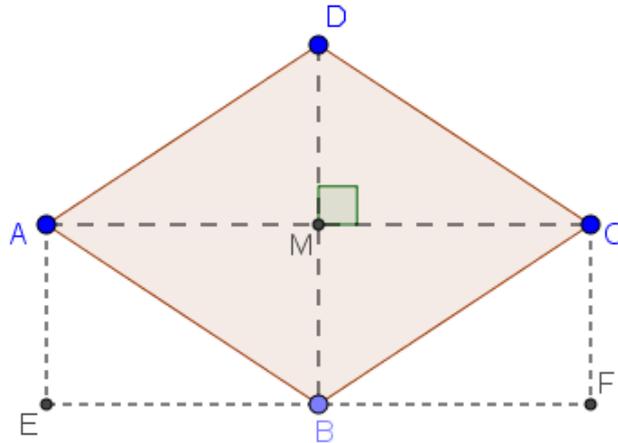


Figura 3.22: Losango equicomposto a um retângulo

Sabemos que as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} são perpendiculares e se intersectam no ponto M . Sabemos também, pelo caso *LAL* (lado-ângulo-lado), que $\triangle AMD \equiv \triangle AMB \equiv \triangle CMB \equiv \triangle CMD$. Traçando perpendiculares à diagonal \overline{AC} pelos pontos A e C e uma paralela à \overline{AC} passando por B , concluímos, pelo caso *LAL* (lado-ângulo-lado), que $\triangle AEB \equiv \triangle AMB \equiv \triangle AMD$ e, analogamente, que $\triangle CFB \equiv \triangle CMB \equiv \triangle CMD$. Assim, temos que $\overline{BM} \equiv \overline{AE} = \frac{\overline{BD}}{2}$ e que o losango $ABCD$ é equicomposto ao retângulo $AEFC$. Logo, pelo Teorema 3.7, temos que:

$$A(ABCD) = A(AEFC) = \overline{AC} \times \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2} = \frac{D \times d}{2}.$$

□

3.5.5 TRAPÉZIO

Teorema 3.11. A área do trapézio de bases de medida B e b e altura de medida h é $\frac{B+b}{2}h$.

Demonstração.

Seja o trapézio $ABCD$, tal que $\overline{AB} = B$ é a base maior e $\overline{CD} = b$ é a base menor, conforme ilustra a Figura 3.23.

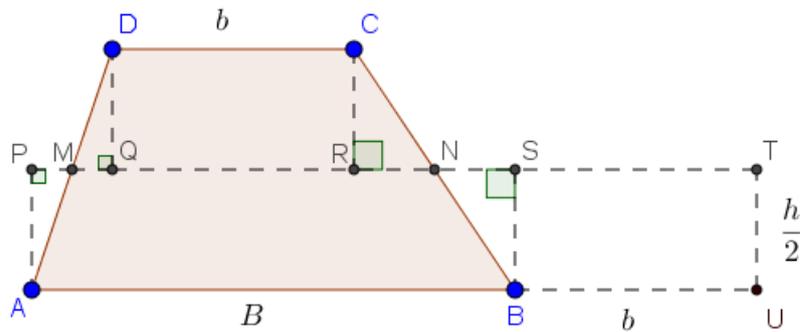


Figura 3.23: Trapézio equicomposto a um retângulo

Sejam M e N os pontos médios dos lados não paralelos \overline{AD} e \overline{BC} , respectivamente. Marcamos os pontos P , Q , R e S tal que \overline{AP} , \overline{DQ} , \overline{CR} e \overline{BS} são perpendiculares à \overleftrightarrow{MN} . Além disso, construímos $\overline{ST} \equiv \overline{BU} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{RQ} = b$, com $\overline{TU} \perp \overline{BU}$ e $\overline{TU} = \frac{h}{2}$, onde h é a medida da altura do trapézio.

Assim, constatamos pelo caso ALA_o (ângulo-lado-ângulo oposto) para triângulos retângulos, que $\triangle APM \equiv \triangle DQM$, pois:

$$\widehat{AMP} \equiv \widehat{DMQ}, \text{ pois são ângulos opostos pelo vértice;}$$

$$\overline{AM} \equiv \overline{DM}, \text{ pois } M \text{ é ponto médio de } \overline{AD};$$

$$\widehat{APM} \equiv \widehat{DQM} = 90^\circ, \text{ por construção.}$$

Analogamente, comprovamos que $\triangle CRN \equiv \triangle BSN$.

Como, por construção, os retângulos $CDQR$ e $TSBU$ são congruentes, o trapézio $ABCD$ é equicomposto ao retângulo $AUTP$, de base de medida $(B+b)$ e altura de medida $\frac{h}{2}$. Assim, empregando o Teorema 3.7, obtemos para a área do trapézio:

$$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(AUTP) = \overline{AU} \times \overline{TU} = (B+b) \times \frac{h}{2} = \frac{B+b}{2}h.$$

□

3.5.6 HEXÁGONO REGULAR

Teorema 3.12. A área do hexágono regular de lado de medida ℓ é $\frac{3\sqrt{3}}{2}\ell^2$.

Demonstração.

Seja o hexágono regular $ABCDEF$, de lado $\overline{AB} = \ell$ e apótema

$$a = \overline{JM} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}, \quad (3.25)$$

como mostra a Figura 3.24.

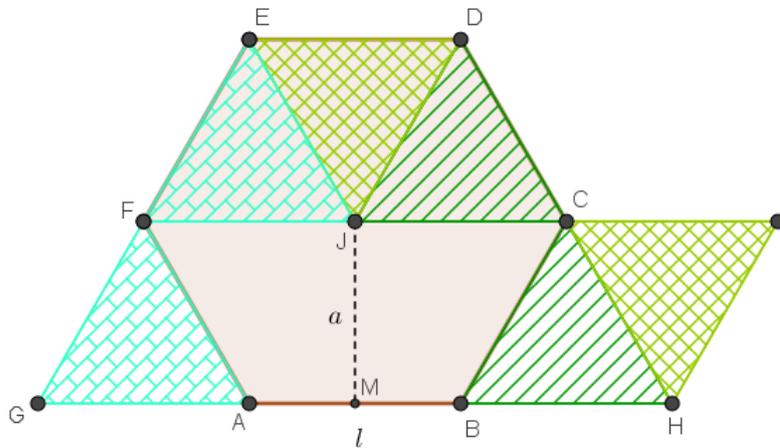


Figura 3.24: Hexágono equicomposto a um paralelogramo

Em \overleftrightarrow{AB} , marcamos os pontos G e H tais que $\overline{GA} \equiv \overline{BH} = \ell$ e, em \overleftrightarrow{CF} , o ponto I tal que $\overline{CI} = \ell$. Assim, pelo caso *LAL* (lado-ângulo-lado), temos que $\Delta GAF \equiv \Delta FJE$, $\Delta BCH \equiv \Delta JDC$ e $\Delta CHI \equiv \Delta EJD$. Logo, o hexágono regular $ABCDEF$ é equicomposto ao paralelogramo $FGHI$. Portanto, pelo Teorema 3.7, temos que:

$$\mathcal{A}(ABCDEF) = \mathcal{A}(FGHI) = \overline{GH} \times \overline{JM} = 3\ell \times a. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.25) em (3.26), concluímos que:

$$\mathcal{A}(ABCDEF) = 3\ell \times \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ell^2.$$

□

4 POLIEDROS EQUIDECOMPONÍVEIS

Neste capítulo, discutimos a decomposição de poliedros equivalentes com base em (BOLTIANSKI, 1996) e apresentamos o terceiro problema de Hilbert conforme Dias (DIAS, 2013).

4.1 DEFINIÇÕES

Definição 4.1 (Poliedro convexo). *Consideremos um número finito n , $n \geq 4$, de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:*

- i) dois polígonos não são coplanares;*
- ii) cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;*
- iii) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos em um mesmo semiespaço.*

Nestas condições, ficam determinados n semiespaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os demais. A intersecção desses semiespaços é denominada poliedro convexo, conforme ilustra a Figura 4.1.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.1: Poliedros convexos: (a) tetraedro triakis (poliedro de Catalan); (b) dodecaedro truncado (poliedro de Arquimedes); (c) bipirâmide quadrada giroalongada (poliedro de Johnson)

Definição 4.2 (Prisma convexo). *Um prisma convexo de bases $ABC \dots MN$ e $A'B'C' \dots M'N'$ é a porção limitada do espaço tridimensional delimitada pelos polígonos $ABC \dots MN \subset \alpha$ e $A'B'C' \dots M'N' \subset \beta$, com $\alpha \parallel \beta$, e pelos paralelogramos $AA'B'B$, $BB'C'C$, ..., $NN'A'A$, como*

ilustra a Figura 4.2. O prisma será reto quando as retas suportes dos segmentos AA' , BB' , ..., NN' forem perpendiculares aos planos α e β que contêm as bases.

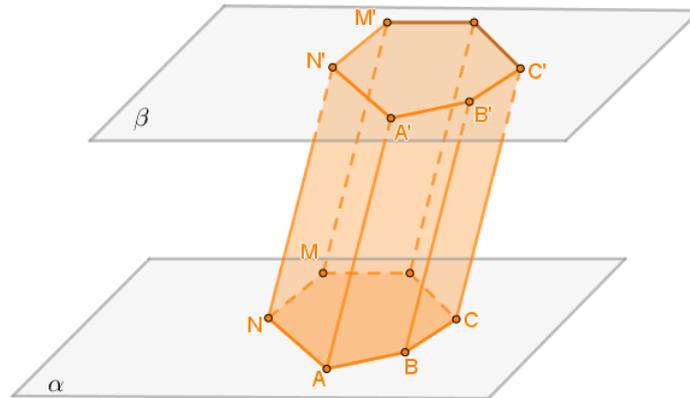


Figura 4.2: Prisma convexo de bases paralelas

Definição 4.3 (Paralelepípedo). *Paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo é a reunião de seis paralelogramos. Um paralelepípedo é reto retângulo quando as seis faces são retangulares.*

Volume é a quantidade de espaço tridimensional ocupada por uma figura geométrica espacial (ou um sólido). Podemos estabelecer uma noção intuitiva de volume por meio de algumas comparações:

- quantos cubos de aresta unitária cabem dentro do sólido do qual se quer determinar o volume;
- a capacidade ou volume líquido do sólido (este método pode ser usado para verificar que o volume de uma pirâmide é um terço do volume de um prisma de mesma base e altura);
- a quantidade de água deslocada após a imersão do sólido em um recipiente graduado contendo água (Princípio de Arquimedes¹).

Definição 4.4 (Volume). *O volume \mathcal{V} de um poliedro é um número real positivo associado a ele, de forma que:*

i) poliedros congruentes² têm volumes iguais;

¹Todo corpo mergulhado (completamente submerso) em um fluido (líquido ou gás) sofre, por parte do fluido, uma força vertical para cima, cuja intensidade é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo.

²Dois poliedros \mathcal{P} e \mathcal{Q} são congruentes se existe uma isometria f tal que $f(\mathcal{P}) = \mathcal{Q}$, ou seja, dois poliedros são ditos congruentes quando um deles pode ser deslocado no espaço tridimensional, sem deformá-lo, até coincidir com o outro.

ii) se dois poliedros \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 têm interiores disjuntos, ou seja, de intersecção vazia, então

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) = \mathcal{V}(\mathcal{P}_1) + \mathcal{V}(\mathcal{P}_2);$$

iii) se um poliedro \mathcal{P}_1 está contido em um poliedro \mathcal{P}_2 , então

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}_1) \leq \mathcal{V}(\mathcal{P}_2);$$

iv) o volume do cubo unitário (aresta de medida 1u.c.) é 1u.v. (uma unidade de volume).

Definição 4.5 (Poliedros equivalentes). *Dois poliedros são equivalentes se têm o mesmo volume.*

Definição 4.6 (Decomposição de um poliedro). *Um poliedro \mathcal{P} é composto pelos poliedros $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$, ou pode ser decomposto neles, se $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \dots \cup \mathcal{P}_n$ e os interiores de \mathcal{P}_i , $1 \leq i \leq n$, forem disjuntos.*

Definição 4.7 (Poliedros equidecomponíveis). *Dois poliedros \mathcal{P} e \mathcal{P}' são equidecomponíveis quando existem decomposições $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 \cup \dots \cup \mathcal{P}_n$ e $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_1 \cup \mathcal{P}'_2 \cup \mathcal{P}'_3 \cup \dots \cup \mathcal{P}'_n$, de tal modo que cada poliedro \mathcal{P}_i é congruente ao poliedro \mathcal{P}'_i , com $1 \leq i \leq n$. Além disso, exige-se que o poliedro \mathcal{P} tenha suas partições com os interiores disjuntos, o mesmo ocorrendo com o poliedro \mathcal{P}' .*

4.2 VOLUME DO PRISMA CONVEXO

4.2.1 VOLUME FUNDAMENTAL

Proposição 4.1. *A razão entre os volumes de dois paralelepípedos reto retângulos de bases congruentes equivale à razão entre as suas alturas.*

Demonstração.

Sejam $P_1(a, b, h_1)$ e $P_2(a, b, h_2)$ os volumes de dois paralelepípedos reto retângulos de alturas h_1 e h_2 , respectivamente, e bases com dimensões a e b . Precisamos mostrar que

$$\frac{P_1(a, b, h_1)}{P_2(a, b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Dividiremos a prova em duas etapas.

1º caso : as alturas h_1 e h_2 são comensuráveis.

Neste caso, como ilustra a Figura 4.3, existe um segmento de medida x tal que:

$$h_1 = px, p \in \mathbb{N}; \quad (4.1)$$

$$h_2 = qx, q \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Dividindo (4.1) por (4.2), obtemos

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{p}{q}. \quad (4.3)$$

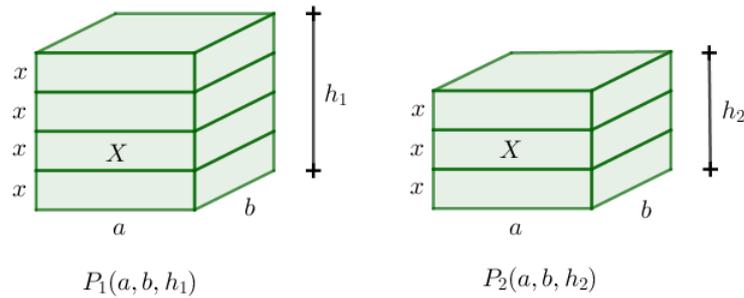


Figura 4.3: Paralelepípedos reto retângulos de bases congruentes

Considerando o paralelepípedo reto retângulo $X(a, b, x)$, temos que:

$$P_1(a, b, h_1) = pX(a, b, c), p \in \mathbb{N}; \quad (4.4)$$

$$P_2(a, b, h_2) = qX(a, b, c), q \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

Dividindo (4.4) por (4.5), obtemos

$$\frac{P_1(a, b, h_1)}{P_2(a, b, h_2)} = \frac{p}{q}. \quad (4.6)$$

Comparando (4.3) e (4.6), concluímos que $\frac{P_1(a, b, h_1)}{P_2(a, b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}$.

2º caso : as alturas h_1 e h_2 são incomensuráveis.

Consideremos um segmento de medida y tal que

$$h_2 = ny, n \in \mathbb{N}. \quad (4.7)$$

Como h_1 e h_2 são incomensuráveis, y não cabe um número inteiro de vezes em h_1 (mas cabe um número inteiro de vezes em h_2 , pela propriedade Arquimediana em \mathbb{R}). Assim,

$$my < h_1 < (m + 1)y, m \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

Dividindo (4.8) por (4.7), obtemos

$$\frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{m+1}{n}. \quad (4.9)$$

Considerando o paralelepípedo reto retângulo $Y(a, b, y)$, pela Definição 4.4 temos que:

$$P_2(a, b, h_2) = nY(a, b, y), \quad n \in \mathbb{N}; \quad (4.10)$$

$$mY(a, b, y) < P_1(a, b, h_1) < (m+1)Y(a, b, y), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

Dividindo (4.11) por (4.10), obtemos

$$\frac{m}{n} < \frac{P_1(a, b, h_1)}{P_2(a, b, h_2)} < \frac{m+1}{n}. \quad (4.12)$$

Como y é uma medida arbitrária, podemos escolher y tão pequeno quanto quisermos. Assim:

$$\begin{aligned} y \rightarrow 0 &\Rightarrow n \rightarrow \infty; \\ n \rightarrow \infty &\Rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \rightarrow \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

Dessa forma, comparando (4.9) e (4.12), concluímos que, no limite ($y \rightarrow 0$ ou $n \rightarrow \infty$),

$$\frac{P_1(a, b, h_1)}{P_2(a, b, h_2)} = \frac{h_1}{h_2}.$$

□

4.2.2 VOLUME DO PARALELEPÍPEDO RETO RETÂNGULO

Teorema 4.1. *O volume do paralelepípedo reto retângulo de dimensões a , b e c é abc .*

Demonstração.

