COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Pedro Henrique Galhardo Rodrigues

UMA PONTE ENTRE O RACIOCÍNIO MECÂNICO DE ARQUIMEDES E AS SITUAÇÕES DIDÁTICAS DE GUY BROUSSEAU: Uma abordagem fomentadora do pensamento científico na escola básica

Rio de Janeiro
2017

Pedro Henrique Galhardo Rodrigues

UMA PONTE ENTRE O RACIOCÍNIO MECÂNICO DE ARQUIMEDES E AS SITUAÇÕES DIDÁTICAS DE GUY BROUSSEAU: Uma abordagem fomentadora do pensamento científico na escola básica

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador (a) Professor (a) Dr Daniel Felipe Neves Martins

Rio de Janeiro
2017

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

R696 Rodrigues, Pedro Henrique Galhardo

Uma ponte entre o raciocínio mecânico de Arquimedes e as situações didáticas de Guy Brousseau: uma abordagem fomentadora do pensamento científico na escola básica / Pedro Henrique Galhardo Rodrigues. – Rio de Janeiro, 2017.

90 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Daniel Felipe Neves Martins.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Arquimedes 287 a.C – 212 a.C. 3. Pensamento mecânico. 4. Situações didáticas. I. Martins, Daniel Felipe Neves. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves da Silva – CRB7 5696.

Pedro Henrique Galhardo Rodrigues

UMA PONTE ENTRE O RACIOCÍNIO MECÂNICO DE ARQUIMEDES E AS SITUAÇÕES DIDÁTICAS DE GUY BROUSSEAU: Uma abordagem fomentadora do pensamento científico na escola básica

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____
Prof. Dr. Sc. Daniel Felipe Neves Martins
PROFMAT- CPII

____
Profa. Dra. Sc. Teresa Cristina de Carvalho Piva
UVA

____
Profa. Dra. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa
PROFMAT-CPII

____
Prof. Dr. Sc. Jorge Fernando Silva de Araujo
CPII

Rio de Janeiro
2017

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por me dar a força e o objeto de estudo.

À minha esposa pelo apoio incondicional, principalmente na fase final de preparação deste trabalho e também a toda minha família, pela paciência com a minha ausência nesses últimos meses.

Ao professor Daniel Martins pelas aulas, orientações e pela amizade.

À professora Marilis Venceslau por me encantar mais ainda com a Geometria através de suas aulas e de seu amor pelo assunto.

À professora Patrícia Erthal, por abrir meus olhos para o belo universo da Álgebra Linear.

Aos colegas de turma pela amizade, ajuda e incentivo para seguir nessa jornada.

RESUMO

RODRIGUES, Pedro Henrique Galhardo. **Uma ponte entre o raciocínio mecânico de Arquimedes e as Situações Didáticas de Guy Brousseau:** Uma abordagem fomentadora do pensamento científico na escola básica. 2017. 90 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Rio de Janeiro, 2017.

Arquimedes sem dúvida foi uma das mentes mais brilhantes da história da humanidade. E o que ainda mais chamava atenção em seu trabalho foram suas técnicas e formas de conceber seus raciocínios frente aos desafios que se colocavam diante dele. O pensamento mecânico de Arquimedes resolveu muitas situações adversas em seu tempo; desde praticidades do dia-a-dia, como mover água entre desníveis, a aplicações bélicas e resoluções de problemas extremamente teóricos como os Problemas Clássicos da Antiguidade. Essa forma criativa e alternativa, conduzida pelo viés das Situações Didáticas de Guy Brousseau, é a proposta deste trabalho, com a implementação de atividades que fomentem nos alunos o lado criativo e inventivo, em busca de soluções e na descoberta de padrões matemáticos.

Palavras-chave: Arquimedes. Pensamento mecânico. Situações Didáticas. Guy Brousseau.

ABSTRACT

RODRIGUES, Pedro Henrique Galhardo. **Uma ponte entre o raciocínio mecânico de Arquimedes e as Situações Didáticas de Guy Brousseau:** Uma abordagem fomentadora do pensamento científico na escola básica. 2017. 90 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Rio de Janeiro, 2017.

Undoubtably Archimedes was one of the greatest names in mankind. His techniques and how he formalized his rationalization in the face of the challenges that were posed were drawing the attention of scholars. The mechanical thinking of Archimedes solved many situations, from day to day practices, such as moving water between gradients, bellicose applications and resolution of theoretical problems such as the Classical Greek problems of Antiquity. To show the creative and inventive thinking of Archimedes through the Pedagogical Situations of Guy Brousseau is the proposal of this work. It brings the implementation of activities that foster in students a creative and an inventive postures in search of solutions for the problems and in the discovery of mathematical patterns.

Keywords: Archimedes. Mechanical thinking. Pedagogical Situations. Guy Brousseau.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação é um trabalho de pesquisa inspirado nas aulas da disciplina Tópicos em História da Matemática onde Arquimedes e seu pensamento foram apresentados aos alunos, gerando nos mesmos grande encantamento. O tema central que motiva o trabalho é apresentar Arquimedes e seu método mecânico para alunos do Ensino Médio, através de uma teoria didática que valide esta apresentação e que permita que o aluno conjecture e construa conhecimento.

As atividades propostas não têm somente um caráter lúdico, acima de tudo possuem muito conhecimento envolvido como pano de fundo e a figura do professor como um mediador entre as cenas históricas e o conhecimento a ser explorado, exercendo o seu ofício durante o desenrolar de cada atividade.

No capítulo 2 encontra-se um breve histórico sobre Arquimedes, seus feitos e o desenvolvimento de seu pensamento científico, relacionado à física e a matemática.

No capítulo 3, procura-se relacionar a mecânica de Arquimedes e seu pensamento científico com a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, de maneira que essa sirva de material teórico para o desenvolvimento das ideias deste cientista para alunos do Ensino Médio. As sugestões de atividades presentes no capítulo foram todas pensadas para a realidade vivida pelo autor deste trabalho, ou seja, na rede de ensino público estadual do Rio de Janeiro.

O capítulo 4 traz uma análise dessas atividades, fichas de desenvolvimento das mesmas, e também orientações e sugestões para os professores de como utilizar tais atividades assim como seus desdobramentos conceituais. A sugestão é que o professor faça um portfólio das atividades para serem expostas em sala de aula e encorajar outros alunos a realizarem as mesmas.

