



**SBM – SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**  
**IMPA – INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E**  
**APLICADA**  
**PROFMAT - PROGRAMA DE MESTRADO**  
**PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA**



**PROBLEMAS-DESAFIO NAS AULAS DE**  
**MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO**

LAÉRCIO CORREIA DE VASCONCELOS FILHO

ORIENTADOR: CARLOS GUSTAVO TAMM DE ARAÚJO MOREIRA

Rio de Janeiro, fevereiro de 2018

**PROBLEMAS-DESAFIO NAS AULAS DE  
MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO**

LAÉRCIO CORREIA DE VASCONCELOS FILHO

ORIENTADOR: CARLOS GUSTAVO TAMM DE ARAÚJO MOREIRA

Rio de Janeiro, fevereiro de 2018

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. CARLOS GUSTAVO TAMM DE ARAÚJO MOREIRA (Orientador)

---

Prof. LUIZ AMANCIO MACHADO DE SOUZA JUNIOR (Convidado)

---

Prof. JORGE PASSAMANI ZUBELLI (Convidado)

## **AGRADECIMENTO**

Agradeço a todos os mestres do IMPA por terem nos transmitido seus valiosos conhecimentos.

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho a todos os amigos da turma do PROFMAT-IMPA 2015, Dedico também ao meu neto Pablo, que nasceu durante este curso. Pablo, lembre-se sempre: quem estuda, vence!

Laércio Correia de Vasconcelos Filho  
Rio de Janeiro, fevereiro de 2018.

## SUMÁRIO

RESUMO.....	7
ABSTRACT .....	8
CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO.....	9
CAPÍTULO 2: A CONVENIÊNCIA: PORQUE APRESENTAR PROBLEMAS- DESAFIO.....	12
2.1 MUITO DEPOIS DA MATEMÁTICA .....	12
2.2 EXEMPLOS DE PROBLEMAS QUE NÃO AJUDAM .....	14
Exemplo 2.1: Desafio para criancinhas.....	14
Exemplo 2.2: Pergunte logo a conta .....	15
Exemplo 2.3: Questão do ENEM, 2º simulado, 2016:.....	16
Exemplo 2.4: “Desafio”?.....	16
2.3 O COTIDIANO DO ALUNO .....	17
Exemplo 2.5: O medo da matemática .....	18
Exemplo 2.6: Pergunte logo a conta .....	19
Exemplo 2.7: Carrapatos (Colégio Militar do Recife, 2014-2015) .....	20
2.4 ANATOMIA DE UM PROBLEMA DE MATEMÁTICA .....	21
2.5 CONTEXTUALIZAÇÃO CONVINCENTE .....	22
Exemplo 2.8: Equação do segundo grau .....	23
2.6 UMA TENTATIVA DE DESAFIO .....	24
Exemplo 2.9: MMC e restos.....	25
2.7 CONCLUSÃO .....	26
CAPÍTULO 3: A POSSIBILIDADE: SUGESTÕES PARA A IMPLEMENTAÇÃO .....	28
3.1 O PROFESSOR DE EXERCÍCIOS .....	29
3.2 GEOMETRIA, ÁLGEBRA E ARITMÉTICA .....	29
3.3 O QUE AINDA NÃO FOI ENSINADO.....	30
Exemplo 3.1: Mestre, incentive seus alunos! .....	30
Exemplo 3.2: Zahlen .....	31
3.4 A TIA NÃO ENSINOU ISSO .....	31
3.5 FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS .....	32
3.6 USE A SEGUINTE REGRA, OK?.....	32
3.7 PROVE QUE .....	34
3.8 QUEBRAR A CABEÇA.....	35
3.9 CONCLUSÃO.....	36
CAPÍTULO 4: SUGESTÕES DE TÓPICOS E PROBLEMAS.....	37
4.1 MUITO ALÉM DOS PROBLEMAS .....	37
4.2 EXPLORANDO A DIVISIBILIDADE.....	39
Problema-desafio 1: Quadrados perfeitos.....	39
Problema-desafio 2: Quantos primos?.....	41
Problema-desafio 3: (Colégio Naval – 2014-2015 adaptado) .....	42
Problema-desafio 4: (Colégio Militar) .....	42
TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA: .....	43
Problema-desafio 5: MMC e restos.....	44
4.3 RESOLUÇÃO POR INSPEÇÃO.....	46
Problema-desafio 6: (EPCAr 2015-2016).....	46

Problema-desafio 7: O PROBLEMA DAS TRÊS FILHAS .....	49
Problema-desafio 8: Fração de um grupo de pessoas .....	51
4.3.1 TRÊS CAMINHOS PARA A SOLUÇÃO .....	52
4.3.2 MÉTODO PROPOSTO PARA ENCONTRAR SOLUÇÕES POR INSPEÇÃO .....	54
4.3.3 CUIDADO COM A UNICIDADE .....	56
Exemplo 4.1: O engenheiro, o físico e o matemático .....	56
Exemplo 4.2 – Sequência numérica .....	57
4.4 PROBLEMAS SEM SOLUÇÃO .....	58
Problema-desafio 9: (Colégio Naval – 2010-2011) .....	59
Problema-desafio 10 (Colégio Naval – 2012-2013) .....	66
4.5 MÉTODO DE REDUÇÃO AO ABSURDO: .....	68
Problema-desafio 11: ABSURDO! .....	68
Problema-desafio 12: Infinitos primos .....	71
Problema-desafio 13: Terno pitagórico .....	72
4.6 SOMATÓRIOS .....	73
Problema-desafio 14: O jovem Gauss .....	73
Problema-desafio 15: Corta-corta .....	74
4.7 PROBLEMAS DE CONTAGEM.....	75
Exemplo 4.3: Quantas marcações? .....	76
Problema-desafio 16: Colégio Militar do Rio de Janeiro, 2015-2016 .....	76
4.8 PROBLEMAS QUE ENVOLVEM FATORIAIS .....	77
Problema-desafio 17: Zeros em um fatorial .....	78
Problema-desafio 18: (Colégio Naval 2012-2013). .....	78
4.9 EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM $a \neq 1$ : SOMA E PRODUTO.....	79
Exemplo 4.4: A fatoração perdida .....	80
Exemplo 4.5: Equação do segundo grau com $a \neq 1$ .....	81
4.10 IDA E VOLTA .....	82
Exemplo 4.6: Não vale a volta .....	82
Exemplo 4.7: Ida sem volta.....	83
Exemplo 4.8: Vai e volta .....	84
4.11 O PRINCÍPIO DAS CASAS DE POMBO.....	84
Exemplo 4.9: Pombos binários .....	85
Exemplo 4.10: (Colégio Militar do Rio de Janeiro, 2016) .....	85
4.12 CONCLUSÃO .....	86
CAPÍTULO 5: MISCELÂNEA DE PROBLEMAS .....	87
5.1 O PROBLEMA DO URSO .....	87
Exemplo 5.1: O problema do URSO .....	88
5.2 PESSOAS CONHECIDAS.....	89
Exemplo 5.2: (Concurso EFOMM 2017) .....	89
5.3 PROBLEMA DOS BAÚS COM MOEDAS DE PRATA E OURO .....	91
Exemplo 5.3: Baús com moedas .....	92
5.4 TERNOS PITAGÓRICOS.....	93
Exemplo 5.4: Ternos pitagóricos.....	94
5.5 QUADRADO MÁGICO .....	95
Exemplo 5.5: Quadrado mágico.....	96
5.6 20 NÚMEROS NO QUADRO .....	99
Exemplo 5.6: 20 números no quadro .....	99
5.7 CONCLUSÃO DO TRABALHO .....	102
BIBLIOGRAFIA.....	103

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG. 2.1: Anatomia de um problema de matemática .....	19
FIG. 2.2: Diagrama do exemplo 2.8.....	21
FIG. 4.1: Questão da EPCAr, problema-desafio 6.....	44
FIG. 4.2: Resolução do problema-desafio 6 .....	46
FIG. 4.3: Anatomia de um problema de matemática. ....	50
FIG. 4.4: Anatomia de um problema de matemática, estendida.....	51
FIG. 4.5: Elipse do problema 9 .....	59
FIG. 4.6: Detalhe da elipse visualizada com o aplicativo Geogebra.....	60
FIG. 4.7: Observando a excursão do ponto P da elipse. ....	61
FIG. 4.8: Figura do problema-desafio 16.....	75
FIG. 5.1: Pessoas no Polo Norte. ....	86
FIG. 5.2: A primeira pessoa conhece outras três. ....	88
FIG. 5.3: É preciso ter mais duas pessoas.....	88
FIG. 5.4: O número mínimo é 6 pessoas.....	89
FIG. 5.5: Quadrado mágico de ordem 3. ....	93
FIG. 5.6: Primeira tentativa para o 9.....	95
FIG. 5.7: O 9 tem que ficar na célula média de uma borda. ....	95
FIG. 5.8: Os vizinhos do 9 devem ser 2 e 4.....	96
FIG. 5.9: Posicionando o 6 e o 8 .....	96
FIG. 5.10: Finalmente o 3 e o 7 .....	97

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é discutir a possibilidade e a conveniência de apresentar temas de aritmética no ensino médio e preparar possíveis aulas sobre o assunto. Será utilizado um contexto de problemas-desafio. Assim como uma criança que pratica esportes tem maiores chances de tornar-se um atleta quando adulto, um estudante que resolve problemas desafiadores terá mais facilidade em lidar com os desafios na sua vida profissional, qualquer que seja sua área de atuação. Nossa proposta é usar problemas-desafio nas aulas de matemática para contribuir com o desenvolvimento desta habilidade. A aritmética é uma ferramenta favorável para esta atividade, pois é normalmente a parte da matemática com a qual os alunos têm contato no início da sua vida escolar, e ainda assim possibilita a criação de problemas interessantes.

## **ABSTRACT**

The objective of this work is to discuss the possibility and the convenience of presenting topics of Arithmetics in high school and how to prepare possible classes on the subject. A problem-challenge context will be used. Just as a child who practices sports has a greater chance of becoming an athlete as an adult, a student who solves challenging problems will have an easier time dealing with challenges in his / her professional life, whatever his / her field of activity. Our proposal is to use challenge-problem in Mathematics classes to contribute to the development of this skill. Arithmetics is a favorable tool for this activity, as it is usually the part of Mathematics with which students have contact early in their school life, yet still creates interesting problems.



## CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

A habilidade para resolver desafios é importante em todas as áreas profissionais. Isto é verdade não apenas nos ramos técnicos, mas em diversas outras situações. Um comerciante, por exemplo, levará vantagem se for capaz de ter “idéias brilhantes” que resultem em aumento de suas vendas. O administrador muitas vezes precisa encontrar soluções para problemas de finanças, logística e até mesmo lidar com incompatibilidades entre membros de sua equipe. O talento para encontrar soluções brilhantes para problemas aparentemente insolúveis, pode ser adquirido e aperfeiçoado nos bancos escolares. O jovem jogador de xadrez poderá ser um bom estrategista, o jogador de pôquer poderá ser um bom negociador. Neste trabalho, sugerimos a resolução de problemas de matemática, principalmente da aritmética, como um treinamento para desenvolver essas competências.

Este é um trabalho de matemática que parte de dois princípios, não demonstrados aqui, porém intuitivamente aceitos a partir de observações de experiências reais. Esses princípios dizem respeito ao funcionamento do cérebro humano, área de pouco conhecimento na ciência:

1) O cérebro desenvolve habilidades de acordo com suas experiências anteriores.

2) Existem certas épocas propícias para determinados aprendizados, depois das quais, o aprendizado será mais difícil (janela de oportunidade).

Podemos argumentar que esses princípios são verdadeiros, a partir de experiências. Sobre o princípio 1, podemos argumentar que uma criança que não pratica atividade física provavelmente não será um atleta, mesmo que tente fazê-lo na vida adulta. Quanto ao princípio 2, basta observar como uma criança tem mais facilidade para aprender um idioma, em comparação com um adulto.

Não estamos demonstrando estes princípios, mas podemos supor como sendo válidos, já que um dos principais objetivos da escola é preparar as pessoas para as

atividades profissionais, e quanto mais complexas forem essas atividades, mais estudo será necessário.

Sendo assim, supondo como verdadeiros esses dois princípios (uma suposição bastante razoável), como se fossem axiomas, é correto afirmar que treinar a resolução de problemas desafiadores tornará uma pessoa mais apta a enfrentar desafios profissionais na vida adulta. Mais importante ainda, podemos considerar que existem janelas de oportunidade para o desenvolvimento dessas habilidades.

Tais argumentos são os princípios básicos para mostrar a conveniência de abordar problemas-desafio para os alunos, conveniência esta que será detalhada no capítulo 2.

O fato de serem escolhidos temas de aritmética é um ponto facilitador, já que é a parte da matemática conhecida há mais tempo pelos estudantes. É um segundo tópico importante deste trabalho, a discussão da possibilidade de tal apresentação de problemas, detalhado no capítulo 3.

O terceiro objetivo do trabalho, como proposto no tema, é detalhado nos capítulos 4 e 5, o preparo de possíveis aulas focadas em problemas-desafio. A diferença é que deixamos para o capítulo 4, aulas e problemas acompanhados de nossas observações sobre seu uso, nossas sugestões de como atingir determinados objetivos matemáticos na apresentação desses problemas, enquanto o capítulo 5 traz apenas uma coletânea adicional de problemas complementares.

Um típico trabalho de conclusão de curso, que aborda um tópico da matemática, deve abordar um embasamento e um detalhamento sobre o referido tópico. Esta não é uma abordagem apropriada em um trabalho como este, que trata sobre exercícios. Ao resolver uma lista de exercícios, podemos utilizar inúmeros tópicos diferentes, portanto não seria o caso de embasar e aprofundar todos eles. Como os embasamentos sobre os diversos tópicos usados nos problemas aqui abordados estão disponíveis na literatura, tal embasamento e detalhamento não serão o nosso foco. Faremos sim, a apresentação teórica de alguns dos temas utilizados nos problemas, da mesma forma como um professor revisa rapidamente a

teoria necessária em sala de aula, antes da resolução de um problema. Nosso foco será mais voltado para orientações ao professor que se propõe a resolver problemas desafiadores em sala.

## **CAPÍTULO 2: A CONVENIÊNCIA: PORQUE APRESENTAR PROBLEMAS-DESAFIO**

Em todas as profissões existem problemas específicos que devem ser solucionados pelos seus profissionais. Os problemas de matemática são o primeiro tipo que uma pessoa conhece, ainda na infância, mas problemas surgem em todo momento, em diversas áreas. Problemas escolares de matemática podem ser um treino para que no futuro, o adulto esteja mais preparado para resolver os problemas específicos da sua profissão.

### **2.1 MUITO DEPOIS DA MATEMÁTICA**

Em diversas áreas de atuação, seja em ciências exatas, humanas ou biomédicas, um profissional pode enfrentar problemas que demandam uma solução não óbvia, e é fácil encontrar inúmeros exemplos de tais situações. Em muitos casos, a solução é óbvia e mecânica, nada mais que rotina. Em outros casos as soluções são mais difíceis de serem visualizadas, em certos casos é preciso encontrar uma solução brilhante. Um pesquisador da área de matemática lida frequentemente com este tipo de desafio, assim como a maioria dos profissionais ligados às ciências exatas.

Frequentemente é preciso brilhantismo não apenas para entender as técnicas já conhecidas, mas também para encontrar soluções criativas para problemas em aberto. Podemos citar como exemplo, todos os ramos da engenharia, mas tal habilidade está longe de ser uma exclusividade das ciências exatas. Um médico muitas vezes precisa encontrar soluções brilhantes para os problemas de seus pacientes, entender a lógica das informações disponíveis para chegar à solução do problema. O investigador criminal não pode simplesmente programar computadores para que analisem todos os dados e descobrir o “culpado”, ou atirar a esmo para capturar os criminosos, é preciso uma investigação com inteligência, para restringir as possibilidades e entender os acontecimentos, estreitando assim os parâmetros de busca, aí sim usando a partir daí da ajuda de computadores, e em uma última etapa, a força policial. Mesmo um historiador, ou um arqueólogo, precisa especular, desconfiar, usar o brilhantismo para encontrar uma direção, e a partir daí, estreitar sua investigação, chegando assim aos resultados, auxiliados por uma investigação

direcionada. Este direcionamento investigatório requer competências similares às dos engenheiros e matemáticos nas soluções de problemas desafiadores.

Não existe um “curso de desenvolvimento de competências na solução de desafios”. Em muitos casos isto é considerado um dom, mas isto também pode ser uma competência desenvolvida nos bancos escolares durante a juventude. A escola serve, entre outras coisas, para que o futuro profissional aprenda as ferramentas que usará mais tarde em sua vida profissional. Pode ser usada também para que o estudante comece a exercitar situações que promovam o uso de um pensamento criativo que o levem com mais naturalidade ao enfrentamento de desafios reais.

Observando atentamente ao nosso redor, podemos encontrar inúmeros exemplos de desafios não vencidos, ou não enfrentados corretamente. Por exemplo, um sistema de trânsito mal planejado, a falta de determinada mercadoria em um estabelecimento comercial, ou toneladas de medicamentos vencidos em um depósito do poder público. A incapacidade de resolver desafios expõe a incompetência, provoca desperdício e até o caos.

As habilidades demonstradas por uma pessoa na sua profissão normalmente são habilidades desenvolvidas ao longo da vida, quase sempre durante a juventude, ou seja, os anos escolares. Uma habilidade requerida por um ator é a memorização rápida dos textos a serem interpretados, o “script”. É claro que um estudante que sempre teve dificuldade no estudo de matérias que exigem mais uso da memória (em um caso extremo, a “decoreba”) terá maior dificuldade na memorização desses textos. Um aluno que praticou esportes durante toda a infância, terá maior possibilidade de tornar-se um bom atleta.

Um outro exemplo, não relacionado com os estudos: um aluno completamente introvertido, com relacionamento ruim com seus colegas, tem maior probabilidade de não ser um bom profissional para liderar uma equipe. O que somos como adultos, está relacionado com o que fomos como jovens, e parte considerável da vida de um jovem, é a escola.

Sem entrar em teorias da psicologia e a formação do cérebro, e levando em conta que uma das principais missões da escola é a preparação para a vida adulta, podemos inferir que um treinamento feito na escola, voltado para desafios, dará uma contribuição para uma futura facilidade no enfrentamento e solução de desafios, nas mais diversas áreas de atuação profissional. O método aqui proposto para ajudar a desenvolver esta competência consiste em treinar o aluno com problemas-desafio de matemática.

## 2.2 EXEMPLOS DE PROBLEMAS QUE NÃO AJUDAM

A matemática não consiste em apenas resolver cálculos. Os cálculos são uma mera ferramenta, apesar de quase sempre necessários e importantes. A habilidade de resolver problemas fará uso desses cálculos, porém eles sozinhos não são suficientes para a resolução de desafios.

Podemos encontrar atualmente nos livros escolares, nas provas e mesmo nos concursos, vários tipos de “problemas” que não mereceriam receber tal nome. Poderiam no máximo ser considerados como exercícios para fixação da matéria.

### Exemplo 2.1: Desafio para criancinhas

*O desafio predileto da turma de Mariana é resolver expressões com frações. Vamos lá, resolva você também:*

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$$

Em nome da contextualização, exercícios simples recebem enunciados que resultam em uma forma de problema. Atualmente existe uma discussão pedagógica sobre contextualização, seus defensores sustentam que não devem ser apresentados simples cálculos com expressões sem vínculo com a vida cotidiana do aluno, então exercícios simples, que originalmente serviam para exercitar as operações matemáticas, recebem enunciados e passam a ser chamados de “problemas”. Na verdade esse tipo de “problema” não poderia ser considerado um problema, porque não passa de uma simples conta.

## **Exemplo 2.2: Pergunte logo a conta**

*Mariana tem um baralho especial, em que cada carta possui uma expressão matemática. Ela sorteia duas cartas, nas quais existem as seguintes expressões:*

*Carta 1:  $24x5 - 25x3$*

*Carta :  $2x3x5 - 3x6$*

*Pergunta-se: qual é o valor da soma dos valores das expressões dessas duas cartas?*

Sendo assim, devido a essa contextualização mal feita, onde os professores e autores evitam apresentar aos alunos simples expressões “sem aplicação prática na vida cotidiana do aluno”, adicionam-lhe enunciados que em nada contribuem para o aprendizado da matemática, mas sim, para tornar os livros maiores, com menos exercícios, e a mochila mais pesada. Certamente não foi este o objetivo original dos defensores da contextualização. Entretanto, por má vontade ou com o intuito de terminar logo a produção de seus livros textos e demais escritos matemáticos, os autores acabam enchendo seus enunciados com textos mal feitos, não atingindo o objetivo original da contextualização, mas sim, produzindo textos mais longos.

Os livros escolares então passaram a apresentar uma imensa quantidade de “problemas”, mas tratam-se de problemas resultantes de uma contextualização forçada e mal feita, que em nada contribuem para o desenvolvimento da habilidade do aluno em resolver problemas reais.

É bom contextualizar? Digamos que sim. Todos os professores e autores concordam com isso? Nesse caso as opiniões são diversas. Alguns acharão que deve-se contextualizar tudo, outros acharão o oposto. Outros acharão que deve ser feita uma dosagem. As ordens partem de cima para baixo, saindo do MEC em direção aos autores e professores. Nem todos eles concordarão, mas se a contextualização for obrigatória, é muito fácil simular a obediência de tal ordem. Basta colocar uma história qualquer em torno da questão antiga (por exemplo, fazer uma conta). A obrigatoriedade de apresentar no enunciado, uma situação da vida cotidiana do aluno, acaba por “matar” muitos problemas interessantes, ou criar

situações fora da realidade, ou o surgimento de problemas “bobinhos”, até mesmo em provas para ingresso na universidade.

### **Exemplo 2.3: Questão do ENEM, 2º simulado, 2016:**

*Em uma cidade, o mercado municipal desperdiça diariamente 30 toneladas de alimentos com pequenos defeitos, tornando-os sem valor comercial mas ainda assim próprios para o consumo. Na mesma cidade existem cerca de 40.000 pessoas abaixo da linha da pobreza, que poderiam consumir esses alimentos. Se essa quantidade de alimentos for igualmente distribuída por essas pessoas, quantos gramas de alimento cada pessoa receberia?*

Solução:  $30.000 \text{ kg} / 40.000 \text{ pessoas} = 0,75 \text{ kg/pessoa} = 750 \text{ g por pessoa}$ .

Neste problema o aluno precisa conhecer a relação entre unidades de medida de massa (tonelada, kg, grama) e saber realizar a divisão. Nada além disso. É uma mera execução mecânica de um cálculo. Apesar do aluno mostrar a competência para a realização desses cálculos simples, o problema em nada ajuda o aluno na capacidade de resolver problemas desafiadores, e também desafios na vida real que dependam da matemática.

Atualmente um aluno típico, com tempo limitado para estudo, tende a rejeitar qualquer questão desafiadora, pois deseja “focar no ENEM”, “resolver apenas questões ESTILO ENEM”. Preferem resolver as cerca de 300 questões que já apareceram nas provas dos anos anteriores, que resolver questões de matemática interessantes propostas pelos seus professores. “Isto não cai no ENEM...”. Rejeitam o caminho de usar parte do seu tempo de estudo para desenvolver uma competência matemática, e seguem a postura de resolver questões que já caíram em provas anteriores, e têm chances de caírem novamente, ou pelo menos, em estilo semelhante.

