Modelagem Matemática em Ciências Sociais

Flávio Verdugo Ferreira

24 de janeiro de 2018

IMPA- INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Modelagem Matemática em Ciências Sociais

Modelos de Crescimento Populacional Explorando Progressões e Equações de Recorrência

Flávio Verdugo Ferreira

Prof. Dr. Moacyr Alvim Horta Barbosa Silva

Rio de Janeiro, 24 de janeiro de 2018

Esse trabalho é dedicado ao companheiro ADILSON MANOEL DOS SANTOS, que foi convocado por DEUS, certamente para que O ajudasse em alguns problemas de Matemática.

Agradecimentos

A Deus que me concedeu a vida, me capacitou para superar desafios e dificuldades e sustentou minha saúde até agora.

Aos meus pais por estarem sempre ao meu lado dando suporte para que não cedesse.

Aos doutores e mestres do IMPA, fontes de inspiraçãoe aprendizado, em especial ao meu orientador Prof. Dr. Moacyr Alvim Horta Barbosa Silva, pela ótima orientação e muita paciência

Aos meus companheiros de curso, pelo companheirismos, ajuda e amizade, em especial aos meus hoje IRMÃOS DIEGO SCARAMELLA, MAURÍCIO CARVALHO e THOMAS FREITAS

Sumário

Lista de Figuras

Resumo

Este trabalho visa estudar e proporcionar uma visão mais detalhada sobre o crescimento da população brasileira a partir de 1960 e analisar qual o modelo este crescimento seguiu, permitindo, com isso, um estudo mais objetivo para uma projeção populacional ao longo dos anos.

Os estudos e variações serão baseados a partir de dados concretos obtidos pelo IBGE a partir de 1960 para oferecer uma forma de estudo acessível para os estudantes de matemática em especial alunos do ensino médio.

Cabe ressaltar, porém, que ao longo deste trabalho serão abordados temas históricos, teses defendidas anteriormente e o seu comportamento com a realidade dos números, derrubando ou confirmando conceitos pré-estabelecidos até se chegar a um modelo mais apropriado (não perfeito) para projeções futuras.

Este estudo pretende, com isso, familiarizar estudantes e adeptos da matemática com critérios e fórmulas vistas em sala de aula e sua aplicação de forma prática.

Palavras-chaves: Crescimento populacional, exponencial, logístico

Capítulo 1

História

O tamanho da população mundial sempre foi tema de curiosidade e preocupação pois acreditava-se que quanto maior uma população, maiores os recursos necessários aos governos para suprir suas necessidades básicas. Com isso as cobranças de impostos pelos governos foram se tornando uma preocupação recorrente, desde o início da humanidade. Também acreditava-se que, cidades e nações com populações maiores seriam hegemônicas no domínio e na eventual conquista de novos territórios, através de lutas e guerras sangrentas como ocorriam e ocorrem desde o início da criação humana.

O quadro a seguir apresenta dados estimados sobre a população mundial.

Tabela 1.1: população mundial

ano	população	crescimento	crescimento anual (média)
800 a.c.	5.000.000	-	-
1	400.000.000	395.000.000	493.750
1804	1.000.000.000	600.000.000	332.594
1927	2.000.000.000	1.000.000.000	8.130.081
1960	3.000.000.000	1.000.000.000	30.303.030
1974	4.000.000.000	1.000.000.000	71.428.571
1987	5.000.000.000	1.000.000.000	76.923.076
1999	6.000.000.000	1.000.000.000	83.333.333
2011	7.000.000.000	1.000.000.000	83.333.333
2024 (estimativa)	8.000.000.000	1.000.000.000	76.923.076
2040 (estimativa)	9.000.000.000	1.000.000.000	62.500.000
2062 (estimativa)	10.000.000.000	1.000.000.000	45.454.545
2100 (estimativa)	10.600.000.000	600.000.000	15.789.473

Olhando o quadro anterior com um pouco de cuidado, observamos que, mesmo com dados estimativos, a população mundial teve sua média de crescimento aumentando até o ano de 1999 (o pico deste crescimento ocorreu em algum ano entre 1987 e 1999) e, a partir de então, este crescimento começou a diminuir, em 2011 foi de 83.333.333/ano, em média. Tende-se a projetar um decréscimo nesse aumento médio da população, levando a estimativas de que a população mundial tenderá a estabilização em 11 bilhões de habitantes por volta do ano 2100.

Uma outra forma de analisar estes dados é o tempo decorrido para que a população aumentasse em 1 bilhão de pessoas. o primeiro bilhão foi atingido por volta de 1804, o segundo, em 1927 (123 anos), o terceiro, em 1960 (33 anos), o quarto, em 1974 (14 anos), o quinto, em 1987 (13 anos), o sexto, em 1999 (12 anos), o sétimo, em 2011 (12 anos). A partir daí, as estimativas mostram uma tendência de que leve-se 13 anos até o oitavo bilhão, 16 anos até o nono, 22 anos até o décimo e 38 anos até o décimo primeiro bilhão, confirmando a freada no crescimento médio da população mundial.

As perguntas que se fazem neste momento são: como estas estimativas são feitas? Quais os cálculos que permitem analisar e avaliar estes números? A estas perguntas procuraremos respondê-las, não com exatidão, mas com uma abordagem simples e concisa para tentarmos entender como cada modelo funciona.

1.1 A teoria de Malthus

A teoria populacional Malthusiana foi uma teoria demográfica criada por volta de 1789, na Inglaterra, pelo economista e sacerdote protestante Thomas Robert Malthus (1766-1834), em sua principal obra, *ENSAIO SOBRE O PRINCÍPIO DA POPULAÇÃO*. A importância da publicação nesse momento histórico (final século XVIII) foi devido aos problemas que o país passava com a primeira revolução industrial, com o êxodo rural, o desemprego e o aumento da população, onde em períodos curtos de tempo, havia um crescimento elevado do número de habitantes nos países europeus que acompanhavam a implementação da revolução.

Na publicação onde estaria a teoria, Malthus atribui a culpa ao crescimento da população pobre fundamentada entre duas ideias.

Primeira ideia

Guerras, epidemias, desastres naturais são fatores controladores do crescimento populacional, que tende a evoluir de forma acelerada, em progressão geométrica, sendo ilimitado seu crescimento e duplicando a cada 25 anos.

Segunda ideia

A produção de alimentos, meio de subsistência, cresce em ritmo lento, em progressão aritmética, sendo restrita aos limites naturais do planeta, ou seja, limitada.

É fácil perceber que em um crescimento geométrico com taxa maior que a unidade irá superar um crescimento aritmético, mesmo que esta taxa seja mais alta. Isso afetaria o tempo para que uma superasse a outra, mas é certo que esse fato ocorreria. Nessa teoria, então, o crescimento populacional faria com que a oferta de alimentos disponíveis não fosse suficiente para suprir em um determinado período as necessidades de toda a população, gerando uma grande calamidade mundial, onde a humanidade morreria de inanição (estado de debilidade provocada pela falta de alimento), além da propagação de doenças, guerras por territórios para expansão e produção alimentícia, desestruturação da vida social e outros problemas.