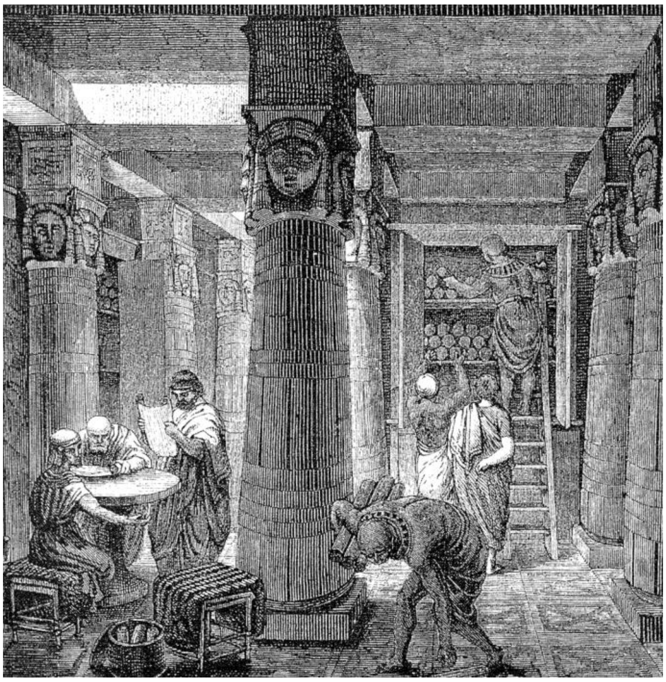
Nas Considerações Finais há uma breve análise sobre os ganhos e a aquisição inegável do conhecimento por parte dos alunos que realizaram as tarefas propostas. Tais alunos passaram ser mais seguros ao se depararem com uma questão, um problema ou mesmo um desafio matemático a eles apresentados.

2 PARA ALÉM DA RÉGUA E DO COMPASSO

2.1 Engenheiro e Geômetra

Durante todo o Período Helenístico (IV a.C. – II a.C.), Alexandria permaneceu como o grande centro intelectual e cultural do mundo antigo, especialmente no campo das artes e da literatura. Entre os alexandrinos floresceram as mais significativas edificações culturais deste período como o Museu, que contava com um notável observatório além da famosa Biblioteca de Alexandria, que abrigava pelo menos 200.000 livros. A era helenística conheceu também o incrível progresso das ciências como a astronomia, medicina, geografia, física e matemática. Dessas duas últimas surgem dois personagens especiais, Euclides[1] e Arquimedes.

Figura 1 – A Grande Biblioteca de Alexandria



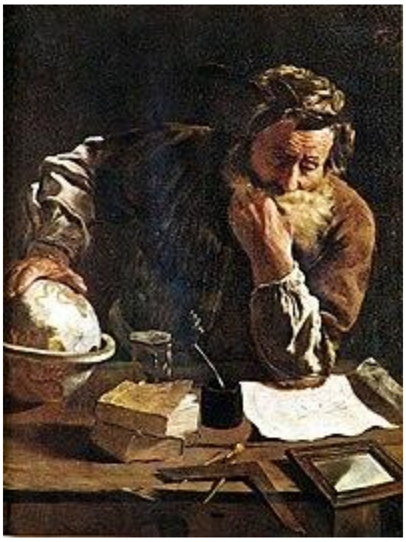
Fonte: CORVEN, séc. XIX

Curiosamente, um dos maiores matemáticos desse período não era de Alexandria. Arquimedes nasceu, viveu e morreu em Siracusa. Acredita-se que ele tenha estudado por

[1] Euclides de Alexandria (300 a.C.) foi um professor, matemático platônico e escritor, possivelmente grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria".

algum tempo em Alexandria e que mantinha algum contato com matemáticos de lá. Boyer (1974) afirma que o pouco que se sabe sobre a vida de Arquimedes foi retirado da narração de Plutarco, sobre a vida de Marcelo, o general romano. Conta-se nessa obra que durante as Guerras Púnicas, Siracusa sofreu um cerco romano que durou pouco mais de dois anos (214-212 A.C). A cidade resistiu aos ataques romanos graças aos engenhosos inventos de Arquimedes que mantinham distantes os barcos inimigos. Segundo Plutarco, a queda de Siracusa se deu por uma investida mais sutil das forças romanas. Alguns soldados teriam se infiltrado e possibilitado a entrada de seus compatriotas na até então protegida cidade de Siracusa. Arquimedes foi morto durante a investida, mesmo sob ordens de Marcelo para ele que fosse poupado. Vasconcellos (1925) conta a versão que um soldado impaciente, não esperou o velho geômetra terminar um problema e o traspassou com sua espada; contudo, o próprio autor afirma que é mais provável que Arquimedes foi morto por soldados que queriam saquear sua casa, durante a invasão a Siracusa.

Figura 2 – Arquimedes Pensativo



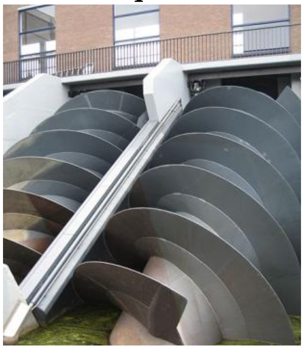
Fonte: FETTI, 1620

Concorda-se com Boyer (1974) quando diz que todas as narrações sobre Arquimedes discorrem que apesar de ser um habilidoso engenheiro e um criativo inventor, o matemático valorizava muito mais os produtos de seus pensamentos. Mesmo lidando com máquinas simples como alavancas, Arquimedes se mostrava muito mais interessados nos princípios gerais no que de fato em suas aplicações. Vasconcellos (1925, p. 327, grifo do autor) afirma que

> [...] a despeito do seu amor pelas especulações teóricas que Arquimedes, como verdadeiro mestre e eminente cientista, considerava a origem verdadeira, em última análise, de todos os progressos nas ciências aplicadas [...] foi autor de grande número de **invenções mecânicas**, e outras, de grande utilidade no campo prático, as quais fizeram com que seus contemporâneos admirassem nele o **engenheiro**, mais talvez do que o geômetra.

Garbi (2006) compara a grandeza de Arquimedes com a de Newton, destacando que ambos foram expoentes da matemática e da física, e que Arquimedes possuía excepcional habilidade na engenharia e na construção de sofisticados mecanismos. Dentre suas invenções, destacam-se o **Parafuso de Arquimedes**, que é utilizado até os dias de hoje, o sistema de roldanas com o qual foi possível deslocar objetos muito pesados, suas máquinas de guerras como espelhos côncavos, e também a simplória alavanca. Vasconcellos (1925) afirma que em uma ocasião em que o matemático conseguiu, auxiliado por suas invenções, lançar ao mar um navio de vultosas dimensões, e por isso receber felicitações do rei Hierão, Arquimedes teria exclamada a célebre frase: "**Dê-me uma alavanca e um ponto de apoio e levantarei o mundo**". (VASCONCELLOS, 1925, p. 328, grifo e tradução nossa).