Sejam os paralelepípedos reto retângulos $P_1(a, b, c)$, $P_2(a, b, 1)$, $P_3(a, 1, 1)$ e $P_4(1, 1, 1)$, sendo este último o cubo unitário.

Como a Proposição 4.1 estabelece que a razão entre dois paralelepípedos reto retângulos de bases congruentes equivale à razão entre as alturas, temos que:

$$\frac{P_1(a, b, c)}{P_2(a, b, 1)} = \frac{c}{1} = c; \quad (4.13)$$

$$\frac{P_2(a, b, 1)}{P_3(a, 1, 1)} = \frac{P(a, 1, b)}{P(a, 1, 1)} = \frac{b}{1} = b; \quad (4.14)$$

$$\frac{P_3(a, 1, 1)}{P_4(1, 1, 1)} = \frac{P_3(1, 1, a)}{P_4(1, 1, 1)} = \frac{a}{1} = a. \quad (4.15)$$

Multiplicando membro a membro (4.13), (4.14) e (4.15), concluímos que:

$$\begin{aligned} \frac{P_1(a, b, c)}{P_2(a, b, 1)} \cdot \frac{P_2(a, b, 1)}{P_3(a, 1, 1)} \cdot \frac{P_3(a, 1, 1)}{P_4(1, 1, 1)} &= cba; \\ \frac{P_1(a, b, c)}{P_4(1, 1, 1)} &= abc. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Pela noção intuitiva de volume, a igualdade (4.16) estabelece que o cubo unitário “cabe” abc vezes no paralelepípedo reto retângulo de dimensões a , b e c . Logo,

$$\mathcal{V}(P_1) = abc = Ah,$$

sendo $h = c$ a altura e $A = ab$ a área da base do paralelepípedo reto retângulo. \square

4.2.3 PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Segunda Lima (LIMA, 2011), três estratégias podem ser empregadas quando precisamos justificar as relações para o volume dos sólidos mais conhecidos:

1. adotar a apresentação clássica de Euclides e Arquimedes;
2. usar o cálculo infinitesimal;
3. utilizar o princípio de Cavalieri³.

Para Lima (LIMA, 2011), o princípio de Cavalieri permite uma simplificação notável nos argumentos que conduzem às fórmulas clássicas de volume; apresentado sob a forma de postulado, é intuitivamente aceitável e permite estabelecer resultados de forma concisa.

Definição 4.8 (Princípio de Cavalieri I). *Um sólido S é mensurável (volume) se $S \cap \alpha$ for um conjunto de área A mensurável para todo plano α que intersecte $\text{Int}(S)$.*

³Francesco Bonaventura Cavalieri (1598-1647), matemático italiano, discípulo de Galileu, que criou um método simples para determinar áreas e volumes, denominado princípio de Cavalieri.

Definição 4.9 (Princípio de Cavalieri II). *Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis e α é um plano tal que, para todo plano $\alpha' \parallel \alpha$,*

$$\mathcal{A}(S_1 \cap \alpha') = \mathcal{A}(S_2 \cap \alpha'),$$

então

$$\mathcal{V}(S_1) = \mathcal{V}(S_2).$$

As Definições 4.8 e 4.9 para o princípio de Cavalieri podem ser sintetizadas para poliedros na Definição 4.10.

Definição 4.10. *Dois poliedros, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina polígonos de áreas iguais (polígonos equivalentes), têm volumes iguais (poliedros equivalentes), conforme ilustra a Figura 4.4.*

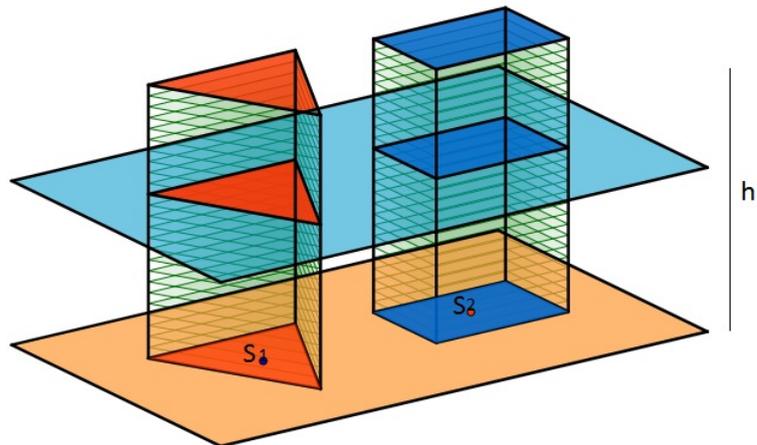


Figura 4.4: Poliedros equivalentes segundo o princípio de Cavalieri (LEONI, 2017)

A Figura 4.5 também ilustra o princípio de Cavalieri. Nela, observamos uma coleção finita de folhas de papel sulfite formando três sólidos de bases e alturas congruentes. Esses sólidos são equivalentes, pois o número de folhas usadas em cada sólido é o mesmo.

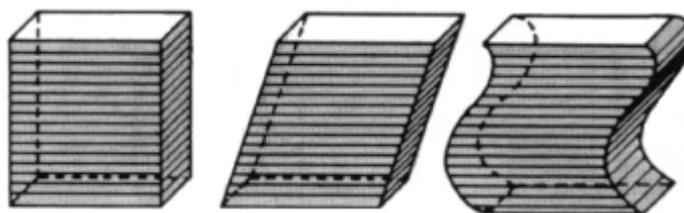


Figura 4.5: Sólidos equivalentes formados por folhas de papel sulfite

4.2.4 VOLUME DO PRISMA

Teorema 4.2. *O volume do prisma P é $\mathcal{V}(P) = Ah$, onde A é a área da base e h é a altura do prisma.*

Demonstração.

Sejam o prisma P_1 , de altura h e área da base A_1 , e o paralelepípedo reto retângulo P_2 , de altura h e área da base $B_1 = A_1$. Assim, P_1 e P_2 têm bases equivalentes e alturas congruentes. Seja ainda um plano β , paralelo ao plano α que contém as bases de P_1 e P_2 , como na Figura 4.6.

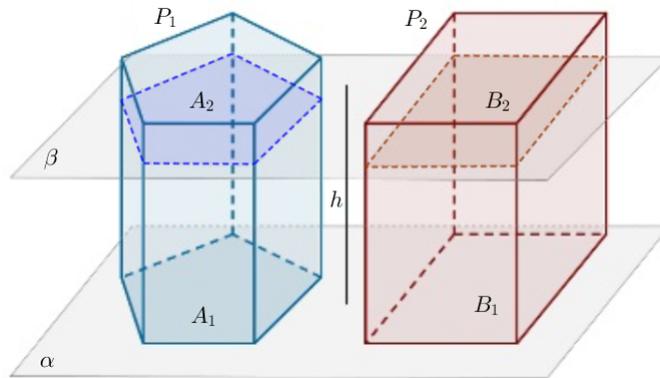


Figura 4.6: Prismas equivalentes

Pela definição de prisma de bases paralelas, o plano β determina em P_1 uma seção poligonal convexa, de área A_2 , congruente à base de área A_1 ; em P_2 , determina um retângulo de área B_2 , congruente à base de área B_1 .

Como $A_2 = A_1$, $B_2 = B_1$ e $A_1 = B_1$, temos que $A_2 = B_2$.

Desta forma, as seções de P_1 e P_2 paralelas às bases são equivalentes, isto é, têm a mesma área. Logo, pelo Princípio de Cavalieri, P_1 e P_2 são equivalentes, ou seja,

$$\mathcal{V}(P_1) = \mathcal{V}(P_2),$$

$$\mathcal{V}(P_1) = B_1 h,$$

$$\mathcal{V}(P_1) = A_1 h.$$

□

4.3 EQUICOMPOSIÇÃO DE PRISMAS

Segundo Boltianski (BOLTIANSKI, 1996), dois poliedros são equidecomponíveis se, ao se cortar de um certo modo um deles em um número finito de partes, pode-se compor com estas partes o segundo poliedro. Estes rearranjos ocorrem por meio de rotações, translações e reflexões, isometrias estudadas no Capítulo 2. Esses poliedros equidecomponíveis são equivalentes, ou seja, têm o mesmo volume.

No Teorema 4.2, provamos a fórmula para o volume do prisma convexo usando o princípio de Cavalieri e o volume do paralelepípedo reto retângulo, este provado no Teorema 4.1. Os Teoremas 4.3 e 4.4 nos permitem estabelecer novamente o volume do prisma convexo a partir do volume do paralelepípedo reto retângulo.

Teorema 4.3. *Todo prisma reto é equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo.*

Demonstração.

Seja P um prisma reto qualquer. Pelo Lema 3.5, a base poligonal do prisma P é equicomposta a um retângulo. Consideremos este retângulo como base de um paralelepípedo reto retângulo R cuja altura é congruente à altura de P . Como P e R têm alturas congruentes e bases equicompostas, temos que P é equivalente a R . Assim, P e R são equidecomponíveis. \square

A Figura 4.7 ilustra a equicomposição para um prisma triangular reto.

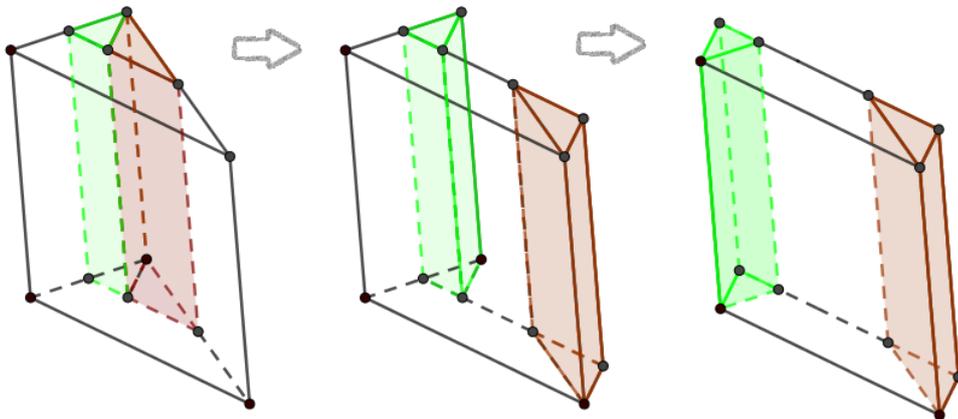


Figura 4.7: Prisma triangular reto equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo

Teorema 4.4. *Se a seção reta de um prisma oblíquo está contida nele, então o prisma oblíquo é equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo.*

Demonstração.

Seja P' um prisma oblíquo qualquer de bases S_1 e S_2 . Seja S'_1 a seção reta ou seção normal do prisma (seção perpendicular às arestas laterais), com $S' \subset P'$, tal que o plano Π' que contém S' divide P' em dois sólidos: P'_1 , o sólido inferior, e P'_2 , o sólido superior. Com movimentos de translação no espaço, podemos mover P'_1 de modo a colocá-lo sobreposto a P'_2 , formando um prisma reto P . Como provado no Teorema 4.3, esse prisma reto P é equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo R . Logo, P' é equivalente a P e, por transitividade, equicomposto a um paralelepípedo reto retângulo R . \square

A Figura 4.8 ilustra a equicomposição para um prisma pentagonal oblíquo.

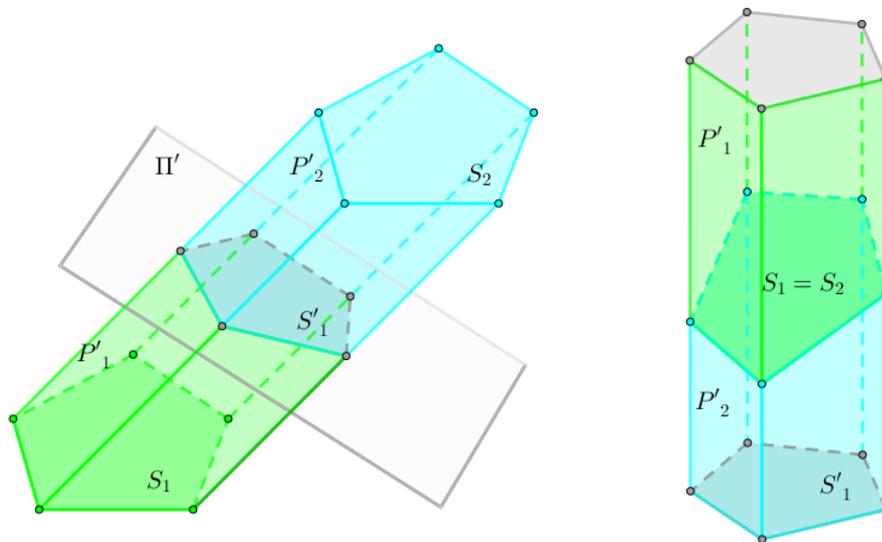


Figura 4.8: Prisma pentagonal oblíquo equicomposto a um prisma pentagonal reto

4.4 O TERCEIRO PROBLEMA DE HILBERT

A equicomposição provada no Teorema 4.3 é extensível a outros poliedros equivalentes, isto é, dois poliedros equivalentes são equidecomponíveis? Esta pergunta está relacionada com o terceiro dos vinte e três problemas propostos por Hilbert em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris. Vários matemáticos se empenharam no estudo da decomposição de poliedros:

Legendre em uma nota de seus *Éléments de Géométrie* (1794), já havia demonstrado que dois poliedros simétricos são equidecomponíveis com partes que têm a mesma orientação. Hill, professor na Universidade de Londres, fornece, em 1895, exemplos de tetraedros equidecomponíveis com um cubo. Bricard, professor de Matemática em Paris, fornece em 1896 uma condição para que dois poliedros de mesmo volume sejam equidecomponíveis, mas sua

demonstração é incompleta. Max Dehn, aluno de Hilbert, prova, em 1900, poucos meses após o congresso de Paris, que existem poliedros com o mesmo volume que não são equidecomponíveis. Em particular, Dehn mostra que um tetraedro regular e um cubo, ambos com o mesmo volume, não podem ser equidecomponíveis. Hadwiger, na década de 1950, simplificou a demonstração de Dehn, empregando o chamado invariante de Dehn, que é igual para poliedros equidecomponíveis. Ora, a decomposição de um prisma em três pirâmides pode fazer surgir pirâmides de mesmo volume, mas com invariantes de Dehn diferentes. Em 1965, o matemático suíço J. P. Sydler consegue, enfim, provar que as condições de Dehn são necessárias e suficientes para que dois poliedros de mesmo volume sejam equidecomponíveis (GUIMARAES et al., 2011).

Um dos alunos de Hilbert, Max Dehn, estudou o problema proposto pelo professor e deu a resposta negativa. O ponto importante de sua demonstração é construir invariantes que depois foram chamadas de *invariantes de Dehn*.

Teorema 4.5. (Dehn) *O tetraedro regular não é equicomposto por corte a um cubo.*

A demonstração da solução do terceiro problema de Hilbert pode ser encontrada em Dias (DIAS, 2013) e Conde (CONDE, 2003). Um tetraedro regular T de aresta a não é equicomposto por corte a um cubo C de mesmo volume, pois não tem as mesmas invariantes de Dehn, ou seja, $D(T) \neq D(C)$. Estas invariantes dependem do tamanho de todas as arestas e dos ângulos diedros. Assim, o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, válido em \mathbb{R}^2 , não é extensível para \mathbb{R}^3 .

