INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

NATHERCIA CUSTODIO RODRIGUES

ALGUMAS QUESTÕES SOBRE FRAÇÕES

Rio de Janeiro

2018

NATHERCIA CUSTODIO RODRIGUES

ALGUMAS QUESTÕES SOBRE FRAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado apresentada para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira

RIO DE JANEIRO

2018

NATHERCIA CUSTODIO RODRIGUES

ALGUMAS QUESTÕES SOBRE FRAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado apresentada para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

Aprovada em ____ / ____ / _____.

BANCA EXAMINADORA

____

Orientador: Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira - IMPA

____

Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro Moraes Felinto de Oliveira - IMPA

____

Prof. Dr. Sergio Augusto Romaña Ibarra - UFRJ

DEDICATÓRIA

Ao meu pai (in memorian) e minha mãe.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todas as oportunidades e pessoas que colocou em meu caminho.

Ao professor Carlos Gustavo, por aceitar ser meu orientador, por todos seus ensinamentos e sugestões.

Ao colega de mestrado Leonardo, pelo companheirismo e incentivo durante toda a jornada.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo sugerir conteúdos e questões sobre frações, num aspecto além do trivial visto nos ensinos fundamental e médio. Apesar disso, pretende-se que tais assuntos e suas respectivas atividades sejam exploradas a partir do 7º ano do ensino fundamental. As questões abordadas, em sua maioria, foram retiradas de Olimpíadas de Matemática.

Palavras–chave: Números Racionais, Sequências de Farey, Olimpíadas de Matemática

ABSTRACT

This work aims to suggest contents and questions of fractions, in na aspect beyoun the trivial seen in elementar, middle school and high schools. Nevertheless, it is intended that such subjects and their respective actities are explored from the 7th year of elementary school. Most of the issues raised were taken from the Mathematics Olympiads.

Keywords: Rational Numbers, Farey Sequences, Mathematics Olympiads.

SUMÁRIO

Nº da página

1. Introdução

O presente trabalho visa mostrar, além da teoria clássica, aspectos mais sofisticados relacionados a frações. Abordaremos uma matemática em nível mais elevado e interessante, em problemas envolvendo o assunto, bem diferente do que é visto na educação básica. Apesar disso, algumas das questões serão voltadas para o ensino médio, procurando-se mostrar ser possível iniciar este trabalho com tais alunos, além de inserir questões mais elementares, voltadas para o ensino fundamental, com o intuito de despertar a curiosidade e o interesse por um estudo mais aprofundado da matemática.

Para isso, em um primeiro momento no capítulo 2, faremos um breve histórico sobre frações e citaremos alguns tópicos do assunto, presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais e nos Descritores para a Prova Brasil. Além disso, no mesmo capítulo, falaremos um pouco sobre Frações Equivalentes e Frações Irredutíveis, numa abordagem formal. São tópicos necessários aos conteúdos dos demais capítulos e consideraremos que os alunos já operem com as frações de maneira satisfatória. No capítulo 3, daremos ênfase ao conjunto dos números racionais, onde serão abordados itens mais aprofundados, tais como as Sequências de Farey, Circunferências de Ford e Árvore de Stern-Brocot. No capítulo 4, serão vistas as Frações Contínuas e a expansão de números racionais de tais frações. Por fim, nos capítulos 5 e 6, problemas envolvendo tais questões e as considerações finais, respectivamente.

2. Frações

2.1 A ideia de fração

O significado do termo fração é

1. Ato ou efeito de dividir, romper, partir, quebrar: a fração do pão.
2. Porção de um todo, em relação a ele.

E em relação à Matemática: “Expressão que indica uma ou mais partes da unidade ou inteiro dividido em partes”.[1]

2.1.1. Breve histórico das frações

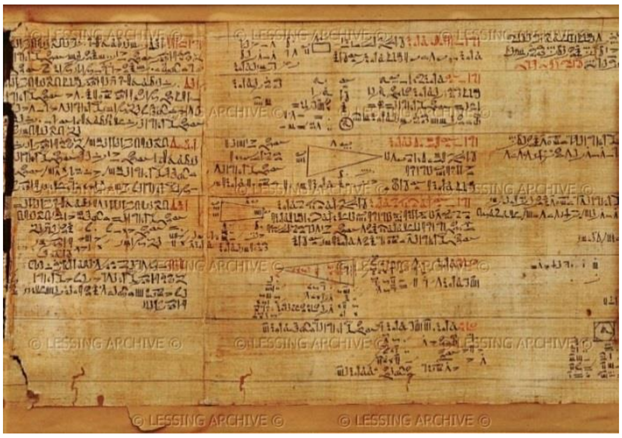
De acordo com diversas fontes históricas, as frações surgiram há mais de 3000 anos, no antigo Egito, em decorrência de problemas do dia a dia que envolviam medidas.

Segundo Boyer (1998), os homens da Idade da Pedra não faziam uso de frações, mas com o avanço das culturas na Idade do Bronze, parece ter surgido a necessidade tanto do conceito como de uma notação para as frações.

Muito provavelmente, tal necessidade possa ter decorrido devido às enchentes do rio Nilo, que levavam as marcações das terras à sua margem. Para remarcá-las, usavam-se cordas e registravam-se quantas vezes essa unidade de medida estava contida no terreno. Na maioria das vezes essa medida não era um número inteiro, o que fez surgir um novo conceito de número, no caso, o número fracionário.

No mais extenso papiro egípcio de natureza matemática, conhecido por Papiro Rhind e por vezes, de Papiro Ahmes, em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 A.C, tem-se uma noção de como lidavam com as frações.

Figura 1 – Papiro Rhind



Fonte: http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm. Acesso em: 08/12/2017.

[1] ACADEMIA BRASILEIRA DE LETRAS. Dicionário Escolar da Língua Portuguesa. 2 ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2008. p.604.

> Os egípcios esforçaram-se para evitar algumas das dificuldades computacionais encontradas com frações representando-as, com exceção de 2/3, como soma das frações chamadas *unitárias*, ou seja, aquelas de numerador igual a 1. Essa redução tornava-se possível graças ao emprego de tábuas que davam a representação desejada para frações do tipo $2/n$, as únicas necessárias devido à natureza diádica da multiplicação egípcia. Os problemas do papiro Rhind são precedidos de uma dessas tábuas para todos os ímpares *n* de 5 a 101. Assim, encontramos $2/7$ expresso como $1/4+1/28$, $2/97$ como $1/56+1/679+1/776$ e $2/99$ como $1/66+1/198$. (EVES, 1997, p.73)

2.1.2. Parâmetros Curriculares Nacionais e Descritores da Prova Brasil

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental 3º e 4º ciclos sugerem o uso de problemas históricos envolvendo medidas no ensino dos números racionais.

> Pode-se discutir com os alunos, por exemplo, que os egípcios já usavam a fração por volta de 2000 a.C. para operar com seus sistemas de pesos e medidas e para exprimir resultados. Eles utilizavam apenas frações unitárias (frações de numerador 1), com exceção de $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Assim, numa situação em que precisavam dividir 19 por 8 eles utilizavam um procedimento que na nossa notação pode ser expresso por $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. A partir dessa situação pode-se propor aos alunos que mostrem que essa soma é $\frac{19}{8}$, que encontrem outras divisões que podem ser determinadas por soma de frações unitárias e que pesquisem outros problemas históricos envolvendo os números racionais. (BRASIL, 1998, p. 101-102)

Ainda segundo os PCN´s, no cálculo com os números racionais e na comparação de tais números, é fundamental ter-se o conceito de equivalência e conhecimento sobre os procedimentos para a obtenção de frações equivalentes.

(PDE, 2011, p.153) Dentre os descritores de matemática na Matriz de Referência da Prova Brasil, as frações aparecem na prova do 9º ano da seguinte forma

> D22 – Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.
>
> D23 – Identificar frações equivalentes.

2.2 Frações Equivalentes

Duas ou mais frações são ditas equivalentes quando representam a mesma quantidade de um todo. E uma das grandes dificuldades que os alunos apresentam, é justamente a de perceber que existem infinitas representações fracionárias para indicar uma mesma quantidade e como escrevê-las.

Vejamos abaixo formalmente, uma abordagem do assunto, a partir da construção dos números racionais.

Seja $Z^* = \{m \in Z / m \neq 0\}$ e consideremos sobre $Z \times Z^* = \{(m,n) / m \in Z, n \in Z^*\}$ a relação ~ definida por

Para quaisquer (m,n), (p,q) $\in Z \times Z^*$, (m,n) ~ (p,q) se e somente se, mq = np.

A relação ~ definida acima é uma relação de equivalência sobre $Z \times Z^*$, ou seja, ela é

Reflexiva: (m,n) ~ (m,n)

Simétrica: (m,n) ~ (p,q) $\Rightarrow$ (p,q) ~ (m,n)

Transitiva: (m,n) ~ (p,q) e (p,q) ~ (s,t) $\Rightarrow$ (m,n) ~ (s,t)

Prova: Reflexiva: Seja (m,n) $\in Z \times Z^*$. É claro que (m,n) ~ (m,n), pois m.n = n.m, de acordo com a propriedade comutativa da multiplicação em Z.

Simétrica: Sejam (m,n), (p,q) $\in Z \times Z^*$. Se (m,n) ~ (p,q) então, por hipótese, m.q = n.p. Pela propriedade simétrica dos números inteiros, podemos escrever n.p = m.q e pela propriedade comutativa, que p.n = q.m. Logo, (p,q) ~ (m,n).

Transitiva: Sejam (m,n), (p,q) e (s,t) $\in Z \times Z^*$ tais que (m,n) ~ (p,q) e (p,q) ~ (s,t). Então, por hipótese, m.q = n.p (I) e p.t = q.s (II). Multiplicando (I) por s e (II) por m, obtemos m.q.s = n.p.s e m.p.t = m.q.s. Sendo assim, n.p.s = m.p.t Como p $\in Z^*$, segue, pela lei do cancelamento da multiplicação, que n.s = m.t. Portanto, (m,n) ~ (s,t).

A relação ~ determina em $Z \times Z^*$ uma partição[2] em classes de equivalência. Um elemento (m,n) $\in$ $Z \times Z^*$ pertencerá à classe de equivalência representada por $\frac{m}{n}$, como exposto abaixo

$$(\mathrm{m,n}) \in \frac{m}{n} = \{(x,y) \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}^* \,/\, (\mathrm{x,y}) \sim (\mathrm{m,n})\} = \{(x,y) \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}^* \,/\, \mathrm{nx} = \mathrm{my}\}$$

Por exemplo: $\frac{1}{3} = \{(x,y) \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}^* \,/\, (\mathrm{x,y}) \sim (1,3)\} = \{(x,y) \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}^* \,/\, 3\mathrm{x} = \mathrm{y}\} =$ $\{(1,3); (-1,-3); (2,6); (-2,-6); \ldots\}$, ou seja, $\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3} = \frac{2}{6} = \frac{-2}{-6} = \ldots$

O conjunto formado por todas as classes de equivalência determinadas pela relação ~ sobre $Z \times Z^*$, nada mais é que o conjunto dos números racionais Q definido a seguir Q = $\left\{\frac{m}{n} / (m,n) \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}^*\right\}$. Desse modo, cada número racional pertencente a Q possui inúmeras formas de representação $\frac{m}{n}$, com m $\in$ Z e n $\in$ Z^*.

2.3. Frações Irredutíveis

Definição: Uma fração $\frac{m}{n}$ é dita irredutível quando m e n forem relativamente primos.

Lema: A única maneira de duas frações irredutíveis e de denominadores positivos serem equivalentes é serem idênticas.

Prova: Sendo $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, com ambas irredutíveis e de denominador positivo, a equivalência nos dá mq = np, e como m é relativamente primo com n, o Teorema Básico da

[2] Qualquer coleção C de subconjuntos não vazios de um conjunto X, que possui a seguinte propriedade: todo elemento de X pertence a um e apenas um dos elementos de C.

Divisibilidade[3] nos dá que p divide m. Como ambos n e q são positivos, segue então que m = p e isso implica que n = q.

Teorema: Todo número racional $\frac{m}{n}$, pode ser escrito, de modo único como uma fração irredutível, ou seja, na forma $\frac{p}{q}$, onde $mdc(p,q)=1$ e $q>0$.

Prova: Seja $\frac{m}{n} \geq 0$ um número racional. Considerando as decomposições em fatores primos dos números naturais m e n, tomemos o produto dos fatores comuns em tais decomposições. Chamemos de k tal produto. Dessa forma, $\frac{m}{n} = \frac{km´}{kn´} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{m´}{n´}$, com m´ e n´ primos entre si. Portanto, $\frac{m´}{n´}$ é uma fração irredutível.

Suponhamos que exista outra fração irredutível $\frac{p}{q}$, com $\frac{p}{q} = \frac{m´}{n´}$. $\frac{p}{q} = \frac{m´}{n´} \Rightarrow$ $qm´ = pn´$. Assim, $q \mid pn´ \Rightarrow q \mid n´$ (pois $mdc(p,q)=1$) e $n´ \mid qm´ \Rightarrow$ n´|q (pois $mdc(m´,n´)=1$). Logo, $q = n´$.

3. Números Racionais

3.1. Definição.

Chamamos de número racional a classe de todas as frações equivalentes a uma dada fração. O conjunto de todos os números racionais é simbolizado por $\mathbb{Q}$ $= \left\{ \frac{m}{n} / (m,n) \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}^* \right\}$.

