Teorema Fundamental da Álgebra para o Ensino Médio

Diego de Souza Scaramella

25 de fevereiro de 2018

IMPA- INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Teorema Fundamental da Álgebra para o Ensino Médio

Diego de Souza Scaramella

Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira

Rio de Janeiro, 25 de fevereiro de 2018

Esse trabalho é dedicado ao meu avô Antônio Cardoso de Souza Filho que
mesmo não estando entre nós me deu muita força para prosseguir no curso.
E a minha Filha Cecília Monteiro Scaramella, simplesmente por existir.
É por você que vivo.

Agradecimentos

Aos meus pais por me proporcionarem a melhor criação que poderiam me dar.

Ao meu irmão e sua esposa por me apoiarem de uma maneira que nem mesmo eles sabem como foi decisiva para que eu continuasse no curso.

À minha esposa por suportar essa batalha comigo.

Ao orientador Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira, pela ótima orientação, dedicação e muita paciência.

Aos meus companheiros de curso, pela ajuda, amizade e estudos, em especial ao meu hoje irmão Flávio Verdugo.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Resumo

Atualmente o Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A) não é abordado no ensino médio na grande maioria das escolas desse segmento em todo Brasil, visto que muitos livros didáticos simplesmente tomam como verdadeiro esse teorema tão importante, pois sua demonstração ainda requer conhecimento de nível superior. Mas então, por que recebe o nome de Fundamental? Por que devemos tomar como verdade tal afirmação, sem nenhuma abordagem sobre sua veracidade? Será que os alunos não estão preparados para tal conhecimento? Essas são algumas das perguntas que motivaram esse trabalho. Então vamos fazer uma análise do T.F.A. e um estudo prático com os verdadeiros favorecidos, os alunos, e assim chegar a uma possível abordagem prática desse importante teorema nas salas de aula do ensino médio, e desse modo preencher essa lacuna ainda existente, e chegar a uma conclusão sobre se uma demostração do T.F.A. (ou um esboço de suas ideias principais) deve aparecer nos livros didáticos.

Alguns livros usados em sala de aula e outros não tão convencionais serão citados nesse trabalho. Embora discutamos a conveniência de os livros didáticos fornecerem mais informação sobre o T.F.A., não pretendemos realizar uma avaliação detalhada de material didático neste trabalho.

Capítulo 2

Um pouco da história

2.1 Conjuntos Numéricos

A noção informal de conjunto se refere a uma coleção de objetos, usualmente com alguma propriedade ou característica comum. É no primeiro ano de escolaridade do ensino médio que os alunos vão aprender com mais precisão quais são os principais conjuntos numéricos, com os quais eles já vinham trabalhando há anos no ensino fundamental. Então vamos a eles:

Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

Com a necessidade básica da contagem usava-se pedras na antiguidade para efeito de comparação, dai o nome cálculo[1]. Por volta de 3.000 a.C. nasceram os algarismos sumérios (os mais antigos da História). Com a evolução, até os algarismos passaram por modificações até chegar nos que usamos hoje em dia. O Conjunto dos Números Naturais é o conjunto dos números que usamos para contar. Denotamos esse conjunto por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Nesse conjunto é possível resolver equações do tipo $x + 4 = 7$, $2x + 3 = 3$, mas ele não supre toda necessidade da humanidade e muito menos da Matemática. Afinal, como seria representado numericamente o resultado de uma barganha se uma das partes ficasse "devendo"para outra? E como resolver numericamente equações do tipo $x + 5 = 2$?

[1]a palavra *calculus* em latim significa "pedrinha"

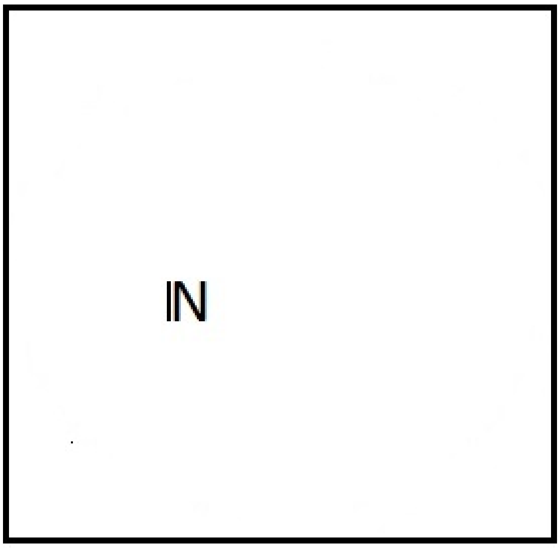

Figura 2.1: Ilustração do Conjunto dos números naturais

Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

Para responder às questões mencionadas anteriormente cria-se o conjunto dos Números Inteiros $\mathbb{Z} = \{-..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, que vem para resolver esses problemas. Esse conjunto permite hoje em dia por exemplo marcar as horas em todo o mundo de forma sincronizada utilizando os fusos horários, usando uma escala que vai de -12 a 12. Temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Qualquer equação do tipo $x + a = b$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ tem solução em $\mathbb{Z}$, mas não é o caso de equações como $2x = 3$.