4.5 VOLUME DA PIRÂMIDE CONVEXA

É usual compararmos uma pirâmide e um prisma de bases e alturas congruentes. Porém, essa comparação permite estabelecer a relação para o volume da pirâmide a partir da relação para o volume do prisma provada no Teorema 4.2? Para tanto, o prisma deve ser decomposto em três pirâmides equivalentes. Contudo, Guimarães et al. (GUIMARAES et al., 2011) afirma na citação acima que essas pirâmides não têm os mesmos invariantes de Dehn. Logo, o volume da pirâmide convexa deve ser demonstrado de outra maneira.

Teorema 4.6. *Se T é um tetraedro de base B e altura h e α' é um plano paralelo ao plano α que contém B , situado à distância h' do vértice V de T , com $h' < h$, então α' intersecta T em um triângulo B' , semelhante a B , tal que*

$$\frac{\mathcal{A}(B')}{\mathcal{A}(B)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

Demonstração.

Sejam o tetraedro $T = VMNP$, $B = \Delta MNP \subset \alpha$ e $B' = \Delta M'N'P' \subset \alpha'$, com V, M e M', V, N e N' e V, P e P' colineares, conforme a Figura 4.9. Sejam ainda O e O' os pés das perpendiculares baixadas de V a α e α' , respectivamente, e H e H' os pés das perpendiculares baixadas de P a \overline{MN} e de P' a $\overline{M'N'}$, respectivamente.

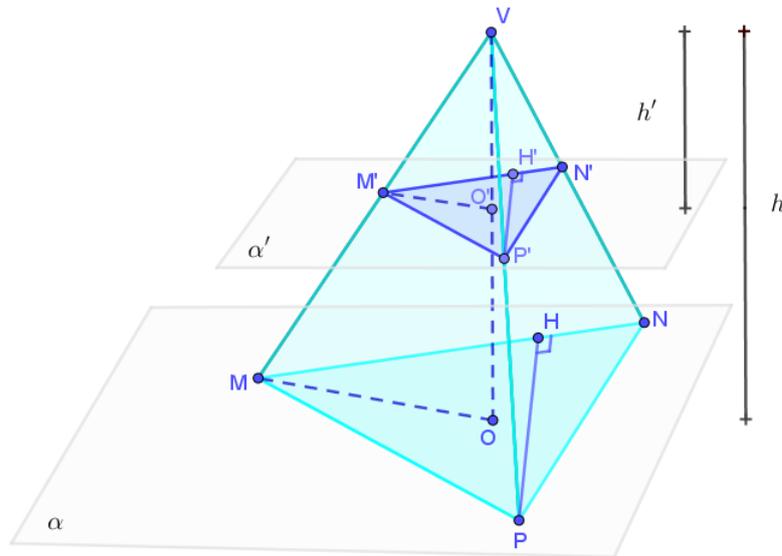


Figura 4.9: Seção paralela à base de um tetraedro

Se $\alpha \parallel \alpha'$, temos que $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{M'N'}$, $\overrightarrow{MP} \parallel \overrightarrow{M'P'}$, $\overrightarrow{NP} \parallel \overrightarrow{N'P'}$ e $\overrightarrow{PH} \parallel \overrightarrow{P'H'}$. Assim, pelo caso AA (ângulo-ângulo):

$$\Delta VMN \sim \Delta VM'N';$$

$$\Delta VMP \sim \Delta VM'P';$$

$$\Delta VNP \sim \Delta VN'P';$$

$$\Delta MNP \sim \Delta M'N'P'.$$

Logo,

$$\frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{VM'}}{\overline{VM}} = \frac{\overline{V'O'}}{\overline{VO}} = \frac{\overline{P'H'}}{\overline{PH}} = \frac{h'}{h} \quad (4.17)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A}(B')}{\mathcal{A}(B)} &= \frac{\mathcal{A}(\Delta M'N'P')}{\mathcal{A}(\Delta MNP)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{M'N'} \cdot \overline{P'H'}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{MN} \cdot \overline{PH}} \\ &\stackrel{(4.17)}{=} \frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}} \cdot \frac{\overline{P'H'}}{\overline{PH}} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h'}{h} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.7. *Dois tetraedros de bases equivalentes e alturas congruentes são equivalentes.*

Demonstração.

Sejam os tetraedros T_1 e T_2 de bases B_1 e B_2 , respectivamente, e de altura h . Seja ainda β um plano paralelo ao plano α das bases T_1 e T_2 ($B_1, B_2 \subset \alpha$). O plano β intersecta T_1 e T_2 em dois triângulos B'_1 e B'_2 , respectivamente, a uma distância h' , com $h' < h$, dos vértices de T_1 e T_2 , conforme ilustra a Figura 4.10.

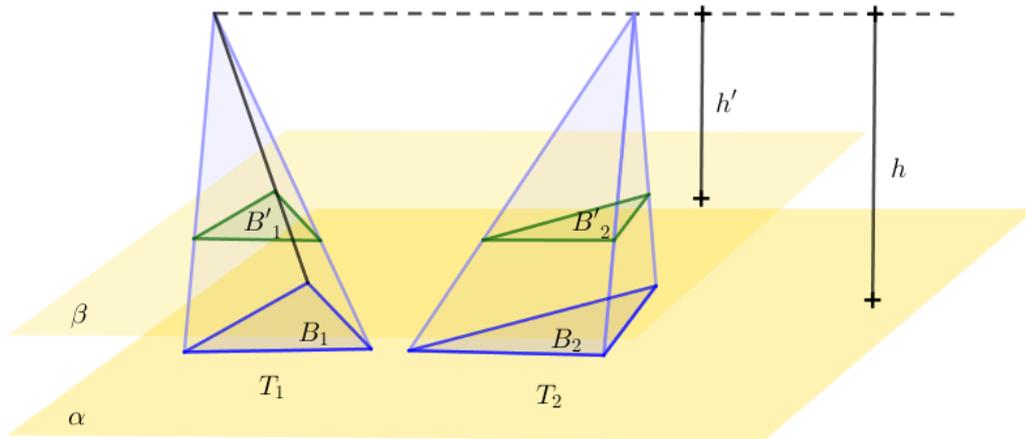


Figura 4.10: Tetraedros equivalentes

Sendo B'_1 e B'_2 secções paralelas às bases B_1 e B_2 de T_1 e T_2 , respectivamente, pelo Teorema 4.6 temos que:

$$\frac{\mathcal{A}(B'_1)}{\mathcal{A}(B_1)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2; \quad (4.18)$$

$$\frac{\mathcal{A}(B'_2)}{\mathcal{A}(B_2)} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2. \quad (4.19)$$

Comparando (4.18) e (4.19), concluímos que

$$\frac{\mathcal{A}(B'_1)}{\mathcal{A}(B_1)} = \frac{\mathcal{A}(B'_2)}{\mathcal{A}(B_2)}. \quad (4.20)$$

Como, por hipótese, as bases de T_1 e de T_2 são equivalentes, ou seja, $\mathcal{A}(B_1) = \mathcal{A}(B_2)$, temos em (4.20) que $\mathcal{A}(B'_1) = \mathcal{A}(B'_2)$, isto é, as secções são equivalentes. Como T_1 e T_2 têm secções equivalentes e alturas congruentes, então, pelo Princípio de Cavalieri, T_1 e T_2 são equivalentes. Portanto:

$$\mathcal{V}(T_1) = \mathcal{V}(T_2).$$

□

Teorema 4.8. *Todo prisma triangular é decomponível em três tetraedros equivalentes.*

Demonstração.

Seja o prisma triangular $ABCDEF$, decomposto nos tetraedros $T_1 : T(ABC)E$, $T_2 : T(DEF)C$ e $T_3 : T(ACD)E$, como ilustra a Figura 4.11.

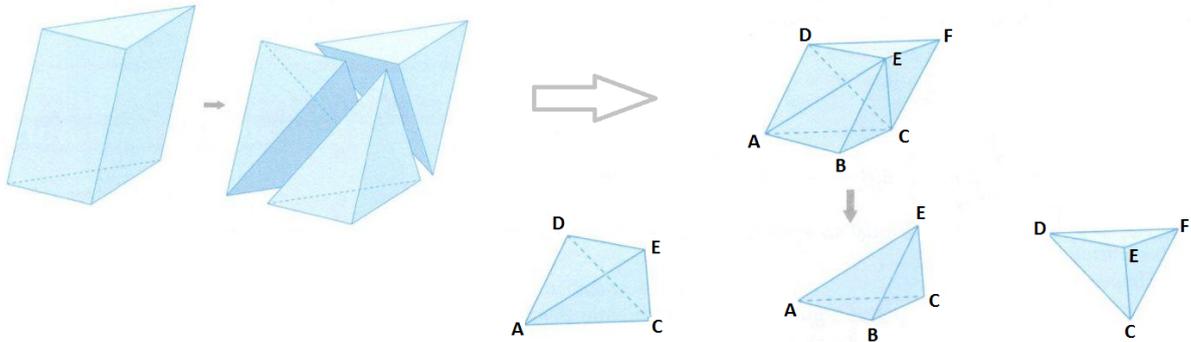


Figura 4.11: Decomposição de um prisma triangular em três tetraedros equivalentes (PAIVA, 2013)

Pela definição de prisma de bases paralelas, os triângulos ABC e DEF são congruentes. Assim, os tetraedros T_1 e T_2 têm bases congruentes às bases do prisma $ABCDEF$ e altura congruente à altura do prisma $ABCDEF$. Logo, pelo Teorema 4.7, T_1 e T_2 são equivalentes.

No paralelogramo $ACFD$, os triângulos ACD e CDF são congruentes. Dessa forma, considerando no tetraedro T_2 o triângulo CDF como base e a medida $d(\Delta CDF, E)$ como altura, temos que os tetraedros T_2 e T_3 são equivalentes.

Como T_1 é equivalente a T_2 e T_2 é equivalente a T_3 , então, por transitividade, T_1 é equivalente a T_3 . Portanto, o prisma triangular $ABCDEF$ é decomponível em três tetraedros equivalentes, ou seja, de mesmo volume. \square

Corolário 4.1. Se T é um tetraedro de base B e altura h , então

$$\mathcal{V}(T) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(B)h.$$

Demonstração.

Seja o prisma triangular P , de base B e altura h , decomposto em três tetraedros equivalentes T_1 , T_2 e T_3 . Como B e h também são a base e a altura, respectivamente, de T_1 (ou de T_2 ou de T_3), temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(P) &= \mathcal{V}(T_1) + \mathcal{V}(T_2) + \mathcal{V}(T_3); \\ \mathcal{V}(P) &= 3\mathcal{V}(T_1); \\ \mathcal{V}(T_1) &= \frac{1}{3}\mathcal{V}(P); \\ \mathcal{V}(T_1) &= \frac{1}{3}\mathcal{A}(B)h.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.9 (Volume da Pirâmide). *Se P é uma pirâmide de base B e altura h , então*

$$\mathcal{V}(P) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(B)h.$$

Demonstração.

Como todo polígono convexo de n lados é decomponível, a partir de um vértice, em $(n - 2)$ triângulos, temos que toda pirâmide convexa é decomponível, a partir do vértice V , em $(n - 2)$ tetraedros.

Seja então P a pirâmide $VA_1A_2\dots A_n$ de base $B = A_1A_2\dots A_n$ e altura h , decomposta em $(n - 2)$ tetraedros $T_k = VA_1A_kA_{k+1}$ de bases $B_k = A_1A_kA_{k+1}$, $2 \leq k \leq n - 1$, como ilustra a Figura 4.12.

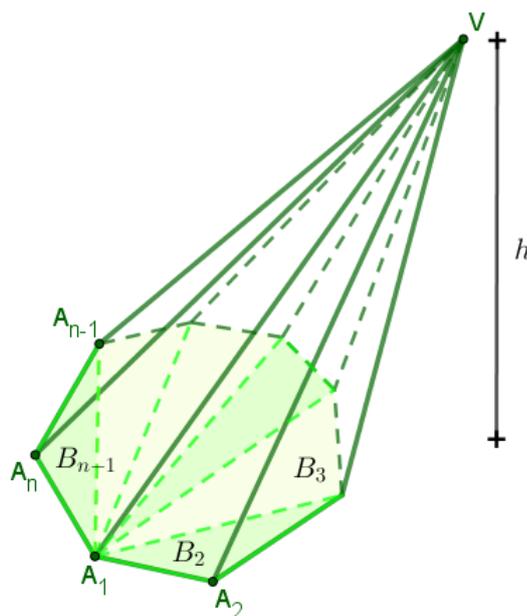


Figura 4.12: Pirâmide decomposta em tetraedros de alturas congruentes

Como os $(n - 2)$ tetraedros têm a mesma altura h da pirâmide P , temos que:

$$\mathcal{V}(P) = \mathcal{V}(T_2) + \mathcal{V}(T_3) + \cdots + \mathcal{V}(T_{n-1});$$

$$\mathcal{V}(P) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(B_2)h + \frac{1}{3}\mathcal{A}(B_3)h + \cdots + \frac{1}{3}\mathcal{A}(B_{n-1})h;$$

$$\mathcal{V}(P) = \frac{1}{3}h(\mathcal{A}(B_2) + \mathcal{A}(B_3) + \cdots + \mathcal{A}(B_{n-1}));$$

$$\mathcal{V}(P) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(B)h.$$

□

5 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, analisamos a abordagem da equicomposição em alguns livros didáticos de matemática para a Educação Básica aprovados no PNLD em 2015 e em 2016.

5.1 POLÍGONOS EQUIDECOMPONÍVEIS

Uma ação proposta por Centurión e Jakubovic (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2015) para os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, na seção sobre composição e decomposição de figuras planas, páginas 75 e 76, é a partição de um retângulo pela sua diagonal, decompondo-o em dois triângulos cuja área é a metade da área do retângulo inicial. Esses triângulos são usados posteriormente para compor outros polígonos com a mesma área. A segunda etapa da atividade consiste na partição do retângulo inicial em quatro polígonos para compor com essas peças um triângulo, um trapézio e um paralelogramo, como mostra a Figura 5.1. Na seção, os autores sugerem atividades de decomposição e composição de polígonos de mesma área, sem contudo mencionar o conceito de área e de figuras equivalentes.

Bigode (BIGODE, 2015) aborda, na página 163 do livro para o sexto ano do Ensino Fundamental, algumas figuras geométricas obtidas por meio de composições empregando três peças do Tangram (os dois triângulos menores e o paralelogramo) - Figura 5.2. Em seguida, o autor inicia uma seção de atividades orientando o aluno a construir figuras utilizando determinada quantidade de peças do Tangram - Figura 5.3, sem discutir a ideia de equivalência, apenas com o objetivo de identificar as formas geométricas solicitadas.