Observação: Um número racional r dado por uma fração $\frac{a}{b}$ é igual a um racional s dado por uma fração $\frac{c}{d}$ se, e somente se, tivermos que essas duas frações são equivalentes.

$$r = s \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

[3] c|ab e mdc(a,c) = 1 $\Rightarrow$ c|b

3.2. Sequências de Farey

Definição: Uma sequência de Farey de ordem n, denotada por F_n, é a sequência finita de todas as frações irredutíveis do intervalo fechado [0,1], ordenadas de forma crescente, cujos denominadores são menores ou iguais a n. Numa linguagem matemática, F_n é a sequência de todas as frações irredutíveis $\frac{a}{b}$ tais que $0 \le \frac{a}{b} \le 1;\ 0 \le b \le n$, em ordem crescente.

$$\frac{0}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n-1},\frac{1}{n-2},\ldots,\frac{n-2}{n-1},\frac{2}{n},\frac{2}{n-1},\ldots,1$$

Alguns exemplos

F_1	$\frac{0}{1}$																		$\frac{1}{1}$
F_2	$\frac{0}{1}$									$\frac{1}{2}$									$\frac{1}{1}$
F_3	$\frac{0}{1}$						$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$						$\frac{1}{1}$
F_4	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$				$\frac{1}{1}$
F_5	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$			$\frac{1}{1}$
F_6	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$		$\frac{1}{1}$
F_7	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{1}$

Imagem feita no geogebra

Algumas observações podem ser feitas a partir desta visualização das primeiras sete sequências de Farey.

- Primeiro: nota-se que o termo central em qualquer uma das sequências é sempre igual a $\frac{1}{2}$.

Isto deve-se ao próprio modo de construção da sequência, fazendo com que tenhamos o mesmo número de elementos à direita e à esquerda de $\frac{1}{2}$.

- Segundo: O que podemos notar em relação a frações equidistantes do termo central $\frac{1}{2}$?

Pode-se reparar que os pares de frações equidistantes de $\frac{1}{2}$ possuem o mesmo denominador e a soma de tais frações é sempre igual a 1.

Em $F_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\} \rightarrow \frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$ são equidistantes de $\frac{1}{2}$ e sua soma é $\frac{0}{1}+\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=1$

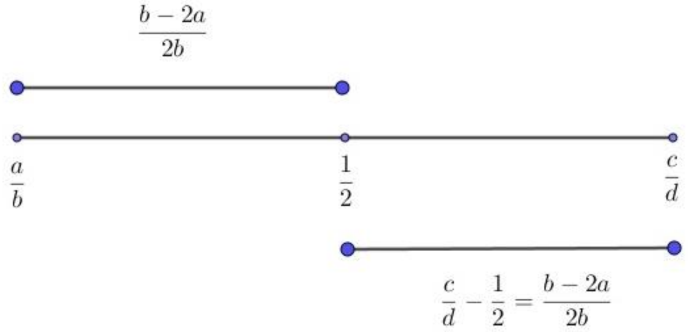
$\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ são equidistantes de $\frac{1}{2}$ e sua soma é $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$

$F_4 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\} \rightarrow \frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$ são equidistantes de $\frac{1}{2}$ e sua soma é $\frac{0}{1}+\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=1$

$\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ são equidistantes de $\frac{1}{2}$ e sua soma é $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$

$\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ são equidistantes de $\frac{1}{2}$ e sua soma é $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1$

De fato, seja $\frac{a}{b}$ um termo de uma sequência onde $\frac{a}{b}<\frac{1}{2}$. A distância entre essas duas frações é dada por $\frac{1}{2}-\frac{a}{b}=\frac{b-2a}{2b}$. Tomando uma fração $\frac{c}{d}$ à direita de $\frac{1}{2}$, devemos ter que a distância entre $\frac{c}{d}$ e $\frac{1}{2}$ é a mesma entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{c}{d}=\frac{1}{2}+\frac{b-2a}{2b} \Rightarrow \frac{c}{d}=\frac{2(b-a)}{2b}=\frac{b-a}{b}$.



Somando $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$: $\frac{a}{b}+\frac{b-a}{b}=\frac{a+b-a}{b}=\frac{b}{b}=1$.

Portanto, a soma de quaisquer duas frações equidistantes de $\frac{1}{2}$ é sempre 1.

Terceiro: Será que existe uma forma de calcular a soma de todas as frações de uma certa sequência, sem enumerar seus elementos?

Do que foi visto acima, em qualquer sequência F_n, temos $\frac{1}{2}$ como termo central e à sua direita e à sua esquerda, o mesmo número de termos. Além disso, sabemos que termos equidistantes de $\frac{1}{2}$ têm soma igual a 1. Logo, a soma dos n termos de F_n será igual a $\frac{1}{2}+\frac{N_n-1}{2}=\frac{N_n}{2}$.

Com isso, nos vem mais uma pergunta: Como saber o número de termos de uma sequência? Vejamos a seguir.

3.2.1 Número de Termos

Abaixo, temos uma propriedade que nos permite encontrar o número total de frações de uma sequência de Farey. Ela não é indicada para valores muito grandes de N, mas, para o proposto no trabalho, com alunos de Ensino Fundamental e Médio, será o suficiente.

Consideremos N_n o número de termos de uma sequência de Farey F_n.

Como o número de termos à direita de $\frac{1}{2}$ é o mesmo que à esquerda, concluímos que o número total de frações será um número ímpar.

Além disso, sabendo-se que todas as frações $\frac{a}{b}$ tais que $0 \le \frac{a}{b} \le 1$ e $0 \le b \le n$ pertencentes à tal sequência estão na forma irredutível, podemos concluir que MDC(a,b) = 1. Portanto, para saber o número de frações de uma dada sequência de ordem n, basta determinar, para cada denominador b ≤ n, quantos são os numeradores a, onde 1 ≤ a ≤ b e tal que MDC(a,b) = 1. Designando por φ(b) essa quantidade, podemos escrever

φ(b) = $\left|\{1 \le i \le b : m.d.c(i,b)=1\}\right|$, onde, para um conjunto X, |X| representa o seu cardinal.

Exemplificando para o caso de n = 5, obteremos

φ(1) = 1;

φ(2) = 1 pois m.d.c(1,2) = 1;

φ(3) = 2 pois m.d.c(i,3) = 2 onde 1 ≤ i ≤ 3, ou seja, apenas 1 e 2 são primos com 3;

φ(4) = 2 pois m.d.c(i,4) = 2 onde 1 ≤ i ≤ 4, ou seja, apenas 1 e 3 são primos com 4;

φ(5) = 4 pois m.d.c(i,5) = 4 onde 1 ≤ i ≤ 5, ou seja, temos 1, 2, 3 e 4 primos com 5;

Assim, N_5 = 1 + φ(1) + φ(2) + φ(3) + φ(4) + φ(5) = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 4 = 11.

Em geral, para n ≥ 1, $N_n = 1+\sum_{b=1}^{n}\varphi(b)$.

Nota: É possível provar que N_n é, assintoticamente, $\frac{3}{\pi^2} \cdot n^2$, ou seja, $\lim_{n \to \infty} \frac{N_n}{n^2} = \frac{3}{\pi^2}$. Veja [7], Proposição 5.27.

3.2.2. Construção

Antes de enunciar o processo de construção, vejamos uma definição para o termo mediante.

Definição 1. Dadas duas frações irredutíveis $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, chamaremos de mediante a fração $\frac{a+c}{b+d}$.

As sequências podem ser construídas partindo-se das frações $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$, que formam a primeira sequência de Farey. A partir daí, deve-se introduzir a fração mediante de cada par de frações consecutivas, tendo o cuidado de não incluir frações em que o denominador ultrapasse a ordem da sequência.

Propriedade 1: Se $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ são frações irredutíveis então a fração mediante $\frac{a+c}{b+d}$ satisfaz a condição $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Prova: Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ frações irredutíveis, com $a,b,c,d \in Z_0^+$ e suponhamos que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Devemos mostrar que valem as duas desigualdades,

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \text{ e } \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Temos que $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c)-a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0$ pois $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

Do mesmo modo

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c)-a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0.$$

Portanto, $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

3.2.3. Teorema (termos consecutivos)

Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são termos consecutivos numa sequência de Farey então $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd}=\frac{1}{bd}$, isto é, $bc-ad=1$.

Prova: Seja a sequência de Farey $\frac{0}{1}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{p}{q}, \frac{r}{s}, \ldots, \frac{\text{n - 1}}{\text{n}}, \frac{1}{1}$, com $mdc(p,q)=mdc(r,s)=1$. Tomemos as frações consecutivas $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$. Queremos provar que $\frac{r}{s}-\frac{p}{q}=\frac{1}{qs}$, isto é, $qr-ps=1$.

Para isso, devemos encontrar racionais $\frac{u}{v}$ com $\frac{u}{v}-\frac{p}{q}=\frac{1}{qv}$, o que equivale a $qu-pv=1$.

Sendo $mdc(p,q)=1 \Rightarrow \exists\, x_0, y_0 \in Z$ tal que $qx_0-py_0=1$. Então, $qu-pv=1 \Leftrightarrow qu-pv=qx_0-py_0 \Leftrightarrow q(u-x_0)=p(v-y_0)$. Daí, $q \mid p(v-y_0)$ e, como $mdc(p,q)=1$, $q \mid (v-y_0)$, ou seja, $v-y_0=k\cdot q \Rightarrow v=y_0+k\cdot q$. Sendo assim, $\exists\, k\in Z$, donde $q(u-x_0)=p(v-y_0)=p\cdot kq \Rightarrow u-x_0=k\cdot p$ e $u=x_0+k\cdot p$.

Logo, as soluções de $qu-pv=1$ devem ser da forma $(u,v)=(x_0+k\cdot p, y_0+k\cdot q)$, $k\in Z$.

Existe um (único) $k\in Z$ tal que $0<y_0+k\cdot q\leq q$. Seja $v=y_0+k\cdot q$, $0<v\leq q$; $qu-pv=1 \Rightarrow qu=1+pv\leq(p+1)v\leq qv \quad \left(pois, como\ \frac{p}{q}<\frac{r}{s}\leq 1, p<q\right)$.

Sabemos que $qu-pv=1$; se $v=0$ então $qu=1$, donde $q=u=1$. ABSURDO! , pois $q>1$. Sendo assim, devemos ter $0<v<q$, $0<u\leq q$.

$$\frac{p}{q}<\frac{u}{v},\ \frac{u}{v}-\frac{p}{q}=\frac{1}{qv}$$

Seja (u,v) solução de $\frac{u}{v}-\frac{p}{q}=\frac{1}{qv}$. Então, $\frac{u'}{v'}-\frac{p}{q}=\frac{1}{qv'}$, $u',v'>0 \Leftrightarrow u'=u+r\cdot p$, $v'=v+r\cdot q$, $r\geq 0$.

Como $s>0$, $\exists\, t\in N$ tal que $v+(t-1)q<s\leq v+tq$.

$\frac{p}{q}<\frac{r}{s}$; se $qr-ps=d>1$

$$\frac{r}{s}-\frac{p}{q}=\frac{qr-ps}{qs}>0$$

$\frac{r}{s}-\frac{p}{q}=\frac{d}{qs}$, onde $d=qr-ps>0$.

Suponha, por absurdo, que $d\neq 1$.

Se $t = 0$, temos $s \le v$, donde $\frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{d}{qs} > \frac{1}{qs} \ge \frac{1}{qv} = \frac{u}{v} - \frac{p}{q}$, logo $\frac{r}{s} > \frac{u}{v} > \frac{p}{q}$, e $v < q \le n$, ABSURDO!

Assim, $t \ge 1$ e $s > v + (t-1)q \ge v$.

$\frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{d}{qs}$

$\frac{u}{v} - \frac{p}{q} = \frac{1}{qv}$, e, como $\frac{p}{q} < \frac{r}{s} < \frac{u}{v}$, temos $\frac{1}{qv} > \frac{d}{qs}$, donde $s > dv$.

Temos que $qr - ps = d = d \cdot 1$. Mas $qu - pv = 1$, então, substituindo 1 por $qu - pv$ obtemos $qr - ps = d \cdot (qu - pv) = q \cdot (d \cdot u) - p \cdot (d \cdot v)$. Logo, $q \cdot (r - d \cdot u) = p \cdot (s - d \cdot v)$, e, portanto, $s - d \cdot v = m \cdot q$ e $r - d \cdot u = m \cdot p$.