Malthus acreditava que esses problemas gerados pelo crescimento seriam associados, principalmente aos mais pobres, e que a solução estaria em uma política antinatalista, chamada de controle moral, onde persistia o controle da natalidade, abstinência sexual, aumento da idade média dos casamentos, diminuição do número de filhos, entre outros fatores que tendessem a diminuir a taxa de natalidade, principalmente entre a população mais carente economicamente. Por ser religioso, Malthus era contra a utilização de métodos contraceptivos, seguindo apenas com as normas para a diminuição do crescimento populacional, forçando a população pobre à redução. Dessa maneira, acreditava haver um paralelo de expansão na produção de alimentos, não gerando as catástrofes previstas.

A teoria Malthusiana não imaginava os avanços tecnológicos que estavam por vir, como a mecanização do campo que aumentou o número de produção alimentícia, a emancipação da mulher que foi decisiva no controle de fertilidade, a entrada de mulheres no mercado de trabalho, as políticas de bem-estar social nos países europeus que, de certa forma, serviam para o controle da natalidade.

No século XX (após a segunda guerra mundial) houve uma grande explosão demográfica motivada por alguns fatores como surgimento de novos países africanos e asiáticos, conquistas na área da saúde como produção de vacinas e antibióticos contra uma série de doenças e, aliado a isso, altas taxas de natalidade. Logo surgiram teorias e formulações que resgatavam as ideias de Malthus como a teoria Neomalthusiana, que defendia que o estado pudesse estabelecer medidas de controle do crescimento da população, principalmente pela disseminação dos métodos anticoncepcionais. Para os neomalthusianos o desenvolvimento de um país ou região passava necessariamente pelo controle da população. A consequência desse aumento populacional seria, segundo essa teoria, a miséria.

Contrapondo a teoria Neomalthusiana, surgiu a teoria reformista cujas bases, segundo VIANA em "A TEORIA DE POPULAÇÃO EM MARX", são ideais do sociólogo Karl Marx (1818-1883) que acreditava que o problema da pobreza do mundo está relacionado com a má distribuição de renda, que é desigual. Os reformistas entendiam que os altos índices de natalidade seriam diminuídos através de investimentos na cultura, educação, infra-estrutura e na qualidade de vida desses países. Segundo essa teoria, portanto, a miséria é a causa e não a consequência do acelerado crescimento populacional.

Capítulo 2

O crescimento da população brasileira

Após esses registros históricos, iremos nos debruçar sobre o crescimento da população brasileira utilizando dados oficiais do IBGE colhidos em seus censos oficiais.

Tabela 2.1: população brasileira

ano	população	crescimento (milhões)	aumento médio anual (milhares)
1872	9.930.478		
1890	14.333.915	4.403	550,4
1900	17.438.434	3.104	310,4
1920	30.635.605	13.197	659,8
1940	41.236.315	10.600	530,0
1950	51.944.397	10.708	1070,8
1960	70.992.343	19.047	1904,7
1970	94.508.583	23.516	2351,6
1980	121.150.573	26.642	2664,2
1991	146.917.459	25.766	2342,4
2000	169.590.693	22.673	2519,2
2010	190.755.799	21.165	2116,5
2017 (agosto)	207.922.675	17.166	2452,2

Com os dados acima, vamos procurar fazer uma análise do crescimento da população brasileira utilizando os dados a partir de 1960. O motivo para isso se dá pelo fato de que pelas dimensões continentais do Brasil, até 1960, era muito mais difícil obter tais informações com uma precisão maior devido à dificuldade de acesso às regiões inóspitas do país, como a selva amazônica, interior do centro-oeste, entre outros. Uma outra justificativa é que, a partir de 1960 temos pouca influência das migrações, o que facilita nos concentrarmos apenas no crescimento vegetativo da população.

2.1 Modelos de crescimento da população

Para analisar o crescimento da população brasileira, vamos analisar três possibilidades:

Taxas constantes

Neste modelo, a população mantém seu crescimento de forma constante, ou seja, se considerarmos que ela cresce a um fator de k habitantes por ano, para sabermos a população daqui a t anos $[p(t)]$, basta tomar a população atual (p_0) e somarmos k, t vezes.

Quer dizer:

$$p(t) = p_0 + kt \tag{2.1}$$

Taxa de crescimento relativo constante

Neste modelo, podemos supor que a taxa de natalidade (número de nascimentos por ano por 10.000 indivíduos, por exemplo) e a taxa de mortalidade (número de óbitos por 10.000 indivíduos) é constante, independente do tamanho da população e do tempo. A diferença entre o número de nascimentos e de óbitos fornece a taxa de crescimento geométrico k. Logicamente, percebemos que esse modelo se aproxima mais de uma função exponencial do tipo:

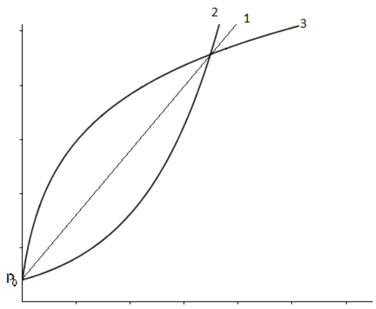
$$p(t) = p_0.k^t \tag{2.2}$$

Sendo p_0 a população inicial, k a taxa de crescimento e t o tempo percorrido após a medição de p_0.

Taxas decrescentes

Neste modelo o crescimento ocorreria em taxas cada vez menores, ou seja, o ritmo de crescimento da população estaria cada vez mais lento, levando a uma curva próxima de uma função logarítmica.

Figura 2.1: Taxas de crescimento



Na Fig. 2.1
1. taxas constantes
2. taxas crescentes
3. taxas decrescentes

Fazendo um pequeno exercício matemático sobre essas metodologias, utilizando os dados da população brasileira, observamos que o modelo de crescimento constante não ocorreu. Basta observar os valores do crescimento médio anual. Nenhum dos valores apresentados manteve-se constante nos intervalos de tempo entre uma medição e a subsequente.

Capítulo 3

Análise dos Modelos Exponenciais

3.1 Modelo exponencial discreto

Passaremos a analisar agora um modelo de crescimento exponencial. Inicialmente, analisaremos as taxas de crescimento de cada período (intervalos de medição da população). Para isso, consideraremos uma população inicial p_0 (população em 1960) e obteremos as taxas de crescimento dessa população nas medições seguintes.

Considere a taxa de crescimento da população por α e $p(t)$ a população medida num instante t, a partir de p_0. Para calcular a população $p_{(t+1)}$, devemos somar a $p(t)$ o valor que essa população crescer, que é $p(t).\alpha$.

