

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Trabalho de Conclusão de Curso

# **Utilização do Parabológrafo no Ensino de Matemática**

*Thomas Freitas e Souza*

*Dr. Moacyr Alvim*  
**ORIENTADOR**

Rio de Janeiro  
Janeiro de 2018

©Thomas Freitas e Souza, 2018.

## **Resumo**

Neste trabalho abordaremos a construção e utilização de instrumentos para o ensino de Matemática no ensino médio e resolver problemas clássicos que não são construtíveis com régua e compasso. Vamos mostrar como elaborar o parabológrafo com os materiais utilizados; apresentaremos também resoluções para problemas clássicos como duplicação do cubo. O tema é bastante desafiador e importante para o ensino da Matemática. É uma necessidade a ser trabalhada para sermos capazes de desenvolver o conteúdo além do quadro e giz, além de estimular a criatividade e a curiosidade nos estudantes para resolver situações-problema.

## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que me deram força para escrever e conhecimento para pesquisar. Em especial, gostaria de agradecer aos amigos que fiz na turma, pois sem seu apoio nada teria sido atingido. Gostaria também de agradecer à oficina Semente, a qual hoje faço parte e foi imprescindível para a criação do parabológrafo. Gostaria de agradecer também aos professores que tive por terem a paciência e a dedicação de ensinar e me orientar nessa jornada.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>Parabológrafo</b>	<b>9</b>
<b>Problemas Clássicos</b>	<b>17</b>
<b>Conclusão</b>	<b>21</b>



# Introdução

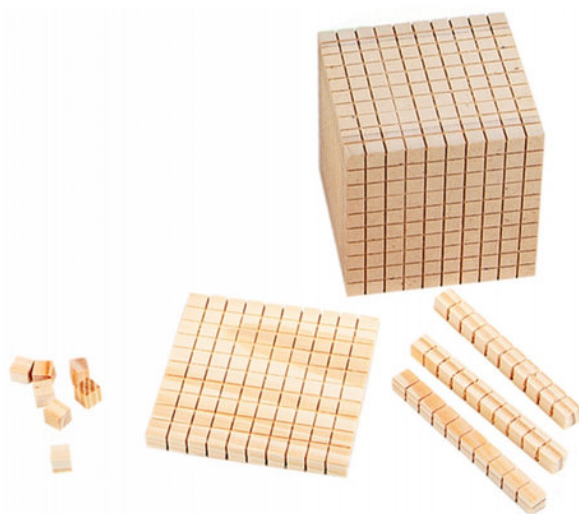
Ao longo da história da matemática, diversos instrumentos foram desenvolvidos para traçar as mais variadas curvas. Para o professor de matemática, além de ensinar os conceitos matemáticos na parte teórica, possuir artefatos capazes de demonstrar, de maneira física, as definições necessárias para o traçado proporciona um enriquecimento acadêmico para o alunado que vai além dos recursos computacionais disponíveis em sala.

É inegável dizer que o século XXI nos trouxe diversas melhorias para o ensino da Matemática. O uso de tecnologias, como o computador, aplicativos e programas, como os de geometria dinâmica, ou até mesmo o celular, trouxeram benefícios para os alunos, por poderem colocar em prática a teoria exposta no quadro, e para os professores, por proporcionar facilidades nos diversos traçados possíveis, como os de funções e polígonos, além de otimizar o tempo escasso dentro da sala. Entretanto, seu uso pode trazer alguns questionamentos, pois não apresentam como foi realizado o comando pedido para o computador. Ao colocarmos uma função, por exemplo, em um programa de traçado de gráfico, a curva nos é apresentada sem explicitar a sua construção. Ao pedirmos, em programas de geometria dinâmica, para desenhar parábolas, elipses e hipérbolas, não nos é informado como seu traçado foi criado. Por melhor que o recurso eletrônico seja, ter em mãos alguns instrumentos matemáticos não ligados, pelo menos não a priori, ao uso computacional também é de grande valia, trará ao aluno os conceitos e definições necessárias para a sua construção, além da estética e organização do quadro.

Alguns recursos já são utilizados em sala de aula em séries primárias como material dourado. Muito utilizado para o ensino de ordens e classes de numeração e também em frações, material dourado é um conjunto de peças agrupadas em:

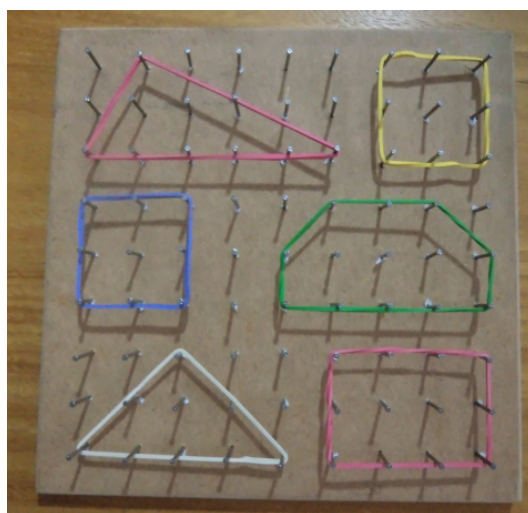
- unidades, representadas por pequenos cubos de madeira,
- dezenas, apresentadas como a união de dez unidades, coladas lado-a-lado para representar a contagem de unidades,

- centenas, presas em grupos de dez dezenas,
- milhares, representado como um cubo composto de dez centenas.



**Figura 1-1:** Material Dourado

Outro recurso físico também utilizado é o geoplano, material próprio para se traçar polígonos, usando elásticos por entre os pinos dispostos no aparelho. Esse recurso também pode ser usado nas aulas de plano cartesiano para representar a marcação dos pontos.



**Figura 1-2:** Geoplano

Não obstante, podemos utilizar dois aparelhos bastante úteis no cotidiano de engenheiros, o teodolito e o inclinômetro, abaixo apresentado com materiais acessíveis em casa.

