

COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Anita Martins Costa

**ENCADEAMENTOS DIDÁTICOS BASEADOS NA TEORIA DE
VAN HIELE: UMA PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM
DO CONCEITO FORMAL DE CONVERGÊNCIA DE
SEQUÊNCIAS NO ENSINO MÉDIO**

Rio de Janeiro
2017



Anita Martins Costa

**ENCADEAMENTOS DIDÁTICOS BASEADOS NA TEORIA DE VAN HIELE: UMA
PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO FORMAL DE
CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sc. Daniel Felipe Neves Martins

Rio de Janeiro
2017

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

C837 Costa, Anita Martins

Encadeamentos didáticos baseados na Teoria de Van Hiele: uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito formal de convergência de sequências no ensino médio / Anita Martins Costa. – Rio de Janeiro, 2017.

142 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Sequências convergentes. 3. Sequências numéricas. 4. Hiele, Pierre M. Van. I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Título.

CDD 510

CATALOGAÇÃO NA FONTE

Anita Martins Costa

**ENCADEAMENTOS DIDÁTICOS BASEADOS NA TEORIA DE VAN HIELE: UMA
PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO FORMAL DE
CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em: 24 / 11 / 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Sc. Daniel Felipe Neves Martins, PROFMAT/CPII

Prof. Dra. Neide da Fonseca P. Sant'Anna, MPPEB/CPII

Prof. Dra. Sc. Patrícia Erthal de Moraes, PROFMAT/CPII

Prof. Dr. Sc. Adriano Mauricio de A. Côrtes, UFRJ

Rio de Janeiro
2017

Ao meu marido, Marcus Agra, que sempre está
ao meu lado, incentivando e me apoiando em
todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por permitir que eu concluísse mais esta etapa da vida.

Agradeço à minha mãe pelo incentivo, compreensão de tantas ausências e orações.

Agradeço à minha tia Suzana por me inspirar a ser forte em todos os momentos.

Agradeço às queridas amigas Renata Paixão, Clara Leles e Lucimar Salgado pelo companheirismo.

Agradeço especialmente à amiga Anita Parreiras pela revisão ortográfica e gramatical do todo o trabalho.

Agradeço aos meus colegas de turma do PROFMAT pela parceria na árdua e enriquecedora caminhada.

Agradeço aos professores do mestrado pela determinação e empenho em tornar esse curso uma experiência única, especialmente ao meu orientador Daniel Martins, pela dedicação e carinho dispensados a mim e a esse trabalho.

“Não importa o que aconteça, continue a nadar!”
(Dory, Procurando Nemo)

RESUMO

COSTA, Anita Martins. **Encadeamentos didáticos baseados na teoria de van Hiele: uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito formal de convergência de sequências no Ensino Médio**. 2017. 142 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2017.

Este trabalho consiste na elaboração de um encadeamento didático baseado na teoria de van Hiele para o ensino de sequências numéricas, tendo como objetivo a compreensão do conceito formal de convergência de sequências. Para isso, foi feita uma adaptação do modelo de van Hiele originalmente criado para o ensino de Geometria. O encadeamento foi dividido em etapas, constituídas de exercícios e intervenções do professor. Estas receberam um código de identificação que informa o nível, a fase e a natureza da tarefa, além de informações do pré-requisito, objetivos específicos a serem alcançados e respostas esperadas. O método clínico de Piaget foi usado como referência para fundamentar e orientar as conversas entre professor e aluno por tratar-se de um modelo de investigação da inteligência e ter como objetivo de descrever as habilidades intelectuais do ser humano. As atividades propostas no nível 4, referente ao conceito formal de convergência de sequências, foram aplicadas a um grupo de alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola particular em Niterói, no estado do Rio de Janeiro.

Palavras-chave: Teoria de Van Hiele. Níveis e fases de Van Hiele, Sequências convergentes. Ensino de sequências numéricas. Método clínico de Piaget.

ABSTRACT

COSTA, Anita Martins. **Teaching threads based on van Hiele's theory: a teaching and learning proposal of the formal concept of sequence convergence on High School**. 2017. 142 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2017.

This dissertation aims to elaborate a linkage between the Van Hiele Theory (for geometry) and the teaching and learning of numerical sequences in real analysis, targeting the concept and the comprehension of convergent sequences. For that purpose, many adaptations have been done to the Van Hiele's Theory, presenting a Brand new research and constructing a chain of guided exercises. This chain was divided into stages and teachers interventions guided the interviews. They received an identification code that informs the level, the phase and the nature of the task as well as prerequisite information, specific objectives to be achieved and expected responses. Piaget's clinical method was used as a reference to base and guide the conversations between teacher and student as it is a model of intelligence investigation and aims to describe the intellectual abilities of the human being. The activities proposed on level 4 referring to the formal concept of sequence convergence were applied into a group of students of the second year of high school in a private school in Niterói, Rio de Janeiro State, Brazil.

Keywords: van Hiele's Theory; van Hiele's levels and phases; convergent sequences; teaching sequences of numbers; Piaget's clinical method.

LISTA DE SÍMBOLOS

| Símbolo | Significado |
|----------------|---|
| $. \equiv .$ | o que vem depois é definição do que vem antes |
| \forall | para todo |
| \exists | existe |
| $;$ | tal que |
| \Rightarrow | implica |

SUMÁRIO

| | | |
|---|--|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 13 |
| 2 | DA TEORIA DE VAN HIELE..... | 15 |
| | 2.1 O modelo van Hiele | 16 |
| | 2.1.1 Níveis de van Hiele | 16 |
| | 2.1.2 Propriedades do modelo de van Hiele..... | 20 |
| | 2.1.3 Fases do modelo de van Hiele..... | 20 |
| | 2.2 Um breve voo sobre o autor do método que valida às questões levantadas | 23 |
| | 2.2.1 Sobre Jean Piaget..... | 23 |
| | 2.2.2 A origem do método..... | 24 |
| | 2.2.3 O Método clínico experimental..... | 25 |
| | 2.3 Comparativo entre van Hiele e Piaget..... | 28 |
| 3 | DA ADAPTAÇÃO DA TEORIA DE VAN HIELE EM GEOMETRIA À ANÁLISE | 30 |
| | 3.1 Do estudo das sequências..... | 30 |
| | 3.2 Síntese do processo de classificação | 31 |
| | 3.3 Como a pesquisa foi organizada e aplicada | 34 |
| 4 | DA APLICAÇÃO DA PESQUISA EM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO | 72 |
| | 4.1 A atividade proposta aos alunos..... | 72 |
| 5 | CONCLUSÃO | 86 |
| | REFERÊNCIAS..... | 88 |
| | APÊNCIDE A: N1F1C1 – Investigação – Sequências: Conceitos iniciais | 90 |
| | APÊNCIDE B: N1F2A1 – 1ª Ficha de Exercícios – Sequências: Conceitos iniciais..... | 91 |
| | APÊNCIDE C: N1F3C2 – Correção e explicitação – Sequências: Conceitos iniciais..... | 92 |
| | APÊNCIDE D: N1F4A2 – 2ª Ficha de exercícios – Sequências: Conceitos iniciais | 93 |
| | APÊNCIDE E: N1F5R1 – Resumo – Sequências: Conceitos iniciais..... | 94 |
| | APÊNCIDE F: N2F1C1 – Investigação – Sequências: Lei de formação | 96 |

| | | |
|--------------|--|-----|
| APÊNCIDE G: | N2F2A1 – 1ª Ficha de exercícios – Sequências: Lei de formação | 97 |
| APÊNCIDE H: | N2F3C2 – Correção e explicitação – Sequências: Lei de formação | 98 |
| APÊNCIDE I: | N2F4A2 – 2ª Ficha de exercícios – Sequências: Lei de formação | 99 |
| APÊNCIDE J: | N2F5R1 – Resumo – Sequências: Lei de formação..... | 100 |
| APÊNCIDE K: | N3F1C1 – Investigação – PA..... | 102 |
| APÊNCIDE L: | N3F2A1 – 1ª Ficha de exercícios – PA | 105 |
| APÊNCIDE M: | N3F3C2 – Correção e explicitação – PA | 106 |
| APÊNCIDE N: | N3F4A2 – 2ª Ficha de exercícios – PA..... | 107 |
| APÊNCIDE O: | N3F3C3 – Correção e explicitação – PA | 109 |
| APÊNCIDE P: | N3F4A3 – 3ª Ficha de exercícios – Soma de PA | 110 |
| APÊNCIDE Q: | N3F5R1 – Resumo – PA..... | 113 |
| APÊNCIDE R: | N3F1C4 – Investigação – PG..... | 116 |
| APÊNCIDE S: | N3F2A4 – 4ª Ficha de exercícios – PG..... | 118 |
| APÊNCIDE T: | N3F3C5 – Correção e explicitação – PG..... | 120 |
| APÊNCIDE U: | N3F4A5 – 5ª Ficha de exercícios –PG | 121 |
| APÊNCIDE V: | N3F3C6 – Correção e explicitação –PG | 123 |
| APÊNCIDE W: | N3F4A6 – 6ª Ficha de exercícios – PG: Soma de PG finita | 124 |
| APÊNCIDE X: | N3F3C7 – Correção e explicitação – PG: Soma de PG finita..... | 126 |
| APÊNCIDE Y: | N3F4A7 – 7ª Ficha de exercícios – PG: Soma de PG infinita | 127 |
| APÊNCIDE Z: | N3F5R2 – Resumo – PG | 129 |
| APÊNCIDE AA: | N4F1C1 – Investigação – Sequências convergentes | 131 |
| APÊNCIDE BB: | N4F2A1 – 1ª Ficha de exercícios – Sequências convergentes | 132 |
| APÊNCIDE CC: | N4F2A2 – 2ª Ficha de exercícios – Sequências convergentes | 133 |
| APÊNCIDE DD: | N4F3C2 – Correção e explicitação – Sequências convergentes | 134 |
| APÊNCIDE EE: | N4F4A3 – 3ª Ficha de exercícios – Sequências convergentes | 135 |
| APÊNCIDE FF: | N4F5R1 – Resumo – Sequências convergentes | 141 |

1 INTRODUÇÃO

O processo de ensino-aprendizado em matemática muitas vezes enfrenta problemas até mesmo em conteúdos considerados fáceis como as **Sequências Numéricas**. Muitos desses problemas existem por falta de sintonia entre a compreensão do tema pelo aluno e o que está sendo trabalhado com ele. A proposta desse trabalho é construir um encadeamento didático baseado na teoria de van Hiele para o ensino de sequências numéricas, objetivando a compreensão do conceito formal de convergência de sequências. Para isso, foi feita uma adaptação do modelo de van Hiele originalmente criado para o ensino de Geometria. Esse modelo foi escolhido por ser considerado uma orientação mais completa para aprendizagem e avaliação das habilidades dos educandos.

Van Hiele sugere que o aluno deve passar por cinco níveis hierárquicos de compreensão. São eles:

- Nível 1: visualização ou reconhecimento;
- Nível 2: análise;
- Nível 3: dedução informal ou ordenação;
- Nível 4: dedução formal e
- Nível 5: rigor.

A passagem de um nível para outro não acontece bruscamente, van Hiele propõe cinco fases sequenciais de aprendizado para cada nível de modo a auxiliar o aluno a progredir para um nível mais elevado de compreensão. São as fases:

- Fase 1: informação ou investigação;
- Fase 2: orientação dirigida;
- Fase 3: explicitação;
- Fase 4: orientação livre e
- Fase 5: integração.

Os momentos que envolvem a intervenção do professor motivaram uma ampliação da pesquisa da fundamentação teórica. O método clínico de Piaget foi escolhido para fundamentar e orientar as conversas entre professor e aluno, pois se trata de um modelo para investigação da inteligência e tem o objetivo de descrever as habilidades intelectuais do ser humano.

No capítulo 2 é feita a apresentação do casal van Hiele e uma descrição detalhada da pesquisa de ambos, incluindo níveis e fases, além de uma breve abordagem do método clínico experimental de Piaget.

O interesse de van Hiele ficou concentrado principalmente nos três primeiros níveis, pois desenvolveu sua teoria lecionando na educação básica. O conteúdo didático desta pesquisa motivou o alcance do nível 4, mas como esse é um modelo de aprendizado sequencial, todos os níveis anteriores foram trabalhados. Para isso, foi feita a divisão e a classificação de todo o conteúdo de sequências em etapas, desde a definição até as condições para a convergência, conforme os níveis e fases de van Hiele. Estas etapas são constituídas de exercícios e intervenções do professor e receberam um código de identificação que informa o nível, a fase e a natureza da tarefa. Além disso, todas as etapas têm as informações do pré-requisito, os objetivos específicos a serem alcançados e respostas esperadas. O desenvolvimento desse processo é descrito com detalhes no capítulo 3.

As atividades propostas no nível 4 foram aplicadas a um grupo de alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola particular em Niterói, no estado do Rio de Janeiro.

Os alunos escolhidos para participar desta pesquisa encontravam-se no nível 3, requerido para a realização desta atividade. Esse critério foi usado, pois o objetivo é trabalhar o nível 4, um nível de compreensão mais avançado que o esperado. A atividade foi proposta como uma oportunidade para que alunos que desejam avançar no aprendizado de sequências numéricas pudessem fazê-lo.

O relato da aplicação foi feito em ordem cronológica de acontecimentos no capítulo 4.

Embora todos do grupo estivessem no mesmo nível, cada um tem sua própria maneira de construir o conhecimento, a presença lado a lado do aluno com o professor e a seleção de perguntas para aguçar a curiosidade destes alunos fizeram toda a diferença. Usar a conversa como etapa para auxiliar os alunos a alcançar níveis mais elevados de pensamento mostrou-se bastante eficiente. A conclusão do trabalho é feita no capítulo 5.

Todas as etapas do trabalho estão disponíveis na sessão de apêndices prontas para uso.

2 DA TEORIA DE VAN HIELE

O casal de professores holandeses Pierre Marie van Hiele e Dina van Hiele-Geldof, ao observarem as dificuldades de seus alunos no aprendizado de Geometria, em uma escola secundária, buscaram entender os diversos níveis de compreensão e as fases de aprendizagem desta disciplina escolar.

Concluíram, em 1957 pela Universidade de Utrecht, nos Países Baixos, suas teses de doutoramento¹, cujos títulos em português são “*O problema da compreensão. A compreensão da geometria na aprendizagem escolar.*” e “*A didática da geometria nas classes de escola secundária.*”, de Pierre e Dina, respectivamente.

Os resultados de suas pesquisas começaram a ser divulgados em 1959, mas logo após as primeiras publicações dos trabalhos, Dina faleceu e coube a Pierre desenvolver todo restante da teoria que levou o nome de família do casal.

Como o trabalho foi escrito em língua holandesa, sua popularização não foi imediata. Somente na década de 70, a teoria proposta pelos van Hiele começou a chamar a atenção, sendo citado com destaque no livro “*Mathematical as an Educational Task*”, do educador e pesquisador holandês Hans Freudenthal², além de muito divulgado nos EUA através dos trabalhos acadêmicos do professor norte-americano Izaak Wirszup³. Somente após as traduções para o inglês, feitas em 1984 por Geddes, Fuys e Tisher (1984), as contribuições dos van Hiele começaram a ganhar maior popularidade internacional.

O que mais chamou atenção no trabalho dos van Hiele foi a constatação dos reflexos negativos que a dissonância entre o ensino e o aprendizado em matemática imputam ao aluno a ponto de comprometer o seu avanço escolar na disciplina. Kaleff (1994) nos diz que o casal van Hiele sinalizava quanto à dissonância ensino x aprendizado em vários momentos e os mais evidentes eram encontrados em salas de aula, onde os alunos estão em níveis de pensamento diferentes, entre si e em relação ao professor, usando palavras e objetos de maneiras divergentes daquelas empregadas pelos seus professores e pelo próprio livro texto.

¹ VAN HIELE, P.M. (1957): De Problematiek van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof. VAN HIELE-GELDOF, D. (1957): De didaktiek van de Meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.

² Hans Freudenthal (1905 - 1990). Matemático holandês. Atuou na área de topologia algébrica e além de contribuir para as áreas da literatura, filosofia, história e educação matemática.

³ Izaak Wirszup (1915 – 2008). Professor de matemática da Universidade de Chicago.

2.1 O modelo van Hiele

Segundo a interpretação de Kaleff (1994), o modelo de van Hiele tem sido considerado uma orientação para a aprendizagem e avaliação das habilidades dos alunos em Geometria.

Os van Hiele propuseram mudanças nos modelos de ensino da época que envolviam apenas a transmissão de fatos e métodos que muitas vezes não eram entendidos pelos alunos. De acordo com van Hiele (1986), os professores devem se concentrar no desenvolvimento de *insights* em seus alunos, ajudando-os a passar de um nível de pensamento atual para um nível superior, aprendendo estruturas em vez de fatos.

Baseado na psicologia da Gestalt⁴, van Hiele desenvolveu suas ideias sobre o conceito de *estrutura* e relacionou tal conceito nos estudos de geometria com jovens estudantes. Para ele, é a *estrutura* que permite que o sujeito obtenha o *insight*, que tenha a compreensão do problema e aja correta e adequadamente em situações que não são exatamente iguais às que encontraram antes. Segundo Kaleff (1994, p.25, grifo do autor), “Para terem insight estudantes entendem **o que** estão fazendo, **porque** estão fazendo algo, e **quando** o fazem. Eles são capazes de aplicar seu conhecimento ordenadamente para resolver problemas.”.

2.1.1 Níveis de van Hiele

O modelo sugere que o aluno deva passar por cinco níveis hierárquicos de compreensão, enumerados de 0 a 4 em seus trabalhos iniciais. Posteriormente, em 1986, van Hiele passou a numerá-los de 1 a 5, escala utilizada atualmente pela maioria dos pesquisadores.

Originalmente, van Hiele numerou de 0 a 4 (van Hiele, 1959), com o nível 0 correspondendo a uma base absoluta. No entanto, alguns pesquisadores americanos (Hoffer, Usiskin, Senk) preferiram numerá-los de 1 a 5, pois tinham encontrado alunos que não tinham ainda alcançado o primeiro nível. Em “*Structure e Insight*”, van Hiele (1986) concordou que o primeiro nível merecia mais importância do que ele havia dado anteriormente e renumerou os níveis de 1 a 5. (SANT’ANNA, 2001, p.65)

Os estudos e resultados das pesquisas de van Hiele estavam mais voltados e circulavam em torno dos três primeiros níveis de sua classificação, pois desenvolveu sua teoria lecionando

⁴ A Psicologia da Gestalt originou-se na Alemanha, entre 1910 e 1912. A tradução da palavra alemã *Gestalt* é complexa e os termos, em português, que mais se aproximam de sua tradução seriam forma ou configuração. É uma doutrina que defende que, para se compreender as partes, é preciso, antes, compreender o todo. Refere-se a um processo de dar forma, de configurar o que é apresentado diante dos olhos. [...] uma *gestalt* um produto de organização; a organização é o processo que leva a *gestalt*. [...] A organização, como uma categoria é, diametralmente, oposta à mera justaposição ou distribuição ao acaso. (Koffka, 1975, p.691)

em uma escola secundária. Natural não esperar que jovens alunos alcançassem os níveis mais avançados, principalmente os níveis 4 e 5.

Como há inúmeros trabalhos sobre o tema, porém todos voltados ao ensino de Geometria, e o objetivo desta pesquisa é associar essa teoria a conceitos de Análise Real presentes no Ensino Médio, será feita uma descrição dos níveis van Hiele já inserindo exemplos de caracterização do que venha ser *um aluno nível x*, para o conteúdo **Sequências Numéricas**. Objetiva-se, aqui, salientar que estas características foram adaptadas após inúmeras discussões com professores de matemática além de observações sobre o comportamento dos alunos em aulas de resolução de problemas sobre o tema ao longo dos anos de experiência profissional dos professores de matemática que desenvolvem em suas aulas, tal conteúdo.

- Nível 1 - Visualização ou reconhecimento: As considerações dos alunos são baseadas exclusivamente na percepção visual. Eles podem identificar, nomear e comparar as sequências sem explicitar suas propriedades. A classificação das listas em sequências pode ser feita usando uma linguagem informal, sem precisar de definições precisas. Para estar apto a avançar para um novo nível, o aluno deve compreender que uma sequência é uma lista ordenada de elementos, portanto, a ordem é a principal característica a ser observada. Neste momento, não é cobrada a definição formal do conceito de sequências numéricas como são apresentados logo em primeiro plano nos manuais didáticos brasileiros, mas a manipulação da ideia de correspondência entre elementos de conjuntos.

De acordo com Kaleff (1994), neste nível, um aluno pode aprender o vocabulário, pode identificar formas específicas e reproduzir uma figura dada. No caso deste trabalho, o aluno deve associar o vocabulário de funções às sequências⁵ informalmente para poder ajudá-lo definir sequência como uma função de domínio natural, mais adiante. Por exemplo, o aluno pode examinar uma série de listas para identificar quais são sequências e justificar verbalmente suas escolhas e/ou verificar a veracidade de afirmativas acerca da ordem dos elementos.

- Nível 2 – Análise: Baseadas em observação e experimentação, começam as análises informais dos componentes das sequências e atributos que são usados para descrevê-las. Segundo Kaleff (1994), os alunos ainda não explicitam inter-relações entre

⁵ Segundo a Base Nacional Comum Curricular, nessa etapa do currículo tradicional, espera-se que o aluno já tenha aprendido funções.

atributos ou propriedades. Por exemplo, o aluno descobre os termos de uma sequência, descreve como foi ela formada (diz que obteve os seus termos “somando de dois em dois”, por exemplo), mas ainda não é capaz de escrever sua lei de formação.

- Nível 3 – Dedução informal ou ordenação: Usando uma argumentação informal, o aluno, de maneira lógica, inter-relaciona propriedades ou regras previamente descobertas. Ele percebe, identifica e diferencia estas relações tanto dentro de um conjunto de exercícios com sequências que possuem as mesmas características (por exemplo, todas as sequências representam múltiplos de um número x) quanto em exercícios em que o que caracteriza cada sequência são propriedades aritméticas e operações variadas. Por exemplo, o aluno já compreende que, ao estudar progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG), o que as caracteriza são propriedades que relacionam seus elementos de maneira bem diferentes entre si. Por exemplo, em PA, a diferença entre termos consecutivos a partir do segundo termo é sempre constante e, em PG, a razão entre os termos a partir do segundo termo é sempre constante, desde que não seja a PG nula. O aluno compreende bem que, apesar das duas sequências serem formadas a partir de uma constante, essa constante tem papel diferente em cada caso. É sua relação com uma determinada operação que distinguirá uma sequência da outra. Kaleff (1994) esclarece que o aluno nesse nível não compreende o significado de uma dedução como um todo ou o papel dos axiomas. Concorde-se com esse posicionamento, porém se deve acrescentar que, no estudo de sequências numéricas, os alunos conseguem manipular bem informações obtidas sem demonstrações prévias, porque não é hábito se inserir deduções matemáticas nos cursos de matemática de escolas secundárias brasileiras. Os alunos acreditam e confiam na validade do resultado, sem sentir a necessidade de provas e, quando os livros didáticos apresentam tais provas, na maioria das vezes, as mesmas são incompreendidas pelos alunos ou ignoradas pelos professores, que valorizam na maioria das vezes o resultado final. Muitas dessas provas formais, quando aparecem nos livros didáticos, podem ser até acompanhadas por um número reduzido de alunos, mas eles ainda não são capazes de elaborar uma prova a partir de outras premissas. Nesse nível, o aluno pode, por exemplo, acompanhar a dedução do termo geral e da soma dos termos de uma PA finita ou PG, nada além disso, porém já mostram dificuldades na compreensão de

que uma dedução formal, que requer muitas vezes *criatividade matemática*, boa manipulação algébrica e lógica daquele que está demonstrando uma verdade.

- Nível 4 – Dedução formal: Nesse nível, o aluno já compreende que é necessário justificar relacionamentos e é capaz de desenvolver definições suficientes. Ele já percebe que pode chegar ao mesmo resultado mediante diferentes formas de demonstração. De acordo com Kaleff (1994), os alunos desenvolvem sequências de afirmações, deduzindo uma afirmação a partir de outra(s). Neste trabalho, a relevância de tais deduções é entendida como um caminho para o estudo de sequências convergentes. Para isso, o aluno precisa classificar as sequências segundo sua monotonocidade e também compreender e aplicar o conceito de limite de sequências.
- Nível 5 – Rigor: O aluno é capaz de analisar sistemas axiomáticos com alto grau de rigor. Esta é a principal característica de um aluno nível 5. Kaleff (1994) esclarece que neste nível o aluno já está apto a se aprofundar na análise de propriedades de um sistema lógico-dedutivo, tais como consistência, independência e completude dos axiomas. O estudo de qualquer conteúdo relativo à análise matemática ou mesmo num curso introdutório neste nível é altamente abstrato e não se aplica ao público alvo deste trabalho, alunos do Ensino Médio.

Nesse modelo de classificação, o aluno passa pelos níveis de aprendizado, necessariamente de forma contínua e hierárquica, assistido por experiências de instrução apropriadas. Sant’anna (2001) esclarece que a continuidade dos níveis de van Hiele significa que a passagem de um nível para outro não acontece bruscamente, que é preciso dar importância aos períodos de transição entre os níveis. A autora afirma ainda que “A passagem de um nível para o outro é um processo de aprendizagem, e não apenas de maturação.” (SANT’ANNA, 2001, p. 66).

2.1.2 Propriedades do modelo de van Hiele

O casal Van Hiele identificou algumas propriedades que caracterizam o modelo. Sant'anna (2001) resume essas propriedades:

- Os níveis são sequenciais, no sentido de que não é possível atingir um nível sem dominar todos os outros anteriores.
- O que é implícito em um nível torna-se explícito no próximo.
- Cada nível tem seu próprio conjunto de símbolos linguísticos e de relações características.
- Duas pessoas em níveis de pensamento diferentes não podem compreender uma a outra. Este desnível ocorre quando um professor tenta se comunicar com seus alunos em seu próprio nível.
- O progresso de um nível para o outro depende mais da experiência com atividades adequadas do que da idade ou da maturação.

2.1.3 Fases do modelo de van Hiele

Van Hiele (1959) propôs cinco fases sequenciais de aprendizado para cada nível. Essas fases devem ser planejadas pelo professor de modo a auxiliar o aluno a progredir para um nível mais elevado de compreensão.

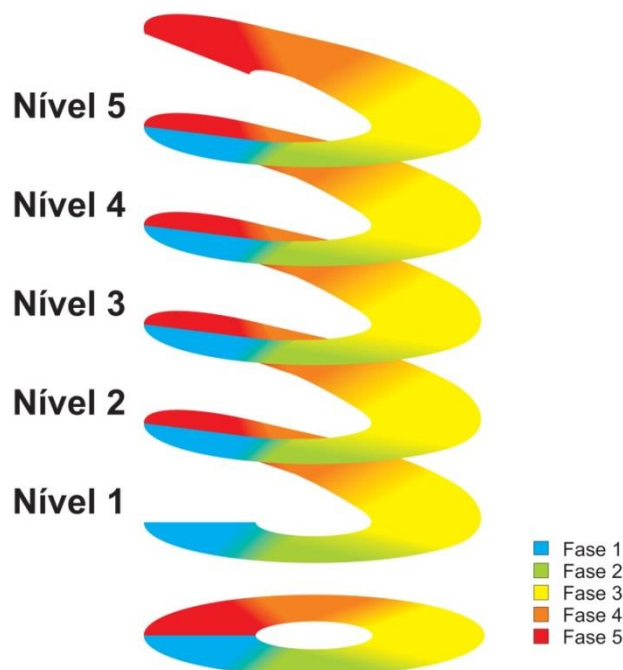
- Fase 1 – Informação ou investigação: Professor e alunos conversam sobre o objeto de estudo. São feitas perguntas, observações e, dessa forma, o vocabulário específico vai sendo introduzido. Pode-se fazer o exame de exemplos e contra-exemplos.
- Fase 2 – Orientação dirigida: O aluno faz atividades ordenadas por dificuldade. Estas tarefas devem ser pensadas para que o aluno dê respostas específicas e comece a perceber as características do objeto de estudo.