No capítulo 10 do livro proposto aos alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental, sobre áreas de regiões poligonais, Bianchini (BIANCHINI, 2015) define figuras equivalentes após compor algumas figuras com três peças poligonais - Figura 5.4(a). Depois da definição, na seção exercícios propostos, solicita que o aluno identifique figuras equivalentes em malhas quadriculadas ou compostas por quadrados e triângulos - Figura 5.4(b). Destaque para o exercício 10, no qual solicita que o aluno construa outros polígonos com a mesma área que a do polígono dado, e para o exercício 12, cuja proposta é usar todas as peças do problema, que possuem a

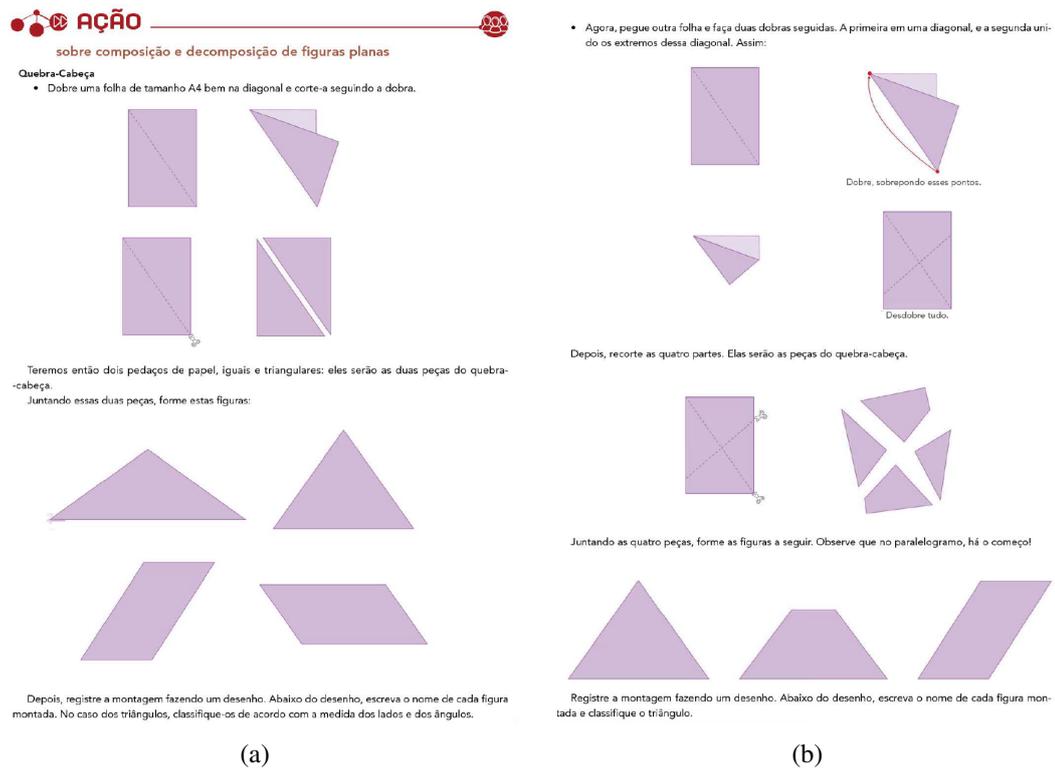


Figura 5.1: Partição de um retângulo: (a) em duas peças; (b) em 4 peças (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2015)

Veja algumas das formas que obtemos quando usamos dois triângulos pequenos e o paralelogramo do Tangram para fazer composições.



Figura 5.2: Figuras geométricas formadas por peças do Tangram (BIGODE, 2015)

mesma área, para formar um quadrado.

Gay (GAY, 2014), no livro voltado para alunos do nono ano do Ensino Fundamental, apresenta na página 178 a definição de figuras equidecomponíveis como figuras equivalentes - Figura 5.5. A autora faz isso por meio do uso de uma malha quadriculada, conforme a ideia sugerida por Souza (SOUZA, 1973). Na borda esquerda da página (borda inferior da Figura 5.5) há a ilustração de um puzzle, o Stomachion de Arquimedes (essa denominação não é utilizada),

ATIVIDADES

45. Peça aos alunos que sobreponham as peças para compará-las. Assim, eles perceberão que o ângulo menor dos triângulos é a metade de um ângulo reto ($90^\circ \div 2 = 45^\circ$) e que o ângulo maior, que aparece no paralelogramo, é igual a $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$; que o lado do quadrado coincide com os lados menores dos triângulos menores e com os lados menores do paralelogramo; que o lado maior dos triângulos pequenos coincide com os lados maiores do paralelogramo e os lados menores do triângulo médio; que o lado maior do triângulo médio coincide com os lados menores do triângulo grande; que o lado menor do triângulo grande é igual a 2 vezes o lado do quadrado e que o lado maior do triângulo grande é igual a 2 vezes o lado maior dos triângulos pequenos.

faça no seu caderno

43 Compare os ângulos e os lados das peças do Tangram que você construiu.

44 Usando apenas duas peças do Tangram, construa:

a) um quadrado; O quadrado pode ser construído com os 2 triângulos menores ou os 2 triângulos maiores.

b) um triângulo; O triângulo pode ser construído com os 2 triângulos menores ou os 2 maiores.

c) um quadrilátero que não seja um quadrado. O quadrilátero pode ser formado com os 2 triângulos menores ou com os 2 triângulos maiores.

47 Com o quadrado e o triângulo pequeno, forme um quadrilátero com dois ângulos retos e apenas dois lados paralelos. Fazendo coincidir um lado menor do triângulo com um lado do quadrado, os alunos vão construir um trapézio retângulo. Se eles solicitarem mais dados sobre a construção da nova figura, explique-lhes que se trata de um trapézio.

48 Com os dois triângulos pequenos e o quadrado, forme:

a) um quadrado; Não é possível.

b) um retângulo, não quadrado;

c) um triângulo.

49 Com apenas três peças do Tangram, construa:

a) um quadrado;

b) um triângulo.

50 A partir do triângulo da atividade anterior, mova apenas uma peça para construir um retângulo.

51 A partir do retângulo da atividade anterior, mova apenas uma peça para formar um paralelogramo.

52 Com o triângulo médio e os dois triângulos pequenos, forme um quadrilátero que não seja nem o retângulo nem o paralelogramo. A figura é um trapézio (isósceles), que será estudado a seguir.

53 Quantos triângulos pequenos são necessários para formar:

a) o triângulo médio? 2 triângulos pequenos

b) o triângulo grande? 4 triângulos pequenos

c) o quadrado? 2 triângulos pequenos

54 Quantos triângulos pequenos são necessários para formar:

a) o triângulo médio? 2 triângulos pequenos

b) o paralelogramo? 2 triângulos pequenos

55 Usando apenas os dois triângulos pequenos e o quadrado do Tangram, componha:

a) um trapézio;

b) um paralelogramo.

Figura 5.3: Atividades com figuras geométricas formadas por peças do Tangram (BIGODE, 2015)

2 Figuras equivalentes

Considere estas figuras.

Com elas podemos compor diversas outras, como estas:

Duas figuras são equivalentes quando têm áreas iguais na mesma unidade.

10 Desenhe em um papel quadriculado três figuras equivalentes à figura pintada de verde a seguir. construção de figura

11 Entre as figuras abaixo, quais são equivalentes? todas

Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

12 Reúna-se com um colega e façam o que se pede. Reproduzam em uma folha de papel quadriculado as figuras a seguir, de acordo com a quantidade indicada.

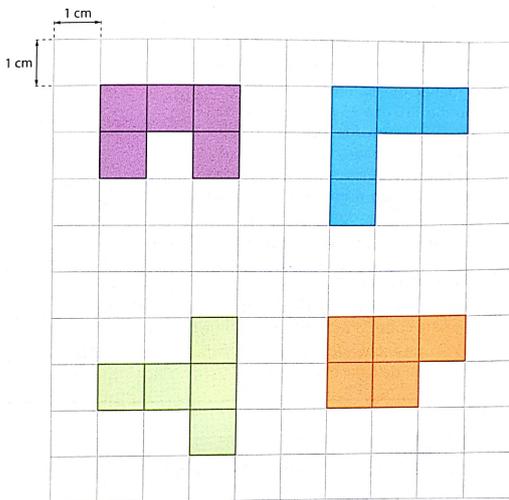
Notem que essas figuras têm 8 cm^2 de área. Recortem-nas e, usando todas, construam um quadrado com 8 cm de lado. Vocês podem colar as figuras em uma cartolina para facilitar a montagem do quebra-cabeça. Criem outro quebra-cabeça com figuras que tenham mesma área e entreguem as peças para outra dupla montar. construção de figura

Figura 5.4: Figuras equivalentes (BIANCHINI, 2015)

onde um pentágono é decomposto em um quadrado, iniciando assim o processo de transformar um polígono em outro equivalente para facilitar o cálculo de áreas.

3. Figuras equidecomponíveis

Observe as figuras coloridas abaixo.



Compare as formas dessas figuras e, depois, suas áreas. O que você percebeu?

Apesar de essas figuras terem formatos diferentes, podemos decompô-las em 5 quadradinhos e, com eles, formar cada uma das outras figuras da malha quadriculada. Por essa razão, dizemos que essas figuras são **equidecomponíveis**.

Além disso, os quadradinhos têm 1 cm^2 , de modo que todas as figuras acima têm 5 cm^2 de área. Portanto, essas figuras são **equivalentes**.

Sempre que conseguirmos decompor um polígono em peças e, com elas, formar um segundo polígono, esse polígono terá a mesma área que o primeiro. Ou seja:

Se dois polígonos são equidecomponíveis, eles são equivalentes.

Por isso, quando o cálculo da área de uma figura for muito complicado, poderemos decompô-la e formar uma figura cuja área sabemos calcular.

Veja ao lado, por exemplo, a transformação de um pentágono em um quadrado. Para saber a área do pentágono, basta calcular a área do quadrado, formado por peças do pentágono.

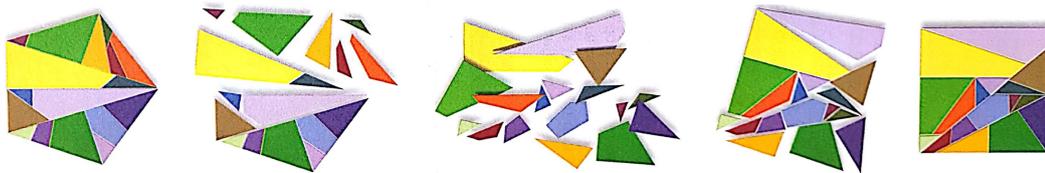
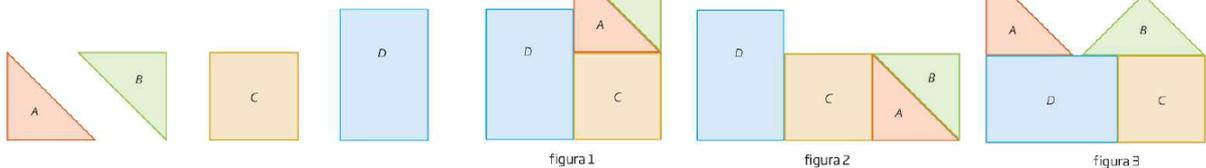


Figura 5.5: Polígonos equivalentes e o Stomachion de Arquimedes (GAY, 2014)

No livro voltado para alunos do nono ano do Ensino Fundamental, Silveira (SILVEIRA, 2015) define figuras equivalentes utilizando o conceito de decomposição - Figura 5.6. Posteriormente, o autor apresenta atividades utilizando malhas quadriculadas e a comparação entre áreas.

Figuras equivalentes

Considere os polígonos A, B, C e D:



Com esses polígonos podemos compor diferentes figuras, veja:

Figura 5.6: Figuras equivalentes (SILVEIRA, 2015)

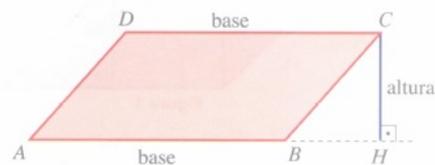
5.2 ÁREA

5.2.1 PARALELOGRAMO

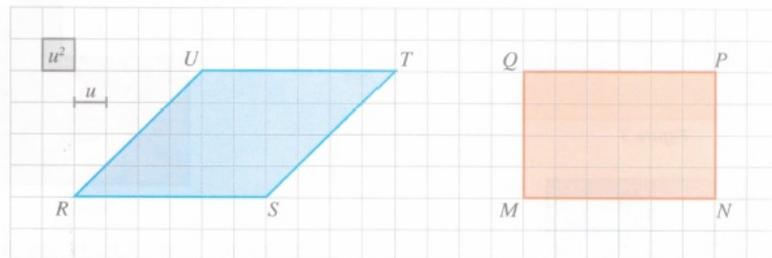
Bianchini (BIANCHINI, 2015), no livro para o sétimo ano do Ensino Fundamental, deduz a área do paralelogramo empregando uma malha quadriculada e a decomposição e composição do mesmo em um retângulo - Figura 5.7. O autor enfatiza a equivalência de polígonos e uma atividade interessante proposta por ele está na seção “Pense mais um pouco”, onde solicita que o aluno identifique quais dos paralelogramos podem formar um retângulo segundo decomposições dadas, conforme ilustrado na Figura 5.8.

Vamos estudar a área de um paralelogramo, considerando o paralelogramo $ABCD$ ao lado.

Qualquer segmento perpendicular a uma base, com uma extremidade nela e outra extremidade na reta suporte da base oposta, é chamado de **altura do paralelogramo**. Vamos considerar os lados paralelos \overline{AB} e \overline{CD} como **bases**. O segmento \overline{CH} , por exemplo, é uma altura do paralelogramo $ABCD$.



Agora, observe o paralelogramo $RSTU$ e o retângulo $MNPQ$ abaixo.



Considerando u unidade de comprimento e u^2 unidade de área, temos:

paralelogramo $RSTU$

- medida da base = $6 u$
- medida da altura = $4 u$
- área = $24 u^2$

retângulo $MNPQ$

- medida da base = $6 u$
- medida da altura = $4 u$
- área = $24 u^2$

Note que as duas figuras (o paralelogramo e o retângulo) são equivalentes.

Isso acontecerá sempre que um paralelogramo e um retângulo tiverem as medidas das bases iguais (b) e as medidas das alturas também iguais (h), pois nesse caso sempre temos a possibilidade de decompor o paralelogramo em figuras que, rearranjadas, compõem o retângulo. Observe.

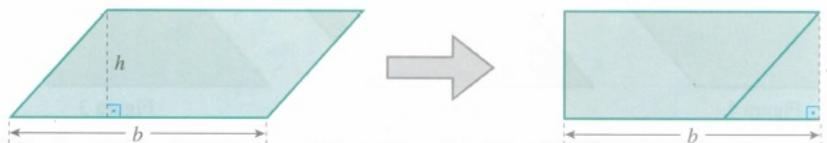


Figura 5.7: Área do paralelogramo (BIANCHINI, 2015)

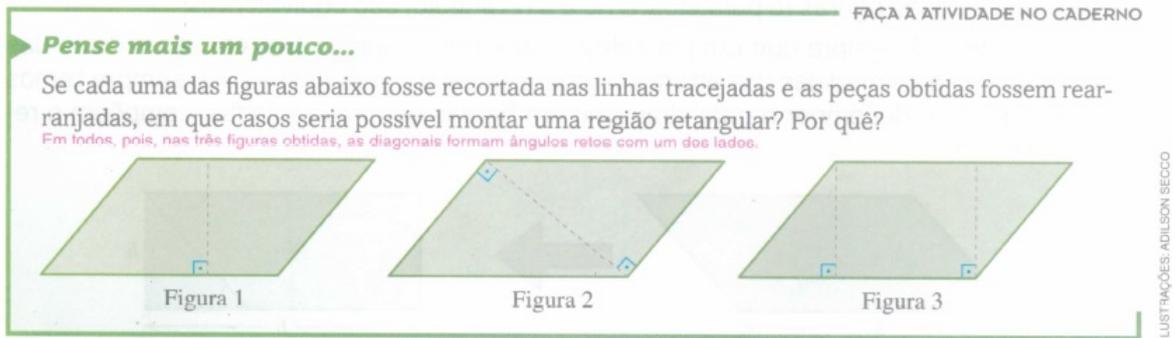


Figura 5.8: Decomposição do paralelogramo em um retângulo (BIANCHINI, 2015)

No livro para o nono ano do Ensino Fundamental, na questão 2 da seção “Vamos fazer” - Figura 5.9, Gay (GAY, 2014) instiga o estudante a formar um retângulo usando a decomposição de um paralelogramo. A equicomposição é explicada na seção posterior.

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

VAMOS FAZER

1. Você sabe como transformar um quadrado em um retângulo de mesma área? Construa um quadrado em uma folha colorida, recorte-a e cole no caderno para responder à questão.
2. Copie o paralelogramo ao lado no caderno. Como podemos transformar o paralelogramo em um retângulo de mesma área?
3. Crie no caderno uma figura que possa ser transformada em um retângulo de mesma área. Em seguida, troque de caderno com um colega, decomponha a figura criada por ele e componha um retângulo.
4. Junte-se a um colega, copiem os quadrados ao lado em uma folha e os transformem em um único quadrado que tenha área igual à soma das áreas desses quadrados.

3. Exemplo de resposta:

Triângulo isosceles

1. Exemplo de resposta:

FAUSTINO

ADILSON SECCO

$\triangle DLE \cong \triangle GMH$
 $\triangle ALB \cong \triangle JMI$
 $\triangle FHE \cong \triangle JIB$

Figura 5.9: Equicomposição do paralelogramo (GAY, 2014)

Souza e Pataro (SOUZA; PATARO, 2015), no livro para o oitavo ano do Ensino Fundamental, utilizam ilustrações para mostrar que um paralelogramo é equivalente a um retângulo - Figura 5.10, usando também o conceito de decomposição de uma figura.