Esses instrumentos são utilizados para aferir ângulos para calcular alturas de prédios ou estruturas não facilmente acessíveis. Aplicações em trigonometria são uma das possibilida-



**Figura 1-3:** Inclinômetro e Teodolito

des. A forma de construir esses objetos é bastante simples: O teodolito pode ser composto de cabo de vassoura com dois suportes, paralelo e perpendicular, podendo ser feito de papelão grosso ou até mesmo madeira, sendo usado em conjunto do celular, com aplicativos de medição angular. A parte paralela ao cabo afere ângulos verticalmente possibilitando cálculos de alturas, enquanto a parte perpendicular ao cabo mede ângulos horizontalmente, permitindo cálculo de distâncias. O inclinômetro tem um papel semelhante ao teodolito, porém sua construção requer menos material: um papelão grosso ou madeira com um transferidor colado ao suporte e um prumo feito de linha, ou barbante. Trabalhos como medição do prédio onde mora, onde estuda ou locais públicos são excelentes aplicações dos conceitos de trigonometria junto a esses objetos.

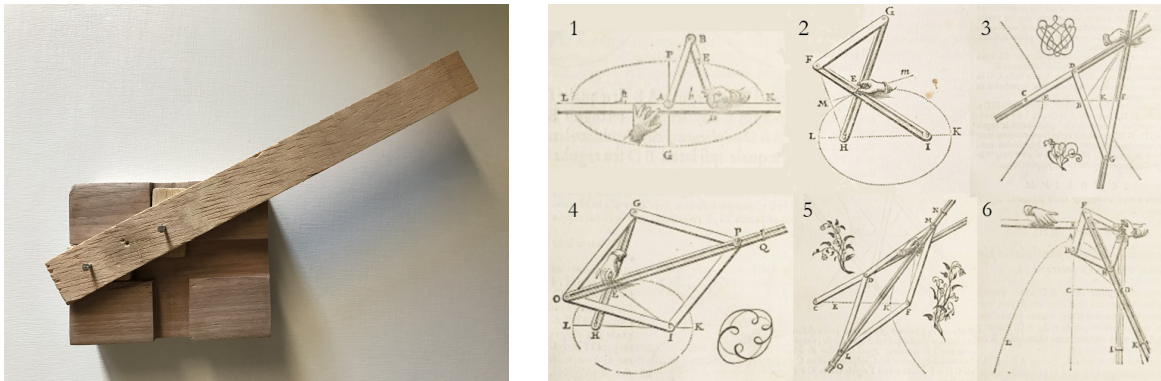
Os instrumentos mais clássicos, régua não milimetrada e compasso, ou até mesmo par de esquadros, são exemplos de artefatos úteis e versáteis para serem usados em sala. Muito utilizado em aulas de desenho geométrico, esses objetos traçam de circunferências a polígonos, mostrando diversas construções bem como trazendo para o campo físico algumas definições antes vistas puramente no campo teórico. Construções como mediatrizes, bissetrizes, baricentros entre outras opções, além de possuírem propriedades matemáticas, trazem para junto do aluno noções, pelo menos básicas, de aplicações reais desses conceitos.

Apesar da diversidade de curvas que podemos criar, régua e compasso não são capazes de construir alguns objetos estudados ainda no ensino médio. Como o caso das cônicas. Elipses, hipérbolas e parábolas são exemplos de lugares geométricos não construtíveis somente com



régua e compasso. Nesse sentido, a criação de artefatos capazes de traçar tais curvas se faz necessário.

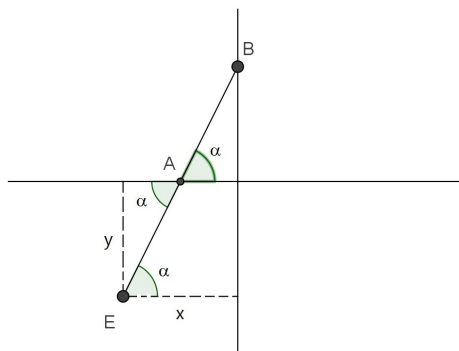
Desde o elipsógrafo de Arquimedes às articulações de Frans van Schooten, diversos mecanismos foram criados para traçar as curvas cônicas. O elipsógrafo de Arquimedes é uma das criações mais simples, portanto elegante, dentre todas. Ele é composto por dois trilhos perpendiculares por onde uma haste de comprimento fixo corre. Na extremidade da haste coloca-se uma caneta ou lápis e, ao girar a haste, o lápis percorre o traçado da elipse.



**Figura 1-4:** Elipsógrafo e articulações de Frans van Schooten

Através desse objeto, podemos demonstrar, de maneira prática, uma das definições de elipse existentes. A demonstração utilizada para esse traçado é:

Considere a intersecção entre os trilhos como sendo a origem do plano cartesiano. Chamaremos o segmento  $BE$  de  $a$  e  $AE$  de  $b$ . Seja  $\alpha$  o ângulo formado por  $EB$  e o eixo  $OX$ , conforme a figura abaixo.



Para determinar as coordenadas do ponto E, temos

$$\frac{x}{a} = \cos(\alpha) \quad \frac{y}{b} = \sin(\alpha)$$

Elevando ambas as equações ao quadrado, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2(\alpha) \text{ e } \frac{y^2}{b^2} = \sin^2(\alpha) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Portanto, o lugar geométrico descrito por E é uma elipse.

Apesar de ser prático e elegante esse artefato, ainda assim é possível apresentar uma construção com aparelhos mais simples. A elipse é definida também, de maneira clássica, como sendo o lugar geométrico dos pontos tais que a soma das distâncias dos pontos a dois pontos fixos, chamados de focos da elipse, é constante. Isto é, sejam  $P$  um ponto do espaço e  $F_1$  e  $F_2$  focos, fixos no plano, a elipse é o conjunto de pontos que satisfaz

$$|PF_1 + PF_2| = 2a$$

onde  $a$  é uma constante real positiva e tal que  $F_1F_2 < 2a$ . Podemos construir a elipse colocando dois pontos fixos e uma corda não esticada presa a esses pontos. Ao esticarmos essa corda com o lápis e girarmos ao redor do centro dos focos, que é o ponto médio entre eles, o traçado criado é o de uma elipse.