Figura 3 – Parafuso de Arquimedes



Fonte: WIJNGAARDEN, 2006

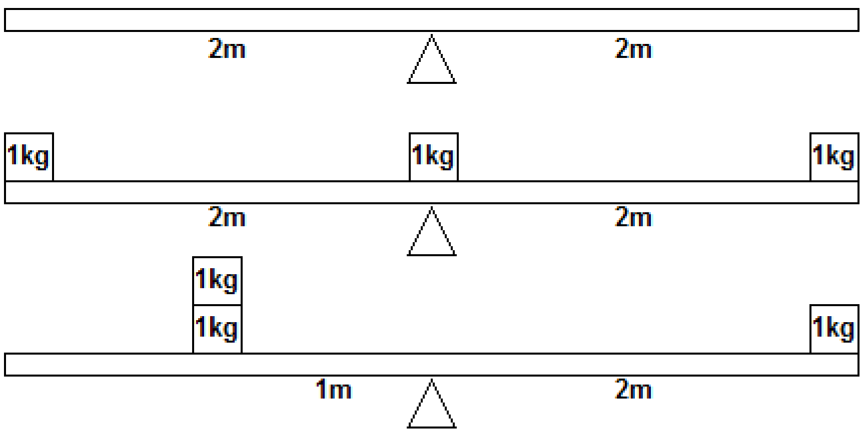
Figura 4 – Sistema de Roldanas

Fonte: eHow Brasil

Segundo Boyer (1974), Arquimedes não foi o primeiro a usar e estudar leis gerais associadas a alavancas. É possível encontrar na obra de Aristóteles (384-322 a.C.) que dois corpos se equilibram numa balança quando suas massas e distâncias até o ponto de apoio são inversamente proporcionais. Os seguidores de Aristóteles associavam essa proposição a uma suposta lei que dizia que o único movimento natural sobre a Terra era retilíneo vertical. Eles observavam os movimentos dos braços desiguais e concluíam quanto maior o raio do movimento circular, mais ele se aproximava do movimento retilíneo vertical. Arquimedes deduziu a lei por um argumento muito mais plausível, associando o equilíbrio de objetos à sua simetria.

Pode-se exemplificar facilmente o resultado encontrado por Arquimedes com uma barra de massa desprezível, com 4 m de comprimento apoiada em seu ponto médio e obviamente, em equilíbrio. São colocados nela três corpos com massa 1 kg, um em cada ponta e outro no ponto de apoio, o sistema continua em equilíbrio. Por fim, o corpo da ponta esquerda, juntamente com o corpo que estava no meio é colocado no ponto médio do braço esquerdo, exatamente a um metro do ponto de apoio (Figura 5). O equilíbrio do sistema se mantém. Através da generalização desse processo, Arquimedes obteve a lei da alavanca se baseando em princípios estáticos, deixando de lado a cinemática aristotélica.

Figura 5 - Alavanca



Fonte: O autor

Os trabalhos de Arquimedes sobre a lei da alavanca se encontram em seu livro ***Sobre o equilíbrio de planos***, composto por dois volumes. O primeiro volume consiste em figuras retilíneas e as propriedades de seus centros de gravidade enquanto que o segundo aborda os segmentos parabólicos e as áreas determinada pelos mesmos. Segundo Boyer (1974, p. 90), o livro dois contém o "[...] fato que o centro de gravidade de um segmento parabólico se encontra sobre o diâmetro do segmento e divide esse diâmetro em segmentos na razão 3 para 2."

Os escritos de Arquimedes até hoje impressionam pela clareza e organização de ideias. Eves (1995, p. 194) afirma que "[...] os trabalhos de Arquimedes são obras-primas de exposição matemática e lembram consideravelmente, artigos de revistas especializadas modernas". Garbi (2006, p. 66, grifo nosso) salienta que

> Surpreendem nele a capacidade de trabalho, a abrangência dos temas de seu interesse, a originalidade de suas ideias e **a profundidade**, a **clareza** e o **rigor de seus raciocínios**. Várias de suas obras chegaram até nós tais como foram escritas ou com pequenas distorções.

2.2 Eureka

Outra obra auspiciosa de Arquimedes foi ***Sobre corpos flutuantes***. Um tratado que também foi dividido em dois volumes, contém 90 proposições e desponta como a primeira aplicação matemática à hidrostática. Novamente, partindo de proposições simples, Arquimedes chega a resultados surpreendentes. Suas conclusões nesse trabalho até hoje compõem disciplinas dos cursos de Física. Segundo Eves (1995), esse tratado de Arquimedes se baseia em dois postulados simples que desenvolvem as leis da hidrostática, chegando a exemplos mais complexos como a posição de repouso e estabilidade de um segmento de paraboloide de revolução mergulhado em um fluído.

A descoberta do princípio da flutuação se dá em uma cena que talvez seja a mais conhecida da vida de Arquimedes. Vitrúvio (1960 apud ASSIS, 1996, p. 71, grifo nosso) afirma que

> Embora Arquimedes tenha descoberto muitas coisas curiosas que demonstram grande inteligência, aquela que vou mencionar é a mais extraordinária. Quando obteve o poder real em Siracusa, Hiero mandou, devido a afortunada mudança em sua situação, que uma coroa votiva de ouro fosse colocada em um certo templo para os deuses imortais, que fosse feita de grande valor, e designou para este fim um peso apropriado do metal para o fabricante. Este, em tempo devido apresentou o trabalho ao rei, lindamente forjado; e o peso parecia corresponder com aquele do ouro que havia sido designado para isto. Mas ao circular um rumor de que parte do ouro havia sido retirada, e que a quantidade que faltava havia sido completada com prata, Hiero ficou indignado com a fraude e, sem saber o método pelo qual o roubo poderia ser detectado, solicitou que Arquimedes desse sua atenção ao problema. Encarregado deste assunto, ele foi por acaso a um banho, e ao entrar na banheira percebeu que na mesma proporção em que seu corpo afundava, saía água do recipiente. De onde, compreendendo o método a ser adotado para a solução da proposição, ele o perseguiu persistentemente no mesmo instante, saiu alegre do banho e, retornando nu para casa, gritou em voz alta que havia encontrado o que estava procurando, pois continuou exclamando, em grego, ***εὕρηκα, εὕρηκα*, [eureka, eureka], (encontrei, encontrei).**

2.3 Logística e Aritmética

Os gregos faziam uma evidente distinção entre os cálculos do cotidiano e o estudo teórico das propriedades dos números. O primeiro era denominado Logística – basicamente com as quatro operações – enquanto que o segundo, com maior requinte era designado por

Aritmética. Segundo Boyer (1974), havia uma distribuição social das atividades matemáticas, sendo a computação rotineira relegada aos escravos. Em contrapartida às atribuições helênicas à logística, Arquimedes contribuiu muito para a mesma, provavelmente por ter vivido em um tempo de transição dos sistemas de numeração. Garbi (2006) afirma que Arquimedes na verdade cria um sistema de numeração para representar números muito grandes. Em uma de suas obras – ***Psammites*** (Computador de areia) – Arquimedes se gabava por poder escrever um número muito grande. Esse número seria a quantidade de grãos de areia suficientes para encher o Universo. (BOYER, 1974).