▶ Área do paralelogramo

Vimos que o paralelogramo é um quadrilátero que possui dois pares de lados opostos paralelos, e que os lados opostos são congruentes.

Veja como podemos calcular a área de um paralelogramo.

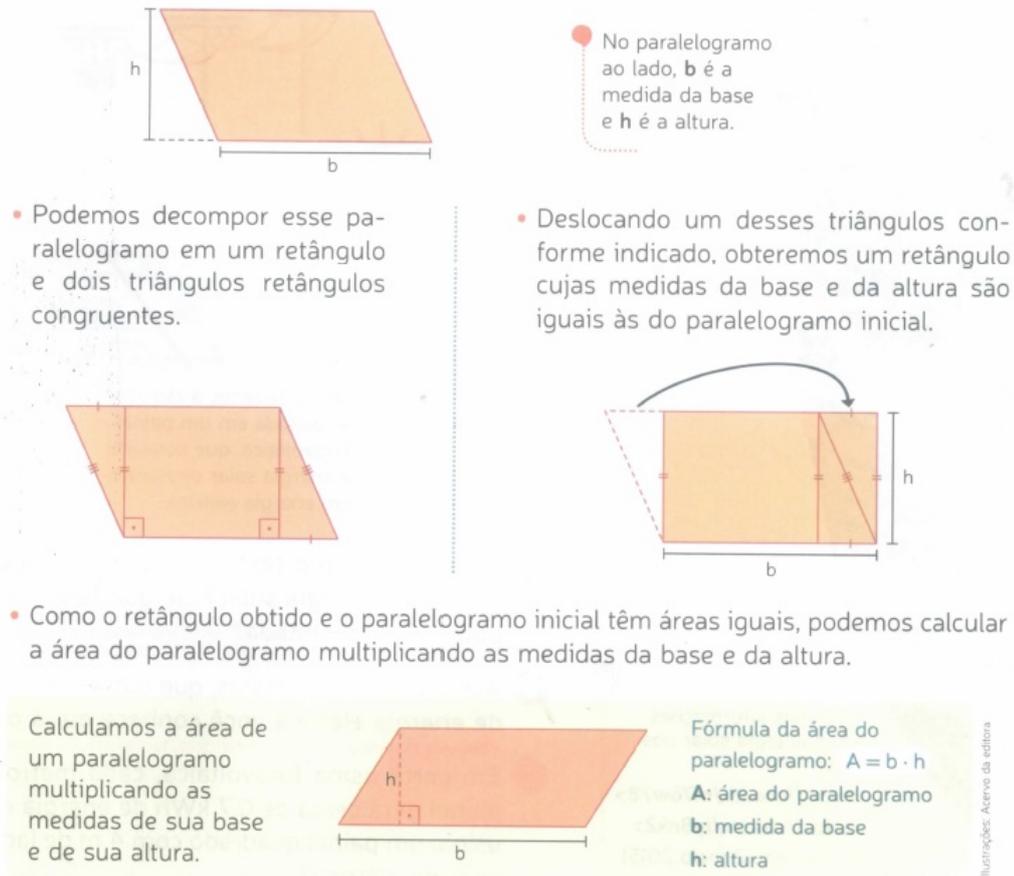


Figura 5.10: Área do paralelogramo (SOUZA; PATARO, 2015)

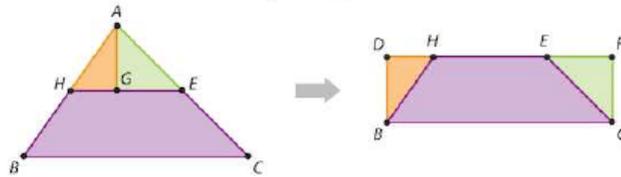
5.2.2 TRIÂNGULO

Gay (GAY, 2014) apresenta por meio de ilustrações, na seção “Transformação de um triângulo em um retângulo” do livro para o nono ano do Ensino Fundamental, a decomposição de um triângulo em um retângulo - Figura 5.11. A autora demonstra a equicomposição como fizemos no Lema 3.2 e define a área do triângulo como a metade da área de um paralelogramo e assim, por transitividade, como a metade da área de um retângulo - Figura 5.12. Autores como Silveira (SILVEIRA, 2015), Bianchini (BIANCHINI, 2015) e Souza e Pataro (SOUZA; PATARO, 2015) apresentam a mesma definição.

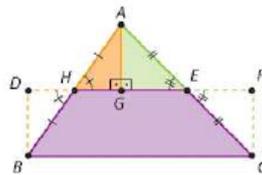
Ainda sobre a área do triângulo, Silveira (SILVEIRA, 2015) deduz, no livro para o nono ano do Ensino Fundamental, a área do triângulo equilátero a partir da área de um triâ-

Transformação de um triângulo em um retângulo

Observe o triângulo ABC abaixo. Se considerarmos os pontos H e E , pontos médios dos lados \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente, podemos decompor esse triângulo em três polígonos – os triângulos AHG e AGE e o trapézio $BCEH$ – e com esses polígonos compor um retângulo $BCFD$, de modo que o triângulo ABC e o retângulo $BCFD$ sejam equivalentes.



Observe que os triângulos AHG e AGE , obtidos na decomposição do triângulo ABC , são congruentes aos triângulos BHD e CFE que compõem o retângulo $BCFD$.



\overline{AH} tem a mesma medida de \overline{BH} , pois H é ponto médio do lado \overline{AB} . Os triângulos AHG e BHD são triângulos retângulos, e os ângulos assinalados são opostos pelo vértice, então têm a mesma medida. Logo, os triângulos AHG e BHD são congruentes pelo caso LAA. Da mesma maneira, verificamos que o triângulo AGE é congruente ao triângulo CFE .

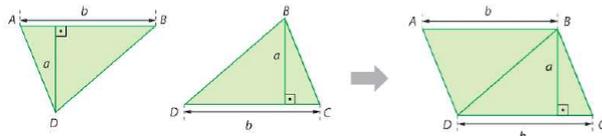
Portanto, decompondo o triângulo ABC podemos compor um retângulo $BCFD$ de mesma área.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Figura 5.11: Transformação de um triângulo em um retângulo (GAY, 2014)

5. Área do triângulo

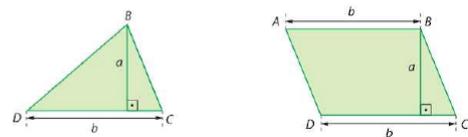
Observe os triângulos congruentes ABD e CDB a seguir, com base de medida b e altura de medida a . Podemos usar esses dois triângulos para compor o paralelogramo $ABCD$, conforme o esquema:



Após a composição do paralelogramo $ABCD$, é possível observar que:

- os triângulos e o paralelogramo têm altura de mesma medida (a);
- os triângulos e o paralelogramo têm base de mesma medida (b);
- a área do paralelogramo é igual à soma das áreas dos dois triângulos.

Como os dois triângulos são congruentes, a área de cada um é igual à metade da área do paralelogramo.



Portanto:

A área de um triângulo é dada por:

medida da base ————— medida da altura relativa à base

$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot a}{2}$$

Figura 5.12: Área do triângulo (GAY, 2014)

gulo qualquer usando o teorema de Pitágoras para calcular a medida da altura. Entretanto, as atividades do livro são de aplicação de fórmulas e conceitos apresentados anteriormente. Já Bianchini (BIANCHINI, 2015), no livro para o sétimo ano do Ensino Fundamental, discute

a equivalência de dois triângulos utilizando material de apoio em uma atividade investigativa, como mostra a Figura 5.13.

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

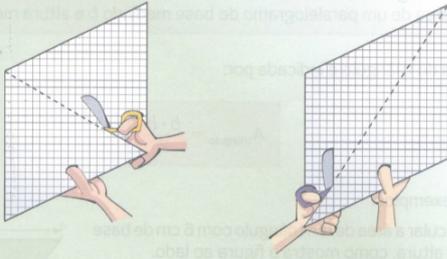
- De uma folha de papel quadriculado, recortem vários retângulos de diferentes medidas de base e de altura. Em seguida, cortem cada retângulo por uma de suas diagonais, obtendo pares de triângulos.



Agora, respondam.

- Para cada par de triângulos assim obtido, é possível sobrepor um triângulo ao outro? *sim*
- Se a área de um desses retângulos fosse 18, qual seria a área de um dos triângulos dele obtido? *9*
- Se x é a área de um dos triângulos obtidos pelo corte de uma das diagonais de um retângulo, qual é a área desse retângulo? *$2x$*

- De outra folha de papel quadriculado, recortem dois paralelogramos não retângulos idênticos, que vamos chamar de I e II. Em seguida, cortem I pela diagonal menor e II pela diagonal maior, obtendo pares de triângulos.



Respondam.

- É possível sobrepor um triângulo de I ao outro triângulo de I? Eles são equivalentes? *sim; sim*
- É possível sobrepor um triângulo de II ao outro triângulo de II? Eles são equivalentes? *sim; sim*
- É possível sobrepor um triângulo de I a um triângulo de II? *não*
- Se a área do paralelogramo I é igual a x , qual é a área do paralelogramo II? E a área de um dos triângulos de I? E a área de um dos triângulos de II? *x ; $\frac{x}{2}$; $\frac{x}{2}$*
- Um triângulo de I é equivalente a um triângulo de II? *sim*

ILUSTRAÇÕES: CLAUDIO DINHO

Figura 5.13: Equivalência de triângulos (BIANCHINI, 2015)

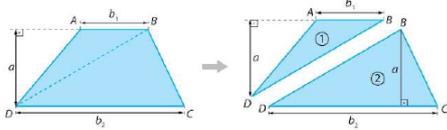
5.2.3 TRAPÉZIO E LOSANGO

Finalizando o conteúdo de áreas dos principais polígonos, Gay (GAY, 2014) define, no livro para o nono ano do Ensino Fundamental, a área do trapézio e do losango como a soma das áreas de dois triângulos de mesma altura, como mostra a Figura 5.14. Além disso, a autora sempre destaca conceitos importantes em caixas de texto na borda da página. Dessa forma, o aluno pode relembrar conceitos apresentados anteriormente que facilitarão o entendimento do conteúdo em discussão.

Os demais autores, Bianchini (BIANCHINI, 2015), Souza e Pataro (SOUZA; PA-

6. Área do trapézio

Observe que o trapézio $ABCD$ abaixo pode ser decomposto em dois triângulos com bases de medidas b_1 e b_2 e altura de mesma medida a .



Calculando as áreas desses triângulos, temos:

$$A_{\Delta_1} = \frac{b_1 \cdot a}{2} \text{ e } A_{\Delta_2} = \frac{b_2 \cdot a}{2}$$

A área do trapézio é igual à soma das áreas dos triângulos.

$$A_T = A_{\Delta_1} + A_{\Delta_2}$$

$$A_T = \frac{b_1 \cdot a}{2} + \frac{b_2 \cdot a}{2} = \frac{a}{2} \cdot (b_1 + b_2)$$

Assim:

A área de um trapézio é dada por:

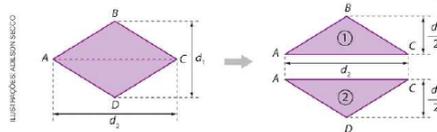
medida da altura \rightarrow a \leftarrow medida da base menor \leftarrow medida da base maior

$$A_T = \frac{a \cdot (b_1 + b_2)}{2}$$

(a)

7. Área do losango

Observe que o losango $ABCD$ abaixo pode ser decomposto em dois triângulos congruentes com base de medida d_2 e altura $\frac{d_1}{2}$.



A área do losango é igual à soma das áreas dos triângulos ABC e ADC .

$$A_L = A_{\Delta_1} + A_{\Delta_2}$$

$$A_L = \frac{d_2 \cdot \frac{d_1}{2}}{2} + \frac{d_2 \cdot \frac{d_1}{2}}{2} = \frac{d_2 \cdot d_1}{4} + \frac{d_2 \cdot d_1}{4} = \frac{2 \cdot d_2 \cdot d_1}{4} = \frac{d_2 \cdot d_1}{2}$$

Portanto:

A área de um losango é dada por:

medida da diagonal menor \leftarrow d_1 \leftarrow medida da diagonal maior \leftarrow d_2

$$A_L = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Observação

Como o losango é um paralelogramo de lados de mesma medida, os triângulos ABC e ADC , obtidos com a decomposição do losango $ABCD$, são congruentes pelo caso LLL.

Se achar oportuno, comente com os alunos que o losango é também um paralelogramo e sua área também poderá ser determinada pelo produto da medida da base pela medida da altura relativa a essa base.

(b)

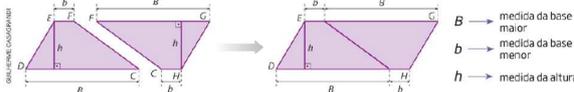
Figura 5.14: (a) Área do trapézio; (b) área do losango (GAY, 2014)

TARO, 2015) e Silveira (SILVEIRA, 2015), apresentam a área do trapézio e do losango como a metade da área de um paralelogramo, conforme Figura 5.15.

4 Área do trapézio e do losango

Área do trapézio

Considere os trapézios congruentes $CDEF$ e $FGHC$ de medidas com base B e b e altura h . Compondo um paralelogramo com esses dois trapézios, temos:



Observe que dois trapézios congruentes formam o paralelogramo $DEGH$ com base de medida $(B + b)$ e altura, relativa a essa base, de medida h . Portanto, a área de cada um desses trapézios é igual à metade da área do paralelogramo $EGHD$.

A área de um trapézio com bases de medida B e b e altura de medida h é igual à metade da área de um paralelogramo com base de medida $(B + b)$ e altura, relativa a essa base, de medida h .

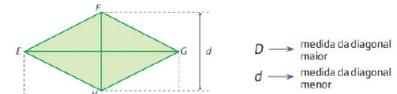
Portanto, a área de um trapézio é dada por:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

(a)

Área do losango

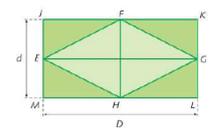
Considere o losango $EFGH$ de diagonais com medidas D e d :



Construímos o retângulo $JKLM$ cujos lados contêm os vértices do losango $EFGH$. Veja ao lado.

Observe que o retângulo obtido é formado por oito triângulos congruentes, sendo que quatro deles formam o losango.

Assim, a área do losango $EFGH$ corresponde à metade da área do retângulo $JKLM$.



A área de um losango com diagonais de medidas D e d é igual à metade da área de um retângulo com base de medida D e altura de medida d .

Portanto, a área de um losango é dada por:

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

(b)

Figura 5.15: (a) Área do trapézio; (b) área do losango (SILVEIRA, 2015)

5.2.4 OUTRAS DECOMPOSIÇÕES

É importante salientar que vários autores, como Gay (GAY, 2014) por exemplo, utilizam as ideias das demonstrações que fizemos neste trabalho para sugerir atividades nos materiais didáticos, colocando o aluno em contato com conceitos mais elaborados. As demonstrações formais geralmente não são apresentadas, mas os conceitos e ideias utilizados nelas

são abordados na solução das atividades propostas. Destacamos em Gay (GAY, 2014) a seção “Vamos fazer”, onde as propostas de atividades apresentam ideias utilizadas nas demonstrações, como por exemplo a atividade 4 que utiliza outra maneira de demonstrar a Proposição 3.6, ilustrada na Figura 5.16. Nas orientações metodológicas, Gay (GAY, 2014) apresenta para o professor todos os passos para a construção da solução dos problemas propostos aos alunos, com as demonstrações de cada etapa.

• Na atividade 4 (p. 179), precisamos transformar dois quadrados em um único quadrado, de área equivalente, como na transformação a seguir:

A partir do segmento de medida EB , construímos um quadrado cujos lados tenham essa medida e cuja área seja equivalente à soma das áreas dos dois quadrados iniciais.