Então, $s = d \cdot v + m \cdot q$ e $r = d \cdot u + m \cdot p$, com $m \ge 1$; $s > v + m \cdot q$

$\frac{p}{q} < \frac{r}{s} < \frac{u}{v}$

$s = d \cdot v + m \cdot q \le n$

Considere $\frac{u + m \cdot p}{v + m \cdot q}$; $v + m \cdot q < s \le n$

$\frac{u + m \cdot p}{v + m \cdot q} - \frac{p}{q} = \frac{q(u + m \cdot p) - p(v + m \cdot q)}{q(v + m \cdot q)} = \frac{qu - pv}{q(v + m \cdot q)} = \frac{1}{q(v + m \cdot q)}$

Afirmação: $\frac{p}{q} < \frac{u + m \cdot p}{v + m \cdot q} < \frac{r}{s}$

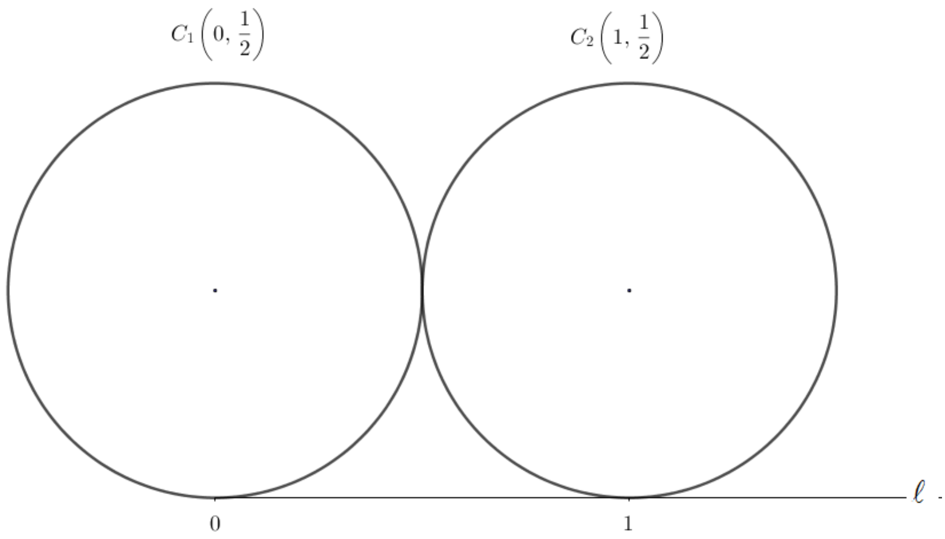
Basta provar que $\frac{d}{qs} = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} > \frac{1}{q(v + m \cdot q)} = \frac{u + m \cdot p}{v + m \cdot q} - \frac{p}{q}$.

Mas isso equivale a $d(v + m \cdot q) > s = dv + m \cdot q \Leftrightarrow d \cdot m \cdot q > m \cdot q \Leftrightarrow d > 1$.

A afirmação está provada, e logo temos uma contradição, o que termina a prova.

3.3 Círculos de Ford

Sejam ℓ a reta $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\right\}$ C_1 o círculo centrado em $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ de raio $\frac{1}{2}$ e C_2 o círculo centrado em $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ de raio $\frac{1}{2}$.



Seja F o conjunto dos círculos em $\mathbb{R}^2$ com as seguintes propriedades:

i) $\{C_1, C_2\} \subset F$

ii) Se C e C' pertencem a F, são tangentes entre si e tangentes a ℓ então o círculo $\tilde{C}$ tangente aos dois círculos C e C' e à reta ℓ pertence a F.

iii) Se $\tilde{F}$ é um conjunto de círculos satisfazendo as propriedades i) e ii) acima então $F \subset \tilde{F}$.

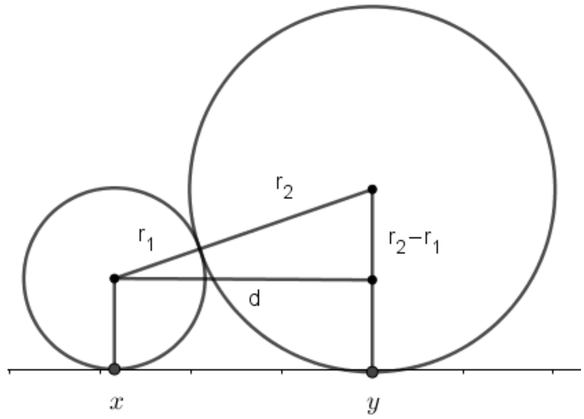
Vamos provar que o conjunto dos pontos de tangência dos círculos $C \in F$ com a reta ℓ é o conjunto $\{(x,0), x \in Q \cap [0,1]\}$.

Prova: Representemos cada racional $x \in [0,1]$ por $\frac{p}{q}$, onde p é inteiro, q é inteiro positivo e $mdc(p,q) = 1$. Mostraremos os seguintes fatos por indução:

i) O círculo tangente em $\left(\frac{p}{q}, 0\right)$ terá raio $\frac{1}{2q^2}$.

ii) Se os círculos tangentes em $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ são tangentes entre si então $|ps - qr| = 1$.

Para isso, notemos que dois círculos centrados em (x, r_1) e (y, r_2) são tangentes à reta ℓ e tangentes entre si então $(r_1 - r_2)^2 + d^2 = (r_1 + r_2)^2 \Rightarrow d^2 = 4r_1r_2 \Rightarrow d = 2\sqrt{r_1r_2}$, onde $d = |x - y|$.



As afirmações i) e ii) são verdadeiras para os círculos iniciais C_1 e C_2. Se o círculo C é tangente a ℓ e tem centro $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$, o círculo C' é tangente a ℓ e tem centro $\left(\frac{r}{s}, \frac{1}{2s^2}\right)$ e $qr - ps = 1$ então, se o círculo $\tilde{C}$ tangente a C e C' e à reta ℓ tem centro (x, y) com $\frac{p}{q} < x < \frac{r}{s}$ então, se $d' = x - \frac{p}{q}$ e $d'' = \frac{r}{s} - x$, devemos ter $d' = \frac{2}{q}\sqrt{\frac{y}{2}}$ e $d'' = \frac{2}{s}\sqrt{\frac{y}{2}}$, e $d' + d'' = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{1}{qs}$, donde $\frac{2(q+s)}{qs}\sqrt{\frac{y}{2}} = \frac{1}{qs} \Rightarrow y = \frac{1}{2(q+s)^2}$ e $d' = \frac{1}{q(q+s)} \Rightarrow x = \frac{p}{q} + d' = \frac{p(q+s)+1}{q(q+s)} = \frac{p+r}{q+s}$ (pois $qr - ps = 1$). Assim, $\tilde{C}$ é tangente em $\left(\frac{p+r}{q+s}, 0\right)$ e tem raio $\frac{1}{2(q+s)^2}$.

Como $q(p+r) - p(q+s) = qr - ps = 1$ e $(q+s)r - (p+r)s = qr - ps = 1$ vemos que $\tilde{C}$ satisfaz i) e ii).

Esses fatos implicam que todos os círculos criados terão centro em pontos racionais. Basta provar agora que para todo racional $\frac{p}{q} \in [0,1]$, o ponto $\left(\frac{p}{q}, 0\right)$ é ponto de tangência de algum dos círculos. Faremos isto por indução em q (para q = 1 o resultado é óbvio); basta mostrar que se $mdc(p,q) = 1$ e $q \geq 2$, é possível escrever $p = p' + p''$ e $q = q' + q''$ com p', p'', q', q'' inteiros, $p', p'' \geq 0$, $q', q'' > 0$ e $q'p'' - p'q'' = 1$.

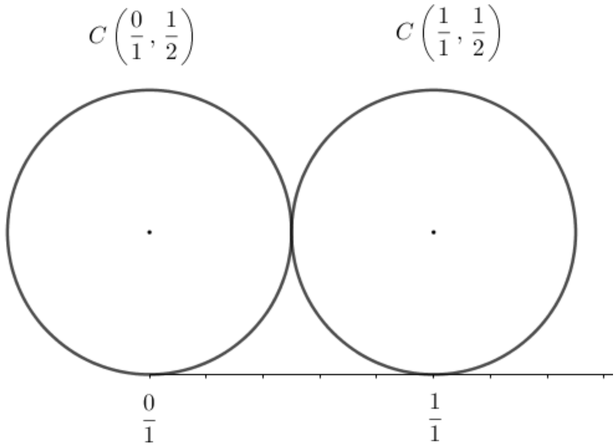
Estas equações podem ser escritas como $q'(p - p') - p'(q - q') = 1$, ou seja, $q'p - p'q = 1$, onde $0 < q' < q$ e $0 \leq p' < p$. Como $mdc(p,q) = 1$, existem $x, y \in \mathbb{Z}$, com $px - qy = 1$. Logo, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $p(x + kq) + q(y - kp) = 1$.

Certamente podemos escolher k de modo que $0 < x + kq < q$ (note que x não é múltiplo de q, senão $1 = px + qy$ também seria), e então tomamos $q' = x - kq$ e $p' = kp - y$ (temos $p' = \frac{pq' - 1}{q}$, mas $1 \leq q' < q$, donde $0 \leq p' < p$).

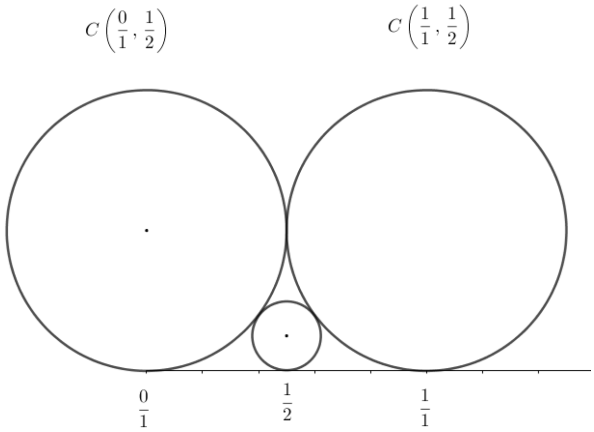
Pelo exposto acima, temos uma notação para os círculos definidos desta forma.

Definição: Dado um número racional irredutível $\frac{a}{b}$, o círculo de Ford correspondente a esta fração é denotado por C(a,b), tem raio $\frac{1}{2b^2}$ e centro $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$.

Abaixo temos os círculos correspondentes aos racionais $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$.

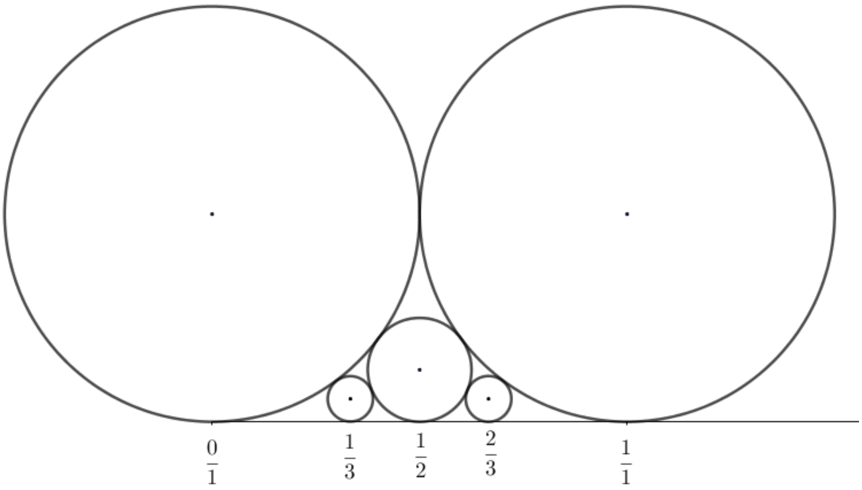


Em seguida, o círculo tangente aos dois iniciais e ao eixo das abscissas, com centro de abscissa $\frac{1}{2}$ e raio $\frac{1}{8}$.



Observemos que o fato ii) "Se os círculos tangentes em $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ são tangentes entre si então $|ps - qr| = 1$", nos remete ao conteúdo anterior, das frações de Farey, onde temos que se $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ são termos consecutivos numa sequência de Farey então $|ps - qr| = 1$.

Logo, círculos de Ford tangentes correspondem a frações de Farey consecutivas.

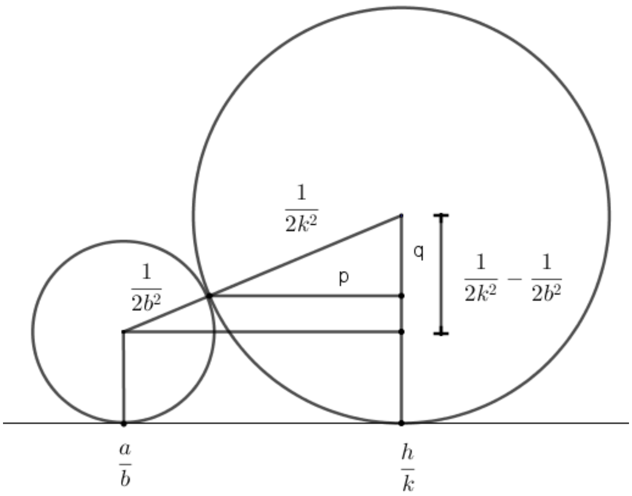


Círculos de Ford tangentes, correspondentes a sequência de Farey $F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$.

O cálculo dos pontos de tangência será visto no teorema seguinte.

Teorema: Sejam $\frac{a}{b} < \frac{h}{k} < \frac{c}{d}$ três frações de Farey de ordem n consecutivas. Os pontos de tangência dos círculos C(a,b) e C(h,k) e dos círculos C(h,k) e C(c,d) são, respectivamente,

$$\alpha_1 = \left(\frac{h}{k} - \frac{b}{k(k^2+b^2)}, \frac{1}{k^2+b^2} \right) \text{ e } \alpha_2 = \left(\frac{h}{k} + \frac{d}{k(k^2+d^2)}, \frac{1}{k^2+d^2} \right)$$



Prova: Conforme a figura acima, tem-se $\alpha_1 = \left(\frac{h}{k} - p, \frac{1}{2k^2} - q\right)$.