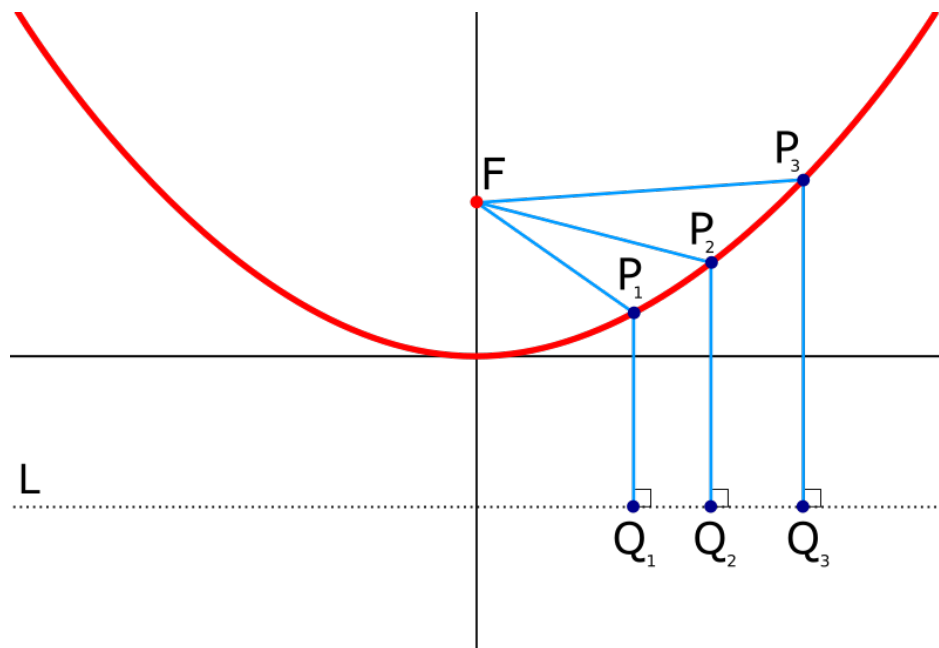
Essa forma de construir requer dois materiais somente, uma corda, que pode ser presa aos focos, ou uma envoltória que passa pelos focos e podemos colocar duas ventosas simples para serem os pontos fixos. Podemos ainda pedir auxílio para um ou dois alunos colocarem seus dedos para serem os focos da elipse. Dessa maneira, os alunos passam de meros espectadores a coadjuvantes da aula.

Já o hiperbológrafo não é um aparelho útil de se levar para dentro de sala de aula. A quantidade de articulações que possui, se baseando no esquema de Van Schooten, além de aumentar seu peso, o torna pouco prático e didático. De todos os artefatos capazes de traçar as cônicas, a nosso ver, esse é o menos versátil.

O potencial despertador de interesse dos alunos com relação a esses tópicos é alto, uma vez que eles próprios poderão construir as curvas. A visualização sólida das construções pode aumentar a capacidade de absorção do conteúdo, além de proporcionar uma oportunidade real de contato com mecanismos capazes de aguçar o interesse por áreas do conhecimento afins, como engenharia.

Nesse trabalho, dedicaremos especial atenção ao parabológrafo. A escolha desse artefato se deve a frequente aparição da parábola no currículo básico, sendo estudada como uma curva cônica e estudada também como gráfico de uma função quadrática, apesar da recorrente omissão da demonstração.

A parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo, chamado de foco, e de uma reta, chama de diretriz.



**Figura 1-5:** Definição da Parábola

Possui diversas aplicações no cotidiano, desde antenas parabólicas, comuns em empresas de TV por assinatura, a faróis de carros, graças à propriedade dos raios que saem do foco, onde fica posicionada a lâmpada, refletirem paralelamente ao eixo de simetria, que demonstraremos no próximo capítulo.

Iremos abordar nesse trabalho a construção do parabológrafo, desde o material usado até as falhas de concepção do projeto, e mostraremos também como usar o parabológrafo para resolver o problema clássico da duplicação do cubo. Apresentaremos possíveis usos do parabológrafo em temas do ensino básico.

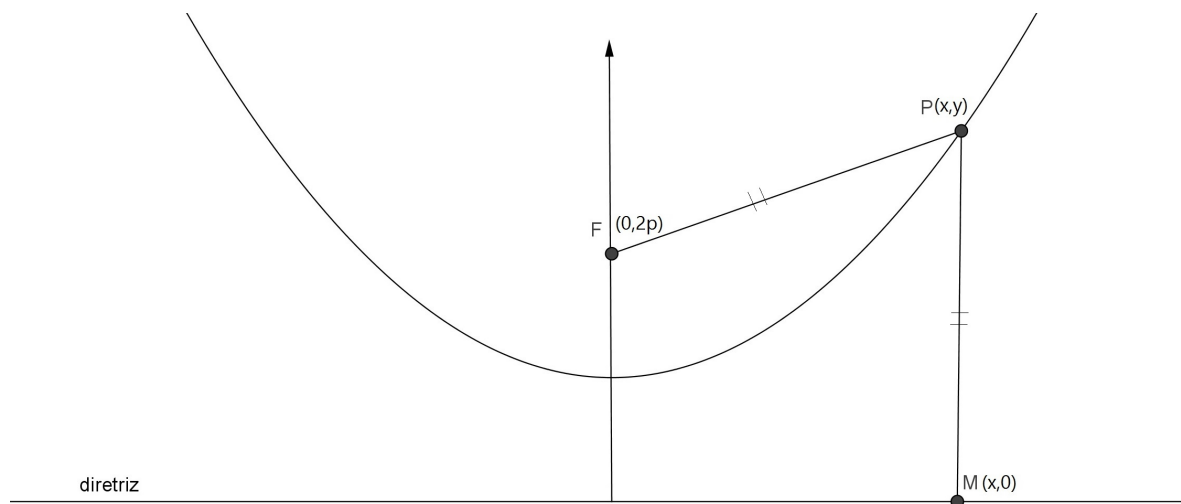
# Parabológrafo

Neste capítulo dedicaremos especial atenção ao parabológrafo, um artefato capaz de traçar parábolas e que é útil para fixação do conteúdo. Duas definições possíveis para a parábola são:

- Parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma reta, chamada de diretriz, e de um ponto fixo, chamado de foco, a mais comumente apresentada, inclusive a nível médio.

- Parábola é a envoltória de retas mediatrizes entre o foco e pontos sobre a reta diretriz dada.

Trabalhando com a primeira definição, temos a seguinte imagem:



**Figura 2-6:** Definição de Parábola

$$\begin{aligned}d(P, F) &= d(P, M) \\ \sqrt{x^2 + (y - 2p)^2} &= \sqrt{(x - x)^2 + (y - 0)^2} \\ x^2 + (y - 2p)^2 &= y^2 \\ x^2 + y^2 - 4py + 4p^2 &= y^2\end{aligned}$$

$$4py = x^2 + 4p^2$$

$$y = \frac{1}{4p}x^2 + p$$

Se colocarmos o vértice sobre a origem do plano cartesiano, ficaremos com a expressão

$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

Através dessa demonstração, criamos o primeiro protótipo do parabológrafo. Os materiais utilizados foram:

- Trilho de cortina, o qual é a nossa diretriz,
- Madeira Pinnus, que serviu de suporte para o trilho e o eixo de simetria,
- Corda elástica, presa entre o trilho de cortina e o eixo,
- Cavilha de madeira, segurando a corda no foco.