### **Exemplo 2.4: “Desafio”?**

*“Desafio” – “90% das pessoas erram este desafio. Calcule o valor de*



$$2+3 \times 4-1$$

Isto não é na verdade um desafio. É uma constatação de que a maioria dos alunos não conhece corretamente a precedência das operações matemáticas, ou seja, qual operação deve ser realizada antes, e qual deve ser realizada depois. O que ocorre é mesmo uma inabilidade no cálculo de expressões. As pessoas vão calcular primeiro a soma  $2+3=5$ , multiplicar o resultado por 4 e subtrair 1 no final, encontrando 19. Claro que o correto é realizar primeiro a multiplicação,  $3 \times 4=12$ , para depois realizar a adição e a subtração, chegando ao resultado 13. Isto não é o que chamamos de desafio, é apenas uma constatação de que os alunos saem da escola sem saber calcular expressões, sem saber a precedência dos operadores matemáticos. Nem mesmo uma calculadora ajuda nessa hora, porque é preciso fornecer as operações na ordem correta para a calculadora.

## 2.3 O COTIDIANO DO ALUNO

Já existe no Brasil um consenso de que o ensino da matemática deve apresentar exemplos vinculados ao cotidiano do aluno. Em um caso extremo, um exercício como “ $3+2=?$ ” deve ser substituído por um problema, com enunciado, que faça sentido no cotidiano do aluno. Por exemplo, “Juquinha foi à feira e comprou 3 maçãs. A mãe deu a ele mais duas maçãs. Com quantas maçãs Juquinha ficou?”

O problema com direcionar a matemática para o cotidiano do aluno é que na maioria esmagadora das situações, o aluno usará a matemática para fazer as quatro operações, com números inteiros ou decimais. Dificilmente o aluno encontrará na vida cotidiana, operações com potências. Situações irreais surgem da tentativa de encaixar tópicos matemáticos na vida cotidiana, como uma questão do ENEM sobre logaritmos, que dizia que a curva da função logarítmica lembrava o formato do vidro da janela de um automóvel. Ora, ninguém tratará o vidro de um automóvel como um gráfico de função logarítmica, as pessoas irão apenas abrir ou fechar o vidro. A maior parte dos tópicos matemáticos não têm aplicação direta na vida cotidiana, mas isto não deveria ser usado como um critério para não ensinar matemática.

Em artigo de título “O MEDO DA MATEMÁTICA”, [Fragoso 2001], é dito que “é uma inutilidade apresentar o problema: “*Divida a expressão  $x^{16}-a^{16}$  por  $x^2-a^2$* ”, porque na vida real, o aluno nunca encontrará uma situação em que terá que elevar um número à décima-sexta potência”. O artigo faz críticas à apresentação de expressões matemáticas complexas as classifica como “problemas inúteis”. Tal argumentação passa a ser um critério para não ensinar esse cálculo, que por sinal é bastante simples, aplicando a fatoração da diferença de quadrados:

### **Exemplo 2.5: O medo da matemática**

*“Divida a expressão  $x^{16}-a^{16}$  por  $x^2-a^2$ ”*

$$x^{16}-a^{16} = (x^8+a^8)(x^8-a^8) = (x^8+a^8)(x^4+a^4)(x^2+a^2)(x^2-a^2),$$

daí vemos que a primeira expressão é um múltiplo da segunda expressão, que após a simplificação fica:

$$(x^8+a^8)(x^4+a^4)(x^2+a^2)$$

Então, o argumento de que nada na vida real será elevado à décima-sexta potência, decreta-se que este é um exercício inútil. Pode-se argumentar então que não se deve ensinar a fatoração da diferença de quadrados, ou então que deve ser ensinado, no máximo, até o expoente 4, ou outro expoente pequeno.

Muitos problemas matemáticos têm como característica, a de parecerem inicialmente problemas complicados e difíceis, mas que sofrem grandes simplificações quando o aluno conhece as propriedades matemáticas. Na verdade muitos desses problemas admitem uma solução muito simples, desde que o aluno aplique as propriedades aprendidas. O fato de, por exemplo, um especialista em pedagogia ou educação não conseguir “enxergar” a solução trivial, visto que não é sua área, não deve ser usado como pretexto para suprimir os ensinamentos matemáticos.

Devemos sempre ter em mente que o Brasil tem figurado nas últimas colocações nos testes internacionais voltados para a avaliação do ensino. Não irá melhorar simplesmente eliminando ensinamentos, como limitar a máxima potência que pode ser usada em uma fatoração.

Um paradigma da discussão neste trabalho é, não aumentar, nem reduzir a quantidade de horas de estudo, mas usar com mais eficiência o tempo de estudo. Hoje em dia os professores têm que ensinar frações todos os anos. É ensinado pela primeira vez, o aluno não aprende direito. Nos anos seguintes, mais frações, e mais, e mais. O aluno chega ao ensino médio com “medo de frações”, e o professor, ao ensinar análise combinatória ou probabilidades, precisa “recordar” como trabalhar com frações. Daí surge uma carga horária elevada, porém de baixa qualidade.

Cabe aos matemáticos, sejam pesquisadores ou professores, zelar pela qualidade do aprendizado, e não pela redução dos tópicos ensinados. Este trabalho sugere um caminho para melhorar a qualidade do ensino na matemática, e também uma forma de torná-la mais interessante, através de desafios. Desafios podem tornar o aprendizado mais interessante e eficiente.

É bom que os problemas tenham um enunciado. Isto obriga o aluno a ler um texto sobre uma situação da vida real, e encontrar o caminho matemático que leva à solução, determinando quais cálculos devem ser feitos, e finalmente resolvendo os cálculos necessários. Mas a “historinha” que acompanha o problema deve ser convincente, sob pena do aluno achar que aquilo que está aprendendo é inútil, que só serve para situações “fabricadas”, sem vínculo com a vida real.

### **Exemplo 2.6: Pergunte logo a conta**

*O estádio de futebol “Mané Rabisco” foi construído em 1966, durante a copa do mundo, e já sediou mais de 1900 partidas de vários campeonatos. Tem capacidade para 50.000 pessoas e estacionamento para 2000 veículos ... bla bla bla ... O número de gols já marcados nas suas partidas é o resultado da expressão:*

$$158x(20+3x79 + ...$$

*Pergunta-se: qual foi o número de gols marcados no estádio?*

Certo, o objetivo do problema era que o aluno mostrasse que sabe identificar dados irrelevantes para a solução (no caso, 1966, 1900, 50.000, 2000, informações que não estão relacionadas com o cálculo a ser feito, e também saber calcular a expressão desejada. Não há nada de errado pedir ao aluno que simplesmente calcule uma expressão, não há benefício algum no fato do aluno imaginar que está calculando o número de gols, nem em dizer que o tema da prova é futebol. Poderia ser usado um meio termo, algumas questões serem simplesmente “calcule a expressão”, e outras questões serem contextualizadas, mas com enunciados realistas. Haja imaginação para um professor de matemática deixar de lado a matemática e perder um tempo enorme inventando criativas histórias contextualizadas para os enunciados dos seus problemas.

### **Exemplo 2.7: Carrapatos (Colégio Militar do Recife, 2014-2015)**

*Um carrapato (ou carraça), pertencente à ordem Acari, encontra-se difundido em diversas regiões do planeta, principalmente em fazendas, pois o seu principal hospedeiro são os animais. É um dos principais vetores de muitas pragas bla bla bla.... As fêmeas adultas podem atingir até 11 milímetros de comprimento, e os machos adultos podem atingir até 3,5 milímetros de comprimento. Suponha que seja formada uma fileira de carrapatos dessa espécie, um atrás do outro, todos adultos com comprimento máximo, e que cada macho esteja localizado entre duas fêmeas. Qual a quantidade máxima de fêmeas necessária para ocupar essa fila, num intervalo de dois metros?*

Nada contra exigir do aluno a habilidade de ler um texto e compreender o que está sendo dito (mesmo que já exista para isso, uma prova de interpretação de texto). É perfeito exigir do aluno a conversão de medidas, entre metros e milímetros. Apenas um ponto contra: quem vai obrigar os carrapatos a formarem uma fila, ainda mais com machos e fêmeas alternados? É difícil organizar seres humanos em fila, que dirá carrapatos... É um enunciado que mostra uma situação surreal. O que há

de errado em fazer um enunciado apenas envolvendo números, que podem ser apenas 11 e 3,5, e que sua soma é 2000, etc?

Apresentar problemas com enunciados surreais pode fazer o aluno pensar que o conceito matemático que está aprendendo é inútil.

## 2.4 ANATOMIA DE UM PROBLEMA DE MATEMÁTICA

Ao se deparar com um problema de matemática, a primeira coisa que o aluno vê é o ENUNCIADO, uma “estorinha”, que é a descrição de uma situação. No meio do enunciado existem informações importantes que levam à solução, e eventualmente algumas outras informações que não passam de enfeites. Algumas vezes essas informações só servem para confundir o aluno. Em certas situações é fácil o aluno entender que uma certa informação não será necessária na resolução, como por exemplo, dados sobre o estádio de futebol que dizem respeito à capacidade em número de pessoas e de carros, quando é preciso apenas calcular o número de gols. Em certos enunciados mais maliciosos, pode não ficar claro, à primeira vista, que uma determinada informação não será necessária. Mas em linhas gerais, a primeira coisa que o aluno vê é uma descrição da situação do problema, a segunda coisa que vê é a seção RESPOSTA, ou seja, o que o problema está pedindo. O ENUNCIADO e a RESPOSTA são as partes visíveis do problema, ou seja, o aluno deve encontrar a RESPOSTA que atende ao ENUNCIADO.

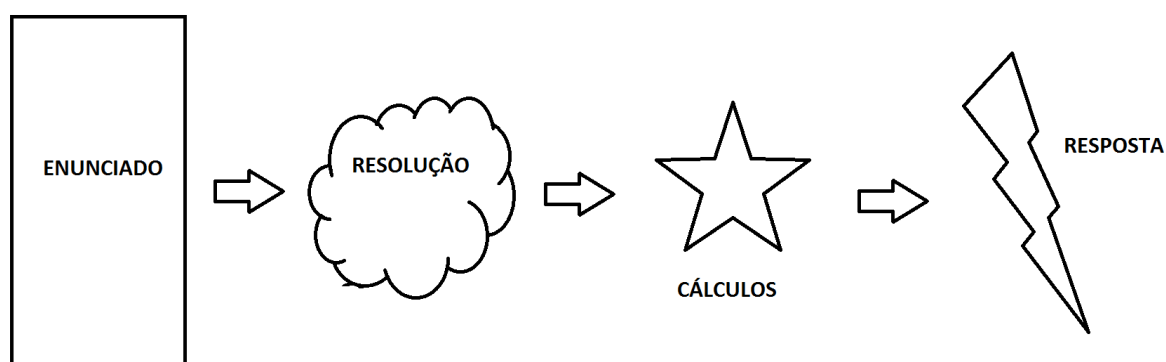


FIG. 2.1: Anatomia de um problema de matemática

Por trás de tudo isso, normalmente oculto, está a parte mais importante do problema: A RESOLUÇÃO, que é o caminho matemático que nos levará à

RESPOSTA. Este trabalho é exatamente o que o professor de matemática faz a maior parte do tempo: transmitir ao aluno a habilidade de resolver matematicamente o problema, a partir dos dados do enunciado. Os CÁLCULOS são a ferramenta para colocar a solução matemática em prática. A parte mecânica, quase automática, função que em alguns casos é delegada a calculadoras e computadores. É um pensamento muito simplório pensar que um problema de matemática não passa de uma execução de cálculos, que devem ser cercados por algum tipo de estorinha para ficar “contextualizado na vida cotidiana do aluno”. Executar cálculos é a parte que o computador pode fazer, praticamente sozinho, de forma rápida e precisa. Entretanto, “matar o problema” (RESOLUÇÃO), é a parte que cabe ao ser humano. Sendo assim, “matar um problema” que tem seu enunciado baseado em números, servirá perfeitamente para treinar esta habilidade (resolver problemas), sem precisar usar carrapatos e gols, situações que podem levar ao aluno a desconfiar que não existe aplicação real para aquilo que está aprendendo.

Assim como não há nada de errado em usar como personagens das estorinhas dos enunciados, os NÚMEROS, ao invés de carrapatos e gols, também não há nada de errado em treinar a execução de CÁLCULOS como simples expressões, sem enunciados artificiais. Uma postura como esta reduziria drasticamente a necessidade de criar enunciados surreais, ou artificiais em exercícios de matemática. Deixemos o aluno treinar que  $3+2=5$ ,  $4+3=7$ ,  $8+7=15$ , ao invés de usar uma estória “Juquinha foi à feira e comprou 3 laranjas...” (modo que até pode ser eventualmente usado, mas não de forma obrigatória). Obviamente o aluno vai querer entender porque está fazendo aquelas contas, a resposta é simples: porque quando ele for resolver os problemas, normalmente precisará fazer cálculos na sua etapa final. Deixemos para apresentar enunciados com estórias para os alunos quando realmente tivermos uma estória convincente, dentro da realidade, e não criando situações como colocar carrapatos em fila.

## **2.5 CONTEXTUALIZAÇÃO CONVINCENTE**

Seria uma tarefa hercúlea criar boas contextualizações para todos os problemas e exercícios de um livro didático, por exemplo. Um efeito positivo no sentido de mostrar ao aluno a utilidade daquilo que está aprendendo seria obtido usando

poucas, mas boas contextualizações, mesmo que a maioria dos problemas envolvessem apenas números. Façamos como exemplo uma tentativa de aplicação real da resolução de equações do segundo grau, assunto sobre as quais muitos fazem piadas como “mais um dia se passou sem que eu usasse a maldita fórmula”.

### Exemplo 2.8: Equação do segundo grau

Uma festa para 500 convidados vai ser realizada em uma área em torno de uma pista de dança na forma de um quadrado de 10 metros de lado. Este quadrado irá abranger o palco e a pista de dança. Em torno de três dos lados da pista deverão ser dispostas mesas, cada uma para quatro pessoas, portanto serão usadas ao todo, 125 mesas.

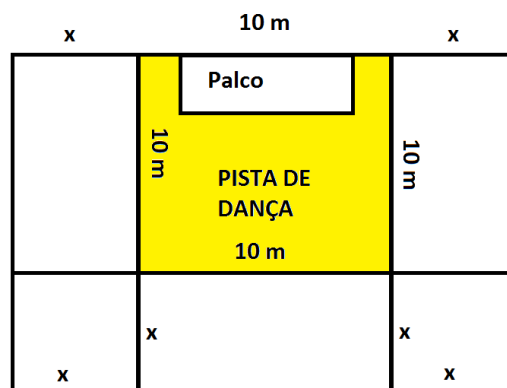


FIG. 2.2: Diagrama do exemplo 2.8

A área ocupada pelas mesas deverá ter medidas iguais, tanto na parte frontal como nas laterais, abrangendo um número  $X$  de mesas, como mostra a figura. Cada mesa ocupará ao todo um quadrado de 2m por 2m de lado, o suficiente para abrigar a mesa em seu centro, as quatro cadeiras e a área de circulação entre as mesas. Pergunta-se qual é o valor de  $X$ , ou seja, o número de fileiras de mesas a serem usadas em torno da pista de dança.

Se cada mesa ocupa uma extensão de 2 metros, a medida de 10 metros de lado para a área central abrangerá 5 fileiras de 2 metros de lado. De acordo com a figura, o número total de mesas será igual ao de dois quadrados de lado  $x$ , ou seja,  $2x^2$ , e mais três retângulos de dimensões  $x$  fileiras por 5 fileiras, ou seja,  $3 \cdot x \cdot 5 = 15x$  (ver figura). O total deverá ser 125 mesas, então ficamos com:

$$2x^2 + 15x = 125$$

$2x^2 + 15x - 125 = 0$ , que resolvido fica  $x = 5$  ou  $x = -12,5$ .

Como  $x$  deve ser um número inteiro positivo, a solução é  $x=5$ .

Portanto, temos aqui um problema da vida real que é resolvido através de uma equação do segundo grau.

O mesmo problema poderia ter outras abordagens, por exemplo, conhecendo o valor de  $x$ , ou seja, o número de fileiras de mesas, determinar o número total de convidados (ou de mesas) possíveis. Claro que no caso o problema poderia parecer irreal, ou seja, determinar quantos convidados podemos ter, em função do número de fileiras de mesas, normalmente na vida real o número de convidados é o primeiro requisito, e não o número de mesas. Entretanto, mesmo assim devermos estar aptos a resolver problemas na ordem inversa, pois problemas de vários tipos podem surgir.

O professor que tenta contextualizar tudo pode ser levado a apresentar problemas surreais, como aquele dos carrapatos. Os alunos certamente ficarão mais convencidos da importância dos tópicos ensinados se forem apresentados problemas que cite simplesmente números, justamente com um número reduzido de contextualizações, mas que sejam dentro da realidade e da praticidade.

Os números podem ser bons personagens para os enunciados dos problemas. Pode ser um estimulante exercício para os alunos, encontrar situações da vida real em que os números sejam substituídos por elementos da vida real, representando medidas ou quantidades de objetos. Mas não carrapatos, eles nunca irão formar uma fila.

## **2.6 UMA TENTATIVA DE DESAFIO**

A aritmética é um bom assunto para introduzir problemas desafiadores para os alunos, pois a maioria dos seus conceitos são simples, introduzidos nas primeiras séries do ensino fundamental, e com maiores chances de já serem dominados (ou pelo menos lembrados) pelos alunos.



Observe que os exemplos citados até aqui (Exemplo 2.1 a Exemplo 2.8) não são o que estamos propondo como problemas-desafio. Foram exemplos usados apenas para ilustrar ineficiências em problemas de matemática, com exceção do Exemplo 2.8, usado para ilustrar uma contextualização realista. Entretanto, mesmo este Exemplo 2.8 não é o que chamamos ainda de problema-desafio. É apenas um exemplo de aplicação direta da equação do segundo grau. Ainda assim sua apresentação aos alunos é muito oportuna. O aluno deve lidar com problemas-desafio, mas também com problemas de aplicação direta, contextualizados, desde que seja uma contextualização realista. Finalmente deve lidar também com exercícios numéricos para treinamento dos conceitos matemáticos ensinados. Sugerimos usar a sequência didática seguindo a ordem:

- Teoria
- Exemplos
- Exercícios numéricos
- Problemas de aplicação direta
- Problemas-desafio

É fundamental que esta sequência seja dividida em unidades pequenas. Nunca devemos dar uma grande quantidade de teoria, para depois aplicar uma grande quantidade de exercícios. Devem ser usados tópicos menores que englobam toda a sequência acima. No final de um capítulo sobre um determinado tema, pode ser aplicada uma série de exercícios de revisão e problemas.

Vejamos agora um exemplo do que estamos considerando como um problema-desafio:

### **Exemplo 2.9: MMC e restos**

*Qual é o menor número que, se for dividido por 3, deixa resto 1, dividido por 5 deixa resto 1, e dividido por 7, deixa resto 1?*

Antes da solução, observemos o estilo da questão. Não existe contextualização, uma “situação da vida cotidiana do aluno”. Ao invés de uma história mirabolante para encaixar a relação numérica na vida real, temos simplesmente uma propriedade matemática. O enunciado é pequeno, claro, e isento de uma eventual situação surreal resultante de uma tentativa de contextualização. Nada de obrigar carrapatos a formarem uma fila, nem de observar que o formato do vidro de um carro lembra o gráfico da função logaritmo. Do ponto de vista matemático, o aluno terá que lidar com divisão de números naturais, divisibilidade e MMC.

A solução do problema é simples. Se subtrairmos 1 deste número, o resultado não deixará mais resto ao ser dividido por 3, 5 e 7, e é o menor possível. Então este resultado, ou seja, o número menos 1, é o menor múltiplo comum (MMC) entre 3, 5, e 7. Sendo assim, o número pedido é o MMC entre 3, 5 e 7, mais 1, ou seja, 106.

Não existe um ensinamento que leve o aluno a ter a idéia de subtrair 1 do número dado, e a partir daí chegar à solução. Esta etapa de subtrair 1 é uma pequena amostra de fazer alguma coisa que “não está nos manuais” para chegar mais perto da resposta. Tal habilidade, o aluno só desenvolverá se for habituado a lidar com situações desafiadoras. A ausência de desafios resulta em alunos inertes e incapazes de lidar com situações fora do cotidiano em suas vidas profissionais.

## **2.7 CONCLUSÃO**

O presente capítulo abordou a conveniência em apresentar temas de aritmética nas aulas de matemática do ensino médio. Procuramos mostrar, não cientificamente, mas através de exemplos, que intuitivamente, podemos considerar que qualquer aprendizado realizado na época escolar tenderá a se refletir no futuro, e o aluno levará este aprendizado para a vida adulta. No tocante específico à habilidade de lidar com situações desafiadoras, podemos considerar que uma forma de desenvolver esta competência é propor ao aluno, problemas-desafio. Paralelamente, abrimos uma discussão sobre a conveniência da contextualização, tema que apresenta diferentes níveis de aceitação entre os professores. Argumentamos que para atingir o objetivo de desenvolver a capacidade de enfrentar desafios a partir do

costume de resolução de problemas desafiadores de matemática, não é necessariamente obrigatório que usemos apenas situações contextualizadas.

## CAPÍTULO 3: A POSSIBILIDADE: SUGESTÕES PARA A IMPLEMENTAÇÃO

Suponha que concordemos que seja conveniente apresentar tais problemas, partindo dos argumentos apresentados no capítulo 2. Problemas-desafio existem muitos, então basta o professor apresentá-los, mas falta um elemento a ser discutido, que é a possibilidade, ou seja, como tornar possível tal apresentação. Procuramos colaborar nesta tarefa com os professores que de dispuserem a executá-la, através de, não apenas alguns problemas e aulas preparadas, mas de algumas sugestões de posturas e procedimentos, apresentados no presente capítulo. Portanto neste capítulo vamos discutir o segundo objetivo, que é a discussão da possibilidade de tal apresentação, ou seja, como torná-la possível sem que para isso seja preciso alterar a estrutura de ensino.

Um típico professor de matemática tem plenas condições de levar à sua classe, problemas-desafio, já que existem muitos problemas que envolvem conceitos matemáticos simples, que raramente exigem cálculos complicados. Entretanto é importante que o professor tenha um bom repertório de problemas-desafio clássicos, além de disposição para lidar com problemas fora da rotina. Este professor não pode assumir uma postura como “resolverei dúvidas apenas dos problemas que estão no nosso livro texto, nada de trazer questões de fora.”. A apresentação de problemas-desafio deve ser feita por professores que não fiquem limitados ao ensino rotineiro da sala de aula. Pode ser por exemplo, um professor que tenha o hábito de acompanhar questões da OBM e de concursos mais exigentes.

O fato de um professor não estar “atenado” com problemas desafiadores externos (OBM, concursos, etc.) não o torna inapto a ser encarregado de apresentar problemas desafiadores. Mesmo sem acompanhar novos problemas, poderá formar com o passar do tempo, um “reportório” de problemas-desafio ministrado em anos anteriores, e assim terá muito a contribuir para os alunos. Apenas recomendamos que não seja usada a postura de simular a resolução de um problema “ao vivo”. É mais honesto perante os alunos usar uma postura como “já resolvi esse problema antes, deixe-me lembrar como é a solução”. Assim será mais fácil, caso não consiga solucionar um problema, dizer “esse problema é danado, vou tentar resolver depois com calma e trago a solução para vocês”.