Através da semelhança dos triângulos retângulos, determina-se p e q. Primeiro

$$\frac{p}{\frac{h}{k} - \frac{a}{b}} = \frac{\frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2b^2}} = \frac{b^2}{k^2 + b^2}$$

Portanto $p = \frac{b}{k(k^2 + b^2)}$

Usando de novo a semelhança, chega-se à

$$\frac{q}{\frac{1}{2k^2}} = \frac{\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2b^2}}{\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2b^2}} = \frac{b^2 - k^2}{b^2 + k^2}$$

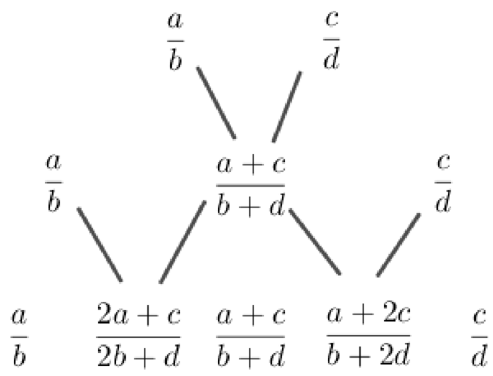
Portanto $q = \frac{1}{2k^2} \frac{b^2 - k^2}{(b^2 + k^2)}$

Substituindo os valores de p e q na expressão de α_1, chega-se na fórmula desejada. De modo análogo obtém-se a fórmula para α_2.

3.4. Árvore de Stern-Brocot

A chamada Árvore de Stern-Brocot foi descoberta primeiramente por Moritz Stern (1858), um professor alemão na área de teoria dos números. Anos mais tarde, Achille Brocot (1861), um relojoeiro francês, desenvolveu um algoritmo capaz de gerar tais números que compõem a árvore.

Sua construção se dá a partir de quaisquer dois números racionais, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, e entre eles o termo $\frac{a+c}{b+d}$, chamado de mediante. O processo continua com a obtenção da mediante entre o primeiro e o segundo número e entre o segundo e o terceiro. E assim sucessivamente.

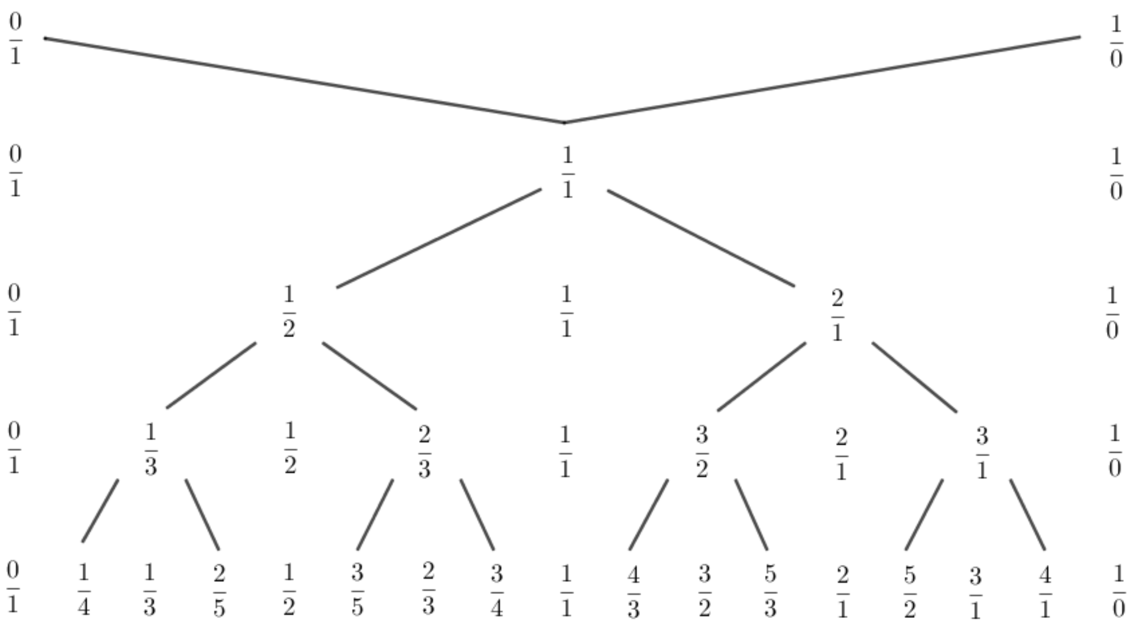


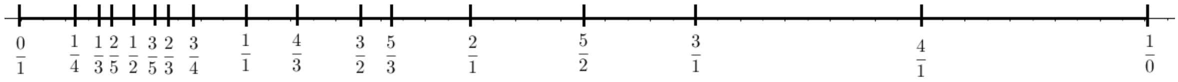
...

A construção da árvore de Stern-Brocot é muito semelhante a da sequência de Farey, diferindo em alguns aspectos. A árvore inclui todos os racionais positivos, não necessariamente no intervalo [0,1] e no n-ésimo passo todas as mediantes estão incluídas, não somente com denominadores menores ou iguais a n.

Vejamos a sua construção.

Tomemos então, as frações $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{0}$ (usando-a, convenientemente para representar o infinito). No primeiro passo será gerada a mediante $\frac{0+1}{1+0}=\frac{1}{1}$. No segundo passo teremos o acréscimo de duas outras mediantes, $\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$ e $\frac{1+1}{1+0}=\frac{2}{1}$. Abaixo, temos um esquema inicial da árvore, com os primeiros racionais gerados e na figura seguinte a localização de tais racionais na reta numérica.





4. Frações Contínuas

O algoritmo de Euclides, em que se usa o método das divisões sucessivas para se encontrar o máximo divisor comum de dois números, é usado para se converter uma fração em fração contínua. No caso, para o cálculo do MDC de dois números inteiros, fazemos sucessivas divisões até que o resto seja zero.

Vejamos:

Dados dois números inteiros a e b, com $a > b$, temos $a = b \cdot q + r$, com $0 \leq r \leq b - 1$ onde a é o dividendo, b o divisor, q o quociente e r o resto.

Sendo $a, b \in \mathrm{N}$, com $a \geq b \geq 0$, segundo o algoritmo de Euclides temos

$$a = q_0 \cdot b + r_0 \quad (0 < r_0 < b);$$

$$b = q_1 \cdot r_0 + r_1 \quad (0 < r_1 < r_0);$$

$$r_0 = q_2 \cdot r_1 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1);$$

$$r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2);$$

$$\vdots$$

$$r_{n-3} = q_{n-1} \cdot r_{n-2} + r_{n-1} \quad (0 < r_{n-1} < r_{n-2});$$

$$r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1}$$

Segue, que se $r_n = 0$, o processo termina, seja na primeira equação ou após certo número de passos, e MDC(a,b)= r_{n-1}.

Cada igualdade (exceto a última) contém a representação de uma soma de um número inteiro com uma fração própria. Fazendo as devidas substituições, obtemos

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{r_0}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{r_3}{r_2}}}}$$

Continuando o processo, obteremos o desenvolvimento de $\frac{a}{b}$ sob a forma de uma fração contínua.

Portanto, dizemos que uma fração contínua simples de ordem n é toda expressão da forma:

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots \cfrac{1}{q_{n-2} + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

onde q_0 é um número inteiro e q_i é um inteiro positivo, para $i = 1,2,...,n$.

Seja a fração $\frac{83}{18}$. Vamos usar o método para calcular m.d.c(83,18).

$$\begin{array}{rcccccc} 83 & = & \mathbf{4} & \times & 18 & + & 11 \\ 18 & = & \mathbf{1} & \times & 11 & + & 7 \\ 11 & = & \mathbf{1} & \times & 7 & + & 4 \\ 7 & = & \mathbf{1} & \times & 4 & + & 3 \\ 4 & = & \mathbf{1} & \times & 3 & + & 1 \\ 3 & = & \mathbf{3} & \times & 1 & + & 0 \end{array}$$

Assim, m.d.c(83,18) = 1 e podemos expressar $\frac{83}{18}$ como uma fração contínua, onde $q_0 = 4, q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 1, q_4 = 1$ e $a_5 = 3$.

$$\frac{83}{18} = 4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

Sendo assim, os números $q_0, q_1, q_2,...$ são chamados de quocientes parciais, pois nada mais são do que os quocientes encontrados nas divisões sucessivas.

5. Problemas

Frações Equivalentes

Problema 1 (COMPETIÇÃO MATEMÁTICA DO RIO GRANDE DO NORTE[4] – 8º e 9º ano – 2015)

Considere os números racionais $a = \frac{124}{421}$, $b = \frac{124124}{421421}$ e $c = \frac{1240124}{4210421}$. É correto afirmar que $a = b = c$? Justifique a sua resposta!

Solução: Temos que $b = \frac{124124}{421421} = \frac{124}{421} \cdot \frac{1001}{1001}$ e $c = \frac{1240124}{4210421} = \frac{124}{421} \cdot \frac{10001}{10001}$, logo, $a = b = c$ pois b e c são equivalentes a a.

Questões sobre Sequência de Farey[5]

Problema 2

Sejam a, b, c, d inteiros não nulos tais que ad – bc = 1. Prove que $\frac{a+b}{c+d}$ é uma fração irredutível.

Solução: Seja $f = mdc(a+b, c+d)$. Assim, $f / a+b$, $f / c+d$.

Temos que $ad - bc = 1$. Somando e subtraindo bd ao primeiro membro da equação, obtemos $ad + bd - bc - bd = 1$.

$$ad + bd - bc - bd = 1 \Rightarrow d(a+b) - b(c+d) = 1.$$

Como $f / a+b$ e $f / c+d$, teremos que $f / 1$. Assim, $f = 1$.

Problema 3.

A sequência F_n de Farey é a sequência de todas as frações irredutíveis $\frac{a}{b}$ com $0 \leq a \leq b \leq n$ arranjados em ordem crescente.

---

[4] http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/wp-content/uploads/2015/10/Prova_N2.pdf

[5] Problemas 2, 3 e 4 foram retirados de POTI – Polo Olímpico de Treinamento - Nível 2, Aula 3. Disponível em: <http://poti.impa.br/uploads/material_teorico/c6aeewhejio8g.pdf >. Acesso em 02/01/2017.
Problemas 5 e 6 : Módulo de Potenciação e dízimas periódicas. Números irracionais e reais, oitavo ano. Portal da Matemática. Disponível em: < https://matematica.obmep.org.br/uploads/material/irracionais.pdf>. Acesso em 02/01/2017.

$F_1 = \{0/1,\ 1/1\}$
$F_2 = \{0/1,\ 1/2,\ 1/1\}$
$F_3 = \{0/1,\ 1/3,\ 1/2,\ 2/3,\ 1/1\}$
$F_4 = \{0/1,\ 1/4,\ 1/3,\ 1/2,\ 2/3,\ 3/4,\ 1/1\}$
$F_5 = \{0/1,\ 1/5,\ 1/4,\ 1/3,\ 2/5,\ 1/2,\ 3/5,\ 2/3,\ 3/4,\ 4/5,\ 1/1\}$
$F_6 = \{0/1,\ 1/6,\ 1/5,\ 1/4,\ 1/3,\ 2/5,\ 1/2,\ 3/5,\ 2/3,\ 3/4,\ 4/5,\ 5/6,\ 1/1\}$

Claramente, toda fração $\frac{a}{b} < 1$ com mdc(a,b) = 1, está em algum F_n. Mostre que se m/n e m´/n´ são frações consecutivas em F_n temos |mn´ – nm´| = 1.

Solução: (Considerando-se que é conhecido o Teorema1)

Se $\frac{m}{n}, \frac{m´}{n´}$ são frações consecutivas, então elas formam um par de Farey e então,

Sendo $\frac{m}{n} < \frac{m´}{n´}$, teremos $m´n - mn´ = 1$.

Ou, sendo $\frac{m´}{n´} < \frac{m}{n}$, teremos $mn´ - m´n = 1 \Rightarrow\ m´n - mn´ = -1$.

Sendo assim, $|mn´ - m´n| = 1$.

Problema 4. (Revista Quantum – Jornal Kvant)

Todas as frações irredutíveis cujos denominadores não excedem 99 são escritas em ordem crescente da esquerda para a direita:

$$\frac{1}{99}, \frac{1}{98}, \ldots, \frac{a}{b}, \frac{5}{8}, \frac{c}{d}, \ldots$$

Quais são as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ em cada lado de $\frac{5}{8}$?

Solução: Ao listarmos todas as frações irredutíveis no intervalo [0,1) com denominadores menores ou iguais a n = 99, duas frações consecutivas $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}\left(\frac{p}{q} < \frac{r}{s}\right)$ são tais que $qr - ps = 1$, ou seja, $\frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{1}{qs}$. Quanto maiores forem os denominadores q e s, menor ficará $\frac{1}{qs}$.

Vamos fixar a fração $\frac{p}{q} = \frac{5}{8}$. Assim, $\frac{r}{s}$ estará mais próximo à sua direita e corresponderá ao maior s possível e menor que 99 tal que existe r com $qr - ps = 1$, ou seja, $8r - 5s = 1$.

Temos que $r = 2$ e $s = 3$é uma solução inteira de tal equação. Logo, a solução inteira geral será dada por $r = 2 + 5t$ (I) e $s = 3 + 8t$ (II), com t inteiro.