Com o intuito de realizar o que havia falado sobre números grandiosos, Arquimedes começou estimar as dimensões do Universo. O matemático lançou mão das previsões feitas por astrônomos de seu tempo, entre eles Aristarco (310-230 a.C.). Em um de seus trabalhos, que fora endereçado a Gelão, filho de Hierão, rei de Siracusa, Arquimedes adicionou valores de seguranças aos resultados de sua época e chegou ao resultado de que o diâmetro do Universo conhecido era de 10^{10} estádios. Seu trabalho agora era determinar quantos grãos de areia cabiam nesse tamanho. Mais uma vez por estimativas, Arquimedes (BOYER, 1974) determinou que

10.000 grãos de areia $\leq$ diâmetro da semente de Papoula

Diâmetro da semente de Papoula $\geq$ 1/40 da largura do dedo.

Um estádio $\leq$ largura de 10.000 dedos

Através dessas desigualdades, Arquimedes conclui que na esfera do Universo conhecido cabiam pelo menos 10^{63} grãos de areia.

2.4 Sobre as Medidas do Círculo

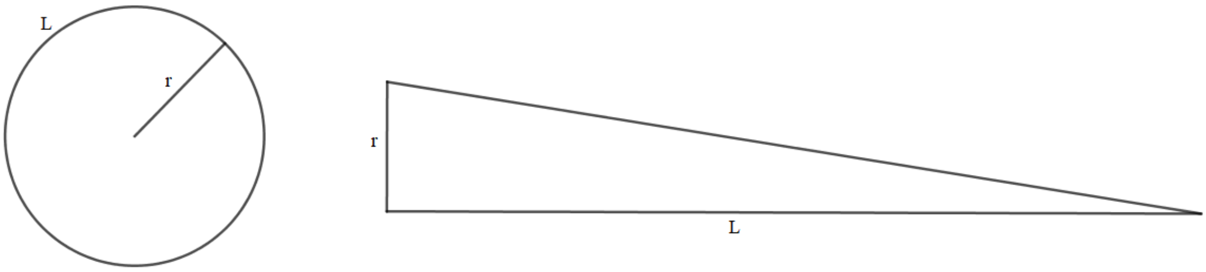
Em sua obra ***Sobre as medidas do círculo***, Arquimedes desenvolve um método para calcular um valor cada vez mais aproximado do perímetro do círculo. Essa técnica ficou conhecida como **Algoritmo de Arquimedes**[2]. O matemático trabalhava com desigualdades entre o perímetro do círculo e de polígonos inscritos e circunscritos.

> É interessante mencionar que neste ponto Arquimedes, em várias de suas demonstrações, usou a técnica de dupla redução ao absurdo [...] Sempre era muito difícil demonstrar diretamente que uma grandeza era igual a outra, ele supunha que ela era maior ou menor e, de tais suposições, deduzia dois absurdos. Não podendo ser nem maior nem menor, só poderia ser igual. (GARBI, 2006, p. 67).

[2] Anexo A

Arquimedes começou com um hexágono regular e depois foi dobrando o número de lados até chegar a um polígono com incríveis 96 lados. Ao observar a razão da circunferência e o diâmetro, ele chega a um valor aproximado que pertence ao intervalo entre 223/71 e 22/7. O valor encontrado por Arquimedes para π é ligeiramente mais exato do que os valores encontrados pelos babilônios (25/8) e pelos egípcios (256/81). Contador (2006, p. 265) afirma que “[...] o método de Arquimedes é o único matematicamente correto e foi com certeza a primeira tentativa científica de se buscar um valor para Pi”. Esse resultado foi apresentado na Proposição 3 do tratado ***Sobre as medidas do círculo***. Nessa obra, o geômetra demonstra também pelo **método da exaustão**[3] que a área do círculo é igual à área do triângulo retângulo tendo os catetos o raio e a circunferência do círculo (Figura 6).

Figura 6 – Igualdade das áreas



Fonte: O autor

Essa igualdade pode ser facilmente verificada com as informações que se tem hoje das medidas do círculo. Considerando A_O e L as medidas da área do círculo e do perímetro da circunferência, respectivamente, então $A_O=\pi r^2$ e $L=2\pi r$, onde r é o raio do círculo. Por outro lado, L é a base do triângulo retângulo e r, sua altura. Portanto, a área A_t do triângulo vem por

$$A_t = \frac{L.r}{2} = \frac{2\pi r.r}{2} = \pi r^2 \qquad (1)$$

Logo

$$A_O = A_t \qquad (2)$$

[3] O método da exaustão é um método para se encontrar a área de uma figura inscrevendo-se dentro dela uma sequência de polígonos cuja soma das áreas converge para a área da figura desejada.

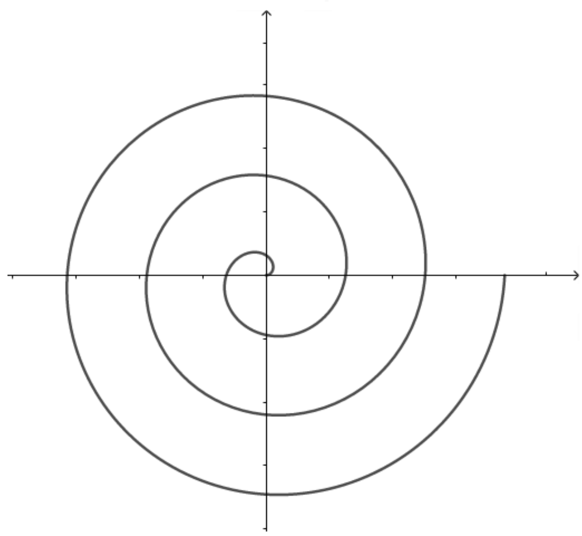
2.5 Os Três Problemas Clássicos

Encontra-se em Souza (2001), que desde o início do Período Helênico, três problemas geométricos desafiaram o poder inventivo de inúmeros matemáticos e intelectuais em um período de mais de dois mil anos. Durante séculos, diversas soluções foram propostas para a resolução destes problemas geométricos, mas não estavam de acordo com os padrões, supostamente determinados na Academia de Platão, onde apenas construções com régua não graduada e compasso eram admitidas. Estes problemas ficaram famosos, talvez por serem os primeiros a apresentar grandes dificuldades de resolução, de acordo com as regras inicialmente impostas. Os milenares problemas são a **Trissecção do Ângulo**, a **Duplicação do Cubo** e a **Quadratura do Círculo**.