Ou seja,

$$\begin{aligned} p_{(t+1)} &= p_t + p_t.\alpha \\ p_{(t+1)} &= p_t.(1+\alpha) \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} p_{(1)} &= p_0 + (\alpha+1) \\ p_{(2)} &= p_1.(\alpha+1) \\ p_{(2)} &= p_0.(\alpha+1)(\alpha+1) \\ p_{(2)} &= p_0.(\alpha+1)^2 \\ p_{(3)} &= p_2.(\alpha+1) \\ p_{(3)} &= p_0.(\alpha+1)^2(\alpha+1) \\ p_{(3)} &= p_0.(\alpha+1)^3 \end{aligned}$$

Por indução, concluímos que:

$$p_{(t)} = p_0.(\alpha + 1)^t \tag{3.1}$$

A partir dessa expressão podemos calcular a taxa de crescimento α:

$$\begin{aligned} p_{(t)} &= p_0.(\alpha + 1)^t \\ \frac{p_{(t)}}{p_0} &= (\alpha + 1)^t \\ \sqrt[t]{\frac{p_{(t)}}{p_0}} &= \alpha + 1 \\ \alpha_t &= \sqrt[t]{\frac{p_{(t)}}{p_0}} - 1 \end{aligned}$$

Vamos então, a partir dessa expressão, calcular a taxa de crescimento da população nas medições da população brasileira, considerando p_0 o valor da população em 1960, ou seja, $p_0 = 70.992.343$. No período entre 1960 e 1970 $(t = 1)$, observamos que $p_1 = 94.508.583$. Então:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt[1]{\frac{p_{(1)}}{p_0}} - 1 \\ \alpha_1 &= 0,3312 \end{aligned}$$

Em 1980, $[p_2]$ a população de 121.550.573, logo

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \sqrt[2]{\frac{p_{(2)}}{p_0}} - 1 \\ \alpha_2 &= 0,3063 \end{aligned}$$

Utilizando os dados das medições seguintes, observaremos os seguintes valores para α:

$$\begin{aligned} \alpha_{3,1} &= 0,2644 \\ \alpha_4 &= 0,2432 \\ \alpha_5 &= 0,2185 \\ \alpha_{5,7} &= 0,2074 \end{aligned}$$

onde $\alpha_{5,7}$ é medido até 2017.

Claramente, observamos que existe uma desaceleração no crescimento populacional tomando a população em 1960 como parâmetro.

Analisando os dados da população a partir de 1960, teremos um crescimento anual médio de 2.351,6 milhares e, posteriormente, um aumento de 2.664,1 milhares. Ora, isso representa um aumento de aproximadamente 13,28% ao ano. Ponderando, porém, o crescimento na década seguinte (1980-1991), observamos uma redução percentual de 3,28% neste crescimento. Só esse fato seria suficiente para concluir que o modelo com taxas de crescimento constantes não é adequado, mas prosseguiremos com os dados das décadas seguintes.

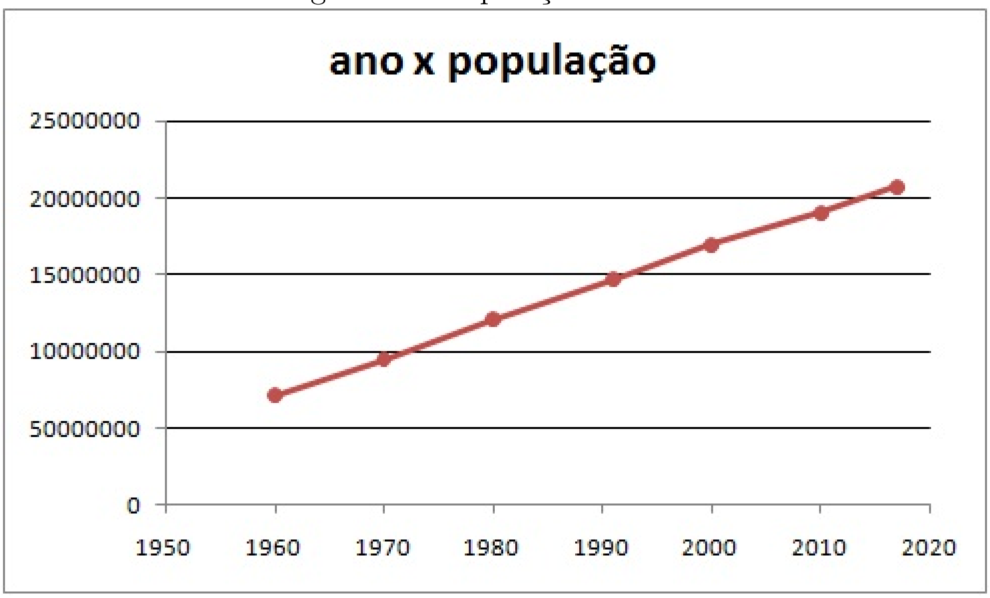
crescimento período (1980 - 1991) em milhares, 25.766

crescimento período (1991 - 2000) em milhares, 22.673

Observamos que crescimento da população entre as duas décadas teve uma redução de 12%.

Ao repetir essa metodologia para os períodos de (2000-2010) e (2010-2017), encontraremos reduções nas taxas de crescimento, respectivamente de 6,65% e de 18,89%. Numa análise superficial, temos uma perspectiva de que a população brasileira cresce a uma velocidade menor a partir de 1991. Ocorre que essa diminuição do crescimento não ocorreu em uma mesma taxa, mesmo considerando um modelo decrescente. Observe o gráfico a seguir:

Figura 3.1: População brasileira



Nossa missão será combinar esses fatores e tentar chegar a um modelo próximo do ideal, sempre ressaltando que um crescimento populacional depende de fatores externos e ocasionais cíclicos que afetam o cálculo original.

3.2 Análise dos modelos

Se considerarmos um crescimento constante, ele seria dado por uma taxa k e a população P seria obtida através da soma entre uma população inicial p_0 e o produto $k.t$, sendo t o tempo decorrido entre as duas medições.

$$p(t) = p_0 + kt \tag{3.2}$$

Já vimos que esse modelo não se aplica à realidade da população brasileira.

Outro modelo seria onde a taxa de crescimento k dependeria do tamanho da população P, ou seja, quanto maior a população, mais rapidamente ela cresceria, por conseguinte teríamos uma função exponencial do tipo:

$$p(t) = p_0.e^{kt} \tag{3.3}$$

Neste momento, precisamos analisar melhor a expressão acima, 3.3, buscando as origens e justificativas para sua utilização.

3.2.1 Crescimento exponencial contínuo

Sabemos, por meio dos estudos em sala de aula, que o número e é uma constante obtida através da expressão:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{3.4}$$

Fazendo uma pequena revisão sobre essa expressão, imagine que, em um ano, uma população cresça 100% (esse crescimento é absurdo, vamos considerá-lo apenas para efeito de simplificação dos cálculos). Queremos dividir taxa e período por 2. Ao final do primeiro período a população será:

$$P = (p_0 + \frac{1}{2}p_0)$$

$$P = p_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

Na contagem do período seguinte a população será:

$$P = p_0\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)$$
$$P = p_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$$

Em um raciocínio análogo, se a taxa e o tempo fossem divididos por 4 teríamos:

$$P = \left(p_0 + p_0\frac{1}{4}\right)$$
$$P = p_0\left(1+\frac{1}{4}\right) \qquad (1^o per\acute{i}odo)$$
$$P = p_0\left(1+\frac{1}{4}\right)^2 \qquad (2^o per\acute{i}odo)$$
$$P = p_0\left(1+\frac{1}{4}\right)^3 \qquad (3^o per\acute{i}odo)$$
$$P = p_0\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \qquad (4^o per\acute{i}odo)$$

Ao generalizarmos esse raciocínio, se dividirmos a taxa anual (nesse caso, 100%) em n períodos iguais, à população final, por raciocínio semelhante será dada por :

$$P = p_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{3.5}$$

Estabelecendo valores cada vez maiores para n, chegaremos na constante matemática que é conhecida como NÚMERO DE EULER, que é irracional, e seu valor é:

$$e = 2,718281828459...$$

Na teoria esse modelo se adequa pois o crescimento da população é medido gradativamente ao longo do período, este é o raciocínio NATURAL. Se o ano for dividido em n períodos, ao final do ano, a população será dada pela expressão anterior (3.5).