**Figura 2-7:** Primeiro protótipo do parabológrafo

Para a montagem desse parabológrafo, aparafusamos três pedaços de madeira ao trilho de cortina, um na base e outro na lateral, para aumentar a sustentação, e o terceiro, também na lateral, perpendicular à base para servir de eixo de simetria, onde estão localizados os focos. Nesse eixo, fizemos 5 furos pelos quais passa a cavilha que segura a corda elástica no foco. Esses furos permitem fazer parábolas com concavidades diferentes. O traçado da parábola se dá ao colocarmos a caneta no ponto médio da corda e esticarmos até seu ponto máximo em ambas as direções, fazendo as duas metades da parábola.

A curva traçada é apenas um esboço, uma das diversas falhas apresentadas por esse protótipo. Outra falha que podemos apontar é a madeira que se encontra no eixo de simetria. Ela está posicionada apoiada junto ao quadro por onde a caneta traça a curva, causando, dessa forma, uma descontinuidade no desenho. Também podemos apontar como defeito na concepção o fato do ponto médio a ser encontrado ser feito à mão livre, o que torna impreciso o gráfico. Ele precisa ser encontrado dessa forma porque podemos mudar a posição do foco, o que gera um ponto médio em outra posição. Além desses pontos, temos também a posição do trilho como outra falha do projeto, pois como se encontra em uma posição à frente do quadro causa um desvio no traçado. Por último, temos o material na qual é feita a corda, que perde a elasticidade, uma vez que a corda deve permanecer esticada do foco ao trilho.

Para o segundo protótipo, os materiais utilizados foram:

- Madeira MDF, por onde corre os rolamentos,
- Madeira Compensado, por onde os rolamentos estão apoiados,
- Madeira OSB, para fixar os rolamentos no trilho criado,
- Dois rolamentos de 42 mm de diâmetro,
- Duas ventosas simples, para suporte do objeto ao quadro,
- Uma ventosa de sucção, para posicionar o foco no quadro,
- Linha nylon, do tamanho do braço, para o traçado.



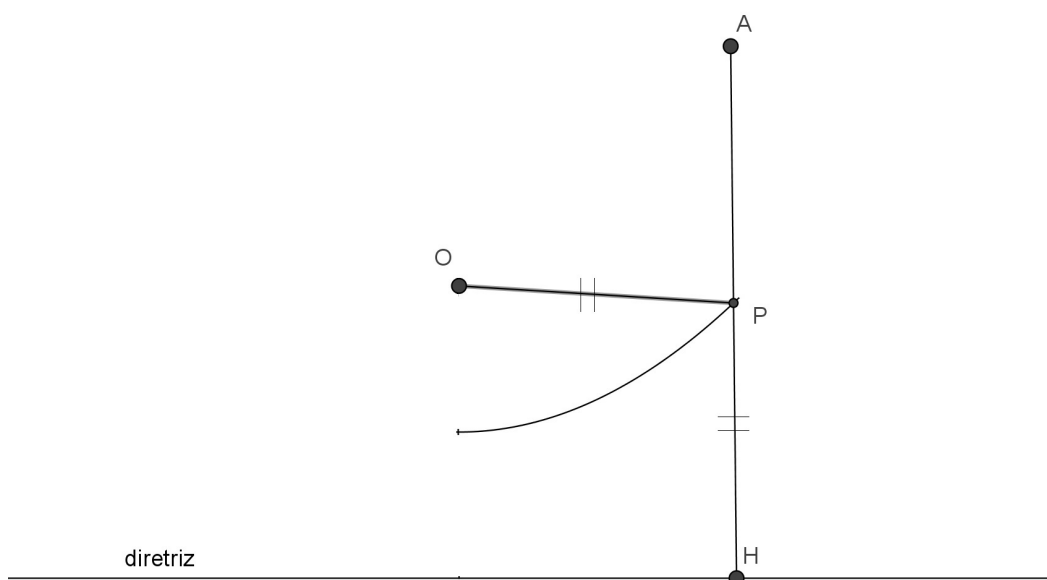
**Figura 2-8:** Segundo protótipo do parabológrafo

A madeira MDF é apoiada no quadro e nela foram instaladas duas ventosas simples para ajudar na sustentação do artefato. Os compensados foram colados e aparafusados no MDF para servir de trilho para o eixo do traçado. Esse eixo, perpendicular ao trilho, feito de compensado, possui um parafuso na extremidade oposta, na qual o fio foi amarrado. O braço

não é preso ao trilho para facilitar a locomoção do aparelho. Para prender os rolamentos dois pedaços de alumínio foram colados ao braço, servindo de eixo de giro. No foco, uma ventosa de sucção foi posta com uma cavilha colada e a linha amarrada em um pequeno furo feito na cavilha.

Para fazer o traçado, prendemos a ventosa de sucção no quadro e esticamos o fio de tal maneira que ele faça um laço do foco até o trilho e suba até a extremidade do braço. Apoiamos o trilho de tal modo ao laço acontecer. Segurando firme, com a caneta empurramos o braço, sempre se preocupando em manter esticado o fio. Dessa maneira, conseguimos traçar a parábola.