Evidentemente que Arquimedes, assim como os seus predecessores, muito se interessou por esses problemas. Contudo, para buscar soluções para tais problemas, ele não se limitou aos padrões Euclidianos de Régua e Compasso, todavia buscou auxílio na Mecânica e na Geometria. Arquimedes desenvolveu uma curva que é resultante de dois movimentos uniformes e sincronizados. Roque (2012, p.200) afirma que a definição de espiral proposta pelo matemático era

> Se uma linha reta traçada em um plano se move uniformemente em torno de uma extremidade fixa e retorna à sua posição de partida, e se ao mesmo tempo em que a reta se move (uniformemente) um ponto, partindo da origem, se move (uniformemente) sobre a reta, esse ponto irá descrever uma espiral no plano.

Figura 7 – Espiral de Arquimedes



Fonte: O autor

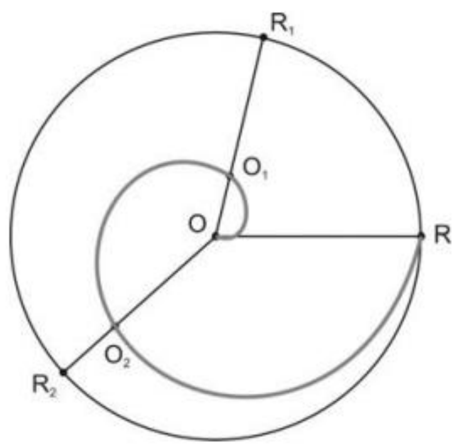
Atualmente, é fácil identificar a equação da espiral em coordenadas polares, a saber, $r = a\theta$, onde $\boldsymbol{a}$ é uma constante (Figura 7). Todavia, a argumentação de Arquimedes não era analítica ou algébrica como nos dias atuais, tão pouco dava continuidade aos padrões euclidianos. Roque (2012, p. 197) afirma também que "[...] não se percebe em Arquimedes uma preocupação em usar tampouco defender um método axiomático e que é perceptível que sua obra não sofreu nenhuma influência dos Elementos."

As proposições usadas por Arquimedes para resolver esses problemas clássicos utilizando a espiral se encontram em seu tratado **Sobre espirais**. Uma das principais é a Proposição 14 que diz

> Se, a partir da origem da espiral, se traçarem duas linhas retas até encontrarem a primeira volta da espiral, e se prolongarem até encontrarem a circunferência do primeiro círculo1, as linhas traçadas até à espiral terão entre si a mesma razão que os arcos da circunferência entre a extremidade da espiral e as extremidades das retas prolongadas até encontrarem a circunferência, sendo os arcos medidos para frente a partir da extremidade da espiral. (SOUZA, 2001, p.24).

Roque (2012) explica melhor dizendo que o segmento OO_1 está para OO_2 assim como o arco RR_1 está para o arco RR_2 (Figura 8).

Figura 8 – Propriedade da Espiral

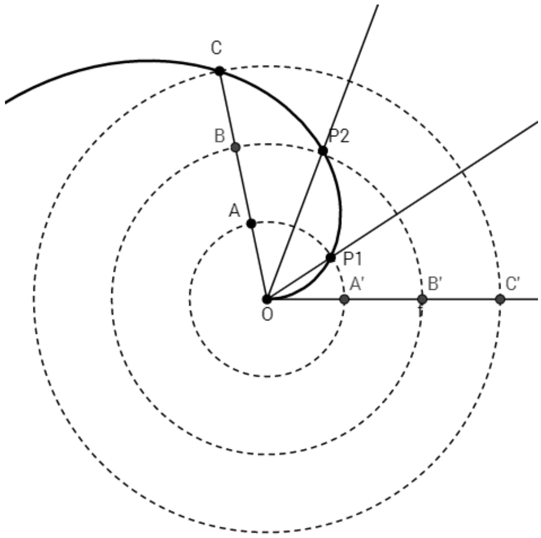


Fonte: ROQUE e PITOMBEIRA, p.118, 2012

Uma consequência imediata dessa proposição é um método para trissecionar um ângulo. Considerado o ângulo COC' e a espiral que tem sua origem no ponto O, o que se deseja é dividir COC' (Figura 9) em três partes iguais. Primeiramente secciona-se o segmento OC, marcando os pontos A e B de forma que OA = AB = BC = 1/3OC. Em seguida, traçam-se circunferências centradas em O, com os raios medindo OA, OB e OC. Essas circunferências encontrão a espiral nos pontos P1, P2 e C e o segmento OC', nos pontos A', B' e C', respectivamente. Por fim, traçam-se as semirretas OP1 e OP2. Pela Propriedade 14 de **Sobre Espirais**, tem-se que

$$OP1 : OC :: A'P1 : C'C \Rightarrow A'\hat{O}P_1 = \frac{1}{3} C'\hat{O}C$$

Figura 9 – Trisseção do ângulo pela espiral

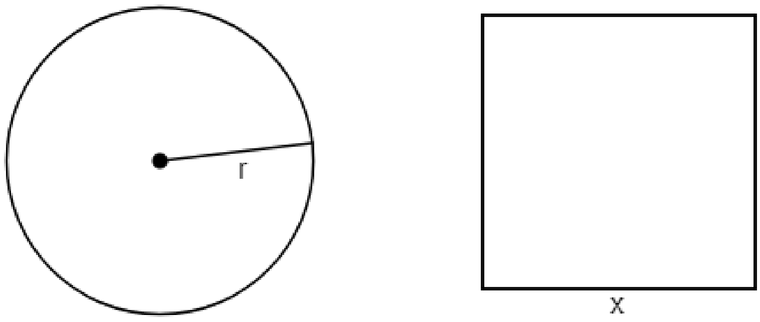


Fonte: O autor

A espiral ainda fornece uma solução para a quadratura do círculo, mais um dos problemas clássicos, que consiste em construir um quadrado e um círculo com mesmas áreas. Pensando em termos algébricos, não é difícil de imaginar qual seria a medida do lado desse quadrado.

Supondo um círculo de raio r e um quadrado de lado x, que possuem a mesma área. (Figura 10)

Figura 10 – Quadratura do Círculo



Fonte: O autor

Consequentemente, tem-se que

$$x^2 = \pi r^2 \qquad (4)$$
$$x = \sqrt{\pi r^2}$$
$$x = r\sqrt{\pi}$$

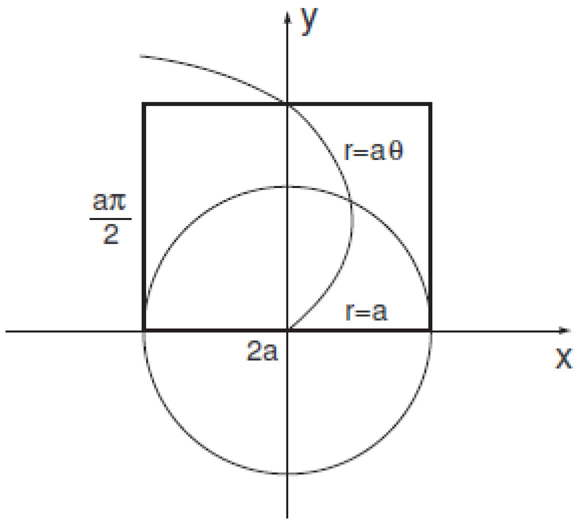
Onde x é o lado do quadrado que possui a mesma área do círculo.