Lembremos que uma taxa de crescimento de 100% ao ano é surreal e que foi utilizada apenas para podermos entender melhor a origem do número e e a sua utilização para o cálculo de uma população a partir de um modelo de crescimento exponencial. (MODELO DE MALTHUS).

Suponha uma taxa de crescimento k, uma população inicial p_0 e uma população p_1, após um período de tempo t:

Dividindo esse intervalo em n períodos iguais a n, cada um deles com taxa de crescimento $\frac{k}{n}$, teríamos o seguinte esquema:

$$P = \left(p_0 + p_0 \frac{k}{n}\right)$$

$$P = p_0 \left(1 + \frac{k}{n}\right) \qquad (1^o per\acute{\imath}odo)$$

$$P = p_0 \left(1 + \frac{k}{n}\right)\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$$P = p_0 \left(1 + \frac{k}{n}\right)^2 \qquad (2^o per\acute{\imath}odo)$$

Ao final dos n períodos:

$$P = p_0 \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \tag{3.6}$$

Essa última expressão (3.6) pode ser escrita da seguinte forma:

$$P = p_0 \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^k \tag{3.7}$$

Repare que $(1+\frac{1}{\frac{n}{k}})^{\frac{n}{k}}$ é uma forma equivalente de escrever $(1+\frac{1}{n})^n$. Logo, como $(1+\frac{1}{n})^n = e$, a expressão que medirá a população, ao final de um ano, será dada por:

$$P = p_0.e^k \tag{3.8}$$

Logicamente, se considerarmos um crescimento de 100%, $k = 1$ será $P = p_0.2$.

Com uma taxa k e período de tempo t (maior que um ano) medido continuamente (n períodos com taxa $\frac{k}{n}$), o raciocínio se mantém de forma análoga e podemos calcular essa população ao final do período de tempo t. Se o período for maior que t, basta utilizarmos o que ocorre em t anos e expandir esse raciocínio. Por exemplo, se o período for de $2t$ anos, o valor $p_0.e^k$ será novamente multiplicado por e^k. Logo a população ao final de $2t$ anos será:

$$P = p_0.e^k.e^k$$
$$P = p_0.(e^k)^2$$
$$P = p_0.e^{2k}$$

Após $3t$ anos, teremos:

$$P = p_0.e^{2k}.e^k$$
$$P = p_0.e^{3k}$$

Assim, chegamos na expressão desejada.

Se uma população inicial p_0 cresce a uma taxa k por t anos, sua população, ao final deste período, será dada por:

$$P = p_0.e^{kt} \tag{3.9}$$

Em caso de decrescimento da população (ou seja, a população diminui ao final de um período t) a diferença será:

$$P = p_0\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$$

$$P = p_0\left[\left(1 - \frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^k$$

Ora, como vimos antes, $\left(1-\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\overline{k}}$ equivale a $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. Essa expressão, para valores cada vez maiores de n, converge para e^{-1}. Portanto, ao final de 1 ano, a população seria $P = p_0.e^{-k}$ e, em um período de t anos, teríamos:

$$P = p_0.e^{-kt} \tag{3.10}$$

Uma outra maneira de pensarmos a expressão anterior (3.10), seria considerar a taxa de crescimento da população com as variáveis da taxas de natalidade e de mortalidade, que, certamente, interferem nessa taxa de crescimento. Considerando uma população no instante t $[p(t)]$ e as taxas de natalidade a e de mortalidade b um intervalo de tempo Δt, podemos escrever as seguintes expressões:

Número de nascimentos em Δt: $a.p(t).\Delta t$

Número de óbitos em Δt: $b.p(t).\Delta t$

Levando em consideração esses dois aspectos, no intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$, a população sofrerá um acréscimo de $p(t + \Delta t) - p(t)$.

Claramente, esse crescimento depende da diferença entre o números de nascimentos e de óbitos, ou seja:

$$p(t + \Delta t) - p(t) = a.p(t).\Delta t - b.p(t).\Delta t$$
$$p(t + \Delta t) - p(t) = (a - b).p(t).\Delta t$$

Se considerarmos que $(a - b) = k$ será, a partir de agora, chamada de *TAXA DE CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO*, teremos,

$$p(t + \Delta t) - p(t) = k.p(t).\Delta t$$
$$\frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = k.p(t)$$

Considerando intervalos de tempo cada vez menores, ou seja, fazendo Δt se aproximar de zero, teremos o *LIMITE DESTA EXPRESSÃO*, isto é:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} \tag{3.11}$$

A partir de agora iremos utilizar conceitos e aplicações de CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL para buscar soluções para as equações decorrentes dos estudos realizados até o momento. A expressão (3.11) é a própria definição da DERIVADA DA POPULAÇÃO p NO INTERVALO

DE TEMPO Δt. Em nosso estudo, a variação da população p no intervalo de tempo Δt será representada por $\dfrac{dp(t)}{dt}$, então:

$$\frac{dp(t)}{dt} = k.p(t)$$

Considerando $p(0) = p_0$, como condição inicial, teremos o conjunto:

$$\begin{cases} \dfrac{dp(t)}{dt} = k.p(t) \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

Essa é chamada de EQUAÇÃO DIFERENCIAL COM UMA CONDIÇÃO INICIAL *[MODELO DE CAUCHY]* e podemos, ao resolvê-la, chegar num modelo de crescimento exponencial contínuo.

$$\frac{dp(t)}{dt} = k.p(t)$$
$$\frac{dp(t)}{p(t)} = k.dt$$

Quando tem-se a derivada da função (como é o caso) e deseja-se ter a função que deu origem a essa derivada, utilizamos o conceito de INTEGRAL, que possui regras e procedimentos rígidos e adequados (que não serão objetos de análise nesse trabalho) para sua solução.

Aplicando integral (operação para descobrir a função primitiva), teremos:

$$\int \frac{dp(t)}{dt} = \int k.p(t)$$

Logicamente estamos considerando o intervalo de tempo entre 0 e t, onde p varia de $p(0)$ até $p(t)$:

$$\int_{p(0)}^{p(t)} \frac{dp(t)}{dt} = \int_0^t k.p(t)$$

Por regra de integração, quando o numerador é a derivada do denominador, esta integral será logaritmo natural (ln) do denominador, ou seja:

$$\int \frac{dt}{t} = \ln t$$

então,

$$\ln\left[p(t)\right]_{p(0)}^{p(t)} = \left[kt\right]_0^t$$
$$\ln\left[p(t)\right] - \ln\left[p(0)\right] = k.(t-0)$$
$$\ln\left[\frac{p(t)}{p(0)}\right] = kt$$

Aplicando a base e em ambos os membros,

$$e^{\ln\left[\frac{p(t)}{p(0)}\right]} = e^{kt}$$

por propriedade do logaritmo, teremos:

$$\frac{p(t)}{p(0)} = e^{kt}$$

ou ainda,

$$p(t) = p(0)e^{kt}$$

como já havíamos observado anteriormente utilizando apenas raciocínio lógico dedutivo aplicada à definição do número e.