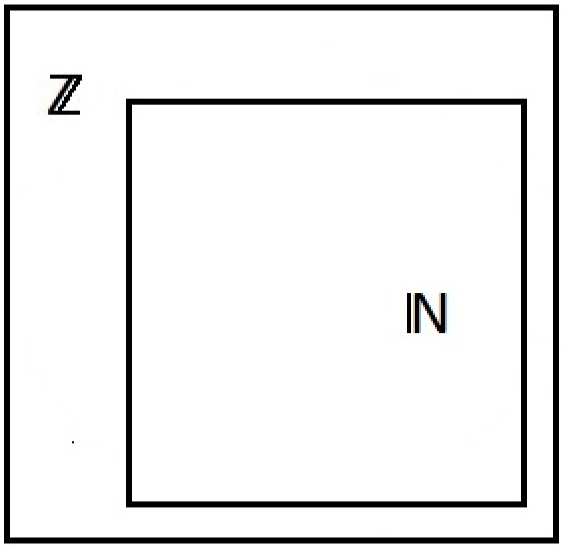

Figura 2.2: Ilustração do Conjunto dos números inteiros

Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

O conjunto dos números Racionais é estabelecido da seguinte maneira: $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$, em que $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ se, e somente se, $ps = qr$. Identificando $\frac{p}{1}$ com p, temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Qualquer equação do primeiro grau, ou seja, do tipo $ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, tem solução em $\mathbb{Q}$, mas esse não é o caso de equações como $x^2 = 2$.

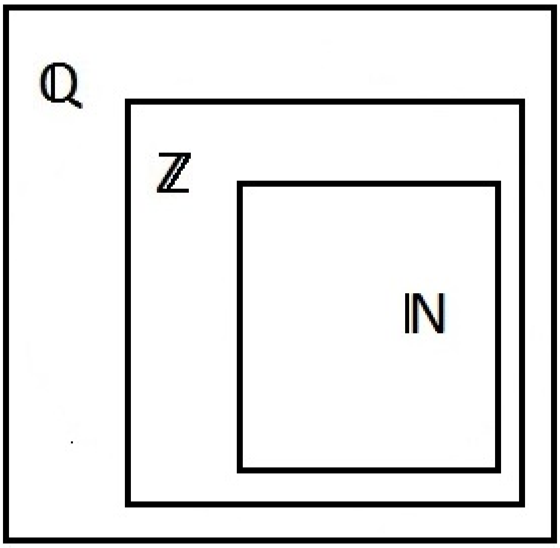

Figura 2.3: Ilustração do Conjunto dos números racionais

Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$)

Os números reais são resultado de medições de grandezas contínuas. Toda representação decimal infinita corresponde a um único número real, e vice-versa (com a ressalva de que números que admitem uma representação decimal finita admitem duas representações decimais; por exemplo, $1 = 0,9999...$). O conjunto dos Números Irracionais $\mathbb{I}$ é o conjunto dos números reais que não são racionais, ou seja, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Assim, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, e $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

No conjunto dos números reais podemos resolver equações do tipo $x^2 = 2$ (que não têm solução nos racionais); a área de um círculo de raio 1, denotada por π (que também é igual à razão entre o comprimento de um círculo qualquer e seu diâmetro), também é um número real que não é racional, ou seja, pertence a $\mathbb{I}$. Por outro lado, equações como $x^2 + 1 = 0$ não têm solução em $\mathbb{R}$. Mais geralmente, não é possível calcular raízes de índice par de radicando negativo nos números reais.

Agora temos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \supset \mathbb{I}$$

.