- Fase 3 – Explicitação: O aluno expressa verbalmente suas observações feitas na fase anterior. Nesta fase, o papel do professor deve auxiliar no refinamento do vocabulário adequado.
- Fase 4 – Orientação livre: O aluno aprende, resolvendo tarefas mais complexas que as da fase 2. Ele deve encontrar o seu próprio caminho para solucionar o problema. Espera-se que ele perceba as relações entre os objetos de estudo.
- Fase 5 – Integração: O aluno resume o que aprendeu sobre o assunto, depois reflete sobre suas ações e obtém uma visão geral da recém-formada rede de relações entre os objetos de estudo. O professor deve orientar esse resumo para melhorar a compreensão. Segundo Kaleff (1994), o papel do professor nesta fase é de auxiliar no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem introduzir novas ideias.

Sant’anna (2001) esclarece que, exceto a última, as fases podem ocorrer em diferentes ordens ou simultaneamente; e ainda que, apesar destes níveis visarem o ensino de Geometria, van Hiele sugere que podem servir para orientar o ensino e aprendizado de outros tópicos. A autora afirma ainda que “[...] o acesso a um novo nível não ocorre muito depressa. Os protocolos de 20 aulas são relatados, levando do Nível Básico para o Nível 1. Para passar deste para o seguinte, 50 aulas são necessárias aproximadamente.” (SANT’ANNA, 2001, p. 67)

A seguir, a figura ilustra os níveis e fases de aprendizado do modelo van Hiele. A passagem de um nível para outro é feita passando por cada uma das cinco fases. Quando alcança o nível seguinte, não há necessidade de retornar, o que pode não acontecer com as fases. Neste trabalho, retornamos algumas vezes em fases anteriores dentro do mesmo nível.

Figura 1: Níveis e fases de aprendizado do modelo van Hiele.



Fonte: Figura adaptada de GUTIÉRREZ, A., JAIME, A., Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), Teoría y práctica en educación matemática (Alfar: Sevilla, Spain), p339 (fragmentos). 1990. Disponível em www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf

Esta afirmativa de Sant'Anna (2001) apresenta um desafio a respeito de como seria a caracterização do modelo proposto por van Hiele em um tópico de análise matemática voltado para o Ensino Médio. Sabe-se que se está diante de um grande desafio, pois na tese de doutoramento de Dina van Hiele, a autora afirma que o modelo proposto por ela é um instrumento didático detalhado que proporciona o alcance do próximo nível, porém essa passagem de nível pode exigir bastante tempo do professor. Acrescenta-se que, além de tempo, o professor precisa ser criativo para fazer adaptações à teoria, assim como ter uma visão mais aberta sobre possibilidades de conexões entre a matemática e outras áreas do saber que permeiam as discussões em educação escolar básica. Ainda em relação ao tempo, importante se faz ressaltar que para realizar bem as atividades propostas dentro da grade curricular oferecida pelas escolas brasileiras, nenhum pesquisador na área de educação consegue êxito se não contar com uma rede de parcerias formada por gestores da escola, outros colegas e família. A cultura brasileira ainda não enxerga a sala de aula como laboratório de pesquisa do professor, o que dificulta as pesquisas em educação. Na maioria das vezes, os encontros para realização de tarefas que envolvem uma pesquisa são realizados fora do horário convencional e causam

transtornos para todos os envolvidos que precisam repensar a gestão de seus horários e de espaços escolares para a realização da pesquisa.

Para além do tempo, uma segunda preocupação foi a escolha de um segundo referencial teórico ideal que ajudasse na condução do processo de avaliação e classificação dos alunos, segundo o modelo de van Hiele, que não fosse somente uma análise fria e puramente quantitativa, resultante de atividades propostas numa folha de papel para serem resolvidos de modo tradicional. Optou-se, então, por um modelo mais humanístico, o método clínico de Piaget, em que o professor pode ouvir o aluno e dialogar com e sobre a produção feita por cada estudante. As questões que animaram a condução do trabalho de classificação com base nos estudos de Jean Piaget são justificadas primeiramente pela vasta obra deixada por este pesquisador à humanidade sobre a gênese do conhecimento humano, de grandioso valor acadêmico e também por ser um método sobre o qual o casal van Hiele apoiou-se para realizar suas pesquisas e elaborar a teoria.

2.2 Um breve voo sobre o autor do método que valida às questões levantadas

2.2.1 Sobre Jean Piaget

Conhecer um pouco da trajetória de Jean Piaget nos ajuda a entender porque sua obra é tão extensa e diversificada. Motivado por experiências pessoais e profissionais, Piaget contribuiu para a psicologia e para a pedagogia de maneira revolucionária.

A seguir, transcrita, sua rica biografia disponível em muitas bibliografias e na internet, feita por Dilva Frazão (2015).

Jean Piaget (1896-1980) nasceu em Neuchâtel, na Suíça, no dia 9 de agosto de 1896. Seu pai era professor universitário de Literatura Medieval. Desde criança, já mostrava interesse pela natureza. Na adolescência, escreveu artigos científicos e trabalhou gratuitamente para o Museu de História Natural.

Ingressou na Universidade de Neuchâtel, onde estudou Biologia. Em 1918, tornou-se doutor em Biologia. Já despertava interesse pela mente humana. Nesse mesmo ano, mudou-se para Zurique, onde passou a trabalhar em um laboratório de psicologia. Em seguida fez estágio em uma clínica psiquiátrica. Nesse período, assistiu às aulas ministradas pelo psicólogo Carl Jung, discípulo de Freud.

Em 1919, Piaget foi para Paris, onde trabalhou com o psicólogo infantil Alfred Binet, responsável pelo desenvolvimento da avaliação da inteligência, que posteriormente serviria de

base para a criação dos testes de QI. Foi professor da escola e laboratório de pesquisa experimental, dirigido por Binet.

Jean Piaget descobriu, através de avaliações, que as crianças da mesma faixa etária cometiam os mesmos erros, o que o levou a acreditar que o pensamento lógico se desenvolvia gradativamente. Começou então a estudar o desenvolvimento das habilidades cognitivas das crianças. Em 1921, Piaget voltou para a Suíça, onde assumiu a direção do Instituto Jean-Jacque Rousseau, na Universidade de Genebra.

Em 1923, publicou “*A Linguagem e o Pensamento da Criança*”. Neste mesmo ano, casou-se com Valentine Châtenay, com quem teve três filhas, que foram importantes para o desenvolvimento de suas pesquisas. Em 1924, publicou “*O Juízo e o Raciocínio da Criança*”. Em 1936, recebeu o título de “*Doutor Honoris Causa*” pela Universidade de Harvard. Lecionou em diversas universidades da Europa, entre elas a Universidade de Sorbonne, em Paris.

Em 1955, fundou o Centro Internacional para Epistemologia Genética. Escreveu cerca de 100 livros e mais de 500 artigos científicos. A metodologia educacional criada por Jean Piaget passou a servir de modelo para diversas escolas em grande parte do mundo.

Jean Piaget faleceu em Genebra, na Suíça, no dia 16 de setembro de 1980.

2.2.2 A origem do método

Piaget foi um estudioso do processo de desenvolvimento da inteligência humana, introduziu o conceito de níveis de aprendizagem. Quando formula sua teoria de desenvolvimento da criança (PIAGET, 1975), ele descreve quatro estágios cognitivos: sensório-motor (0 – 2 anos), pré-operatório (2 – 7 anos), operatório-concreto (7 – 11 anos) e operatório-formal (11 em diante). Ele acreditava que o progresso de um nível para o outro era devido a mudanças biológicas.

As teorias de Jean Piaget, portanto, tentam nos explicar como se desenvolve a inteligência nos seres humanos. Daí o nome dado a sua ciência de **Epistemologia Genética**, que é entendida como o estudo dos mecanismos do aumento dos conhecimentos. Objetivamente interessava-lhe então saber **como nasce a inteligência no ser humano e como se passa de um estado de menor conhecimento para um de maior conhecimento**. (BAMPI, 2006)

Piaget foi para Paris em 1921, em contato com Simon⁶, recebeu a proposta para padronizar os testes de inteligência usados na época. Piaget (apud DELVAL, 2002, p.55) relata suas primeiras impressões ao iniciar esse projeto.

[...] embora os testes de Burt⁷ tivessem méritos indubitáveis quanto ao diagnóstico, já que se fundamentavam sobre o número de êxitos e fracassos, **era muito mais interessante tentar descobrir as razões do fracasso**. Desse modo, empreendi com meus sujeitos conversas do tipo das entrevistas clínicas com **a finalidade de descobrir algo sobre os processos de raciocínio que estavam por trás de suas respostas correlatas, com interesse particular pelo que ocultavam as respostas falsas**. (grifo nosso).

A partir daí, Piaget começou a estruturar um método de conversas com crianças para descobrir como se desenvolvia seu raciocínio. Focou sua análise nas justificativas dadas às respostas e não no número de respostas corretas como nos testes anteriores. Esse método foi sendo aperfeiçoado até chegar a sua fase final.

2.2.3 O Método clínico experimental

O **método clínico experimental** de Jean Piaget é um modelo de investigação da inteligência e tem o objetivo de descrever as habilidades intelectuais do ser humano e compreender como o pensamento e o conhecimento são construídos.

O método clínico é, então, um procedimento de entrevistas com crianças, com coleta e análise de dados, onde se acompanha o pensamento da criança, com intervenção sistemática, elaborando sempre novas perguntas a partir das respostas da criança e avaliando a qualidade e abrangência destas respostas. Também se avalia a segurança que a criança tem sobre as suas respostas diante das contra-argumentações. **Jean Piaget descreve, com muita aproximação e quase precisão, as respostas esperadas para cada nível de pensamento**, de acordo com os estágios cognitivos. [...] O estágio cognitivo, avaliado de forma subjetiva, mas, possibilitado pela riqueza contida nas possibilidades das respostas da criança, e a sua segurança, ou não, diante das contra argumentações, faz do **método clínico um instrumento confiável, para avaliar o estágio cognitivo das crianças**, tanto com desempenho adequado nas atividades educativas, quanto às crianças com problemas de aprendizagem. (BAMPI, 2006, grifo nosso)

Desta forma, o método clínico usa uma abordagem *psicogenética* (estudo do desenvolvimento das funções da mente), diferentemente da abordagem clássica usada em

⁶ Théodore Simon (1872 — 1961). Psicólogo francês, co-autor do teste Binet-Simon e da respectiva escala de inteligência.

⁷ Cyril Lodowic Burt (1883 - 1971). Psicólogo inglês, reconhecido pelo seu trabalho com testes psicológicos e também pelos seus estudos sobre o efeito da hereditariedade na inteligência e no comportamento.

psicologia, a *psicométrica* (mensuração das habilidades mentais por meio de testes padronizados).

Segundo Rocha (1996), a abordagem psicométrica interessa-se em **quanto** se é inteligente, os testes baseiam-se em resultados quantitativos. Já a abordagem psicogenética foca em **como** se é inteligente, em aspectos qualitativos.

Para entender melhor a concepção de Piaget sobre a avaliação da inteligência, apresentam-se, a seguir, os principais aspectos de cada uma das abordagens.

2.2.3.1 Abordagem psicométrica

Alfred Binet (1857 - 1911), psicólogo e pedagogo francês, juntamente com o também, francês, Theodore Simon (1872-1961), criaram, em Paris, um teste que tinha como objetivo prever se crianças parisienses teriam ou não sucesso escolar. Segundo Simonetti (2008), Binet quantificou atributos da inteligência e desenvolveu a primeira escala de inteligência em 1905, formada por trinta tarefas mentais de várias modalidades, dispostas em ordem crescente de dificuldade, graduados em função da idade.

Após revisões em 1908 e 1911, a escala foi tomada como referência para medir o desenvolvimento de uma criança em determinada faixa etária com o objetivo de comparar seu desenvolvimento cognitivo ao de outras crianças de mesma idade.

Simonetti (2008) esclarece ainda que

Seu grande mérito foi relacionar o nível da habilidade à idade (conceito de idade mental), capaz de assinalar quantos anos uma criança estava “atrasada” ou “adiantada” em relação aos seus pares etários, elemento que, aliás, vai ser considerado nos primeiros cálculos usados para estimar o Quociente de Inteligência (QI). (SIMONETTI, 2008, p.24)

O psicólogo americano David Wechsler (1896-1981), em 1939, desenvolveu as Escalas Wechsler, baterias de avaliação de QI que são as mais conhecidas e utilizadas desde então para avaliação clínica de capacidade intelectual.

De acordo com Yates (2006), estas escalas já têm versões adaptadas, normatizadas e validadas para a população brasileira. As Escalas Wechsler, tiveram suas publicações completas mais recentes lançadas em 2002 (Escala de Inteligência Wechsler para Crianças -

Terceira Edição - WISC⁸-III, Figueiredo, 2002) e em 2005 (Escala de Inteligência Wechsler para Adultos - Terceira Edição - WAIS⁹-III, Nascimento, 2005).

A aplicação dos testes psicométricos é autorizada somente a psicólogos e é feita por meio de um manual com perguntas e respostas padronizadas e cronometragem do tempo, além do controle de variáveis ambientais e *rapport*¹⁰ com o examinador. O objetivo é que não haja interferência no desempenho do sujeito.

2.2.3.2 Abordagem psicogenética

O foco da abordagem psicogenética é a forma como o sujeito pensa e resolve determinados problemas. O controle está na compreensão das respostas e não na padronização dessas respostas e de variáveis externas, como nos testes psicométricos.

O entrevistador interessa-se em compreender o processo de pensamento que levou o entrevistado a dar essa ou aquela resposta. Para isso deve ter domínio da teoria piagetiana, o que irá orientar as perguntas feitas durante a entrevista, bem como a maneira como as respostas dadas serão avaliadas.

Todas as respostas dadas, certas ou erradas, são interpretadas com o objetivo de compreender o processo mental que as gerou, e as diferenças individuais são avaliadas como indicadores do nível de desenvolvimento cognitivo em que se encontra o sujeito.

2.2.3.3 Postura do avaliador

Como o método clínico de Piaget é uma técnica de entrevista com crianças com o objetivo de investigar seu pensamento, é necessário que o entrevistador saiba observar minuciosamente a criança, permitindo que ela fale e busque sempre conjecturar, ou seja, que tenha uma hipótese que possa ser investigada.

Segundo Queiroz e Lima (2010), o método trata-se de um método misto, uma vez que resume elementos da observação, da experimentação e de testes ou questionários abertos.

[...] consiste sempre em **conversar livremente com o sujeito, em vez de limitá-lo às questões fixas e padronizadas**. Ele conserva assim, todas as vantagens de uma conversação adaptada a cada criança e destinada a permitir-lhe o máximo possível de

⁸ Wechsler Intelligence Scale for Children, em inglês.

⁹ Wechsler Adult Intelligence Scale, em inglês.

¹⁰ Rapport é um vocábulo francês usado na psicologia que remete à técnica de criar uma ligação de empatia com outra pessoa.

tomada de consciência e de formulação de suas próprias atitudes mentais. (PIAGET apud QUEIROZ e LIMA, 2010, p. 113, grifo nosso).

A entrevista começa com a proposta de uma questão à qual a criança apresentará uma resposta.

Piaget sugere que a análise qualitativa da inteligência seja feita a partir de provas, que avaliam as justificativas utilizadas pelo entrevistado em suas respostas com o objetivo de conhecer como se estrutura um dado conhecimento.

Alguns fatores importantes devem ser considerados pelo avaliador durante a aplicação do método.

- Acompanhar o desenvolvimento da justificativa da resposta sem completá-la de acordo com o próprio raciocínio;
- Valorizar a justificativa a fim de verificar se a resposta dada foi por acaso ou com convicção;
- Verificar a convicção da resposta, modificando o contexto no qual a pergunta ou problema está inserido;
- Evitar perguntas ambíguas.

Bampi (2006) esclarece que apesar de o entrevistador ter diante de si um sujeito único, o método clínico oportuniza a busca do que há de universal nesse sujeito. Como são dadas as justificativas, como resolve problemas, se procura coerência, se é criativo, se percebe contradições.

A popularidade do método clínico de Piaget se dá pela sua abrangência. A diversidade de problemas que podem ser incluídos na entrevista faz desse método um instrumento de avaliação vivo, instigante e revelador.

2.3 Comparativo entre van Hiele e Piaget

Em um dos seus principais trabalhos, Van Hiele (1986) esclarece que uma parte importante da base do seu trabalho pode ser encontrada nas teorias de Piaget, embora tenha discordado em alguns momentos com o autor.

Van Hiele (1986) acreditava que a psicologia de Piaget era de desenvolvimento e não de aprendizagem, além do fato de os níveis de Piaget não acomodarem adequadamente toda a

aprendizagem em geometria, tema de seu interesse, mesmo considerando apenas o currículo do ensino fundamental. O fato de Piaget não ter reconhecido o importante papel que a linguagem tem em promover um aluno de um nível para outro acima também preocupava van Hiele.

Piaget acreditava que as crianças nasciam com a estrutura superior e só precisavam tomar consciência disso, enquanto van Hiele acreditava que as regras do nível inferior se tornaram a estrutura do nível superior.

Jean Piaget definiu assim os períodos de desenvolvimento cognitivo passíveis de serem encontrados em todos os seres humanos. Estes estágios referem-se ao processo de compreensão sobre o universo, que garantirão sua adaptação a ele e consequentemente seu desenvolvimento intelectual. (BAMPI, 2006)

Segundo Kaleff (1994), van Hiele afirma que o avanço da idade cronológica não garante uma promoção de um nível para outro, além do fato de perceber que o crescimento cronológico não produz automaticamente um crescimento nos níveis de pensamento, já que decididamente poucos estudantes atingem o último nível.

Para van Hiele, a estrutura é fundamental. No entanto, foi seu interesse no trabalho de Piaget que o levou a identificar o papel da linguagem na aprendizagem, os níveis de pensamento e a forma como os alunos passaram de um nível de entendimento para o outro.

3 DA ADAPTAÇÃO DA TEORIA DE VAN HIELE EM GEOMETRIA À ANÁLISE

3.1 Do estudo das sequências

Já foi citada que a teoria de van Hiele é considerada uma orientação para a aprendizagem e avaliação das habilidades dos alunos em Geometria, porém os fundamentos da teoria têm como foco o processo de aprendizado, independente do conteúdo a ser ensinado.

No início, este trabalho tinha o propósito de abordar apenas o ensino de sequências convergentes, mas após um estudo mais aprofundado da teoria de van Hiele, percebeu-se que não seria adequado abordar apenas o nível 4 de aprendizado, por ser considerado um nível avançado em relação a este tópico. Acredita-se que, num outro grupo, talvez com alunos do ensino superior, o estudo fosse mais apropriado, porque para iniciar cada nível é preciso garantir que o aluno já tenha dominado o nível anterior. E, como garantir isso sem ter passado por eles? Assim, delimitou-se o campo de atuação desta pesquisa, o conteúdo de sequências numéricas, muito difundido na educação básica. A novidade deste trabalho é inserir o conceito de convergência e caso se atingisse um alto grau de compreensão pelos alunos, falar informalmente sobre condições para a convergência. Esta última parte da pesquisa já era vista como utópica, porém uma possibilidade.

Uma nova classificação em níveis e fases dos exercícios e intervenções do professor de todo o conteúdo abordado foi realizada. Os exercícios elaborados tiveram os objetivos de fazer com que o aluno percebesse características do objeto de estudo (fase 2) e que encontrasse seu próprio caminho para resolver os problemas mais complexos (fase 4). As intervenções do professor são vistas como fundamentais e devem ser planejadas de modo a auxiliar o aluno a progredir de um nível de compreensão para o próximo, mais elevado. Essas intervenções são no formato de conversas e resumo, em que o aluno expressa verbalmente suas observações e o professor introduz o assunto a ser abordado (fase 1), faz correções e auxilia no refinamento do vocabulário do aluno (fase 3) e orienta o resumo do que foi aprendido de forma a melhorar a compreensão (fase 5).

As intervenções do professor foram tão significativas durante a realização deste trabalho que motivaram uma ampliação da pesquisa da fundamentação teórica. O método clínico experimental de Jean Piaget aparece no corpo do texto para fundamentar e orientar as conversas entre professor e aluno e para que o leitor perceba a importância da conversação e da troca via práticas orais na construção do conhecimento.

O método clínico de Piaget é um modelo para investigação da inteligência. Ele tem o objetivo de descrever as habilidades intelectuais do ser humano e compreender como o pensamento e o conhecimento são construídos. Consiste em uma conversa com o objetivo de coletar e analisar dados para acompanhar o pensamento do aluno. Elaborando novas perguntas a partir das respostas dadas, é possível avaliar o aprendizado com base na qualidade e abrangência destas respostas. Os exercícios podem ser usados como instrumento de verificação de aprendizado, mas não são capazes de, sozinhos, expressar como o aprendizado evoluiu. Assim, para que a proposta desse trabalho adquira resultados positivos, é necessário que o professor saiba observar, permita que o aluno fale e que saiba buscar algo de preciso, que consiga deixar o aluno construir uma hipótese, um questionamento para investigar junto dele a sua forma de pensar e de resolver questionamentos propostos.

A conversa entre aluno e professor foi eleita neste trabalho como principal instrumento de avaliação para determinar se o aluno está pronto para avançar uma fase ou nível.

3.2 Síntese do processo de classificação

Todo o conteúdo de sequências desde a definição até as condições para a convergência foi dividido e classificado conforme os níveis e fases de van Hiele. Todas as etapas, conversas e exercícios, receberam um código de identificação que informa o nível, a fase e a natureza da tarefa. Além disso, todas as etapas têm as informações do pré-requisito, os objetivos específicos a serem alcançados e respostas esperadas (tanto no caso de exercícios, quanto no caso de conversas). Estas classificações foram criadas para a apresentação desta pesquisa, o que mostra a sua originalidade, deixando a pesquisadora e os atores envolvidos, como alunos e pais, muito satisfeitos com suas participações. A figura a seguir ilustra como foi feita, pela autora do trabalho, a identificação das etapas.

Figura 2: Identificação das etapas



Fonte: A autora, 2017.

A seguir, dois exemplos da identificação das etapas e o que significam.

- N1F1C1: refere-se ao Nível 1, Fase 1, Conversa nº1 e
- N3F5R2: refere-se ao Nível 3, Fase 5, Resumo nº2.

Cada um dos níveis é composto das cinco fases, o que não quer dizer que as fases aconteçam apenas uma vez, como os níveis. Elas podem acontecer em diversas ordens ou simultaneamente, como ocorreu nos níveis 3 e 4.

A natureza da etapa está diretamente relacionada à fase, conforme abaixo.

- Fase 1 – Conversa.
- Fase 2 – Atividade.
- Fase 3 – Conversa.
- Fase 4 – Atividade.
- Fase 5 – Resumo.

Abaixo, segue como foi dividido e classificado todo o conteúdo abordado neste trabalho, conforme os níveis e fases de van Hiele com as identificações das etapas.

Nível 1 – Visualização ou reconhecimento.

- N1F1C1 – Investigação – Sequências: Conceitos iniciais.
- N1F2A1 – 1ª Atividade – Sequências: Conceitos iniciais.
- N1F3C2 – Correção e explicitação – Sequências: Conceitos iniciais.
- N1F4A2 – 2ª Atividade – Sequências: Conceitos iniciais.
- N1F5R1 – Resumo – Sequências: Conceitos iniciais.

Nível 2 – Análise.

- N2F1C1 – Investigação – Sequências: Lei de formação.
- N2F2A1 – 1ª Atividade – Sequências: Lei de formação.
- N2F3C2 – Correção e explicitação – Sequências: Lei de formação.
- N2F4A2 – 2ª Atividade – Sequências: Lei de formação.
- N2F5R1 – Resumo – Sequências: Lei de formação.

Nível 3 – Dedução informal.

- N3F1C1 – Investigação – PA
- N3F2A1 – 1ª Atividade – PA.
- N3F3C2 – Correção e explicitação – PA.
- N3F4A2 – 2ª Atividade – PA.
- N3F3C3 – Correção e explicitação – PA.
- N3F4A3 – 3ª Atividade – Soma de PA.
- N3F5R1 – Resumo – PA.
- N3F1C4 – Investigação – PG.
- N3F2A4 – 4ª Atividade – PG.
- N3F3C5 – Correção e explicitação – PG.
- N3F4A5 – 5ª Atividade – PG.
- N3F3C6 – Correção e explicitação – PG.
- N3F4A6 – 6ª Atividade – PG: Soma de PG finita.
- N3F3C7 – Correção e explicitação – PG: Soma de PG finita.
- N3F4A7 – 7ª Atividade – PG: Soma de PG infinita.
- N3F5R2 – Resumo – PG.

Nível 4 – Dedução formal.

- N4F1C1 – Investigação – Sequências convergentes.
- N4F2A1 – 1ª Atividade – Sequências convergentes.
- N4F2A2 – 2ª Atividade – Sequências convergentes.
- N4F3C2 – Correção e explicitação – Sequências convergentes.
- N4F4A3 – 3ª Atividade – Sequências convergentes.
- N4F5R1 – Resumo – Sequências convergentes.

A lista com todas as etapas identificadas serve de referência para uma visão ampla do trabalho e para consulta, em caso de uso de determinada etapa.

3.3 Como a pesquisa foi organizada e aplicada

A abordagem de todo o conteúdo de sequências, desde a definição até a determinação das condições para a convergência, foi feita para garantir que os alunos chegassem ao nível 4, objetivo inicial deste trabalho. Após alcançar um nível superior, não há necessidade de retornar. No caso das fases, é diferente, uma vez que elas podem acontecer em diversas ordens, o que será observado nos níveis 3 e 4.

A identificação das etapas foi feita considerando o nível, a fase e a natureza da tarefa.

N1F1C1 – Investigação – Sequências: Conceitos iniciais

Pré-requisito: nenhum.

Objetivo específico: informar sobre o conteúdo que será iniciado, sequências.

Conversa com os alunos: Você sabe dar alguns exemplos de sequências? Existem apenas sequências numéricas? Como você escolheu esse exemplo?

Comentário: caso o aluno não dê nenhum exemplo de sequência ou lista que ele acredite ser sequência, dê alguns exemplos como dias da semana, lista de compras, números pares, números sorteados para a loteria. O objetivo é que ele comece a pensar o que caracteriza uma sequência.

N1F2A1 – 1ª Ficha de Exercícios – Sequências: Conceitos iniciais

Pré-requisito: N1F1C1.

Objetivo específico: reconhecer que algumas listas de elementos são ordenadas e outras não.

1. Quais das listas abaixo são sequências?

- a) () (1, 2, 3, 4, 5, ...).
- b) () (5, 4, 0, -1, 7, ...).
- c) () (1, 1, 1, 1, ...).
- d) () (2, 5, 8, 11, 15).
- e) () (0, -2, 9, 45, 26, -2, ...).
- f) () (-1, 1, -1, 1, ...).
- g) () {1, 2}.
- h) () {-1, 1}.
- i) () lista de nomes dos alunos da turma 2A em ordem alfabética.
- j) () lista dos planetas do sistema solar em ordem de distância do sol.

N1F3C2 – Correção e explicitação – Sequências: Conceitos iniciais

Pré-requisito: N1F2A1.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações e, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: O que faz de uma lista de elementos uma sequência?

Comentário: Espera-se que o aluno perceba que cada elemento da sequência, ainda que a sequência seja formada apenas por números repetidos, ocupa uma determinada ordem na sequência, o que faz deles elementos diferentes.

Isto pode ser verificado perguntando ao aluno se os elementos da sequência (1, 1, 1, 1, 1) são todos iguais.

Espera-se que ele responda que não, pois ocupam posições diferentes. Ou que a justificativa seja: o primeiro 1 ocupa a primeira posição, o segundo 1 ocupa a segunda posição e assim sucessivamente, por ocuparem posições diferentes são diferentes.