Para provar que as áreas são equivalentes, precisamos mostrar a congruência de alguns triângulos:

• $\triangle FEH$ e $\triangle JBI$:

$EH = BI$, pois são medidas de lado de um mesmo quadrado.
 $\widehat{FEH} \cong \widehat{JBI}$, pois são ângulos retos.
 $\widehat{FÊH} \cong \widehat{J\hat{B}I}$, pois $\overline{FE} \parallel \overline{JB}$ e $\overline{EH} \parallel \overline{BI}$

Logo, são congruentes pelo caso LAAo.

• $\triangle LAB$ e $\triangle MJL$:

$\widehat{BAD} \cong \widehat{IJG}$, pois são ângulos retos.
 $\widehat{ABL} \cong \widehat{JIM}$, pois $\overline{AB} \parallel \overline{JI}$ e $\overline{EB} \parallel \overline{HI}$
 $AB = JI$, pois $\triangle JBI \cong \triangle CEB$ (por LAL), ou seja, $CB = JI$, e $AB = CB = JI$

• $\triangle HGM$ e $\triangle EDL$:

$\widehat{HGM} \cong \widehat{EDL}$, pois são ângulos retos.
 $\widehat{MHG} \cong \widehat{LÊD}$, pois $\overline{EB} \parallel \overline{HI}$ e $\overline{ED} \parallel \overline{HG}$
 $EL = HM$, pois $EL = EB - LB = HI - MI = HM$

Portanto, o quadrado $EBHI$ tem área equivalente à área dos quadrados iniciais.

Figura 5.16: Demonstrações nas orientações para o professor (GAY, 2014)

5.3 VOLUME DA PIRÂMIDE

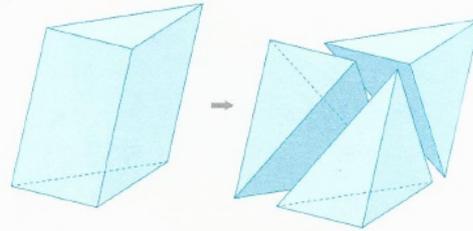
Paiva (PAIVA, 2013), no livro para o segundo ano do Ensino Médio, inicia a seção sobre o volume de uma pirâmide demonstrando duas propriedades auxiliares:

1. A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança;
2. Duas pirâmides triangulares de mesma altura e bases de mesma área têm o mesmo volume.

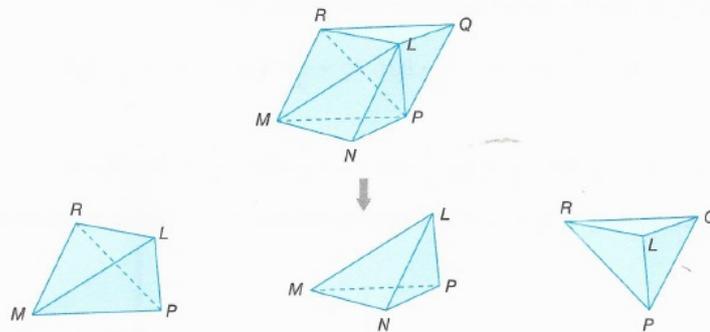
Posteriormente, apresenta o volume de uma pirâmide triangular que é demonstrado a partir da decomposição do prisma de base triangular, como mostra a Figura 5.17. Então, finalmente o conceito de decomposição e equivalência é estendido para uma pirâmide de base qualquer. Na questão 6 da seção Roteiro de Trabalho - Figura 5.18, Paiva propõe que o estudante construa o prisma triangular e seccione-o para comprovar a equivalência.

Volume de uma pirâmide triangular

Vamos demonstrar que o volume de uma pirâmide triangular é $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma que tem a mesma base e a mesma altura da pirâmide. Para isso, basta provar que um prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares de mesmo volume, conforme mostra a figura a seguir.



Nomeando os vértices de um prisma triangular qualquer e, conseqüentemente, os correspondentes vértices das pirâmides triangulares obtidas pela decomposição indicada na figura acima, temos:



(1) As pirâmides $LMNP$ e $PLQR$ têm volumes iguais, pois:

- $\triangle MNP \cong \triangle RLQ$ (são bases do prisma $MNPLQR$).
- A altura do prisma $MNPLQR$ é também altura de cada uma dessas pirâmides em relação às bases MNP e RLQ .

Assim, as pirâmides $LMNP$ e $PLQR$ têm a mesma altura em relação às bases equivalentes MNP e RQL , portanto possuem volumes iguais.

(2) As pirâmides $LRQP$ e $LRMP$ têm volumes iguais, pois:

- \overline{RP} é diagonal do paralelogramo $MRQP$ e, portanto, $\triangle RPQ \cong \triangle RPM$.
- Suas alturas relativas às bases RPQ e RPM são iguais à distância do ponto L ao plano do paralelogramo $MRQP$.

Assim, as pirâmides $LRQP$ e $LRMP$ têm a mesma altura em relação às bases equivalentes RPQ e RPM e, portanto, têm volumes iguais.

Por (1) e (2), concluímos que as pirâmides $LMNP$, $PLQR$ e $LRMP$ possuem o mesmo volume V .

Demonstramos, desse modo, que o prisma triangular $MNPLQR$ é composto de três pirâmides de volumes iguais. Sendo H a altura do prisma e B a área de sua base, concluímos que o volume V de cada uma dessas pirâmides é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot BH$$

Portanto:

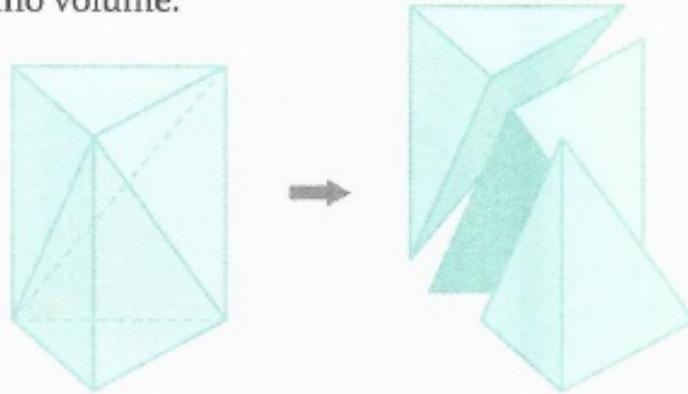
O volume de uma pirâmide triangular é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base por sua altura.

Figura 5.17: Volume de uma pirâmide triangular (PAIVA, 2013)

- 5** Em duplas, escrevam com suas palavras como se calcula o volume de uma pirâmide.

O volume de uma pirâmide qualquer é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base por sua altura.

- 6** Reúna-se com um ou mais colegas e adquiram em uma papelaria um bloco retangular de isopor. Na casa de um de vocês, recortem esse bloco em dois, na forma de um prisma triangular, e depois recortem um desses prismas em três pirâmides, conforme mostrado na figura abaixo. Em seguida, estudando a demonstração da página 247, constatem que as três pirâmides assim obtidas têm o mesmo volume.



FAUSTINO

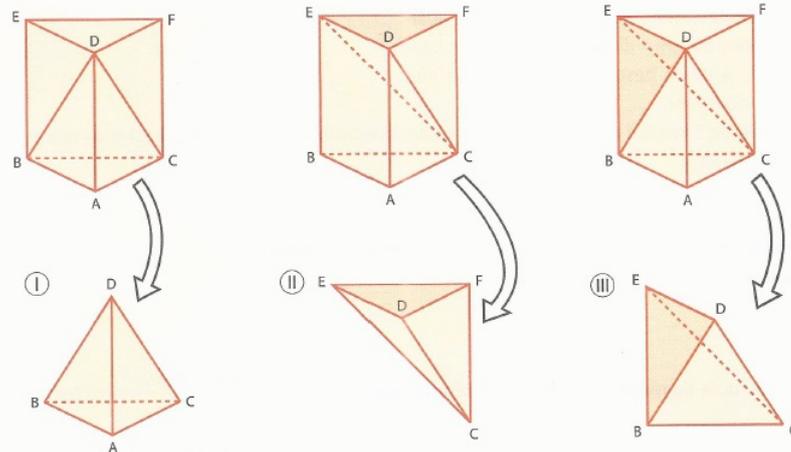
(Nota: Em vez de isopor, vocês podem usar sabão em pedra.)

Figura 5.18: Tetraedros equivalentes na decomposição do prisma triangular (PAIVA, 2013)

No livro para o segundo ano do Ensino Médio, Dante (DANTE, 2010) apresenta a mesma demonstração para o volume da pirâmide utilizada por Paiva, contudo usando uma linguagem menos formal. O autor inicia com a propriedade de que “Pirâmides com área das bases iguais e com a mesma altura têm volumes iguais.” Em seguida, mostra que o cálculo do volume de um tetraedro se dá pela decomposição de um prisma de base triangular em três tetraedros equivalentes. Nesta etapa, propõe um experimento para comprovar a relação - Figura 5.19.

Cálculo do volume da pirâmide triangular

Vamos agora decompor um prisma triangular em três pirâmides, como indicam as figuras:



Observações:

- 1ª) As pirâmides I e II têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, os triângulos ABC e DEF são congruentes e a distância de **D** ao plano (ABC) é igual à distância de **C** ao plano (DEF) – altura do prisma original. Logo, I e II têm mesmo volume.
- 2ª) As pirâmides II e III também têm bases congruentes e alturas iguais. De fato, o triângulo CEF é congruente ao triângulo BCE, pois cada um deles é a metade do paralelogramo BCFE, e a altura de cada uma dessas pirâmides é a distância de **D** ao plano (BCFE). Logo, II e III têm o mesmo volume. Assim, $V_I = V_{II}$ e $V_{II} = V_{III}$ e, portanto, os três volumes são iguais.

Lembrando que $V_{\text{prisma}} = V_I + V_{II} + V_{III}$ e fazendo $V_I = V_{II} = V_{III} = V$, temos que:

$$V_{\text{prisma}} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$$

Como $V_{\text{prisma}} = \text{área da base} \cdot \text{altura}$, temos:

$$V \text{ ou } V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}$$

- 3ª) A propriedade citada na 2ª observação pode ser verificada experimentalmente. Se quiséssemos encher de água uma vasilha em forma de prisma usando um recipiente em forma de pirâmide, com mesma base e mesma altura, seria necessário usá-lo três vezes para encher a vasilha.

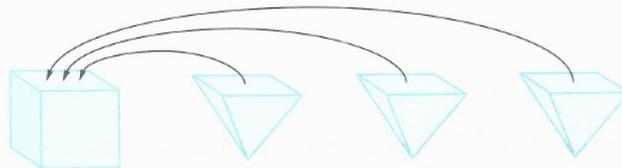


Figura 5.19: Volume da pirâmide (DANTE, 2010)

6 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Neste capítulo, apresentamos duas propostas de atividades para a Educação Básica que abordam o conceito de equicomposição de polígonos e poliedros. Essas propostas utilizam o jogo e a resolução de problemas como estratégias de aprendizagem.

- Atividade 1: proposta para o Ensino Fundamental, explora o lúdico e os conceitos matemáticos associados à equicomposição no plano por meio de *puzzles* e de problemas propostos a partir deles.
- Atividade 2: proposta para o Ensino Médio, explora a decomposição de sólidos em *puzzles* tridimensionais para estabelecer a relação entre o volume de prismas e de pirâmides.

6.1 ATIVIDADE 1: POLÍGONOS EQUIDECOMPONÍVEIS

1ª parte: equicomposições com o tangram

O tangram é um jogo chinês formado por sete peças: 5 triângulos retângulos isósceles (2 grandes, 1 médio e 2 pequenos), 1 quadrado e 1 paralelogramo. Não se sabe exatamente a sua origem. Embora existam muitas lendas sobre sua criação, a mais conhecida é a que atribui as formas do tangram a um espelho quebrado por um príncipe chinês.

i) Construção do tangram

Em papel quadriculado, construa um tangram 4×4 , conforme a Figura 6.1, seguindo os seguintes passos:

- 1°. No quadrado $ABCD$ 4×4 , trace a diagonal \overline{DB} , marque o ponto médio O de \overline{DB} e trace uma perpendicular a \overline{DB} em O passando por A ;
- 2°. Marque os pontos médios M de \overline{DO} e N de \overline{OB} ;
- 3°. Marque os pontos médios P de \overline{DC} e Q de \overline{CB} ;
- 4°. Trace o segmento PQ e marque o ponto médio R de \overline{PQ} ;
- 5°. Trace \overline{MR} , \overline{OR} e \overline{NQ} .

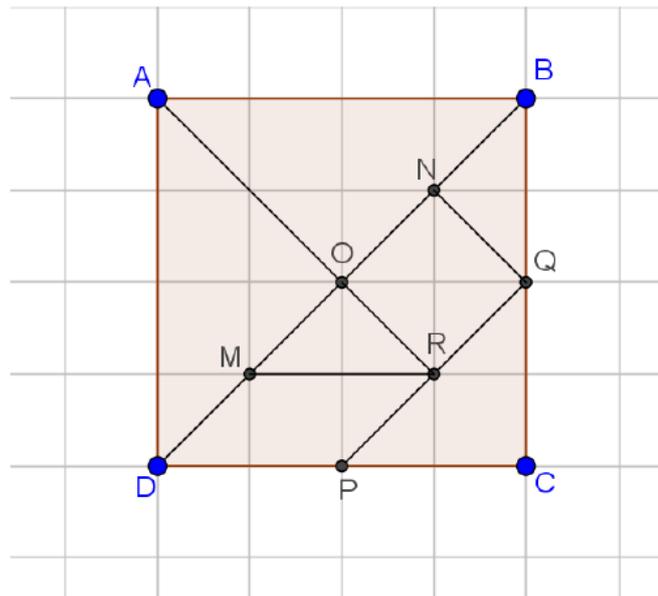


Figura 6.1: Construção do tangram

ii) Roteiro

6.2.1 Munido com as peças do Tangram:

- a) Construa retângulos usando 3, 4, 5 e 6 peças;
- b) Construa polígonos convexos utilizando todas as peças. Desenhe esses polígonos em seu caderno, nomeie cada um deles e escreva suas características;
- c) Compare o perímetro e a área dos polígonos convexos construídos no item b com o perímetro e a área do quadrado composto pelas sete peças.

6.2.2 Considerando o quadrado formado com as sete peças do tangram:

- a) Determine a fração da área que representa cada uma das sete peças;
- b) Calcule a área do triângulo retângulo isósceles menor de duas maneiras diferentes;
- c) Explique como calcular a área de cada polígono convexo construído na questão 6.2.1.

6.2.3 Usando as peças do tangram, construa polígonos convexos cuja área seja a metade da área do quadrado inicial (composto pelas sete peças).

6.2.4 Utilizando todas as peças de dois jogos de tangram, construa três quadrados tais que a soma das áreas dos dois primeiros seja igual a área do terceiro. Utilize esses quadrados para comprovar o teorema de Pitágoras.

6.2.5 **(ENEM - 2008)** O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelo-

gramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da Figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas Figuras 2 e 3 - Figura 6.2.

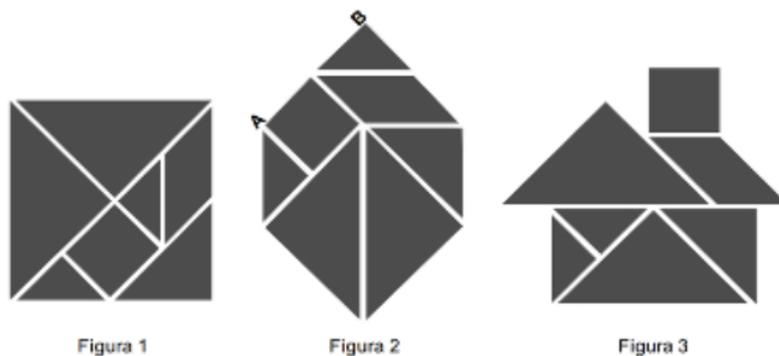


Figura 6.2: ENEM 2008

Se o lado AB do hexágono mostrado na Figura 2 mede 2cm , então a área da Figura 3, que representa uma “casinha”, é igual a

- a) 4cm^2 b) 8cm^2 c) 12cm^2 d) 14cm^2 e) 16cm^2

2ª parte: outras equicomposições

6.2.6 O *Q. C. Quadrado* é um *puzzle* de cinco peças, ilustrado na Figura 6.3, que corretamente encaixadas formam um quadrado.