### **3.1 O PROFESSOR DE EXERCÍCIOS**

Sendo uma matéria importante, a matemática é tipicamente ministrada em 6 tempos de aula por semana. Muitas vezes a matéria é ministrada por dois professores, com divisão por assunto, ou então sendo um professor responsável pela teoria, e outro professor para exercícios. Em uma divisão como esta, será perfeitamente viável o professor de exercícios usar parte do seu tempo para as questões desafiadoras. Um professor somente para exercícios poderia assumir múltiplas funções simultâneas, como:

- 1) Revisão de matemática de séries anteriores;
- 2) Exercícios das matérias ministradas pelo outro professor;
- 3) Resolução de problemas-desafio.

Dentro dos problemas-desafio, poderiam constar questões caídas em vestibulares, sobre as matérias ministradas, questões de olimpíadas de matemática, e questões-desafio em geral.

### **3.2 GEOMETRIA, ÁLGEBRA E ARITMÉTICA**

De nada adianta apresentar questões desafiadoras, se o aluno nem mesmo sabe resolver problemas simples, de execução mecânica. Pode ser mais urgente reforçar os conhecimentos do aluno, relativos a matérias já ensinadas. De nada adiantaria uma questão desafiadora de geometria (exemplos, triângulo de Langley ou reta de Simson) quando o aluno mal sabe a Lei Angular de Thales. A típica falta de base predominante nos estudantes brasileiros pode inviabilizar o desenvolvimento da competência para resolver problemas desafiadores. Este é um problema adicional da educação no Brasil, que deve ser também abordado, mas para que não fique inviabilizada a apresentação de problemas desafiadores proposta neste trabalho, os professores podem utilizar a aritmética básica como tema para os problemas desafio. Quanto mais básica é a aritmética, menores tenderão a ser as dificuldades dos alunos. Passando por tabuadas, quatro operações e sistema decimal, é fácil lembrar os conceitos de fatoração, MMC, MDC e números primos, o que já possibilita a realização de uma série de problemas desafiadores.

Em um estágio onde o aluno tem menos deficiências em álgebra e geometria, tais matérias podem ser também usadas. Mas a maior candidata para tais atividades é a aritmética, por permitir a elaboração de problemas interessantes usando conceitos matemáticos mais simples.

Na sequência dos problemas de aritmética básica, novos conceitos de aritmética mais avançada podem ser introduzidos como ferramentas para a resolução dos problemas, conceitos esses que não são tipicamente apresentados aos alunos de ensino fundamental e médio, como princípio das casas de pombos, desigualdade das médias, princípio da indução finita,

### 3.3 O QUE AINDA NÃO FOI ENSINADO

Algumas vezes um aluno, por interesse ou mera curiosidade, pode levar à sala de aula um tópico que ainda não foi ensinado. Alunos que fazem isso o tempo todo são casos especiais, e deveriam até mesmo ter atendimentos especiais. Por outro lado, alunos regulares podem eventualmente apresentar tal situação. Nossa sugestão é que o professor incentive essas iniciativas, de forma que encoraje outros alunos.

#### **Exemplo 3.1: Mestre, incentive seus alunos!**

*Isto não é um problema matemático, mas sim, um caso ocorrido em sala de aula. Em uma turma de quarto ano, a professora coloca na prova a seguinte pergunta: “Existe algum número menor que zero?”. Um aluno, por já ter visto de relance estudos do irmão mais velho, respondeu: “Sim, existe -1 e todos os números negativos”. Antes da correção, o aluno comentou o fato com os colegas, que disseram: “Isso não existe, seu burro!”. Todos os alunos debocharam da resposta dos números negativos. A professora entretanto, parou a aula e explicou para a turma que, de fato, existem números menores que zero, como -1 e uma infinidade de números negativos. Explicou ainda que naquele ano, eles estavam estudando apenas os números naturais, mas que em séries futuras aprenderiam outros conjuntos numéricos, começando com o conjunto dos números inteiros, tanto os positivos quanto os negativos.*

Vemos que nesse caso a professora estava preparada para abordar um tópico que não seria ainda ensinado. É preciso apoiar a promoção do conhecimento, lidando com o caso de quando um aluno trata de um tema que não será ainda ensinado, mas o será futuramente. Professores devem estar aptos a praticar tal abordagem. Caso isto não seja feito, corre-se o risco desses alunos perderem o interesse pela matemática.

### **Exemplo 3.2: Zahlen**

*Mais um caso em sala de aula Ao apresentar os conjuntos numéricos, o professor falou no conjunto dos números naturais, indicado por  $N$ , e no conjunto dos números inteiros, representado por  $Z$ . Muito piadista, o professor disse que foi escolhido o símbolo  $Z$  porque era o conjuntos “doZinteiros”. Mas tarde um aluno pesquisou na Internet e descobriu que o  $Z$  era originário da palavra alemã ZAHLEN, que quer dizer, “número”, “algarismo”. No dia seguinte o aluno levou sua descoberta ao professor, cuja resposta foi “ah, eu já sabia disso”.*

O professor perdeu uma excelente oportunidade de incentivar o aluno, pelo seu interesse em pesquisar além da aula, coisa que é cada vez mais rara. Era óbvio que o professor sabia a origem do  $Z$ , afinal ele estudou matemática por vários anos, mas ele preferiu fazer sua brincadeira doZinteiros, suprimir a informação e desmerecer a descoberta do aluno.

## **3.4 A TIA NÃO ENSINOU ISSO**

Tente ensinar matemática para uma criança, fora da escola, e você vai ouvir essa frase. Por exemplo, ao ajudar seu filho com o dever de casa, passe um exercício um pouco diferente e vai ouvir essa observação. É uma resistência natural do aluno, que quando novo, tende a reagir ao desafio, ao desconhecido, com esta desculpa para não aprender nada além do que é preciso para cumprir o mínimo na sala de aula.

Anos mais tarde, o aluno usa uma frase mais adulta, mas que mostra a mesma acomodação: “É preciso focar no ENEM”. Ou seja, o aluno não faz nada além de cumprir o esforço mínimo de fazer as 300 questões de matemática de provas anteriores do ENEM (e mais 45 novas a cada ano), ainda assim posteriores a 2009

pois nesse ano ocorreu uma mudança no estilo da prova. Como se todo o restante não fosse matemática. Mesmo abordando as mesmas partes da matemática, o aluno tende a rejeitar aqueles problemas que não parecem questões do ENEM. Este trabalho não aborda uma solução para o problema, apenas alerta o professor para que esteja preparado para lidar com tais resistências dos alunos. Como “no ENEM não cai isso...”. Nossa recomendação é selecionar algumas questões do ENEM e apresentar questões-desafio que utilizem o mesmo tema, as mesmas propriedades matemáticas, e mostrar que o estudo não se baseia em resolver questões que têm chance de aparecer em provas de forma idêntica, mas explorar propriedades matemáticas que serão usadas na resolução de outras questões.

### **3.5 FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS**

Um dos desafios dos professores atuais é tornar suas aulas atrativas, como forma de incentivar o aprendizado. Uma das formas possíveis para tornar uma aula atraente é usar programas matemáticos, quando existem disponíveis os recursos para tal, visando facilitar o entendimento e melhorar o aprendizado. Certas matérias são mais beneficiadas que outras, como é o caso da geometria. Também para a álgebra, ferramentas computacionais existem para facilitar a manipulação de gráficos de funções. Na aritmética, por sua vez, a repercussão tende a ser menor, mas ainda é possível encontrar aplicativos construídos com programas como GEOGEBRA e DESMOS, disponíveis gratuitamente, por exemplo, para o ensino de frações e para ilustrar problemas, com simples animações e diagramas. O filósofo chinês Confúncio disse que uma imagem vale mais que 1000 palavras. Qualquer professor pode localizar e utilizar aplicativos prontos e gratuitos, produzido com essas plataformas, e utilizá-los em suas aulas. É importante que os alunos usem as ferramentas computacionais, não para substituir a sua própria capacidade de resolver os problemas (isto é uma atribuição humana), mas sim para facilitar e tornar atrativa a atividade de resolver desafios matemáticos.

### **3.6 USE A SEGUINTE REGRA, OK?**

Da forma como o ensino está organizado, começamos a estudar matemática cedo, antes de termos a capacidade de entender uma exposição baseada em axiomas, definições teoremas. Começamos a aprender matemática com uma série de regras.



Por exemplo, uma criança de 9 anos poderá aceitar perfeitamente que os números múltiplos de 3 são aqueles cuja soma dos algarismos também é um múltiplo de 3, e utilizar isto como uma “regra”, mas não terá, nessa idade, a capacidade de entender uma demonstração matemática para este resultado. O aluno também aceitará de bom grado que não pode ser feita uma divisão por zero porque o professor disse que não pode, por outro lado pode ser impossível argumentar matematicamente porque esta divisão não pode ser feita.

Essa postura traz como resultado, um estudo de matemático baseado em regras a serem memorizadas. Tanto o aluno aceita a memorização de regras, quanto o professor também fica acostumado a ensinar baseado em “regrinhas”. Daí surgem mais e mais regras: “para multiplicar frações, multiplicamos numeradores e denominadores”. “Para dividir frações, multiplica-se a primeira fração pelo inverso da segunda”, “para multiplicar números inteiros, o resultado será negativo se os sinais forem diferentes, positivo se os sinais forem iguais”. “Para multiplicar números decimais, fazemos a multiplicação como inteiros, depois andamos com a vírgula uma quantidade de casas decimais igual à soma das quantidades das casas decimais dos números que foram multiplicados”. “Para encontrar o número de divisores de um número natural, devemos decompô-lo em fatores primos então somamos 1 a cada expoente e multiplicamos os resultados”. “Para multiplicar potências de mesma base, repetimos a base e somamos os expoentes”. ...

A lista de regrinhas a serem memorizadas aumenta cada vez mais, até que chega-se a um colapso. Muitos alunos que passam a odiar matemática, digamos, aos 13 anos de idade, eram bons alunos quando tinham 8 anos. Os motivos para essa decadência podem ser vários, mas o aumento da quantidade cada vez maior de regrinhas memorizadas sem dúvida contribui para o problema. O aluno chega ao ensino médio sem saber, por exemplo, como calcular o aumento percentual resultante de dois aumentos sucessivos, um de 20% e outro de 30%. Muitos simplesmente somam as porcentagens e encontram 50%. Outros sabem que o cálculo não é assim, mas não sabem usar o cálculo  $1,2 \times 1,3 = 1,56$ . Ao invés disso, decoram mais uma regra, um “macete”: Soma, anda com a vírgula e multiplica, então fazem  $20+30=50$ , andam com a vírgula e ficam com 2 e 3, depois multiplicam  $2 \times 3=6$ , ficando assim com 56%. Não entendem o que está sendo feito,

simplesmente memorizam este macete, e aplaudem o professor por ensinar mais esse grande macete facilitador. Memorizam e semana que vem esquecem.

Nossa sugestão aos professores é que procurem, sempre que possível, justificar as “regras” que estão ensinando, mesmo que isso seja feito através de exemplos. A “regrinha” é cômoda para o professor, pois os alunos conseguirão fazer os exercícios da matéria que está sendo ensinado no momento, mas dentro de pouco tempo esquecerão, e não estarão formando assim a escada de conhecimento que a matemática exige.

O aluno que faz seu estudo de matemática baseado na memorização de regras estará com a mente fechada para compreender demonstrações, ou mesmo justificativas matemáticas em séries posteriores.

A capacidade de compreender uma “justificativa matemática” está relacionada com a capacidade de resolução de problemas desafiadores. Não existe uma coisa sem a outra.

### **3.7 PROVE QUE**

Os alunos tendem a repudiar as demonstrações matemáticas, simplesmente porque “não cai demonstração na prova”, as questões de provas e concursos são na maioria das vezes, para marcar a letra certa: (A), (B), (C), (D), (E).

O aluno acha então que nunca precisará fazer uma demonstração, porque demonstrações não são cobradas em provas (provas objetivas substituíram as provas discursivas). Entretanto o maior objetivo de uma demonstração não é o seu uso em provas, mas sim, reduzir o nível de “decoreba” dentro da matemática, e tornar cada tópico, uma consequência natural de tópicos anteriores. Essa construção resulta em um conhecimento muito mais sólido. Infelizmente o aluno não se incomoda em memorizar mais uma regrinha, para que não precise compreender a árdua demonstração de teoremas.

A forma como professores aprendem a demonstração de teoremas e resultados matemáticos, em um curso de licenciatura, bacharelado ou pós graduação, não é a forma adequada à compreensão de estudantes na infância ou adolescência. Cabe aos professores adaptar essas “demonstrações”, mesmo que sejam feitas de modo informal, mas que despertem no aluno, a necessidade de buscar e entender a justificativa matemática para cada resultado, e não simplesmente apresentar regras a serem memorizadas.

Sugerimos que os professores distribuam as questões apresentadas em aulas, e também nas suas avaliações, em 1: Exercícios – aplicações diretas e mecânicas de cálculos relacionados ao conteúdo ensinado; 2) Problemas – Situações reais que levem o aluno a pensar, ler um enunciado e formular os cálculos necessários para chegar à solução. Devem estar incluídos os problemas de solução direta, e também os problemas-desafio. 3) Demonstrações informais, justificativas matemáticas, para que o aluno mostre o seu entendimento da matéria, fugindo da simples memorização de regras.

### **3.8 QUEBRAR A CABEÇA**

Considere uma pessoa sentada em uma cadeira, assistindo a um jogo de basquete entre dois times profissionais. Considere uma segunda pessoa, tentando jogar basquete dentro de um time de amadores. Essa pessoa não consegue fazer uma cesta, nem passar ou receber uma bola. Comete faltas o tempo todo, não sabe como conduzir a bola. Qual das duas pessoas estará mais apta a jogar uma partida de basquete amador? Na certa será a segunda pessoa.

Um aluno que assiste a resolução de 20 problemas de matemática não aprenderá mais que outro aluno que “quebrou a cabeça” tentando resolver 5 problemas, sem ter resolvido nenhum deles. Tentar resolver problemas de matemática, mesmo sem sucesso, é um exercício mental. Mesmo que o aluno não consiga “matar” um só desses problemas, estará revendo a teoria, desvendando possibilidades, aumentando sua compreensão. Ao se deparar com um problema menos difícil, terá mais chances de resolvê-lo que um aluno que assistiu estaticamente a resolução de problemas feitas por terceiros.

Junto com a proposição de problemas-desafio, deve constar o alerta do professor de que é importante que o aluno dedique um tempo considerável na tentativa de resolução, porque é nessa hora em que o aluno está “quebrando a cabeça” que seu cérebro estará sendo treinado para encontrar soluções brilhantes para problemas aparentemente impossíveis. Tentar resolver problemas é uma forma de estudar que deve ser usada. Note que alguns alunos têm a postura de ler o enunciado de um problema e pensar “nem sei como começar isso”, e assim evitam tentar, evitam pensar. É preciso que se acostumem a partir para o enfrentamento dos problemas, que obviamente nem sempre serão resolvidos, mas começar a tentar é uma atitude necessária.

### **3.9 CONCLUSÃO**

Não estamos propondo um método obrigatório para os professores usarem nas aulas de resolução de problemas. Qualquer professor tem o conhecimento matemático necessário à resolução dos problemas relativos à série que está ensinando. Todo professor possui a experiência didática para ministrar essas aulas. Todos têm inclusive a postura de que sempre estamos aprendendo, seja no tema envolvido (no caso, matemática), seja na troca de experiências profissionais. Procuramos aqui passar uma básica experiência didática na atividade de resolver problemas. Aquele que tem em mente que sempre estamos aprendendo, certamente terá sucesso em sua atividade.

## **CAPÍTULO 4: SUGESTÕES DE TÓPICOS E PROBLEMAS**

Vejamos finalmente o terceiro objetivo do nosso trabalho, que de acordo com a proposta, é “preparar possíveis aulas sobre o assunto direcionadas para um público de alunos do ensino médio”.

O professor de desafios matemáticos não deve simplesmente apresentar problemas cuja solução seja fazer um cálculo já fornecido no enunciado. Esse tipo de problema, de treinar cálculos, deve continuar sendo apresentado, mas como o enunciado é um enfeite, pode ser dispensado, e ser apresentada simplesmente a expressão a ser calculada. Assim como o atleta não treina simplesmente a marcação de pontos (gols, cestas, bloqueios, etc), mas também exercícios (corrida, musculação, natação), o estudante de matemática deve dedicar uma parte do seu tempo a fazer cálculos, mesmo que não apareçam diretamente no seu cotidiano. Além dos exercícios, deve resolver problemas comuns, vinculados ou não à vida cotidiana, em que é preciso identificar o cálculo a ser realizado para levar à solução, mesmo que para isso seja preciso apenas converter as palavras do enunciado aos termos da equação a ser resolvida (o que para muitos já é considerado como uma vitória). Finalmente, a terceira categoria, que é o problema-desafio, o quebra-cabeça, a idéia brilhante, aquilo que “a tia não ensinou”.

### **4.1 MUITO ALÉM DOS PROBLEMAS**

O objetivo principal de apresentar problemas-desafio é desenvolver no aluno a habilidade de lidar com desafios na sua futura vida profissional. Nesse ponto, quanto mais problemas forem apresentados, maior será o benefício para o aluno. A apresentação de tais problemas é uma boa oportunidade para desenvolver atividades correlatas que ajudarão mais ainda na resolução de outros problemas-desafio. Por exemplo, ao apresentar um problema-desafio que lide com MMC, o professor deveria aproveitar a ocasião para fazer uma rápida revisão sobre MMC. Estamos partindo do princípio de que o aluno já possui um conhecimento básico sobre a teoria necessária (por isso foi escolhida a aritmética), mas os alunos terão obviamente diferentes níveis de domínio do assunto. Não é o caso de ficar uma, duas semanas fazendo exercícios sobre MMC, mas sim de levar alguns minutos para lembrar o conceito e apresentar um ou dois exemplos. Nesse aspecto, a aula

de problemas-desafio servirá como uma rápida revisão da matéria, ajudando a solidificar conhecimentos anteriores.

Na ocasião da apresentação de um determinado problema, o professor pode aproveitar para apresentar problemas similares sobre o mesmo assunto, sejam desafios ou problemas normais. Pelo menos um desafio pode ser apresentado no final, como trabalho de casa. Isto ajudará alguns alunos a desenvolverem o gosto pela resolução de problemas de matemática. Nos problemas apresentados ao longo deste capítulo, adicionaremos exemplos de conteúdos que poderiam acompanhar tais problemas.

A experiência do professor é importantíssima na abordagem de problemas desafio. Não ajudará, por exemplo, o professor começar uma resolução com “observamos inicialmente que 6 é raiz desta equação...”, ou “vamos dividir brilhantemente os dois lados da equação pela raiz quadrada de 37...”. Essas abordagens são de uma pessoa que já viu a solução e está simplesmente repetindo. Ao invés disso, o professor poderia relatar as idéias que teve quando ele mesmo tentou resolver o problema, dentro do possível, dando uma argumentação sobre porque tomou aquele caminho. Algo como, por exemplo, “vamos ver o que acontece quando fazemos o que o problema pede, porém com números menores”, ou “podemos indicar genericamente um múltiplo de 17 como  $17k$ , onde  $k$  é um número inteiro...”. O aluno deverá notar que, algumas abordagens ele precisará “tirar da cartola”, outras são abordagens típicas que podem ser aplicadas em situações semelhantes.

Um tipo de professor que é especialista na solução de problemas é o “professor de cursinho preparatório”, ou “professor para concurseiros”. São bons professores para tal atividade por terem muitas vezes, boa formação, boa experiência e a disposição de resolver questões de várias provas de concursos. Nesse caso, tais professores terão sucesso na apresentação de problemas-desafio, desde que seja eliminada a abordagem do “aluno-concurseiro”. Este tipo de ensino não se concentra apenas em ensinar, mas em orientar o aluno para que passe na prova, que acerte questões no menor tempo possível, mesmo que o aluno não saiba resolvê-la. Por exemplo, um aluno pode ser orientado para, ao invés de resolver uma equação,

testar as respostas na equação original. Ou então, em uma expressão algébrica, substituir todas as variáveis por 1 e testar as respostas. O aluno poderia ser levado a pensar que este é o melhor método para sua aprovação, mas apenas a curto prazo.

Note que um concurso para uma vaga de funcionário público manterá o candidato dentro do serviço público, até sua aposentadoria, mesmo que tenha sido aprovado apenas porque marcou as letras corretas no gabarito. Já um concurso para uma escola militar, ou concursos para universidades, programas de mestrado e doutorado, o aluno pode ser posteriormente eliminado por não ter conhecimento suficiente nas etapas posteriores dos seus estudos. É um paradigma do presente trabalho, o aprendizado voltado para a solução de desafios, através do desenvolvimento de habilidade matemática, e não apenas ensinar a marcar a letra correta, numa postura de “concurseiro”.

Testar respostas, por exemplo, é válido, e em alguns casos esta é a única forma de resolver um problema, mas o aluno não deve ser acostumado a fugir sempre das resoluções e partir para simplesmente testar as respostas.

## **4.2 EXPLORANDO A DIVISIBILIDADE**

Critérios de divisibilidade são um assunto básico da primeira metade do ensino fundamental. Quase não exige cálculos, e muitos alunos lembram do assunto, mesmo anos depois de aprendido. Finalmente, problemas-desafio interessantes podem ser propostos explorando o assunto.

### **Problema-desafio 1: Quadrados perfeitos**

*Nenhum quadrado perfeito tem soma dos seus algarismos igual a 15. Justifique.*

Apresentar um problema para justificar uma afirmativa é uma equivalente a enunciar “prove que...”. É uma forma de reduzir a resistência do aluno através de reclamações como “ah, mas no vestibular não cai demonstração...”. Acostumar o aluno a conhecer a justificativa para resultados matemáticos, ao invés de simplesmente enunciar “use essa regra” ou “use esse fórmula”, tem como benefício

acostumar o aluno com demonstrações, inicialmente informais, e posteriormente mais precisas, mas espanta a rejeição inicial. É importante notar que estudar matemática não é apenas realizar cálculos numéricos. Os cálculos são simples ferramentas. Nos dias atuais, podemos argumentar que “cálculos, o computador pode fazer sozinho de forma rápida e eficiente”. Mas o “talento matemático” para encontrar o caminho que leva à solução é uma habilidade humana.

Em “linguagem de professor”, a solução do problema é simples: se a soma dos algarismos é 15, então este número é múltiplo de 3; mas se é quadrado perfeito, deveria ser também múltiplo de 9, mas isso é impossível, porque 15 não é múltiplo de 9.

Nesta solução, o aluno usa vários conceitos:

- 1) Identificar um múltiplo de 3 a partir da soma dos seus algarismos
- 2) Identificar que este quadrado perfeito tem que ser múltiplo de 9, usando por exemplo, que  $(3k)^2 = 9k^2$ , que é múltiplo de 9.
- 3) Lembrar como identificar múltiplos de 9, critério que o número 15 não atende.

A solução requer o conhecimento desses três fatos. Isso é importante, o conhecimento dos conceitos matemáticos é necessário para a solução de desafios. A tentativa, mesma infrutífera, de encontrar soluções para desafios, pode levar o aluno a rever conceitos matemáticos importantes, permitindo a solução de problemas mais simples.

Não existe método para juntar os conhecimentos e encontrar uma solução. Aquela ação de “acender uma lâmpada no seu cérebro”, “EUREKA”, “tirar o coelho da cartola”, o aluno vai adquirir com a prática.