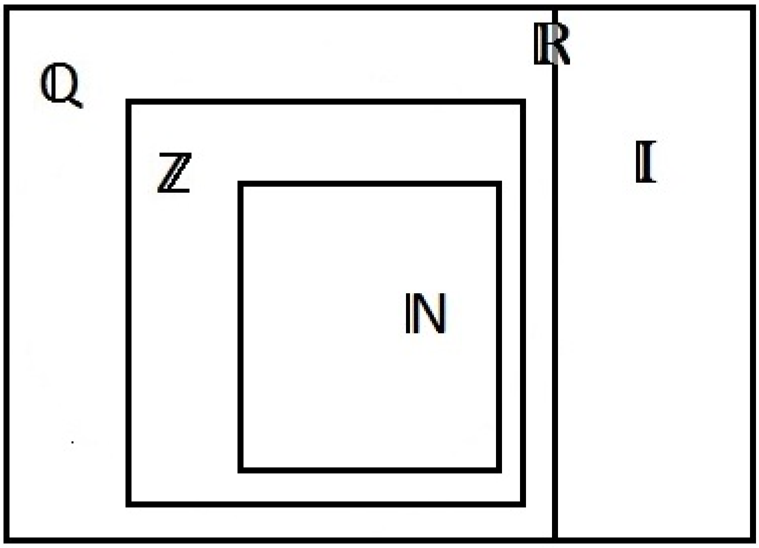

Figura 2.4: Ilustração do Conjunto dos números reais

2.1.1 Conjunto dos Números Complexos ($\mathbb{C}$)

Apenas no último ano de escolaridade no ensino médio é ensinado o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, definindo o número i como unidade imaginária, que satisfaz a igualdade $i^2 = -1$. Temos $\mathbb{C} = \{a + bi|a, b \in \mathbb{R}\}$ (a é chamada a *parte real* e b a *parte imaginária* do número complexo $a + bi$). Dado um número complexo $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, definimos seu *conjugado* $\bar{z} = a - bi$. Em $\mathbb{C}$ torna-se possível resolver equações do tipo $x^2 + 4 = 0$,e, mais geralmente, torna-se possível descobrir as raízes de todas as equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ através da fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Equações do segundo grau como acima com coeficientes reais só terão raízes complexas não reais caso o valor de $b^2 - 4ac$ seja negativo; nesse caso, temos que $\dfrac{-b}{2a}$ é a parte real e $\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ a parte imaginária. Nesse caso, teremos:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \bar{x}_2$$

Assim, numa equação do segundo grau, quando uma de suas raízes for um número complexo da forma $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, teremos seu conjugado $\bar{z} = a - bi$ como outra raiz. Isso é um caso particular de um fato mais real: se um número complexo z for raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais de qualquer grau, seu conjugado $\bar{z}$ também será.

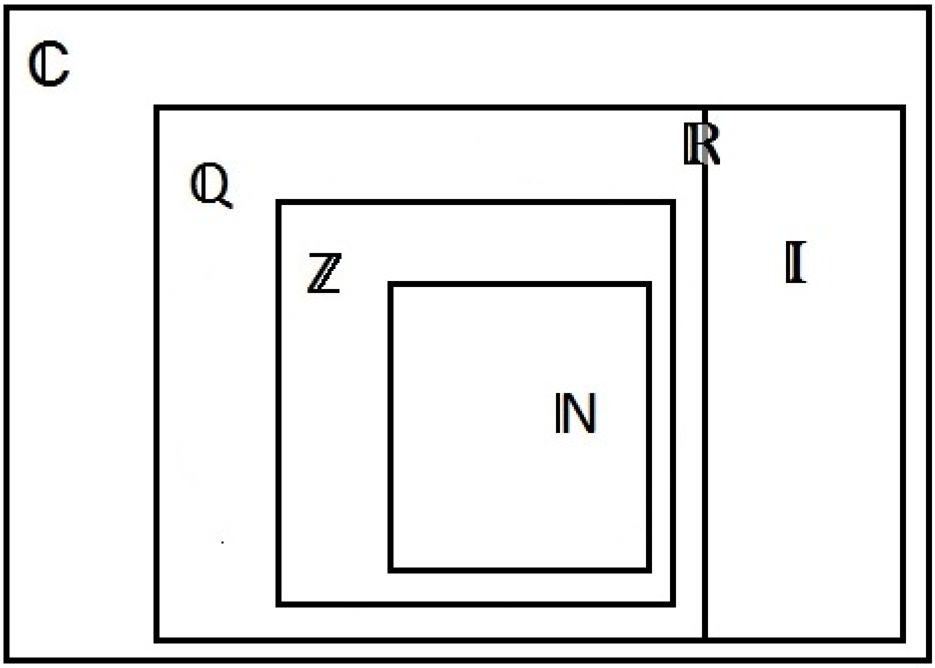

Figura 2.5: Ilustração do Conjunto dos números complexos

Dada a discussão anterior sobre conjuntos numéricos, notamos que, cada vez que introduzíamos um novo conjunto, algumas equações polinomiais que não tinham solução no conjunto anterior passavam a ter solução, mas outras equações polinomiais mais complicadas continuavam sem solução, motivando a introdução de um conjunto maior. Vamos ver na próxima seção que, surpreendentemente, isso não acontece no conjunto dos números complexos, que não precisa ser “ampliado”por razões desse tipo.

Capítulo 3

O Teorema Fundamental da Álgebra

Nesse capítulo será enunciado o T.F.A. e também serão apresentadas algumas provas desse teorema. Em todas essas provas, em algum momento, será preciso recorrer a um conhecimento de nível superior para formalizar a demonstração, mas pretendemos discutir as ideias fundamentais envolvidas.

O Teorema diz que:

Teorema Fundamental da Álgebra: *Todo polinômio complexo, de grau maior ou igual a um, possui pelo menos uma raiz complexa*

Observação: O T.F.A. implica que todo polinômio complexo não nulo pode ser fatorado como produto de polinômios complexos de grau 1. É possível enunciar um resultado equivalente ao T.F.A. sem mencionar números complexos: todo polinômio real não nulo pode ser fatorado como produto de polinômios reais de graus 1 ou 2 (tendo os fatores de grau 2 discriminante negativo).