Esse objeto, de fato, traça uma parábola, pois



**Figura 2-9:** Parabológrafo

Seja  $l = AH$  o comprimento do fio. Então, na imagem acima

$$OP = l - AP = AH - AP - PH$$

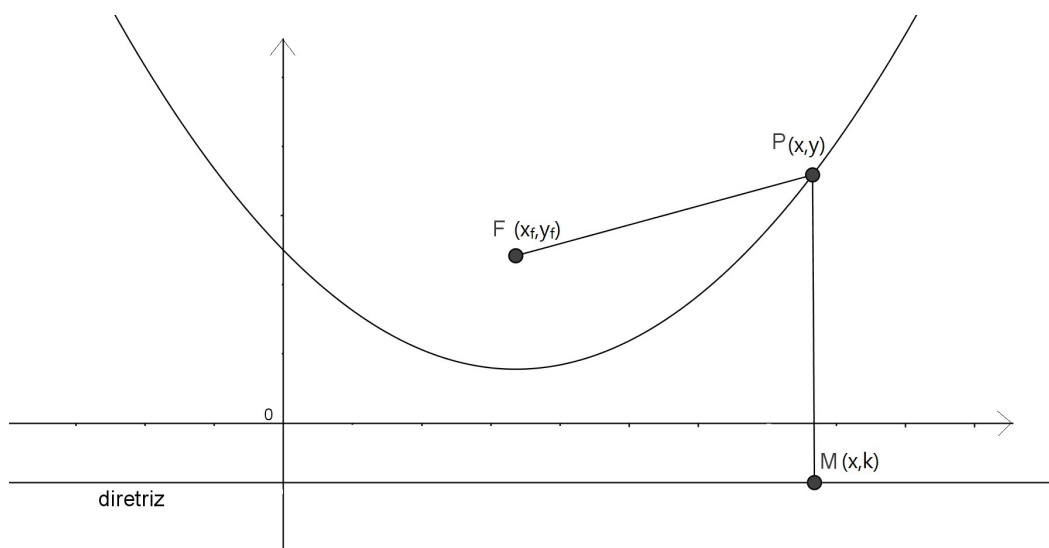
Logo, a figura traçada é uma parábola.

Esse protótipo ainda precisa de algumas melhorias, como, por exemplo, o rolamento não deslizar sobre o trilho. Em algumas partes pode haver um travamento no rolar, ocasionando um deslizamento prejudicial ao desenho. Outro defeito que podemos apontar é o excessivo peso, por vezes necessitando de ajuda de outras pessoas. O peso se deve, em parte, pelo tamanho do objeto e, em outra parte, pelos diferentes tipos de madeira utilizado, apesar de

ser feito de materiais relativamente leves e frágeis. Uma falha que observamos no projeto é o tamanho que possui, tornando um pouco difícil seu manuseio.

Apesar de suas falhas, o segundo protótipo é melhor do que o primeiro, pois, mesmo tendo de tirar a caneta do quadro para poder fazer os dois arcos, o traçado é contínuo e torna a curva mais precisa, sem contar que não há necessidade de arbitrarmos onde se encontra o ponto médio da corda elástica, o que precisávamos realizar. Além disso, a nossa linha está no mesmo plano do quadro. Os maiores empecilhos desse protótipo estão mais em questões físicas, no material e tamanho, do que em questões teóricas de matemática.

O uso do parabológrafo em sala vai além da estética organizacional do quadro. Podemos citar, por exemplo, o estudo das funções quadráticas, cujo gráfico é descrito como uma parábola. Nas aulas desse assunto, não é comum demonstrar que as equações quadráticas, ou do segundo grau, da forma  $y = ax^2 + bx + c$  possuem gráfico como sendo uma parábola. Se nos basearmos na demonstração da parábola, porém não mais posicionando o eixo de simetria no eixo das ordenadas e posicionando a reta diretriz agora em  $y = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , temos:



$$d(P, F) = d(P, M)$$

$$\sqrt{(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y - k)^2}$$

$$x^2 - 2x_f x + x_f^2 + y^2 - 2y_f y + y_f^2 = y^2 - 2ky + k^2$$

$$x^2 - 2x_f x + (x_f^2 + y_f^2 - k^2) = (2y_f - 2k)y$$

Chamando  $x_f^2 + y_f^2 - k^2$  de  $C$  e  $2y_f - 2k$  de  $A$ , obtemos

$$\begin{aligned} x^2 - 2x_f x + C &= Ay \\ \frac{1}{A}x^2 - \frac{2x_f}{A}x + \frac{C}{A} &= y \end{aligned}$$



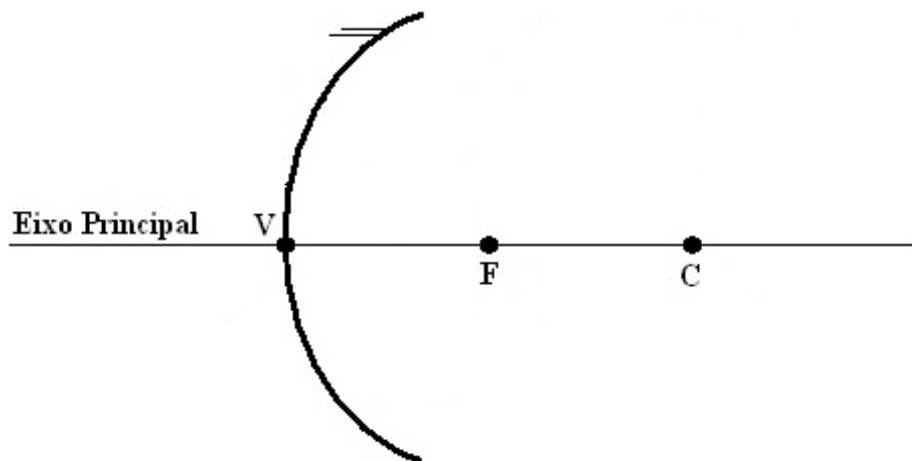
Chamando agora  $\frac{1}{A}$  de  $a$ ,  $-\frac{2x_f}{A}$  de  $b$  e  $\frac{C}{A}$  de  $c$ , chegaremos em

$$y = ax^2 + bx + c$$

Resumindo, dados  $a, b$  e  $c$ , podemos encontrar os valores de  $A, x_f$  e  $C$  e, conseqüentemente, os valores de  $y_f$  e  $k$  e seremos capazes de determinar as coordenadas do foco e da reta diretriz da parábola. Podemos notar também que, a partir da fórmula  $\frac{1}{A} = a$ , temos que  $a \neq 0$ , o que faz a equação  $y = ax^2 + bx + c$  descrever uma parábola.

Outra utilidade para o artefato é quando se estuda as curvas cônicas, em particular a parábola. Infelizmente esse tópico está sendo deixado de lado pelo currículo escolar haja vista que o principal vestibular do país, ENEM, não apresenta esse assunto em seu edital. Esse tópico é cobrado em fases mais específicas de alguns vestibulares, para carreiras tecnológicas, e em concursos militares.

Partindo para outra área do conhecimento, mas ainda assim uma área afim, a parábola é estudada também em física. Nas aulas de ótica e espelhos, é estudado o espelho esférico. Seu funcionamento consiste em um espelho com um eixo, chamado de eixo principal, passando pelo vértice do espelho, um foco e um centro de curvatura. A imagem abaixo exemplifica a situação clássica estudada.