Analisando os dados que temos sobre a população brasileira, vemos que ela está ainda em crescimento, logo podemos desconsiderar essa última expressão (3.10). Vamos utilizar o modelo estudado (crescimento exponencial - 3.3) e tentar compará-lo aos dados reais da população. Para relembrar e facilitar a nossa visualização, dividiremos os dados coletados a partir de 1960 e vamos comparar o crescimento da população obedecendo às taxas obtidas a cada medição com os dados reais.

$$P_1 = p_0.e^{kt}$$
$$P_1 = 70.992.343.e^{0,0331.10}$$
$$P_1 = 98.846.883 \qquad (1970)$$

$$P_2 = p_0.e^{k.2t}$$
$$P_2 = 70.992.343.e^{0,0331.20}$$
$$P_2 = 137.630.426 \qquad (1980)$$

É possível perceber que o modelo de crescimento exponencial não se aplica aos dados reais da população brasileira. Se mantivéssemos essa taxa de crescimento, a população brasileira, em 2017 ($t = 57$), deveria ser

$$P_{57} = 70.992.343.e^{0,0331.57}$$
$$P_{57} = 468.376.296$$

Os dados reais mostram uma população de 207.922.675. Ora, é claro que estamos utilizando uma taxa de crescimento ocorrida entre os anos de 1960 e 1970. Como vimos no início da exposição, a taxa de crescimento vem se mostrando decrescente ao longo das décadas. Vamos, então, basear o nosso cálculo utilizando a menor taxa de crescimento do período, que foi entre 2000 e 2010 (0,0124), teremos:

$$P_{57} = 70.992.343.e^{0,0124.57}$$
$$P_{57} = 143.936.470$$

O que podemos concluir é:

- Se as taxas de crescimento da população se mantivessem nos níveis da década de 1960, a população brasileira seria mais do dobro do que é atualmente.

- Se a população tivesse crescido no ritmo que cresceu entre os anos de 2000 e 2010, hoje a população brasileira seria cerca de 143.936.470 (30% a menos)

- Se a população tivesse crescido no ritmo que cresceu entre os anos de 1991 e 2000, hoje a população brasileira seria cerca de 188.156.116 (9,5% a menos)

- Se a população tivesse crescido no ritmo que cresceu entre os anos de 1980 e 1991, hoje a população brasileira seria cerca de 213.294.113 (2,58% a mais)

- Se a população tivesse crescido no ritmo que cresceu entre os anos de 1970 e 1980, hoje a população brasileira seria cerca de 354.239.070 (70,37% a mais)

Ora, esses dados refletem uma incompatibilidade entre o crescimento exponencial e uma estimativa correta para a população brasileira para os próximos anos, simplesmente pelo fato de não se poder calcular qual será a taxa real de crescimento para os próximas anos. Se reduzirmos o nosso cálculo ainda mais e utilizarmos a taxa de crescimento entre 2010 e 2017 (0,0178), teremos uma projeção de 216.804.076 habitantes em 2020. Será que podemos confiar nesse cálculo? A análise de dados mostra que essa taxa vem em constante queda, logo seria um pouco precipitado considerar uma projeção dessa antes do fim da década.

Capítulo 4

Modelo Logístico

O belga Pierre François Verhulst (1804-1849) desenvolveu um modelo que diferenciava do modelo de crescimento do malthusiano pelo fato de que, segundo ele, a população crescerá até um limite máximo sustentável. Isso se daria por conta das condições do ambiente onde a população sobreviveria. A disponibilidade de espaço, alimento, moradia, entre outros fatores, não seriam os mesmos eternamente. Em algum momento essa população atingiria o nível máximo de sua capacidade e estabilizaria nesse limite a partir de um certo tempo.

No modelo de Verhulst, as estatísticas disponíveis complementariam a teoria do crescimento exponencial.

4.1 Um pouco de história

No período compreendido entre 1838 e 1847, Verhulst publicou uma série de trabalhos que fundamentariam suas convicções sobre a análise do crescimento populacional:

- 1838 - "NOTICE SUR LA LOI QUE LA POPULATION POURSUIT DANS SON ACCROISSEMENT."(NOTA SOBRE A LEI QUE A POPULAÇÃO SEGUE EM SEU CRESCIMENTO).

- 1845 - "RECHERCHES MATHÉMATIQUES SUR LA LOI D'ACCROISSEMENT DE LA POPULATION."(INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA SOBRE A LEI DE CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO)

- 1846 - "NOTE SUR LA LOI DACCROISSEMENT DE LA POPULATION."(NOTA SOBRE A LEI DE CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO)

- 1847 - "DEUXIÈME MÉMOIRE SUR LA LOI D'ACCROISSEMENT DE LA POPULATION."(SEGUNDA MEMÓRIA SOBRE O CRESCIMENTO POPULACIONAL)

O interesse de Verhulst em estudar o crescimento demográfico teve influência, provavelmente, de suas relações com Quételet [1], e/ou o interesse em responder à problemática do crescimento exponencial de Malthus. Essas se apresentaram como práticas sociais, que, em um contexto histórico e social, outorgaram uma estrutura e um significado às próprias práticas de Verhulst.

O trabalho de Verhulst "NOTA SOBRE A LEI QUE A POPULAÇÃO SEGUE EM SEU CRESCIMENTO"foi publicado em 1838, no "Correspondance Mathématique ot Psysuque", editado por Adolphe Quételet. Nessa publicação, Verhulst expôs a essência de sua teoria e comparou os dados obtidos pelo seu modelo com alguns valores populacionais. Verhulst defende um limite para o comprimento populacional e não um crescimento ilimitado como o proposto por Malthus. Adotando as hipóteses de Quételet, ele assumiu que a resistência ao crescimento humano é proporcional ao quadrado da velocidade com que a população tende a crescer.

Como vimos antes, o modelo de crescimento exponencial (variação de uma população p em um intervalo de tempo t) é dado por:

$$\frac{dp(t)}{dt} = k.p(t)$$

Verhulst aperfeiçoou essa equação ao impor uma condição máxima de habitantes que o ambiente suporta.

Seja p a população. Como representado, $\frac{dp}{dt}$ é a variação do crescimento durante um período de tempo t.