3.1 Demostração 1: A mais recente

Em 1891, Karl Weierstrass (1815-1897) levantou pela primeira vez a questão de se encontrar uma demonstração construtiva para o T.F.A.. Em 1940 uma tal demostração foi obtida por Hellmuth Kneser (1898-1973) ([1]), e simplificada mais tarde por seu filho Martin Kneser (1928-2004) em 1981 ([2]). É uma das demostrações que apresento neste trabalho. Ela é baseada no seguinte Lema:

Lema: Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, existe uma constante $q = q_n$ com $0 < q < 1$ tal que, dados $C > 0$ e um polinômio mônico[1] $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ com $|a_0| \leq C, \exists\, x \in \mathbb{C}, |x| \leq C^{1/n}$ com $|f(x)| \leq q \cdot C$.

Vejamos inicialmente que o Lema acima implica o T.F.A., usando noções de continuidade. De fato, dado um polinômio mônico com coeficientes complexos $g(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ e um real positivo $C_0 \geq |b_0|$, construímos recursivamente uma sequência $(x_m)_{m \geq 0}$ de números complexos em que $x_0 = 0$ e $|g(x_m)| \leq C_0 \cdot q_n^m = C_m$: dados $m \in \mathbb{N}$ e $x_m \in \mathbb{C}$, aplicamos o Lema para $f(x) = g(x + x_m)$, que (por hipótese de indução) tem termo constante $g(x_m)$ com módulo limitado por $C_m = C_0 \cdot q_n^m$, obtendo $w \in \mathbb{C}$ com $|w| \leq C_m^{1/n} = C_0^{1/n} \cdot q_n^{m/n}$ com $|g(w + x_m)| = |f(w)| \leq q_n \cdot C_m = C_0 \cdot q_n^{m+1} = C_{m+1}$. Definimos então $x_{m+1} = x_m + w$. Temos que $|x_{m+1} - x_m| \leq C_0^{1/n} \cdot q_n^{m/n}$ e $|g(x_m)| \leq C_0 \cdot q_n^m$. Como $0 < q_n < 1$, $C_0^{1/n} \cdot q_n^{m/n}$ e $C_0 \cdot q_n^m$ tendem a 0 exponencialmente rápido quando m tende a infinito, e logo a sequência (x_m) converge (exponencialmente rápido) a um certo $\tilde{x} \in \mathbb{C}$, e $|g(x_m)|$ tende (exponencialmente rápido) a 0, donde, pela continuidade do polinômio $g(x)$, $g(\tilde{x}) = 0$.

Vamos agora provar o Lema:

Se $|a_0| < C/2$, tomamos $x = 0$ (e $f(x) = a_0$ satisfaz $|f(x)| = |a_0| < C/2 \leq q.C$ para todo $q \in [1/2, 1)$). Vamos supor, a partir de agora, que $|a_0| \geq C/2 > 0$.

A ideia é escolher convenientemente um inteiro k com $1 \leq k \leq n$ e um número complexo x cujo argumento seja tal que $a_k x^k$ e a_0 tenham sentidos opostos (i.e., tal que $\dfrac{a_k x^k}{a_0}$ seja real negativo), e cujo módulo $|x| = r$ seja pequeno (mas não muito), de modo que $|a_k x^k|$ seja maior que a soma dos módulos dos termos $a_j x^j$ com $1 \leq j \leq n$, $j \neq k$.

Para isso, consideremos a função $m : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $m(s) = \max\{|a_i| s^i, 1 \leq i \leq n\}$, a qual é uma função contínua, crescente e sobrejetiva.

Temos uma decomposição $[0, +\infty) = I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$ em intervalos, com I_1 " $<$ " I_2 " $<$ " ... " $<$ " I_n (i.e., $i < j, x \in I_i, y \in I_j \implies x < y$; alguns intervalos I_j podem ser vazios) tal que, para s em $I_k, m(s) = |a_k| s^k$.

De fato, se $i < j, |a_i| s^i < |a_j|\, s^j \iff s^{j-i} > \dfrac{|a_i|}{|a_j|} \iff s > \left(\dfrac{|a_i|}{|a_j|}\right)^{\frac{1}{j-i}}$.

Definimos $t > 0$ como a única solução de $m(t) = |a_0|$. Note que $t^n \leq$

[1] Polinômio mônico é o polinômio que tem o coeficiente do termo de maior grau igual a 1.

$m(t) = |a_0| \leq C$, donde $t \leq C^{1/n}$.

Para cada $i \geq -1$ tomamos o inteiro k_i de modo que $3^{-i}t \in I_{k_i}$. Note que (k_i) é uma sequência monótona não-crescente de inteiros positivos.