**Figura 2-10:** Espelho esférico

Os espelhos esféricos são pequenas calotas que, quando vistos bem próximos ao vértice, possuem as mesmas características da parábola. Suponha que um espelho esférico possua equação  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ . Ele tem centro no ponto  $(0, 1)$  e passa pela origem do plano cartesiano, com gráfico de equação  $y = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$ . Para valores perto da origem, isto é, próximos ao

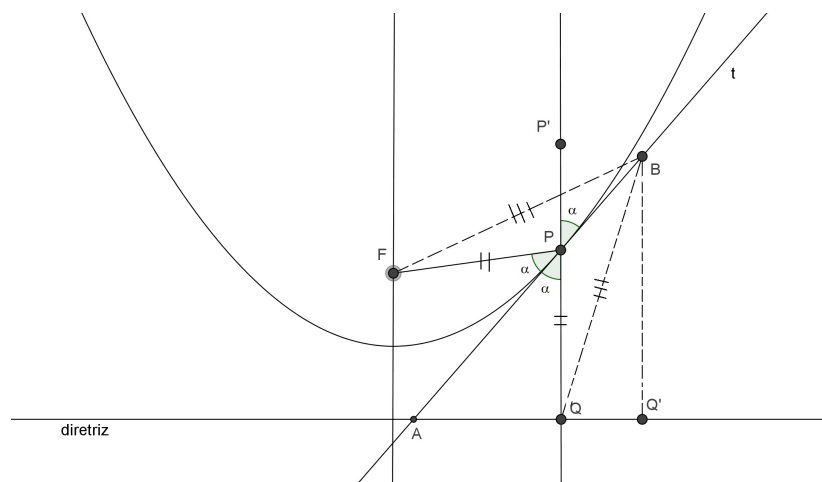
vértice do espelho,  $x$  é pequeno ao passo que  $y$  é muito pequeno, de tal modo que podemos suprimir o termo  $y^2$  da equação. Dessa forma, o espelho de equação  $y = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$  se aproxima a  $y = \frac{x^2}{2}$ , que é uma parábola com vértice na origem.

A principal propriedade que um espelho esférico possui é a de raios que incidem paralelamente ao eixo principal, que é o eixo de simetria, refletem passando pelo foco. Essa relação é recíproca, isto é, raios de luz que saem do foco refletem na parábola com raios paralelos ao eixo de simetria. Essa propriedade é utilizada em faróis de carros, na qual a lâmpada se encontra no foco dessa parábola. Dessa maneira, seus raios todos refletem paralelamente e iluminam o caminho pelo qual o carro irá passar. Também é encontrada essa propriedade nas antenas parabólicas, pois os raios que partem dos satélites são considerados paralelos e quando atingirem a antena, convergirão para o receptor, localizado no foco do paraboloide.

Vamos agora demonstrar essa propriedade, ou seja, seja  $F$  o foco da parábola,  $P$  um ponto sob a parábola,  $Q$  a projeção de  $P$  sobre a diretriz e  $t$  a reta bissetriz de  $\widehat{FPQ}$  como na figura. Seja  $P'$  um ponto na região interior delimitada pela parábola. Iremos mostrar que, supondo a superfície parabólica espelhada, o raio que sai do foco reflete no espelho paralelamente ao eixo de simetria.

Primeiramente, iremos mostrar que a reta  $t$  é tangente<sup>1</sup> à parábola em  $P$ .

Veja a figura



Seja  $A$  o ponto de intersecção entre  $t$  e a diretriz. Como  $t$  é bissetriz, temos que  $\widehat{FPA} = \widehat{QPA} = \alpha$ . Seja  $B \in t$ . Então,  $\widehat{FPB} = \widehat{QPB}$ , pois  $\widehat{FPA}$  e  $\widehat{FPB}$  são suplementares. Como

<sup>1</sup>Reta tangente à parábola é aquela que possui somente um ponto de intersecção, excetuando retas paralelas ao eixo de simetria. As posições relativas entre a parábola e a reta são: 0 ponto em comum, 1 ponto em comum e 2 pontos em comum, respectivamente, reta exterior, reta tangente e reta secante.

$PF = PQ$ , por definição de parábola,  $F\widehat{PB} = Q\widehat{PB}$  e  $PB$  é lado comum, temos que  $\triangle FPB \cong \triangle QPB$ . Logo,  $FB = BQ$  e concluímos também que  $t$  é mediatriz de  $FQ$ .

Suponha, por contradição, que  $t$  não seja tangente, isto é, que  $B$  pertença à parábola e que  $Q'$  seja a projeção de  $B$  sobre a reta diretriz. Então, da definição de parábola temos

$$FB = BQ = BQ' \Rightarrow Q = Q'$$

Como  $Q$  é projeção de  $P$  sobre a diretriz, temos que  $P = B$ . Logo,  $t$  é tangente em  $P$ .

Com essa demonstração realizada, iremos mostrar a propriedade reflexiva da parábola. Seja o caminho percorrido pelo raio de luz simbolizado por  $\widetilde{FPP'}$ . Pela propriedade que diz que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, pois está refletindo no ponto  $P$  que se encontra sobre a reta tangente  $t$  também, temos que  $F\widehat{PA} = P'\widehat{PB} = \alpha$ . Como  $P'\widehat{PB} = A\widehat{PQ} = \alpha$ , pois são opostos pelo vértice, temos que  $P', P$  e  $Q$  estão alinhados e, com isso, mostramos a propriedade reflexiva da parábola. ■

Na demonstração acima, concluímos também uma das definições que apresentamos no início do capítulo, a que diz que a parábola é a envoltória das retas mediatrizes entre o foco e a reta diretriz, pois demonstramos que a reta  $t$  era a mediatriz entre o foco e os pontos sobre a diretriz, considerando o ponto  $Q$  em todas as posições possíveis. Essa definição é usada quando se quer traçar a parábola usando dobraduras, unindo o foco a diversos pontos sobre a diretriz. as dobras serão as retas mediatrizes entre os segmentos.

# Problemas Clássicos

Na Grécia Antiga, os matemáticos estudaram três problemas de Geometria que serviram de motivação para o desenvolvimento da Matemática. Eles são problemas de construção envolvendo régua não milimetrada e compasso, instrumentos utilizados por Euclides em seu compêndio *Elementos*. Os três problemas, que ficaram conhecidos como os três problemas clássicos, são

- quadratura do círculo,
- trisseção do ângulo,
- duplicação do cubo.