N1F4A2 – 2ª Ficha de exercícios – Sequências: Conceitos iniciais

Pré-requisito: N1F3C2.

Objetivo específico: verificar se o aluno percebeu que os elementos relacionam-se com a posição que ocupam na sequência.

1. Analise as seguintes afirmativas e assinale V (verdadeiro) ou F(falso).

(*F*) Todos os elementos da sequência (1, 1, 1, 1, 1, ...) são iguais porque têm o mesmo valor.

(*V*) Os elementos da sequência (1, 1, 1, 1, 1, ...) são diferentes, pois ocupam posições diferentes.

(*F*) A lista (3, 4, 5, 6, 7, ...) não é uma sequência, pois não é possível relacionar seus elementos com a posição que ocupam.

(*F*) A lista (-1, 6, 9, -3, ...) não é uma sequência, pois não é possível relacionar seus elementos com a posição que ocupam.

N1F5R1 – Resumo – Sequências: Conceitos iniciais

Pré-requisito: N1F4A2

Objetivo específico: Resumir o conteúdo trabalhado nas atividades e conversas de maneira a melhorar a compreensão do assunto.

Comentário: considerando um currículo tradicional, os alunos nesta etapa do conteúdo já passaram pelo ensino de funções, portanto, espera-se que conheçam os conceitos que são pertinentes ao assunto.

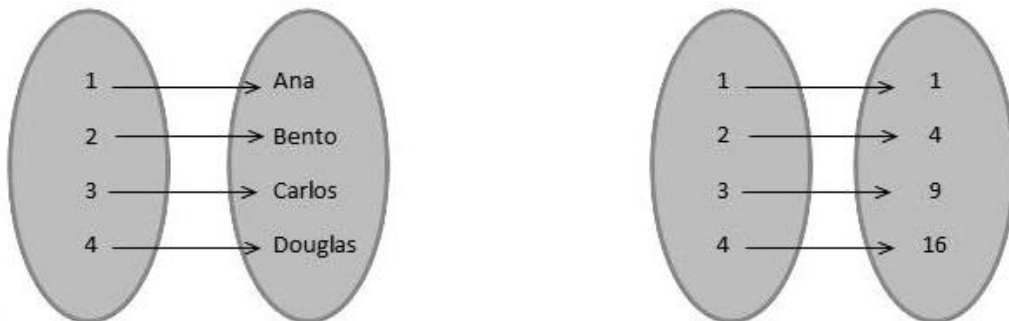
REGISTRANDO O QUE APRENDEMOS

Sequências são listas ordenadas de elementos, ou seja, cada um de seus elementos está relacionado com o conjunto dos números naturais de maneira única.

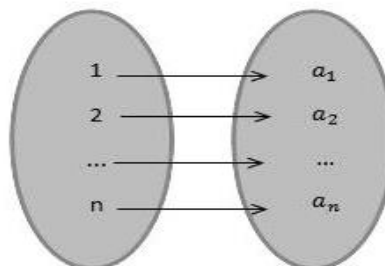
Sequência finita

Uma sequência finita é uma função f de domínio $A = \{1,2,3,\dots,n\}$ e contradomínio B , sendo $B = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ um conjunto qualquer não-vazio.

Exemplos:



De forma geral, temos



ou ainda, $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots, f(n) = a_n$. Em geral, o que se representa e é chamado de sequência numérica são os valores das imagens que esta função possui, para os valores naturais crescentes que compõem o domínio.

Sequência infinita

Uma sequência infinita é uma função f de domínio $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ e contradomínio $B = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$, sendo B um conjunto qualquer não-vazio.

Assim, $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, f(4) = a_4, \dots, f(n) = a_n, \dots$.

Cada elemento da sequência, também chamado de *termo da sequência*, ocupa uma determinada posição n e é representado por a_n .

Sequências têm seus termos escritos entre parênteses e separados por vírgulas.¹¹

Exemplo: $(2, 4, 6, 8)$ é uma sequência finita, em que $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6$ e $a_4 = 8$.

N2F1C1 – Investigação – Sequências: Lei de formação

Pré-requisito: N1F5R1

Objetivo específico: informar sobre o conteúdo que será iniciado, relação entre regras (fórmulas) e sequências.

Conversa com os alunos: Veremos agora que existe uma regra para determinar cada elemento da sequência. Vamos examinar alguns exemplos e ver se é possível descobrir essa regra.

N2F2A1 – 1ª Ficha de exercícios – Sequências: Lei de formação

Pré-requisito: N2F1C1

Objetivo específico: reconhecer que há uma regra (lei de formação) que determina os elementos da sequência.

1. Complete as sequências com os próximos três termos e descreva como foram formadas.
 - a) $(3, 5, 7, 9, _, _, _)$. *(..., 11, 13, 15) Possível resposta: foram formadas somando de dois em dois.*
 - b) $(3, 10, 17, _, _, _)$. *(..., 24, 31, 38) Possível resposta: foram formadas*

¹¹ Não é uma norma, mas usaremos essa notação por ser a mais encontrada nas principais bibliografias de livros do PNDL do MEC.

somando de sete em sete.

- c) $(2, 4, 8, _, _, _)$. $(\dots, 16, 32, 64)$ *Possível resposta: foram formadas multiplicando-se o termo anterior por dois.*
- d) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, _, _, _)$. $(\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6})$ *Possível resposta: cada termo tem numerador 1 e denominador igual a posição que ocupa.*
- e) $(1, 4, 9, 16, _, _, _)$. $(\dots, 25, 36, 49)$ *Possível resposta: são os números naturais ao quadrado.*
- f) $(5, -5, 5, -5, _, _, _)$. $(\dots, 5, -5, 5)$ *Possível resposta: o primeiro termo é o número 5 e, a partir daí, cada termo é formado multiplicando-se o termo anterior por (-1) .*

2. Escreva os cinco primeiros termos das sequências determinadas em função da posição do termo.

- a) $a_n = 7$. $(_, _, _, _, _)$ $(7, 7, 7, 7, 7)$
- b) $a_n = n^2$. $(_, _, _, _, _)$ $(1, 4, 9, 16, 25)$
- c) $a_n = 5n$. $(_, _, _, _, _)$ $(5, 10, 15, 20, 25)$
- d) $a_n = n + 3$. $(_, _, _, _, _)$ $(4, 5, 6, 7, 8)$
- e) $a_n = 2^n$. $(_, _, _, _, _)$ $(2, 4, 8, 16, 32)$
- f) $a_n = (\frac{1}{3})^n$. $(_, _, _, _, _)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243})$

N2F3C2 – Correção e explicitação – Sequências: Lei de formação

Pré-requisito: N1F2A1.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações e, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: A regra que permite determinar cada termo da sequência é chamada *lei de formação*. Vamos analisar alguns casos na atividade a seguir.

N2F4A2 – 2ª Ficha de exercícios – Sequências: Lei de formação

Pré-requisito: N2F3C2

Objetivo específico: relacionar sequências com suas leis de formação.

1. Associe cada sequência a sua lei de formação.

(A) (3, 5, 7, 9).

(C) $a_n = 5$.

(B) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

(A) $a_n = 2n + 1$.

(C) (5, 5, 5, 5).

(D) $a_n = 2^n$.

(D) (2, 4, 8, 16).

(B) $a_n = \frac{1}{n}$.

2. As sequências abaixo foram formadas de duas maneiras diferentes. Classifique-as em dois grupos (A e B).

(2, 4, 6, 8, 10)

(A)

(2, 4, 8, 16, 32)

(B)

(20, 15, 10, 5, 0)

(A)

(-1, 5, -25, 125, -625)

(B)

(1, 3, 9, 27, 81)

(B)

(-3, -4, -5, -6, -7)

(A)

3. Qual a principal característica de cada grupo?

Um grupo foi formado a partir da soma de uma constante e o outro pelo produto de uma constante.

N2F5R1 – Resumo – Sequências: Lei de formação

Pré-requisito: N1F4A2

Objetivo específico: Resumir o conteúdo trabalhado nas atividades e conversas de maneira a melhorar a compreensão do assunto.

REGISTRANDO O QUE APRENDEMOS

Lei de formação de uma sequência

Um conjunto de informações que determina todos os termos da sequência e a ordem em que eles são apresentados é chamado lei de formação da sequência. (PAIVA, 2010, p. 52)

Tipos de lei de formação

- Propriedade comum aos termos.

Uma propriedade p determina uma sequência se, e somente se, existir uma única sequência cujos termos satisfazem p .

Exemplos: nomes dos alunos da turma 2A em ordem alfabética, números primos.

- Recorrência

A sequência fica determinada em função de seu (s) antecessor (es).

Exemplo: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8$$

Resposta: $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ - sequência de Fibonacci

- Fórmula em função da posição.

Cada termo a_n fica determinado em função de sua posição n .

Exemplo: $a_n = n^2 + 1; 1 \leq n \leq 4$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1^2 + 1 = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^2 + 1 = 5$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^2 + 1 = 10$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 4^2 + 1 = 17$$

Resposta: $(2, 5, 10, 17)$

Agora, os estudos se concentram em **seqüências numéricas** cuja lei de formação é dada em função da posição do termo.

N3F1C1 – Investigação – PA

Pré-requisito: N2F5R1

Objetivo específico: informar sobre o conteúdo que será iniciado, PA e PG.

Conversa com os alunos: Agora, os estudos se concentrarão em função de duas sequências que receberão nomes especiais.

- a) *Progressão Aritmética (PA)*: são sequências numéricas em que a partir do primeiro termo, os outros são obtidos sempre somando um mesmo valor x (positivo ou negativo) ao termo anterior. Este valor x é chamado razão da PA.
- b) *Progressão Geométrica (PG)*: são sequências numéricas em que a partir do primeiro termo, os outros são obtidos sempre multiplicando um mesmo valor x (positivo ou negativo) pelo termo anterior. Este valor é chamado de razão da PG.

Comentário: Neste nível, o aluno já relaciona propriedades e regras previamente descobertas. Por exemplo, é capaz de reconhecer uma PA ou PG após saber como é formada cada uma delas.

Para essa fase, sugerimos que os exemplos sejam impressos e entregues ao aluno para que ele possa analisar mais cuidadosamente cada caso. Se isso não for possível, que as tabelas sejam escritas no quadro, mostrando a composição de cada valor que forma a sequência. É importante que o aluno visualize os números que formam as sequências que estão sendo analisadas.

Considere as seguintes situações:

1. Uma pessoa esqueceu-se de pagar uma conta de R\$ 100,00. Essa conta previa multa de R\$ 5,00 por cada dia de atraso por atraso.

| Número de dias em atraso | Valor a pagar |
|--------------------------|--|
| 0 | 100 |
| 1 | $100 + 5 = \mathbf{105}$ |
| 2 | $100 + 5 + 5 = 100 + 2 \cdot 5 = \mathbf{110}$ |
| 3 | $100 + 5 + 5 + 5 = 100 + 3 \cdot 5 = \mathbf{115}$ |
| 4 | $100 + 5 + 5 + 5 + 5 = 100 + 4 \cdot 5 = \mathbf{120}$ |
| ... | ... |
| n | $100 + 5 + \dots + 5 = \mathbf{100 + n \cdot 5}$ |

- a) Quanto essa pessoa pagará pela conta se atrasar 10 dias? $(100 + 10.5 = 150)$
- b) E se atrasar 45 dias? $(100 + 45.5 = 325)$
- c) A sequência formada pelos valores que a pessoa pagará de acordo com o número de dias em atraso é uma PA? *Sim, pois os valores, a partir de 100, aumentam de 5 em 5, ou, de forma geral, os valores, a partir do primeiro, aumentam de forma constante.*

2. O valor a ser pago em uma corrida de taxi é de R\$3,50 a bandeirada com um acréscimo de R\$ 0,50 a cada quilômetro percorrido. Veja a tabela a seguir.

| Quilômetros percorridos | Valor a pagar |
|-------------------------|--|
| 0 | 3,50 |
| 1 | $3,50 + 0,50 = 4,00$ |
| 2 | $3,50 + 0,50 + 0,50 = 3,50 + 2. 0,50 = 4,50$ |
| 3 | $3,50 + 0,50 + 0,50 + 0,50 = 3,50 + 3. 0,50 = 5,00$ |
| 4 | $3,50 + 0,50 + 0,50 + 0,50 + 0,50 = 3,50 + 4. 0,50 = 5,50$ |
| ... | ... |
| N | $3,50 + 0,50 + \dots + 0,50 = 3,50 + n. 0,50$ |

- a) Qual será o valor ser pago se o táxi percorrer 5 km?
 $(3,50 + 5.0,50 = 6,00)$
- b) E se o táxi percorrer 50 km ?
 $(3,50 + 50.0,50 = 28,50)$
- c) A sequência formada pelos valores a serem pagos de acordo com a quantidade de quilômetros rodados forma uma PA?
Sim, pois os valores, a partir de 3,50, aumentam de 0,50 em 0,50, ou, de forma geral, os valores, a partir do primeiro, aumentam de forma constante.

3. A tabela abaixo mostra a idade e a altura de uma criança.

| Idade | Altura |
|-------|--------|
| 1 ano | 73 cm |

| | |
|---------|--------|
| 2 anos | 86 cm |
| 3 anos | 95 cm |
| 4 anos | 102 cm |
| 5 anos | 108 cm |
| 6 anos | 113 cm |
| 7 anos | 119 cm |
| 8 anos | 125 cm |
| 9 anos | 131 cm |
| 10 anos | 137 cm |
| 11 anos | 143 cm |
| 12 anos | 148 cm |

a) Qual será a altura dessa criança quando ela tiver 13 anos? E quando ela tiver 20 anos?

Não é possível prever, pois não há uma regra que calcule a altura a partir da idade.

b) A sequência formada pelas alturas da criança é uma PA?

Não, pois o acréscimo de um termo para o seguinte varia. Por exemplo, do primeiro termo para o segundo, aumenta 13 e, do segundo para o terceiro, aumenta 11.

N3F2A1 – 1ª Ficha de exercícios – PA

Pré-requisito: N3F1C1.

Objetivos específicos: determinar a razão de uma PA, calcular seus elementos a partir dessa razão e classificar uma PA a partir da exibição de seus elementos.

1. Complete as PA com três termos e descreva o que você fez.

a) (5, 7, 9, __, __, __). (*..., 11, 13, 15*) *Possível resposta: somei de 2 em 2.*

b) (6, 10, 14, __, __, __). (*..., 18, 22, 26*) *Possível resposta: somei de 4 em 4.*

c) (-7, -4, -1, __, __, __). (*..., 2, 5, 8*) *Possível resposta: somei de 3 em 3.*

d) (20, -10, -40, __, __, __). (*..., -70, -100, -130*) *Possível resposta: subtraí de 30 em 30. Professor alerte o aluno para o fato de que subtrair 30 é equivalente a somar -30, para que ele perceba que a razão é -30.*

2. Determine a razão e calcule o 10º termo de cada PA a seguir.

- a) $(1, 5, \dots)$. $a_{10} = 37$ e razão = 4
 b) $(8, 14, \dots)$. $a_{10} = 62$ e razão = 6
 c) $(10, 5, \dots)$. $a_{10} = -35$ e razão = -5
 d) $(-2, -5, \dots)$. $a_{10} = -29$ e razão = -3

3. Classifique as PAs.

| PA | Finita (F) ou infinita (I) | Crescente (C), decrescente (D) ou constante (CT) |
|---------------------------|----------------------------|--|
| $(1, 2, 3, 4, \dots)$ | (I) | (C) |
| $(7, 5, 3, 1)$ | (F) | (D) |
| $(12, 15, 18, 20)$ | (F) | (C) |
| $(2, 2, 2, 2, \dots)$ | (I) | (CT) |
| $(-3, -2, -1, 0)$ | (F) | (C) |
| $(20, 19, 18, 17, \dots)$ | (I) | (D) |
| $(-1, -1, -1, -1)$ | (F) | (CT) |

N3F3C2 – Correção e explicitação – PA

Pré-requisito: N3F2A1.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: Percebam que tendo um termo da PA (qualquer um) e conhecendo sua razão é possível determinar todos os termos da PA e saber se ela cresce, decresce ou permanece constante.

N3F4A2 – 2ª Ficha de exercícios – PA

Pré-requisito: N3F3C2.

Objetivos específicos: escrever uma PA a partir de um elemento qualquer e de uma razão ou sua lei de formação, relacionar uma PA com sua lei de formação e escrever a lei de formação a partir da análise de uma PA.

1. Escreva uma PA de cinco termos que tenha

- a) $a_1 = 3$ e $r = 5$. (3, 8, 13, 18, 23)
 b) $a_1 = 0$ e $r = -1$. (0, -1, -2, -3, -4)
 c) $a_2 = 5$ e $r = -2$. (7, 5, 3, 1, -1)
 d) $a_3 = 12$ e $r = 0$. (12, 12, 12, 12, 12)
 e) $a_5 = 5$ e $r = 1$. (1, 2, 3, 4, 5)

2. Observe o exemplo e escreva uma PA de quatro termos de acordo com as leis de formação abaixo.

Exemplo: $a_n = 5n + 2$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 5.1 + 2 = 7$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 5.2 + 2 = 12$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 5.3 + 2 = 17$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 5.4 + 2 = 22$$

Resposta: (7, 12, 17, 22)

- a) $a_n = 2n + 2$. (4, 6, 8, 10)
 b) $a_n = 3n$. (3, 6, 9, 12)
 c) $a_n = n + 5$. (6, 7, 8, 9)
 d) $a_n = -2n + 1$. (-1, -3, -5, -7)
 e) $a_n = 5 - n$. (4, 3, 2, 1)

3. Associe cada PA à sua lei de formação.

- (A) (2, 3, 4, 5, ...). (D) $a_n = 8n - 4$.
 (B) (4, 7, 10, 13, ...). (A) $a_n = n + 1$.
 (C) (2, 2, 2, 2, ...). (B) $a_n = 3n + 1$.
 (D) (4, 12, 20, 28). (E) $a_n = 1 - 2n$.
 (E) (-1, -3, -5, -7, -9). (C) $a_n = 2$.

4. Determine a lei de formação de cada PA.

- a) $(2, 4, 6, 8, \dots)$. $a_n = 2n$
- b) $(10, 15, 20, 25, \dots)$. $a_n = 5 + 5n$
- c) $(3, 3, 3, 3, \dots)$. $a_n = 3$
- d) $(5, 4, 3, 2, 1)$. $a_n = 6 - n$
- e) $(7, 4, 1, \dots)$. $a_n = 10 - 3n$

N3F3C3 – Correção e explicitação – PA

Pré-requisito: N3F4A2.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: Percebam que podemos conhecer uma PA sem ser preciso exibir todos os seus termos. Isso se faz conhecendo sua lei de formação, também chamada de termo geral.

N3F4A3 – 3ª Ficha de exercícios – Soma de PA

Pré-requisito: N3F4A2.

Objetivos específicos: Perceber que a soma dos elementos equidistantes de uma PA é constante e que isso facilita os cálculos da soma dos n primeiros termos de uma PA.

Foi encontrada em livros e sites a seguinte história, que não se pode garantir a veracidade.

Um professor, para manter seus alunos ocupados, mandou que somassem todos os números de um a cem. Esperava que eles passassem bastante tempo executando a tarefa. Para sua surpresa, em poucos instantes um aluno de sete ou oito anos chamado Gauss¹² deu a resposta correta: 5.050. Como ele fez a conta tão rápido? Gauss observou que se somasse o primeiro número com o último, $1 + 100$, obtinha 101. Se somasse o segundo com o penúltimo, $2 + 99$, também obtinha 101. Somando o terceiro número com o antepenúltimo, $3 + 98$, o

¹² Gauss viveu entre 1777 e 1855 e foi sem dúvida um dos maiores matemáticos que já existiram. É por muitos considerado o maior gênio matemático de todos os tempos, razão pela qual também é conhecido como o Príncipe da Matemática.

resultado também era 101. Percebeu então que, na verdade, somar todos os números de 1 a 100 correspondia a somar 50 vezes o número 101, o que resulta em 5.050. E assim, ainda criança, Gauss inventou a fórmula da soma de progressões aritméticas.

A figura a seguir ilustra o procedimento elaborado por Gauss nesta história.

Figura 3: Procedimento para somar de 1 a 100.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

$4 + 97 = 101$
 $3 + 98 = 101$
 $2 + 99 = 101$
 $1 + 100 = 101$

Fonte: A autora, 2017.

Outros exemplos:

(2, 4, 6, 8, 10, 12)

$$S_6 = 3 \cdot 14 = 42$$

(3, 5, 7, 9, 11, 13, 15)

$$S_7 = 3 \cdot 18 + 9 = 63$$

ou

$$S_7 = 3,5 \cdot 18 = 63$$

(2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50)

$$S_9 = 4 \cdot 52 + 26 = 234$$

ou

$$S_9 = 4,5 \cdot 52 = 234$$

1. Calcule a soma das seguintes PAs.
 - a) (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). 55
 - b) (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28). 210
 - c) (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100). 1.050
 - d) (41, 39, 37, 35, 33, 31, 29). 245
 - e) (4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44). 264
 - f) (3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43). 483

2. Agora, sem construir toda a sequência calcule a soma de uma PA de
 - a) 30 termos, onde $a_1 = 3$ e $r = 3$. 1.395
 - b) 100 termos, onde $a_1 = 1$ e $r = 5$. 24.850
 - c) 41 termos, onde $a_1 = 3$ e $r = 2$. 1.763
 - d) 101 termos, onde $a_1 = 1$ e $r = 3$. 15.251

N3F5R1 – Resumo – PA

Pré-requisito: N3F4A3.

Objetivo específico: Resumir o conteúdo trabalhado nas atividades e conversas de maneira melhorar a compreensão do assunto.

REGISTRANDO O QUE APRENDEMOS

Progressão aritmética (PA) é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é formado pela soma do termo antecessor e uma constante r . O número r é chamado razão da PA.

Exemplo: (6, 8, 10, 12, 14) é uma PA finita de razão 3.

De modo geral, em uma PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ temos

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$$

...

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r, \text{ onde } \begin{cases} a_1 \text{ é o primeiro termo da PA} \\ a_n \text{ é o último termo da PA} \\ n \text{ é o número de termo da PA} \end{cases}$$

Esta fórmula é chamada de *termo geral* da PA.

Note que ela pode ser adaptada para relacionar quaisquer dois termos da PA. Por exemplo,

- $a_9 = a_5 + 4r$, pois do 5º termo (a_5) até o 9º termo (a_9) devemos avançar 4 posições ($+4r$)
- $a_{10} = a_{15} - 5r$, pois do 15º termo (a_{15}) até o 10º termo (a_{10}) devemos retroceder 5 posições ($-5r$)

Classificação das PAs

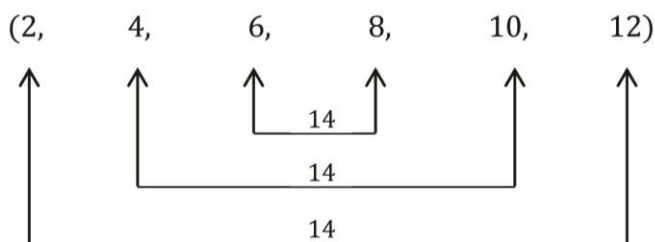
| | |
|-------------|---------------------------|
| Crescente | $r > 0$ e $a_{n+1} > a_n$ |
| Decrescente | $r < 0$ e $a_{n+1} < a_n$ |
| Constante | $r = 0$ e $a_{n+1} = a_n$ |

Soma dos termos de uma PA finita

Só é possível determinar a soma de PAs finitas, pois no caso das PAs infinitas a soma tende ao infinito (positivo ou negativo).

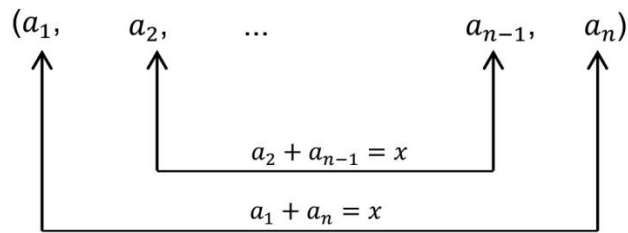
Note que, em uma PA, a soma dos termos equidistante é constante.

Por exemplo,



De forma geral, temos

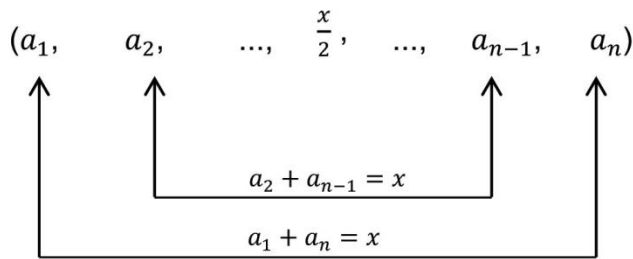
1º caso: quantidade par de termos.



$$S_n = x \cdot \frac{n}{2}, \text{ como } a_1 + a_n = x$$

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

2º caso: quantidade ímpar de termos.



$$S_n = x \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{x}{2}$$

$$S_n = x \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{x}{2}$$

$$S_n = x \cdot \frac{(n-1+1)}{2}$$

$$S_n = x \cdot \frac{n}{2}, \text{ como } a_1 + a_n = x$$

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

Desta forma, podemos somar os n primeiros termos de uma PA qualquer da seguinte maneira:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}, \text{ onde } \begin{cases} a_1 \text{ é o primeiro termo da PA} \\ a_n \text{ é o último termo da PA} \\ n \text{ é o número de termo da PA} \end{cases}$$

N3F1C4 – Investigação – PG

Pré-requisito: N2F5R1.

Objetivo específico: informar sobre o conteúdo que será iniciado, PA e PG.

Conversa com os alunos: Ainda focados nos estudos das sequências denominadas PA e PG, é importante lembrar o que caracteriza cada uma delas.

- a) *Progressão Aritmética (PA)*: são sequências numéricas em que a partir do primeiro termo, os outros são obtidos sempre somando um mesmo valor x (positivo ou negativo) ao termo anterior. Este valor x é chamado razão da PA.
- b) *Progressão Geométrica (PG)*: são sequências numéricas em que a partir do primeiro termo, os outros são obtidos sempre multiplicando um mesmo valor x (positivo ou negativo) pelo termo anterior. Este valor é chamado de razão da PG.

Comentário: Nessa Fase, o aluno já relaciona propriedade e regras previamente descobertas. Por exemplo, é capaz de reconhecer uma PA ou PG após saber como é formada cada uma delas.

Para essa fase, sugerimos que os exemplos sejam impressos e entregues ao aluno para que ele possa analisar mais cuidadosamente cada caso. Se isso não for possível, que as tabelas sejam escritas no quadro, mostrando a composição de cada valor que forma a sequência. É importante que o aluno visualize os números que formam as sequências que estão sendo analisadas.

Para estudar PG, usa-se calculadora, pois esse conteúdo frequentemente trabalha com números bastante elevados.

Considere a seguinte situação:

Uma pessoa compartilha um vídeo na internet com 5 pessoas em 10 minutos. Cada uma dessas pessoas compartilha esse mesmo vídeo com outras 5 pessoas e assim sucessivamente a cada 10 minutos.

1. Complete a tabela e responda.

| Momento (hora) | 12h | 12h10 | 12h20 | 12h30 | 12h40 | 12h50 | 13h |
|-------------------------------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| Compartilhamentos feitos no momento | 1 | 5 | 25 | 125 | | | |

a) Quantos compartilhamentos foram feitos às 13h ?

15625. Professor, caso os alunos efetuem o produto $5.5.5.5.5.5$, peça que eles usem a tecla x^y da calculadora para fazer 5^6 . Desta forma, ele pode começar a perceber que a posição do termo está relacionada com o expoente.

b) Quantos compartilhamentos foram feitos de 12h até às 13h?

$1 + 5 + 25 + 125 + 625 + 3125 + 15625 = 19531$.

c) A sequência formada pelo número de compartilhamentos feito a cada 10 minutos é uma PG? Justifique.