Temos $n \geq k_{-1} \geq k_0 \geq ... \geq 1$, e logo existe $j \geq 0$ tal que $k_{j-1} = k_j = k_{j+1}$; tome j mínimo com essa propriedade. Então $k_{2i-1} \leq n - i$ para $i \geq 0$, $2i-1 \leq j$, e assim $j \leq 2(n-k_j)$ (caso contrário teríamos $2(n-k_j+1)-1 \leq j$ e $k_{2(n-k_j+1)-1} \leq n-(n-k_j+1) = k_j-1 < k_j$, absurdo, pois $i \to k_i$ é monótona não-crescente). Em particular, temos $j \leq 2n-2$.

Tomamos $k := k_j$ e $r := 3^{-j} \cdot t$. Temos $m(r) = m(3^{-j}t) \geq 3^{-h}m(t)$ com $h \leq n + 2(n-1) + 2(n+2) + ... + 2(k+1) + k = n^2 - k^2$. De fato, como $3^{-i}t \in I_{k_i}, m(s) = |a_{k_i}|s^{k_i}$ para s em I_{k_i} e assim, pela definição dos I_i, no intervalo de $3^{-i}t$ até $3^{-i-1}t$, $m(s)$ diminui no pior caso como uma potência k_i-ésima: se $0 < a \leq b \leq 3^{-i}t$ então $1 \leq m(b)/m(a) \leq (b/a)^{k_i}$, donde $1 \leq m(3^{-i}t)/m(3^{-i-1}t) \leq 3^{k_i}$. Assim, $h \leq k_0 + k_1 + ... + k_{j-1} \leq n + 2(n-1) + ... + 2(k+1) + k$.

Como $k_{j+1} = k$, temos

$$m(s) = |a_k|s^k \tag{3.1}$$

com $s = \dfrac{r}{3}$, donde $|a_i|(r/3)^i = |a_i|s^i \leq |a_k|s^k = |a_k|(r/3)^k$ e $|a_i|r^i \leq 3^{i-k}|a_k|r^k$ para $1 \leq i < k$. Assim,

$$\sum_{1\leq i<k} |a_i|r^i \leq \sum_{1\leq i<k} 3^{i-k}|a_k|r^k = \frac{1}{2}(1-3^{1-k})|a_k|r^k \tag{3.2}$$

Como também temos $m(3r) = |a_k| \cdot (3r)^k$, para $i > k$ temos $|a_i|r^i = 3^{-i}|a_i|(3r)^i \leq 3^{-i}|a_k|(3r)^k = 3^{k-i}|a_k|r^k$, donde

$$\sum_{k<i\leq n} |a_i|r^i \leq |a_k|r^k \sum_{k<i\leq n} 3^{k-i} = \frac{1}{2}(1-3^{k-n})|a_k|r^k. \tag{3.3}$$

Assim, escolhendo x complexo com $|x| = r$ tal que tal que a_kx^k e a_0 tenham sentidos opostos, temos $|x| = r = 3^{-j} \cdot t \leq t \leq C^{1/n}$, e, por 3.2 e 3.3,

$$|f(x)| \leq |a_0+a_kx^k| + \sum_{1\leq i<k} |a_ix^i| + \sum_{k<i\leq n} |a_ix^i| = |a_0| - |a_k|r^k + \sum_{1\leq i<k} |a_i|r^i + \sum_{k<i\leq n} |a_i|r^i \leq$$

$$\leq |a_0| - |a_k|r^k + \frac{1}{2}(1-3^{1-k})|a_k|r^k + \frac{1}{2}(1-3^{k-n})|a_k|r^k < |a_0| - \frac{1}{2}3^{1-k}|a_k|r^k =$$

$$= |a_0| - \frac{1}{2}3^{1-k}m(r) \leq |a_0| - \frac{1}{2}3^{1-k} \cdot 3^{k^2-n^2}m(t) = |a_0| - \frac{1}{2}3^{1-k} \cdot 3^{k^2-n^2}|a_0| =$$

$$= |a_0|(1 - \frac{1}{2}3^{1-k+k^2-n^2}) \leq |a_0|(1 - \frac{1}{2}3^{1-n^2}) \leq C(1 - \frac{1}{2}3^{1-n^2}),$$

o que prova o Lema com $q = q_n = 1 - \frac{1}{2}3^{1-n^2} < 1$. $\square$

3.2 Demonstração 2

A demonstração a seguir foi encontrada no livro [3].

Aqui empregaremos também a ideia de continuidade, mas de um modo mais sofisticado.

Considere uma função polinomial $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

onde $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0$ são complexos. Note que agora estamos olhando p como uma função definida no conjunto dos complexos (isto é, como uma transformação que associa a cada ponto do plano complexo com a sua imagem, que também é um ponto no plano complexo). Queremos demonstrar que existe um complexo z_0 tal que sua imagem $p(z_0)$ seja igual a zero (ou seja, que existe um ponto do plano complexo cuja imagem por p seja a origem).