Modelo logistico discreto e contínuo

No modelo contínuo teremos a evolução da população em intervalos de tempo geralmente fixos. Desta maneira podemos observar o número de indivíduos inicialmente e depois de certo período de tempo t. Vimos que,

[1] Adolphe Quételet publicou a "A Treatise on Man and the Development of His Faculties"(UM TRATADO SOBRE O HOMEM E O DESENVOLVIMENTO DE SUAS FACULDADES) Quételet foi um dos primeiros a considerar que o modelo exponencial de crescimento de Malthus não era adequado para explicar a expansão demográfica de um país. Ele estava convencido de que uma população não poderia crescer infinitamente, mas que existem forças, tanto externas quanto internas, que limitavam esse crescimento .

se essa população crescesse exponencialmente, como descrito anteriormente, teríamos:

$$\frac{dp(t)}{dt} = k.p(t)$$

Como a velocidade de crescimento (segundo Verhulst) é retardada pelo aumento da população, devemos subtrair de $k.p(t)$ uma função desconhecida de p, $\varphi(p)$, de modo que

$$\frac{dp(t)}{dt} = k.p(t) - \varphi(p)$$

Se Verhulst supostamente adotou a ideia de Quételet sobre a proporcionalidade direta ao quadrado da velocidade com que a população cresce, teríamos como hipótese mais simples,

$$\varphi(p) = k.p^2$$

então:

$$\frac{dp}{dt} = k.p - kp^2 = kp(1-p)$$

Se considerarmos que a população terá um limite, uma chamada capacidade de carga, a população p será limitada por M, então:

$$\frac{dp}{dt} = k.p\left(1 - \frac{p}{M}\right)$$

Quando p é pequeno comparado com M, a equação ficará reduzida à:

$$\frac{dp}{dt} = k.p \quad (modelo\ \ exponencial)$$

Isso mostra que, quando há abundância de recursos e as limitações são mínimas, a população tem uma velocidade de crescimento alta, corroborando com o pensamento de Malthus em sua teoria.

Se $p = M$, teríamos $\dfrac{dp}{dt} = 0$, ou seja, a população tenderá a se manter constante (terá atingido sua capacidade limite).

Se medirmos $p(t)$ como a população no instante t, temos que $p(t+dt)$ será a medida da população após a variação de tempo dt.

Logo, como $\dfrac{dp}{dt} = k.p\left(1 - \frac{p}{M}\right)$, temos que

$$dp = dt.k.p\left(1 - \frac{p}{M}\right)$$

Ou seja

$$p(t+dt) - p(t) = dt.k.p(t)\left(1 - \frac{p(t)}{M}\right)$$

Se fizermos $dt = 1$

$$p(t+1) = p(t) + k.p(t)\left(1 - \frac{p(t)}{M}\right)$$

O que acontece se $0 < p < M$?
Vamos resolver essa equação:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= k.p\left(1 - \frac{p}{M}\right) \\
\frac{dp}{p\left(1 - \frac{p}{M}\right)} &= k.dt \\
\int \frac{dp}{p\left(1 - \frac{p}{M}\right)} &= \int k.dt
\end{aligned}$$

Após utilizar frações parciais no primeiro membro, temos que:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dp}{p\left(1 - \frac{p}{M}\right)} &= \int \left(\frac{1}{p} - \frac{\frac{1}{M}}{1 - \frac{p}{M}}\right) \\
&= \ln p - \ln\left(1 - \frac{p}{M}\right)
\end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned}
\ln p - \ln\left(1 - \frac{p}{M}\right) &= kt + c \\
\ln\left[\frac{p}{\left(1 - \frac{p}{M}\right)}\right] &= kt + c
\end{aligned}$$

aplicando exponencial, teremos:

$$\begin{aligned}
e^{\ln\left[\frac{p}{\left(1 - \frac{p}{M}\right)}\right]} &= e^{kt+c} \\
\left[\frac{p}{\left(1 - \frac{p}{M}\right)}\right] &= e^{kt}.e^{c}
\end{aligned}$$

Como c é uma constante, chamaremos $e^c = C$.

$$\left[\frac{p}{(1-\frac{p}{M})}\right] = C.e^{kt} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{M.Ce^{kt} - pCe^{kt}}{M} \\ pM + pCe^{kt} &= M.Ce^{kt} \\ p(M + Ce^{kt}) &= M.Ce^{kt} \\ p &= \frac{M.Ce^{kt}}{(M + Ce^{kt})} \end{aligned}$$

Se considerarmos que $p(0) = p_0$ (assumindo que p_0 não vale 0 ou M), encontramos:

$$\begin{aligned} p_0(M + Ce^{kt}) &= M.Ce^{kt} \\ p_0M + p_0Ce^{kt} &= M.Ce^{kt} \\ p_0.Ce^{kt} - MCe^{kt} &= -p_0M \\ C(p_0e^{kt} - Me^{kt}) &= -p_0M \\ C &= \frac{p_0M}{Me^{kt} - p_0e^{kt}} \end{aligned}$$

A ideia do **MODELO LOGÍSTICO CONTÍNUO** aparece quando os intervalos de tempo ficam cada vez menores, ou seja, se considerarmos $t \to 0$ a partir da última expressão, ficaremos com:

$$C = \frac{p_0M}{M - p_0}$$

substituindo em (4.1)

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{p}{(1-\frac{p}{M})}\right] &= \frac{p_0 M}{M-p_0}.e^{kt} \\
\frac{p}{\frac{M-p}{M}} &= \frac{p_0 M}{M-p_0}.e^{kt} \\
p_0 M.e^{kt}.\left(\frac{M-p}{M}\right) &= p(M-p_0) \\
p_0(M-p).e^{kt} &= p(M-p_0) \\
p_0(M-p) &= p(M-p_0).e^{-kt} \\
p_0 M - p_0 p &= pMe^{-kt} - p.p_0.e^{-kt} \\
-p_0.p - p.Me^{-kt} + p.p_0 e^{-kt} &= -p_0.M \\
p(-p_0 - M.e^{-kt} + p_0.e^{-kt}) &= -p_0.M \\
p(t) &= \frac{p_0.M}{p_0 + (M-p_0)e^{-kt}}
\end{aligned}
$$

logicamente, quando $t \to +\infty, \quad p(t) \to M$.

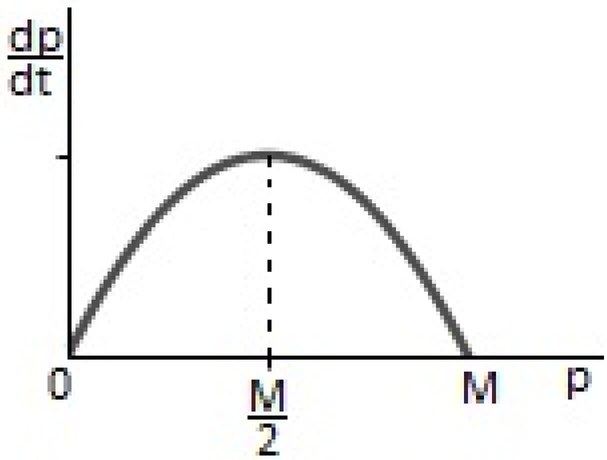
A questão a se pesquisar agora é: qual ou como calcular o valor máximo da população. Esse valor será fundamental para aplicar a equação modelar de Verhulst.

Analisando a fórmula anterior, vemos que $p(t)$ depende de k, p_0 e M que estabelecem a equação diferencial e a condição inicial e é uma função do tempo, como era esperado.

Observamos que $p(0) = p_0$ e $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = M$. Também $p(t) = 0$ e $p(t) = M$ são soluções da equação. Vamos esboçar um gráfico considerando que $0 < p(0) < M$ e $p(t)$ tende a M de modo crescente.