Sim, pois, a partir do 1, os valores vão sendo multiplicados por 5, ou, de forma geral, os valores, a partir do primeiro, são formado pelo produto do seu antecessor por uma constante.

N3F2A4 – 4ª Ficha de exercícios – PG

Pré-requisito: N3F1C4.

Objetivos específicos: determinar a razão de uma PG, calcular seus elementos a partir dessa razão e classificar uma PG a partir da exibição de seus elementos.

- Complete as PG com três termos e descreva o que você fez.
 - $(5, 25, 125, _, _, _)$. $(\dots, 625, 3125, 15625)$ *Possível resposta: Multipliquei por 5.*
 - $(6, 12, 24, _, _, _)$. $(\dots, 48, 96, 192)$ *Possível resposta: Multipliquei por 2.*
 - $(-2, -6, -18, _, _, _)$. $(\dots, 54, 162, 486)$ *Possível resposta: Multipliquei por 3.*
 - $(6, -6, 6, -6, _, _, _)$. $(\dots, 6, -6, 6)$ *Possível resposta: Multipliquei por -1.*
 - $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, _, _, _)$. $(\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32})$ *Possível resposta: Dividi por 2. Professor, alerte para o fato de que dividir por dois é o mesmo que multiplicar por $\frac{1}{2}$ para que o aluno perceba a razão corretamente.*
- Verifique se as sequências abaixo são PG e, em caso afirmativo, determine sua razão.
 - $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$. *Não.*
 - $(-1, 3, -9, 27, \dots)$. *Sim. Razão = -3*
 - $(8, 4, 2, \frac{1}{2}, \dots)$. *Sim. Razão = $\frac{1}{2}$*
 - $(\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots)$. *Sim. Razão = $\sqrt{2}$*
 - $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots)$. *Sim. Razão = $\frac{1}{3}$*
 - $(4, 8, 12, 16, \dots)$. *Não.*
 - $(3, 3, 3, 3, 3, \dots)$. *Sim. Razão = 1*
- Sem calcular todos os termos, usando o botão x^y da calculadora, calcule o 15º termo de cada PG abaixo.
 - $(2, 4, 8, \dots)$. *32.768*
 - $(-1, 3, -9, \dots)$. *4.782.969*

- c) $(5, 25, 125, \dots)$. $30.517.578.125$
- d) $(3, 6, 12, \dots)$. $4.398.046.511.104$
- e) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$. $\frac{1}{16.384}$

4. Classifique

| PG | Finita (F) ou infinita (I) | Crescente (C), decrescente (D), constante (CT) ou oscilante (O) |
|----------------------------|----------------------------|---|
| $(20, 40, 80)$ | (F) | (C) |
| $(5, -10, 20, -40, \dots)$ | (I) | (O) |
| $(-7, -14, -28, \dots)$ | (I) | (D) |
| $(-3, -3, -3, -3)$ | (F) | (CT) |
| $(-27, -9, -3, -1, \dots)$ | (I) | (C) |
| $(125, 25, 5)$ | (F) | (D) |
| $(1, -1, 1, -1, \dots)$ | (I) | (O) |

N3F3C5 – Correção e explicitação – PG

Pré-requisito: N3F2A4.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações e, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: Percebam que tendo um termo da PG e conhecendo sua razão é possível determinar qualquer termo da PG e podemos classificá-la em crescente, decrescente, constante ou oscilante.

Todos os termos de uma PG podem ser calculados por uma fórmula, ela é chamada lei de formação, ou termo geral. Vejamos, a seguir, como podemos relacionar algumas PGs com essas fórmulas.

N3F4A5 – 5ª Ficha de exercícios –PG

Pré-requisito: N3F3C5.

Objetivos específicos: escrever uma PG a partir de um elemento qualquer e de sua razão ou sua lei de formação, relacionar uma PG com sua lei de formação e escrever a lei de formação dada uma PG.

1. Escreva uma PG de quatro termos que tenha

- a) $a_1 = 1$ e $r = 7$. (1, 7, 49, 343)
- b) $a_1 = 1$ e $r = \frac{2}{5}$. (1, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{8}{125}$)
- c) $a_2 = 3$ e $r = 3$. (1, 3, 9, 27)
- d) $a_3 = 5$ e $r = 5$. ($\frac{1}{5}$, 1, 5, 25)
- e) $a_4 = 1$ e $r = \frac{1}{2}$. (8, 4, 2, 1)

2. Escreva uma PG de quatro termos de acordo com as fórmulas abaixo.

Exemplo: $a_n = 3 \cdot 2^n$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3 \cdot 2^3 = 24$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot 2^4 = 48$$

Resposta: (6, 12, 24, 48)

- a) $a_n = 5 \cdot 2^n$. (10, 20, 40, 80)
- b) $a_n = 3^{n-1}$. (1, 3, 9, 27)
- c) $a_n = 2^{n+1}$. (4, 8, 16, 32)
- d) $a_n = (-2)^n$. (-2, 4, -8, 16)
- e) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$)
- f) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. (1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$)

3. Associe cada PG à sua lei de formação.

(A) (5, 25, 125, ...).

(C) $a_n = 3 \cdot (-1)^n$.

(B) $(1, 2, 4, 8, \dots)$.

(A) $a_n = 5^n$.

(C) $(-3, 3, -3, 3, \dots)$.

(D) $a_n = 3^{-n}$.

(D) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots)$.

(B) $a_n = 2^{n-1}$.

4. Determine a lei de formação de cada PG.

a) $(2, 8, \dots)$.

$a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$

b) $(3, 9, \dots)$.

$a_n = 3^n$

c) $(3, 3, 3, \dots)$.

$a_n = 3$

d) $(-5, 25, \dots)$.

$a_n = (-5)^n$

e) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$.

$a_n = 2^{1-n}$

f) $(-1, 1, -1, 1, \dots)$.

$a_n = (-1)^n$

N3F3C6 – Correção e explicitação – PG

Pré-requisito: N3F4A5.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações e, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: Pode-se conhecer uma PG sem ser preciso exibir todos os seus termos. Isso se faz conhecendo sua lei de formação, também chamada de termo geral.

N3F4A6 – 6ª Ficha de exercícios – PG: Soma de PG finita

Pré-requisito: N3F4C6.

Objetivos específicos: Demonstrar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG e fazer uso dela para facilitar os cálculos.

Retomando o problema inicial (N3F1C4 – Investigação sobre PG) tem-se que foram feitos 19.531 compartilhamentos em 1 hora. Esse total foi obtido pela soma $1 + 5 + 25 + 125 + 625 + 3125 + 15625 = 19531$.

Uma pessoa compartilha um vídeo na internet com 5 pessoas em 10 minutos.
Cada uma dessas pessoas compartilha esse mesmo vídeo com outras 5 pessoas e assim sucessivamente a cada 10 minutos.

| Momento (hora) | 12h | 12h10 | 12h20 | 12h30 | 12h40 | 12h50 | 13h |
|-------------------------------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Compartilhamentos feitos no momento | 1 | 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | 15625 |

Quantos compartilhamentos foram feitos de 12h até às 13h ?

E se agora, ainda considerando que o número de compartilhamentos quintuplica a cada 10 minutos, quiséssemos saber o total de compartilhamentos feitos em 3 horas? Usando apenas a adição dos termos, o processo será muito longo.

Há uma maneira mais prática de somar os n primeiros termos de uma PG de razão $q \neq 1$.

Vamos acompanhar o seguinte raciocínio:

Considere S_n a soma de todos os termos de uma PG. Desta forma, temos (I)

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad \text{(I)}$$

Multiplicando a equação (I) por q e substituindo $a_1 \cdot q = a_2$, $a_2 \cdot q = a_3$, ..., $a_{n-1} \cdot q = a_n$, obtemos a equação (II).

$$S_n \cdot q = \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} + \underbrace{a_2 \cdot q}_{a_3} + \underbrace{a_3 \cdot q}_{a_4} + \dots + \underbrace{a_{n-1} \cdot q}_{a_n} + a_n \cdot q$$

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n \cdot q \quad \text{(II)}$$

Fazendo (I) - (II), obtemos a equação (III).

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q \quad \text{(III)}$$

Pondo S_n em evidência e substituindo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, obtemos a equação (IV).

$$S_n \cdot (1 - q) = a_1 - a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q \quad \text{(IV)}$$

Pondo a_1 em evidência, obtemos a equação (V).

$$S_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n) \quad \text{(V)}$$

Dividindo a equação por $(1 - q)$, obtemos a fórmula que nos dá a soma dos n primeiros termos de uma PG.

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{(1 - q)}$$

Agora, usando a fórmula, podemos calcular com mais facilidade quantos compartilhamentos foram feitos em 3h.

3h = 180 minutos = 18 períodos de 10 minutos (esse termo ocupa a 19ª posição da PG)

$$S_{19} = \frac{1(1 - 5^{19})}{(1 - 5)} = \frac{1 - 5^{19}}{-4} = 4.768.371.582.031$$

1. Agora é a sua vez! Calcule a soma dos 10 primeiros termos de cada PG abaixo.

- | | |
|--------------------------------|----------------------------|
| a) $(2, 8, \dots)$. | 699.050 |
| b) $(3, -9, \dots)$. | 88.572 |
| c) $(7, 14, \dots)$. | 7.161 |
| d) $(90, 30, \dots)$. | $135 - \frac{135}{3^{10}}$ |
| e) $(1, \frac{1}{2}, \dots)$. | $2 - \frac{1}{2^9}$ |

N3F3C7 – Correção e explicitação – PG: Soma de PG finita

Pré-requisito: N3F4A6.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações e, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: Podem-se somar os n primeiros termos de uma PG sem que para isso seja preciso conhecer todos eles. O uso da fórmula ajuda nesta tarefa.

N3F4A7 – 7ª Ficha de exercícios – PG: Soma de PG infinita

Pré-requisito: N3F3C7.

Objetivos específicos: Demonstrar a fórmula da soma de uma PG infinita e em que condição é possível fazer essa soma.

Agora, deve-se analisar a soma de PG infinitas.

Em alguns casos é possível somar uma quantidade infinita de termos. No caso da PG, as condições que nos permitem fazer esta soma são: a razão estar entre -1 e 1 ($-1 < q < 1$) e ser diferente de zero ($q \neq 0$).

Faça a seguinte experiência:

Divida sucessivamente 1 unidade na metade (pode ser uma folha de caderno, uma tira de papel, um pedaço de linha, ...) e organize essas partes uma ao lado da outra na ordem em que foram criadas. Essas partes representam uma PG de razão $\frac{1}{2}$.

Dependendo do que você usou como unidade, conseguirá mais ou menos pedaços que o colega. Para resolver essa diferença, vamos usar a imaginação (e a calculadora). Dessa forma, podemos dividir infinitamente e criar infinitos termos para a PG.

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$$

Conforme o número de termos fica muito grande, cada termo fica muito pequeno, pois à medida que n aumenta, q^n fica cada vez mais próximo de zero.

Esse tipo de sequência é chamada *convergente*. Nesse caso, é possível calcular a soma de seus termos, mesmo que sejam infinitos.

Intuitivamente, sabemos que é 1, pois somar todas as partes seria o equivalente a ter a unidade novamente. Agora, deve-se verificar algebricamente.

Considere a PG infinita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ de razão q , com $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$.

Calculando S_n para n suficientemente grande (tendendo ao infinito), tem-se

$$S_n = \frac{a_1(1 - \overset{0}{\widehat{q^n}})}{(1 - q)} = \frac{a_1}{1 - q} \quad ^{13}$$

Este valor é chamado *limite da soma de uma PG infinita*.

Usando a fórmula, pode-se verificar o limite da soma dos termos criados pelas divisões sucessivas.

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

¹³ Usamos essa demonstração por ser mais intuitiva para um aluno do ensino médio.

Não é possível calcular a soma dos termos de todas as PGs infinitas. Você sabe dizer o porquê?

Espera-se que o aluno perceba que se a razão da PG não está no intervalo $(-1, 1)$ a PG não é convergente.

1. Calcule o limite da soma em cada caso.

a) $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots\right)$. $\frac{3}{2}$

b) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots\right)$. $\frac{1}{3}$

c) $(0,3; 0,03; 0,003; \dots)$. $\frac{1}{3}$

d) $\left(1, \frac{2}{5}, \frac{4}{25}, \dots\right)$. $\frac{5}{3}$

2. Um motorista de caminhão avista repentinamente uma grande pedra no meio da estrada e aciona os freios a 100m de distância da pedra. Após a freada, o veículo percorre 20m no primeiro segundo e, por mais alguns instantes, percorre, em cada segundo, um quarto da distância que percorreu no segundo anterior. Haverá o choque entre o veículo e a pedra? Justifique. (PAIVA, 2010, p.58)

- *PG formada por todas as distâncias percorridas pelo caminhão: $(20; 5; 1,25; \dots)$*
- *Limite da soma dessas distâncias: $S_n = \frac{20}{1-\frac{1}{4}} = 20 \cdot \frac{4}{3} = \frac{80}{3} \approx 26,666 \dots$*

Como a soma das distâncias é menor do que 100, concluímos que o caminhão parou antes da pedra.

N3F5R2 – Resumo – PG

Pré-requisito: N3F4A7.

Objetivo específico: Resumir o conteúdo trabalhado nas atividades e conversas de maneira a melhorar a compreensão do assunto.

REGISTRANDO O QUE APRENDEMOS

Progressão geométrica (PG) é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é formado pelo produto do termo antecessor e uma constante q . O número q é chamado razão da PG.

Por exemplo: $(1, 2, 4, 8, 16)$ é uma PG finita de razão 2.

De modo geral, em uma PG $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ tem-se

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

...

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ onde } \begin{cases} a_1 \text{ é o primeiro termo da PG} \\ a_n \text{ é o último termo da PG} \\ n \text{ é o número de termo da PG} \end{cases}$$

Esta fórmula é chamada de *termo geral* da PG.

Note que ela pode ser adaptada para relacionar quaisquer dois termos da PG. Por exemplo,

- $a_9 = a_5 \cdot q^4$, pois do 5º termo (a_5) até o 9º termo (a_9) devemos avançar 4 posições ($+4q$).
- $a_{10} = a_{15} \cdot q^{-5}$ ou ainda $a_{10} = \frac{a_{15}}{q^5}$, pois do 15º termo (a_{15}) até o 10º termo (a_{10}) devemos retroceder 5 posições (q^{-5} ou $:q^5$).

Classificação das PGs.

| | |
|-------------------------|--|
| Crescente | $a_{n+1} > a_n$ Caso $a_1 > 0, q > 1$ ou Caso $a_1 < 0, 0 < q < 1$ |
| Decrescente | $a_{n+1} < a_n$ Caso $a_1 > 0, 0 < q < 1$ ou Caso $a_1 < 0, q > 1$ |
| Constante | $a_{n+1} = a_n$ e $q = 1$ |
| Oscilante ou alternante | $q < 0$ |

Soma dos n primeiros termos de uma PG.

- Se $q \neq 1$, então $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)}$
- Se $q = 1$, então $S_n = n \cdot a_1$.
- Se $q = 0$, então $S_n = a_1$.

Limite da soma dos termos de uma PG infinita de razão q , onde $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$.

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

N4F1C1 – Investigação – Sequências convergentes

Pré-requisito: N3F5R2.

Objetivos específicos: informar sobre o conteúdo que será iniciado, análise de sequências convergentes.

Conversa com os alunos: Assim como as PGs que atendem algumas condições, outras sequências também são convergentes, ou seja, à medida que n aumenta, a_n fica cada vez mais próximo de um valor conhecido.

Agora, vamos analisar que condições são necessárias para que uma sequência seja convergente.

N4F2A1 – 1ª Ficha de exercícios – Sequências convergentes

Pré-requisito: N4F1C1.

Objetivos específicos: analisar a monotonicidade de algumas sequências como primeira condição para que uma sequência seja convergente.

- Classifique as sequências abaixo em crescentes (C), não crescentes (NC), decrescente (D), não decrescente (ND) ou nenhuma das anteriores (NDA)

| | |
|--|--|
| a) (C) (2, 4, 6, 8, ...). | f) (C) (3, 9, 27, 81, ...). |
| b) (D) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right)$. | g) (D) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right)$. |
| c) (ND/NC) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots)$. | h) (NDA) $(-1, 1, -1, 1, \dots)$. |
| d) (ND) (3, 3, 7, 7, 11, 11, 15, ...). | i) (NC) (20, 20, 20, 10, 10, 10, 5, ...). |
| e) (NDA) (0, 1, 0, 1, 0, 1, ...). | j) (ND/NC) (5, 5, 5, ...). |
- Sequências que são classificadas, ao mesmo tempo, em não-crescentes e não-decrescentes são ditas constantes. Há alguma(s) sequência(s) nessa condição? Se sim, qual (is)? $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots)$ e $(5, 5, 5, \dots)$

N4F2A2 – 2ª Ficha de exercícios – Sequências convergentes

Pré-requisito: N4F3C1.

Objetivos específicos: introduzir o conceito de sequências limitadas como segunda condição para que uma sequência seja convergente.

1. Observe os exemplos abaixo e classifique as sequências a seguir em limitadas (L) ou ilimitadas (I). No caso de serem limitadas, determine quais valores limitam esta sequência?

Exemplo 1: A sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$ é limitada, pois é possível encontrar dois números, um menor ou igual do que todos os termos da sequência e outro maior ou igual do que todos os termos da sequência, que todos os seus termos, ou seja todos os seus termos pertencem ao intervalo $[0,1]$. Neste caso dizemos que a sequência é limitada inferiormente e é limitada superiormente.

Exemplo 2: A sequência $(5, 10, 15, 20, \dots)$ é ilimitada, pois não existe um número que seja maior que todos os seus termos, embora esta sequência possua um menor valor, o cinco!. Neste caso podemos dizer que é limitada inferiormente (LI), mas não é limitada superiormente (LS).

- | | |
|---|---|
| a) (I) $(2, 4, 6, 8, \dots)$. | f) (I) $(3, 9, 27, 81, \dots)$. |
| b) (L) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right)$. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ | g) (L) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right)$. $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ |
| c) (L) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots)$. $[1, 2]$ | h) (L) $(-1, 1, -1, 1, \dots)$. $[-1, 1]$ |
| d) (I) $(3, 3, 7, 7, 11, 11, 15, \dots)$. | i) (I) $(20, 20, 20, 10, 10, 10, 5, \dots)$. |
| e) (L) $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$. $[0, 1]$ | j) (L) $(5, 5, 5, \dots)$. $[4, 6]$ |

N4F3C2 – Correção e explicitação – Sequências convergentes

Pré-requisito: N4F2A1 e N4F2A2.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações e, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: Enfatizar que no caso das sequências limitadas é possível encontrar mais de um intervalo que limita todos os termos da sequência e que o desafio é encontrar o menor intervalo que contenha o conjunto dos termos.

Quadro com resumo das respostas das fichas N4F2A1 e N4F2A2.

| | | | |
|--|---|------------------|--|
| a) $(2, 4, 6, 8, \dots)$ | <i>Monótona crescente</i> | <i>Ilimitada</i> | |
| b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots)$ | <i>Monótona decrescente</i> | <i>Limitada</i> | $(1,0)$ ou $[\frac{1}{2}, 0]$ |
| c) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots)$ | <i>Monótona não-decrescente e não-crescente, ou seja, constante</i> | <i>Limitada</i> | $(1,2)$ ou $[\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ intervalo degenerado |
| d) $(3, 3, 7, 7, 11, 11, 15, \dots)$ | <i>Monótona não-decrescente</i> | <i>Ilimitada</i> | |
| e) $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ | <i>Não é monótona, pois cresce e decresce</i> | <i>Limitada</i> | $[0,1]$ ou $(-1,1)$ |
| f) $(3, 9, 27, 81, \dots)$ | <i>Monótona crescente</i> | <i>Ilimitada</i> | |
| g) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots)$ | <i>Monótona decrescente</i> | <i>Limitada</i> | $(1,0)$ ou $[\frac{1}{3}, 0]$ |
| h) $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ | <i>Não é monótona, pois cresce e decresce</i> | <i>Limitada</i> | $(-2,2)$ ou $[-1,1]$ |
| i) $(20, 20, 20, 10, 10, 10, 5, \dots)$ | <i>Monótona não-crescente</i> | <i>Ilimitada</i> | |
| j) $(5, 5, 5, \dots)$ | <i>Monótona não-decrescente e não-crescente, ou seja, constante</i> | <i>Limitada</i> | $[5,5]$ ou $[4,6]$ |

N4F4A3 – 3ª Ficha de exercícios – Sequências convergentes

Pré-requisito: N4F3C2.

Objetivos específicos: encontrar a partir de que posição (n_0) os termos da sequência aproximam-se do limite considerando o erro dado.

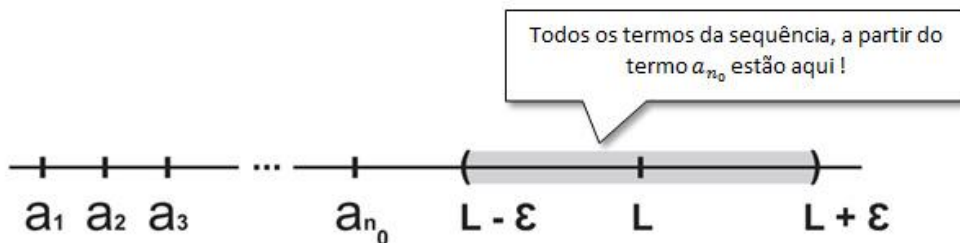
Acabamos de ver que sempre é possível determinar mais de um intervalo que contenha os termos de uma sequência limitada. Será possível determinar o menor intervalo que contenha essa sequência?

Um dos extremos do intervalo é simples de ser determinado, pois como estamos tratando de seqüências, um dos extremos é conhecido.

O outro extremo do intervalo é um número real chamado *limite* da seqüência ($\lim x_n = L$). Todos os termos da seqüência, a partir de um determinado n , aproximam-se muito do limite, tornando a diferença entre cada termo e o limite tão pequena quanto se queira. Essa distância é chamada de ε .

Diz-se que o número real L é o limite da seqüência (x_n) e escreve-se $\lim x_n = L$ quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, todos os termos da seqüência estão entre $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$ a partir de um dado termo. Vejamos esta ideia apresentada na figura abaixo.

Figura 4: Seqüência convergente



Fonte: A autora, 2017.

Como todos os termos da seqüência estão entre $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$, pode-se escrever que $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$, ou seja, as distâncias entre os termos da seqüência e L são sempre menores do que ε .

Você sabe como podemos escrever simbolicamente a afirmativa:

“As distâncias entre os termos da seqüência e L são sempre menores do que ε ”?

Dica: Use módulo!

Resposta: $|x_n - L| < \varepsilon$

Uma das mais frequentes bibliografias em Análise é o livro *Curso de Análise - Vol.1*. Ele traz a história contada pelo matemático inglês G.H.Hardy, que ilustra, com uma trama de mocinho e bandido, a busca pela prova de que o limite de uma seqüência x_n é L . O mocinho quer provar que $\lim x_n = L$, o bandido quer tornar essa tarefa impossível. O bandido fornece os épsilons (ε) enquanto o mocinho trata de conseguir, para cada $\varepsilon > 0$ proposto como desafio, o n_0 correspondente (isto é, n_0 tal que $n > n_0$ implique em $|x_n - L| < \varepsilon$).

O mocinho ganhará o jogo (e ficará portanto estabelecido que $\lim x_n = L$) se para qualquer $\varepsilon > 0$ estabelecido pelo seu adversário, ele for capaz de encontrar um n_0 conveniente (isto é, $n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$). Por outro lado, para que o bandido ganhe a parada, basta que ele consiga achar um número real $\varepsilon > 0$ para o qual nenhum n_0 que o mocinho venha a tentar, sirva. (LIMA, 2004, p.108)

Exemplo 1:

Sabendo que o limite da sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$, cujo termo geral é $x_n = \frac{1}{n}$, é 0, calcule a partir de que posição todos os termos de $x_n = \frac{1}{n}$ estão a menos de 0,01 de distância do limite.

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 0,01$$

$$\left| \frac{1}{n} \right| < 0,01$$

$$-0,01 < \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n} < 0,01$$

Resolvendo a primeira desigualdade, temos

$$-0,01 < \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{100} < \frac{1}{n}$$

$$-100 > n$$

Como n é natural, descartamos essa desigualdade.

Resolvendo a segunda desigualdade, temos

$$\frac{1}{n} < 0,01$$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$$

$$n > 100$$

logo $n_0 = 100$.

Ou seja, a partir de a_{101} , as diferenças entre cada termo e o limite são menores do que 0,01.

De fato,

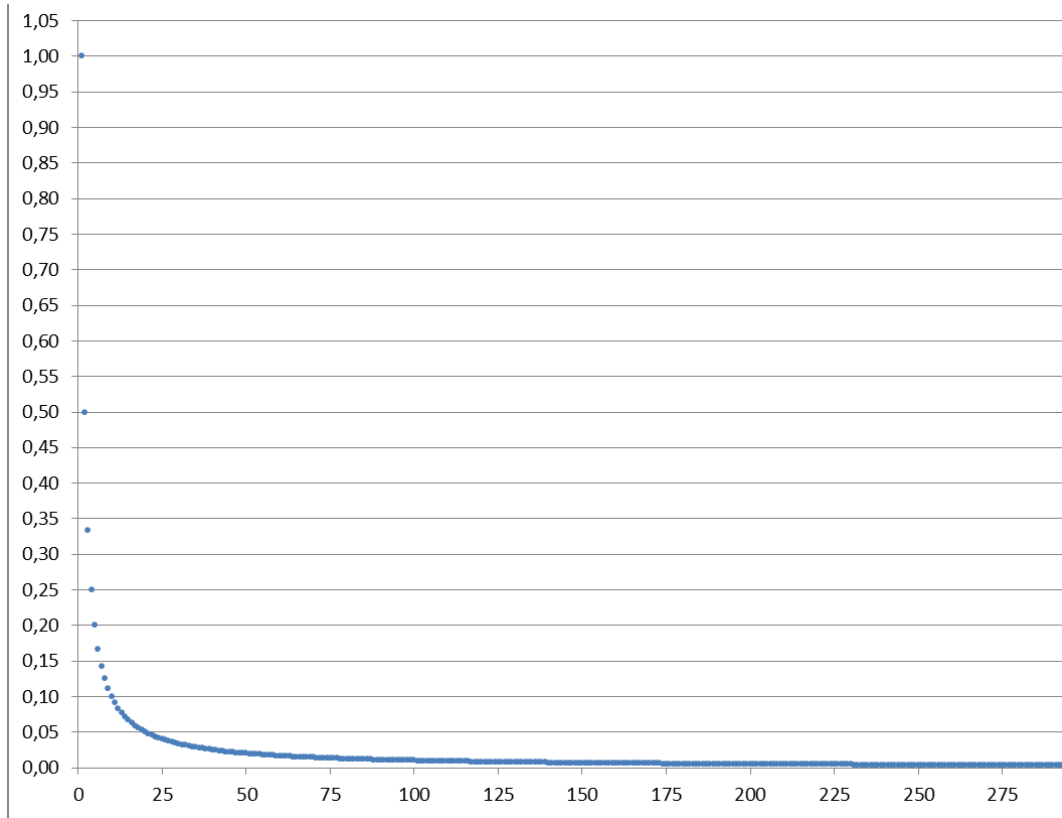
$$a_{101} = \frac{1}{101} \Rightarrow |a_{101} - L| = \left| \frac{1}{101} - 0 \right| = \frac{1}{101} < \frac{1}{100} = 0,01$$

$$a_{102} = \frac{1}{102} \Rightarrow |a_{102} - L| = \left| \frac{1}{102} - 0 \right| = \frac{1}{102} < \frac{1}{100} = 0,01$$

...

A seguir, temos o gráfico da função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ com $f(n) = \frac{1}{n}$, assim como o termo geral da sequência analisada no exemplo 1.