Atualmente, é conhecida de maneira profusa a impossibilidade de com régua e compasso, a partir de um segmento r, construir outro segmento medindo $r\sqrt{\pi}$, pois se tratam de segmentos incomensuráveis. A prova da transcendência do π por Ferdinand Lindemann[4] em 1882, corrobora a impossibilidade da construção de um círculo e um quadrado com áreas iguais, apenas com régua e compasso.

Arquimedes entra em ação mais uma vez para resolver esse problema clássico com sua espiral, utilizando um simples raciocínio. Considere um círculo de raio $r = a$ centrado na origem. Primeiramente será mostrado que é possível construir um retângulo de área πr^2. Considerando a espiral $r = a\theta$ (Figura 11). A curva intersecta o eixo y no ponto $\frac{a\pi}{2}$, ou seja, quando $\theta = \frac{\pi}{2}$. Obtém-se então um retângulo cuja base á $2a$, a altura $\frac{a\pi}{2}$ e a área πa^2.

[4] Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939) foi um matemático alemão, notável por sua prova, publicada em 1882, que π é um número transcendente, isto é, não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais.

Figura 11 – Quadratura do Círculo pela Espiral



Fonte: PEDROSO e PRECIOSO, p. 12, 2015.

Por fim, para construir um quadrado de x com a área igual a do retângulo obtido com a construção, basta encontrar a média geométrica das dimensões do retângulo, a saber,

$$x = \sqrt{2a.\frac{a\pi}{2}} = \sqrt{a^2\pi} \qquad (5)$$

$$x = a\sqrt{\pi}$$

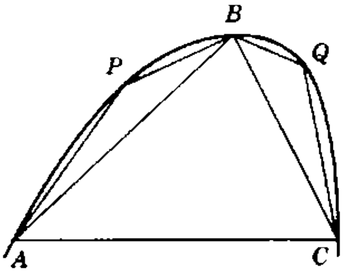
2.6 A Quadratura da Parábola

Encontra-se em Boyer (1974) que **Sobre espirais** é considerada sua obra mais difícil e contém 28 proposições. Entre os tratados que envolviam o método da exaustão, o mais famoso era a **Quadratura da Parábola**. Interessante que as seções cônicas já eram conhecidas há mais de um século pelos geômetras gregos; contudo, nenhum destes conseguiu obter algum avanço sobre o estudo dessas curvas. Garbi (2006, p 72) afirma que "[...] desde as Lúnulas de Hipócrates (470-410 a.C.), o segmento de parábola fora a primeira curva a ter um cálculo de área rigorosamente definido."

A proposição 17 de ***Sobre Espirais*** trata especificamente da Quadratura da Parábola. Utilizando o tão conhecido método da exaustão, Arquimedes realizou a proeza de quadrar uma seção cônica e chegar ao resultado de que a área S de um segmento parabólica APBQC

(Figura 12) é quatro terços da área de um triângulo T que tem a mesma base e altura do segmento.

Figura 12 – Quadratura da Parábola



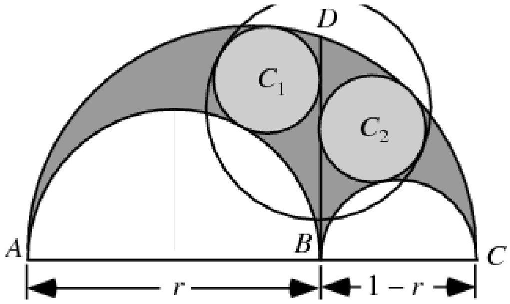
Fonte: BOYER, p. 95, 1974.

2.7 Livro dos Lemas

A personalidade inovadora de Arquimedes lhe compelia a dar atenção a diversos assuntos e problemas que envolviam matemática, geometria, física, etc. Segundo Vasconcelos (1925 apud DASSIE; LIMA, 2004, p. 3), o Livro dos Lemas contém “[...] elegantes proposições de geometria plana, relativas aos círculos e suas tangentes, tratando da quadratura de figuras idênticas às lúnulas de Hipócrates”. Aaboe (2002, p. 109) afirma que o Livro dos Lemas “[...] foi preservado em uma versão latina da versão árabe de Thabit ibn Qurrah [...]” denominada ***Líber Assumptorum***. Contudo, Heath (1981, p. 23 apud DASSIE; LIMA, 2004, p. 3) refuta que “[...] a obra em latim não pode ser autenticamente a de Arquimedes, pois seu nome é mencionado várias vezes no texto.”

Destacam-se nessa obra duas proposições. A primeira, denominada “Arbelos” ou "Faca de Sapateiro" – que tem esse nome justamente por lembrar um tipo de faca utilizada por sapateiros (Figura 14) – que consiste de uma região formada por três semicírculos tangentes dois a dois (Figura 13), sendo que a área em questão é interna ao semicírculo maior e exterior aos semicírculos menores. Arquimedes mostra na Proposição 4 que se DB é perpendicular a AC, a área do círculo de diâmetro DB é igual a área do arbelos e na proposição 5 mostra que as áreas dos círculos C1 e C2 são iguais.

Figura 13 - Arbelos



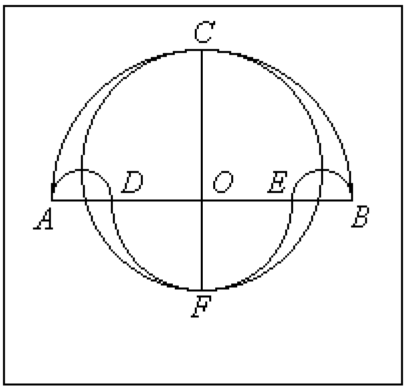
Fonte: WEISSTEIN

Figura 14 – Faca de sapateiro

Fonte: Facas Artesanais Carlos Arthur

Ainda no Livro dos Lemas, na Proposição 14 aparece outra proposição interessante que, segundo Boyer (1974), o próprio Arquimedes chamou de Salinon ou Saleiro. Seja ACB um semicírculo tendo AB como diâmetro, e sejam AD, BE congruentes ao longo de AB a partir de A, B respectivamente. Com AD, BE como diâmetros descreva semicírculos no mesmo lado de C, e com DE como diâmetro um semicírculo no lado oposto. Seja a perpendicular a AB passando por O, o centro do primeiro semicírculo, encontrando os semicírculos nos pontos C, F respectivamente. Então a área da figura limitada pelas semicircunferências de todos os semicírculos (Salinon) é igual a área do círculo tendo CF como diâmetro (Figura 15).