Como devemos ter $s = 3 + 8t \leq 99$, a solução da inequação nos dá $t \leq 12$. Substituindo $t = 12$ em (I) e (II), obtemos $r = 2 + 5 \cdot 12 = 62$ e $s = 3 + 8 \cdot 12 = 99$. Logo, $\frac{r}{s} = \frac{62}{99}$.

Além disso, com $\frac{r}{s} = \frac{5}{8}$, o $\frac{p}{q}$ mais próximo à sua esquerda corresponderá ao maior q possível menor ou igual a 99 tal que existe p com $5q - 8p = 1$. Como $q = 5$ e $p = 3$ é solução inteira de $5q - 8p = 1$, a solução inteira geral será dada por $q = 5 + 8t$ e $p = 3 + 5t$, com t inteiro. Para termos $5 + 8t \leq 99$, t deverá ser menor ou igual a 11. Logo, $q = 5 + 8 \cdot 11 = 93$ e $p = 3 + 5 \cdot 11 = 58$. Portanto, $\frac{p}{q} = \frac{58}{93}$.

Por fim, $\frac{c}{d} = \frac{r}{s} = \frac{62}{99}$ e $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} = \frac{58}{93}$.

Problema 5.

A sequência F_n de Farey é uma sequência de conjuntos formados pelas frações irredutíveis $\frac{a}{b}$ com $0 \leq a \leq b \leq n$ arranjados em ordem crescente. Exibimos abaixo os quatro primeiros termos da sequência de Farey.

$F_1 = \{0/1,\ 1/1\}$
$F_2 = \{0/1,\ 1/2,\ 1/1\}$
$F_3 = \{0/1,\ 1/3,\ 1/2,\ 2/3,\ 1/1\}$
$F_4 = \{0/1,\ 1/4,\ 1/3,\ 1/2,\ 2/3,\ 3/4,\ 1/1\}$

Qual deve ser o conjunto F_5?

Solução: $F_5 = \{0/1,\ 1/5,\ 1/4,\ 1/3, 2/5,\ 1/2,\ 3/5,\ 2/3,\ 3/4,\ 4/5,\ 1/1\}$

Problema 6.

É possível mostrar que se duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são vizinhas na sequência de Farey F_n (veja o exercício anterior) então ad – bc = ±1. Sabendo disso, você consegue determinar que a fração $\frac{a}{b}$ está imediatamente à esquerda de $\frac{5}{7}$ em F_7 sem calcular todos os seus elementos?

Solução: A partir do enunciado, devemos ter

$5b - 7a = 1$ (I) ou $5b - 7a = -1 \Rightarrow 7a - 5b = 1$ (II) .

Para (I) temos b = 3 e a = 2 como uma solução e em (II) a = 3 e b = 4.

Como $\frac{a}{b}$ deve ser menor ou igual a $\frac{5}{7}$, a única solução possível é $\frac{2}{3}$.

Problema 7 (X ORM[6] – 2ª fase de 2007, nível 3)

A sequência de Farey é uma sequência de frações entre 0 e 1 construída com as seguintes etapas:

(1) $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1}$

(2) $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1}$

(3) $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1}$

(4) $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{1}$

e assim por diante, sempre tomando duas frações vizinhas $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ e inserindo-se entre elas a fração $\frac{p+r}{q+s}$. Mostre que em qualquer etapa da construção da sequência de Farey quaisquer duas frações vizinhas $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ satisfazem ps – qr = - 1 .

<u>*Nota*</u>: Aqui a definição de sequência de Farey é diferente da usual, correspondendo a um nível da árvore de Stern-Brocot.

Solução: A afirmação é verdadeira na linha 1: 1.1 – 1.0 = 1 e na linha 2: 1.1 – 0.2 = 1 e 2.1 – 1.1 = 1.

Suponhamos que ela seja verdadeira para quaisquer duas frações vizinhas da linha n.

Tomemos então, duas frações vizinhas da linha n + 1. Elas serão da forma $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_n + r_n}{q_n + s_n}$ ou $\frac{p_n + r_n}{q_n + s_n}$ e $\frac{r_n}{s_n}$, onde $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{r_n}{s_n}$ são duas frações vizinhas da linha n.

[6] Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina. http://www.orm.mtm.ufsc.br/provas.php

Pela hipótese de indução vale $p_n s_n - q_n r_n = -1$. Então, no caso de $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_n + r_n}{q_n + s_n}$ serem vizinhas, obtemos $p_n(q_n + s_n) - q_n(p_n + r_n) = p_n s_n - q_n r_n = -1$.

Da mesma forma, se $\frac{p_n + r_n}{q_n + s_n}$ e $\frac{r_n}{s_n}$ forem vizinhas, obtemos

$$s_n(p_n + r_n) - r_n(q_n + s_n) = p_n s_n - q_n r_n = -1.$$

Portanto, por indução, a afirmação é válida para qualquer linha n.

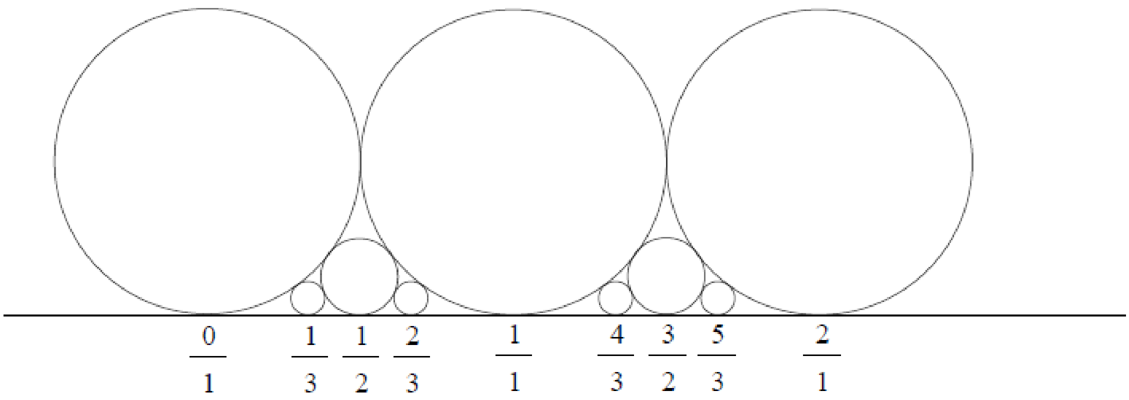
Questões sobre Círculos de Ford

Problema 8 (OPM[7] – 1ª e 2ª séries do Ensino Médio - 2004)

Chamamos de sequência de Farey de ordem n a sequência obtida quando escrevemos em ordem crescente as frações irredutíveis, com denominador menor ou igual a n, localizadas no intervalo [0,1]. Por exemplo, a sequência de Farey de ordem 6 é

$$\frac{0}{1},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},1$$

Lester R. Ford criou uma interpretação geométrica para as sequências de Farey: tangenciando cada número racional não negativo $\frac{p}{q}$, sendo p e q primos entre si, construímos uma circunferência de diâmetro $\frac{1}{q^2}$. Algumas dessas circunferências, que são denominadas circunferências de Ford, são mostradas na figura a seguir.



(a) Verifique que as circunferências que tocam os pontos $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{1}$ são tangentes.

7 www.opm.mat.br/provas

Solução: Pelo enunciado, temos que a circunferência que toca o ponto $\frac{1}{2}$ tem raio $\frac{1}{8}$ e centro $C_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$ e a que toca o ponto $\frac{1}{1}$ tem raio $\frac{1}{2}$ e centro $C_2\left(\frac{1}{1},\frac{1}{2}\right)$. Basta mostrar que a distância D entre os centros é igual à soma S dos raios.

$$D^2 = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)^2 \Rightarrow D^2 = \frac{1}{4}+\frac{9}{64} = \frac{25}{64} \Rightarrow D = \frac{5}{8}$$

$$S = \frac{1}{2}+\frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Logo, S = D, como queríamos mostrar.

(b) Mostre que as circunferências que tocam os pontos da forma $\frac{1}{q}$ são tangentes à circunferência que toca o ponto $\frac{0}{1}$.

Solução: Para que as circunferências sejam tangentes, a distância entre os centros deverá ser igual à soma dos raios.

$$D^2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2q^2}\right)^2 + \left(\frac{0}{1}-\frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow D^2 = \frac{1}{4}-\frac{1}{2q^2}+\frac{1}{4q^4}+\frac{1}{q^2} = \frac{q^4+2q^2+1}{4q^4} = \frac{(q^2+1)^2}{4q^4}.$$

Logo, $D = \frac{q^2+1}{2q^2}$.

A soma dos raios é $S = \frac{1}{2}+\frac{1}{2q^2} = \frac{q^2+1}{2q^2}$.

Então, D = S, como queríamos mostrar.

Problema 9 (Vestibular de Inverno UEM[8] – 2011).

Dados números inteiros p e q de forma que a fração $\frac{p}{q}$ seja irredutível, e considerando um sistema de coordenadas cartesianas xOy, o círculo de centro no ponto $\left(\frac{p}{q},\frac{1}{2q^2}\right)$ e raio $\frac{1}{2q^2}$ é chamado de círculo de Ford e é representado por C[p,q]. Com base no exposto, assinale o que for **correto**.

[8] http://www.vestibular.uem.br/2011-I/uemI2011p3g1Matematica.pdf

01) A área de C[p,q] é $\dfrac{1}{16q^4}$.

02) Nenhum círculo de Ford tangencia o eixo das abscissas.

04) A equação cartesiana da circunferência que delimita C[1,2] pode ser escrita como $x^2 + y^2 - x - \dfrac{y}{4} = -\dfrac{1}{4}$.

08) Se dois círculos de Ford, com centros nos pontos M e N, com M ≠ N, são tangentes no ponto T, então, os pontos M, N e T são colineares.

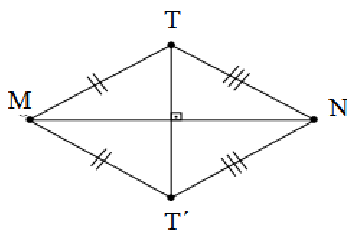
16) Os círculos C[1,2] e C[1,3] são tangentes entre si.

Solução: 01) Falso. A área de C[p,q] é $\pi \cdot \left(\dfrac{1}{2q^2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{4q^4}$.

02) Falso. Ver página 20 do presente trabalho.

04) Verdadeiro. Pela definição do problema o centro da circunferência é $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{8}\right)$. Além disso, sabendo que a forma geral de uma circunferência é dada por $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, onde (x_0, y_0) é o centro da circunferência e r é o raio, teremos o seguinte: A equação da circunferência que delimita C[1,2] será $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{8}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{8}\right)^2 \Rightarrow x^2 - x + \dfrac{1}{4} + y^2 - \dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{64} = \dfrac{1}{64} \Rightarrow x^2 + y^2 - x - \dfrac{1}{4}y = -\dfrac{1}{4}$

08) Verdadeiro. Suponha que M, N e T não sejam colineares. Então, se T´ é o ponto simétrico de T em relação a reta $\overrightarrow{MN}$, teremos que MT´ = MT e NT´ = NT (por congruência de triângulos). Logo T´ seria ponto comum, distinto de T, aos dois círculos, e esses círculos não seriam tangentes.



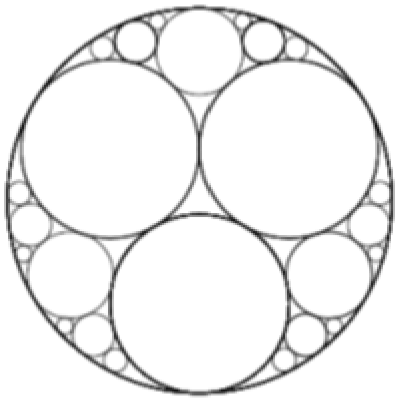
16) Verdadeiro. Para que os círculos sejam tangentes, devemos ter a distância entre seus centros igual à soma de seus raios. De fato, seja D a distância entre os centros e S a soma dos raios.

$$D^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{18}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{72}\right)^2 = \frac{1}{36} + \frac{25}{72^2} = \frac{144 + 25}{72^2} = \frac{169}{72^2} \Rightarrow D = \frac{13}{72}$$

$$S = \frac{1}{8} + \frac{1}{18} = \frac{9 + 4}{72} = \frac{13}{72}$$

Problema 10 (Desafio em Matemática[9] – PUC-Rio out 2015)

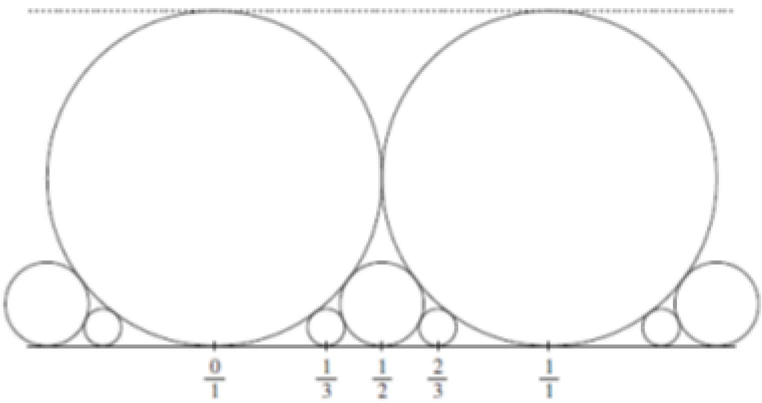
Inscrevemos dentro do círculo unitário (de equação $x^2 + y^2 = 1$) três círculos menores, de mesmo raio, tangentes dois a dois e tangentes ao círculo unitário nos pontos $(0,-1)$ e $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Dentro de cada triângulo curvilíneo formado junto ao círculo unitário inscrevemos um novo círculo. Repetimos o processo indefinidamente, conforme sugerido na figura.