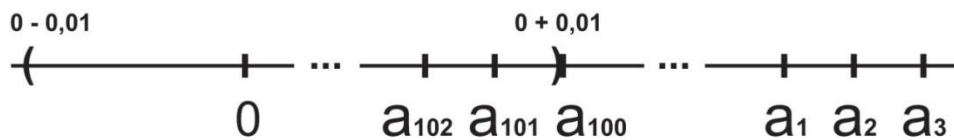
Figura 5: Gráfico da função $f(n) = \frac{1}{n}$.



Fonte: A autora, 2017.

A seguir, ilustração dos elementos da sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ convergindo para o limite com erro de menos de 0,01 a partir da posição a_{101} .

Figura 6: Convergência a partir da posição a_{101} .



Fonte: A autora, 2017.

Exemplo 2:

Sabendo que o limite da sequência $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots)$, cujo termo geral é $x_n = \frac{n}{n+1}$, é 1, calcule a partir de que posição todos os termos de $x_n = \frac{n}{n+1}$ estão a menos de 0,02 de distância do limite; $n > 0$.

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < 0,02$$

$$-0,02 < \frac{n}{n+1} - 1 \text{ ou } \frac{n}{n+1} - 1 < 0,02$$

Resolvendo a primeira desigualdade, temos

$$0,98 < \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{98}{100} < \frac{n}{n+1}$$

$$98n + 98 < 100n$$

$$n > 49 \text{ (I)}$$

Resolvendo a segunda desigualdade, temos

$$\frac{n}{n+1} < 1,02$$

$$\frac{n}{n+1} < \frac{102}{100}$$

$$100n < 102n + 102$$

$$-102 < 2n$$

$$-51 < n$$

Como n é um número natural, dessa desigualdade, tem-se que $n > 0$ (II).

Fazendo a interseção das desigualdades (I) e (II), tem-se que $n > 49$, logo $n_0 = 49$.

Ou seja, a partir de a_{50} , as diferenças entre cada termo e o limite são menores do que 0,02.

De fato,

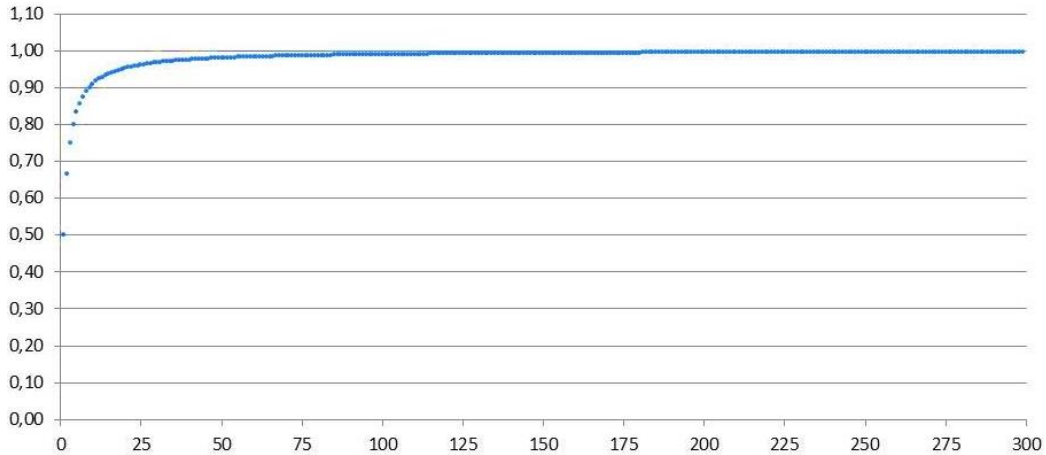
$$a_{50} = \frac{50}{51} \Rightarrow |a_{50} - L| = \left| \frac{50}{51} - 1 \right| = \frac{1}{51} < \frac{1}{50} = 0,02$$

$$a_{51} = \frac{51}{52} \Rightarrow |a_{51} - L| = \left| \frac{51}{52} - 1 \right| = \frac{1}{52} < \frac{1}{50} = 0,02$$

...

A seguir, temos o gráfico da função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ com $f(x) = \frac{x}{x+1}$, assim como o termo geral da sequência analisada no exemplo 2.

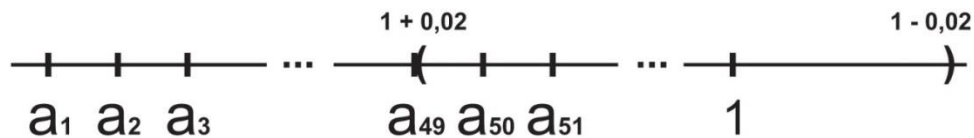
Figura 7: Gráfico da função $f(n) = \frac{n}{n+1}$



Fonte: A autora, 2017.

A seguir, ilustração dos elementos da sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right)$, convergindo para o limite com erro de menos de 0,02 a partir da posição a_{50} .

Figura 8: Convergência a partir da posição a_{50} .



Fonte: A autora, 2017.

Agora é a sua vez! Seja o mocinho e encontre o n_0 .

1. Encontre a partir de que posição (n_0) os termos das sequências abaixo aproximam-se do limite, considerando o erro dado.

| Sequência | Termo geral | Limite | Erro |
|---|-----------------------|----------------|-------|
| a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ | $x_n = \frac{1}{2n}$ | $\lim x_n = 0$ | 0,01 |
| b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right)$ | $x_n = \frac{1}{3^n}$ | $\lim x_n = 0$ | 0,001 |

a) $n_0 = 51$ b) $n_0 = 7$

2. Embora as seqüências a seguir sejam limitadas, elas não são convergentes. Explique com suas palavras por que isso acontece em cada um dos casos abaixo.

a) $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Termo geral: $x_n = 0$, se n é par ou $x_n = 1$, se n é ímpar.

b) $(-1, 1, -1, 1, \dots)$

Termo geral: $x_n = (-1)^n$.

Espera-se que percebam que não há um só número que consiga acumular os termos dessas seqüências ou que digam que não são monótonas.

N4F5R1 – Resumo – Sequências convergentes

Pré-requisito: N4F4A3.

Objetivo específico: Resumir o conteúdo trabalhado nas atividades e conversas de maneira melhorar a compreensão do assunto.

REGISTRANDO O QUE APRENDEMOS

Definição 1: As seqüências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes são chamadas *monótonas*.

| | |
|------------------------|--|
| Crescente | Uma seqüência (x_n) é monótona crescente, se $x_n < x_{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$. Exemplo: $(1, 3, 5, 7, \dots)$. |
| Não-decrescente | Uma seqüência (x_n) é monótona não-decrescente, se $x_n \leq x_{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$. Exemplo: $(1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots)$. |
| Decrescente | Uma seqüência (x_n) é monótona decrescente, se $x_n > x_{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$. Exemplo: $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$. |

| | |
|----------------------|---|
| Não-crescente | <p>Uma sequência (x_n) é monótona não-crescente, se $x_n \geq x_{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$.</p> <p>Assim, $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$.</p> <p>Exemplo: $(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots)$</p> |
| Constante | <p>Uma sequência (x_n) é monótona constante, se $x_{n+1} - x_n = 0$, para $n \in \mathbb{N}$.</p> <p>Assim, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dots$.</p> <p>Exemplo: $(1, 1, 1, 1, \dots)$.</p> <p>* Sequências constantes são, ao mesmo tempo, não-decrescentes e não-crescentes.</p> |

Definição 2: Dizemos que uma (x_n) é *limitada* quando o conjunto de seus termos é limitado, isto é, quando existem números reais a e b tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto quer dizer que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[a, b]$. Quando uma sequência não é limitada, diz-se que ela é *ilimitada*.

Exemplo: A sequência (x_n) , tal que $x_n = \frac{1}{n}$.

$(x_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$ é limitada pelos valores 1 e 0, pois $0 < x_n \leq 1$ ou $x_n \in (0, 1]$.

Definição 3: Diz-se que o número real L é *limite* da sequência (x_n) de números reais, e escreve-se $\lim x_n = L$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$.

Em linguagem simbólica

$$\lim x_n = L \text{ .} \equiv \text{. } \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

A seguir, uma tabela mostra o significado de cada símbolo usado.

Tabela 1: Definição de limite.

| Símbolo | Significado |
|--------------|---|
| . \equiv . | o que vem depois é definição do que vem antes |

| | |
|---------------|-----------|
| \forall | para todo |
| \exists | existe |
| ; | tal que |
| \Rightarrow | implica |

Fonte: A autora, 2017.

Definição 4: Quando $\lim x_n = a$, diz-se que a sequência (x_n) *converge* para a , ou *tende* para a e escreve-se $x_n \rightarrow a$. Uma sequência que possui limite é chama-se *convergente*. Caso contrário, *divergente*.

Teorema: Se (a_n) é uma sequência monótona e limitada então (a_n) é convergente.

A seguir será descrita a pesquisa realizada com um grupo de alunos do Ensino Médio que se voluntariaram para a realização deste trabalho. Será exposto qual o encaminhamento dado a fim de que sejam analisadas cuidadosamente as respostas às atividades propostas, não só para apresentar a pesquisa em si, mas, sobretudo, para validar o método construído.

4 DA APLICAÇÃO DA PESQUISA EM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Participaram desta pesquisa sete alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola privada da cidade de Niterói, no estado do Rio de Janeiro. A aplicação da atividade durou cerca de duas horas. Quer-se, aqui, também deixar registrado que observações prévias em diversas aulas e avaliações já aplicadas nas turmas destes alunos permitiram acreditar que são alunos que já consolidaram seus conhecimentos iniciais sobre o assunto **Sequências Numéricas**, principalmente no que se referem às características de alunos que já cumpriram as etapas relativas aos níveis 1, 2 e 3 da proposta de classificação em níveis.

Outros tantos alunos poderiam ter participado desta etapa do processo, porém os alunos selecionados foram aqueles que se sentem mais confortáveis com a matemática, que possuem mais afinidade com esta disciplina e por serem adolescentes comprometidos com o próprio aprendizado. São jovens que buscam constantemente conhecimento fora daqueles apresentados pelo professor em sala de aula e que aceitam desafios. Esses critérios foram escolhidos, pois nesta pesquisa o objetivo é trabalhar no nível 4 de aprendizado, segundo a teoria de van Hiele e algumas adaptações. Nesse nível, o aluno já compreende que é preciso justificar relacionamentos, percebe que pode chegar ao mesmo resultado de diferentes formas e é capaz de construir sequências de afirmações deduzindo uma a partir de outra(s).

Os critérios de seleção não são excludentes, muito pelo contrário, visam ao pleno desenvolvimento das potencialidades de alunos que tem aptidão e vontade para avançar no processo de aprendizado mais que a média da turma. Além de encorajar potenciais, o momento da aplicação desta pesquisa foi de aprendizado interessante e motivador tanto para alunos quanto para o aplicador. Além disso, acredita-se que forçar a passagem de nível de alunos que não tem como objetivo as carreiras científicas em seus estudos futuros, poderia deixar os jovens entediados e comprometer os resultados, uma vez que uma das características dos jovens é abandonar tarefas que acreditam ser enfadonhas ou muito abstratas.

Foram aplicadas as atividades do nível 4 e o relato dessa aplicação será feito em ordem cronológica de acontecimentos. Deve-se enfatizar que o grupo já atingiu o que se esperava de um grupo de alunos classificado como todos no nível 3.

4.1 A atividade proposta aos alunos

Inicialmente, foi esclarecido aos alunos que eles haviam sido selecionados por seu empenho e aptidão em matemática e perguntado se concordavam em realizar algumas das

atividades que compõe este trabalho. Foi exposto para o grupo o objeto da pesquisa e o que se esperava com estas atividades. Todos concordaram e ficaram animados com a possibilidade de participar deste momento de aprendizado e de contribuição para construção desta pesquisa. Houve apoio total da direção pedagógica do colégio envolvido, oferecendo espaço no contraturno para aplicação da atividade, assim como viabilizando junto aos responsáveis logísticas para que os alunos participassem da pesquisa. Contou-se também com o auxílio e a gentileza de outros colegas de trabalho, liberando os alunos de outras atividades realizadas no contraturno.

A aplicação do nível 4 ocorreu conforme a sequência de etapas do nível 4 já descritas anteriormente.

- N4F1C1 – Investigação

O grupo foi informado sobre o conteúdo que seria abordado naquele momento, a análise de sequências convergentes.

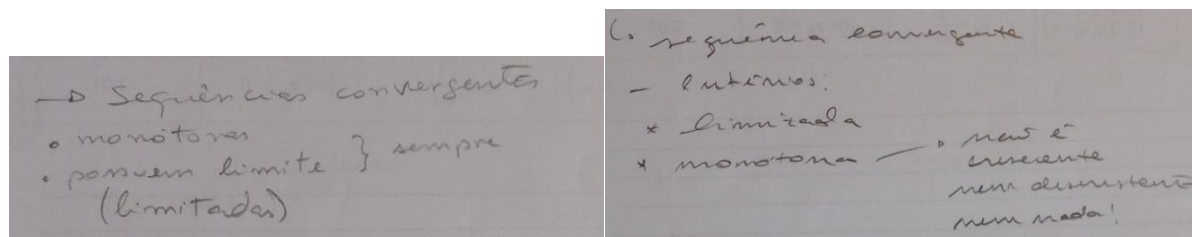
Em conversa, o assunto do limite da soma de infinitos termos de uma PG foi retomado (como o grupo é formado por alunos do 2º ano do Ensino Médio, o assunto PG já tinha sido visto por eles na série anterior) e o grupo foi lembrando que só é possível fazer essa soma, mesmo sem que se conheçam todos os termos, apenas em condições especiais, condições que permitem classificar essas PGs em PGs convergentes.

Foi dito, também, que o foco da investigação deste trabalho é analisar mais detalhadamente que condições são necessárias para que uma sequência seja convergente. Pois, assim como há PGs que atendem algumas condições, outras sequências também atendem tais condições, sendo classificadas por sequências convergentes, ou seja, à medida que n aumenta, a_n fica cada vez mais próximo de um valor conhecido.

Durante a conversa surgiu uma indagação do grupo: “Que condições são estas?”. Então, mesmo sem ser parte desta etapa, foi esclarecido que as duas condições são a monotonicidade e a limitação. O primeiro conceito já era conhecido pelos alunos dos estudos de funções e sequências. A condição de existência de um limite causou bastante curiosidade.

As figuras a seguir mostram as anotações informais feitas pelos alunos CB e HV nesse momento de conversa.

Figura 9: N4F1C1 – Anotações feitas pelos alunos CB e HV.



Fonte: Dados da autora, 2017.

- N4F2A1 – 1ª Ficha de exercícios

Após a conversa sobre a investigação das condições para que uma sequência seja convergente (N4F1C1), foi apresentada uma atividade (N4F2A1) com duas questões para o grupo. Esta atividade tem como objetivo analisar a monotonicidade de algumas sequências para observação da primeira condição que garante a convergência de uma sequência. A figura a seguir apresenta o enunciado da questão 1 desta atividade.

Figura 10: N4F2A1 – Enunciado da questão 1

1. Classifique as sequências abaixo em crescentes(C), não-crescentes(NC), decrescente(D), não-decrescente (ND) ou nenhuma das anteriores (NDA)

a) () $(2, 4, 6, 8, \dots)$

f) () $(3, 9, 27, 81, \dots)$

b) () $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots)$

g) () $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots)$

c) () $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots)$

h) () $(-1, 1, -1, 1, \dots)$

d) () $(3, 3, 7, 7, 11, 11, 15, \dots)$

i) () $(20, 20, 20, 10, 10, 10, 5, \dots)$

e) () $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

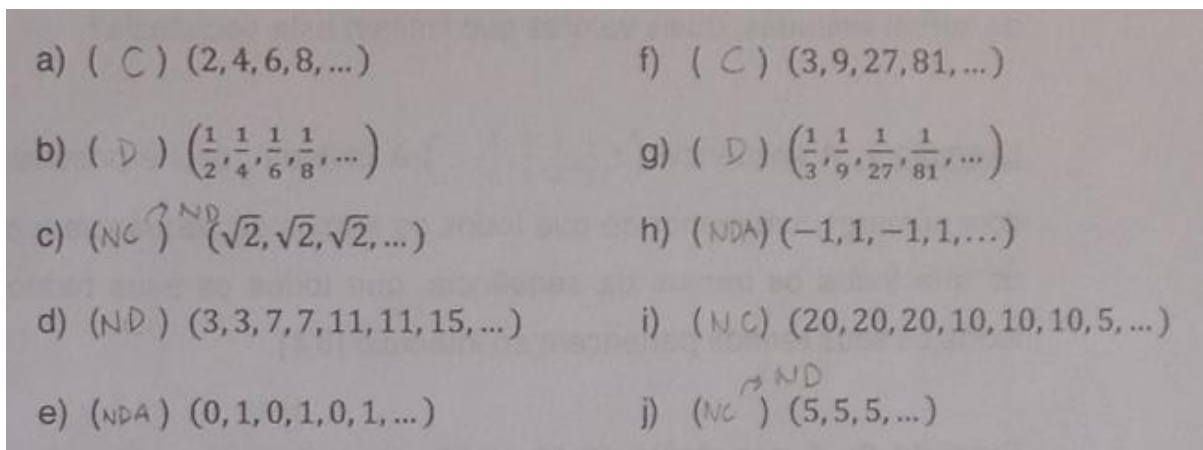
j) () $(5, 5, 5, \dots)$

Fonte: Dados da autora, 2017.

Esta lista de sequências foi elaborada para ter pelo menos uma sequência para cada uma das possíveis classificações (monótonas: crescentes, não-crescentes, decrescente, não-decrescente e não monótonas).

Todos classificaram corretamente todas as sequências. A seguir, a figura apresenta a solução do aluno AC.

Figura 11: N4F2A1 – Solução da questão 1 – aluno AC.



Fonte: Dados da autora, 2017.

Após a lista de seqüências para classificação, há uma pergunta que tem como objetivo salientar o fato de que as seqüências que são classificadas, ao mesmo tempo, em não-crescentes e em não-decrescentes, são ditas constantes.

Figura 12: N4F2A1 – Enunciado da questão 2.

2. Sequências que são classificadas, ao mesmo tempo, em não-crescentes e não-decrescentes são ditas constantes. Há alguma(s) seqüência(s) nessa condição? Se sim, qual(is)?

Fonte: Dados da autora, 2017.

Todos chegaram a mesma conclusão. Alguns responderam apenas o que foi perguntado, assim como a solução apresentada pelo aluno AC na figura a seguir.

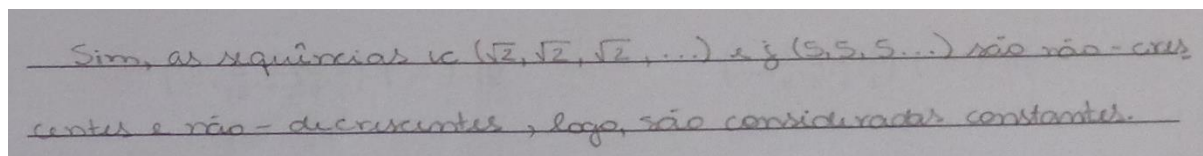
Figura 13: N4F2A1 – Solução da questão 2 – aluno AC.

Sim, as seqüências constantes c ($\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots$) e j (5, 5, 5, ...)

Fonte: Dados da autora, 2017.

Outros alunos preocuparam-se em justificar a escolha, assim como fez o aluno CB na figura a seguir.

Figura 14: N4F2A1 – Solução da questão 2 – aluno JL.



Sim, as sequências $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots)$ e $(5, 5, 5, \dots)$ são não-crescentes e não-decrescentes, logo, são consideradas constantes.

Fonte: Dados da autora, 2017.

Esta atividade foi realizada com rapidez e sem dúvidas por parte dos alunos. Acredita-se que a conversa inicial sobre o assunto tenha proporcionado ao grupo ferramentas para que desenvolvessem bem os exercícios propostos.

- N4F2A2 – 2ª Ficha de exercícios

Ao término da atividade da classificação das sequências segundo sua monotonicidade (N4F2A1), foi proposta uma atividade com uma questão (N4F2A2), com o objetivo de introduzir o conceito de limite, analisando se existem e quais são os valores que limitam uma sequência numérica.

Conforme a figura a seguir, após um exemplo de uma sequência limitada com um intervalo que limita seus termos e outra ilimitada, é pedido que os alunos classifiquem uma lista de sequências em limitada ou ilimitada e, no caso de limitadas, digam que valores limitam essa sequência.

Figura 15: N4F2A2 – Enunciado da questão 1.

1. Classifique as seqüências abaixo em limitadas (L) ou ilimitadas (I). No caso de serem limitadas, quais valores que limitam esta seqüência?

Exemplo 1: A seqüência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$ é limitada, pois é possível encontrar dois números, um menor do que todos os termos da seqüência e outro maior do que todos os termos da seqüência, que todos os seus termos, ou seja todos os seus termos pertencem ao intervalo $[0,1]$.

Exemplo 2: A seqüência $(5, 10, 15, 20, \dots)$ é ilimitada, pois não existe um número que seja maior que todos os seus termos, embora esta seqüência possua um menor valor, o cinco!

- | | |
|--|--|
| a) () $(2, 4, 6, 8, \dots)$ | f) () $(3, 9, 27, 81, \dots)$ |
| b) () $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots)$ | g) () $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots)$ |
| c) () $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots)$ | h) () $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ |
| d) () $(3, 3, 7, 7, 11, 11, 15, \dots)$ | i) () $(20, 20, 20, 10, 10, 10, 5, \dots)$ |
| e) () $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ | j) () $(5, 5, 5, \dots)$ |

Fonte: Dados da autora, 2017.

As seqüências são as mesmas da atividade anterior para que seja possível comparar as respostas dessas duas atividades.

O grupo classificou com facilidade as seqüências em limitadas e ilimitadas. Quando foram determinar um intervalo que limitasse todos os termos no caso da seqüência ser limitada perceberam que os intervalos não eram únicos, que cada um podia escolher um intervalo que desejasse e ainda assim suas respostas estariam corretas. Acharam a situação divertida e começaram a variar propositalmente. A figura seguinte mostra as diferentes respostas de três alunos para o item c da questão 1. Note que um aluno usou o intervalo degenerado em um

ponto indicando oralmente que qualquer número real maior que $\sqrt{2}$ e qualquer número real menor que $\sqrt{2}$, resolvem a questão, bastando construir intervalos com tais números em seus extremos. Um dos alunos (terceira solução da figura a seguir) cometeu um erro em determinar um dos extremos do intervalo, isso ocorreu devido a um equívoco na aproximação para $\sqrt{2}$. Fato constatado e corrigido na etapa seguinte.

Figura 16: N4F2A2 – Soluções diferentes para o item c da questão 2 – alunos LS, CB e BB.

$$c) (L) (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots) [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$c) (L) (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots) [1, \sqrt{17}]$$

$$c) (L) (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots) [1, 1,2]$$

Fonte: Dados da autora, 2017.

- N4F3C2 – Correção e explicitação

A correção da atividade sobre monotonicidade (N4F2A1) ocorreu rapidamente. Quando comentaram suas respostas uns com os outros, observaram que podia haver duas respostas corretas (não-crescentes e não-decrescentes) e que isso ficava resolvido com a classificação constante.

A correção da atividade sobre sequências limitadas (N4F2A2) gerou mais discussão sobre as várias possibilidades de respostas de intervalos que limitam uma sequência. No decorrer da correção, eles perceberam que há um menor intervalo que contém todos os termos da sequência limitada e que esse “*deve ser o certo*”. Foi esclarecido que os outros não estão errados, mas o mais interessante é o menor deles. Perceberam também que um dos extremos desse menor intervalo é um termo da sequência e que o outro extremo é o limite da sequência, “*aonde os termos quase chegam*”. E, então surgiu a pergunta: “*Tem alguma maneira de calcular o limite?*”. Foi explicado ao grupo que apesar de existirem maneiras de calcular o limite de uma sequência, caso ele exista, isto não seria explorado neste trabalho, mas sim outro aspecto do conceito de limite.

Durante a correção das atividades, ficou claro que a variedade de respostas incomodou os alunos que, nesse nível de aprendizado, esperam que, em matemática, a resposta seja única. Essa busca pela exatidão os fez querer entender o conceito de limite de sequência e suas consequências.

- N4F4A3 – 3ª Ficha de exercícios

Esta atividade tem como objetivo encontrar a partir de que posição (n_0) os termos da sequência aproximam-se do limite, considerando o erro dado.

A atividade se inicia trazendo uma história contada pelo matemático inglês G. H. Hardy. Em sua história, Hardy relaciona um mocinho e um bandido, na busca pela prova de que o limite de uma sequência x_n é L . O mocinho quer provar que $\lim x_n = L$, o bandido quer tornar essa tarefa impossível. O bandido fornece os épsilon (ε) enquanto o mocinho trata de conseguir sempre encontrar uma solução para o épsilon dado pelo bandido, assim sendo, para cada $\varepsilon > 0$ proposto como desafio, o n_0 correspondente deveria ser encontrado de tal modo que todos os termos da sequência a partir deste n_0 estivessem garantidamente num intervalo em torno do que chamamos de limite. (isto é, n_0 tal que $n > n_0$ implique em $|x_n - L| < \varepsilon$).

Após essa história, segue um exemplo de como obter n_0 , dados o termo geral, o limite e o épsilon. Esse procedimento foi acompanhado passo a passo pelos alunos que entenderam bem o que foi feito. Inclusive observaram que a desigualdade que tem $n_0 < 0$ deve ser descartada porque n_0 é um número natural.

Figura 17: N4F4A3 – Exemplo de como obter n_0 , dados o termo geral, o limite e o épsilon.

Exemplo 1:

Sabendo que o limite da sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$, cujo termo geral é $x_n = \frac{1}{n}$ é 0, calcule a partir de que posição todos os termos de $x_n = \frac{1}{n}$ estão a menos de 0,01 de distância do limite.

$$\begin{aligned} |x_n - L| &< \varepsilon \\ \left| \frac{1}{n} - 0 \right| &< 0,01 \\ \left| \frac{1}{n} \right| &< 0,01 \\ \frac{1}{n} &< 0,01 \\ \frac{1}{n} &< \frac{1}{100} \\ n &> 100 \end{aligned}$$

Como n é natural (por isso descartamos a possibilidade de $n < -100$), temos que $n > 100$, logo $n_0 = 100$.

Fonte: Dados da autora, 2017.

O exemplo também traz a verificação de que o n_0 encontrado é válido, o gráfico com a distribuição dos termos da sequência em um sistema de eixos ortogonais e uma ilustração mostrando que os termos, a partir do n_0 , estão a uma distância menor do que ε do limite.