Figura 15 - Salinon



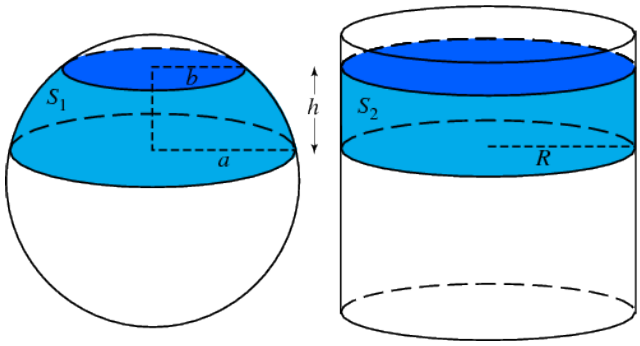
Fonte: BOGOMOLNY

2.8 Sua Obra Predileta

A obra de Arquimedes sem dúvida é base para muitos campos da matemática e da física. Alguns atribuem ao matemático o título de inventor do Cálculo Integral entre outras associações merecidas. A obra ***Sobre espirais*** está entre as mais lidas e admiradas pelos matemáticos posteriores; contudo, o grande matemático de Siracusa revela sua preferência pela obra ***Sobre a esfera e o cilindro***, quando requisita que em sua lápide fosse esculpida uma esfera inscrita em um cilindro reto com diâmetro e altura congruentes. Nessa obra ele divulga o resultado encontrado sobre a razão entre os volumes e áreas entre o cilindro e a esfera inscrita. Segundo o próprio, "***O Cilindro é uma vez e meia a Esfera, em área e volume [...]***" Garbi (2006, p. 71). Arquimedes afirma que essa propriedade era desconhecida dos geômetras anteriores a ele.

De fato, Arquimedes foi o primeiro a concretizar com as devidas demonstrações áreas de superfícies curvas. Ele conseguiu mostrar que a área da esfera é quatro vezes a área do círculo máximo e a área da superfície de qualquer segmento esférico é igual a área lateral de um cilindro cujo raio é o mesmo da esfera e a altura é a mesma do segmento (Figura 16). Interessante que Arquimedes mostra que essa área não depende da distância a que o segmento está do centro da esfera, e sim apenas da espessura do segmento.

Figura 16 – Segmento Esférico



Fonte: Fatos Matemáticos

Os resultados e demonstrações sobre superfícies esféricas são divulgados na Proposição 33 de ***Sobre a esfera e o cilindro***. Já a fórmula do volume da esfera aparece na Proposição 34 onde é provada pelo Método da Exaustão. Nessa proposição ele demonstra que o volume da esfera é igual a quatro vezes o volume do cone com raio e altura iguais ao raio da esfera. Obviamente que em todos os resultados que Arquimedes encontrou para área e volume de esferas e cilindros, não encontramos o símbolo π, pois o mesmo só começou a ser utilizado no século XVIII, com **Leonard Euler**[5].

2.9 Obras Perdidas

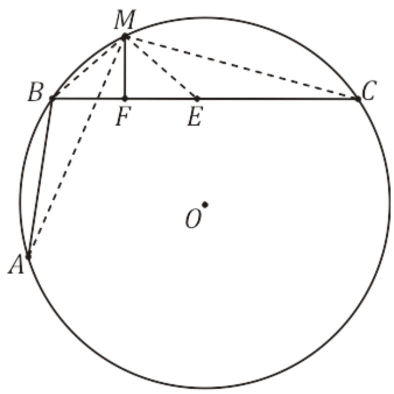
Infelizmente, boa parte das obras de Arquimedes não chegou até nós. Encontra-se em Boyer (1974) que a comprovação de extravio de alguns trabalhos de Arquimedes se dá pela referência ao matemático por autores de épocas posteriores. Um exemplo disso é Papus de Alexandria (290-350 d.C.) que atribui a Arquimedes a descoberta dos treze possíveis sólidos semirregulares. À medida que o poliedro regular possui faces formadas por polígonos regulares, sendo todos do mesmo tipo, o sólido semirregular ou arquimediano possui também faces formadas por polígonos regulares contudo, não são todos do mesmo tipo.

Outro fator que corrobora a lastimável perda dos escritos do matemático de Siracusa são as diversas referências árabes a Arquimedes. Ainda em Boyer (1974), lê-se que através dos matemáticos árabes, sabe-se que a famosa fórmula de Heron, que calcula a área do triângulo em função do semiperímetro e dos lados é $A = \sqrt{s(s-a).(s-b).(s-c)}$, onde s é o semiperímetro era conhecida por Arquimedes séculos antes de Heron nascer.

Lê-se em Kilhian (2015) que o matemático árabe Abul Raihan al Biruni atribui a Arquimedes, uma elegante proposição geométrica, chamada teorema da corda quebrada (Figura 17). Se AB e BC compõe uma corda quebrada ABC, onde BC> AB e se M é o ponto médio do arco $A\hat{B}C$, então F, pé da perpendicular de M sobre BC é o ponto médio da corda quebrada.

[5] Leonhard Paul Euler (1707-1783) foi um matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Fez importantes descobertas em várias áreas da matemática como o cálculo e a teoria dos grafos.

Figura 17 – Teorema da Corda Quebrada



Fonte: KILHIAN, 2015

Ainda sobre o lastimável extravio das obras de Arquimedes, Boyer (1974, p. 99) afirma que

> Ao contrário dos Elementos de Euclides, que foram conservados em muitos manuscritos gregos e árabes, os tratados de Arquimedes chegaram até nós por um fio frágil. Quase todas as cópias derivam de um mesmo original grego que existia no começo do século XVI e que era ele próprio copiado de um original do século IX ou X.

Segundo Eves (1995), dentre os trabalhos perdidos que são atribuídos a Arquimedes estão ***Sobre calendários* e *Sobre construção de esferas***. No último havia a descrição de um planetário que demonstrava os movimentos do Sol, Terra e dos cinco planetas conhecidos na época.

2. 10 O Método

Em 1906 ocorreu um fato muito emocionante para a ciência e porque não dizer para humanidade. Um dinamarquês amante das obras de Euclides e Arquimedes, Johan Ludving Heiberg[6], encontrou na biblioteca de um monastério em Constantinopla (atual Istambul), um tratado de Arquimedes que estava perdido há muito tempo. ***O Método***, como hoje é conhecido, se tratava de uma carta para **Erastóstenes** (276 a.C. – 194 a.C.) da Universidade de Alexandria na qual Arquimedes descrevia o seu método para demonstrar seus teoremas. Diferentemente dos outros trabalhos de Arquimedes, nesse tratado não eram exibidos precisos processos de demonstração rigorosos como o método da exaustão. De forma heurística, o

[6] Johan Ludvig Heiberg (1971 - 1860) foi um escritor dinamarquês do século XIX. Foi uma das maiores figuras da literatura dinamarquesa do século XIX.

matemático lança mão de procedimentos mecânicos para fundamentar suas indagações que, futuramente, seriam demonstradas de maneira formal. Encontra-se em Boyer (1974) que em ***O método***, Arquimedes publicou basicamente suas **investigações mecânicas preliminares** que o conduziram a muitas de suas descobertas matemáticas.