Determine se em algum momento construímos um círculo tangente ao círculo unitário no ponto (1,0).

Solução: A resposta é que NÃO: nunca construiremos um círculo tangente ao círculo unitário em (1,0). Mais geralmente, se um círculo é construído tangenciando o círculo unitário em $(x_0, y_0) \neq (0,-1)$ então $\sqrt{3}x_0 / (1+y_0)$ é racional.

Para demonstrar este fato façamos uma inversão com centro no ponto (0,-1) para obter a figura abaixo, conhecida como a dos círculos de Ford.



Mais precisamente, suponhamos que a imagem do círculo unitário pela inversão seja o eixo horizontal.

[9] http://www.puc-rio.br/desafios/download/resolucao_prova_desafio-matematica_2015.pdf

- O círculo tangente ao círculo unitário em (0,-1) é levado em uma reta horizontal.
- Os círculos tangentes ao círculo unitário em $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ são levados em círculos que tangenciam o eixo horizontal em $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$, indicados na figura por 1 e 0 (para obtermos a figura usual).
- Os círculos tangentes ao círculo unitário em $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ são levados em círculos que tangenciam o eixo horizontal em $\left(\pm\sqrt{3},0\right)$, que seriam indicados na figura por 2 e – 1.
- Os círculos tangentes ao círculo unitário em (0,1) é levado no círculo menor que tangencia o eixo horizontal na origem, indicado por $\frac{1}{2}$.

Resta provar que na nova figura, todos os círculos tangenciam o eixo horizontal em um ponto indicado por um racional. Para isto, basta provar recursivamente as seguintes afirmações do próximo parágrafo.

Sejam dois círculos em posições $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_1}{q_1}$ tangentes entre si e portanto formando com o eixo horizontal um triângulo curvilíneo. Temos $p_1q_0 - p_0q_1 = 1$ e os círculos têm raios $\frac{1}{2q_0^2}$ e $\frac{1}{2q_1^2}$, respectivamente. O novo círculo inscrito neste triângulo curvilíneo tem posição $\frac{p}{q}$ com $p = p_0 + p_1$, $q = q_0 + q_1$ e seu raio é $\frac{1}{2q^2}$.

Questões sobre Frações Egípcias

Problema 11 (OPM[10] - 6o e 7o anos - 2011)

No Egito Antigo, as frações eram expressas principalmente como soma de frações distintas com numerador igual a 1. Por isso, frações com numerador igual a 1 são chamadas *frações egípcias*. Por exemplo, eles utilizavam $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ no lugar de $\frac{8}{15}$ (mais precisamente, eles escreviam hieróglifos que representam $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$).

Os matemáticos questionaram se era possível representar todo número racional $\frac{p}{q}$, com $1 \le p < q$, como soma de frações egípcias distintas. A resposta é sim, e foi encontrada por Fibonacci (o mesmo da sequência!).

[10] www.opm.mat.br/provas

Para isso, pode-se utilizar o *algoritmo guloso,* que funciona da seguinte forma: subtraímos da fração $\frac{p}{q}$ a maior fração $\frac{1}{n}$ que é menor do que $\frac{p}{q}$ e depois continuamos o processo com a fração que sobrar. Por exemplo:

$$\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{17} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} + \frac{3}{85} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{2}{2465} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{1233} + \frac{1}{3039345}$$

a) Escreva $\frac{3}{7}$ como soma de frações egípcias distintas.

b) O problema do algoritmo guloso é que ele gera frações com denominadores muito grandes (como 3039345 no exemplo acima). O próprio Fibonacci sugeriu outro método, baseado na identidade $\frac{a}{ab-1} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b(ab-1)}$. Por exemplo, o algoritmo guloso gera, para $\frac{8}{11}$, a expansão $\frac{8}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{37} + \frac{1}{4070}$

Para aplicarmos a ideia de Fibonacci, escrevemos $\frac{8}{11}$ como soma de frações cujos numeradores são divisores distintos do sucessor do denominador, ou seja, de 11 + 1 = 12, e utilizamos a identidade acima:

$$\frac{8}{11} = \frac{2}{11} + \frac{6}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6.11} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66} + \frac{1}{2} + \frac{1}{22}$$

Tendo essa ideia em mente, escreva $\frac{33}{119}$ como soma de frações egípcias distintas, todas com denominadores menores que 2011.

*Solução :*a) $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{21} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \left(\frac{2}{21} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$

b) $\frac{33}{119} = \frac{15}{119} + \frac{10}{119} + \frac{8}{119}$ Temos que $\frac{15}{119} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8.119}$, $\frac{10}{119} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12.119}$ e

$\frac{8}{119} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15.119}$. Assim, $\frac{33}{119} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8.119} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12.119} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15.119} =$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{952} + \frac{1}{12} + \frac{1}{1428} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1785}$

Problema 12 (OPM[11] - 8o e 9o anos do Ensino Fundamental - 2011)

No Egito Antigo, as frações eram expressas principalmente como soma de frações distintas com numerador igual a 1. Por isso, frações com numerador igual a 1 são chamadas *frações*

[11] www.opm.mat.br/provas

egípcias. Por exemplo, eles utilizavam $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ no lugar de $\frac{8}{15}$ (mais precisamente, eles escreviam hieróglifos que representam $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$).

Os matemáticos questionaram se era possível representar todo número racional $\frac{p}{q}$, com $1 \leq p < q$, como soma de frações egípcias distintas. A resposta é sim, e foi encontrada por Fibonacci (o mesmo da sequência!).

Para isso, pode-se utilizar o *algoritmo guloso*, que funciona da seguinte forma: subtraímos da fração $\frac{p}{q}$ a maior fração $\frac{1}{n}$ que é menor do que $\frac{p}{q}$ e depois continuamos o processo com a fração que sobrar. Por exemplo:

$$\frac{4}{17}=\frac{1}{5}+\left(\frac{4}{17}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}+\frac{3}{85}=\frac{1}{5}+\frac{1}{29}+\frac{2}{2465}=\frac{1}{5}+\frac{1}{29}+\frac{1}{1233}+\frac{1}{3039345}$$

a) Escreva $\frac{15}{19}$ como soma de frações egípcias distintas.

b) A cada passo do algoritmo guloso, determinamos a maior fração egípcia menor do que uma fração (não egípcia) $\frac{p}{q}$. Como $\frac{p}{q}=\frac{1}{\frac{q}{p}}$, devemos tomar como denominador o menor inteiro maior ou igual a $\frac{q}{p}$. Por exemplo, $\frac{4}{17}=\frac{1}{\frac{17}{4}}=\frac{1}{4{,}25}$ e devemos tomar 5 como denominador.
Considerando a *função teto de x*, denotada por $\lceil x \rceil$, tal que $\lceil x \rceil$= *menor inteiro maior ou igual a x*, a cada passo do algoritmo guloso tomamos a fração egípcia $\frac{1}{\left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil}$. Note que, no exemplo inicial, $\left\lceil \frac{17}{4} \right\rceil = \lceil 4{,}25 \rceil = 5$.
Sendo *q = pl + r, 0 < r < p*, em que *l* é o quociente e *r* é o resto da divisão euclidiana de *q* e *p*, calcule $\left\lceil \frac{q}{p} \right\rceil$ em função de *l*.

c) Mostre que, a cada passo do algoritmo guloso, o numerador da fração que sobra diminui e conclua que toda fração $\frac{p}{q}$ é a soma de, no máximo, p frações egípcias distintas.

Solução: a) $\frac{15}{19}=\frac{1}{2}+\left(\frac{15}{19}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{11}{38}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{11}{38}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{76}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{26}+$
$+\left(\frac{3}{76}-\frac{1}{26}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{26}+\frac{1}{988}$

b) $\left[\dfrac{q}{p}\right] = \left[\dfrac{p.l+r}{p}\right] = l+1$ porque $\dfrac{p.l}{p} = l$ e $\dfrac{r}{p} < 1$, então, o menor inteiro maior ou igual a $\dfrac{r}{p}$ será 1.

c) Suponha que $q = p \cdot l + r$, $0 \le r < p$. Se $r = 0$, então $\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{l}$, e a demonstração está terminada. Podemos, portanto, supor que $r \neq 0$. Então

$\dfrac{q}{p} = l + \dfrac{r}{p}$, donde $l < \dfrac{q}{p} < l+1$, ou seja, $\dfrac{1}{l} > \dfrac{p}{q} > \dfrac{1}{l+1}$

Assim, $\dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{l+1} = \dfrac{p-r}{q(l+1)}$.

Mas, como $p - r < p$, os numeradores das diferenças sucessivas são estritamente decrescentes quando $r \neq 0$.

Obs.: Note que $\dfrac{p-r}{q(l+1)} < \dfrac{1}{l+1}$, e logo as próximas frações egípcias terão denominadores maiores que $l+1$. Assim, todas as frações egípcias obtidas serão distintas.

Solução retirada de RPM 17, pág. 8.

Problema 13 (OLIMPÍADA CEARENSE DE MATEMÁTICA[12] – Nivel 1 – 2015)

Um inteiro positivo n diz-se *invocado* se existem n inteiros positivos $a_1,..,a_n$, dois a dois distintos, tais que $\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} = 1$.

O inteiro positivo 3, por exemplo, é invocado, porque $1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}$.

Mostre que os inteiros 4, 5, 6 e 7 são invocados.

Solução: 4 é invocado: $1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12}$

5 é invocado: $1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{24}$

[12] http://www.mat.ufc.br/ocm/arquivos/Nivel_1_2015.pdf

6 é invocado: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}$

7 é invocado:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}$$

Problema 14 (OMERJ[13] – 6º e 7º anos 2016)

No intervalo das competições de judô da Rio-2016, alguns atletas japoneses divertiram-se resolvendo questões de Matemática. Eles pesquisaram em alguns sites de Olimpíadas de Matemática e viram que um inteiro positivo n é chamado de *invocado* quando existem inteiros positivos $a_1, a_2, ..., a_n$ dois a dois distintos, tais que

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=1.$$

O inteiro positivo 3, por exemplo, é invocado, porque

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

O desafio maior para os japoneses foi confirmar que o 8 também é invocado. Mostre que eles estavam certos.

Solução: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{96}+\frac{1}{192}$$

Problema 15 (OLIMPÍADA CEARENSE DE MATEMÁTICA – Nivel 3 – 2015).

[13] Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro. http://www.omerj.org/provas-e-gabaritos

Um inteiro positivo n diz-se invocado se existem n inteiros positivos $a_1,...,a_n$, dois a dois distintos, tais que $\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n}=1$.

O inteiro positivo 3, por exemplo, é invocado, visto que $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.

Mostre que todo inteiro n > 2 é invocado.

Solução: Pelo exemplo do enunciado, o número 3 é invocado.

Suponha que $k \geq 3$ é invocado, ou seja, suponha que existem inteiros positivos $a_1,...,a_k$, dois a dois distintos, tais que $1=\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_k}$. (I)

Tem-se que $a_i \geq 2$ para todo $i \in \{1,...,k\}$ pois, caso contrário, o lado direito de (I) seria maior que 1. Assim, os k + 1 inteiros positivos $2, 2a_1, 2a_2, ..., 2a_k$ são dois a dois distintos. Além disso, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2a_1}+...+\frac{1}{2a_k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_k}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Mostramos entao que $k=3$ é invocado e que se $k \geq 3$ é invocado, então $k+1$ também é invocado. Logo, pelo princípio da indução finita, todo inteiro $n>2$ é invocado.

Frações em geral

Problema 16 (OPM[14])

O grande matemático John Horton Conway (já presente em outras OPMs) criou uma linguagem de programação baseada em sequência de números racionais positivos, a FRACTAN. Vamos conhecê-la.

É dada uma sequência de racionais positivos. Em cada passo da execução de um programa FRACTAN, a entrada é um inteiro positivo que deve ser multiplicado pelo primeiro número da sequência tal que o produto seja inteiro. Esse produto é a entrada do próximo passo.

Para o primeiro passo sempre se toma uma potência de 2, isto é, $N_1 = 2^n$, para n inteiro positivo. O programa termina quando obtemos novamente uma potência de 2. Dizemos que tal potência de 2 é a *saída* de nosso programa. Complicado? Um exemplo deve ajudar.

Considere a sequência $A=(f_1; f_2; f_3; f_4; f_5; f_6)=\left(\frac{52}{33};\frac{44}{39};\frac{1}{11};\frac{1}{13};\frac{3}{2};11\right)$. Para a entrada 2^3, os passos são:

$N_1 = 2^3$

$N_2 = N_1 f_5 = 2^3 \cdot \frac{3}{2} = 3 \cdot 2^2$

[14]www.opm.mat.br/provas

$$N_3 = N_2 f_5 = 3 \cdot 2^2 \cdot \frac{3}{2} = 3^2 \cdot 2$$

$$N_4 = N_3 f_5 = 3^2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 3^3$$

$$N_5 = N_4 f_6 = 3^3 \cdot 11$$

$$N_6 = N_5 f_1 = 3^3 \cdot 11 \cdot \frac{52}{33} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$$

$$N_7 = N_6 f_2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot \frac{44}{39} = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$$

$$N_8 = N_7 f_1 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot \frac{52}{33} = 2^6 \cdot 13$$

$$N_8 = N_8 f_4 = 2^6 \cdot 13 \cdot \frac{1}{13} = 2^6$$

A saída é, portanto, 2^6. Para facilitar o entendimento do processo, os passos foram escritos explicitando-se as fatorações em primos das entradas.