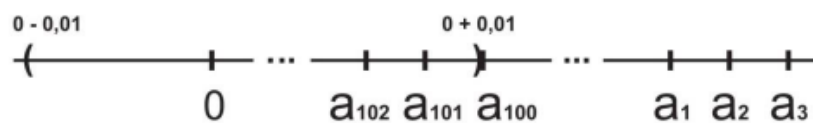
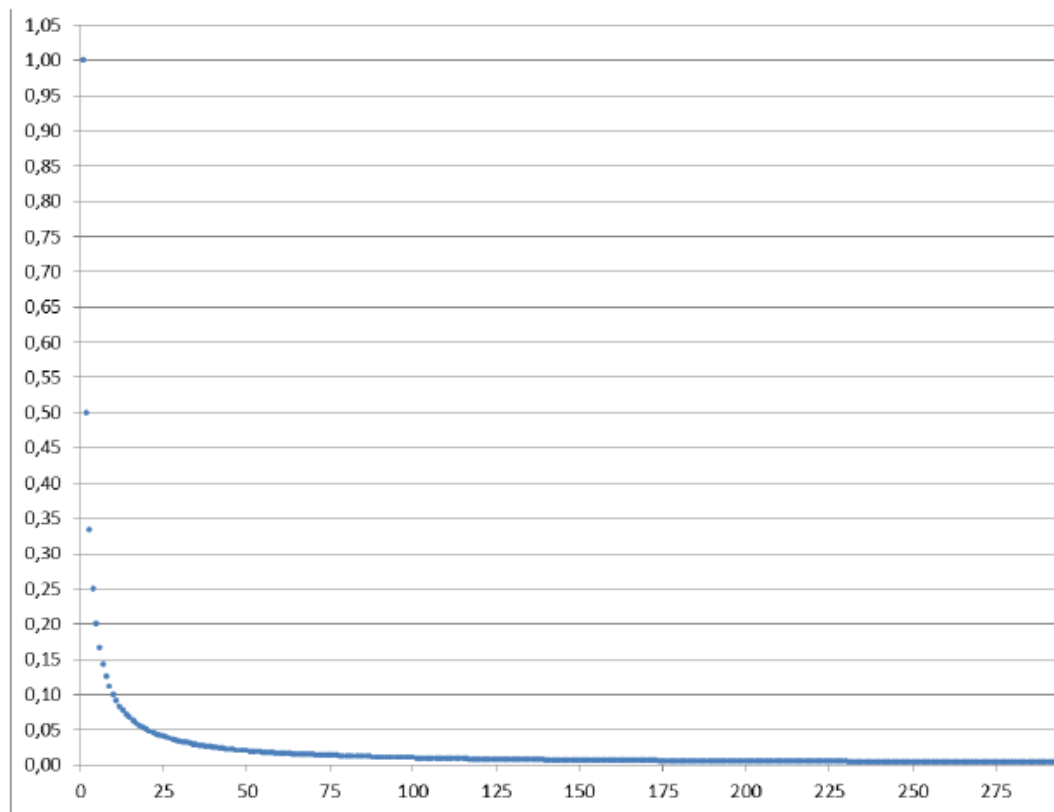
Figura 18: N4F4A3 – Verificação, gráfico e ilustração do exemplo.

De fato,

$$a_{101} = \frac{1}{101} \Rightarrow |a_{101} - L| = \left| \frac{1}{101} - 0 \right| = \frac{1}{101} < \frac{1}{100} = 0,01$$

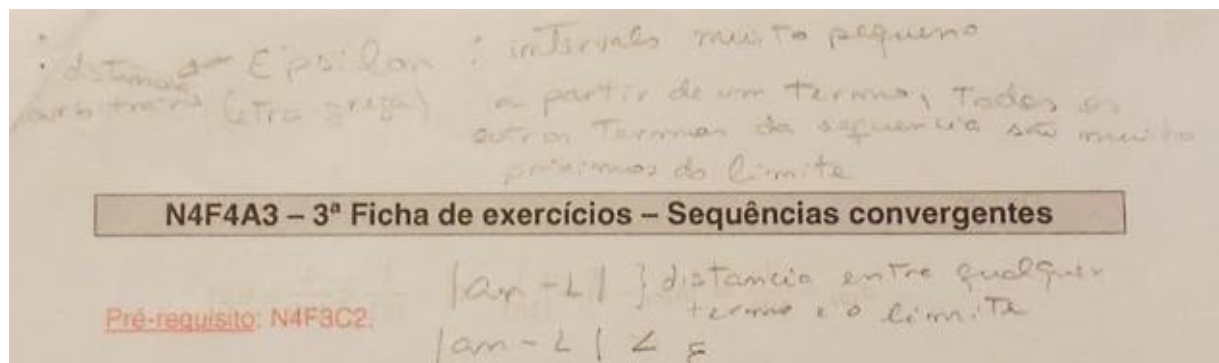
$$a_{102} = \frac{1}{102} \Rightarrow |a_{102} - L| = \left| \frac{1}{102} - 0 \right| = \frac{1}{102} < \frac{1}{100} = 0,01$$

...



A atividade no corpo do trabalho traz uma explicação sobre limites antes da história “mocinho x bandido” e um segundo exemplo nos mesmos moldes do descrito acima foi aplicado aos alunos. Desta vez a atividade foi aplicada oralmente, a explicação também foi feita oralmente e um terceiro exemplo não foi necessário, pois os alunos entenderam bem a proposta apenas com o exposto na atividade. Alguns fizeram anotações na atividade durante a explicação como mostra a figura a seguir.

Figura 19: N4F4A3 – Anotações informais feitas pelo aluno CB.



Fonte: Dados da autora, 2017.

Caso eles realmente precisassem de mais tempo ou de mais um exemplo, o quadro branco poderia ter sido usado para que todos pudessem acompanhar o desenvolvimento e o tempo de cada aluno seria obviamente respeitado.

Em seguida, foi proposto que os alunos fossem os mocinhos de Hardy e encontrassem a partir de que posição (n_0) os termos da sequência aproximam-se do limite, considerando o erro dado. A seguir, a figura mostra como os dados foram apresentados aos alunos.

Figura 20: N4F4A3 – Enunciado da questão 1.

Agora é a sua vez! Seja o mocinho e encontre o n_0 .

1. Encontre a partir de que posição (n_0) as sequências abaixo aproximam-se do limite considerando o erro dado.

| Sequência | Termo geral | Limite | Erro |
|--|----------------------|----------------|------|
| $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ | $x_n = \frac{1}{2n}$ | $\lim x_n = 0$ | 0,01 |

Fonte: Dados da autora, 2017.

Novamente, foi necessário omitir um item da atividade original para torná-la executável no tempo disponível, pois o mais importante era o professor avaliar como os alunos encaravam a tarefa e que tipo de argumentação surgia.

Todo o grupo chegou ao resultado esperado, mas algumas soluções evidenciam diferentes pontos de vista no que diz respeito ao que deve ser levado em conta na resolução do problema. Algumas dessas soluções seguem descritas nas figuras a seguir. Todas as respostas foram comentadas na sala e nenhum aluno saiu da atividade sem uma espécie de diagnóstico do seu trabalho.

A figura a seguir mostra a solução do aluno JL, onde ela enfatiza que deve escolher $n > 0$, pois n representa uma posição.

Figura 21: N4F4A3 – Solução da questão 1 pelo aluno JL.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2n} - 0 \right| < 0,01 \\ & -0,01 < \frac{1}{2n} < 0,01 \\ & -50 > n > 50 \\ & \text{como } n \text{ é uma posição,} \\ & n > 50 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da autora, 2017.

O aluno BB, além de resolver a questão proposta usando $\varepsilon = 0,01$, fez a questão usando $\varepsilon = 0,02$ com o objetivo de verificar como isso afetaria o resultado. A figura a seguir mostra essa situação.

Figura 22: N4F4A3 – Solução da questão 1 pelo aluno BB.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2n} - 0 \right| < 0,01 \\ & \frac{1}{2n} < \frac{1}{100} \\ & \frac{1}{2n} < \frac{1}{100} \\ & n < 50 \\ & n = 50 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & 0,02 \\ & \left| \frac{1}{2n} - 0 \right| < 0,02 \\ & -0,01 < \frac{1}{2n} < 0,02 \\ & \frac{1}{2n} < \frac{2}{100} \\ & 100 = 4n \\ & n = 25 \end{aligned} \right\}$$

Fonte: Dados da autora, 2017.

O aluno CB evidenciou que $n \in \mathbb{N}$, uma das desigualdades deve ser descartada e interpretou a resposta final, conforme a figura a seguir.

Figura 23: N4F4A3 – Solução da questão 1 pelo aluno CB.

Handwritten solution for Figure 23:

$$\left| \frac{1}{2n} - 0 \right| < \frac{1}{100}$$

$$-\frac{1}{100} < \frac{1}{2n} < \frac{1}{100} \rightarrow n \in \mathbb{N}, n \neq -1/100$$

$$2n > 100$$

$$n > 50 \quad n_0 = 50$$

A partir de 51, as diferenças entre cada termo e o limite são menores que 0,01

R. $n_0 = 50$
 \rightarrow A partir de 51 ...

Fonte: Dados da autora, 2017.

O aluno FK, além de encontrar n_0 , fez a verificação que para $n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$, como mostra a figura a seguir.

Figura 24: N4F4A3 – Solução da questão 1 pelo aluno FK.

Handwritten solution for Figure 24:

$$|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2n} - 0 \right| < 0,01 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2n} \right| < 0,01 \Leftrightarrow -0,01 < \frac{1}{2n} < 0,01$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{100} < \frac{1}{2n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow -100 > 2n > 100 \Leftrightarrow -50 > n > 50$$

$$n > 50$$

ou seja,

$$\left| \frac{1}{2 \cdot 51} \right| < 0,01 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{102} \right| < \frac{1}{100}$$

$$\left| \frac{1}{2 \cdot 60} \right| < 0,01 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{120} \right| < \frac{1}{100}$$

(da mesma forma que $\left| \frac{1}{2 \cdot 49} \right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{98} \right| < \frac{1}{100}$ está errado)

Fonte: Dados da autora, 2017.

Após cada aluno encontrar o n_0 nas condições dadas, é proposta uma reflexão. São dadas duas sequências limitadas, porém divergentes e foi pedido que os alunos explicassem por que isso acontece.

Em todas as respostas foi mencionado o fato das sequências não serem monótonas. Em algumas respostas isso foi justificado pelo fato delas serem “alternantes” ou “inconstantes”. Seguem algumas dessas soluções nas figuras abaixo.

Figura 25: N4F4A3 – Solução da questão 2 pelo aluno LS.

a) $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ Termo geral: $x_n = 0$, se n é par ou $x_n = 1$, se n é ímpar.
 A sequência não é monótona.

b) $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ Termo geral: $x_n = (-1)^n$.
 A sequência não é monótona.

Fonte: Dados da autora, 2017.

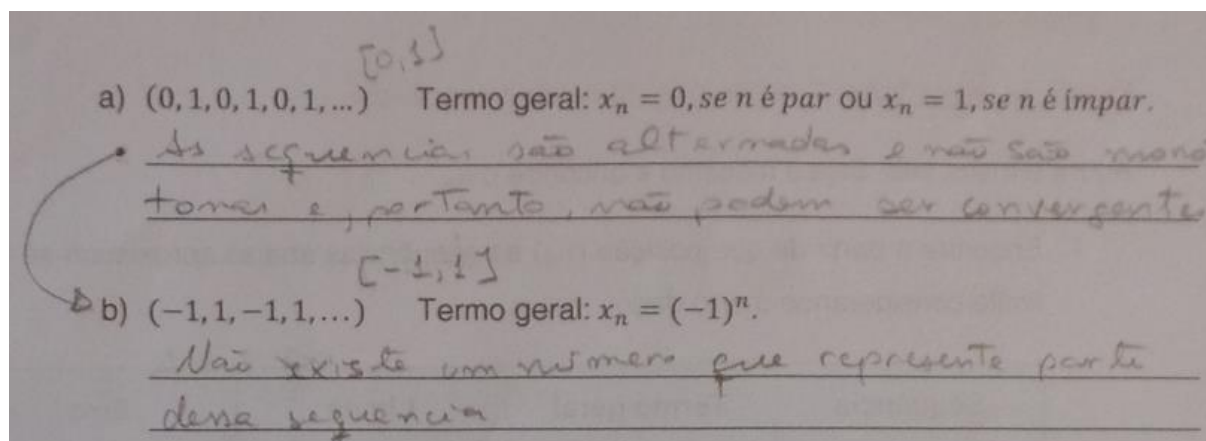
Figura 26: N4F4A3 – Solução da questão 2 pelo aluno FK.

a) $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ Termo geral: $x_n = 0$, se n é par ou $x_n = 1$, se n é ímpar.
 A sequência não é monótona, ou seja, ela varia de acordo, logo, não tem como ser convergente (já que para ser convergente, precisa ser monótona).

b) $(-1, 1, -1, 1, \dots)$ Termo geral: $x_n = (-1)^n$.
 A sequência tem comportamento inconstante, logo, não sendo monótona e nem convergente.

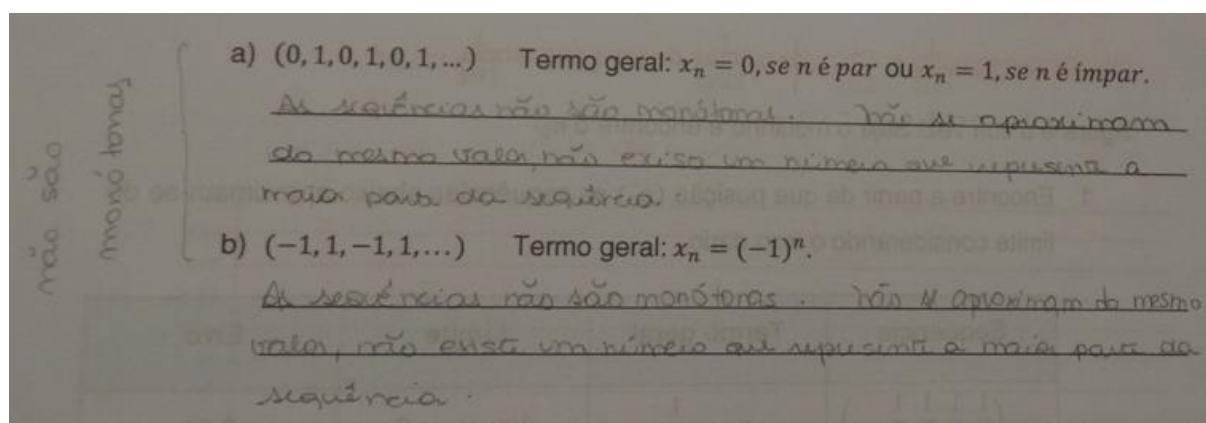
Fonte: Dados da autora, 2017.

Figura 27: N4F4A3 – Solução da questão 2 pelo aluno CB.



Fonte: Dados da autora, 2017.

Figura 28: N4F4A3 – Solução da questão 2 pelo aluno AC.



Fonte: Dados da autora, 2017.

Esta atividade foi a que mais envolveu os alunos em busca de solução e justificativa para as questões propostas.

- N4F5R1 – Resumo

Com o objetivo de resumir o conteúdo trabalhado nas atividades e formalizar as conversas entre os participantes da atividade, foi entregue aos alunos o resumo do conteúdo trabalhado de maneira a melhorar a compreensão do assunto.

Os alunos mostraram-se bastante animados por poder avançar em um conteúdo que normalmente não é lecionado no Ensino Médio, além de muito satisfeitos e contentes por poderem contribuir para a construção deste trabalho.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho consistiu na construção de um encadeamento didático baseado na teoria de van Hiele para o ensino-aprendizagem de sequências numéricas e culminou com a aplicação de um conjunto de atividades abordando o conceito formal de convergência de sequências.

A teoria de van Hiele foi formulada para o ensino de Geometria, neste trabalho ela foi adaptada para o ensino sequências numéricas, sendo respeitados seus níveis e fases. Segundo esta teoria, o aluno deve cumprir hierarquicamente cinco níveis para alcançar o nível mais avançado de compreensão e a passagem de cada um desses níveis é feita com o auxílio de cinco fases, que podem ocorrer simultaneamente ou diferentes ordens, conforme foi feito no desenvolvimento deste trabalho. Esse modelo foi escolhido por ser uma orientação bastante ampla para aprendizagem e avaliação das habilidades dos educandos.

O encadeamento didático construído foi formado por etapas que abordam desde a definição de sequências numéricas até as condições para a convergência. Estas etapas são compostas de exercícios e intervenções do professor e receberam um código de identificação que informa o nível, a fase e a natureza da tarefa. Além disso, todas as etapas têm as informações do pré-requisito, os objetivos específicos a serem alcançados e respostas esperadas.

As etapas baseadas na intervenção do professor motivaram uma ampliação da pesquisa da fundamentação teórica. O método clínico de Piaget foi escolhido para fundamentar e orientar as conversas entre professor e aluno, pois se trata de um modelo para investigação da inteligência e tem o objetivo de descrever as habilidades intelectuais do ser humano.

O conjunto de atividades que compõem o nível 4 foi aplicado a um grupo de alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola particular em Niterói, no estado do Rio de Janeiro. Os alunos que foram convidados a participar desta pesquisa encontravam-se no nível 3, requerido para a realização das atividades do nível 4.

Embora todos do grupo estivessem no mesmo nível, cada um tem sua própria maneira de construir o conhecimento, a presença lado a lado do aluno com o professor e a seleção de perguntas para aguçar a curiosidade destes alunos fizeram toda a diferença. Usar a conversa como etapa para auxiliar os alunos a alcançar níveis mais elevados de pensamento mostrou-se bastante eficiente. Essas conversas, baseadas no método clínico proposto por Piaget, entre professor e os alunos do grupo proporcionaram possibilidades de observações individuais que puderam ser colocadas e comentadas por todos.

Como reflexão pessoal, pode-se dizer que a aplicação das atividades foi um momento muito prazeroso. Poder participar do processo de aprendizado e observar a construção do pensamento sob diferentes pontos de vista foi, e sempre será, um privilégio.

REFERÊNCIAS

BAMPI, M. A. M. **O método clínico experimental de Jean Piaget como referência para o conhecimento do pensamento infantil na avaliação psicopedagógica.** Dissertação de Mestrado, Universidade do Sul de Santa Catarina, Florianópolis, 2006. Disponível em: <<https://pedagogiaaopedaletra.com/o-metodo-clinico-experimental-de-jean-piaget-como-referencia-para-o-conhecimento-do-pensamento-infantil-na-avaliacao-psicopedagogica/>> Acesso em: 07 jun. 2017.

DELVAL, J. **Introdução à prática do Método Clínico: descobrindo o pensamento das crianças.** Artmed, Porto Alegre, 2002.

FRAZÃO, D. **Jean Piaget: Psicólogo e pesquisador em pedagogia.** Disponível em: <https://www.ebiografia.com/jean_piaget/>. Acesso em: 07 jun 2017.

FUYS, D., GEDDES, M. & TISCHER, R. **English translations of selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele.** Brooklyn: Brooklyn Collage, School of Education, 1984.

GUTIÉRREZ, A., JAIME, A., **Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele.** En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), Teoría y práctica en educación matemática (Alfar: Sevilla, Spain), p. 339 (fragmentos). 1990. Disponível em www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf Acesso em: 04 dez 2017.

KALEFF, A. M. et.al. **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: o modelo de van Hiele.** Bolema, Rio Claro, 1994.

KOFFKA, K. **Princípios de psicologia da Gestalt.** São Paulo: Cultrix/Usp, 1975.

LIMA, E. L. **Curso de Análise - Vol.1.** Projeto Euclides. Editora IMPA, 2004.

PAIVA, M. R. **Matemática**, vol. 2, 3ª edição. Moderna, São Paulo, 2015.

PIAGET, J. **A equilibração das estruturas cognitivas.** Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

QUEIROZ, K. M. e LIMA, V. A. A. **Método Clínico piagetiano nos estudos sobre Psicologia Moral: o uso de dilemas.** Schème: Revista eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genética – V.3 N.5, 2010.

ROCHA, H. V. **Um Ambiente Computacional Para Avaliação Cognitiva em Portadores de Deficiência Física.** III Congresso Iberoamericano de Informática Educativa, Colômbia, 1996.

SANT'ANNA, N. F. P. **Aplicação da teoria de Van Hiele no acompanhamento da mudança curricular no ensino médio no Colégio Pedro II.** Dissertação de mestrado, PUC-Rio, 2001.

SIMONETTI, D. C. **Superdotação: Estudo comparativo da avaliação dos processos cognitivos através de testes psicológicos e indicadores neurofisiológicos.** Tese de Doutorado em Educação, Universidade do Minho. Braga, Portugal, 2008.

VAN HIELE, D. **The didactics of geometry in the lowest class of the secondary school.** Tese de Doutorado, Universidade de Utrecht, Holanda, 1957.

VAN HIELE, P. M. **La pensee de l'enfant et la Geometrie.** Bulletin de L'Association des Professeurs des Mathématiques de l'Enseignement Public, n° 198, 1959.

VAN HIELE, P. M. **Structure and insight: a theory of mathematics education.** Orlando, USA: Academic Press, 1986.

YATES, D. B. et al. **Apresentação da Escala de Inteligência Wechsler abreviada (WASI).** RESUMOS-XI SIMPÓSIO DA ANPEPP, Porto Alegre, 2006.

APÊNCIDE A: NIF1C1 – Investigação – Sequências: Conceitos iniciais**NIF1C1 – Investigação – Sequências: Conceitos iniciais**

Pré-requisito: nenhum.

Objetivo específico: informar sobre o conteúdo que será iniciado, sequências.

Conversa com os alunos: Você sabe dar alguns exemplos de sequências? Existem apenas sequências numéricas? Como você escolheu esse exemplo?

Comentário: caso o aluno não dê nenhum exemplo de sequência ou lista que ele acredite ser sequência, dê alguns exemplos como dias da semana, lista de compras, números pares, números sorteados para a loteria. O objetivo é que ele comece a pensar o que caracteriza uma sequência.

APÊNCIDE B: N1F2A1 – 1ª Ficha de Exercícios – Sequências: Conceitos iniciais**N1F2A1 – 1ª Ficha de Exercícios – Sequências: Conceitos iniciais**

Pré-requisito: N1F1C1.

Objetivo específico: reconhecer que algumas listas de elementos são ordenadas e outras não.

1. Quais das listas abaixo são sequências?
 - a) () (1, 2, 3, 4, 5, ...).
 - b) () (5, 4, 0, -1, 7, ...).
 - c) () (1, 1, 1, 1, ...).
 - d) () (2, 5, 8, 11, 15).
 - e) () (0, -2, 9, 45, 26, -2, ...).
 - f) () (-1, 1, -1, 1, ...).
 - g) () {1, 2}.
 - h) () {-1, 1}.
 - i) () lista de nomes dos alunos da turma 2A em ordem alfabética.
 - j) () lista dos planetas do sistema solar em ordem de distância do sol.

APÊNCIDE C: N1F3C2 – Correção e explicitação – Sequências: Conceitos iniciais**N1F3C2 – Correção e explicitação – Sequências: Conceitos iniciais**

Pré-requisito: N1F2A1.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações e, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: O que faz de uma lista de elementos uma sequência?

Comentário: Espera-se que o aluno perceba que cada elemento da sequência, ainda que a sequência seja formada apenas por números repetidos, ocupa uma determinada ordem na sequência, o que faz deles elementos diferentes.

Isto pode ser verificado perguntando ao aluno se os elementos da sequência (1, 1, 1, 1, 1) são todos iguais.

Espera-se que ele responda que não, pois ocupam posições diferentes. Ou que a justificativa seja: o primeiro 1 ocupa a primeira posição, o segundo 1 ocupa a segunda posição e assim sucessivamente, por ocuparem posições diferentes são diferentes.

APÊNCIDE D: N1F4A2 – 2ª Ficha de exercícios – Sequências: Conceitos iniciais**N1F4A2 – 2ª Ficha de exercícios – Sequências: Conceitos iniciais**

Pré-requisito: N1F3C2.

Objetivo específico: verificar se o aluno percebeu que os elementos relacionam-se com a posição que ocupam na sequência.

1. Analise as seguintes afirmativas e assinale V (verdadeiro) ou F(falso).
 - () Todos os elementos da sequência $(1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ são iguais porque têm o mesmo valor.
 - () Os elementos da sequência $(1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ são diferentes, pois ocupam posições diferentes.
 - () A lista $(3, 4, 5, 6, 7, \dots)$ não é uma sequência, pois não é possível relacionar seus elementos com a posição que ocupam.
 - () A lista $(-1, 6, 9, -3, \dots)$ não é uma sequência, pois não é possível relacionar seus elementos com a posição que ocupam.

APÊNCIDE E: N1F5R1 – Resumo – Sequências: Conceitos iniciais

N1F5R1 – Resumo – Sequências: Conceitos iniciais

Pré-requisito: N1F4A2

Objetivo específico: Resumir o conteúdo trabalhado nas atividades e conversas de maneira a melhorar a compreensão do assunto.

Comentário: considerando um currículo tradicional, os alunos nesta etapa do conteúdo já passaram pelo ensino de funções, portanto, espera-se que conheçam os conceitos que são pertinentes ao assunto.

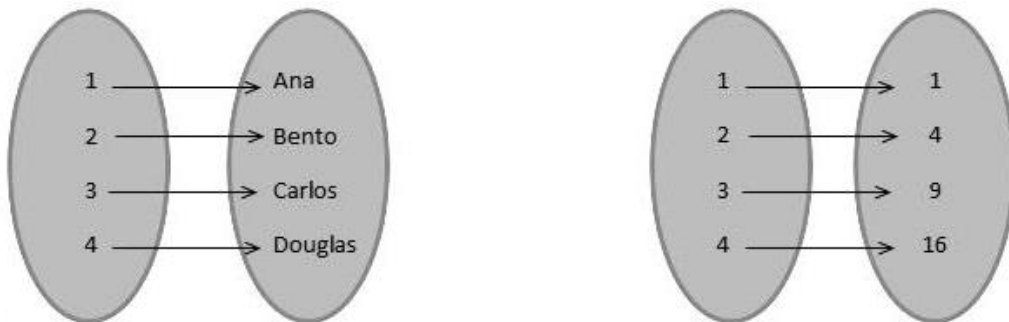
REGISTRANDO O QUE APRENDEMOS

Sequências são listas ordenadas de elementos, ou seja, cada um de seus elementos está relacionado com o conjunto dos números naturais de maneira única.

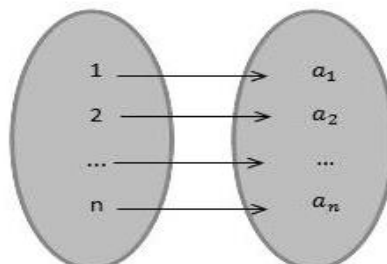
Sequência finita

Uma sequência finita é uma função f de domínio $A = \{1,2,3,\dots,n\}$ e contradomínio B , sendo $B = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ um conjunto qualquer não-vazio.

Exemplos:



De forma geral, temos



ou ainda, $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots, f(n) = a_n$. Em geral, o que se representa e é chamado de sequência numérica são os valores das imagens que esta função possui, para os valores naturais crescentes que compõem o domínio.

Sequência infinita

Uma sequência infinita é uma função f de domínio $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ e contradomínio $B = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$, sendo B um conjunto qualquer não-vazio.

Assim, $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, f(4) = a_4, \dots, f(n) = a_n, \dots$.

Cada elemento da sequência, também chamado de *termo da sequência*, ocupa uma determinada posição n e é representado por a_n .

Sequências têm seus termos escritos entre parênteses e separados por vírgulas.¹⁴

Exemplo: $(2, 4, 6, 8)$ é uma sequência finita, em que $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6$ e $a_4 = 8$.

¹⁴ Não é uma norma, mas usaremos essa notação por ser a mais encontrada nas principais bibliografias de livros do PNDL do MEC.

APÊNCIDE F: N2F1C1 – Investigação – Sequências: Lei de formação**N2F1C1 – Investigação – Sequências: Lei de formação**

Pré-requisito: N1F5R1

Objetivo específico: informar sobre o conteúdo que será iniciado, relação entre regras (fórmulas) e sequências.

Conversa com os alunos: Veremos agora que existe uma regra (fórmula) para determinar cada elemento da sequência. Vamos examinar alguns exemplos e ver se é possível descobrir essa regra.

APÊNCIDE G: N2F2A1 – 1ª Ficha de exercícios – Sequências: Lei de formação

N2F2A1 – 1ª Ficha de exercícios – Sequências: Lei de formação

Pré-requisito: N2F1C1

Objetivo específico: reconhecer que há uma regra (lei de formação) que determina os elementos da sequência.

1. Complete as sequências com os próximos três termos e descreva como foram formadas.
 - a) $(3, 5, 7, 9, _, _, _)$.
 - b) $(3, 10, 17, _, _, _)$.
 - c) $(2, 4, 8, _, _, _)$.
 - d) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, _, _, _)$.
 - e) $(1, 4, 9, 16, _, _, _)$.
 - f) $(5, -5, 5, -5, _, _, _)$.