O aluno que nunca fez um problema desse tipo tende a usar inicialmente um raciocínio errado, que é mostrar através de um exemplo. Por exemplo, um número cuja soma dos algarismos é 15, poderia ser 96. Este número claramente não é um múltiplo de 9, deixa resto 6. Logo, fica “provado” o que o problema pediu. Está completamente errado, porque o que é pedido no problema é justificar porque



nenhum número cuja soma dos algarismos é 6, não é múltiplo de 9. Esta tentativa de solução apenas mostra que existe um número nessas condições, que é o 96. A justificativa, ou demonstração, deve ser feita de tal forma que se aplique a qualquer número com essas características, e não apenas a exibição de um exemplo. A exibição de exemplos é uma forma válida para visualizar o problema, para entender seu mecanismo, mas a solução de mostrar para todos deve ser geral, e não para um número particular. Essa é a diferença entre as sentenças matemáticas existe e para todo.

A apresentação de problemas-desafio é uma ótima ocasião para o professor transmitir sutilezas matemáticas como esta: (o que é um particularização, uma generalização, um contra-exemplo), o que ajudará a formar uma base mais sólida que facilitará a resolução de novos problemas. Por exemplo, qual é a matéria no programa de matemática que explica o conceito da expressão "... podemos supor, sem perda de generalidade, que ...". Este argumento matemático não é um tópico específico de trigonometria ou logaritmos, ele pode ter seu significado explicado e seu princípio aplicado em qualquer boa oportunidade, e isto deve ser feito durante a resolução de problemas.

Na literatura matemática existe farto material sobre divisibilidade em diversos níveis. Indicamos [HEFEZ 2014] como fonte de nível superior para tópicos de aritmética. Podemos encontrar facilmente as demonstrações dos critérios de divisibilidade pelos primeiros números primos: 2, 3, 5, 7, 11 e critérios diretos para divisibilidade por alguns números compostos, como 4, 9, 10, 100, e ainda para números compostos que são o produto de dois primos. Esses critérios dão origem a uma série de problemas que podem ser explorados. Em [KERSNOWSKY 2013] temos um trabalho de conclusão de curso do PROFMAT que discute os principais critérios de divisibilidade. O objetivo de um critério de divisibilidade é determinar se um número é divisível por outro, sem realizar a divisão.

## **Problema-desafio 2: Quantos primos?**

*Quantos números primos de 3 algarismos podem ser formados usando os algarismos 1, 2 e 3, sem repetir?*

Este é mais um problema que explora a divisibilidade por 3, que é uma das mais fáceis. Alunos de 11 anos têm a capacidade de resolver esse tipo de problema, pensando um pouco. Podem ter dificuldades para identificar se um número é primo. Podem ter dificuldade para enumerar todos os candidatos (123, 231, etc). A “idéia luminosa” no caso é observar que a soma dos algarismos será nesse caso sempre 6, portanto todos esses números são múltiplos de 3, por isso não podem ser primos (já que o único primo múltiplo de 3, que é o próprio 3, não atende ao enunciado).

Em algum momento o aluno perceberá que mostrar que um problema não tem solução é tão importante quanto encontrar uma solução. Devem ser apresentados critérios que permitem comprovar a inexistência de soluções, como problemas relativos a algarismos, divisibilidade, um delta negativo, etc.

Vejamos agora um outro problema completamente diferente, mas que usa o mesmo princípio:

### **Problema-desafio 3: (Colégio Naval – 2014-2015 adaptado)**

*Um número  $N$  possui 200 algarismos 1, 200 algarismos 2 e 400 algarismos zero. Este número pode ser um quadrado perfeito?*

Solução: A questão, ao ser apresentada em um concurso para o Colégio naval, tinha opções A, B, C, D e E, a respeito de trocas de posições a serem feitas nos seus algarismos, de modo a torna-lo um quadrado perfeito. Neste exemplo, estamos apenas perguntando se este número, com esses algarismos, pode ser um quadrado perfeito ou não. A resposta é NÃO, pois a soma dos seus algarismos é  $200 \times 1 + 200 \times 2 = 600$ . Um quadrado perfeito não pode ter soma de algarismos 600, pois é múltiplo de 3 mas não é múltiplo de 9.

### **Problema-desafio 4: (Colégio Militar)**

*Quantos números entre 1000 e 2000 possuem um número ímpar de divisores positivos?*

Solução: Problema considerado difícil, pois foi aplicado em uma prova para ingresso no 6º ano do ensino fundamental, em um concurso do Colégio Militar. Claro que considerando divisores positivos e negativos, todo número tem uma quantidade par de divisores, pois se existe um divisor  $K$ , existirá também o divisor  $-K$ , e isto tem sido usado como “pegadinha” ou critério de anulação em questões de concursos de escolas militares. Tomando apenas os números naturais, o aluno deve observar que os únicos números que possuem uma quantidade ímpar de divisores são os quadrados perfeitos, o que nem sempre é uma conclusão que à qual um aluno chegue com facilidade. O número de divisores é calculado como um produto, em que cada fator é o expoente de um fator primo, somado com 1. A única forma desse produto ser ímpar é quando todos os expoentes dos fatores primos são pares, ou seja, o número precisa ser um quadrado perfeito. Então precisamos encontrar a quantidade de quadrados perfeitos entre 1000 e 2000. Por inspeção identificamos que o primeiro deles é 32, e o último é 44 (raízes quadradas aproximadas de 1000 e 2000), portanto é um total de 13 valores.

Por trás dessa resolução está um dos mais importantes resultados da aritmética, que é o Teorema Fundamental da Aritmética [HEFEZ 2014]:

## **TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA:**

*Todo número natural maior que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.*

Um quadrado perfeito é o resultado do produto de dois números iguais. Sendo cada um desses números iguais a  $N$ , podemos escrever  $N$  como um produto de números primos. Agrupando fatores primos iguais, teremos como resultados potências dos fatores primos:

$$N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$$

$$Q = N^2 = p_1^{2\alpha_1} \times p_2^{2\alpha_2} \times \dots \times p_r^{2\alpha_r}$$

O quadrado perfeito  $Q=N^2$  terá os mesmos fatores primos de  $N$ , porém com os expoentes dobrados, ou seja, todos os expoentes de  $Q$  na decomposição em fatores primos serão números pares. Portanto, o que caracteriza um quadrado perfeito é que todos os expoentes da sua decomposição em fatores primos, são expoentes pares.

Outro resultado que é aprendido na primeira metade do ensino fundamental, geralmente sem demonstração, é a fórmula do número de divisores de um número natural. Para encontrar o número de divisores, fazemos a fatoração usando fatores primos. A seguir calculamos o número de divisores como sendo o produto de todos os seus expoentes de fatores primos, somados com 1:

$$N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$$
$$D(N) = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \dots \times (\alpha_r + 1)$$

A justificativa para o funcionamento deste método, ou seja, a fórmula acima que determina o número divisores, que pode ser demonstrada para os alunos do ensino médio (os alunos do ensino fundamental I nem sempre têm capacidade para entender a demonstração) é que para formar um divisor, devemos escolher os expoentes a serem usados por cada fator primo  $p_1, p_2, \dots, p_r$ . O número de escolhas para cada expoente de um fator  $p_k$  é  $\alpha_k+1$ , pois para um dado expoente de  $p_k$  existem  $\alpha_k+1$  possibilidades (de 0 até  $\alpha_k$ ), portanto,  $\alpha_k+1$  escolhas. Tal justificativa deve ser apresentada/relembrada aos alunos do ensino médio.

No caso de um quadrado perfeito, todos os expoentes  $\alpha_k$  serão números pares, portanto os fatores a serem multiplicados, na forma  $\alpha_k+1$ , serão números ímpares. Um produto de números ímpares será também um número ímpar, portanto temos a justificativa que os únicos números que possuem um número ímpar de divisores são os quadrados perfeitos.

### **Problema-desafio 5: MMC e restos**

*Uma certa quantidade de bolas iguais devem ser guardadas em caixas iguais. Podemos escolher entre dois tipos de caixas, a caixa A, com capacidade de 18*

*bolas, e a caixa B, com capacidade para 24 bolas. Se for escolhida uma caixa tipo A, e enchermos as caixas com a quantidade máxima de bolas, apenas a última caixa ficará pela metade. Já se forem escolhidas caixas tipo B, nas mesmas condições, a última caixa ficará com 15 bolas. Qual é o número total de bolas, sabendo que está compreendido entre 100 e 200?*

Solução: Dividir um número em quantidades iguais e verificar quantas unidades sobram equivale a fazer a divisão de um dividendo por um divisor, e verificar os valores do quociente e do resto. O caso geral deste problema é conhecido como **Teorema Chinês do Resto**, e está descrito em [HEFEZ 2014]. O problema geral consiste em encontrar um número que se dividido por certos valores, deixa restos específicos em cada uma dessas divisões. O presente problema-desafio é uma versão simplificada desse problema, assim como também foi o Exemplo 2.8 do capítulo 2. Este exemplo é uma versão simplificada porque utiliza restos iguais, no caso, iguais a 1. A solução é simples, pois os restos por todas as divisões são iguais a 1. Basta portanto subtrair 1 para que o número resultante seja divisível por todos os valores, que sendo o menor possível, trata-se entre o MMC entre os divisores dados. O Teorema Chinês do Resto permite restos genéricos em todas as divisões, como no caso deste problema-desafio, em que o número de bolas  $N$  é tal que:

$N$  dividido por 18 deixa resto 9

$N$  dividido por 24 deixa resto 15

Não adianta subtrair valor algum de  $N$  para tornar o resultado divisível simultaneamente por 18 e 24. Entretanto, podemos tornar o resultado divisível por 18 e 24 se somarmos 9 bolas ao total. Somando 9, todas as caixas tipo A ficarão cheias, o mesmo ocorrendo com as caixas tipo B. No caso, o caminho para a solução não é subtrair a mesma quantidade, mas somar a mesma quantidade, no caso 9. Portanto  $N+9$  é um múltiplo comum de 18 e 24. Sendo assim, é múltiplo do MMC entre 18 e 24, que é 72. Os múltiplos de 72 são 0, 72, 144, 216, 288, 360, etc. Esses são os valores possíveis para  $N+9$ , de tal forma que os restos sejam os descritos no problema. Subtraindo 9 para chegar ao valor de  $N$ , as possibilidades (descartamos o zero) são 63, 135, 207, etc. O problema indica ainda que  $N$  está compreendido entre 100 e 200, portanto  $N$  só pode ser 135.

### 4.3 RESOLUÇÃO POR INSPEÇÃO

Na matemática, a resolução por inspeção é tão válida quanto qualquer outra. Por exemplo, testar as respostas em uma prova pode levar à solução de forma mais rápida que fazendo cálculos. À primeira vista isto pode ser entendido como uma “trapaça”, mas muitas vezes não existem cálculos que resolvam um problema, ou sejam, nem todo problema possui uma solução analítica. Cabe ao formulador das questões de provas, quando a intenção for a de que o aluno resolva o problema e realize os cálculos, adaptar as respostas de modo que o aluno não possa resolver “trapaceando”, testando as respostas. Por outro, lado, existem questões que só podem ser resolvidas por inspeção.

O problema que se segue não é propriamente um desafio, mas sim, um exemplo ilustrativo de resolução por inspeção.

#### Problema-desafio 6: (EPCAr 2015-2016)

Na figura abaixo,  $A, B, C, D, E$  e  $F$  são vértices de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 1 metro e centro  $O$ . Se  $ACE$  e  $BDF$  são triângulos equiláteros, então, a área da parte sombreada nessa figura, em  $m^2$ , é igual a:

(A)  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$     (B)  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \pi$     (C)  $\frac{\sqrt{3} - \pi}{3}$     (D)  $\sqrt{3} - \pi$

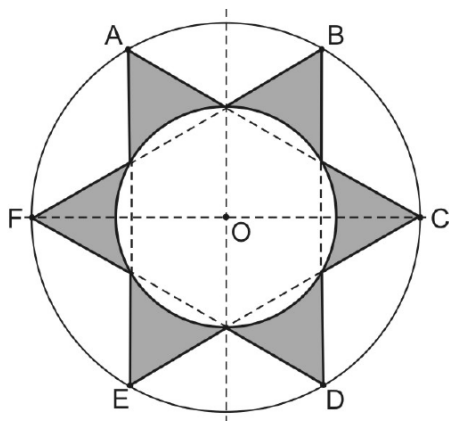


FIG. 4.1: Questão da EPCAr, problema-desafio 6.

Solução: O aluno precisa ter conhecimento geométrico para calcular a área pedida. O problema pode ser resolvido facilmente usando subtração de áreas, e

mais adiante iremos resolvê-lo. Entretanto, este é também um típico problema que pode ser resolvido também testando as respostas. Note que certos problemas só podem ser resolvidos por testes de respostas (inspeção), que é o objetivo deste tópico. Entretanto neste caso específico, considerando valores aproximados:

$$\pi \cong 3,14 \text{ e } \sqrt{3} \cong 1,7$$

Vemos claramente que a opção (A) é a única que fornece um valor positivo, as três outras são negativas. Talvez fosse apenas um descuido da banca examinadora, ou talvez fosse um teste proposital para detectar em um candidato, a capacidade de encontrar uma solução trapaceada mas que funcione. Isto parece razoável, imagine um piloto da força aérea, o avião está caindo e ele pega o manual e procura “deixe-me ver se o manual traz alguma dica para evitar a queda do avião...”. Talvez a aeronáutica realmente valorize um profissional com esse tipo de iniciativa, a solução rápida que funciona. Ou talvez fosse realmente uma falha da banca examinadora.

De um modo geral, é bom que o aluno, antes de tentar resolver uma questão, tentar rapidamente visualizar se existe uma solução que pode ser verificada de forma rápida, por inspeção, como nesse caso. Em um concurso com questões objetivas, seria o caso de testar respostas, mas mesmo questões discursivas podem utilizar em muitos casos, a checagem de valores, e em muitos casos, esta é a única forma de chegar à solução.

Não é o caso desse problema da EPCAr. O aluno deve estar sempre apto a saber realizar os cálculos necessários para resolver um problema, sem trapacear. Cabe ao professor ensinar isso. Claro, também é aceitável que o professor alerte ao aluno que, em alguns casos, quando não há mais tempo para resolver uma questão, em um concurso, melhor que chutar uma resposta qualquer, é usar o bom senso para encontrar a letra correta. O que um professor nunca pode fazer é basear seus ensinamentos somente em trapaças.

Vejamos rapidamente como resolver o problema, que é de solução muito simples. Podemos resolver usando subtração de áreas. A área pedida é igual a uma

“estrela de Davi”, formada por 12 triângulos equiláteros, menos a área do círculo menor, dentro da estrela. Na figura 4.5 destacamos um desses 12 triângulos. É fácil mostrar por simetria, ou usando ângulos na circunferência (ângulo central, ângulo inscrito, ângulo excêntrico interno), que todos eles são triângulos equiláteros. Indicamos um deles, o triângulo OPQ. A altura desse triângulo vale a metade do raio do círculo maior ( $1/2$ ), e o seu lado (indicado como  $r$ ), é igual ao raio do círculo menor. Sabemos que a relação entre a altura  $h$  e o lado  $l$  de um triângulo equilátero é:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Ficamos com:

$$\frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

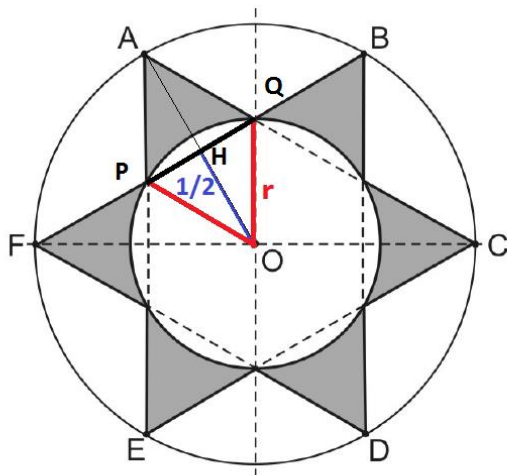


FIG. 4.2: Resolução do problema-desafio 6

Usando agora que a área do triângulo equilátero de lado  $l$  é:



$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Substituindo o valor de  $l=r$  encontrado, ficamos com:

$$\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}, \text{ que é a opção (A).}$$

Obviamente o aluno deve estar familiarizado com cálculos envolvendo relações métricas no triângulo equilátero, já que sua presença é quase obrigatória na maioria das provas, dada sua simplicidade, assim como o triângulo retângulo isósceles e o triângulo pitagórico básico.

### **Problema-desafio 7: O PROBLEMA DAS TRÊS FILHAS**

*Dois matemáticos se encontram após muitos anos e começam a conversar.*

*Matemático 1: - Pois é amigo, eu casei e tenho três filhas!*

*Matemático 2: - Quais são as idades delas?*

*Matemático 1: - O produto das idades é 36, e a soma é igual ao número daquela casa amarela ali na frente.*

*Matemático 2: - Apenas com essas informações eu não tenho como determinar as idades!*

*Matemático 1: - Tem razão. Esqueci de dizer que a mais velha toca piano.*

*Matemático 2: - Ah, sim, agora já sei as idades!*

*Pergunta-se: Quais são as idades das três filhas?*

**Solução:** Um problema divertido, conhecido pela maioria dos professores de matemática e surpreendente para os alunos. Vale a pena apresentá-lo!

O problema utiliza o conceito de fatoração, inspeção e um pouco de raciocínio lógico. Os alunos tendem a pensar, de início, que trata-se de um sistema de equações. Sabe-se o produto das três idades, sejam elas  $x$ ,  $y$  e  $z$ . A soma das idades seria uma segunda equação, mas essa soma não é fornecida. Além do mais,

são três incógnitas, seriam necessárias 3 equações! Isso serve para mostrar ao aluno que nem sempre podemos resolver tudo usando  $n$  equações com  $n$  incógnitas, certos problemas não se encaixam nesse padrão, o que para muitos alunos pode ser surpreendente.

Pensar em números menores é muitas vezes um caminho para resolver os problemas. Se o produto das idades fosse 6, poderiam ser 1, 2, 3, ou 1, 1, 6, apenas essas duas soluções, mas no problema, o produto das idades é 36. Temos então que encontrar três números inteiros cujo produto seja 36. Dispondo os três números em ordem crescente, por simples organização, poderiam ser:

- 1, 1, 36: soma=38
- 1, 2, 18: soma=21
- 1, 3, 12: soma=16
- 1, 4, 9: soma=14
- 1, 6, 6: soma=13 (continua)

Ao enumerar essas idades, colocar os valores na ordem crescente evita que nos esqueçamos de alguma combinação. Enumeramos primeiro as combinações em que a mais nova tem 1 ano, depois as combinações em que a mais nova tem 2 anos, e assim por diante:

- 2, 2, 9: soma=13
- 2, 3, 6: soma=11
- 3, 3, 4: soma=10

Observe que ao todo são apenas 8 possibilidades. Apenas sabendo o produto, não seria possível saber qual das 8 possibilidades é a correta. Entretanto, além do produto, o matemático 1 informou também a soma, que é o número daquela casa amarela. Nós não sabemos o número da casa, mas o matemático 2 sabe. Nesse caso, ele deveria descobrir a idade das filhas, conhecendo os valores do produto e a soma. Por exemplo, se a casa fosse de número 11, as idades seriam 2, 3 e 6. Entretanto o matemático 2 disse que apenas com essas duas informações não teria como determinar as idades. Isto só pode ocorrer em um caso: quando a soma das

idades é 13, pois nesse caso, e apenas nesse, as idades poderiam ser 1, 6, 6 ou 2, 2, 9. Portanto concluímos inicialmente que o número da tal casa amarela é 13. Finalmente o matemático 1 forneceu a informação que faltava: a mais velha toca piano! Sendo assim, existe uma filha mais velha. Na opção 1, 6, 6, as duas mais velhas são gêmeas, então a única opção que admite uma filha mais velha que as outras é: 2, 2, 9.

### **Problema-desafio 8: Fração de um grupo de pessoas**

*Em um certo dia, em uma turma, faltaram  $\frac{2}{5}$  dos meninos e  $\frac{1}{3}$  das meninas. A turma tem ao todo, 37 alunos. Quantos alunos (meninos+meninas) compareceram nesse dia, sabendo que a turma tem mais meninas que meninos?*

Solução: À primeira vista parece um problema do 1º grau com duas variáveis, entretanto é na verdade um problema que envolve divisibilidade. Um típico aluno do ensino médio vai tentar montar um sistema, ficando com  $x + y = 37$ , mas não encontrará a outra equação necessária para formar o sistema. Não se trata de um problema algébrico, e sim, uma equação com números inteiros (equação diofantina). Recomendamos nesse momento, não ensinar a resolução de equações diofantinas, mas dar ao aluno a oportunidade de resolver o problema com conhecimentos básicos que já possui. De acordo com o enunciado, o número de meninos tem que ser múltiplo de 5, e o número de meninas tem que ser múltiplo de 3. Passamos então a usar inspeção (testar possibilidades):

Se forem 5 meninos →  $37 - 5 = 32$  meninas, que não é múltiplo de 3.

Se forem 10 meninos →  $37 - 10 = 27$  meninas

Se forem 15 meninos →  $37 - 15 = 22$  meninas, que não é múltiplo de 3.

Se forem 20 meninos →  $37 - 20 = 17$  meninas, que não é múltiplo de 3.

Se forem 25 meninos →  $37 - 25 = 12$  meninas.

Se forem 30 meninos →  $37 - 30 = 7$  meninas, que não é múltiplo de 3.

Se forem 35 meninos →  $37 - 35 = 2$  meninas, que não é múltiplo de 3.

Chegamos ao número máximo de meninos, 35. Das duas soluções encontradas (27 meninas e 12 meninas), a correta de acordo com o enunciado é a

primeira, pois foi dito que a turma tem mais meninas que meninos. Portanto a sala tem 10 meninos e 27 meninas.

Sendo assim, respondendo à pergunta do problema, levando em conta que a turma tem 10 meninos e 27 meninas, e que faltaram  $\frac{2}{5}$  dos meninos e  $\frac{1}{3}$  das meninas, faltaram 4 meninos e 9 meninas, então dos 37 da turma, o total de alunos que compareceram foi 24.

A informação “ $x$  é um inteiro múltiplo de 5” não é uma equação algébrica, mas uma informação que deve ser usada matematicamente em conjunto com as equações algébricas disponíveis para chegarmos à solução. Trata-se de mais uma aplicação que envolve divisibilidade com números inteiros, aliada ao método da inspeção.

### 4.3.1 TRÊS CAMINHOS PARA A SOLUÇÃO

No capítulo 2 apresentamos uma proposta de “anatomia de um problema de matemática”. Por comodidade, repetimos esta anatomia na figura 4.6.

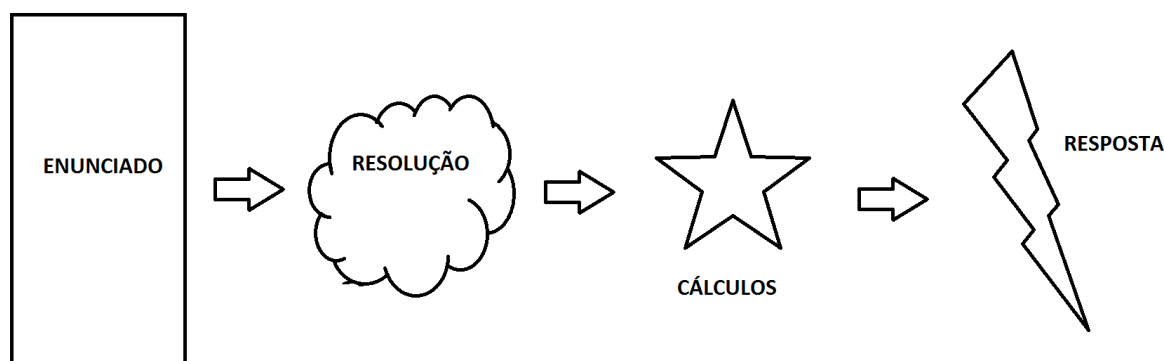


FIG. 4.3: Anatomia de um problema de matemática.