Pode-se provar que, para a sequência A, se a entrada é 2^n, a saída é 2^{2n}.

a) Considerando novamente a sequência A, escreva todos os passos para a entrada $N = 2^2$. Sabemos que a saída é 2^4, mas você deve listar todos os passos intermediários.

b) Seja n inteiro positivo. Apresente uma sequência de racionais positivos B tal que, se a entrada é 2^n, a saída é 2^{3n+1}.

Solução: a) $N_1 = 2^2$

$$N_2 = N_1 f_5 = 2^2 \cdot \frac{3}{2} = 2 \cdot 3$$

$$N_3 = N_2 f_5 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 3^2$$

$$N_4 = N_3 f_6 = 3^2 \cdot 11$$

$$N_5 = N_4 f_1 = 3^2 \cdot 11 \cdot \frac{52}{33} = 3 \cdot 2^2 \cdot 13$$

$$N_6 = N_5 f_2 = 3 \cdot 2^2 \cdot 13 \cdot \frac{44}{39} = 2^4 \cdot 11$$

$$N_7 = N_6 f_3 = 2^4 \cdot 11 \cdot \frac{1}{11} = 2^4.$$

b) Considere $B = (f_1; f_2; f_3; f_4; f_5; f_6) = \left(\frac{104}{33}; \frac{88}{39}; \frac{2}{11}; \frac{2}{13}; \frac{3}{2}; 11\right)$.

Verificaremos que para $N_1 = 2^n$, teremos a saída 2^{3n+1}.

$$N_1 = 2^n$$

$$N_2 = N_1 f_5 = 2^n \cdot \frac{3}{2} = 3 \cdot 2^{n-1} \cdot$$

(...)

$$N_{n+1} = N_n f_5 = 3^{n-1} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 3^n$$

$$N_{n+2} = N_{n+1} f_6 = 3^n \cdot 11$$

A partir daí alternamos

$$N_{i+1} = N_i f_1 = 3^{n-j} \cdot 2^{3j} \cdot 11 \cdot \frac{104}{33} = 3^{n-j-1} \cdot 2^{3(j+1)} \cdot 13$$

$$N_{i+2} = N_{i+1} f_2 = 3^{n-j-1} \cdot 2^{3(j+1)} \cdot 13 \cdot \frac{88}{39} = 3^{n-j-2} \cdot 2^{3(j+2)} \cdot 11$$

E, finalmente,

$$N_{k+1} = N_k f_3 = 2^{3n} \cdot 11 \cdot \frac{2}{11} = 2^{3n+1} \text{ ou } N_{k+1} = N_k f_4 = 2^{3n} \cdot 13 \cdot \frac{2}{13} = 2^{3n+1}.$$

Problema 17 (OPM[15] 2011 - 1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

O grande matemático John Horton Conway (já presente em outras OPMs) criou uma linguagem de programação baseada em sequência de números racionais positivos, a FRACTAN. Vamos conhecê-la.

Seja $(f_1, f_2, ..., f_m)$ uma sequência de números racionais positivos. No k-ésimo passo da execução do nosso programa FRACTAN a *entrada* é um inteiro positivo N_k que deve ser multiplicado pelo primeiro f_i tal que $N_k f_i$ é um número inteiro. Tal produto $N_k f_i$ é a entrada do próximo passo, ou seja, $N_{k+1} = N_k f_i$.

Para o primeiro passo sempre se toma uma potência de 2, isto é, $N_1 = 2^n$, para n inteiro positivo. O programa termina quando obtemos novamente uma potência de 2. Dizemos que tal potência de 2 é a *saída* de nosso programa. Complicado? Um exemplo deve ajudar.

Considere a sequência $A = (f_1; f_2; f_3; f_4; f_5; f_6) = \left(\frac{52}{33}; \frac{44}{39}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}; \frac{3}{2}; 11\right)$. Para a entrada 2^3, os passos são:

$$N_1 = 2^3$$

$$N_2 = N_1 f_5 = 2^3 \cdot \frac{3}{2} = 3 \cdot 2^2$$

$$N_3 = N_2 f_5 = 3 \cdot 2^2 \cdot \frac{3}{2} = 3^2 \cdot 2$$

---

[15] www.opm.mat.br/provas

$$N_4 = N_3 f_5 = 3^2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 3^3$$

$$N_5 = N_4 f_6 = 3^3 \cdot 11$$

$$N_6 = N_5 f_1 = 3^3 \cdot 11 \cdot \frac{52}{33} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$$

$$N_7 = N_6 f_2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot \frac{44}{39} = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$$

$$N_8 = N_7 f_1 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot \frac{52}{33} = 2^6 \cdot 13$$

$$N_8 = N_8 f_4 = 2^6 \cdot 13 \cdot \frac{1}{13} = 2^6$$

A saída é, portanto, 2^6. Para facilitar o entendimento do processo, os passos foram escritos explicitando-se as fatorações em primos das entradas.
Pode-se provar que, para a sequência A, se a entrada é 2^n, a saída é 2^{2n}.
Suponha que uma dada sequência S de racionais positivos fornece para as entradas 2^n, n inteiro positivo, saídas $2^{f(n)}$. Dizemos que a sequência S *computa* a função $f(n)$. A intenção dessa questão é ensinar as ideias básicas da programação FRACTAN. Você irá aprender a construir uma sequência que computa a função $f(n)$ que você desejar. (Assim esperamos!)
Primeiro escrevemos um programa, em uma linguagem que denominaremos pré-FRACTAN, no qual cada linha tem a seguinte forma:

$$linha\ \ n: \frac{p_1}{q_1} \to n_1; \frac{p_2}{q_2} \to n_2; \ldots; \frac{p_k}{q_k} \to n_k$$

Sendo que a ação a ser realizada na linha n é trocar o inteiro N por $\frac{p_i}{q_i} N$ para o primeiro i $(1 \le i \le k)$ para o qual tal resultado é inteiro e ir para a linha n_i. Como no FRACTAN, a entrada é uma potência de 2 e o programa termina quando obtemos uma nova potência de 2. Por exemplo, considere o programa P1 a seguir:

$$linha\ \ 0: \frac{3}{2} \to 0; 1 \to 1$$

$$linha\ \ 1: \frac{2^2}{3} \to 1$$

Para a entrada 2^3, o programa P1 executa os seguintes passos:

$$2^3 \xrightarrow{linha\ 0} 2^2 \cdot 3 \xrightarrow{linha\ 0} 2 \cdot 3^2 \xrightarrow{linha\ 0} 3^3 \xrightarrow{linha\ 0} 3^3 \xrightarrow{linha\ 1} 2^2 \cdot 3^2 \xrightarrow{linha\ 1} 2^4 \cdot 3 \xrightarrow{linha\ 1} 2^6$$

(já viu esse passos hoje?) E termina.

Para chegarmos às frações propriamente ditas, excetuando-se a linha 0, tiramos as referências de uma linha à ela mesma. Por exemplo, a partir de P1 obtemos um novo programa P2:

$$linha\ 0: \frac{3}{2} \to 0; 1 \to 1$$

$$linha\ 1: \frac{2^2}{3} \to 2$$

$$linha\ 2: \frac{2^2}{3} \to 1$$

Agora falta pouco. Atribuímos a cada linha, exceto a 0, um número primo grande (maior do que qualquer um que tenha aparecido no numerador ou denominador de uma fração utilizada no programa pré-FRACTAN original) e, então, a linha

$P: \frac{a}{b} \to Q; \frac{c}{d} \to R; \frac{e}{f} \to S; \ldots$ em que P,Q, R e S são os tais primos grandes, correspondentes às frações:

$\frac{aQ}{bP}; \frac{cR}{dP}; \frac{eS}{fP}$ nessa ordem. Assim, a nossa sequência $A = \left(\frac{52}{33}; \frac{44}{39}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}; \frac{3}{2}; 11\right)$ foi construída a partir do programa P1, utilizando as ideias mostradas (e algumas outras, que você terá que descobrir!).

a) Escreva um programa pré-FRACTAN, nos moldes de P1, que dada a entrada 2^n tenha como saída 2^{n^2}.
b) Faça um programa em FRACTAN que computa a função $f(n) = n^2$, ou seja, apresente uma sequência de racionais positivos F adequada.

Não apresentaremos aqui a solução deste problema. Uma solução para o item b) pode ser encontrada na Revista Eureka 39 – solução do problema proposto nº 156, páginas 57-60.

Problema 18 (elaborada pela autora)

Em qualquer sequência de Farey temos que $\frac{1}{2}$ é seu termo central e também que a soma dos termos equidistantes a $\frac{1}{2}$ é sempre igual a 1. Sabendo-se disso, complete a sequência

$$F_9 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{-}{-}, \frac{-}{-}, \frac{-}{-}, \frac{-}{-}, \frac{-}{-}, \frac{-}{-}, \frac{-}{-}, \frac{-}{-}, \frac{-}{-}, \frac{-}{-}, \frac{-}{-}, \frac{-}{-}, \frac{-}{-}, \frac{1}{1}\right\}$$

Solução: Como a soma dos termos equidistantes a $\frac{1}{2}$ é sempre igual a 1, basta fazer a diferença entre 1 e o termo conhecido. Por exemplo, $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$. Procedendo desta forma, obteremos

$$F_9=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{9},\frac{1}{8},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{2}{9},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},\frac{1}{2},\frac{5}{9},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{7}{9},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{8}{9},\frac{1}{1}\right\}$$

<u>Frações Contínuas</u>

Problema 19 (CMRJ[16] 2008-2009)

A fração $\frac{37}{13}$ pode ser escrita sob a forma $2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}$, onde (x,y,z) é igual a:

(A) (11, 2, 5) (B) (1, 2, 5) (C) (1, 5, 2) (D) (13, 11, 2) (E) (5, 2, 11)

Solução: Temos que

37 = 2 . 13 + 11
13 = 1 . 11 + 2
11 = 5 . 2 + 1
2 = 2. 1 + 0

Assim, x = 1, y = 5 e z = 2

Problema 20 (Torneio das Cidades[17])

Calcule

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{2005}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{2005}}}}}.$$

[16] https://www.youtube.com/watch?v=wdzaXU2GjTs

[17] https://www.youtube.com/watch?v=kyCst6XFB94. Acesso em 10/01/2018.

Solução: $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{2005}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{2005}}}}}=$

$$\cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{2005}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{2005}}}}}$$

Repare que a expressão destacada em vermelho é a mesma. Vamos representá-la por x.

$$\cfrac{1}{1+\boxed{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{2005}}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\boxed{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{2005}}}}}}$$

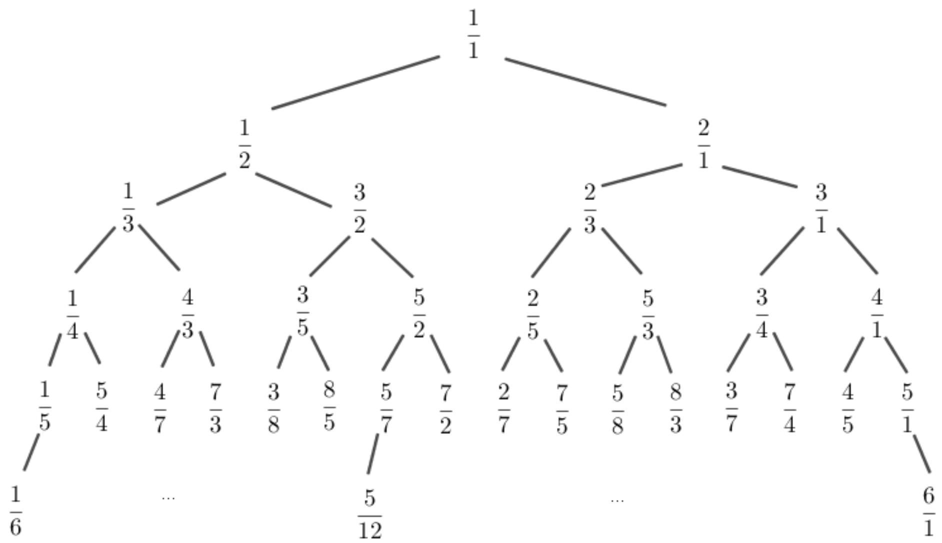
Então, $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{2005}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{2005}}}}}=$

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{\frac{x+1}{x}}=\frac{1}{1+x}+\frac{x}{x+1}=\frac{1+x}{1+x}=1.$$

Problema 21 (OPM[18] – 6º e 7º anos do EF – 2017)

[18] www.opm.mat.br/provas

Nesse problema vamos estudar a Árvore de Euclides. Essa árvore é construída a partir da fração $\frac{1}{1}$ e cada fração $\frac{p}{q}$ gera duas novas frações $\frac{p}{p+q}$ e $\frac{p+q}{q}$. A seguir temos os termos iniciais dessa árvore.