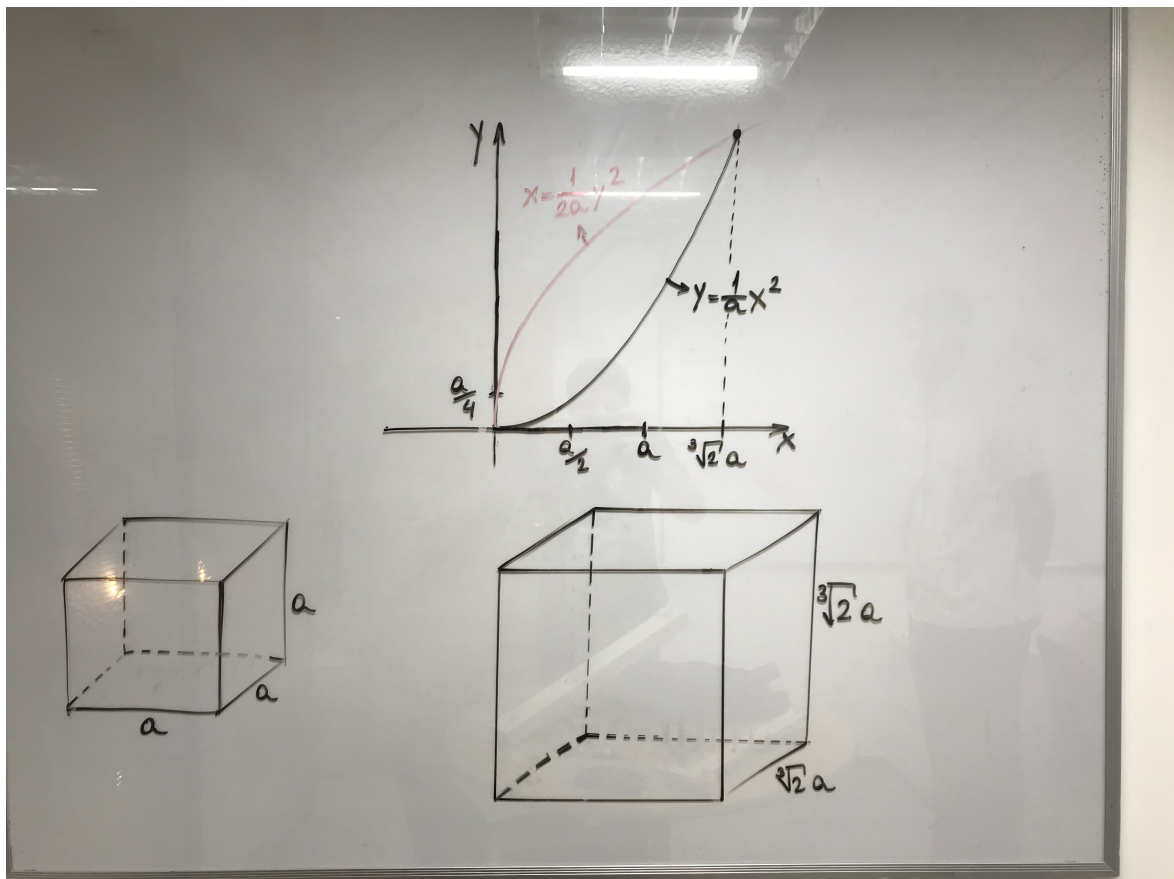
A quadratura do círculo consiste em encontrar o valor da aresta de um quadrado tal que sua área seja igual à área de um círculo de raio conhecido. A trisseção do ângulo busca encontrar um método de se dividir em três partes iguais um ângulo de valor conhecido. O último problema, a duplicação do cubo, iremos dedicar especial atenção a seguir. Esses problemas ficaram em aberto por mais de dois mil anos, até que, em meados do século XIX, foi provada a impossibilidade dessas construções utilizando somente régua e compasso. No entanto, é leviano acreditar que os gregos trabalhavam somente com esses instrumentos. A busca pela resolução dos problemas propostos trouxeram a necessidade de novas curvas e métodos que enriqueceram a Matemática. Dado essa necessidade de novos instrumentos, iremos resolver o problema da duplicação do cubo utilizando o parabológrafo que criamos no capítulo anterior.

O problema da duplicação do cubo, também conhecido como problema deliano, consiste em se encontrar a medida da aresta de um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um cubo dado. Isto é, dado um cubo de volume  $V$  e aresta  $a$ , devemos encontrar a aresta  $a' = a\sqrt[3]{2}$  de um cubo de volume  $V' = 2V$ . Reza a lenda que os habitantes da ilha de Delos, na Grécia antiga, foram ao oráculo de Apollo pedindo ajuda para combater uma peste que assolava a região. O oráculo respondeu que o altar de Apollo, em forma de cubo, deveria

ser duplicado. Os habitantes prontamente buscaram duplicar a aresta do altar, no intuito de duplicar seu volume. Infelizmente, a peste não foi dizimada, pois eles não haviam dobrado o volume e sim octuplicado. Diversos matemáticos tentaram resolver esse problema usando as ferramentas disponíveis a época, régua e compasso, sendo infrutífera sua tentativa. Usando uma linguagem atual, basta encontrar um segmento tal que seu tamanho seja  $\sqrt[3]{2}$  maior que o segmento original. Para isso, iremos traçar duas parábolas de equação

$$x^2 = ay \text{ e } y^2 = 2ax,$$

sendo  $a$  o tamanho original da aresta do cubo cujo volume deve ser duplicado.