O mesmo conceito pode ser estendido para contemplar os problemas sem solução e os problemas que não são resolvidos por um método analítico, e sim através de inspeção. De fato, a estrutura proposta na figura 4.6 diz respeito aos primeiros problemas de matemática com os quais temos contato na escola. A partir de um enunciado, temos que desenvolver um raciocínio, em geral um método de

calcular a resposta. A seguir resta realizar os cálculos e chegar à resposta. Fazemos um detalhamento maior da segunda e terceira etapas, que envolve a resolução ou os cálculos. Este modelo está na figura 4.7, e abrange esses métodos adicionais de resolução.

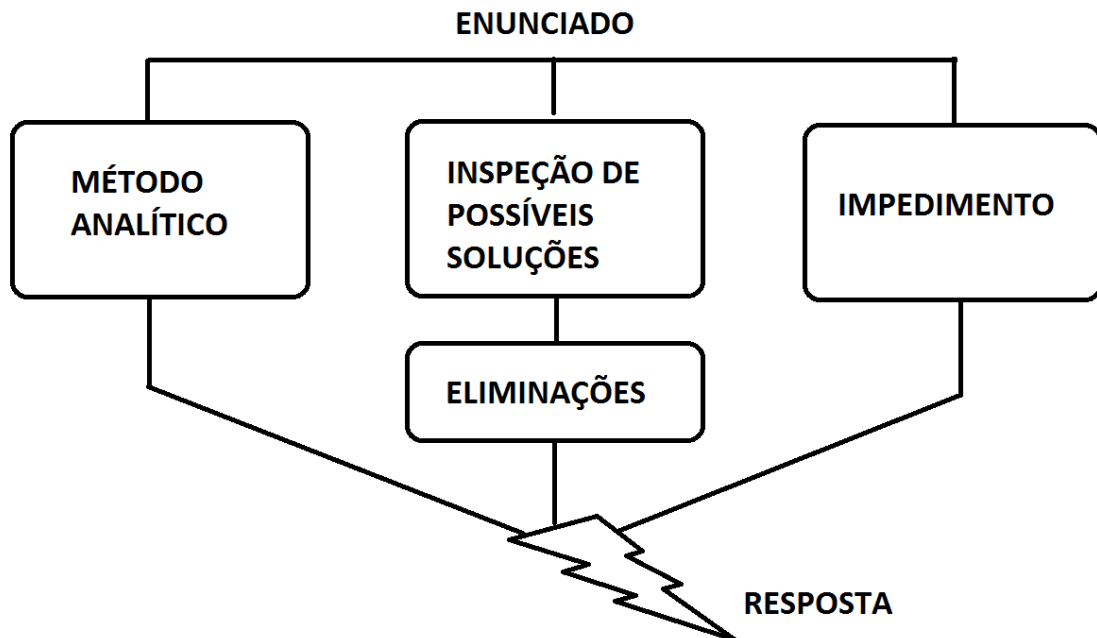


FIG. 4.4: Anatomia de um problema de matemática, estendida.

O caminho normal é o primeiro, em que o aluno lê o enunciado, formula um método de resolução que resulta em cálculos, que resolvidos levarão à resposta. Este é o método de solução aprendido no início de nossa vida escolar. Com o amadurecimento, deparamos com problemas mais desafiadores, para os quais não existe um método analítico.

O segundo caminho é aquele representa métodos heterodoxos, no nosso caso, baseado na inspeção. Elegemos valores candidatos à solução, atendendo às informações do problema que estejam mais fáceis de serem enumeradas. A seguir procuramos eliminar candidatos a soluções que contrariem o enunciado, o que nos levará à resposta, ou até mesmo um conjunto de respostas possíveis, quando esta resposta não for única. Note que outros caminhos heterodoxos podem ser encaixados nesta categoria, além da enumeração/inspeção, por exemplo, o uso de

heurísticas para problemas de otimização nos casos em que não existe algoritmo conhecido para a solução ótima.

Finalmente, o terceiro caminho abrange situações em que o problema não tem soluções. Já abordamos no trabalho problemas desse tipo, como por exemplo, mostrar que um número cuja soma dos algarismos é 6 não pode ser um quadrado perfeito. Problemas dessa categoria são abordados no item 4.4 deste capítulo.

### **4.3.2 MÉTODO PROPOSTO PARA ENCONTRAR SOLUÇÕES POR INSPEÇÃO**

Em se tratando de problemas, cada caso é um caso, normalmente não é possível formular uma técnica geral. Ainda assim, precisamos de algum ponto de partida, ainda mais no caso de problemas desafiadores. Mesmo não existindo um método geral, podemos seguir algumas diretrizes.

Todo enunciado apresenta uma série de condições. Na maioria das vezes essas condições se traduzem em sentenças matemáticas. Em um problema comum, as sentenças matemáticas quase sempre são equações, que uma vez resolvidas, nos levam à resposta do problema. Quando vamos usar inspeção, tipicamente não temos equações com suas soluções, mas sim, sentenças matemáticas que devem ser enumeradas. Para que a inspeção seja possível, as soluções possíveis, ou seja, as primeiras candidatas, devem ser em número finito, de preferência pequeno, e que possamos determina-las facilmente. Escolhemos para essas primeiras candidatas a soluções, aquelas que sejam as mais simples de calcular e enumerar. Outras condições dadas pelo problema, podem ser usadas como critérios de testes a serem feitos sobre as possíveis soluções candidatas. As candidatas que não atenderem a todas as demais condições devem ser eliminadas. Ao restar uma única candidata, esta será a solução do problema. Eventualmente todas as condições podem ser eliminadas, nesse caso falharemos em encontrar a existência de soluções. Em outros casos, poderemos ter uma única solução possível, portanto teremos a unicidade de soluções. Ainda quando a solução não é única, é importante que tenhamos certeza que o conjunto de soluções, mesmo que seja mais de uma, serão as únicas possíveis, assim também faz sentido falar em unicidade, ao

determinarmos que as soluções encontradas são as únicas. Mais adiante neste capítulo abordaremos os conceitos de existência e unicidade de soluções.

Já aplicamos de forma intuitiva, o método para encontrar soluções por inspeção nos exemplos deste item.

No problema-desafio 6, partimos das quatro respostas possíveis, que são as opções (A), (B), (C) e (D). A seguir eliminamos as opções (B), (C) e (D), por serem valores negativos, e assim não podem representar áreas. Levando em conta que trata-se de uma prova de múltipla escolha, com apenas uma resposta correta, a resposta (A) é a única que pode estar certa.

No problema-desafio 7, partimos da enumeração mais fácil, que são as possibilidades para três números cujo produto é 36. A soma dos valores é uma informação que não foi fornecida para o resolvidor do problema, e sim, para o matemático 2. Este por sua vez fornece uma informação que deve ser usada pelo resolvidor: a soma dos números é um valor que, mesmo que seja conhecido, não permite identificar a solução. Tal condição só é satisfeita para a soma 13, pois resulta em solução indeterminada, deixando duas possibilidades: 1, 6, 6 e 2, 2, 9. Isto nos dá a certeza de que a resposta do problema é uma dessas duas. Finalmente, a informação de que a mais velha toca piano nos dá a certeza de que a solução só pode ser 2, 2, 9.

No problema-desafio 8, a forma mais fácil de enumeração é considerar as possibilidades para o número de meninos, que deve ser, de acordo com o enunciado, um múltiplo de 5 inferior a 37. Ficamos então com as possibilidades enumeradas: 5, 10, 15, 20, 25, 30 e 35. Para cada uma dessas possibilidades fazemos testes com a outra informação do enunciado, a de que o número de meninas é múltiplo de 3. No caso, apenas dois valores para a quantidade de meninos atendem:

Se forem 10 meninos →  $37 - 10 = 27$  meninas

Se forem 25 meninos →  $37 - 25 = 12$  meninas.

Finalmente usando a outra condição dada no enunciado, a de que o número de meninas é maior que o número de meninos, concluímos que a turma é composta por 10 meninos e 27 meninas.

Esses três exemplos mostram que o método empírico proposto não garante a solução, mas nos leva na direção da mesma. Enumerar o que estiver mais fácil, e depois testar.

### 4.3.3 CUIDADO COM A UNICIDADE

Em estágios iniciais do desenvolvimento da habilidade matemática do aluno, aprender a encontrar soluções é muito importante, digamos que é o primeiro objetivo. Quase tão importante quanto encontrar soluções, é identificar quando não há soluções, tanto que dedicamos o item 4.4 deste trabalho ao assunto. Ainda no caso das soluções válidas, a questão da unicidade desempenha um papel bastante relevante. Tal questão pode ser ilustrada com inúmeros exemplos, mas tão forte quanto um argumento matemático, é uma piada matemática que ilustra bem a questão da unicidade, e certamente os alunos nunca a esquecerão. Podem esquecer os exemplos matemáticos, mas a piada matemática será lembrada nas décadas seguintes.

#### **Exemplo 4.1: O engenheiro, o físico e o matemático**

É uma piada conhecida dos professores de matemática que ilustra bem a importância da unicidade.

*Viajavam de automóvel por um certo país, um engenheiro, um físico e um matemático. Em um certo momento, deparam-se ao longo da estrada, com uma colina, no topo da qual havia uma ovelha. Era possível ouvir o som de inúmeras outras ovelhas atrás da colina, mas apenas aquela ovelha no topo podia ser avistada. Tratava-se de uma ovelha negra.*

*O engenheiro, que é um sujeito muito prático, diz o seguinte:*

*- As ovelhas desse país são pretas.*

*Já o físico, dotado de um mais formalismo que o engenheiro, disse o seguinte:*



- *Você está enganado, meu amigo. Estamos vendo apenas aquela ovelha no topo da colina, que de fato é preta, mas sobre as demais ovelhas atrás da colina, nada podemos afirmar.*

*Finalmente o matemático, guardião da lógica total, manifesta-se:*

- *Vocês dois estão equivocados. A única coisa que podemos afirmar com certeza, é que a metade de cá, daquela ovelha, é preta.*

### **Exemplo 4.2 – Sequência numérica**

*É dada a sequência numérica: 1, 2, 3, ... Determine o próximo número da sequência.*

Nesse momento os alunos certamente pensarão, claro que o próximo número é quatro, mas qual é a “pegadinha” ?

Claro que é um ótimo exercício matemático encontrar padrões lógicos em sequências numéricas, por exemplo, “cada número é a soma dos algarismos do número anterior” ou outra lei de formação que o valha. Bom treinamento matemático. Mas o objetivo aqui é ilustrar a questão da unicidade. Por inspeção, a solução desse problema é 4, e a sequência é formada pelos números naturais: 1, 2, 3, 4... entretanto tal solução não é a única! Isso significa que por mais óbvia possa ser uma solução encontrada por inspeção, a sua unicidade não é necessariamente garantida. No caso dessa sequência, poderíamos dar como solução, por exemplo, 5, e a sequência seria 1, 2, 3, 5... À primeira vista pareceria uma resposta maluca, que pularia o número 4. E quais seriam os números seguintes?

Para apresentar esta sequência, vamos usar um resultado matemático, de que dados  $n$  pontos, sempre é possível encontrar um polinômio de grau  $n-1$  que admite esses valores. Façamos então, para 4 pontos:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; P(0)=1, P(1)=2, P(2)=3 \text{ e } P(3)=5$$

Substituindo os valores de  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $x=2$  e  $x=3$  ficamos com o seguinte sistema (começamos com  $x=0$  para os cálculos ficarem mais simples):

$$d=1$$

$$a + b + c + d = 2$$

$$8a + 4b + 2c + d = 3$$

$$27a + 9b + 3c + d = 5$$

Tal sistema resolvido resulta em:

$$a=1/6, b=-1/2, c=4/3, d=1$$

Com esses coeficientes encontrados, os termos dados pela fórmula,

$$(1/6)n^3 - (1/2)n^2 + (4/3)n + 1 \text{ são:}$$

1, 2, 3, 5, 9, 16, 27, 43, 65, 94, 131...

Uma outra resposta além da alternativa óbvia

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10...

Tal exemplo ilustra que uma solução encontrada por inspeção não necessariamente é a única.

#### **4.4 PROBLEMAS SEM SOLUÇÃO**

Em um primeiro momento, o aluno é acostumado a “encontrar a solução do problema”. Em um curso de matemática superior, aprende-se a demonstrar a existência e a unicidade das soluções. Isto pode ser exagerado para os ensinos fundamental e médio, quando a ênfase é dada a “encontrar a solução”, normalmente através de um método analítico. Uma etapa intermediária que pode ser explorada no ensino médio é identificar problemas sem solução, deixando o aluno descobrir que a solução não existe, ou então, em uma versão um pouco mais fácil, pedindo que o aluno demonstre que determinada solução não existe. Isto pode ser frustrante para o aluno que ainda está aprendendo a encontrar soluções. Os problemas sem solução podem ser apresentados na forma “mostre que não é possível, mostre que não existe”, ou usando uma forma alternativa, apresentando uma afirmação e pedindo sua justificativa.

Por exemplo, ao resolver uma equação do segundo grau, o aluno já sabe que poderá encontrar duas situações quanto à existência das raízes:

$\Delta \geq 0$ : Raízes existem nos reais

$\Delta < 0$ : Raízes não existem nos reais

O aluno já sabe de antemão que existe uma chance razoável de as raízes não existam, considerando o conjunto dos números reais. Isso não é surpresa alguma. Também não haverá surpresa em um problema como “mostre que não existe um quadrado perfeito cuja soma dos algarismos seja 15”, o aluno já sabe que um eventual problema que peça a determinação de tal quadrado perfeito nos levaria a uma solução “inexistente”. A maior dificuldade em um problema de solução inexistente é quando esta inexistência é uma surpresa, ou seja, o enunciado pede que seja determinada uma resposta, e o resolvidor do problema deve descobrir que é impossível encontrar a solução solicitada. Este caminho da solução inexistente aparece nos problemas de múltipla escolha como “zero soluções”.

De fato, quando o problema não faz menção à possibilidade de não existir solução, sem ser um problema de múltipla escolha, é muito difícil o aluno desconfiar que não existe solução.

Várias situações gerar impossibilidades que levam à inexistência de solução, e o aluno precisa investigá-las: critérios de divisibilidade, análise do último algarismo, restos possíveis em uma divisão euclidiana, um “delta negativo”, raízes de índice par para radicandos negativos, um denominador que se anula ou qualquer outra situação que resulte em uma incompatibilidade matemática. Sugere-se ainda, nesse ponto, usar o **Princípio do Absurdo** [PC-Morgado 2014] como ferramenta para demonstrações.

### **Problema-desafio 9: (Colégio Naval – 2010-2011)**

*Estudando os quadrados dos números naturais, um aluno conseguiu determinar corretamente o número de soluções inteiras e positivas da equação*

$$5x^2 + 11y^2 = 876543.$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Solução: A primeira reação de um aluno ao final do 9º ano é tentar resolver a equação, para então verificar o número de soluções. Logo percebemos uma primeira dificuldade: temos apenas uma equação, porém duas incógnitas. Se temos duas incógnitas precisamos de duas equações. Notemos entretanto que o problema não pede que sejam encontradas as soluções, e sim, quantas são, o que mesmo assim não ajuda muito.

Usando conceitos de geometria analítica no plano, observamos que os pares ordenados  $(x,y)$ , com  $x$  e  $y$  reais, que atendem à referida equação, são os pontos de uma elipse com centro na origem. A equação geral de uma elipse nessas condições é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Lembramos ainda que os focos estarão sobre o eixo  $x$ , se  $a > b$ , e sobre o eixo  $y$  se  $a < b$ . No nosso caso, podemos escrever a equação como:

$$\frac{x^2}{876543/5} + \frac{y^2}{876543/11} = 1$$

Reduzindo a equação a esta forma, vemos que o denominador do termo em  $x^2$  é o maior, logo os focos da elipse estão sobre o eixo  $x$ . A equação é indeterminada, ou seja, possui infinitas soluções, mas note que no enunciado é perguntado o número de soluções inteiras, ou seja,  $x$  e  $y$  devem ser números inteiros.

Os valores dos semi-eixos  $a$  e  $b$  desta elipse são, respectivamente:

$$a = \sqrt{\frac{876543}{5}} \cong 418$$

$$b = \sqrt{\frac{876543}{11}} \cong 282$$



FIG. 4.5: Elipse do problema 9

Observamos que tanto  $x$  como  $y$  assumem uma larga faixa de valores, inclusive centenas de valores inteiros, entretanto o enunciado exige que seja encontrado o número de soluções inteiras, ou seja, tanto  $x$  quanto  $y$  devem ser valores inteiros.

Na figura 4.5 fizemos o acompanhamento do problema usando o aplicativo Geogebra. A malha quadriculada mostra divisões que indicam valores inteiros de  $x$  e  $y$ , ou seja, um quadriculado de 1 em 1 unidade. As soluções inteiras da equação são os pontos em que a curva intersecta simultaneamente linhas verticais e horizontais.

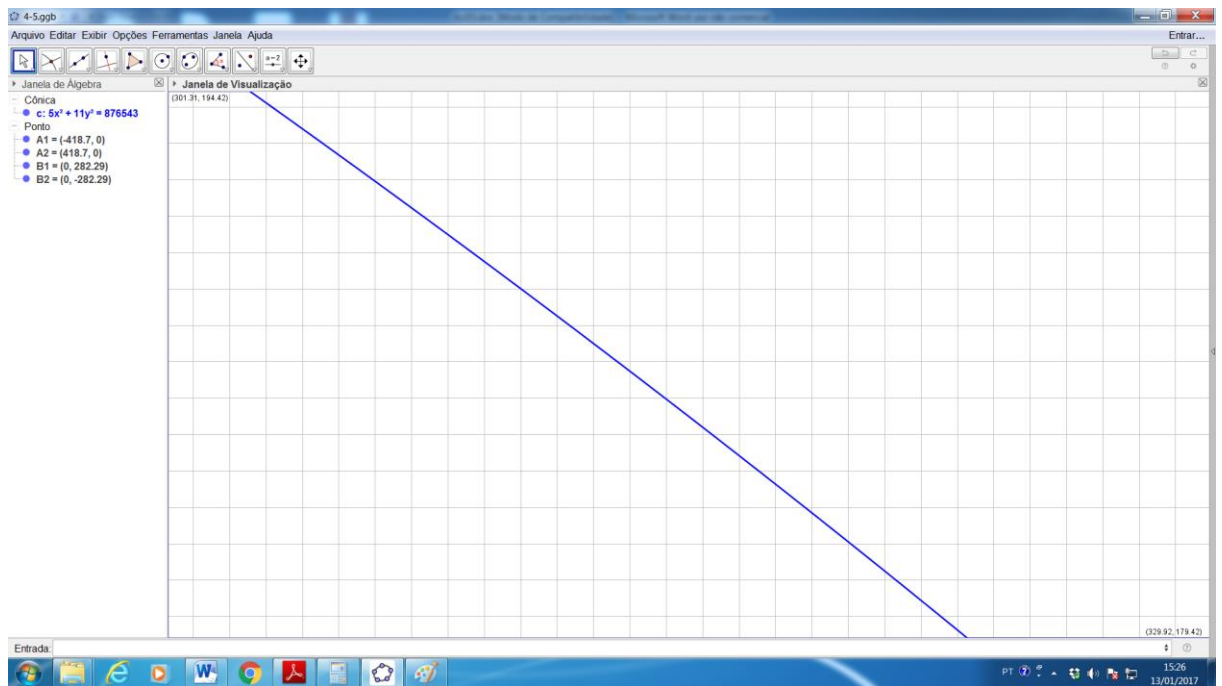


FIG. 4.6: Detalhe da elipse visualizada com o aplicativo Geogebra.

Observando este pequeno trecho da elipse, não encontramos interseções comuns entre a curva e retas horizontais e verticais de forma simultânea, que seriam as soluções inteiras. Em uma rápida inspeção visual notamos que certos pontos parecem ser soluções, mas aplicando uma ampliação, vemos que na verdade não existe tal interseção.

A investigação de tal interseção pode ser feita com o auxílio do Geogebra. Criamos um controle deslizante **vari***ax*, com intervalo de 0 a +418 e incremento 1. Partindo da equação dada no problema, encontramos o valor de  $yy$ , dado por:

$$\sqrt{(876543 - 5x^2) / 11}, \text{ que é a solução real positiva } yy, \text{ para um dado } x.$$

Marcamos então um ponto P com coordenadas ( $vari*ax*,  $yy$ ) (para não confundir com  $x$  e  $y$  que já são variáveis reservadas pelo Geogebra). Podemos então atuar sobre o controle deslizante **vari***ax* e observar a excursão do ponto P, comprovando que, de fato, sua ordenada não assume valores inteiros (figura 4.7).$

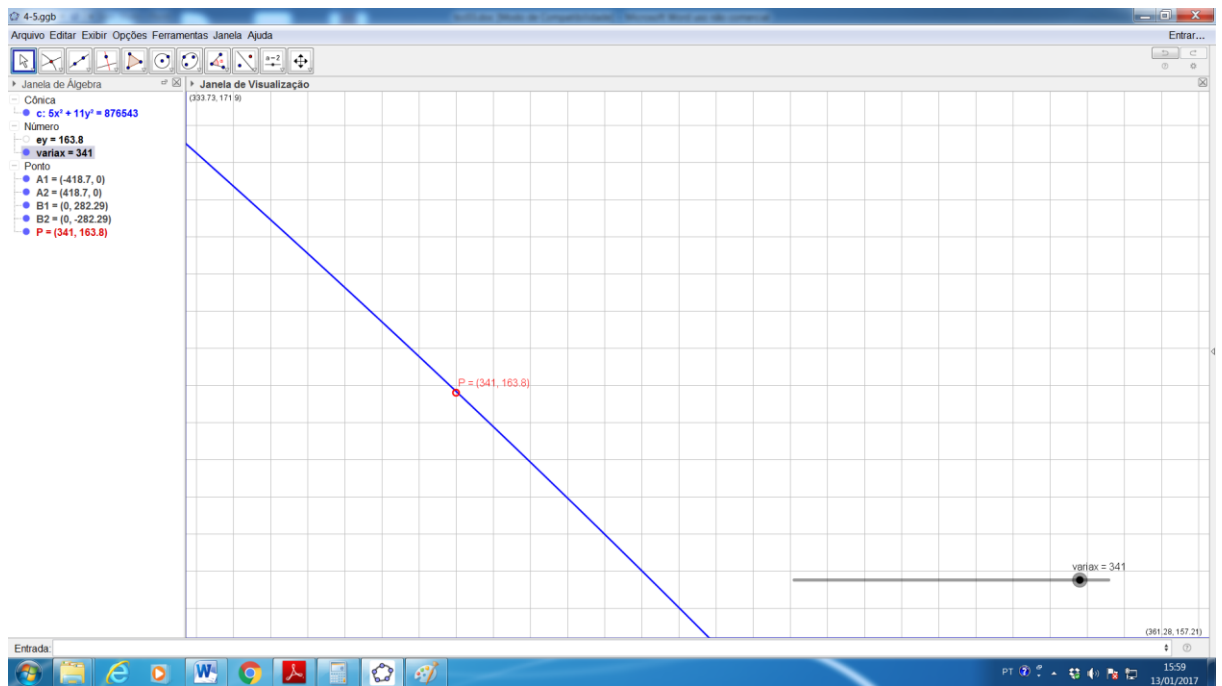


FIG. 4.7: Observando a excursão do ponto P da elipse.