2. Escreva os cinco primeiros termos das sequências determinadas em função da posição do termo.
 - a) $a_n = 7.$ $(_, _, _, _, _)$
 - b) $a_n = n^2.$ $(_, _, _, _, _)$
 - c) $a_n = 5n.$ $(_, _, _, _, _)$
 - d) $a_n = n + 3.$ $(_, _, _, _, _)$
 - e) $a_n = 2^n.$ $(_, _, _, _, _)$
 - f) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$ $(_, _, _, _, _)$

APÊNCIDE H: N2F3C2 – Correção e explicitação – Sequências: Lei de formação**N2F3C2 – Correção e explicitação – Sequências: Lei de formação**

Pré-requisito: N1F2A1.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações e, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: A regra que permite determinar cada termo da sequência é chamada *lei de formação*. Vamos analisar alguns casos na atividade a seguir.

APÊNDICE I: N2F4A2 – 2ª Ficha de exercícios – Sequências: Lei de formação

N2F4A2 – 2ª Ficha de exercícios – Sequências: Lei de formação

Pré-requisito: N2F3C2

Objetivo específico: relacionar sequências com suas leis de formação.

1. Associe cada sequência a sua lei de formação.

(A) (3, 5, 7, 9).

() $a_n = 5$.

(B) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$.

() $a_n = 2n + 1$.

(C) (5, 5, 5, 5).

() $a_n = 2^n$.

(D) (2, 4, 8, 16).

() $a_n = \frac{1}{n}$.

2. As sequências abaixo foram formadas de duas maneiras diferentes. Classifique-as em dois grupos (A e B).

(2, 4, 6, 8, 10)

(2, 4, 8, 16, 32)

(20, 15, 10, 5, 0)

()

()

()

(-1, 5, -25, 125, -625)

(1, 3, 9, 27, 81)

(-3, -4, -5, -6, -7)

()

()

()

3. Qual a principal característica de cada grupo?

APÊNCIDE J: N2F5R1 – Resumo – Sequências: Lei de formação

N2F5R1 – Resumo – Sequências: Lei de formação

Pré-requisito: N1F4A2

Objetivo específico: Resumir o conteúdo trabalhado nas atividades e conversas de maneira a melhorar a compreensão do assunto.

REGISTRANDO O QUE APRENDEMOS

Lei de formação de uma sequência

Um conjunto de informações que determina todos os termos da sequência e a ordem em que eles são apresentados é chamado lei de formação da sequência. (PAIVA, 2010, p.52)

Tipos de lei de formação

- Propriedade comum aos termos.

Uma propriedade p determina uma sequência se, e somente se, existir uma única sequência cujos termos satisfazem p .

Exemplos: nomes dos alunos da turma 2A em ordem alfabética, números primos.

- Recorrência

A sequência fica determinada em função de seu (s) antecessor (es).

Exemplo: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8$$

Resposta: $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ - sequência de Fibonacci

- Fórmula em função da posição.

Cada termo a_n fica determinado em função de sua posição n .

Exemplo: $a_n = n^2 + 1; 1 \leq n \leq 4$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1^2 + 1 = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^2 + 1 = 5$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^2 + 1 = 10$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 4^2 + 1 = 17$$

Resposta: (2, 5, 10, 17)

Agora, os estudos se concentram em **sequências numéricas** cuja lei de formação é dada em função da posição do termo.

APÊNCIDE K: N3F1C1 – Investigação – PA**N3F1C1 – Investigação – PA**

Pré-requisito: N2F5R1

Objetivo específico: informar sobre o conteúdo que será iniciado, PA e PG.

Conversa com os alunos: Agora, os estudos se concentrarão em função de duas sequências que receberão nomes especiais.

- a) *Progressão Aritmética (PA):* são sequências numéricas em que a partir do primeiro termo, os outros são obtidos sempre somando um mesmo valor x (positivo ou negativo) ao termo anterior. Este valor x é chamado razão da PA.
- b) *Progressão Geométrica (PG):* são sequências numéricas em que a partir do primeiro termo, os outros são obtidos sempre multiplicando um mesmo valor x (positivo ou negativo) pelo termo anterior. Este valor é chamado de razão da PG.

Comentário: Neste nível, o aluno já relaciona propriedades e regras previamente descobertas. Por exemplo, é capaz de reconhecer uma PA ou PG após saber como é formada cada uma delas.

Para essa fase, sugerimos que os exemplos sejam impressos e entregues ao aluno para que ele possa analisar mais cuidadosamente cada caso. Se isso não for possível, que as tabelas sejam escritas no quadro, mostrando a composição de cada valor que forma a sequência. É importante que o aluno visualize os números que formam as sequências que estão sendo analisadas.

Considere as seguintes situações:

1. Uma pessoa esqueceu-se de pagar uma conta de R\$ 100,00. Essa conta previa multa de R\$ 5,00 por cada dia de atraso por atraso.

| Número de dias em atraso | Valor a pagar |
|--------------------------|--|
| 0 | 100 |
| 1 | $100 + 5 = \mathbf{105}$ |
| 2 | $100 + 5 + 5 = 100 + 2 \cdot 5 = \mathbf{110}$ |
| 3 | $100 + 5 + 5 + 5 = 100 + 3 \cdot 5 = \mathbf{115}$ |
| 4 | $100 + 5 + 5 + 5 + 5 = 100 + 4 \cdot 5 = \mathbf{120}$ |
| ... | ... |
| n | $100 + 5 + \dots + 5 = \mathbf{100 + n \cdot 5}$ |

- a) Quanto essa pessoa pagará pela conta se atrasar 10 dias?
 b) E se atrasar 45 dias?
 c) A sequência formada pelos valores que a pessoa pagará de acordo com o número de dias em atraso é uma PA?
2. O valor a ser pago em uma corrida de taxi é de R\$3,50 a bandeirada com um acréscimo de R\$ 0,50 a cada quilômetro percorrido. Veja a tabela a seguir.

| Quilômetros percorridos | Valor a pagar |
|-------------------------|--|
| 0 | 3,50 |
| 1 | $3,50 + 0,50 = \mathbf{4,00}$ |
| 2 | $3,50 + 0,50 + 0,50 = 3,50 + 2 \cdot 0,50 = \mathbf{4,50}$ |
| 3 | $3,50 + 0,50 + 0,50 + 0,50 = 3,50 + 3 \cdot 0,50 = \mathbf{5,00}$ |
| 4 | $3,50 + 0,50 + 0,50 + 0,50 + 0,50 = 3,50 + 4 \cdot 0,50 = \mathbf{5,50}$ |
| ... | ... |
| n | $3,50 + 0,50 + \dots + 0,50 = \mathbf{3,50 + n \cdot 0,50}$ |

- a) Qual será o valor ser pago se o táxi percorrer 5 km?
 b) E se o táxi percorrer 50 km ?
 c) A sequência formada pelos valores a serem pagos de acordo com a quantidade de quilômetros rodados forma uma PA?

3. A tabela abaixo mostra a idade e a altura de uma criança.

| Idade | Altura |
|--------------|---------------|
| 1 ano | 73 cm |
| 2 anos | 86 cm |
| 3 anos | 95 cm |
| 4 anos | 102 cm |
| 5 anos | 108 cm |
| 6 anos | 113 cm |
| 7 anos | 119 cm |
| 8 anos | 125 cm |
| 9 anos | 131 cm |
| 10 anos | 137 cm |
| 11 anos | 143 cm |
| 12 anos | 148 cm |

- a) Qual será a altura dessa criança quando ela tiver 13 anos? E quando ela tiver 20 anos?
- b) A sequência formada pelas alturas da criança é uma PA?

APÊNCIDE L: N3F2A1 – 1ª Ficha de exercícios – PA

N3F2A1 – 1ª Ficha de exercícios – PA

Pré-requisito: N3F1C1.

Objetivos específicos: determinar a razão de uma PA, calcular seus elementos a partir dessa razão e classificar uma PA a partir da exibição de seus elementos.

- Complete as PA com três termos e descreva o que você fez.
 - $(5, 7, 9, _, _, _)$.
 - $(6, 10, 14, _, _, _)$.
 - $(-7, -4, -1, _, _, _)$.
 - $(20, -10, -40, _, _, _)$.
- Determine a razão e calcule o 10º termo de cada PA a seguir.
 - $(1, 5, \dots)$.
 - $(8, 14, \dots)$.
 - $(10, 5, \dots)$.
 - $(-2, -5, \dots)$.
- Classifique as PAs.

| PA | Finita (F) ou infinita (I) | Crescente (C), decrescente (D) ou constante (CT) |
|---------------------------|----------------------------|--|
| $(1, 2, 3, 4, \dots)$ | () | () |
| $(7, 5, 3, 1)$ | () | () |
| $(12, 15, 18, 20)$ | () | () |
| $(2, 2, 2, 2, \dots)$ | () | () |
| $(-3, -2, -1, 0)$ | () | () |
| $(20, 19, 18, 17, \dots)$ | () | () |
| $(-1, -1, -1, -1)$ | () | () |

APÊNCIDE M: N3F3C2 – Correção e explicitação – PA**N3F3C2 – Correção e explicitação – PA**

Pré-requisito: N3F2A1.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: Percebam que tendo um termo da PA (qualquer um) e conhecendo sua razão é possível determinar todos os termos da PA e saber se ela cresce, decresce ou permanece constante.

APÊNCIDE N: N3F4A2 – 2ª Ficha de exercícios – PA

N3F4A2 – 2ª Ficha de exercícios – PA

Pré-requisito: N3F3C2.

Objetivos específicos: escrever uma PA a partir de um elemento qualquer e de uma razão ou sua lei de formação, relacionar uma PA com sua lei de formação e escrever a lei de formação a partir da análise de uma PA.

1. Escreva uma PA de cinco termos que tenha
 - a) $a_1 = 3$ e $r = 5$.
 - b) $a_1 = 0$ e $r = -1$.
 - c) $a_2 = 5$ e $r = -2$.
 - d) $a_3 = 12$ e $r = 0$.
 - e) $a_5 = 5$ e $r = 1$.

2. Observe o exemplo e escreva uma PA de quatro termos de acordo com as leis de formação abaixo.

Exemplo: $a_n = 5n + 2$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 5.1 + 2 = 7$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 5.2 + 2 = 12$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 5.3 + 2 = 17$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 5.4 + 2 = 22$$

Resposta: (7, 12, 17, 22)

- a) $a_n = 2n + 2$.
- b) $a_n = 3n$.
- c) $a_n = n + 5$.
- d) $a_n = -2n + 1$.
- e) $a_n = 5 - n$.

3. Associe cada PA à sua lei de formação.

- | | |
|-------------------------------|----------------------|
| (A) $(2, 3, 4, 5, \dots)$. | () $a_n = 8n - 4$. |
| (B) $(4, 7, 10, 13, \dots)$. | () $a_n = n + 1$. |
| (C) $(2, 2, 2, 2, \dots)$. | () $a_n = 3n + 1$. |
| (D) $(4, 12, 20, 28)$. | () $a_n = 1 - 2n$. |
| (E) $(-1, -3, -5, -7, -9)$. | () $a_n = 2$. |

4. Determine a lei de formação de cada PA.

- a) $(2, 4, 6, 8, \dots)$.
- b) $(10, 15, 20, 25, \dots)$.
- c) $(3, 3, 3, 3, \dots)$.
- d) $(5, 4, 3, 2, 1)$.
- e) $(7, 4, 1, \dots)$.

APÊNCIDE O: N3F3C3 – Correção e explicitação – PA**N3F3C3 – Correção e explicitação – PA**

Pré-requisito: N3F4A2.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: Percebam que podemos conhecer uma PA sem ser preciso exibir todos os seus termos. Isso se faz conhecendo sua lei de formação, também chamada de termo geral.

APÊNCIDE P: N3F4A3 – 3ª Ficha de exercícios – Soma de PA

N3F4A3 – 3ª Ficha de exercícios – Soma de PA

Pré-requisito: N3F4A2.

Objetivos específicos: Perceber que a soma dos elementos equidistantes de uma PA é constante e que isso facilita os cálculos da soma dos n primeiros termos de uma PA.

Foi encontrada em livros e sites a seguinte história, que não se pode garantir a veracidade.

Um professor, para manter seus alunos ocupados, mandou que somassem todos os números de um a cem. Esperava que eles passassem bastante tempo executando a tarefa. Para sua surpresa, em poucos instantes um aluno de sete ou oito anos chamado Gauss¹⁵ deu a resposta correta: 5.050. Como ele fez a conta tão rápido? Gauss observou que se somasse o primeiro número com o último, $1 + 100$, obtinha 101. Se somasse o segundo com o penúltimo, $2 + 99$, também obtinha 101. Somando o terceiro número com o antepenúltimo, $3 + 98$, o resultado também era 101. Percebeu então que, na verdade, somar todos os números de 1 a 100 correspondia a somar 50 vezes o número 101, o que resulta em 5.050. E assim, ainda criança, Gauss inventou a fórmula da soma de progressões aritméticas.

A figura a seguir ilustra o procedimento elaborado por Gauss nesta história.

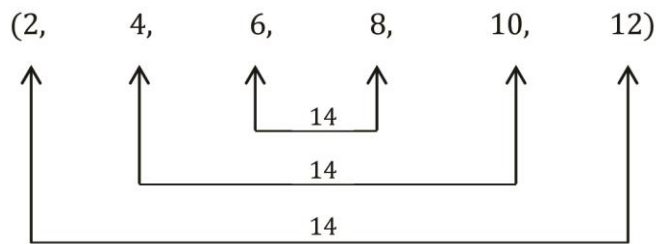
Figura 29: Procedimento para somar de 1 a 100.

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100} \\
 \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{4 + 97 = 101} \\ \hline \mathbf{3 + 98 = 101} \\ \hline \mathbf{2 + 99 = 101} \\ \hline \mathbf{1 + 100 = 101} \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

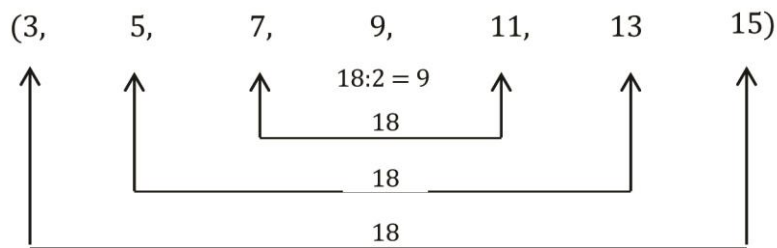
Fonte: A autora, 2017.

¹⁵ Gauss viveu entre 1777 e 1855 e foi sem dúvida um dos maiores matemáticos que já existiram. É por muitos considerado o maior gênio matemático de todos os tempos, razão pela qual também é conhecido como o Príncipe da Matemática.

Outros exemplos:



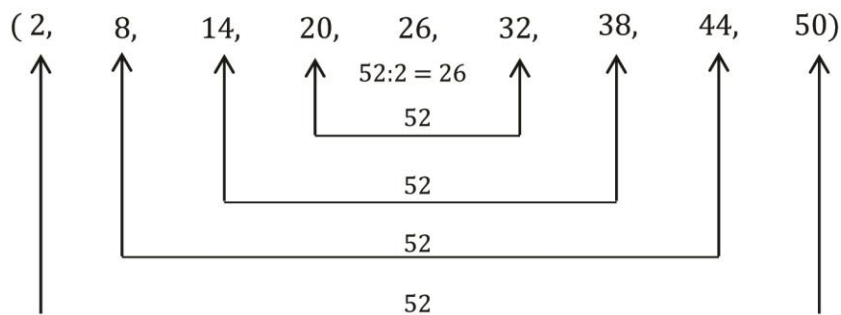
$$S_6 = 3 \cdot 14 = 42$$



$$S_7 = 3 \cdot 18 + 9 = 63$$

ou

$$S_7 = 3,5 \cdot 18 = 63$$



$$S_9 = 4 \cdot 52 + 26 = 234$$

ou

$$S_9 = 4,5 \cdot 52 = 234$$

1. Calcule a soma das seguintes PAs.

- (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).
- (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28).
- (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100)
- (41, 39, 37, 35, 33, 31, 29).
- (4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44).
- (3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43).

2. Agora, sem construir toda a sequência, calcule a soma de uma PA de
- a) 30 termos, onde $a_1 = 3$ e $r = 3$.
 - b) 100 termos, onde $a_1 = 1$ e $r = 5$.
 - c) 41 termos, onde $a_1 = 3$ e $r = 2$.
 - d) 101 termos, onde $a_1 = 1$ e $r = 3$.

APÊNCIDE Q: N3F5R1 – Resumo – PA

N3F5R1 – Resumo – PA

Pré-requisito: N3F4A3.

Objetivo específico: Resumir o conteúdo trabalhado nas atividades e conversas de maneira melhorar a compreensão do assunto.

REGISTRANDO O QUE APRENDEMOS

Progressão aritmética (PA) é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é formado pela soma do termo antecessor e uma constante r . O número r é chamado razão da PA.

Exemplo: (6, 8, 10, 12, 14) é uma PA finita de razão 3.

De modo geral, em uma PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ temos

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$$

...

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r, \text{ onde } \begin{cases} a_1 \text{ é o primeiro termo da PA} \\ a_n \text{ é o último termo da PA} \\ n \text{ é o número de termo da PA} \end{cases}$$

Esta fórmula é chamada de *termo geral* da PA.

Note que ela pode ser adaptada para relacionar quaisquer dois termos da PA. Por exemplo,

- $a_9 = a_5 + 4r$, pois do 5º termo (a_5) até o 9º termo (a_9) devemos avançar 4 posições (+4r)
- $a_{10} = a_{15} - 5r$, pois do 15º termo (a_{15}) até o 10º termo (a_{10}) devemos retroceder 5 posições (-5r)

Classificação das PAs

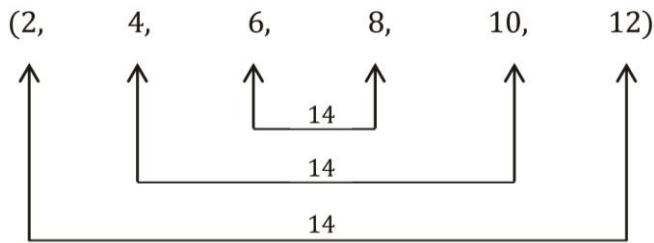
| | |
|-------------|---------------------------|
| Crescente | $r > 0$ e $a_{n+1} > a_n$ |
| Decrescente | $r < 0$ e $a_{n+1} < a_n$ |
| Constante | $r = 0$ e $a_{n+1} = a_n$ |

Soma dos termos de uma PA finita

Só é possível determinar a soma de PAs finitas, pois no caso das PAs infinitas a soma tende ao infinito (positivo ou negativo).

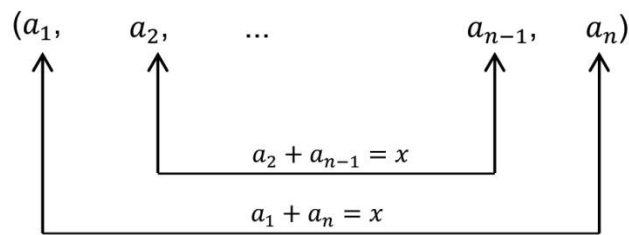
Note que, em uma PA, a soma dos termos equidistante é constante.

Por exemplo,



De forma geral, temos

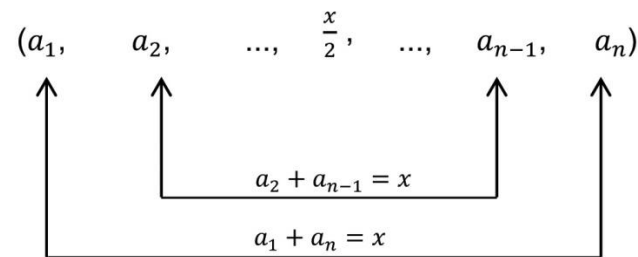
1º caso: quantidade par de termos.



$$S_n = x \cdot \frac{n}{2}, \text{ como } a_1 + a_n = x$$

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

2º caso: quantidade ímpar de termos.



$$S_n = x \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{x}{2}$$

$$S_n = x \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{x}{2}$$

$$S_n = x \cdot \frac{(n-1+1)}{2}$$

$$S_n = x \cdot \frac{n}{2}, \text{ como } a_1 + a_n = x$$

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

Desta forma, podemos somar os n primeiros termos de uma PA qualquer da seguinte maneira:

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}, \text{ onde } \begin{cases} a_1 \text{ é o primeiro termo da PA} \\ a_n \text{ é o último termo da PA} \\ n \text{ é o número de termo da PA} \end{cases}$$

APÊNCIDE R: N3F1C4 – Investigação – PG**N3F1C4 – Investigação – PG**

Pré-requisito: N2F5R1.

Objetivo específico: informar sobre o conteúdo que será iniciado, PA e PG.

Conversa com os alunos: Ainda focados nos estudos das sequências denominadas PA e PG, é importante lembrar o que caracteriza cada uma delas.

- a) *Progressão Aritmética (PA):* são sequências numéricas em que a partir do primeiro termo, os outros são obtidos sempre somando um mesmo valor x (positivo ou negativo) ao termo anterior. Este valor x é chamado razão da PA.
- b) *Progressão Geométrica (PG):* são sequências numéricas em que a partir do primeiro termo, os outros são obtidos sempre multiplicando um mesmo valor x (positivo ou negativo) pelo termo anterior. Este valor é chamado de razão da PG.

Comentário: Nessa Fase, o aluno já relaciona propriedade e regras previamente descobertas. Por exemplo, é capaz de reconhecer uma PA ou PG após saber como é formada cada uma delas.

Para essa fase, sugerimos que os exemplos sejam impressos e entregues ao aluno para que ele possa analisar mais cuidadosamente cada caso. Se isso não for possível, que as tabelas sejam escritas no quadro, mostrando a composição de cada valor que forma a sequência. É importante que o aluno visualize os números que formam as sequências que estão sendo analisadas.

Para estudar PG, usa-se calculadora, pois esse conteúdo frequentemente trabalha com números bastante elevados.

Considere a seguinte situação:

Uma pessoa compartilha um vídeo na internet com 5 pessoas em 10 minutos. Cada uma dessas pessoas compartilha esse mesmo vídeo com outras 5 pessoas e assim sucessivamente a cada 10 minutos.

1. Complete a tabela e responda.

| Momento (hora) | 12h | 12h10 | 12h20 | 12h30 | 12h40 | 12h50 | 13h |
|--|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| Compartilhamentos feitos no momento | 1 | 5 | 25 | 125 | | | |

- Quantos compartilhamentos foram feitos às 13h ?
- Quantos compartilhamentos foram feitos de 12h até às 13h?
- A sequência formada pelo número de compartilhamentos feito a cada 10 minutos é uma PG? Justifique.

APÊNCIDE S: N3F2A4 – 4ª Ficha de exercícios – PG

N3F2A4 – 4ª Ficha de exercícios – PG

Pré-requisito: N3F1C4.

Objetivos específicos: determinar a razão de uma PG, calcular seus elementos a partir dessa razão e classificar uma PG a partir da exibição de seus elementos.

1. Complete as PG com três termos e descreva o que você fez.
 - a) $(5, 25, 125, _, _, _)$.
 - b) $(6, 12, 24, _, _, _)$.
 - c) $(-2, -6, -18, _, _, _)$.
 - d) $(6, -6, 6, -6, _, _, _)$.
 - e) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, _, _, _)$.
2. Verifique se as sequências abaixo são PG e, em caso afirmativo, determine sua razão.
 - a) $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$.
 - b) $(-1, 3, -9, 27, \dots)$.
 - c) $(8, 4, 2, \frac{1}{2}, \dots)$.
 - d) $(\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots)$.
 - e) $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots)$.
 - f) $(4, 8, 12, 16, \dots)$.
 - g) $(3, 3, 3, 3, 3, \dots)$.
3. Sem calcular todos os termos, usando o botão x^y da calculadora, calcule o 15º termo de cada PG abaixo.
 - a) $(2, 4, 8, \dots)$.
 - b) $(-1, 3, -9, \dots)$.
 - c) $(5, 25, 125, \dots)$.
 - d) $(3, 6, 12, \dots)$.
 - e) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$.

4. Classifique

| PG | Finita (F) ou infinita (I) | Crescente (C), decrescente (D), constante (CT) ou oscilante (O) |
|------------------------|-----------------------------------|--|
| (20, 40, 80) | () | () |
| (5, -10, 20, -40, ...) | () | () |
| (-7, -14, -28, ...) | () | () |
| (-3, -3, -3, -3) | () | () |
| (-27, -9, -3, -1, ...) | () | () |
| (125, 25, 5) | () | () |
| (1, -1, 1, -1, ...) | () | () |

APÊNCIDE T: N3F3C5 – Correção e explicitação – PG**N3F3C5 – Correção e explicitação – PG**

Pré-requisito: N3F2A4.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações e, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: Percebam que tendo um termo da PG e conhecendo sua razão é possível determinar qualquer termo da PG e podemos classificá-la em crescente, decrescente, constante ou oscilante.

Todos os termos de uma PG podem ser calculados por uma fórmula, ela é chamada lei de formação, ou termo geral. Vejamos, a seguir, como podemos relacionar algumas PGs com essas fórmulas.

APÊNCIDE U: N3F4A5 – 5ª Ficha de exercícios –PG

N3F4A5 – 5ª Ficha de exercícios –PG

Pré-requisito: N3F3C5.

Objetivos específicos: escrever uma PG a partir de um elemento qualquer e de sua razão ou sua lei de formação, relacionar uma PG com sua lei de formação e escrever a lei de formação dada uma PG.

1. Escreva uma PG de quatro termos que tenha

- a) $a_1 = 1$ e $r = 7$.
- b) $a_1 = 1$ e $r = \frac{2}{5}$.
- c) $a_2 = 3$ e $r = 3$.
- d) $a_3 = 5$ e $r = 5$.
- e) $a_4 = 1$ e $r = \frac{1}{2}$.

2. Escreva uma PG de quatro termos de acordo com as fórmulas abaixo.

Exemplo: $a_n = 3 \cdot 2^n$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3 \cdot 2^3 = 24$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot 2^4 = 48$$

Resposta: (6, 12, 24, 48)

- a) $a_n = 5 \cdot 2^n$.
- b) $a_n = 3^{n-1}$.
- c) $a_n = 2^{n+1}$.
- d) $a_n = (-2)^n$.
- e) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- f) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

3. Associe cada PG à sua lei de formação.

(A) $(5, 25, 125, \dots)$.

() $a_n = 3 \cdot (-1)^n$.

(B) $(1, 2, 4, 8, \dots)$.

() $a_n = 5^n$.

(C) $(-3, 3, -3, 3, \dots)$.

() $a_n = 3^{-n}$.

(D) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots\right)$.

() $a_n = 2^{n-1}$.

4. Determine a lei de formação de cada PG.

a) $(2, 8, \dots)$.

b) $(3, 9, \dots)$.

c) $(3, 3, 3, \dots)$.

d) $(-5, 25, \dots)$.

e) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right)$.

f) $(-1, 1, -1, 1, \dots)$.

APÊNCIDE V: N3F3C6 – Correção e explicitação –PG**N3F3C6 – Correção e explicitação –PG**

Pré-requisito: N3F4A5.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações e, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: Pode-se conhecer uma PG sem ser preciso exibir todos os seus termos. Isso se faz conhecendo sua lei de formação, também chamada de termo geral.

APÊNCIDE W: N3F4A6 – 6ª Ficha de exercícios – PG: Soma de PG finita

N3F4A6 – 6ª Ficha de exercícios – PG: Soma de PG finita

Pré-requisito: N3F4C6.

Objetivos específicos: Demonstrar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG e fazer uso dela para facilitar os cálculos.

Retomando o problema inicial (N3F1C4 – Investigação sobre PG) tem-se que foram feitos 19.531 compartilhamentos em 1 hora. Esse total foi obtido pela soma $1 + 5 + 25 + 125 + 625 + 3125 + 15625 = 19531$.