Para fazer o caminho de volta de uma fração qualquer $\frac{m}{n}$, com $m \neq n$, até a fração $\frac{1}{1}$ usamos os seguintes passos:

$$\frac{m}{n} \leftarrow \frac{m-n}{n} \text{ se } m > n \qquad \text{e} \qquad \frac{m}{n} \leftarrow \frac{m}{n-m} \text{ se } m < n$$

Por exemplo, começando de $\frac{5}{12}$ temos os seguintes passos:

Como $5 < 12$ a fração veio de $\frac{5}{12-5} = \frac{5}{7}$. Como $5 < 7$ essa fração foi gerada por $\frac{5}{7-5} = \frac{5}{2}$. Agora temos $5 > 2$, então a fração foi gerada por $\frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$. Seguindo esses passos chegamos no caminho $\frac{5}{12} \leftarrow \frac{5}{7} \leftarrow \frac{5}{2} \leftarrow \frac{3}{2} \leftarrow \frac{1}{2} \leftarrow \frac{1}{1}$

a) Determine o caminho voltando da fração $\frac{27}{17}$ até a fração $\frac{1}{1}$, escrevendo as frações obtidas em cada passo.

Solução: $\frac{27}{17}$: 27> 17 então essa fração foi gerada por $\frac{27-17}{17} = \frac{10}{17}$

$\frac{10}{17}$: 10< 17 então essa fração foi gerada por $\frac{10}{17-10} = \frac{10}{7}$

$\frac{10}{7}$: 10>7 então essa fração foi gerada por $\frac{10-7}{7} = \frac{3}{7}$

$\frac{3}{7}$: 3< 7 então essa fração foi gerada por $\frac{3}{7-3}=\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}$: 3< 4 então essa fração foi gerada por $\frac{3}{4-3}=\frac{3}{1}$

$\frac{3}{1}$: 3>1 então essa fração foi gerada por $\frac{3-1}{1}=\frac{2}{1}$

$\frac{2}{1}$: 2>1 então essa fração foi gerada por $\frac{2-1}{1}=\frac{1}{1}$

Logo, o caminho de volta é

$$\frac{27}{17}\leftarrow\frac{10}{17}\leftarrow\frac{10}{7}\leftarrow\frac{3}{7}\leftarrow\frac{3}{4}\leftarrow\frac{3}{1}\leftarrow\frac{2}{1}\leftarrow\frac{1}{1}$$

Vamos atribuir a cada fração um número inteiro positivo que representa sua posição na árvore. A fração $\frac{1}{1}$ está na posição 1, $\frac{1}{2}$ está na posição 2, $\frac{2}{1}$ está na posição 3, $\frac{1}{3}$ está na posição 4, e assim por diante. Como cada fração gera duas frações, podemos observar que se uma fração $\frac{p}{q}$ possui posição N as frações $\frac{p}{p+q}$ e $\frac{p+q}{q}$ geradas dela ocuparão as posições 2N e 2N + 1, respectivamente. Dessa forma, para achar o termo que ocupa a posição t vamos dividindo por 2 até obter quociente 1. Depois devemos fazer os passos no sentido contrario, multiplicando por 2, ou multiplicando por 2 e somando 1, de acordo com os restos obtidos nas divisões por 2.

Por exemplo, para encontrar a fração que ocupa a posição 88 dividimos 88 por 2, obtendo quociente 44 e resto 0, ou seja, 88 = 2 . 44 + 0.

Agora, dividimos 44 por 2, obtendo quociente 22 e resto 0, ou seja, 44 = 2 . 22 + 0.

Continuando o processo, obtemos

22 = 2 . 11 + 0
11 = 2 . 5 + 1
5 = 2 . 2 + 1
2 = 2 . 1 + 0

e paramos aqui, pois obtivemos quociente 1.

Os restos obtidos, de baixo para cima, são 0, 1, 1, 0, 0, 0. Logo, fazemos uma soma no denominador, duas no numerador e, finalmente, três somas no denominador. A ramificação da árvore é, então,

$$\frac{1}{1}\to\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\to\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}\to\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2}\to\frac{5}{2+5}=\frac{5}{7}\to\frac{5}{7+5}=\frac{5}{12}\to\frac{5}{12+5}=\frac{5}{17}$$

Ou em resumo

$$\frac{1}{1}\to\frac{1}{2}\to\frac{3}{2}\to\frac{5}{2}\to\frac{5}{7}\to\frac{5}{12}\to\frac{5}{17}.$$

Portanto a fração na posição 88 é $\frac{5}{17}$.

b) Usando os passos anteriores, determine a fração que está na posição 114.

Solução: 114 = 2 . 57 + 0
57 = 2 . 28 + 1
28 = 2 . 14 + 0
14 = 2 . 7 + 0
7 = 2 . 3 + 1
3 = 2 . 1 + 1

Os restos obtidos são: 1, 1, 0, 0, 1, 0. Assim, fazemos duas somas no numerador, duas no denominador, uma no numerador e por ultimo, uma no denominador. A ramificação da árvore será então

$$\frac{1}{1} \to \frac{1+1}{1} = \frac{2}{1} \to \frac{2+1}{1} = \frac{3}{1} \to \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \to \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7} \to \frac{3+7}{7} = \frac{10}{7} \to \frac{10}{10+7} = \frac{10}{17}$$

A fração na 114ª posição é $\frac{10}{17}$.

Problema 22 (OPM[19] – 8º e 9º anos do EF – 2013)

Os números reais podem ser expressos na forma de *frações contínuas*, isto é, na forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

em que a_0 é inteiro e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são inteiros positivos. Utiliza-se a notação $[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

Por exemplo, para escrever $\frac{2013}{37}$ na forma de fração contínua, inicialmente, calculamos o maior inteiro menor ou igual a esse racional. Esse é o a_0. Assim:

$$\frac{2013}{37} = 54 + \frac{15}{37} = 54 + \cfrac{1}{\cfrac{37}{15}}$$

E repetimos o processo agora para $\frac{37}{15}$ e, assim por diante, obtendo $a_1, a_2, a_3, \ldots$

$$\frac{2013}{37} = 54 + \frac{15}{37} = 54 + \cfrac{1}{\cfrac{37}{15}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{7}{15}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{15}{7}}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7}}}$$

[19] www.opm.mat.br/provas

Temos então que $\frac{2013}{37} = [54,2,2,7]$. Pode-se demonstrar que todo racional tem uma representação finita (com um número finito de a_i´s) como fração contínua.
As coisas ficam ainda mais interessantes quando consideramos os números irracionais. Cada irracional possui uma representação única como fração contínua a qual é infinita. E, quando a truncamos, ela fornece as melhores aproximações racionais para ele.

Por exemplo, $\pi = 3{,}14159265\ldots = [3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,\ldots]$. Adotando $\pi \approx [3;7,15,1] = 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$ obtemos uma excelente aproximação!

Uma questão extremamente interessante da teoria de frações contínuas é: quais números têm uma representação periódica quando escritos dessa maneira? Por exemplo, qual número real tem a representação $[1;1,1,1\ldots] = [1;\overline{1}]$?

Seja $x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}$

Então podemos observar que (verifique) $x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ e, como x é positivo, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a razão áurea!

E como é a representação de $\sqrt{3}$? Fazemos o procedimento usual. O maior inteiro menor do que $\sqrt{3}$ é 1. Assim:

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3}-1) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}}$$

Repetindo as passagens acima:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}}}}$$

E assim por diante. Ou seja, $\sqrt{3} = [1;1,2,1,2\ldots] = [1;\overline{1,2}]$.

a) Escreva a representação de $\frac{2017}{41}$ como fração contínua.

b) Escreva a representação de $\sqrt{11}$ como fração contínua e conclua que $\sqrt{11} \approx \frac{199}{60}$.

Solução: a) Aplicando o algoritmo de Euclides, encontramos

2017 = 49 . 41 + 8
41 = 5 . 8 + 1
8 = 8 . 1 + 0

Assim, $\frac{2017}{41} = 49 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{8}}$

b)

$$\sqrt{11} = 3 + (\sqrt{11} - 3) = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{11}-3}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{11}+3}{2}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{\sqrt{11}-3}{2}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{11}-3}}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\sqrt{11}+3}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + (\sqrt{11} - 3)}}$$

Repetindo as passagens acima:

$$\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + (\sqrt{11} - 3)}}}}$$

E assim por diante. Ou seja, $\sqrt{11} = [3;3,6,3,6,\ldots] = [3;\overline{3,6}]$.

199 = 3 . 60 + 19
60 = 3 . 19 + 3
19 = 6 . 3 + 1
3 = 3 . 1 + 0

$$\sqrt{11} \approx \frac{199}{60} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3}}}$$

(observamos que, com efeito, $\sqrt{11} = 3{,}31662479\ldots$ e $\frac{199}{60} = 3{,}3166666\ldots$ é uma boa aproximação de $\sqrt{11}$, com quatro casas decimais corretas depois da vírgula).

7. Conclusões

Neste trabalho foram propostas questões envolvendo o assunto frações, com a intenção de despertar o interesse pelo estudo da Matemática, mas com conteúdos não triviais do ensino básico.

Os assuntos tratados e suas referidas questões foram escolhidos de forma a buscar o questionamento e a investigação na busca de soluções. Os tópicos selecionados, apesar de não fazerem parte do conteúdo básico dos ensinos fundamental e médio, incluem questões possíveis de serem resolvidas com conhecimentos mais elementares. No entanto, em alguns casos, requer-se um desenvolvimento mais aprofundado, sendo mais adequada sua aplicação em turmas preparatórias para olimpíadas.

Para turmas de Ensino Fundamental, nas questões sobre sequências de Farey, pode-se pedir para que escrevam os próximos conjuntos, que tentem descobrir o “segredo” da sequência, ou seja, que o termo intermediário é a soma dos numeradores sobre a soma dos denominadores das frações extremas. Pode-se fazer o experimento de, calculando a diferença entre termos consecutivos de uma sequência, verificar que o denominador de tal resultado será sempre igual a 1.

As questões sobre Círculos de Ford são mais adequadas ao ensino médio, pois necessitam de conhecimentos de geometria, podendo ser trabalhada em algumas turmas de 9º ano.

Por fim, que este trabalho incentive tanto professores e alunos e que busquem outras possibilidades de relação com o conteúdo, como o cálculo de áreas e o teorema de Pick, não deixando de notar o quão incrível é o estudo da Matemática e as diversas possibilidades de relação entre seus conteúdos.

REFERÊNCIAS

[1] ABL. **Dicionário Escolar da Língua Portuguesa**, 2ª edição, CBN, 2010.

[2] AINSWORTH, J.; DAWSON, M.; PIANTA, J.; WARWICK, J. **The Farey Sequence**. University of Edinburgh, 2012. Disponível em: <www.maths.ed.ac.uk/~aar/fareyproject.pdf>. Acesso em 25/07/2017.

[3] AVEIRO, José Carlos. **Formalização do conjunto dos números racionais e alguns jogos com frações**. (Dissertação de mestrado) UNESP, 2015. Disponível em:< https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=814>. Acesso em 18/12/2016.

[4] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgarg Blucher, 1996.

[5] BRASIL (1998). **Parâmetros Curriculares Nacionais:Matemática**. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em 08/12/2017.

[6] BRASIL. **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil - matrizes de referência, tópicos e descritores**. Brasília, 2008. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/prova%20brasil_matriz2.pdf. Acesso em 02/12/2017.

[7] BROCHERO, F.; MOREIRA, C.G.; SALDANHA, N.; TENGAN, E. **Teoria dos Números – um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. 4ª edição. Projeto Euclides. IMPA, 2015. Rio de Janeiro.

[8] CARVALHO, João P. de. **Um problema de Fibonacci**, Revista do Professor de Matemática 17 (1990), p.8.

[9] CORREIA, Paola Luciana. **Frações: uma proposta de ensino para o 9º ano utilizando o software Geogebra e dobraduras**. (Dissertação de mestrado) UFJF, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=88369>. Acesso em 18/12/2016.

[10] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 1997.

[11] OLIVEIRA, Everton Franco de. **Sequências de Farey e Circunferências de Ford**. USP, 2011. Disponível em:< https://docslide.com.br/documents/trabalho-analise-real2.html>. Acesso em 02/01/2017.

[12] OLIVEIRA, Marisa da Costa C. **Florestas Racionais e Círculos Tangenciais**. (Dissertação de mestrado) FCUP, 2014. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/78286/2/34265.pdf>. Acesso em 07/01/2018.

[13] RIPOLL, J.B.; RIPOLL, C.C.; SILVEIRA, J.F.P. da. **Números Racionais, Reais e Complexos**. 2ª ed. Porto Alegre, UFRGS, 2010.

[14] STABEL, Eduardo Casagrande. **A fórmula de Hardy-Ramanujan-Rademacher das partições de um inteiro positivo**. (Dissertação de mestrado) UFRGS, 2007. Disponível em: <www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/10097/000595024.pdf;sequence=1>. Acesso em 05/01/2017.

[15] TANTON, James. **The Stern-Brocot Tree.** Disponível em: <http://www.mathcircles.org/wp-content/uploads/2017/10/STERN-BROCOT-TREE_July-2010_MSRI-1.pdf>. Acesso em 17 de janeiro de 2018.

[16] WAGNER, Eduardo et al. **10 matemáticos 100 problemas**. 2ª edição, SBM, 2016.