Claro que será muito trabalhoso fazer uma excursão completa de P ao longo da curva, atuando no controle deslizante, mas este procedimento poderá ser feito com facilidade no caso de valores menores. No caso desse problema, para procurar de forma mais eficiente soluções inteiras, podemos usar certos recursos básicos de programação do Geogebra. Um dos recursos mais simples é a exibição condicional. Nas propriedades do ponto P, na guia Avançado, preenchamos o campo **Exibição Condicional** com a expressão  $ey = \text{floor}(ey)$ . Isto fará com que o ponto P seja exibido apenas quando a condição for satisfeita. A função floor fornece o valor da expressão dada, desprezando as casas decimais depois da vírgula. Então a condição dada é o mesmo que dizer que o valor de  $ey$  é um número inteiro. Esta abordagem pode ser usada quando queremos encontrar soluções inteiras para qualquer equação envolvendo x e y.

É interessante mostrar aos alunos este caminho para a resolução desse tipo de problema, que requer ajuda do computador. Neste exemplo, concluiremos que não existe uma solução inteira para a equação. Obviamente não era este o caminho para a solução da questão do Colégio Naval, mas caso existisse solução, este método permitiria encontrá-la.

Muitos problemas de matemática têm como solução, a seguinte resposta: “não existe solução”. Geralmente mostrar que um problema não tem solução é mais fácil que encontrar uma solução, quando ela existe. Sendo assim, quem está se preparando para um concurso, e se depara com uma opção de resposta do tipo “não existe solução”, deve tentar, antes de mais nada, verificar se existe algum motivo simples para o problema não ter solução. Isso é o que ocorre nesse problema, que oferece entre suas alternativas, a opção (A) 0 solução.

Sendo assim, devemos pensar o que poderia impedir o problema de ter solução. Normalmente usando argumentos relativos à divisibilidade, último algarismo, ou outra impossibilidade numérica. No nosso caso, tentamos identificar dois quadrados  $x^2$  e  $y^2$ , de tal forma que tenhamos:

$$5x^2 + 11y^2 = 876543.$$

Faremos uma argumentação baseada no algarismo das unidades. Um quadrado perfeito só pode terminar com os seguintes algarismos: 0, 1, 4, 5, 6 e 9. Ao multiplicarmos por 5, o resultado só poderá terminar com 0 ou 5. Já a expressão  $11y^2$ , só poderá terminar com os algarismos já citados: 0, 1, 4, 5, 6 ou 9. Somando os algarismos finais possíveis para  $5x^2$  e  $11y^2$ , o resultado da soma só poderá terminar com:

Se  $5x^2$  terminar com 0 → A soma terminará com 0, 1, 4, 5, 6 e 9.

Se  $5x^2$  terminar com 5 → A soma terminará com 5, 6, 9, 0, 1 e 4.

Portanto, esta soma nunca poderá terminar com 3, como exige o problema (876543). Logo é impossível que existam dois inteiros  $x$  e  $y$  que satisfaçam à equação. Sendo assim, a resposta para a questão é: **“O número de soluções inteiras para  $x$  e  $y$  é ZERO”**.

Vale a pena mostrar aqui uma outra forma para resolver o problema. Cabe ao professor sempre valorizar outras formas de raciocínio vindas de seus alunos, pois isto indica que as sementes estão dando frutos. Ao contrário, um “corte sumário” em abordagens diferentes dos alunos pode colocar a perder todo o esforço para o



incentivo do aprendizado da matemática. Consideremos a expressão dada pelo problema:

$$5x^2 + 11y^2 = 876543$$

A análise do último algarismo é um método bastante intuitivo e envolve conceitos familiares aos alunos que os remetem aos primeiros anos do ensino fundamental. Um amadurecimento dos alunos na atividade matemática pode permitir o uso de uma abordagem mais avançada, que é a congruência, uma generalização de conceitos de divisibilidade. Deve-se tomar cuidado com a forma utilizada na apresentação desses conceitos. Alunos com reduzida habilidade matemática podem considerá-los como “ameaçadoras” expressões como “ $3|18$ ” ou “ $18 \equiv 0 \pmod{3}$ ”, recomenda-se usar notações mais familiares aos alunos como “18 é múltiplo de 3” ou “ $18=3k$  (k inteiro)” ou casos mais gerais como “ $n=3k+1$ ” (este ao invés de “ $n \equiv 1 \pmod{3}$ ”).

A segunda solução proposta para o problema usa congruência em módulo 3 (ou divisibilidade por 3, em termos “mais familiares”). O segundo membro da expressão é múltiplo de 3, conclusão obtida a partir da soma dos seus algarismos, o que sempre é bom lembrar (cabe aqui uma observação de que os alunos sabem o critério de divisibilidade por 3 porque “a professora disse” e “mostrou exemplos”, mas seria extremamente oportuno justificar por que este critério funciona).

Por outro lado, o primeiro membro é a combinação de dois quadrados. Quadrados só podem deixar resto 0 ou 1 na divisão por 3, o que é um resultado também oportuno de ser mostrado. Qualquer número natural pode ser escrito em uma das três formas:  $3k$ ,  $3k+1$  e  $3k+2$ , não existe outra possibilidade. Os quadrados dessas expressões são  $9k^2$ ,  $9k^2+6k+1$  e  $9k^2+12k+4$ , que deixam restos 0, 1 e 1, respectivamente, na divisão por 3. Então a expressão do primeiro membro  $5x^2 + 11y^2$ , deixa o mesmo resto que  $2x^2 + 2y^2 = 2(x^2+y^2)$  na divisão por 3 (aqui apenas subtraímos  $3x^2 + 9y^2$ , que é múltiplo de 3, da expressão original). Então a única forma de tal expressão ser múltiplo de 3 é se  $x$  e  $y$  forem múltiplos de 3 (restos 1 nas divisões por 3 resultariam em restos 1 ou 2 na divisão de  $x^2+y^2$  por 3). Mas se  $x$  e  $y$  forem múltiplos de 3, então  $x^2+y^2$  será múltiplo de 9. Isto é impossível, pois o número

876543 não é múltiplo de 9. Logo, tal igualdade com  $x$  e  $y$  naturais é impossível, o problema não tem solução.

O problema é portanto de solução rápida e fácil quando desconfiamos que a solução da equação é inexistente. Note que este não é o primeiro problema deste trabalho que exhibe solução inexistente. Os problemas-desafio 1, 2 e 3 também têm essa característica. Na matemática, mostrar que um problema não tem solução é tão importante quando encontrar uma solução, quando ela existe. Às vezes encontrar uma solução de um problema é mais difícil que mostrar que um determinado problema não tem solução, outras vezes é mais difícil. Por isso, antes de procurarmos uma solução, devemos checar se existe um motivo óbvio para que ela não exista. Existem problemas de matemática que são “escolhidos a dedo” de tal forma que não tenham solução e que seja fácil constatar a inexistência de tal solução. Por isso essa busca inicial da inexistência de soluções deve sempre ser tentada de início.

### **Problema-desafio 10 (Colégio Naval – 2012-2013)**

*Um aluno estudava sobre polígonos convexos e tentou obter dois polígonos de  $N$  e  $n$  lados, ( $N \neq n$ ) com  $D$  e  $d$  diagonais, respectivamente, de modo que  $N - n = D - d$ . A quantidade de soluções corretas que satisfazem a essas condições é:*

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) indeterminada

Solução: O professor de cursinho vai ensinar aos alunos como resolver a questão, mas antes vai lembrar: “se não souber fazer, chute em 0 ou o ano em que nós estamos”, e de fato teremos alunos felizes a curto prazo, porque a resposta é realmente zero. Ele está certo ao ensinar o “macetinho”, é o dever dele como professor de curso preparatório – apesar de não ser 100% garantido. É verdade que na matemática existem inúmeros problemas cuja resposta é “não existe solução que satisfaça ao problema”, porém a banca examinadora poderia ser menos descuidada com isso. Quem está avisado, poderá levar uma vantagem inicial, quando não se sabe resolver o problema. Cabe ao professor, mesmo o de cursinho, ensinar como resolver os problemas, sem trapacear.

É um problema que envolve aritmética, álgebra e geometria, um pouco de tudo. Que tal lembrar aos alunos nessa hora, como fatorar uma expressão algébrica do 2º grau, e como calcular o número de diagonais de um polígono de  $n$  lados? A fórmula que determina o número  $d$  de diagonais de um polígono de  $n$  lados é:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Ao apresentar a fórmula, o professor deverá apresentar rapidamente a sua dedução, que é bastante simples e de conhecimento geral dos professores, e não será apresentada aqui.

Aplicamos a fórmula para os dois polígonos do problema, com  $N$  e  $n$  lados respectivamente, chegando aos respectivos números de diagonais:

$$D = \frac{N(N-3)}{2} \text{ e } d = \frac{n(n-3)}{2}$$

É uma boa ocasião para lembrar os alunos, que sem conhecimentos de cálculo algébrico, a possibilidade de resolução de problemas fica extremamente reduzida. Lembrando da 7ª série ou 8º ano (fatoração), calculemos  $D-d$  citado pelo problema:

$$N - n = D - d = \frac{N(N-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2}$$

$$N - n = \frac{N^2 - 3N - n^2 + 3n}{2} = \frac{N^2 - n^2 - 3N + 3n}{2} = \frac{(N^2 - n^2) - 3(N - n)}{2}$$

$$N - n = \frac{(N - n)(N + n - 3)}{2}$$

Como  $N \neq n$ , podemos simplificar toda a expressão por  $N-n$ , e é uma ótima ocasião para lembrar que o “corta-corta” em casos como este só pode ser feito quando o fator “cortado” é diferente de zero. Ficamos então com:

$$1 = \frac{(N + n - 3)}{2}$$

$$N + n = 5$$

Tal situação é impossível, pois um polígono deve ter pelo menos três lados, portanto não podemos ter  $N+n=5$ . O número de soluções é zero, opção (A).

#### 4.5 MÉTODO DE REDUÇÃO AO ABSURDO:

A redução ao absurdo é uma poderosa ferramenta para demonstrações. Para provar que uma proposição  $p$  é verdadeira, partimos da suposição de que  $p$  seja falsa, e a partir daí tentamos chegar a uma contradição, ou seja, uma proposição falsa. Se tal proposição falsa por obtida, significa que a proposição  $p$  é realmente verdadeira. Esta técnica é na verdade consequência de uma tautologia (uma proposição lógica cujo valor é sempre verdadeiro):

$$(\sim p \rightarrow q \wedge \sim q) \rightarrow p$$

#### Problema-desafio 11: ABSURDO!

*Mostre que não existem números inteiros  $x$ ,  $y$  e  $z$ , não todos nulos, tais que*

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

Solução: de fato, a única solução possível é  $x=y=z=0$ . Levando em conta que os números não podem ser todos nulos, devemos mostrar que o problema não tem solução. É um problema de solução inexistente do tipo “camarada”, ou seja, o enunciado já diz que não existe solução e pede que isso seja mostrado. Será preciso usar várias técnicas, a mais importante delas é a redução ao absurdo.

Na solução do problema, vamos supor que realmente existam valores inteiros de  $x$ ,  $y$  e  $z$  tal que a relação  $x^2+y^2=3z^2$  seja satisfeita, e tentaremos chegar a um absurdo ou contradição. Se conseguirmos chegar a este absurdo, estará provado que nossa suposição era falsa, ou seja, que na verdade não existem números inteiros  $x$ ,  $y$  e  $z$  tais que  $x^2+y^2=3z^2$ .

Portanto, iniciamos a solução assim:

Suponhamos por absurdo que existam números inteiros  $x$ ,  $y$  e  $z$  tais que tenhamos a relação satisfeita,  $x^2+y^2=3z^2$ .

Nesse caso temos a soma de dois quadrados inteiros,  $x^2$  e  $y^2$ , igual a um múltiplo de 3. Notamos que a soma de dois quadrados só pode ser um múltiplo de 3 se ambos forem múltiplos de 3. De fato, qualquer número natural pode ser expresso na forma  $3m \pm i$ , onde  $i$  pode valor 0 ou 1. Tal formulação é um pouco difícil de visualizar da primeira vez. Significa que qualquer número pode ser expresso como um múltiplo de 3, ou um múltiplo de 3 somado com 1, ou um múltiplo de 3 somado com 2. Mas somar 2 a um múltiplo de 3 é a mesma coisa que subtrair 1 de um outro múltiplo de 3. Isto é consequência do fato de os restos em uma divisão por 3 só poderem ser 0, 1 ou 2.

Sendo assim, vamos escrever os inteiros  $x$  e  $y$  dessa forma:

$$x = 3m \pm i \quad (i=0 \text{ ou } 1)$$

$$y = 3n \pm j \quad (j=0 \text{ ou } 1)$$

Elevando ao quadrado, temos:

$$x^2 + y^2 = 9m^2 \pm 6mi + i^2 + 9n^2 \pm 6nj + j^2 = 3z^2$$

A nova expressão de  $x^2 + y^2$  pode ser escrita como um múltiplo de 3, somado aos quadrados de  $i^2$  e  $j^2$ , que por sua vez só podem assumir os valores 0 e 1:

$$x^2 + y^2 = 3k + i^2 + j^2 = 3z^2$$

A única forma de termos  $3k + i^2 + j^2 = 3z^2$  é obrigando  $i$  e  $j$  a serem ambos nulos, caso contrário a expressão  $3k + i^2 + j^2$  não poderá ser um múltiplo de 3. Mostramos portanto que  $x$  e  $y$  devem ser obrigatoriamente múltiplos de 3, então podemos escrevê-los como:

$$x = 3m \text{ e } y = 3n$$

Substituindo na nossa expressão original, ficamos com:

$$9m^2 + 9n^2 = 3z^2$$

Que simplificada por 3, resulta em:

$$3m^2 + 3n^2 = z^2$$

Ou seja, concluímos que  $z$  também é um múltiplo de 3. Isto mostra que para que existam  $x$ ,  $y$  e  $z$  inteiros que satisfaçam à relação  $x^2 + y^2 = 3z^2$ , é preciso que  $x$ ,  $y$  e  $z$  sejam todos múltiplos de 3. Isso é o mesmo que dizer que as decomposições em fatores primos de  $x$ ,  $y$  e  $z$  possuem fatores 3. Considere  $r$  o menor expoente de 3 nesta decomposição. Significa que tanto  $x$  como  $y$  e  $z$  podem ser simultaneamente divididos por  $3^r$ , resultando em novos valores  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ , todos inteiros, já que todos possuem o fator  $3^r$ .

$$x'^2 + y'^2 = 3z'^2 \text{ (dividindo a equação por } (3^r)^2 \text{)}$$

Feita esta divisão por  $(3^r)^2$ , um dos valores  $x'^2$ ,  $y'^2$  ou  $z'^2$ , perdeu todos os seus fatores 3. Aquele que perdeu os fatores 3 é aquele que tinha o menor expoente para o fator 3. Ainda assim, os resultados continuam sendo números inteiros, já que  $x$ ,  $y$  e  $z$  tinham todos aquela potência  $3^r$  ou com expoente maior em sua decomposição. Apenas aquele de menor expoente para o fator 3 deixará de apresentar este fator. Sendo assim, um dos números  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  não será mais múltiplo de 3.

**ABSURDO!**

Acabamos de mostrar que quando existem números inteiros  $x$ ,  $y$  e  $z$  quaisquer que atendam à relação  $x^2+y^2=3z^2$ , os três números devem ser obrigatoriamente múltiplos de 3. Entretanto conseguimos obter os números  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  que atendem à relação, porém um deles não é múltiplo de 3. Este absurdo foi gerado pelo fato de termos suposto inicialmente que existem números inteiros  $x$ ,  $y$  e  $z$  que atendam à relação  $x^2+y^2=3z^2$ . Logo, pelo princípio da redução ao absurdo, fica demonstrado que nossa suposição inicial era falsa, ou seja:

Não existem inteiros  $x$ ,  $y$  e  $z$ , além de  $x=y=z=0$ , tais que  $x^2+y^2=3z^2$ .

A redução ao absurdo é uma típica ferramenta que pode ser usada em muitos casos que um determinado problema não tem solução. Entretanto esta não é a sua única aplicação. Podemos usar o princípio do absurdo para outros tipos de demonstração.

### **Problema-desafio 12: Infinitos primos**

*Mostre que existem infinitos números primos.*

Solução: Na verdade não é exatamente um problema, é um teorema da aritmética, mas uma ótima aplicação da técnica de redução ao absurdo.

Suponhamos que os números primos sejam finitos. Podemos então chamá-los de  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ , onde  $p_k$  representa último deles, e também o maior. Considere agora o número:

$$N = p_1.p_2.p_3.\dots.p_k + 1$$

Ao ser dividido por todos os primos, este número  $N$  sempre deixará resto 1.

O teorema fundamental da aritmética diz que todo número pode ser escrito de forma única como um produto de fatores primos. Ocorre que, como  $N$  não é divisível por nenhum dos fatores  $p_1, p_2, \dots, p_k$ ,  $N$  não possui nenhum desses fatores, o que é um absurdo. Logo, o conjunto dos números primos é não é finito.

Note que a redução ao absurdo é uma poderosa ferramenta, mas por si só ele não resolve os problemas ou demonstra teoremas. É preciso utilizar outros resultados, como algebrismo, divisibilidade e inúmeras outras ferramentas, como nos dois exemplos que acabamos de mostrar. Claro, a habilidade do aluno é a mais importante de todas. O número  $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k + 1$  do problema que acabamos de apresentar, é uma típica solução “tirada da cartola”. Tal capacidade é insubstituível.

### **Problema-desafio 13: Terno pitagórico**

*Mostre que se  $x$ ,  $y$  e  $z$  são inteiros tais que  $x^2 + y^2 = z^2$ , então  $x$  e  $y$  não podem ser ambos ímpares.*

Solução: Um número par pode ser escrito na forma  $2k$ , onde  $k$  é um número inteiro, enquanto um número ímpar pode ser escrito como  $2k+1$ . Usamos essas representações, vejamos as expressões gerais para quadrados de números pares e de números ímpares:

$$\text{Quadrado de um número par: } (2k)^2 = 4k^2.$$

$$\text{Quadrado de um número ímpar: } (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 = 4m + 1$$

Vemos portanto que o quadrado de um número par será sempre um múltiplo de 4, enquanto o quadrado de um número ímpar será sempre um múltiplo de 4 somado com 1. Usemos agora essas representações o método de redução ao absurdo.

Suponhamos que  $x$  e  $y$  sejam ímpares e que  $x^2 + y^2 = z^2$ . Sendo assim,  $x^2$  e  $y^2$  podem ser representados como a soma de múltiplos de 4 com 1:

$$x^2 = 4m + 1$$

$$y^2 = 4n + 1$$

$$x^2 + y^2 = 4(m + n) + 2$$

Portanto,  $x^2 + y^2$  é um número par. Entretanto esta soma não pode ser igualada a  $z^2$ , o quadrado de um número par, pois já vimos que todo quadrado par é múltiplo de 4, o que não ocorre com  $4(m+n)+2$ , pois deixa resto 2 na divisão por 4, o que é



um absurdo (contradição). Este absurdo foi gerado pelo fato de termos suposto que  $x$  e  $y$  são ímpares. Logo, fica provado que se  $x$ ,  $y$  e  $z$  são inteiros e  $x^2 + y^2 = z^2$ , então  $x$  e  $y$  não podem ser ímpares simultaneamente.

## 4.6 SOMATÓRIOS

Uma interessante ferramenta para exploração em problemas é o *somatório*, que também pode aparecer na versão de produto, o *produtório*. A técnica tem aplicação direta nas progressões aritméticas e progressões geométricas, e a partir da idéia, inúmeros problemas podem ser criados. Existe uma história muito conhecida, de que um certo matemático, quando era criança, recebeu da professora um castigo para que somasse os números de 1 a 100. Claro que a professora esperava mantê-lo ocupado por algumas horas envolvido com a tarefa hercúlea, mas ele inventou na hora a fórmula da soma dos termos da progressão aritmética, usando um somatório.

### Problema-desafio 14: O jovem Gauss

*Encontre a soma dos números naturais de 1 a 100.*

Solução: Claro que podemos utilizar a fórmula da soma dos termos da P.A., mas a idéia é apresentar o conceito como um desprezioso somatório. Chamando de  $S$  a soma a ser calculada, temos:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

Como a adição é comutativa, a soma  $S$  também pode ser escrita como:

$$S = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1$$

Somando as duas igualdades e agrupando os termos dois a dois, ficamos com:

$$2S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (98 + 3) + (99 + 2) + (100 + 1)$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

A soma no segundo membro tem 100 parcelas iguais a 101, pois cada parcela tem um primeiro valor que varia de 1 a 100. Portanto a soma é  $101 \times 100 = 10100$ .

Ficamos com  $2S = 10100$ , e  $S=5.050$

Este exemplo é muito usado no ensino médio, quando os professores vão ensinar as progressões aritméticas. O método pode ser usado para deduzir a fórmula da soma dos termos de uma P.A., e o mesmo princípio pode ser aplicado na dedução da fórmula da soma dos termos de uma P.G.

O exemplo acima é de fácil compreensão para os alunos, mesmo do ensino fundamental. No ensino médio, os alunos estão certamente familiarizados com somatórios de vários tipos, ou daqueles que se reduzem à soma de parcelas iguais, como no caso da P.A., ou do tipo que “corta tudo” sobrando apenas o primeiro e o último termo. Este tipo de somatório, mais no domínio da álgebra que da aritmética, é um bom tema para a aplicação em problemas-desafio.

### **Problema-desafio 15: Corta-corta**

Calcule a soma: (Colégio Militar, prova para ingresso no 6º ano)

$$\frac{1}{24 \times 25} + \frac{1}{25 \times 26} + \frac{1}{26 \times 27} + \frac{1}{27 \times 28} + \frac{1}{28 \times 29} + \frac{1}{29 \times 30}$$

Solução: Problema difícilimo para alunos que vão ingressar no 6º ano. Na verdade, massacrante. O problema poderia classificado como normal, se fosse dada a seguinte sugestão no seu enunciado:

Note que:

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{9}{8 \times 9} - \frac{8}{8 \times 9} = \frac{1}{8 \times 9}$$

$$\frac{1}{20} - \frac{1}{21} = \frac{1}{20 \times 21}$$

$$\frac{1}{35} - \frac{1}{36} = \frac{1}{35 \times 36}$$

Portanto, a diferença entre duas frações cujos numeradores são iguais a 1, e cujos denominadores são dois inteiros consecutivos, é uma fração com numerador 1 e com denominador igual ao produto dos denominadores das frações originais. E vice-versa. Podemos utilizar este princípio com as frações do enunciado do nosso problema. Escrevemos as seis frações dadas, na forma desmembrada como a diferença de frações, nessas condições. Ficamos então com:

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \frac{1}{26} + \frac{1}{26} - \frac{1}{27} + \frac{1}{27} - \frac{1}{28} + \frac{1}{28} - \frac{1}{29} + \frac{1}{29} - \frac{1}{30}$$

Todas as parcelas irão cancelar, sobrando apenas a primeira e a última:

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{30} = \frac{30}{720} - \frac{24}{720} = \frac{6}{720} = \frac{1}{120}$$

É claro que uma questão muito difícil não traz benefício em um processo seletivo. A maioria dos que irão acertar a questão são os 20% de candidatos que chutaram na letra correta, ou seja, é uma questão que não discrimina entre o aluno mais preparado e o menos preparado, o que deveria ser o objetivo principal de um processo seletivo.

Por outro lado, somatórios podem aparecer em situações de qualquer questão. Em um concurso, por exemplo, o aluno que teve contato anterior levará vantagem sobre os demais.