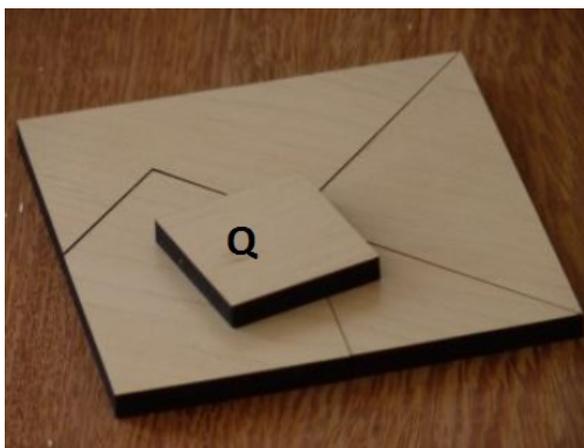


Figura 6.3: Q. C. Quadrado (VIEGAS et al., 2017)

Utilizando as peças do *Q. C. Quadrado*, construa dois quadrados: um com quatro peças (sem usar o quadrado Q) e outro com as cinco peças (usando o quadrado Q). Em seguida, compare a área de cada um desses quadrados com a área do quadrado Q .

6.2.7 (Banco de questões da OBMEP 2016) Cortando a escada para formar um quadrado

A figura a seguir mostra uma “escadinha” formada por dois quadrados, um de lado 8cm e um de lado 6cm . A tarefa é cortar a figura em três pedaços e reagrupá-los para formar um quadrado sem buracos.

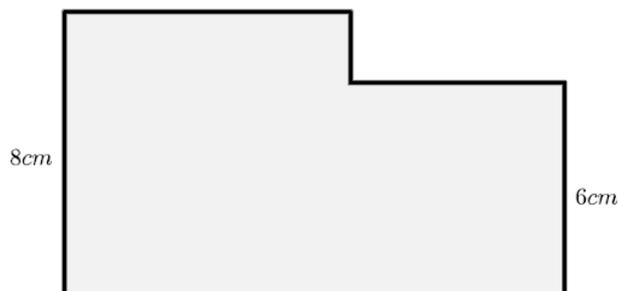


Figura 6.4: Questão 24 do Banco de questões da OBMEP 2016

- Qual é a medida do lado do quadrado que deverá ser formado no final?
- Utilizando apenas um lápis, uma régua de 20 cm , com marcações de 1 cm em 1 cm , e uma tesoura, indique como realizar a tarefa desejada.

6.2.8 Os retângulos $AMPR$ e $CQPN$ da Figura 6.5 são equivalentes? Justifique.

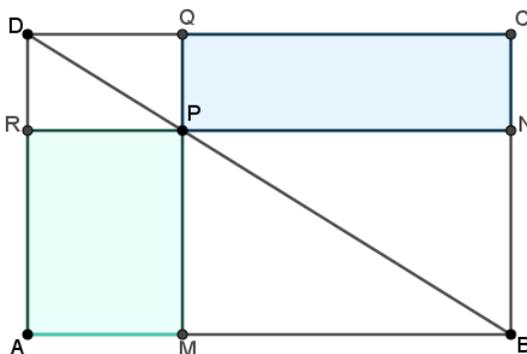


Figura 6.5: Retângulos equivalentes - Adaptado de (DOLCE; POMPEO, 2013b)

6.1.1 ANÁLISE DA ATIVIDADE 1: POLÍGONOS EQUIDECOMPONÍVEIS

Neste modelo de atividade, quebra-cabeças como o tangram ou o Q. C. Quadrado podem ser utilizados nos diversos níveis de ensino. Ao acrescentarmos ou retirarmos questões da atividade proposta, podemos trabalhar diversos conceitos matemáticos, como por exemplo, frações e equações do 1° e 2° graus. Questões envolvendo a construção geométrica, tais como o traçado de perpendiculares e a determinação dos pontos médios, podem ser discutidas no início da atividade.

O cálculo da área pode ser feito de duas maneiras:

- ◇ preenchendo a superfície do polígono com os quadrados da malha quadriculada;
- ◇ comparando a área de uma peça com a área da figura construída.

Ressaltamos que, na questão 6.2.3, podemos construir polígonos convexos com a metade da área do quadrado inicial empregando as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{16}$. Ainda, o teorema de Pitágoras é explorado conforme Almeida (ALMEIDA, 2016) na questão 6.2.4 e o Teorema 3.6 é aplicado na solução da questão 6.2.7.

6.2 ATIVIDADE 2: POLIEDROS EQUIDECOMPONÍVEIS

6.3.1 Utilizando 8 cubos de aresta a :

- a) Quantos paralelepípedos reto retângulos distintos podem ser construídos? Desenhe esses paralelepípedos.
- b) Compare a área total e o volume desses paralelepípedos.

6.3.2 Os puzzles de madeira são jogos de lógica e estratégia. A pirâmide de 4 peças congruentes é um deles, como mostra a Figura 6.6.



Figura 6.6: Puzzle tridimensional: pirâmide de 4 peças congruentes

- a) Construa um tetraedro regular com as 4 peças congruentes;
- b) Sabendo que as arestas do tetraedro regular têm medida a , determine o volume de cada peça.

6.3.3 Assista ao vídeo *Cubic Kaleidocycle Disney*, ilustrado na Figura 6.7 e disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=mP4XoFNf-a8>.



Figura 6.7: Cubic Kaleidocycle Disney

- Quais poliedros convexos são formados na manipulação do caleidociclo?
- O que podemos concluir sobre o volume de cada um desses poliedros convexos?

6.3.4 Um cubo de 6cm de aresta foi decomposto em seis pirâmides congruentes, com vértices no centro do cubo e cada uma tendo uma das faces do cubo como base.

- Desenhe o cubo e as seis pirâmides congruentes.
- Calcule o volume da pirâmide de duas maneiras diferentes.

6.3.5 Seja um cubo de volume C , cuja base quadrada é seccionada como o tangram - Figura 6.8.

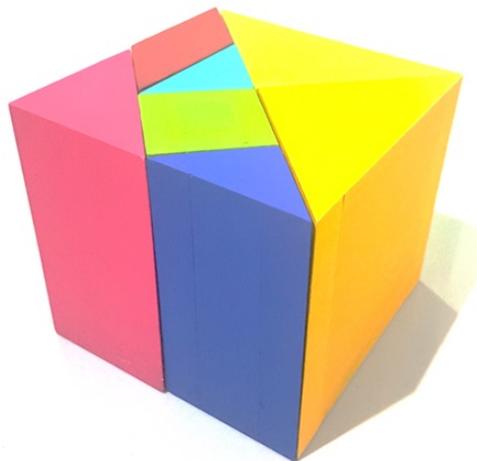


Figura 6.8: Cubo-tangram

- Componha 2 prismas convexos distintos com as seguintes peças: o paralelepípedo de base quadrada e os dois prismas triangulares cujas bases são os dois triângulos retângulos isósceles menores. Para construir prismas equivalentes aos prismas compostos anteriormente, podemos substituir o paralelepípedo de base quadrada por qual peça? Justifique.

- b) Usando as peças do cubo-tangram, construa 3 prismas distintos tal que o volume de cada um deles é $\frac{1}{2}C$.
- c) É possível compor um prisma convexo cujo volume é $\frac{3}{4}C$? Justifique.

6.3.6 O *caixote* é um brinquedo de madeira, produzido pela Oficina do Aprendiz, que consiste de uma caixa de dimensões $7,5 \times 7,5 \times 6,5\text{cm}$ contendo 9 peças de madeira com dois tamanhos distintos: $2 \times 2 \times 2\text{cm}$ e $4 \times 4 \times 2\text{cm}$, como mostra a Figura 6.9.



Figura 6.9: Caixote (VIEGAS et al., 2017)

O objetivo da brincadeira é encaixar as nove peças sem deixar buracos e sem que as peças ultrapassem a face superior da caixa. É possível compor um poliedro convexo com as 9 peças que seja distinto do paralelepípedo reto retângulo que constitui a caixa?

6.2.1 ANÁLISE DA ATIVIDADE 2: POLIEDROS EQUIDECOMPONÍVEIS

O intuito da atividade proposta é analisar a equicomposição de sólidos, associando-a à equivalência. Isto é possível particularmente para prismas, em decorrência direta da decomposição de polígonos, ou seja, do teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien. Assim, os conceitos de equicomposição explorados em duas dimensões com o uso do tangram foram estendidos para três dimensões com o cubo-tangram.

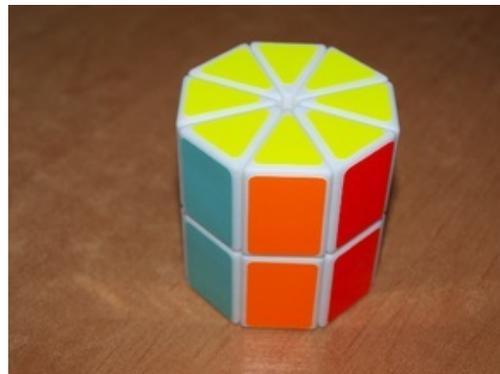
Propomos a questão 6.3.6 para discutir o terceiro problema de Hilbert com os estudantes, ou seja, o fato de que dois sólidos de mesmo volume não são necessariamente equicompostos.

Materiais manipulativos são imprescindíveis para aprimorar as concepções geométri-

cas espaciais. Há uma série de puzzles tridimensionais, dois deles ilustrados na Figura 6.10, que o professor de matemática pode empregar em sala de aula para abordar a equicomposição em três dimensões e, conseqüentemente, melhorar a concepção espacial dos sólidos estudados.



(a)



(b)

Figura 6.10: Puzzles tridimensionais: (a) cubo (YAROSLAVSKIY, 2008); (b) prisma (YAROSLAVSKIY, 2008)

7 CONCLUSÕES

Analisamos neste trabalho a equicomposição de polígonos e de poliedros. Em duas dimensões, demonstramos o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien e o empregamos, juntamente com a relação para a área do retângulo, para estabelecer as relações para o cálculo da área de alguns polígonos convexos. Em três dimensões, demonstramos a equicomposição de prismas e apresentamos o terceiro problema de Hilbert para justificar que não é possível determinar, por equicomposição, o volume de uma pirâmide comparando-a com um prisma de base e altura congruentes à base e à altura da pirâmide. Analisamos ainda livros didáticos de matemática da Educação Básica, aprovados no PNLB em 2015 e em 2016, para verificar como a equicomposição é apresentada aos estudantes. Essa análise nos forneceu subsídios para propor e organizar atividades didáticas sobre a equicomposição para a Educação Básica.

Quanto aos livros didáticos de matemática para a Educação Básica, constatamos que todas as obras para o Ensino Fundamental analisadas abordam de alguma forma a equicomposição no plano para o cálculo da área de polígonos convexos. Essa abordagem é pictórica ou formal. Os autores exploram malhas quadriculadas, materiais manipulativos e puzzles em atividades lúdicas. O mesmo não observamos nas obras analisadas para o Ensino Médio. A equicomposição de poliedros não é discutida e somente a decomposição do prisma triangular em tetraedros equivalentes é apresentada.

Quanto às atividades didáticas sobre equicomposição que propomos, exploramos o tangram na atividade para o Ensino Fundamental e o cubo-tangram na atividade para o Ensino Médio. O cubo-tangram, da forma como apresentado, é uma proposta da autora deste trabalho para aplicar o teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, válido no plano, na equicomposição de prismas.

Finalizando, acreditamos que este trabalho pode ser útil para os professores de matemática da Educação Básica, servindo como estímulo/suporte para a organização e aplicação de atividades diferenciadas sobre áreas e volumes. E, principalmente, no sentido de valorizar a geometria enquanto componente do currículo de matemática.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, T. A. S. d. **A demonstração no ensino da geometria**. 2016. Monografia (Licenciatura em Matemática), UTFPR, Curitiba, Brasil.
- BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.
- BIGODE, A. J. L. **Matemática do cotidiano**. São Paulo: Scipione, 2015.
- BOLTIANSKI, V. G. **Figuras equivalentes e equicompostas**. São Paulo: Atual, 1996.
- BORTOLOSSI, H. J. **Uma pletera de poliedros**. 2009. Disponível em: <http://www.ufr.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html>. Acesso em: 29 de dezembro de 2017.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.
- BRASIL, M. d. E. **Base Nacional Comum Curricular**. 3. ed. Brasília - DF: MEC, 2017.
- CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática nos dias de hoje, 6º ano: na medida certa**. São Paulo: Leya, 2015.
- CONDE, A. O terceiro problema de hilbert. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 3, n. 5, p. 41–59, 2003.
- DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2010.
- DIAS, R. **Terceiro problema de Hilbert e teorema de Dehn**. São José do Rio Preto: Universidade Estadual Paulista Julio Mesquita Filho, 2013.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013b.
- ESCOLAR, B. **Tangram**. 2015. Disponível em: <http://www.buscaescolar.com/artes/tangram/>. Acesso em: 01 de novembro de 2017.
- EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Unesp, 2009.
- GAY, M. R. G. **Projeto araribá matemática**. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2014.
- GUIMARAES, L. C.; PITOMBEIRA, J. B.; SCHUBRING, G. **Manoel de Campos, um precursor**. 2011. Disponível em: <http://www.repositorio.ufr.br/jspui/handle/1/523>. Acesso em: 18 de julho de 2017.
- HILBERT, D. **Fundamentos de geometria**. Portugal: Gradiva, 2003.
- KAGOIKI, F. Y. **Figuras equidecomponíveis**. 2001. Monografia (Licenciatura em Matemática), UFSC, Florianópolis, Brasil.
- LEONI, D. **Principio di Cavalieri**. 2017. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/YXbmaq7z>. Acesso em: 15 de dezembro de 2017.

LIMA, E. L. **Conceitos e controvérsas - polígonos equidecomponíveis**. 1985. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/11/5.htm>>. Acesso em: 25 de setembro de 2017.

LIMA, E. L. **Isometrias**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

LOOMIS, E. S. **The pythagorean proposition**. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

LÓPEZ, J. L. **Chapuzas matemáticas**. 2016. Disponível em: <<http://joselorlop.blogspot.com.br/2016/04/949-pitagoras-y-el-tangram-resolucion.html>>. Acesso em: 01 de novembro de 2017.

MARQUES, E. C. **Tópicos sobre polígonos**. São Carlos: S.n., 2012.

MATHEMA. **Quebra-cabeças: um recurso para ensinar e aprender geometria na educação infantil**. S.d. Disponível em: <<http://mathema.com.br/reflexoes/quebra-cabecas-um-recurso-para-ensinar-e-aprender-geometria-na-educacao-infantil-2/>>. Acesso em: 01 de novembro de 2017.

MATHPUZZLE. **Isohedra**. 2017. Disponível em: <<http://www.mathpuzzle.com/Fairdice.htm>>. Acesso em: 07 de novembro de 2017.

MOURA, M. O. de. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. 1992. Disponível em: <<http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias10p045-053c.pdf>>. Acesso em: 03 de janeiro de 2018.

OLIVEIRA, A. M. d. **Biblioteca da matemática moderna**. 5. ed. São Paulo: Lisa, 1972.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PETTY, A. L. S. **Ensaio sobre o valor pedagógico dos jogos de regras: uma perspectiva construtivista**. Dissertação (Mestrado) — USP, 1995.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SALLUM, E. M. **OFICINA 13 - Decomposição de figuras geométricas**. S.d. Disponível em: <<http://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/of13.pdf>>. Acesso em: 05 de junho de 2017.

SHERMAN, S. **Isohedra**. 2017. Disponível em: <<http://loki3.com/poly/isohedra.html>>. Acesso em: 03 de novembro de 2017.

SILVA, E. **Apoio à disciplina de geometria descritiva**. 2005. Disponível em: <http://www.gd.elisiosilva.com/exercicios_resolvidos_alunos.html>. Acesso em: 18 de julho de 2017.

SILVEIRA, E. **Matemática, compreensão e prática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. **Vontade de saber matemática**. 3. ed. São Paulo: FTD, 2015.