**Figura 3-11:** intersecção entre as parábolas

Substituindo a primeira equação na segunda, encontramos

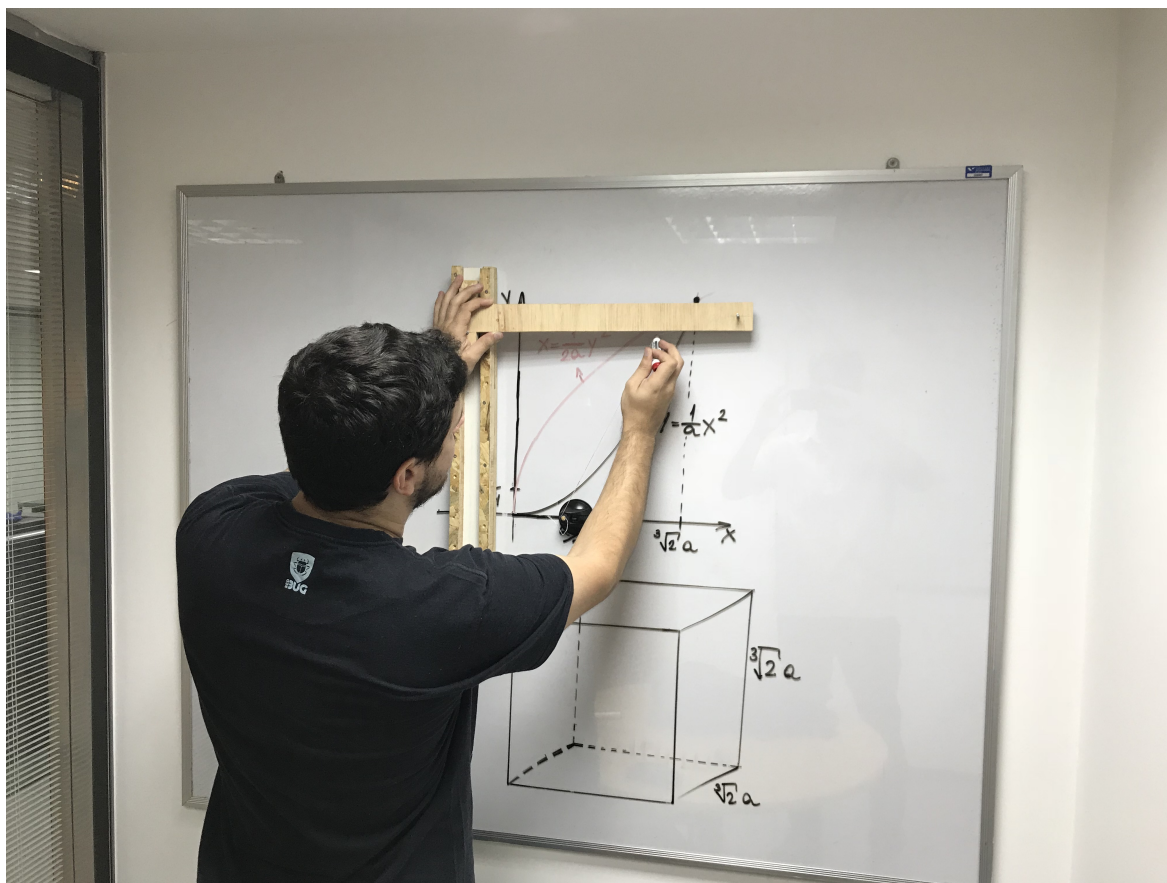
$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax$$

$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax.$$

Como queremos valores para  $x$  maiores que zero e multiplicando por  $a$  os dois lados, temos

$$x^3 = 2a^3,$$

que é exatamente a solução do problema proposto.



**Figura 3-12:** traçado da intersecção

Também podemos resolver esse problema através de meias proporcionais. Isto é, devemos encontrar duas meias proporcionais  $x$  e  $y$  entre 1 e 2. Esquemmatizando as relações temos:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}.$$

Resolvendo as duas equações acima, podemos escrever:

$$x^2 = y \text{ e } y^2 = 2x.$$

Se observarmos as equações acima, podemos ver que são as duas equações quadráticas descritas na resolução anterior, com o valor de  $a$  igual a 1. A impossibilidade da construção está no traçado da parábola utilizando régua e compasso, o qual não é possível de ser realizado. Substituindo  $y$  da primeira equação na segunda, temos

$$(x^2)^2 = 2x \Rightarrow x^3 = 2$$

chegando à solução do problema. O teorema de Wantzel, demonstrado em 1837, diz que um número só é construtível por régua e compasso se for raiz de um polinômio de grau  $2^n$  irredutível. Como  $\sqrt[3]{2}$  é solução da equação  $x^3 - 2 = 0$  e o grau do polinômio é 3, esse número só é construtível usando aparelhos mais sofisticados.

# Conclusão

A evolução da tecnologia, aliada ao seu uso consciente em sala de aula, traz benefícios para o processo de ensino-aprendizagem, transformando a experiência de aprender em algo mais tangível ao aluno. Entretanto, ao se deixar tudo no campo virtual, não somos capazes de compreender seu pleno funcionamento, uma vez que todos os processos mecânicos por trás do traçado de diversas curvas não fica evidente. Poucas são as vezes em que um software mostra como é feito o traçado da curva e, por diversas vezes, o desinteresse em mostrar parte dos próprios professores.

Ao se apresentar um artefato físico capaz de desenhar o objeto trabalhado, não só estaremos construindo a curva em questão, mas estaremos também mostrando todas as etapas de construção, muitas vezes advinda da definição da própria curva. Os artefatos mostrados nesse trabalho, sem exceção, utilizam as definições de seus objetos para realizar o traçado. E o uso de objetos sólidos, que já era trabalhado em fases primárias da carreira escolar, possibilita que o aprendizado seja mais palpável. A curiosidade dos alunos em entender como o objeto funciona é despertada com a utilização em sala, mais do que seria se estivermos somente usando recursos computacionais.

Os artefatos propostos ainda requerem melhorias práticas, para facilitar o manuseio durante a aula, mas seu propósito fica claro quando efetivamente utilizado. Ainda há mais objetos a serem explorados, possíveis de ser usar em sala, como é o caso do elipsógrafo e hiperbológrafo, assuntos ainda trabalhados pelo PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais.





# Referências Bibliográficas

- [1] C. B. Boyer and U. C. Merzbach. *A history of mathematics*. John Wiley & Sons, 2011.
- [2] J. P. d. CARVALHO. Os três problemas clássicos da matemática grega. *II BIENAL DA SBM*, pages 1–21, 2004.
- [3] M. Gardner. *New mathematical diversions from scientific american*. 1966.
- [4] J. C. Lucero. O problema deliano. *Departamento de Matemática da Universidade de Brasília*, 2006.
- [5] O. R. B. d. OLIVEIRA. Cônicas (propriedades de reflexão). <https://www.ime.usp.br/oliveira/conicaspublish.pdf>, Acesso em: 23 nov. 2017.
- [6] A. Shell-Gellasch. *Hands on History: A Resource for Teaching Mathematics*. MAA notes. Mathematical Association of America, 2007.