As clássicas fórmulas das somas de termos da P.A. e da P.G. são somatórios, e a dedução provavelmente é de conhecimento dos alunos do ensino médio, portanto não há necessidade de relembrá-las aqui.

## 4.7 PROBLEMAS DE CONTAGEM

Os problemas de contagem são um estágio inicial no aprendizado da análise combinatória. O conceito de contagem abre caminho também para a progressão aritmética e a progressão geométrica.

Considere o seguinte problema:

### **Exemplo 4.3: Quantas marcações?**

*Uma pista de corrida tem marcações a cada 100 metros, em 0, 100, 200, etc. Quantas marcações existem de 2500 a 4200 metros?*

Inicialmente alguns se sentirão tentados a contar com os dedos: 2500, 2600, 2700, ..., 4000, 4100, 4200, totalizado 18 marcadores. Ficará mais difícil contar se os dados forem diferentes, com um número muito grande de marcadores. Por exemplo, com marcadores de 1 em 1 metro, entre o ponto 125 metros e o ponto 442 metros. Nesse caso, uma subtração resolverá o problema:  $442 - 125 = 317$ . Alguns darão essa resposta, outros ficarão na dúvida: é preciso somar 1, ou subtrair 1? E se a distância entre os marcadores não for unitária, como no problema:

*Considerando que as olimpíadas ocorrem de 4 em 4 anos, tendo sido realizada uma em 2016, quantas olimpíadas ocorrerão entre os anos de 2017 e 2110?*

Tomando os múltiplos de 4, os anos olímpicos serão de 2020 a 2108. E agora? Subtrair e dividir por 4, somar ou subtrair 1 ao resultado? E se a estrutura de contagem não for tão óbvia? Por exemplo:

Qual é o 1000º termo da sequência:

10, 17, 24, 31, 38... Existe uma fórmula, será aplicada corretamente? E sem usar a fórmula, para quem a esqueceu ou quem não a conhece?

Esses tipos de contagem são excelentes ferramentas para o aluno treinar o raciocínio matemático. São cálculos simples que não necessitam de conhecimentos adicionais, mas apresentam ao aluno bons desafios.

### **Problema-desafio 16: Colégio Militar do Rio de Janeiro, 2015-2016**

*Uma pessoa resolve contar usando a mão esquerda da seguinte maneira: ela começa com 1 no dedão, 2 no dedo indicador, 3 no médio, 4 no anelar, 5 no mínimo, e depois inverte a ordem, contando 6 no anelar, 7 no médio, 8 no indicador, 9 no dedão, 10 novamente no dedo indicador, e assim por diante. Em qual dedo a pessoa parou se contar até 781?*

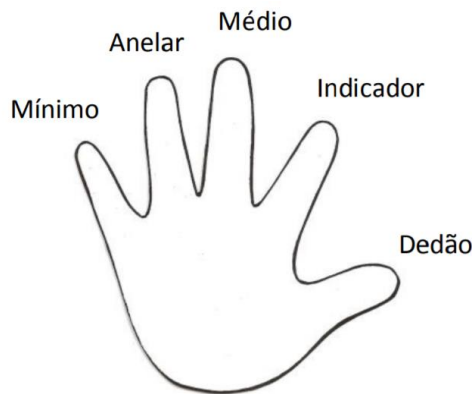


FIG. 4.8: Figura do problema-desafio 16.

Questão inspirada em uma prova da OBM. Atribuindo valores 1, 2, 3, 4 e 5 aos dedos da direita para a esquerda, a sequência de uso dos dedos será:

1 2 3 4 5 4 3 2 1 2 3 4 5 4 3 2 1

O aluno precisa reconhecer a sequência repetitiva 1 2 3 4 5 4 3 2, que tem 8 algarismos. Contando até 781, devemos checar o resto da divisão de 781 por 8, que é 5. O 5º número da sequência é 5, que corresponde ao dedo mínimo.

## 4.8 PROBLEMAS QUE ENVOLVEM FATORIAIS

Cálculos relacionados a fatoriais podem dar origem a excelentes desafios. Este tipo de problema tem sido usado em “desafios injustos”, em provas aplicadas para concursos no final do 9º ano (leia-se: Colégio Naval). O fatorial não está no programa do ensino fundamental, nem mesmo no programa do concurso do Colégio Naval e similares, mas a banca examinadora contorna a dificuldade da seguinte forma: apresenta a definição de fatorial, depois segue o problema propriamente dito. Esta postura é injusta, porque o estudo de um tópico matemático envolve não apenas a definição, mas também propriedades, exercícios e problemas. Então o aluno que não conhece fatorial, precisava em cerca de 10 minutos, resolver uma questão que envolve o uso do teorema de Legendre, apenas conhecendo a definição de fatorial. Mais uma questão que beneficia os 20% de candidatos que chutaram na resposta correta.

Nossa proposta para criar questões desafio para uso no ensino médio não é propor questões sobre um assunto que o aluno conhece apenas a definição. Usando fatorial, um tópico importante no ensino médio, pois é uma ferramenta para a análise combinatória, recomendamos que o aluno já esteja habituado com as propriedades e exercícios sobre o assunto, ou seja, deve ser um conhecimento amadurecido.

### **Problema-desafio 17: Zeros em um fatorial**

*Com quantos zeros termina o número  $100!$  ?*

O aluno deve observar que um zero fazendo parte de um número significa um fator 10. A seguir, deve observar que um fator 10 é causado pela existência de um fator 2 e um fator 5. É preciso portanto descobrir quantos fatores 5 e quantos fatores 2 existem no produto:

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.....98.99.100

A quantidade de fatores 5 é menor que a quantidade de fatores 2, pois aparecem números pares de 2 em 2, e múltiplos de 5, de 5 em 5. O aluno deve portanto reconhecer que existirão 20 números múltiplos de 5 ( $100 / 5$ ). Além disso, existirão ainda quatro múltiplos de 25, que são 25, 50, 75 e 100. Esses números não terão um fator 5, e sim, dois. Portanto o número total de fatores 5 é  $20 + 4 = 24$ . Não existem neste intervalo, número com três fatores 5, pois o primeiro deles é 125, que está fora do intervalo considerado. Portanto o referido número termina com 24 algarismos zero.

### **Problema-desafio 18: (Colégio Naval 2012-2013).**

*O número  $N = 1.2.3.4.5.(...). (k-1).k$  é formado pelo produto dos  $k$  primeiros números naturais não nulos. Qual é o menor valor possível de  $k$  para que  $N/(7^{17})$  seja um número natural, sabendo que  $K$  é ímpar e não múltiplo de 7?*

(A) 133 (B) 119 (C) 113 (D) 107 (E) 105

Apesar de ser um concurso feito no final do ensino fundamental, a prova do Colégio Naval cobra algumas questões desafiadoras para o ensino médio. Existem boas questões sobre polinômios, geometria plana, trinômios do segundo grau e aritmética. Algumas dessas questões são inspiradas em olimpíadas de matemática. A questão deste exemplo é baseada no Teorema de Legendre [Hefez 2014].

Trata-se exatamente do mesmo princípio do problema anterior, a diferença é que neste outro problema, ao invés de determinarmos a quantidade de fatores 10 existentes em um fatorial, devemos agora encontrar a quantidade de fatores 7 em um fatorial. Outra diferença é que agora o problema é inverso, ao invés de encontrarmos a quantidade de fatores 10 (o mesmo que a quantidade de fatores 5), devemos encontrar qual é o menor fatorial que possui 17 fatores 7.

Ao calcular um fatorial, a cada múltiplo de 7 teremos um fator 7 (7, 14, 21...), e a cada múltiplo de 49 teremos um fator 7 adicional. Então, de 1 a 49 teremos 8 fatores 7, chegando a 98 teremos mais 8 fatores 7, portanto em 98 estaremos totalizando 16 fatores 7. Para chegar a 17 fatores 7, teremos que ir até o próximo múltiplo de 7, no caso, 105. Portanto  $N=105!$  é o primeiro número múltiplo de  $7^{17}$ . O problema diz ainda que  $K$  deve ser ímpar e não múltiplo de 7, portanto  $K=107$ .

#### **4.9 EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM $a \neq 1$ : SOMA E PRODUTO**

É sempre positivo levar novidades para a sala de aula, sobretudo quando são do tipo que facilitam os cálculos. Não em cálculos particulares, mas em situações que podem ser usadas com grande frequência. Por exemplo, pode ser uma perda de tempo abordar um “macete para elevar ao quadrado números de dois algarismos”. Seria mais uma informação para lembrar, seu uso não é tão corriqueiro, e não é significativo o tempo economizado, em comparação com uma multiplicação usual. Melhor usar o tempo e o “espaço na memória” para lembrar outra coisa mais importante. Por exemplo, até mesmo muitos adultos não se dão conta que somar  $xy\%$  é a mesma coisa que multiplicar por  $1,xy$ . Isto ajuda muito quando precisamos calcular aumentos ou reduções em série. Muitos ainda pensam que somar 20% e mais 30% é o mesmo que somar 50%. Aí alguns ensinam um “incrível macete”,

soma  $20+30=50$ , depois multiplica  $2 \times 3=6$  e soma os resultados para chegar a 56%. É mais simples fazer  $1,2 \times 1,3 = 1,56$ .

Num triângulo retângulo de ângulos 30, 60 e 90 graus, o cateto oposto é igual à metade da hipotenusa. O cateto maior é igual ao menor, multiplicado por raiz de 3. Este é um resultado que vale a pena ser lembrado, pois este triângulo aparece em praticamente todas as provas de matemática. Então, ao invés de usar o teorema de Pitágoras cada vez que esse triângulo aparece, vale a pena guardar a relação entre os seus lados, mas é preciso que o aluno entenda o porquê dessas relações: corta-se ao meio um triângulo equilátero, por uma altura, e aplica-se o teorema de Pitágoras, chegando finalmente à relação entre seus lados. Isso é mais útil que aprender um “macete para multiplicar dois números de dois algarismos”.

#### **Exemplo 4.4: A fatoração perdida.**

Provavelmente os alunos lembram das fatorações por evidência, agrupamento, diferença de quadrados, quadrado da soma e da diferença. Outras são menos lembradas, como os cubos da soma e da diferença, e também a soma e diferença de cubos. Uma fatoração considerada difícil, conhecida praticamente apenas pelos alunos que estudam para olimpíadas de matemática, é  $x^3+y^3+z^3-3xyz$ . Não seria o caso de apresentar tal fatoração em uma turma típica de ensino médio, mas é bom lembrar o Produto de Stevin, uma fatoração simples mas que muitos alunos acabam esquecendo. Esta fatoração ajuda na resolução de equações do segundo grau “de cabeça”, usando soma e produto.

Existe uma outra fatoração que é fácil mas praticamente não é ensinada no Brasil, pelo menos ela não aparece nos livros didáticos. É um Produto de Stevin onde o coeficiente do termo de segundo grau é diferente de 1. Por exemplo:

$$3x^2 + 8x + 5$$

Um caminho é colocar 3 em evidência e usar Produto de Stevin com frações, o que pode ser difícil. Quais são os números que somados resultam em  $8/3$  e multiplicados resultam em  $5/3$ ?



Ao invés disso, fazemos o seguinte: tomamos 8 como soma (coeficiente do termo de primeiro grau), e  $3 \times 5 = 15$  como produto (produto dos coeficientes de segundo grau e de grau zero). Fazemos então soma=8 e produto=15. Encontramos facilmente esses números, 3 e 5. Fazemos então o desmembramento de  $8x$  em  $5x + 3x$

$$3x^2 + 3x + 5x + 5$$

Nesse ponto, tanto faz usar  $3+5$  ou  $5+3$ , o resultado final será o mesmo. Podemos agora usar fatoração por agrupamento:

$$3x^2 + 3x + 5x + 5 = 3x(x+1) + 5(x+1) = (3x+5)(x+1)$$

#### **Exemplo 4.5: Equação do segundo grau com $a \neq 1$**

Uma técnica parecida pode ser usada para resolver equações do segundo grau quando o coeficiente de segundo grau é diferente de 1. Esta resolução pode ser feita “de cabeça”, ou seja, sem usar a fórmula quadrática.

Considere a equação do segundo grau:

$$21x^2 + 34x + 13 = 0$$

Claro que se as raízes forem irracionais, o trabalho será grande de qualquer forma. Será preciso usar a fórmula quadrática. Mas como fazemos para qualquer outra equação do segundo grau, tentemos antes resolver usando soma e produto. Tomemos como soma, o coeficiente de  $x$ , que é 34. Como produto, tomemos o produto dos termos  $a$  e  $c$  da equação:  $21 \times 13$ . Em geral nem é preciso realizar a multiplicação: soma 34 e produto  $21 \times 13$ . Os números procurados são 21 e 13. Levando em conta os sinais, as raízes são  $-21$  e  $-13$ . Agora dividimos ambas pelo coeficiente de  $x^2$ , então ficamos com  $-1$  e  $-13/21$ . Outro exemplo:

$$24x^2 + 83x + 25 = 0$$

Certamente elevar 83 ao quadrado será o início de um pequeno conjunto de operações desagradáveis, mas fazer soma=83 e produto 24x25 pode ser mais fácil, se o 24 emprestar um fator 3 para o 25, ficaremos com 8 e 75, cuja soma é 83, então os números serão  $-3/24$  e  $-75/24$ , ou seja,  $-1/8$  e  $-25/8$ .

Muitos macetes são bem-vindos, mas é importante que o aluno entenda a sua lógica. Quando mudamos o produto das raízes para a.c, estamos na verdade trocando a equação original por uma equação auxiliar:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ por } x^2 + bx + ac = 0$$

As raízes da equação auxiliar são:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 1 \cdot ac}}{2}$$

Essas raízes são as mesmas raízes da equação original, multiplicadas por a. Portanto, ao trocar a por 1, c por a.c, e dividir as raízes por a, teremos as raízes da equação original.

## 4.10 IDA E VOLTA

Este é um conceito que normalmente o aluno leva anos para assimilar, e a sua falta de domínio contribui para a dificuldade no entendimento da matemática como um todo. Certamente a supressão das aulas de lógica contribui para esta deficiência.

Por exemplo, certamente daremos um nó na cabeça da maioria dos alunos com a frase do exemplo que se segue:

### **Exemplo 4.6: Não vale a volta**

*“Se dois números são iguais, seus quadrados são iguais, mas a recíproca não é verdadeira”.*

Adiciona-se à dificuldade lógica, a dificuldade algébrica, pois muitos partirão de  $x^2 = y^2$ , “cortarão” o expoente 2 e chegarão à conclusão que  $x=y$ . Normalmente o aluno aprende a “cortar” na simplificação de frações, caso em que o cancelamento sempre pode ser feito, mas em outras operações de cancelamento, não aprende por exemplo que só podemos “cortar” um fator dos dois lados de uma equação quando este fator não é zero, ou que não podemos “cortar” uma função quando esta NÃO é injetora, e pior ainda, cortam expressões que em um termo estão multiplicadas e no outro estão somadas.

O aluno típico percebe a matemática como um conjunto de regras aglutinadas, como uma “colcha de retalhos”, sem perceber que um tópico dá origem a outro. Por exemplo, por que as alturas de um triângulo se encontram em um único ponto? O professor já faz o desenho das três alturas, passando em um único ponto, e todos aceitam. Por que não se pode fazer divisão por zero? Muitos alunos responderão: “porque a professora disse”.

Os conectivos lógicos “SE”, “ENTÃO”, “SE E SOMENTE SE”, formam uma rede de ligações entre os conceitos matemáticos, e o entendimento da matemática como um todo depende do domínio dessa rede de conectivos. O professor deve exercitá-los com temas concretos, paupáveis, chamando atenção sobre conectivos unidirecionais e bidirecionais.

#### **Exemplo 4.7: Ida sem volta**

*Se dois números são negativos, o seu produto é positivo.*

Neste exercício o aluno deve ligar duas proposições lógicas por uma seta, e testar se “vale a volta”.

$$(A < 0 \text{ e } B < 0) \rightarrow (A \cdot B > 0)$$

Nessa hora o professor terá que fazer uma pausa, pois será constatado que muitos alunos confundem os sinais  $<$  e  $>$ . Depois de explicar, pode voltar ao assunto principal.

A frase original diz que o produto de dois números negativos dá um resultado positivo. Entretanto, a volta não é válida. Quando o produto de dois números é positivo, os dois números poderão ser, ambos positivos ou ambos negativos. Então não podemos usar a expressão

$$(A \cdot B > 0) \rightarrow (A < 0 \text{ e } B < 0) \text{ (ERRADO)}$$

Ou seja, dizemos que “não vale a volta”.

Em alguns casos, é usada uma proposição lógica como unidirecional, em outros, poderia ser bidirecional.

#### **Exemplo 4.8: Vai e volta**

Se  $A$  e  $B$  forem números reais,

$$A^2 + B^2 = 0 \rightarrow A=0 \text{ e } B=0$$

Partindo de  $A^2+B^2=0$ , chegamos à conclusão que  $A$  e  $B$  são zero, pois  $A^2$  é positivo ou nulo, o mesmo ocorrendo com  $B^2$ , então a única forma de sua soma ser zero é se ambos forem zero. Outra argumentação é escrever  $A^2 = -B^2$ , mas como  $A^2$  não pode ser negativo, a única solução é se ambos forem zero. Deve ser destacado ainda que neste exemplo, vale a volta, pois o fato de termos  $A=0$  e  $B=0$  implica em  $A^2+B^2=0$ . Ou seja, neste exercício o aluno deverá trocar a seta original por uma seta bidirecional ( $\leftrightarrow$ ), ou seja, “vale a volta”, é o mesmo que usar “se e somente se”.

### **4.11 O PRINCÍPIO DAS CASAS DE POMBO**

Também conhecido como *Princípio de Dirichlet* ou *Princípio das gavetas* [PC-Morgado 2014], sua idéia é muito simples e intuitiva. Se  $n+1$  pombos entrarão em  $n$  casas, é certo que pelo menos uma casa terá mais de um pombo. Esse princípio tem uma correspondência direta com certos elementos da matemática, por exemplo, a quantidade de restos possíveis em uma divisão euclidiana.

### Exemplo 4.9: Pombos binários

*Prove que, para todo número inteiro positivo  $n$ , existe um múltiplo de  $n$  que só tem os algarismos 0 e 1.*

Obviamente, os números que só possuem os algarismos 0 e 1 são infinitos. Formemos uma lista parcial de números com esta propriedade:

1  
11  
111  
1111  
11111  
...  
1111111111

Tal lista, apesar de ser incompleta, possui infinitos valores. Considere agora os restos das divisões desses números na divisão por  $n$ . Como são infinitos números, temos infinitos restos, mas esses restos só podem ter  $n-1$  valores, a saber, de 0 até  $n-1$ . Então, para pelo menos um dos restos, haverá infinitos valores que deixam aquele resto. Portanto, pelo princípio das casas de pombo, existem pelo menos dois números que deixam o mesmo resto. Considerando esses dois números, sua diferença será da forma 111111...111000...000, um valor que tem apenas os dígitos 0 e 1, e como os dois números deixam o mesmo resto, esta sua diferença deixa resto 0 na divisão por  $n$ , ou seja, é um múltiplo de  $n$ .

### Exemplo 4.10: (Colégio Militar do Rio de Janeiro, 2016)

*Esta questão conta a história de um mágico que pede a um indivíduo sorteado da plateia, anotasse em um papel, sete números entre 1 e 1000. O mágico então faz uma afirmação correta sobre os sete números escolhidos, o problema pergunta qual das cinco afirmações é a verdadeira. Entre as cinco afirmações, a que responde o problema é a seguinte:*

*(C) Dos 7 números escolhidos, um deles é múltiplo de 7, ou então existem dois deles que deixam o mesmo resto na divisão por 7.*

O resto de uma divisão por 7 só pode assumir 7 valores, de 0 a 6. Se dos 7 números escolhidos, não existem dois que deixam restos iguais, então esses restos necessariamente têm que ser 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, portanto um dos números escolhidos é um múltiplo de 7. Por outro lado, se nenhum dos números escolhidos for múltiplo de 7, então dos 7 números, teremos apenas 6 restos possíveis: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Seriam 6 restos possíveis para os 7 números, então pelo princípio das casas de pombo, dois desses números teriam que deixar o mesmo resto na divisão por 7.

## **4.12 CONCLUSÃO**

Mostramos aqui alguns exemplos de problemas desafiadores para os alunos de ensino médio, e mesmo de ensino fundamental. Outros temas poderiam ser usados, abordando tópicos da matemática básica, já dominada pelo aluno, ou usando tópicos de partes da matemática que estão sendo apresentadas no programa normal. Quaisquer que sejam os temas abordados, recomenda-se ao mestre que não se esqueça de uma diretriz: desenvolver no aluno a habilidade de lidar com futuros desafios, não necessariamente envolvendo cálculos complexos..

## **CAPÍTULO 5: MISCELÂNEA DE PROBLEMAS**

O professor dedicado certamente já tem um comprometimento em fornecer aos seus alunos um aprendizado que traga benefícios em sua vida futura, possibilitando não apenas uma melhor inserção na sociedade, mas também visando um melhor bem-estar pessoal. Uma verdade que deve ser passada aos alunos é que “quem estuda, vence”. Melhor preparação resulta em maior acesso e mobilidade social.

Este professor dedicado e habilidoso certamente não terá dificuldades em encontrar inúmeros problemas interessantes para desenvolver em seus alunos o interesse pela matemática e a habilidade na solução de problemas desafiadores. Aquele tipo de atividade matemática, no estilo “quanto é tanto mais tanto vezes tanto”, os “exercícios”, têm seu papel importante no desenvolvimento da destreza matemática, a habilidade em fazer cálculos com rapidez e precisão, porém o mais importante, aquilo que não podemos simplesmente deixar para a calculadora e o computador, é a superação de desafios.

Nos capítulos anteriores já apresentamos diversos exemplos que podem ser usados em sala de aula, bem como sugestões de ordem matemática e em parte pedagógicas (sem a pretensão de entrar na área da pedagogia) visando a melhor aplicação de tais exemplos.

Neste ponto do trabalho, acreditamos que nossa intenção em apresentar orientações já foi completa. Neste último capítulo apresentaremos singelamente alguns outros exemplos que podem ser aproveitados pelos mestres. O referido professor dedicado e habilidoso certamente já tem em mente vários exemplos, adicionamos então nossas humildes sugestões. Por exemplo, provavelmente todos conhecem o clássico “problema dos camelos” do livro “O homem que calculava” de Malba Tahan [Malba49]. É disso que estamos falando.

### **5.1 O PROBLEMA DO URSO**

Problemas matemáticos tipicamente envolvem cálculos, mas isso não é necessariamente verdade. É possível formular problemas matemáticos interessantes

envolvendo por exemplo a relação entre objetos, e não necessariamente cálculos. Um exemplo famoso é o clássico “problema do urso”.

### **Exemplo 5.1: O problema do URSO**

*“Um urso caminha 40 metros para o sul, depois 40 metros para o oeste, depois 40 metros para o norte, e então chega ao seu ponto de partida. Qual é a cor do urso?”*

A resposta: claro que o urso é branco. A trajetória do urso, com distâncias iguais percorridas para o sul, oeste e norte, não o levaria ao ponto de partida, pois seriam três lados de um quadrado. O urso só chega no ponto de partida se estiver no polo norte, portanto trata-se de um urso polar.



FIG. 5.1: Pessoas no Polo Norte.

De fato, como mostra a figura, se partimos do Polo Norte em direção ao sul, a trajetória é o raio de uma circunferência com centro no Polo Norte. Nesse caso, todas as direções são sul. O trajeto para oeste corresponde a um arco deste círculo. Finalmente a trajetória para o norte é um outro raio da circunferência, retornando-se ao ponto de partida, que é o centro do círculo. Trata-se então de um urso polar.