Vamos voltar à $\dfrac{dp}{dt} = k.p\left(1 - \frac{p}{M}\right)$.

Vemos que $\dfrac{dp}{dt}$, como função de p, é uma parábola com concavidade para baixo, cujas raízes são $p = 0$ e $p = M$. Esses dois pontos recebem o nome de "pontos de equilíbrio" da equação diferencial pois $\dfrac{dp}{dt} = 0$ e, neste caso, $p(t)$ é constante.



O valor máximo $\dfrac{dp}{dt}$ é atingido quando $p(t) = \dfrac{M}{2}$. Segundo Verhulst, na metade da população limite, existe um ponto onde a curva populacional muda de concavidade, esse ponto será chamado de PONTO DE INFLEXÃO.

Vamos verificar, através dos dados da população brasileira, entre quais medições houve a maior variação relativa, pois a média da população, entre estes instantes, deve ser a metade da população máxima.

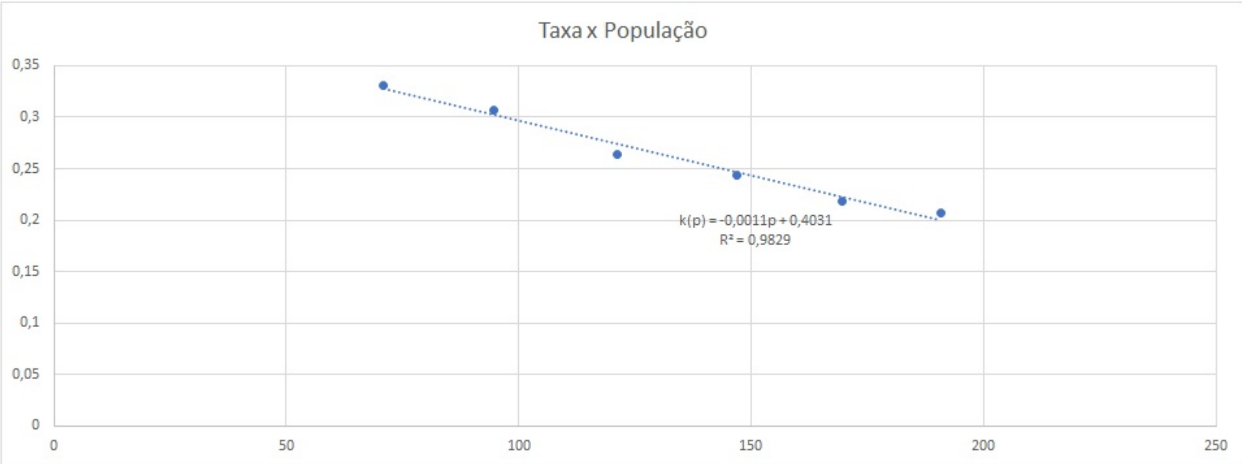
Segundo a proposta de Verhulst, então, entre os anos de 1980 e 1991 houve a maior variação relativa na população brasileira. Então a população máxima será o dobro da média aritmética entre as populações de 1980 e 1991 o que equivale apenas a somar os valores da população nestas épocas, isto é:

$$M = 121.150 + 146.917 = 268.067 \ (milhares)$$

Utilizaremos, portanto, tal valor para tentar prever quando a população atingirá a capacidade máxima.

Vamos buscar uma chamada "TAXA IDEAL"que minimizará os erros ao máximo. O fato de buscarmos essa "TAXA IDEAL"deve-se ao fato não podermos utilizar as taxas de crescimento de cada década. Essas taxas variaram muito e levaram a projeções erradas sobre a população. Utilizaremos uma ferramenta de planilhas eletrônicas disponível no programa Excel que minimiza ao máximo os erros entre a leitura real da população e a projeção dela, utilizando os modelos de MALTHUS e VERHULST. Este procedimento utilizado pelo programa é o MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.

Figura 4.1: Taxa x População



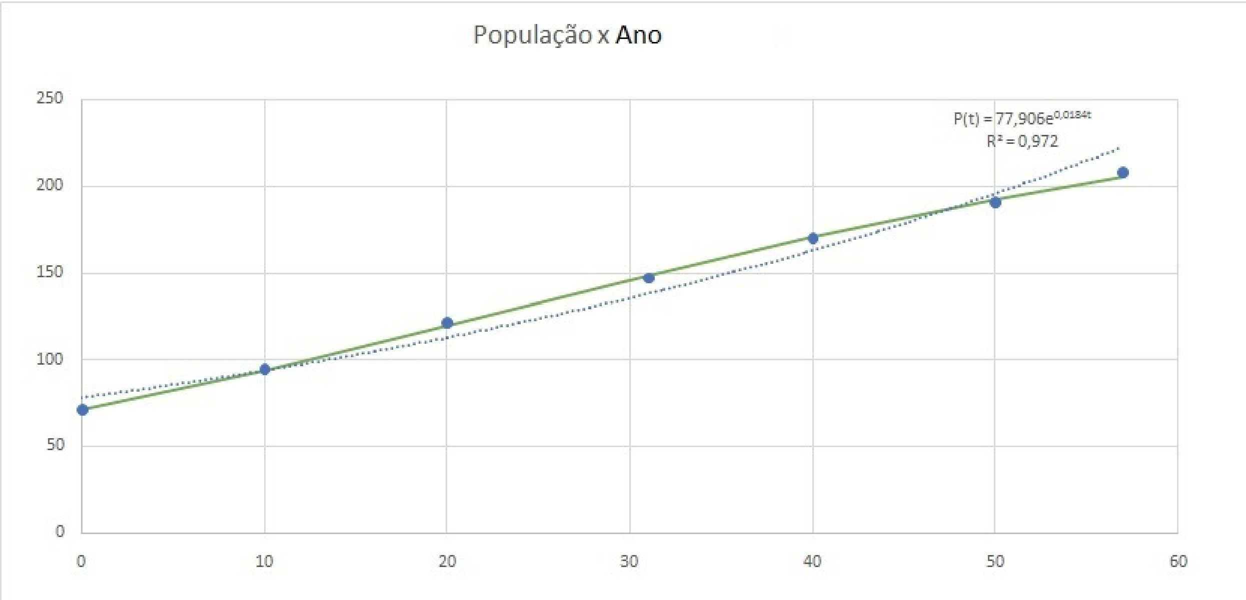
O gráfico acima mostra que, à medida que a população aumenta, a taxa de crescimento reduz. O programa otimizou uma aproximação linear que relaciona as duas grandezas através da função $k(p) = -0,0011p + 0,4031$. O zero desta função é $366,45$. Percebemos que este valor está muito diferente da população limite sugerida por Verhulst. Vamos, agora, utilizar a mesma ferramenta para estimar uma otimização dos valores da população ao longo do tempo segundo as projeções de Verhulst.