Uma pessoa compartilha um vídeo na internet com 5 pessoas em 10 minutos. Cada uma dessas pessoas compartilha esse mesmo vídeo com outras 5 pessoas e assim sucessivamente a cada 10 minutos.

| Momento (hora) | 12h | 12h10 | 12h20 | 12h30 | 12h40 | 12h50 | 13h |
|--|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Compartilhamentos feitos no momento | 1 | 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | 15625 |

Quantos compartilhamentos foram feitos de 12h até às 13h ?

E se agora, ainda considerando que o número de compartilhamentos quintuplica a cada 10 minutos, quiséssemos saber o total de compartilhamentos feitos em 3 horas? Usando apenas a adição dos termos, o processo será muito longo.

Há uma maneira mais prática de somar os n primeiros termos de uma PG de razão $q \neq 1$.

Vamos acompanhar o seguinte raciocínio:

Considere S_n a soma de todos os termos de uma PG. Desta forma, temos (I)

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad \text{(I)}$$

Multiplicando a equação (I) por q e substituindo $a_1 \cdot q = a_2$, $a_2 \cdot q = a_3$, ..., $a_{n-1} \cdot q = a_n$, obtemos a equação (II).

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + \underbrace{a_2 \cdot q} + \underbrace{a_3 \cdot q} + \underbrace{\dots} + \underbrace{a_{n-1} \cdot q} + \underbrace{a_n \cdot q}$$

$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n \cdot q \quad \text{(II)}$$

Fazendo (I) – (II), obtemos a equação (III).

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q \quad \text{(III)}$$

Pondo S_n em evidência e substituindo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, obtemos a equação (IV).

$$S_n \cdot (1 - q) = a_1 - a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q \quad \text{(IV)}$$

Pondo a_1 em evidência, obtemos a equação (V).

$$S_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n) \quad \text{(V)}$$

Dividindo a equação por $(1 - q)$, obtemos a fórmula que nos dá a soma dos n primeiros termos de uma PG.

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{(1 - q)}$$

Agora, usando a fórmula, podemos calcular com mais facilidade quantos compartilhamentos foram feitos em 3h.

3h = 180 minutos = 18 períodos de 10 minutos (esse termo ocupa a 19ª posição da PG)

$$S_{19} = \frac{1(1 - 5^{19})}{(1 - 5)} = \frac{1 - 5^{19}}{-4} = 4.768.371.582.031$$

1. Agora é a sua vez! Calcule a soma dos 10 primeiros termos de cada PG abaixo.
 - a) (2, 8, ...).
 - b) (3, -9, ...).
 - c) (7, 14, ...).
 - d) (90, 30, ...).
 - e) $(1, \frac{1}{2}, \dots)$.

APÊNCIDE X: N3F3C7 – Correção e explicitação – PG: Soma de PG finita**N3F3C7 – Correção e explicitação – PG: Soma de PG finita**

Pré-requisito: N3F4A6.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações e, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: Podem-se somar os n primeiros termos de uma PG sem que para isso seja preciso conhecer todos eles. O uso da fórmula ajuda nesta tarefa.

APÊNCIDE Y: N3F4A7 – 7ª Ficha de exercícios – PG: Soma de PG infinita

N3F4A7 – 7ª Ficha de exercícios – PG: Soma de PG infinita

Pré-requisito: N3F3C7.

Objetivos específicos: Demonstrar a fórmula da soma de uma PG infinita e em que condição é possível fazer essa soma.

Agora, deve-se analisar a soma de PG infinitas.

Em alguns casos é possível somar uma quantidade infinita de termos. No caso da PG, as condições que nos permitem fazer esta soma são: a razão estar entre -1 e 1 ($-1 < q < 1$) e ser diferente de zero ($q \neq 0$).

Faça a seguinte experiência:

Divida sucessivamente 1 unidade na metade (pode ser uma folha de caderno, uma tira de papel, um pedaço de linha, ...) e organize essas partes uma ao lado da outra na ordem em que foram criadas. Essas partes representam uma PG de razão $\frac{1}{2}$.

Dependendo do que você usou como unidade, conseguirá mais ou menos pedaços que o colega. Para resolver essa diferença, vamos usar a imaginação (e a calculadora). Dessa forma, podemos dividir infinitamente e criar infinitos termos para a PG.

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$$

Conforme o número de termos fica muito grande, cada termo fica muito pequeno, pois à medida que n aumenta, q^n fica cada vez mais próximo de zero.

Esse tipo de sequência é chamada *convergente*. Nesse caso, é possível calcular a soma de seus termos, mesmo que sejam infinitos.

Intuitivamente, sabemos que é 1, pois somar todas as partes seria o equivalente a ter a unidade novamente. Agora, deve-se verificar algebricamente.

Considere a PG infinita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ de razão q , com $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$.

Calculando S_n para n suficientemente grande (tendendo ao infinito), tem-se

$$S_n = \frac{a_1(1 - \overset{0}{\widehat{q^n}})}{(1 - q)} = \frac{a_1}{1 - q} \quad 16$$

¹⁶ Usamos essa demonstração por ser mais intuitiva para um aluno do ensino médio.

Este valor é chamado *limite da soma de uma PG infinita*.

Usando a fórmula, pode-se verificar o limite da soma dos termos criados pelas divisões sucessivas.

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Não é possível calcular a soma dos termos de todas as PGs infinitas. Você sabe dizer o porquê?

1. Calcule o limite da soma em cada caso.
 - a) $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots\right)$.
 - b) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots\right)$.
 - c) $(0,3; 0,03; 0,003; \dots)$.
 - d) $\left(1, \frac{2}{5}, \frac{4}{25}, \dots\right)$.
2. Um motorista de caminhão avista repentinamente uma grande pedra no meio da estrada e aciona os freios a 100m de distância da pedra. Após a freada, o veículo percorre 20m no primeiro segundo e, por mais alguns instantes, percorre, em cada segundo, um quarto da distância que percorreu no segundo anterior. Haverá o choque entre o veículo e a pedra? Justifique. (PAIVA, 2010, p.58)

APÊNCIDE Z: N3F5R2 – Resumo – PG**N3F5R2 – Resumo – PG**

Pré-requisito: N3F4A7.

Objetivo específico: Resumir o conteúdo trabalhado nas atividades e conversas de maneira a melhorar a compreensão do assunto.

REGISTRANDO O QUE APRENDEMOS

Progressão geométrica (PG) é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é formado pelo produto do termo antecessor e uma constante q . O número q é chamado razão da PG.

Por exemplo: (1, 2, 4, 8, 16) é uma PG finita de razão 2.

De modo geral, em uma PG ($a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$) tem-se

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

...

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ onde } \begin{cases} a_1 \text{ é o primeiro termo da PG} \\ a_n \text{ é o último termo da PG} \\ n \text{ é o número de termo da PG} \end{cases}$$

Esta fórmula é chamada de *termo geral* da PG.

Note que ela pode ser adaptada para relacionar quaisquer dois termos da PG. Por exemplo,

- $a_9 = a_5 \cdot q^4$, pois do 5º termo (a_5) até o 9º termo (a_9) devemos avançar 4 posições ($+4q$).
- $a_{10} = a_{15} \cdot q^{-5}$ ou ainda $a_{10} = \frac{a_{15}}{q^5}$, pois do 15º termo (a_{15}) até o 10º termo (a_{10}) devemos retroceder 5 posições (q^{-5} ou $: q^5$).

Classificação das PGs

| | |
|-------------------------|--|
| Crescente | $a_{n+1} > a_n$ Caso $a_1 > 0, q > 1$ ou Caso $a_1 < 0, 0 < q < 1$ |
| Decrescente | $a_{n+1} < a_n$ Caso $a_1 > 0, 0 < q < 1$ ou Caso $a_1 < 0, q > 1$ |
| Constante | $a_{n+1} = a_n$ e $q = 1$ |
| Oscilante ou alternante | $q < 0$ |

Soma dos n primeiros termos de uma PG.

- Se $q \neq 1$, então $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)}$.
- Se $q = 1$, então $S_n = n \cdot a_1$.
- Se $q = 0$, então $S_n = a_1$.

Limite da soma dos termos de uma PG infinita de razão q , onde $-1 < q < 1$ e $q \neq 0$.

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

APÊNCIDE AA: N4F1C1 – Investigação – Sequências convergentes**N4F1C1 – Investigação – Sequências convergentes**

Pré-requisito: N3F5R2.

Objetivos específicos: informar sobre o conteúdo que será iniciado, análise de sequências convergentes.

Conversa com os alunos: Assim como as PGs que atendem algumas condições, outras sequências também são convergentes, ou seja, à medida que n aumenta, a_n fica cada vez mais próximo de um valor conhecido.

Agora, vamos analisar que condições são necessárias para que uma sequência seja convergente.

APÊNCIDE BB: N4F2A1 – 1ª Ficha de exercícios – Sequências convergentes

N4F2A1 – 1ª Ficha de exercícios – Sequências convergentes

Pré-requisito: N4F1C1.

Objetivos específicos: analisar a monotonicidade de algumas sequências como primeira condição para que uma sequência seja convergente.

1. Classifique as sequências abaixo em crescentes (C), não crescentes (NC), decrescente (D), não decrescente (ND) ou nenhuma das anteriores (NDA)

| | |
|--|--|
| a) () $(2, 4, 6, 8, \dots)$. | f) () $(3, 9, 27, 81, \dots)$. |
| b) () $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots)$. | g) () $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots)$. |
| c) () $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots)$. | h) () $(-1, 1, -1, 1, \dots)$. |
| d) () $(3, 3, 7, 7, 11, 11, 15, \dots)$. | i) () $(20, 20, 20, 10, 10, 10, 5, \dots)$. |
| e) () $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$. | j) () $(5, 5, 5, \dots)$. |

2. Sequências que são classificadas, ao mesmo tempo, em não-crescentes e não-decrescentes são ditas constantes. Há alguma(s) sequência(s) nessa condição? Se sim, qual (is)?

APÊNCIDE CC: N4F2A2 – 2ª Ficha de exercícios – Sequências convergentes

N4F2A2 – 2ª Ficha de exercícios – Sequências convergentes

Pré-requisito: N4F3C1.

Objetivos específicos: introduzir o conceito de sequências limitadas como segunda condição para que uma sequência seja convergente.

1. Observe os exemplos abaixo e classifique as sequências a seguir em limitadas (L) ou ilimitadas (I). No caso de serem limitadas, determine quais valores limitam esta sequência?

Exemplo 1: A sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$ é limitada, pois é possível encontrar dois números, um menor do que todos os termos da sequência e outro maior do que todos os termos da sequência, que todos os seus termos, ou seja todos os seus termos pertencem ao intervalo $[0,1]$. Neste caso dizemos que a sequência é limitada inferiormente e é limitada superiormente.

Exemplo 2: A sequência $(5, 10, 15, 20, \dots)$ é ilimitada, pois não existe um número que seja maior que todos os seus termos, embora esta sequência possua um menor valor, o cinco!. Neste caso podemos dizer que é limitada inferiormente (LI), mas não é limitada superiormente (LS).

- | | |
|---|---|
| a) () $(2, 4, 6, 8, \dots)$. | f) () $(3, 9, 27, 81, \dots)$. |
| b) () $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right)$. | g) () $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right)$. |
| c) () $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots)$. | h) () $(-1, 1, -1, 1, \dots)$. |
| d) () $(3, 3, 7, 7, 11, 11, 15, \dots)$. | i) () $(20, 20, 20, 10, 10, 10, 5, \dots)$. |
| e) () $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$. | j) () $(5, 5, 5, \dots)$. |

APÊNCIDE DD: N4F3C2 = Correção e explicitação – Sequências convergentes

N4F3C2 – Correção e explicitação – Sequências convergentes

Pré-requisito: N4F2A1 e N4F2A2.

Objetivos específicos: Permitir que o aluno expresse verbalmente suas observações e, a partir daí, verificar se o aluno alcançou o objetivo da fase anterior e auxiliar no refinamento do vocabulário do aluno.

Conversa com os alunos: Enfatizar que no caso das sequências limitadas é possível encontrar mais de um intervalo que limita todos os termos da sequência e que o desafio é encontrar o menor intervalo que contenha o conjunto dos termos.

APÊNCIDE EE: N4F4A3 – 3ª Ficha de exercícios – Sequências convergentes

N4F4A3 – 3ª Ficha de exercícios – Sequências convergentes

Pré-requisito: N4F3C2.

Objetivos específicos: encontrar a partir de que posição (n_0) os termos da sequência monótona e limitada aproximam-se do limite, considerando o erro dado.

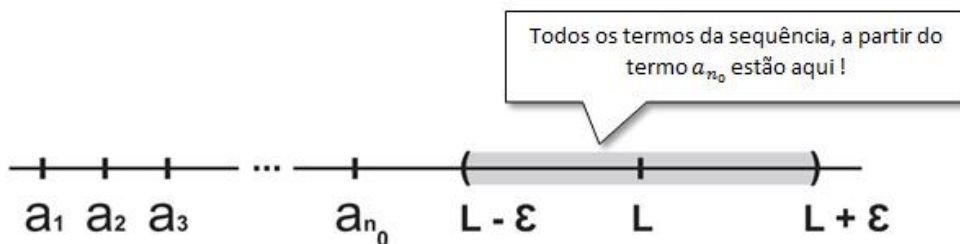
Acabamos de ver que sempre é possível determinar mais de um intervalo que contenha os termos de uma sequência limitada. Será possível determinar o menor intervalo que contenha essa sequência?

Um dos extremos do intervalo é simples de ser determinado, pois como estamos tratando de sequências, um dos extremos é conhecido.

O outro extremo do intervalo é um número real chamado *limite* da sequência ($\lim x_n = L$). Todos os termos da sequência, a partir de um determinado n , aproximam-se muito do limite, tornando a diferença entre cada termo e o limite tão pequena quanto se queira. Essa distância é chamada de ε .

Diz-se que o número real L é o limite da sequência (x_n) e escreve-se $\lim x_n = L$ quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, todos os termos da sequência estão entre $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$ a partir de um dado termo. Vejamos esta ideia apresentada na figura abaixo.

Figura 30: Sequência convergente



Fonte: A autora, 2017.

Como todos os termos da sequência estão entre $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$, pode-se escrever que $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$, ou seja, as distâncias entre os termos da sequência e L são sempre menores do que ε .

Você sabe como podemos escrever simbolicamente a afirmativa:

“As distâncias entre os termos da sequência e L são sempre menores do que ε ”?

Dica: Use módulo!

Uma das mais frequentes bibliografias em Análise é o livro *Curso de Análise - Vol.1*. Ele traz a história contada pelo matemático inglês G.H.Hardy, que ilustra, com uma trama de mocinho e bandido, a busca pela prova de que o limite de uma sequência x_n é L . O mocinho quer provar que $\lim x_n = L$, o bandido quer tornar essa tarefa impossível. O bandido fornece os épsilons (ε) enquanto o mocinho trata de conseguir, para cada $\varepsilon > 0$ proposto como desafio, o n_0 correspondente (isto é, n_0 tal que $n > n_0$ implique em $|x_n - L| < \varepsilon$).

O mocinho ganhará o jogo (e ficará portanto estabelecido que $\lim x_n = L$) se para qualquer $\varepsilon > 0$ estabelecido pelo seu adversário, ele for capaz de encontrar um n_0 conveniente (isto é, $n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$). Por outro lado, para que o bandido ganhe a parada, basta que ele consiga achar um numero real $\varepsilon > 0$ para o qual nenhum n_0 que o mocinho venha a tentar, sirva. (LIMA, 2004, p.108)

Exemplo 1:

Sabendo que o limite da sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$, cujo termo geral é $x_n = \frac{1}{n}$, é 0, calcule a partir de que posição todos os termos de $x_n = \frac{1}{n}$ estão a menos de 0,01 de distância do limite.

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 0,01$$

$$\left| \frac{1}{n} \right| < 0,01$$

$$-0,01 < \frac{1}{n} \text{ ou } \frac{1}{n} < 0,01$$

Resolvendo a primeira desigualdade, temos

$$-0,01 < \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{100} < \frac{1}{n}$$

$$-100 > n$$

Como n é natural, descartamos essa desigualdade.

Resolvendo a segunda desigualdade, temos

$$\frac{1}{n} < 0,01$$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$$

$$n > 100$$

logo $n_0 = 100$.

Ou seja, a partir de a_{101} , as diferenças entre cada termo e o limite são menores do que 0,01.

De fato,

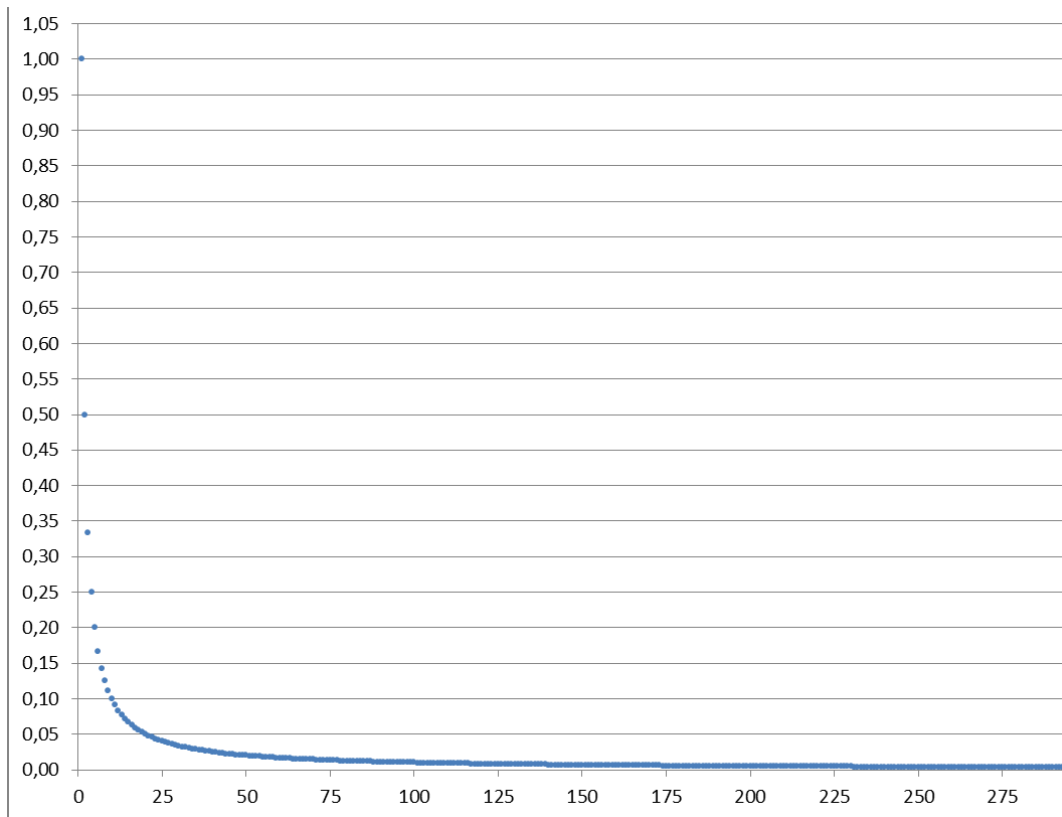
$$a_{101} = \frac{1}{101} \Rightarrow |a_{101} - L| = \left| \frac{1}{101} - 0 \right| = \frac{1}{101} < \frac{1}{100} = 0,01$$

$$a_{102} = \frac{1}{102} \Rightarrow |a_{102} - L| = \left| \frac{1}{102} - 0 \right| = \frac{1}{102} < \frac{1}{100} = 0,01$$

...

A seguir, temos o gráfico da função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ com $f(n) = \frac{1}{n}$, assim como o termo geral da sequência analisada no exemplo 1.

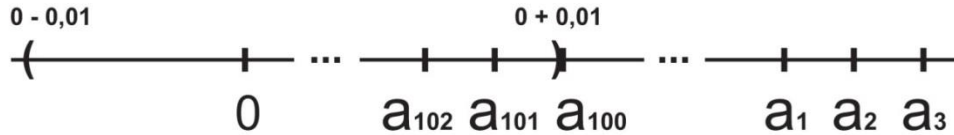
Figura 31: Gráfico da função $f(n) = \frac{1}{n}$.



Fonte: A autora, 2017.

A seguir, ilustração dos elementos da sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ convergindo para o limite com erro de menos de 0,01 a partir da posição a_{101} .

Figura 32: Convergência a partir da posição a_{101} .



Fonte: A autora, 2017.

Exemplo 2:

Sabendo que o limite da sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right)$, cujo termo geral é $x_n = \frac{n}{n+1}$, é 1, calcule a partir de que posição todos os termos de $x_n = \frac{n}{n+1}$ estão a menos de 0,02 de distância do limite; $n > 0$.

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < 0,02$$

$$-0,02 < \frac{n}{n+1} - 1 \quad \text{ou} \quad \frac{n}{n+1} - 1 < 0,02$$

Resolvendo a primeira desigualdade, temos

$$0,98 < \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{98}{100} < \frac{n}{n+1}$$

$$98n + 98 < 100n$$

$$n > 49 \text{ (I)}$$

Resolvendo a segunda desigualdade, temos

$$\frac{n}{n+1} < 1,02$$

$$\frac{n}{n+1} < \frac{102}{100}$$

$$100n < 102n + 102$$

$$-102 < 2n$$

$$-51 < n$$

Como n é um número natural, dessa desigualdade, tem-se que $n > 0$ (II).

Fazendo a interseção das desigualdades (I) e (II), tem-se que $n > 49$, logo $n_0 = 49$.

Ou seja, a partir de a_{50} , as diferenças entre cada termo e o limite são menores do que 0,02.

De fato,

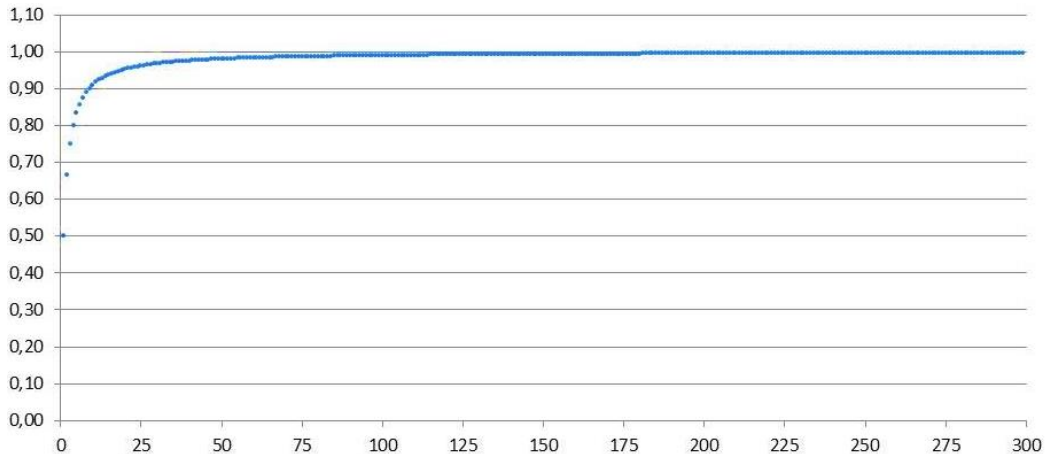
$$a_{50} = \frac{50}{51} \Rightarrow |a_{50} - L| = \left| \frac{50}{51} - 1 \right| = \frac{1}{51} < \frac{1}{50} = 0,02$$

$$a_{51} = \frac{51}{52} \Rightarrow |a_{51} - L| = \left| \frac{51}{52} - 1 \right| = \frac{1}{52} < \frac{1}{50} = 0,02$$

...

A seguir, temos o gráfico da função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ com $f(x) = \frac{x}{x+1}$, assim como o termo geral da sequência analisada no exemplo 2.

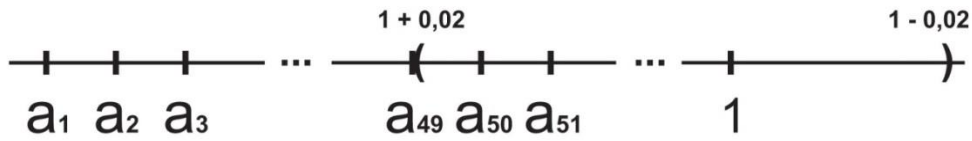
Figura 33: Gráfico da função $f(n) = \frac{n}{n+1}$



Fonte: A autora, 2017.

A seguir, ilustração dos elementos da sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right)$, convergindo para o limite com erro de menos de 0,02 a partir da posição a_{50} .

Figura 34: Convergência a partir da posição a_{50} .



Fonte: A autora, 2017.

Agora é a sua vez! Seja o mocinho e encontre o n_0 .

1. Encontre a partir de que posição (n_0) os termos das seqüências abaixo aproximam-se do limite, considerando o erro dado.

| Seqüência | Termo geral | Limite | Erro |
|---|-----------------------|----------------|-------|
| a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ | $x_n = \frac{1}{2n}$ | $\lim x_n = 0$ | 0,01 |
| b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right)$ | $x_n = \frac{1}{3^n}$ | $\lim x_n = 0$ | 0,001 |

2. Embora as seqüências a seguir sejam limitadas, elas não são convergentes. Explique com suas palavras por que isso acontece em cada um dos casos abaixo.

a) $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Termo geral: $x_n = 0$, se n é par ou $x_n = 1$, se n é ímpar.

b) $(-1, 1, -1, 1, \dots)$

Termo geral: $x_n = (-1)^n$.

APÊNCIDE FF: N4F5R1 – Resumo – Sequências convergentes

N4F5R1 – Resumo – Sequências convergentes

Pré-requisito: N4F4A3.

Objetivo específico: Resumir o conteúdo trabalhado nas atividades e conversas de maneira melhorar a compreensão do assunto.

REGISTRANDO O QUE APRENDEMOS

Definição 1: As sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes são chamadas *monótonas*.

| | |
|------------------------|--|
| Crescente | <p>Uma sequência (x_n) é monótona crescente, se $x_n < x_{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$. Exemplo: $(1, 3, 5, 7, \dots)$.</p> |
| Não-decrescente | <p>Uma sequência (x_n) é monótona não-decrescente, se $x_n \leq x_{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$. Exemplo: $(1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots)$.</p> |
| Decrescente | <p>Uma sequência (x_n) é monótona decrescente, se $x_n > x_{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$. Exemplo: $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$.</p> |
| Não-crescente | <p>Uma sequência (x_n) é monótona não-crescente, se $x_n \geq x_{n+1}$, para $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$. Exemplo: $(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots)$.</p> |
| Constante | <p>Uma sequência (x_n) é monótona constante, se $x_{n+1} - x_n = 0$, para $n \in \mathbb{N}$. Assim, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dots$. Exemplo: $(1, 1, 1, 1, \dots)$. * Sequências constantes são, ao mesmo tempo, não-decrescentes e não-crescentes.</p> |

Definição 2: Dizemos que uma (x_n) é *limitada* quando o conjunto de seus termos é limitado, isto é, quando existem números reais a e b tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto quer dizer que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[a, b]$. Quando uma sequência não é limitada, diz-se que ela é *ilimitada*.

Exemplo: A sequência (x_n) , tal que $x_n = \frac{1}{n}$.

$(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$ é limitada pelos valores 1 e 0, pois $0 < x_n \leq 1$ ou $x_n \in (0,1]$.

Definição 3: Diz-se que o número real L é *limite* da sequência (x_n) de números reais, e escreve-se $\lim x_n = L$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$.

Em linguagem simbólica

$$\lim x_n = L \text{ .} \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} ; n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

A seguir, uma tabela mostra o significado de cada símbolo usado.

Tabela 2: Definição de limite.

| Símbolo | Significado |
|---------------|---|
| . \equiv . | o que vem depois é definição do que vem antes |
| \forall | para todo |
| \exists | existe |
| ; | tal que |
| \Rightarrow | implica |

Fonte: A autora, 2017.

Definição 4: Quando $\lim x_n = a$, diz-se que a sequência (x_n) *converge* para a , ou *tende* para a e escreve-se $x_n \rightarrow a$. Uma sequência que possui limite é chama-se *convergente*. Caso contrário, *divergente*.

Teorema: Se (a_n) é uma sequência monótona e limitada então (a_n) é convergente.