## 5.2 PESSOAS CONHECIDAS

Problemas envolvendo “pessoas que se conhecem” e “pessoas que não se conhecem” fazem parte da *teoria dos grafos*, uma área importante da matemática superior. Daí surgem diversos problemas desafiadores, que tipicamente não requerem cálculos. Nesses problemas, as pessoas podem estar representadas pelos nós dos grafos, enquanto a relação entre elas, que é o conhecimento, pode ser representada pelos ramos do grafo. Um ramo ligando dois nós indica que aquelas duas pessoas representadas se conhecem mutuamente. A ausência de um ramo ligando dois nós indica que aquelas pessoas não se conhecem. Uma situação em que A conhece B mas B não conhece A seria um ramo unidirecional (uma seta orientada, por exemplo). Vejamos um exemplo de problema envolvendo este tópico.

### Exemplo 5.2: (Concurso EFOMM 2017)

“Em uma festa, sabe-se que cada pessoa tem três amigos, mas que não há três pessoas que sejam amigas duas a duas. Qual é então, a menor quantidade possível de pessoas na festa?”

(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6 (E) 4

Problemas que não exigem cálculos, como é este caso, normalmente deixam o aluno sem saber por onde começar. Claro que a experiência ajuda, mas em geral é preciso ter uma “idéia luminosa”. Por exemplo, o aluno poderia pensar em um cubo. Os vértices são as pessoas, de cada vértice partem 3 arestas, ligando a outros três vértices, que são as 3 pessoas conhecidas.

A solução de usar o cubo, de fato é uma idéia luminosa, o problema é que falta atender a um requisito do enunciado: “a menor quantidade possível de pessoas”. Soluções por inspeção têm essa desvantagem, não trazem embutido o fato de serem uma solução única, ou de serem a solução ótima, no caso deste problema, do número encontrado ser o menor possível. Faremos portanto uma outra abordagem, partindo de 4 pessoas. Uma solução não pode ter menos de 4 pessoas, pois preciso para uma determinada pessoa do grupo, existirem pelo menos mais três pessoas, que são aquelas que a primeira pessoa conhece.

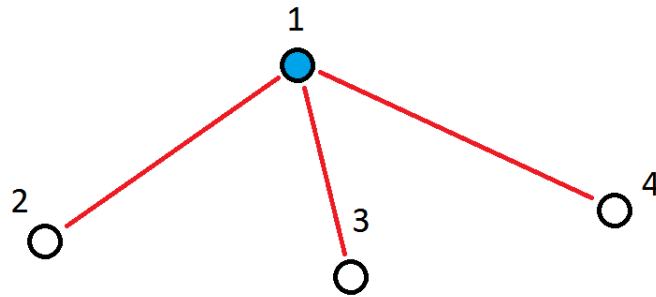


FIG. 5.2: A primeira pessoa conhece outras três.

O indivíduo 1 já tem seus três amigos, o mesmo ainda não ocorre com os indivíduos 2, 3 e 4. O enunciado diz que três pessoas não podem ser amigas duas a duas, ou seja, não é permitido fechar um triângulo. Sendo assim, o problema não tem solução com apenas quatro pessoas, ou seja, existe necessariamente uma quinta pessoa no grupo. Podemos ir mais além: a pessoa 2, por exemplo, que já tem um amigo indicado (1), não pode ser amiga de (3) nem de (4), caso contrário seriam formados triângulos, o que não é permitido pelo enunciado. Portanto existem ao mínimo mais duas pessoas, que são amigas de (2).

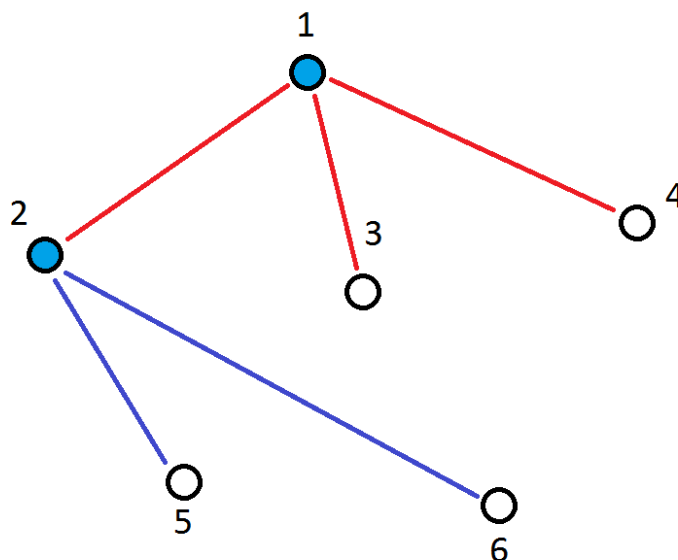


FIG. 5.3: É preciso ter mais duas pessoas.

Com essas duas novas pessoas, fica completo o grupo de amigos de (2), então até o momento, (1) e (2) estão cada um com seus três amigos. Fica claro que não é possível satisfazer isso com menos de 6 pessoas. A questão agora é: será que é

possível completar 3 amigos para cada uma das pessoas restantes. Iremos manter este número mínimo 6 de pessoas, ou será necessário adicionar mais pessoas? Para responder isso temos que tentar formar um total de 3 ligações para cada uma das pessoas restantes. Por inspeção, vemos que isto é possível.

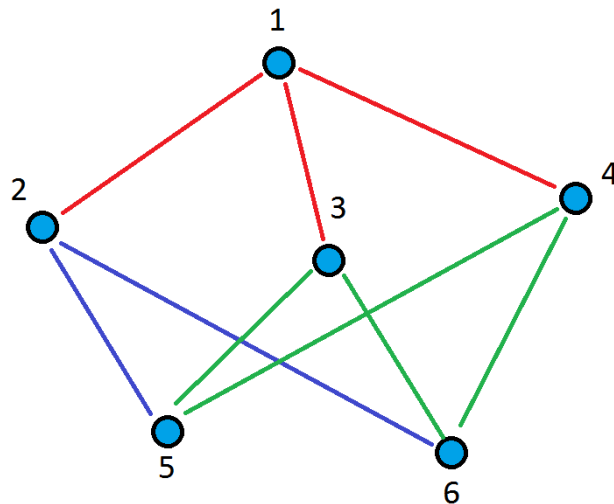


FIG. 5.4: O número mínimo é 6 pessoas.

Sendo assim, vemos que com 4 pessoas é impossível, idem com 5 pessoas, mas com 6 pessoas foi possível formar o esquema da figura acima. Portanto  $n=6$  é a quantidade mínima de pessoas que resolve o problema.

### 5.3 PROBLEMA DOS BAÚS COM MEODAS DE PRATA E OURO

Este é o exemplo de uma classe de problemas que ajudam a desenvolver o raciocínio lógico. A expressão “raciocínio lógico” tem sido usada indevidamente por cursos preparatórios para concursos públicos, sendo utilizado para qualquer problema de matemática que envolva algum tipo de raciocínio. Por exemplo, o clássico problema dos animais de 2 patas e 4 pagas em um quintal, onde é dado o número total de animais e pergunta-se quantos animais de cada tipo existem. Este problema é encontrado com diversas variantes, como por exemplo, carros e motos, e é encontrado em livros muito antigos, como o famoso Lilavati, do matemático indiano Bhaskara.

Mas vamos falar de um problema que é realmente de raciocínio lógico.

### **Exemplo 5.3: Baús com moedas**

*Em três baús havia, respectivamente 100 moedas de ouro, 100 moedas de prata, e uma mistura de 50 moedas de prata e 50 de ouro. Em cada baú havia um cartaz indicando esses conteúdos, entretanto os três cartazes estavam trocados. Identifique os conteúdos dos três baús, sendo permitida a retirada de apenas uma moeda de qualquer um dos três baús, sem entretanto olhar o seu interior.*

Os três baús têm as indicações:

Baú 1: O+P

Baú 2: P

Baú 3: O

Não devemos retirar a moeda de teste, nem do baú 2 nem do baú 3. Vejamos isto retirando uma moeda do baú 2. Se for uma moeda de prata, concluímos que trata-se do baú misto, visto que não pode ser o das moedas de prata, pois todas as placas estão erradas. Dos dois baús restantes temos Ouro e Prata, e ambas as placas estão erradas. Então o 3 é o misto e o 1 é o do ouro, já que ambas estão erradas. Isto resolve o problema, mas suponha que ao tirar uma moeda do baú 2, obtemos uma moeda de ouro. Já que sua placa errada diz prata, e encontramos ouro, este segundo baú pode ser o misto, ou o baú de ouro. Os dois baús restantes são ouro e prata, ou então misto e prata. Não é possível distinguir entre os dois casos. Portanto não é uma boa idéia pegar a moeda de teste dos baús 2 ou 3.

A solução começa por retirar a moeda de teste do baú 1, o indicado como misto. Sabemos que na verdade este baú não é misto, mas sim, possui unicamente moedas de prata ou moedas de ouro. A moeda que for tirada de amostra do baú 1 o identificará como sendo o baú da prata ou o baú do ouro. Entre os dois baús restantes, um deles é o misto, e o outro é o da prata ou ouro, dependendo da moeda que foi retirada. Se foi retirada prata, os outros são ouro e misto. Nesse caso, o baú do ouro é o indicado como tendo prata, o outro é o misto. E vice-versa.

Esse tipo de problema não trata de aritmética, mas sim, de lógica, e sua apresentação pode ser estimulante para o aluno, ajudando a desenvolver o raciocínio lógico em geral. Inúmeros outros problemas dessa classe podem ser apresentados, como o paradoxo do barbeiro e aquele que diz “se falar mentira, morre queimado, se falar verdade, morre afogado”. São problemas divertidos, surpreendentes, e abrem as portas para o interesse pela lógica.

## 5.4 TERNOS PITAGÓRICOS

Veza por outra aparece este problema em concursos, não para que seja demonstrado, pois provas discursivas são hoje raridade, e também por ser um resultado bastante conhecido pelos alunos mais especializados em matemática, mas aparece na forma de “afirmativas falsas e verdadeiras”. Normalmente o aluno conhece alguns triângulos pitagóricos como 3, 4, 5, ou 6, 8, 10, ou 5, 12, 13, em alguns casos o 17, 18, 25. E assim o aluno acaba, através de exemplos, por considerar a afirmativa como verdadeira, o que de fato, é.

Triângulo pitagórico é um triângulo retângulo que tem como lados, números inteiros, claro, positivos. O triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 é chamado de *triângulo pitagórico básico*. Existem infinitos triângulos retângulos com esta propriedade, e os conjuntos de três números inteiros cujos valores são lados de um triângulo são chamados de *ternos pitagóricos*.

Para cada termo pitagórico, infinitos outros podem ser obtidos quando multiplicamos os três valores por um mesmo número inteiro. Ao simplificarmos os três valores pelo seu MDC, encontramos um terno pitagórico que não possui outro terno correspondente com lados menores proporcionais. Por exemplo, simplificando o terno 6, 8, 10 temos o termo 3, 4, 5. Já o terno 5, 12, 13 não tem outro menor com lados inteiros e proporcionais.

Esses números possuem algumas propriedades interessantes:

- sempre haverá um múltiplo de 3.
- sempre haverá um múltiplo de 4
- sempre haverá um múltiplo de 5

- sempre haverá um par e dois ímpares (após a simplificação)

Todas são propriedades interessantes para serem usadas como exercício para os alunos, vamos mostrar a terceira delas, a de que um dos lados é sempre múltiplo de 5.

### **Exemplo 5.4: Ternos pitagóricos**

*Mostre que em todo triângulo pitagórico, a medida de um dos seus lados é um múltiplo de 5.*

A primeira coisa a mostrar é que um quadrado perfeito só pode deixar resto 0, 1 ou 4 na divisão por 5. De fato, qualquer número natural pode ser representado por um dos valores abaixo:

$$5k$$

$$5k + 1$$

$$5k + 2$$

$$5k + 3$$

$$5k + 4$$

Os quadrados desses valores são:

$$25k^2$$

$$25k^2 + 10k + 1$$

$$25k^2 + 20k + 4$$

$$25k^2 + 30k + 9$$

$$25k^2 + 40k + 16$$

Nas cinco expressões acima, os termos em  $k$  e  $k^2$  são múltiplos de 5, o resto na divisão por 5 vem dos termos independentes, então esses restos só podem ser 0, 1 ou 4. Isso mostra que todo quadrado perfeito deixa resto 0, 1 ou 4 na divisão por 5.

Como temos  $a^2 = b^2 + c^2$ , e esses três números deixam resto 0, 1 ou 4 na divisão por 5, vemos que as únicas combinações válidas são:

0, 0, 0

1, 0, 1

1, 1, 0

0, 4, 1

0, 1, 4

Em qualquer das hipóteses, sempre haverá um dos três números deixando resto zero na divisão por 5. Métodos similares podem ser usados para demonstrar as outras quatro propriedades.

## 5.5 QUADRADO MÁGICO

O quadrado mágico é uma entre diversas brincadeiras matemáticas que aparecem com frequência em Olimpíadas de Matemática, concursos (ex: Colégio Militar, Colégio Naval) e eventualmente podem surgir em vestibulares, como é o caso do TANGRAM, um quebra-cabeças que apareceu em uma prova recente do ENEM. Normalmente o TANGRAM é usado em questões que envolvem áreas e perímetros.

O quadrado mágico é uma matriz de números, de tal forma que as somas dos números de cada linha, cada coluna e cada diagonal, têm sempre o mesmo valor. A figura mostra um quadrado mágico do tipo **Saturno**, com formato 3x3 e números de 1 a 9.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

FIG. 5.5: Quadrado mágico de ordem 3.

Um exercício interessante é descobrir, como os números de 1 a 9, devem ser preenchidos em um quadrado 3x3.

### **Exemplo 5.5: Quadrado mágico**

*Preencha um quadrado mágico 3x3 com números de 1 e 9.*

Como a soma  $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$ , então a soma dos números em cada linha tem que ser 15. Designando esses números por incógnitas de a até i, ficamos com:

$$a + b + c = 15$$

$$d + e + f = 15$$

$$g + h + i = 15$$

Vamos trabalhar com apenas quatro equações: a segunda linha, a segunda coluna e as duas diagonais. Ficamos com:

$$d + e + f = 15$$

$$b + e + h = 15$$

$$a + e + i = 15$$

$$c + g + e = 15$$

Somando as quatro equações, cada letra aparece uma vez, e a letra **e** aparece quatro vezes. Ficamos então com

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + 3e = 60$$

$$3e = 15$$

$$e = 5$$

Já sabemos portanto que o 5 tem que ficar no meio do quadrado. Vamos preencher os demais números por tentativas. Começamos pelo 9, temos que decidir se o 9 ficará em um dos quatro cantos do quadrado ou em uma das quatro posições médias das suas bordas.



<b>9</b>		
	<b>5</b>	
		<b>1</b>

FIG. 5.6: Primeira tentativa para o 9.

Caso o 9 fique em um canto, como indicado na disposição acima, o número 1 obrigatoriamente teria que ficar na célula oposta, e os números 8, 7 e 6 não poderiam ficar nas células indicadas em cinza, pois a soma das linhas ou colunas correspondentes seria maior que 15. Sobrariam apenas duas células livres para esses três números, portanto tal preenchimento seria impossível. Concluimos então que o número 9 precisa ficar em uma das quatro células médias das bordas do quadrado. Sem perda de generalidade, escolheremos a célula média da primeira linha.

	<b>9</b>	
	<b>5</b>	
	<b>1</b>	

FIG. 5.7: O 9 tem que ficar na célula média de uma borda.

Dos números restantes, 2, 3, 4, 6, 7 e 8, os únicos possíveis vizinhos para o 9 são o 2 e o 4, pois são os únicos restantes que têm soma igual a 6. Sem perda de generalidade podemos escolher colocar o 4 à esquerda, a outra opção resultaria em uma disposição simétrica.

<b>4</b>	<b>9</b>	<b>2</b>
	<b>5</b>	
	<b>1</b>	

FIG. 5.8: Os vizinhos do 9 devem ser 2 e 4.

Levando em conta que a soma por diagonal vale 15, determinamos os números dos outros dois cantos: 8 e 6.

<b>4</b>	<b>9</b>	<b>2</b>
	<b>5</b>	
<b>8</b>	<b>1</b>	<b>6</b>

FIG. 5.9: Posicionando o 6 e o 8

Para completar a soma 15 por coluna, basta colocar nas posições restantes corretamente os números 3 e 7.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

FIG. 5.10: Finalmente o 3 e o 7

Deve ser notado que tal disposição não é única. Podemos girar o quadrado completo de 90, 180 e 270 graus, e também fazer uma reflexão sobre a fileira 9-5-1.

Podem ser formados quadrados mágicos 3x3 com outros valores numéricos. Podemos somar um valor constante a cada um dos 9 valores originais, ou então aumentar proporcionalmente a diferença entre esses números, ou seja, os números envolvidos podem ser 9 termos consecutivos de uma progressão aritmética qualquer.

## 5.6 20 NÚMEROS NO QUADRO

Um interessantíssimo problema para propor aos alunos, com poucos cálculos e uma grande “inspiração matemática”:

### Exemplo 5.6: 20 números no quadro

*Um professor escreveu no quadro, 20 números. Considere-os como sendo  $a, b, c, d, e, \dots, t$ . A seguir pediu a cada aluno que fizesse o seguinte: escolher dois números, apagá-los e escrever no seu lugar, a sua soma mais o seu produto. O processo foi repetido, um aluno por vez, até que restou no quadro um único número. Determine qual é este número, em função dos números originais.*

A maioria dos problemas que envolvem uma grande quantidade de valores, por exemplo envolvendo o ano atual, não funciona apenas para aqueles números elevados, mas também para números mais simples.

Para resolver este problema, comecemos com números mais simples, e com uma pequena quantidade de valores.

Teste 1: números 1, 2 e 3.

Usando a regra determinada pelo professor, temos:

$$\underline{1}, \underline{2}, 3 \rightarrow \underline{5}, \underline{3} \rightarrow 23$$

Note que não é indicada a ordem dos números escolhidos, no exemplo acima escolhemos 1 e 2, depois o resultado com 3. Se fizermos em outra ordem, agrupando 2 com 3, ficamos com:

$$1, \underline{2}, \underline{3} \rightarrow \underline{1}, \underline{11} \rightarrow 23$$

Tudo indica que o resultado é o mesmo, independentemente da ordem escolhida.

Teste 2: 1, 2, 3, 4

$$\underline{1}, \underline{2}, 3, 4 \rightarrow 5, \underline{3}, \underline{4} \rightarrow \underline{5}, \underline{19} \rightarrow 119$$

Teste 3: 1, 2, 3, 4, 5

$$\underline{1}, \underline{2}, 3, 4, 5 \rightarrow 5, \underline{3}, \underline{4}, 5 \rightarrow \underline{5}, \underline{19}, 5 \rightarrow \underline{119}, \underline{5} \rightarrow 719$$

Parece que os números encontrados são os fatoriais subtraídos de 1:

$$1, 2, 3 \rightarrow 4! - 1$$

$$1, 2, 3, 4 \rightarrow 5! - 1$$

$$1, 2, 3, 4, 5 \rightarrow 6! - 1$$

Fatoriais porque os números escolhidos formam uma sequência de naturais consecutivos a partir de 1. Seriam esses valores, com números a, b, c, d, etc, dados por  $a.b.c - 1$ ,  $a.b.c.d - 1$ ,  $a.b.c.d.e - 1$  ? Pura conjectura, mas uma pista para a solução.

A operação realizada em cada etapa é trocar a e b por  $a+b+ab$ :

$$a, b \rightarrow a + b + ab$$

a expressão  $a + b + ab$  pode ser escrita como:

$$(a + 1).(b + 1) - 1$$

Portanto vamos fazer a seguinte arrumação de números. Digamos que os números sejam  $a, b, c, \dots, t$  (total de 20 números). Façamos uma mudança de variáveis para escrever esses 20 valores como:

A-1

B-1

C-1

...

T-1

Façamos agora a operação definida pelo professor com os dois primeiros valores, ou seja, A-1 e B-1. Ficamos com:

$$(A-1) + (B-1) + (A-1).(B-1) = A + B - 2 + AB - A - B + 1 = AB - 1$$

Ou seja, o que a operação faz é trocar A-1 e B-1 por AB-1

$$A-1, B-1 \rightarrow AB-1$$

Fazendo a mesma operação com C-1 e D-1, ficamos com CD-1

$$C-1, D-1 \rightarrow CD-1$$

Operando AB-1 com CD-1, ficaremos com ABCD-1

$$AB-1, CD-1 \rightarrow ABCD-1$$

Operando desta forma, sucessivamente, chegaremos no final, ao número:

ABCDEFGHIJKLMNQRST – 1

Onde  $A=a+1$ ,  $B=b+1$ , ...  $T=t+1$ .

Ou seja, somamos 1 a cada número do quadro, multiplicamos os resultados, e subtraímos 1 do produto final.

## 5.7 CONCLUSÃO DO TRABALHO

A proposta original do trabalho foi discutir a possibilidade e a conveniência de apresentar temas de aritmética no ensino médio e preparar possíveis aulas sobre o assunto, direcionadas para um público de alunos do ensino médio. Procuramos seguir à risca esses objetivos, aplicado ao teor de ajudar o aluno e desenvolver a habilidade de lidar com situações desafiadoras em sua vida futura.

Não foi nossa intenção orientar o aluno para que seja capaz de lidar com expressões matemáticas complexas, nem adquirir conhecimento profundo da matemática. Certamente, dependendo da área profissional que o aluno irá seguir, o aluno precisará realmente desenvolver tais competências matemáticas. Procuramos, através da abordagem de problemas-desafio para o tema proposto, mostrar uma direção que pudesse dar uma contribuição positiva para o futuro profissional, seja ele matemático, engenheiro, ou mesmo um profissional afastado das ciências exatas. Consideramos que lidar com desafios matemáticos ajudará a criar a habilidade de lidar com qualquer tipo de problema.

## BIBLIOGRAFIA

HEFEZ, Abramo. Aritmética – Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014. p. 140-149.

MORGADO, Augusto Cezar, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Matemática Discreta – Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

SANT´ANNA, Iury Kersnowsky. A Aritmética Modular como Ferramenta para as Séries Finais do Ensino Fundamental. Rio de Janeiro, TCC do PROFMAT, 2013

FRAGOSO, Wagner da Cunha. O medo da matemática. Revista UFSM Educação, Edição 2001, Vol 26, nº. 02. Santa Maria, RS: 2001.

TAHAN, Malba. O homem que calculava. São Paulo: Record, 1949. p. 12.

Prova do Concurso de Admissão ao Colégio Militar do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ: 2015. [www.cmrj.eb.mil.br](http://www.cmrj.eb.mil.br)

Prova do Concurso de Admissão ao Colégio Militar do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ: 2014. [www.cmrj.eb.mil.br](http://www.cmrj.eb.mil.br)

Prova do Concurso de Admissão ao Colégio Naval. Rio de Janeiro, RJ: 2010. [www.marinha.mil.br/ensino/](http://www.marinha.mil.br/ensino/)

Prova do Concurso de Admissão ao Colégio Naval. Rio de Janeiro RJ: 2012. [www.marinha.mil.br/ensino/](http://www.marinha.mil.br/ensino/)

Prova do Concurso de Admissão ao Colégio Naval. Rio de Janeiro, RJ: 2014. [www.marinha.mil.br/ensino/](http://www.marinha.mil.br/ensino/)