Tabela 4.1: População brasileira

ano	população real	população estimada	erro minimizado (x10^{-4})
1960	70.992.343	71.399.585	0,3294
1970	94.508.583	94.135.337	0,1559
1980	121.150.573	119.495.876	1,8654
1991	146.917.459	148.225.799	0,7930
2000	169.590.693	170.521.491	0,3012
2010	190.755.799	192.423.617	0,7644
2017 (agosto)	207.922.675	205.462.827	1,3996
soma			5,6092

A otimização sugerida pelo programa indica população inicial $p_0 = 71.399.585$ taxa de crescimento $k = 0,0405$ e população limite $M = 258.873.562$. Ao projetarmos a população segundo estes mesmos critérios para os anos seguintes, chegaremos à população estimada de 253.753.922 em 2080. Este valor corresponde à aproximadamente 98% da população limite M. Lembremos que M é uma assíntota e portanto, teoricamente, o seu valor nunca será atingido.

Figura 4.2: População x Ano



Na Fig. 4.2

. Valores reais

— Estimativa logística

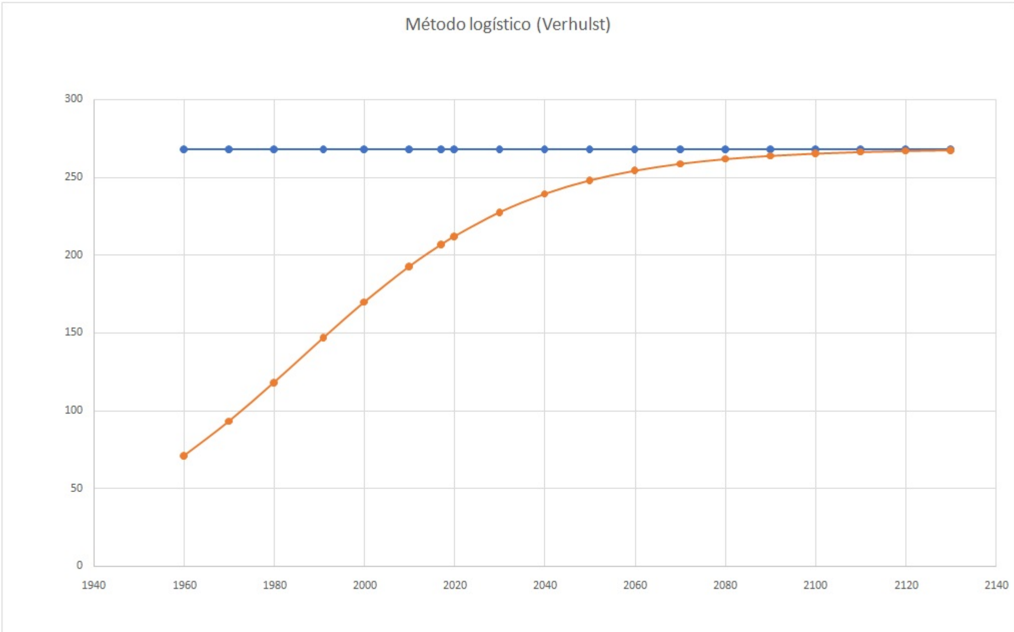
– – Linha de tendencia de Malthus

Na otimização sugerida pelo programa para a projeção da população pelo método de Malthus, temos que $P_0 = 77.906\ (milhares) \qquad k = 0,0184$

então, $P(t) = 77,906e^{0,0184t}$

Considerando-se agora a projeção da população de acordo com o método de Verhulst a sua população limite $M = 268.067(milhares)$, teremos que, com as taxas cada vez mais decrescentes, essa população limite será atingida em 95% por volta do ano 2100. Nunca é demais ressaltar que não se pode precisar com exatidão o ano em que a população atingirá um determinado valor. Estamos mostrando métodos estimativos baseados em análises que indicam uma tendência. Esses estudos estão sustentados por observações colhidas ao longo do tempo, mas que podem ser alteradas por diversos fatores, naturais ou não.

Figura 4.3: Modelo logístico (Verhulst)



Observa-se a linha horizontal contínua que representa M (população limite, segundo método de Verhulst), e a linha que representa um crescimento com taxas cada vez menores.

Observa-se que no modelo de Malthus, não há a chamada população limite M. O que se nota, porém, é que o ano em que se atingirá a estabilização da população, está bem próximo da projeção alcançada quando utilizou-se o método de Verhulst. Evidentemente tratam-se de projeções otimizadas com auxílios de recursos tecnológicos e ferramentas matemáticas que possibilitaram e, principalmente, facilitaram uma aproximação entre dois métodos. Como já explicado antes, são apenas projeções, mas que permitem uma análise bem compatível e bastante lúcida sobre o comportamento de uma população e ao que se refere a seu crescimento.

Capítulo 5

Conclusão

Os tópicos abordados aqui mostraram que é perfeitamente possível estimar, mesmo com uma margem de erro variável, o ritmo de crescimento de uma população. Mesmo em situações extremas de catástrofes naturais cíclicas, após essa ocorrência, a tendência é uma volta ao ritmo anterior. Um estudo sério e plausível dos órgãos responsáveis por avaliar o impacto desse crescimento nas diversas áreas afetadas pelo aumento contínuo da população pode em curto, médio e, principalmente, longo prazo obter soluções mais adequadas e bastante exequíveis para melhorar a qualidade de vida e melhor direcionar soluções para os problemas resultantes do aumento.

Acredito que a apresentação desse trabalho pode contribuir de alguma maneira para que estudantes secundaristas e universitários percebam uma abordagem simples, e ao mesmo tempo técnica, para uma aplicação lógica e importante no contexto social que envolve a matemática ensinada em sala de aula

Capítulo 6

Bibliografia

1 - ALMEIDA, Maurício de – Geografia Global 2 – São Paulo: Escala Educacional, 2010.

2 - VERHULST, P. F. (1838). Noticesurlaloi que La population suitdansso naccroissement. Correspondance Mathématique etPhysique, 10, 113-121.

3 - VERHULST, P. F. (1845). Recherches mathématiques surlaloi d'accroissement de lapopulation. Nouveaux mémoires de l'Académie Royaledes Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, 18, 1-41.

4 - VERHULST, P. F. (1846). Note surlaloi d'accroissement de lapopulation. Bulletins de l'AcadémieRoyaledesSciences, desLettres et desBeaux-Arts de Belgique, 13, 226-227.

5 - VERHULST, P. F. (1847). Deuxième mémoiresur La loi d'accroissement de lapopulation. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences dês Lettres et desBeaux-Arts de Belgique, 20, 1-32

6 - OLIVEIRA, C. F. (2011). Modelagem Matemática do Crescimento Populacional: Um olhar à luz da Socioepistemologia. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

7 - BASSANEZI, R. Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática. 5. ed. Rio de Janeiro: Contexto, 2002.

8 - BASSANEZI, R.; JR., W. F. Equações Diferenciais com Aplicações. São Paulo: Editora Harbra, 1988.

9 - CIPOLLI, V. G. Sistemas Dinâmicos Discretos - Análise de Estabilidade. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho - IGCE - Rio Claro/SP, 2011.

10 - LUCCI, Elian Alabi - Território e sociedade no mundo globalizado: Geografia: ensino médio. Vol 3 - 1ed. - São Paulo: Saraiva, 2010.

11 - VIANA, Nildo, A teoria da população em Marx, Boletim Goiano de Geografia, 26 (2), 88-102.

12 - Endereço eletrônico https://www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html