SOUZA, J. C. de Mello e. **As maravilhas da matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: Bloch, 1973.

TESSELLATION. **Mc Escher**. 2017. Disponível em: [<https : //www.pinterest.com/ottawaont/tessellation/>](https://www.pinterest.com/ottawaont/tessellation/). Acesso em: 18 de julho de 2017.

TINOCOE, M. J. Isometrias. **Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto**, p. 67, 2012.

VIEGAS, O.; LINDER, N.; MALLMAN, C. S. **Desafios do mundo**. 2017. Disponível em: [<http : //http : //oficinadoaprendiz.com.br/>](http://http://oficinadoaprendiz.com.br/). Acesso em: 05 de dezembro de 2017.

WAGNER, E. **Teorema de Pitágoras e áreas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

WIKIBOOKS. **Matematik for arskurs 7-9/Geometri/Pythagoras sats**. 2017. Disponível em: [<http : //sv.wikibooks.org/wiki/Matematik_for_arskurs_7 - 9/Geometri/Pythagoras_sats>](http://sv.wikibooks.org/wiki/Matematik_for_arskurs_7_-_9/Geometri/Pythagoras_sats). Acesso em: 01 de novembro de 2017.

WIKIPEDIA. **Wallace–Bolyai–Gerwien theorem**. 2017. Disponível em: [<https : //en.wikipedia.org/wiki/Wallace - Bolyai - Gerwien_theorem>](https://en.wikipedia.org/wiki/Wallace_-_Bolyai_-_Gerwien_theorem). Acesso em: 03 de novembro de 2017.

WOLFRAM. **Isohedra**. 2017. Disponível em: [<http : //mathworld.wolfram.com/Isohedron.html>](http://mathworld.wolfram.com/Isohedron.html). Acesso em: 10 de outubro de 2017.

YAROSLAVSKIY, V. **Vladimir Yaroslavskiy's Puzzles**. 2008. Disponível em: [<https : //www.shapeways.com/product/Z9CVGYXCL/little - chop - 24 - cube>](https://www.shapeways.com/product/Z9CVGYXCL/little-chop-24-cube). Acesso em: 05 de janeiro de 2018.

APÊNDICE A – RESPOSTAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

A.1 ATIVIDADE 1: POLÍGONOS EQUIDECOMPONÍVEIS

6.2.1 a) e b)

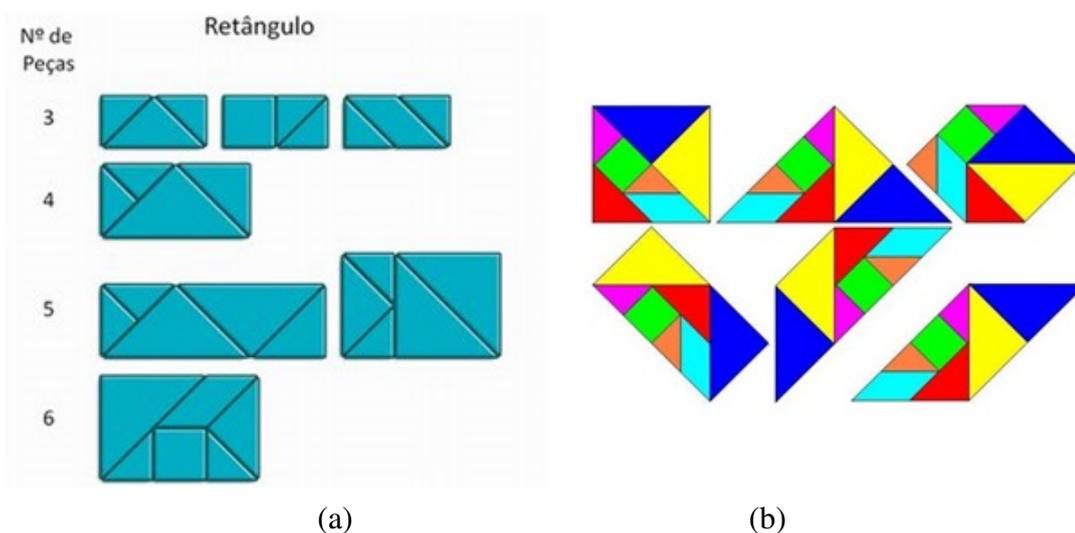


Figura A.1: Possíveis construções geométricas: (a) retângulos; (b) polígonos convexos com todas as peças

c) Problema aberto, com várias soluções possíveis dependendo da resposta do item b.

6.2.2 a)

- Triângulos retângulos isósceles maiores: $\frac{1}{4}$
- Triângulos retângulos isósceles menores: $\frac{1}{16}$
- Triângulo retângulo isósceles intermediário: $\frac{1}{8}$
- Paralelogramo: $\frac{1}{8}$
- Quadrado: $\frac{1}{8}$

6.2.3 A Figura A.2 mostra algumas construções possíveis.

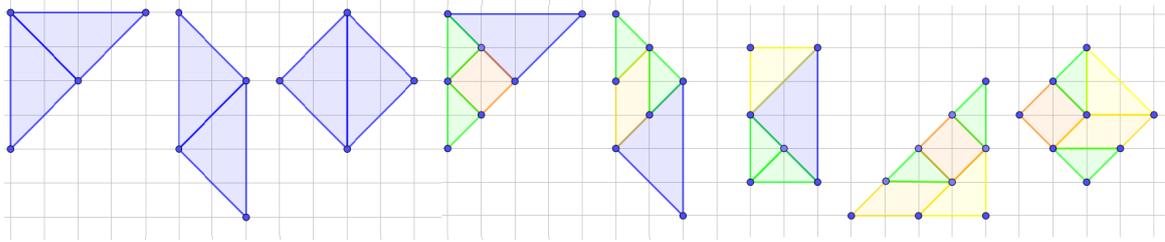


Figura A.2: Exemplos de polígonos convexos com metade da área do quadrado inicial

6.2.4 A Figura A.3 mostra o uso das peças de dois jogos de tangram para verificar a validade do teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo isósceles.



Figura A.3: O tangram e o teorema de Pitágoras

6.2.5 As Figuras 1, 2 e 3 são equivalentes (têm a mesma área) pois são formadas por todas as peças do tangram. Assim, a área da casinha (Figura 3) é igual à área do quadrado (Figura 1). Como o lado do quadrado mede $2\sqrt{2}cm$, temos que a área da casinha é $(2\sqrt{2})^2 = 8cm^2$. Portanto, a resposta correta é a alternativa (b).

6.2.6 O quadrado construído com 4 peças é 8 vezes maior do que a peça quadrada Q ; o construído com 5 peças é 9 vezes maior do que a peça quadrada Q .

6.2.7 a) Como o quadrado não deve ter buracos, a área final deve ser igual à área original, isto é, a soma das áreas dos dois quadrados. Denotando por l o lado do quadrado, temos

que:

$$l^2 = 8^2 + 6^2;$$

$$l^2 = 64 + 36;$$

$$l^2 = 100;$$

$$l = 10.$$

b)

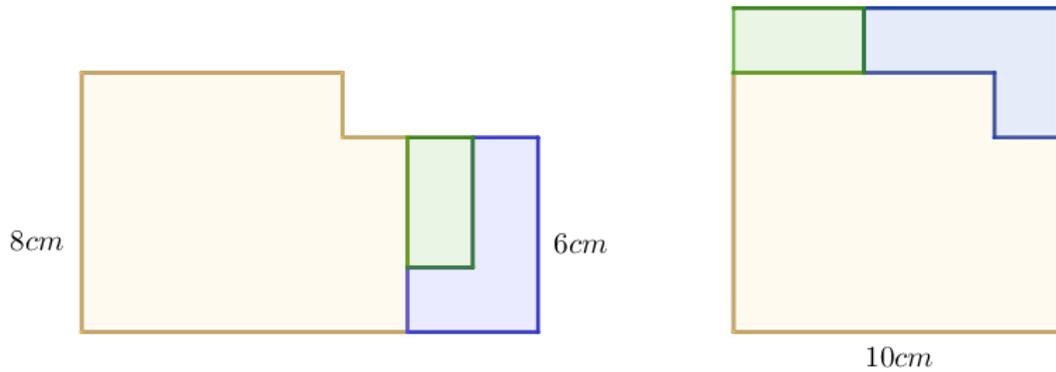


Figura A.4: Primeira decomposição para a questão 6.2.7(b)

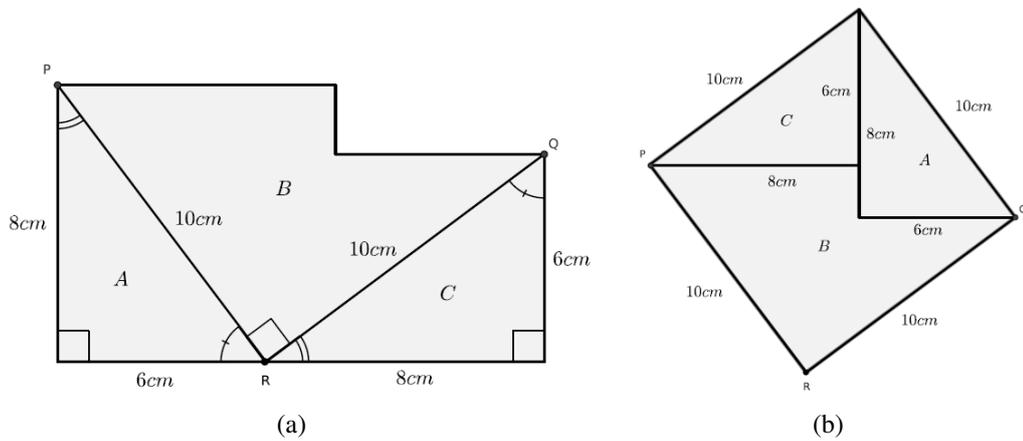


Figura A.5: Segunda decomposição para a questão 6.2.7(b) - Banco de questões da OBMEP

6.2.8 O retângulo $ABCD$ é dividido ao meio pela diagonal BD . Logo, os triângulos retângulos BAD e BCD são congruentes. Como os triângulos retângulos DRP e DQP e BMP e BNP também são congruentes, temos que as áreas dos retângulos $AMPR$ e $CQPN$ devem ser iguais. Logo, os retângulos $AMPR$ e $CQPN$ são equivalentes.

A.2 ATIVIDADE 2: POLIEDROS EQUIDECOMPONÍVEIS

6.3.1 a) São 3 paralelepípedos reto retângulos distintos, como mostra a Figura A.6.

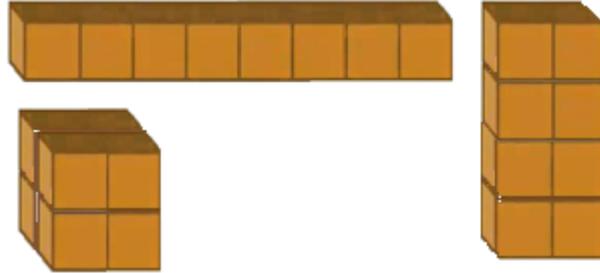


Figura A.6: Paralelepípedos reto retângulos compostos por 8 cubos

b) Os paralelepípedos reto retângulos têm áreas iguais a $24a^2$ (cubo), $28a^2$ e $34a^2$, respectivamente. Os três sólidos são equivalentes de volume igual a $8a^3$.

6.3.2 a) Figura 6.6.

$$b) V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3; V_{\text{peça}} = \frac{1}{4} V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = \frac{\sqrt{2}}{48} a^3.$$

6.3.3 a) São formados 6 sólidos distintos: 2 prismas de base triangular e 4 paralelepípedos reto retângulos, sendo um destes 4 um cubo.

b) Os seis sólidos são equivalentes, ou seja, têm o mesmo volume.

6.3.4 a) Figura A.7.

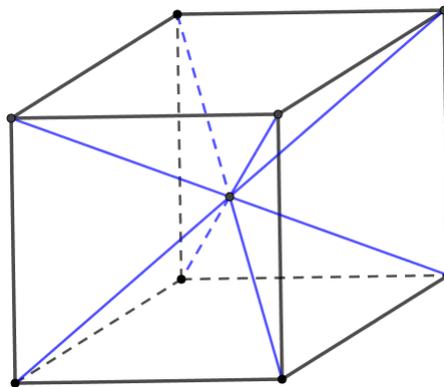


Figura A.7: Cubo decomposto em 6 pirâmides congruentes

$$b) V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{6} V_{\text{cubo}} = \frac{1}{6} 6^3 = 36 \text{ cm}^3; V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} 6^2 \cdot 3 = 36 \text{ cm}^3.$$

6.3.5 a) Podemos compor um paralelepípedo reto retângulo e prismas retos cuja base é um paralelogramo, um trapézio ou um triângulo, como mostra a Figura A.8.

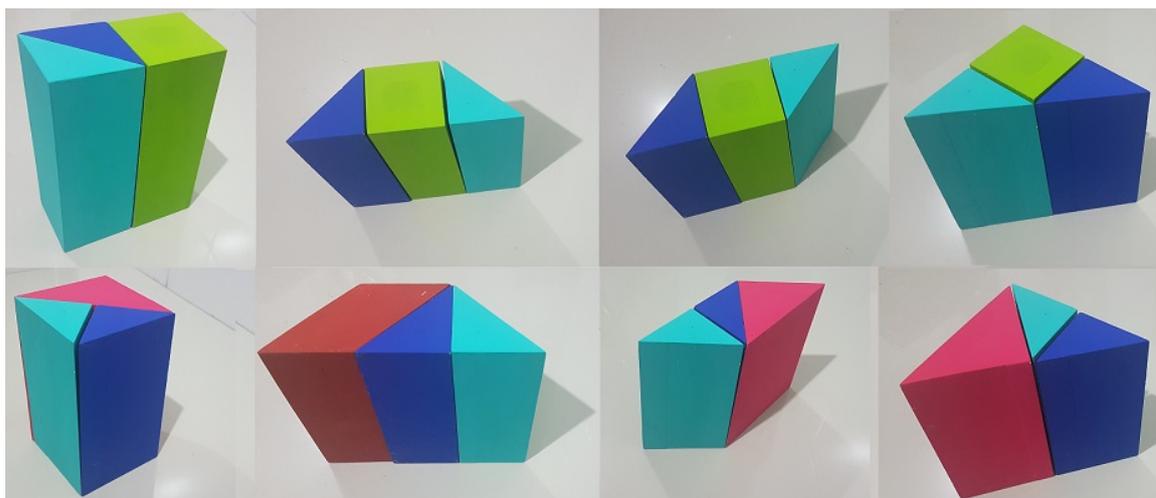


Figura A.8: Construções possíveis na questão 6.3.5(a)

Podemos substituir o paralelepípedo reto retângulo pelo prisma reto cuja base é o triângulo retângulo isósceles intermediário na decomposição do tangram, ou pelo prisma reto cuja base é o paralelogramo na decomposição do tangram. Os dois prismas são equivalentes (têm o mesmo volume).

b) A Figura A.9 mostra algumas construções possíveis.

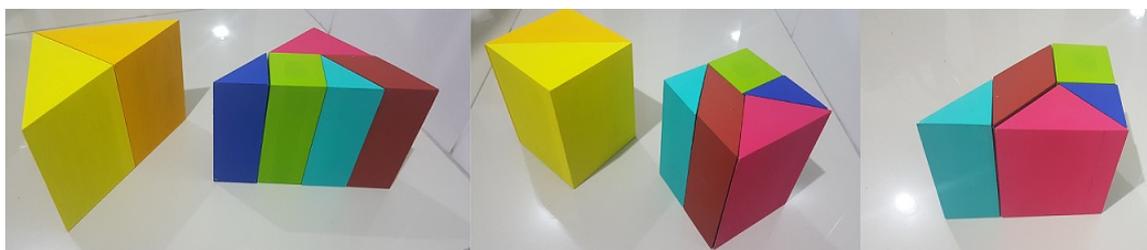


Figura A.9: Prismas cujo volume é a metade do volume do cubo-tangram

c) Sim, é possível. É preciso descartar um dos prismas retos cuja base é o triângulo retângulo isósceles maior na decomposição do tangram e utilizar as demais peças para compor um prisma.

6.3.6 Não é possível.