A fim de poder explorar a continuidade das funções polinomiais complexas (vista aqui de modo intuitivo, mas que pode ser tornado matematicamente preciso), vamos considerar as imagens, através de p, de círculos do plano complexo de centro na origem. Como é a imagem de um tal círculo? Devido à continuidade de p, a imagem de uma curva contínua e fechada (isto é, que volta ao ponto de partida)deve ser uma outra curva contínua e fechada. No entanto, a curva imagem não é necessariamente uma curva simples (ou seja, ela pode cruzar a si própria).

Para ilustrar, vejamos qual é a imagem do círculo $|z| = r$ (círculo de centro na origem e raio r) através do polinômio

$$p(z) = z^2 + z + 2.$$

Exprimindo z na forma polar $z = (cos\theta + isen\theta)$, temos

$$p(z) = (r(cos\theta + isen\theta))^2 + r(cos\theta + isen\theta) + 2$$

$$= r^2(cos2\theta + isen2\theta) + r(cos\theta + isen\theta) + 2$$

Quando z percorre o círculo de raio r, seu argumento θ varia de 0 a 2π. Em consequência, 2θ varia de 0 a 4π. Assim enquanto z percorre uma vez o círculo anterior,

$$z^2 = r^2(cos2\theta + isen2\theta)$$

percorre duas vezes o círculo de centro na origem e raio r^2.

Dessa forma, $p(z)$ é a soma de três complexos: 2, o próprio z, que percorre um círculo de centro na origem e raio r, e z^2 que percorre (duas vezes) o círculo de centro na origem e raio r^2. A questão é: qual é o efeito de somar as contribuições de z e z^2? Embora não seja muito simples descrever o comportamento dessa soma, é fácil ver o que ocorre nos casos extremos, em que r é muito grande ou muito pequeno.

Quando r tem valor próximo de zero, r^2 é muito menor que r. Por esse motivo, o comportamento de $p(z)$ é ditado essencialmente por z. Assim a trajetória descrita por $p(z)$ é um círculo de centro 2, ligeiramente perturbado pelo termo z^2.

A medida que r cresce, o efeito de z^2 torna-se maior. Para valores grandes de r, o comportamento de $p(z)$ passa a ser ditado por z^2. Isso fica mais claro escrevendo

$$p(z) = r^2 \left[(cos2\theta + isen2\theta) + \frac{1}{r}(cos\theta + isen\theta) + \frac{2}{r^2} \right]$$

.

Para valores grandes de r, a trajetória de $p(z)$ vai ser, portanto, um círculo de centro na origem e raio r^2 (percorrido duas vezes enquanto z percorre o círculo original), ligeiramente perturbado pelas contribuições das outras parcelas.

A figura 3.1 mostra a curva descrita por $p(z)$ em dois casos: $r = \dfrac{1}{2}$ e $r = 3$.

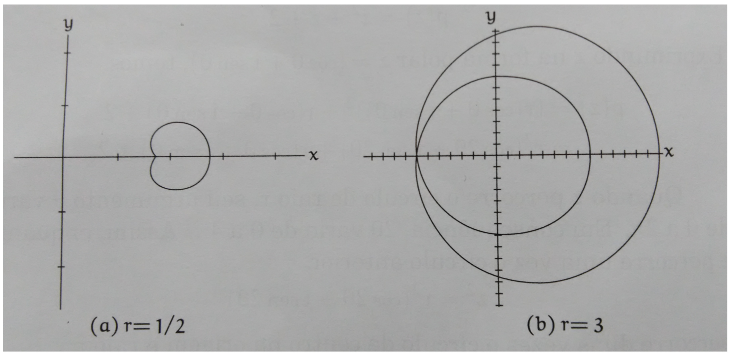

Figura 3.1: r=1/2 e r=3

Note que, para valores de r próximos de zero, a curva descrita por $p(z)$ é uma curva fechada em torno do complexo $2 + 0i$ e arbitrariamente próxima desde complexo. Assim, para valores pequenos de r, a origem fica no exterior da curva descrita por $p(z)$. Já para valores grandes de r, a curva descrita por $p(z)$ se comporta essencialmente, como um círculo de centro na origem;

logo, a origem fica no interior da curva . Mas a curva descrita por $p(z)$ evolui continuamente à medida que r aumenta.. Logo concluímos que, de modo a passar do exterior para o interior, a origem tem que pertencer à curva para algum valor de r. No caso da equação dada, isso ocorre para $r = \sqrt{2}$, conforme ilustrado na figura 3.2. Isso significa que existe um complexo (de módulo $\sqrt{2}$) z cuja imagem $p(z)$ é a origem e, portanto, que a equação $p(z) = 0$ tem uma solução. De fato, as raízes de p são os complexos

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2},$$

que têm módulo $\sqrt{2}$.

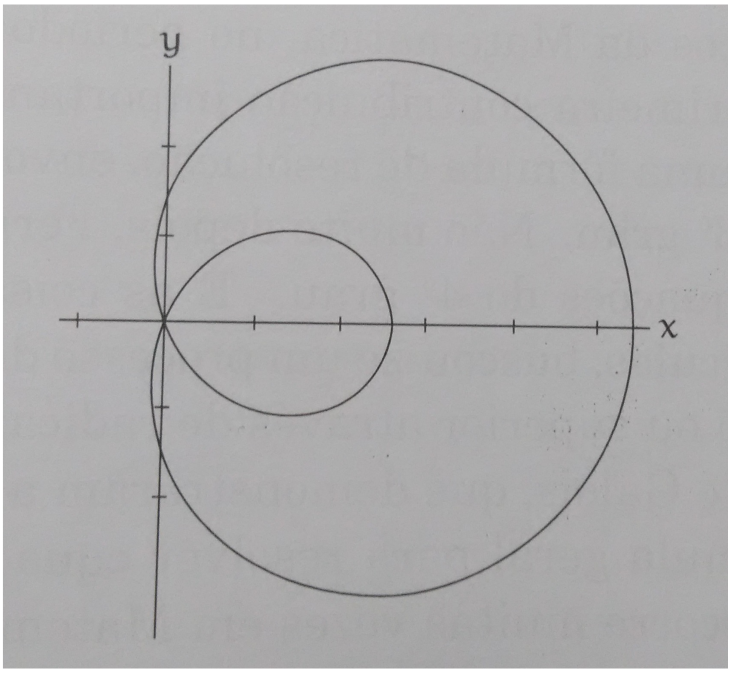

Figura 3.2: Raiz de p(z)

O mesmo argumento acima pode ser empregado para

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0.$$

Quando $a_0 = 0$ fica fácil ver que temos $x = 0$ como uma raiz de $p(z)$.

Quando $a_0 \neq 0$ temos que para r pequeno, z descreve um círculo de centro na origem e raio r, então a curva descrita por $p(z)$ é uma curva fechada, em torno do complexo a_0, e tendo a origem em seu exterior. Para r grande, a curva descrita por $p(z)$ dá n voltas em torno da origem (assim como a curva descrita pelo termo dominante $a_n z^n$). Para passar da primeira situação (origem exterior), para a segunda (origem interior), é necessário que que, em algum momento, a curva contenha a origem e, assim, que $p(z) = 0$ possua uma raiz complexa. Logo toda equação polinomial possui pelo menos uma raiz complexa.

Capítulo 4

O T.F.A. no Ensino Médio

É cada vez mais comum encontrar nos livros didáticos referentes ao terceiro ano de escolaridade do Ensino Médio o Teorema Fundamental da Álgebra sem uma demonstração, dizendo apenas para admitirmos a sua validade. É fato que a demonstração do T.F.A., para ser completamente compreendida, necessita de um conhecimento que não está na alçada do ensino médio, mas dar argumentos para mostrar sua veracidade não é algo tão impraticável ou assustador.

Nos meses de agosto e setembro do ano de 2017 foram realizadas aulas com alunos do Ensino Médio de escolas Particular e Pública no Estado do Rio de Janeiro, com o intuito de se fazer um estudo com os verdadeiros interessados no tema desse trabalho, os alunos. As aulas foram ministradas no contra-turno, como uma forma de oficina, com alunos que se mostraram interessados durante as aulas.

Nessas aulas, comecei falando do Conjunto dos Números Complexos, seus elementos, suas operações e propriedades (módulo, argumento, conjugado e forma trigonométrica), e também sua representação no plano complexo. Falei sobre o Teorema Fundamental da Álgebra, e da sua importância para o estudo de polinômios, observação essa que foi muito bem aceita entre os alunos do terceiro ano, visto que esses já haviam estudado tal assunto.

Comecei explicando aos alunos o conceito de *continuidade* de uma função, e foi bem aceito por todos os alunos de todas as séries, quando falado da importância desse conceito, alguns alunos me questionaram se seriam feitas as demostrações dos resultados apresentados, mas logo foi mostrado que para realizá-las com rigor, necessitaríamos de um conhecimento de nível superior, tal como limites (que já foi considerado assunto de ensino médio no passado), mas que não os impediria de entender o conceito.

A demonstração 2 desse trabalho foi a escolhida para ser apresentada aos alunos, a demonstração correu de maneira bem aceitável, com alunos entendendo bem a explicação no quadro, mas o ápice dessas aulas deu-se quando essa demostração foi feita de forma dinâmica pelo programa GeoGebra, com a participação e opinião e escolha de valores por eles, onde todos os alunos ficaram bem atentos à construção e toda explicação teórica do quadro fez sentido, até mesmo para os que ainda não tinham compreendido substancialmente a demostração.

4.1 Usando o GeoGebra

Com a utilização do programa fica clara a visualização de que qualquer que seja o polinômio de grau impar, o seu gráfico sempre interceptará o eixo das abscissas em pelo menos um ponto, e que, se o grau for par, o que torna possível essa interseção é uma simples mudança do termo independente.

A demostração 2 desse trabalho, que se encontra no livro [3], fica muito mais clara para os alunos, quando a ideia é mostrada por meio do programa, pois uma construção dinâmica fica mais agradável e intuitiva até mesmo para os alunos que não se interessam pela disciplina. A única ressalva que deve ser feita é o fato de se utilizar o conceito de *continuidade*, como já foi falado na demostração aqui nesse trabalho.

Para essa demostração, seguimos os seguintes passos:

I. Seleciona a posição número complexo.

II. Cria a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ (onde r é o módulo dos complexos), junto com o "controle deslizante"referente a r.

III. Cria o ponto $z_1 \in x^2 + y^2 = r^2$, simplesmente clicando sobre cada circunferência já criada.

IV. No campo de entrada criamos z_2 onde $z_2 = (z_1)^2 + (z_1) + 2$.

V. Habilita-se o rastro em z_2

VI. Selecione "animar"em z_1

VII. "Esconda"a circunferência e o ponto z_1

VIII. Para alterar o valor de r no controle deslizante, lembre-se de desabilitar o rastro e a animação em z_2 e z_1, altere o valor e habilite-os novamente.

Capítulo 5

Propostas para apresentar o T.F.A. nos Livros do Ensino Médio

É perfeitamente plausível esboçar uma demonstração do T.F.A. nos livros didáticos do terceiro ano do Ensino Médio. Essas experiências vividas em sala de aula mostraram que uma demostração tal qual está no livro [3] pode, e deve, estar presente na vida estudantil, com algumas ressalvas e adequações para o público mais jovem e com uma "intimidade" menor com a linguagem matemática.

Com o avanço tecnológico é possível ir muito além dos livros impressos, pois, nas plataformas digitais das editoras, exatamente nessa seção do livro pode-se ter um link para um vídeo oficial da editora/autor explicando a demostração que se encontra na versão impressa, como já acontece com outras áreas do conhecimento em algumas editoras do País.

Conclusão

Com esse trabalho pude perceber que os alunos do ensino médio hoje estão preparados para conhecimentos mais avançados do que os que lhes são oferecidos nesse ciclo. O currículo de Matemática na educação básica fica cada vez menos abrangente, porém, com um pouco de dedicação do professor e dos alunos, é possível fazer avanços consideráveis no ensino da matemática, tais como uma melhor apresentação do T.F.A. do que simplesmente fazer com que os alunos o aceitem como verdade. Com experiencias práticas nas salas de aulas os alunos se mostraram mais interessados quando foi mostrada (ainda que sem uma demonstração rigorosa) a veracidade do T.F.A., ficando evidente que os livros podem sim falar sobre a demostração desse teorema, uma vez que, como mostrado nesse trabalho, existem provas que, em grande parte, são bem acessíveis aos alunos do ensino médio, desde que se faça uma ressalva nas poucas partes onde o conhecimento necessário corresponde ao ensino superior. Isso estimulará os alunos a, em algum momento, se dedicarem mais tempo à Matemática do que se tem em sala de aula, e também contribuirá para desfazer a ideia, lamentavelmente muito difundida na educação brasileira, de que "Matemática é um bicho de sete cabeças"ou que "quem gosta de Matemática é maluco".

Com o auxílio do GeoGebra, pode-se mostrar que claramente o gráfico de qualquer polinômio real de grau impar sempre intercepta o eixo x em algum ponto, o que implica a existência de ao menos uma raiz real para qualquer polinômio de grau impar. Grande parte da demostração do T.F.A. é sim acessível ao ensino médio, então por que privar os alunos de tal conhecimento? Os livros podem sim esboçar alguma demostração, fazendo uma ressalva na parte onde se necessita de um conhecimento mais avançado, pois assim, além de contemplar esse assunto nesse ciclo, faz-se menção a um assunto mais avançado, despertando a curiosidade do aluno mais interessado em Matemática, e desmistificando mais um teorema usualmente visto como avançado demais e completamente inacessível a alunos do ensino médio.

Referências Bibliográficas

[1] H. Kneser, "Der Fundamentalsatz der Algebra und der Intuitionismus," *Math. Z*, vol. 46, pp. 287–302, 1940.

[2] M. Kneser, "Ergänzung zu einer Arbeit von Hellmuth Kneser über den Fundamentalsatz der Algebra," *Math. Z*, vol. 177, pp. 285–287, 1981.

[3] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, and A. Morgado, *A matemática do ensino médio*, vol. 3. SBM, 2002.

[4] L. R. Dante, *Matemática: contexto e aplicações*, vol. 3. Ática, 2010.

[5] G. Iezzi and C. Murakami, *Fundamentos de matemática elementar: conjuntos, funções*, vol. 1. Atual, 6^a ed., 1993.

[6] G. Ifrah, *História Universal dos Algarismos.* Nova Fronteira, 1^a ed., 1947.