Como já foi visto, o documento tem um formato de carta onde o autor inicia discorrendo de como as demonstrações se tornam mais viáveis quando há um conhecimento prévio das situações que envolvem o teorema em questão. Arquimedes cita o exemplo de **Eudoxo** (390 a.C. - 337 a.C.) que formalizou os teoremas apresentados por **Demócrito** (460 a.C. - 370 a.C.), sobre os volumes da pirâmide e do cone e também sua própria experiência de utilização de um **método mecânico** que lhe propiciava elementos para suas provas. Em seguida, são apresentadas quinze proposições que são, em sua totalidade, provadas com o auxílio da Estática, com o equilíbrio de retas, da mesma forma que se equilibra pesos (BOYER, 1974). A descrição e utilização desse método são atestadas quando se lê que

> Para surpresa geral, sua abordagem a certas questões geométricas **utilizavam o conceito físico** (da Estática) de **equilíbrio** de pesos suspensos sobre barras para descobrir resultados que, depois, demonstrava com rigor matemático por dupla redução ao absurdo. (GARBI, 2006, p. 70, grifo nosso.)

Na Proposição 1, o matemático fornece um prova muito interessante de seu famoso teorema ***Quadratura da Parábola***. Considerando a área como um somatório de segmentos de reta, ele considera um eixo que funciona com um fulcro que pode ser ou não o eixo de simetria do segmento parabólico.

A Proposição 2 de ***O Método*** também tem um valor especial dentre os trabalhos de Arquimedes. Nesse trecho do tratado, o teorema preferido de Arquimedes, que se encontra em sua obra ***Sobre a esfera e o cilindro***, é apresentado pelo seu método mecânico. A descrição do teorema diz que: “Qualquer segmento de esfera tem para o cone de mesma base e altura a razão que a soma do raio da esfera e da altura do segmento complementar.” (BOYER, 1974, p. 100).

O Método comprova a genialidade e clareza dos pensamentos de Arquimedes. É no mínimo intrigante que um pensador que viveu há mais de vinte séculos produziu não apenas conhecimento propriamente dito, mas também formas de desenvolvê-lo e comprová-lo com padrões muito próximos aos que são praticados no meio acadêmico atual. **O intuito deste trabalho é aplicar esse pensamento, essa forma de conceber e demonstrar o conhecimento que Arquimedes utilizava em seus trabalhos, no contexto da sala de aula, para o adolescente moderno**.

3 RELACIONANDO A MECÂNICA DE ARQUIMEDES A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS DE BROUSSEAU

Neste trabalho procura-se usar a Teoria de Guy Brousseau[7], para construir e consolidar o pensamento arquimediano através de atividades que fomentem o ensino de conhecimentos matemáticos, sobretudo os relacionados aos estudos de Arquimedes. São atividades voltadas para turmas do Ensino Médio não regulares. Isto é, atividades aplicáveis a turmas de aprofundamento ou iniciação científica, muito comum em escolas de vanguarda.

3.1 Por que se escolheu Arquimedes

Acredita-se que o pensamento de Arquimedes muito se assemelha a crescente demanda de significação e contextualização do ensino. Arquimedes projetava as soluções de problemas e o desenvolvimento de suas teorias em aplicações práticas, a saber, exemplos mecânicos no qual princípios outrora abstratos eram traduzidos em uma solução concreta, mesmo que muitas vezes não materializadas.

3.2 A Didática Comum

A Didática atual tem suas origens em Comenius[8], um religioso e pensador que nasceu no século XVII, onde atualmente é a República Tcheca. Ele definia a Didática como a "**arte de ensinar**". Segundo GASPARIN (1994), dessa forma Comenius saúda seus leitores em Didática Magna, um tratado da arte universal de ensinar tudo a todos. Percebe-se na obra de Comenius uma intenção de unificar os métodos de ensino para todas as áreas do conhecimento humano.

Brousseau (1986 apud TEIXEIRA; PASSOS, 2013) afirma que para Comenius, a didática constituía-se de um método único, suficiente para todas as matérias. Ele defendia que o ensino se dava por um método natural válido em diferentes áreas como artes, línguas e

---

[7] Guy Brousseau (Taza, 4 de Fevereiro de 1933) é um educador matemático francês. Em 2003 recebeu a medalha Felix Klein pelo desenvolvimento da Teoria das situações didáticas.

[8] Jan Amos Komenský (em latim, Iohannes Amos Comenius; em português, João Amós Comênio; Nivnice, 28 de março de 1592– Amesterdão, 15 de novembro de 1670), foi um bispo protestante da Igreja Morávia, educador, cientista e escritor. Como pedagogo, é considerado o fundador da didática moderna.

cálculos, com pequenas variações, nas quais não havia necessidade de métodos especializados.

Não é preciso uma análise muito profunda para constatar que a concepção de Comenius para a didática não se aplica no paradigma atual de ensino, afinal sabe-se que há uma infinita diversidade entre os seres humanos e suas formas de aprender, bem como as circunstâncias que facilitem essa aprendizagem.

Em consonância com essa percepção, Brousseau (1986 apud TEIXEIRA e PASSOS, 2013) define a **Didática como uma relação específica entre conteúdos de ensino, a maneira como os alunos adquirem conhecimentos e os métodos que proporcionam essa aprendizagem.** Resultante dessa definição, Brousseau desenvolveu uma teoria para compreender as relações existentes entre aluno, professor e saber cotidiano da sala de aula. Além disso, propôs situações que foram experimentadas e analisadas com base científica.

3.3 A Teoria das Situações Didáticas

Na **Teoria das Situações Didáticas**, como ficou conhecida, Brousseau (1986) afirma que **professores e alunos são atores imprescindíveis na conexão ensino aprendizagem, assim como o âmbito em que tal situação didática se encontra.** Ele chama de ***milieu*** o ambiente onde se desenrola a situação didática favorável à aprendizagem.

Encontra-se em Teixeira e Passos (2013) a afirmação de que a Teoria das Situações Didáticas se constitui de um modelo teórico no qual o ensino é abalizado como projeto socializador, onde ocorre por parte do aluno uma apropriação dos saberes já constituídos e dos que ainda estão sendo formados.

Ainda em Teixeira e Passos (2013) descobre-se que a Teoria das Situações Didáticas dialoga sobre as possíveis formas de apresentação de um conteúdo matemático para os educandos, uma vez que haja por parte do docente a intenção clara de que aluno adquira saberes, através de uma sequência didática bem planejada e executada. Brousseau (1986) denominou a esse conjunto de atividades e combinados entre professor e aluno de “Contrato Didático”. Esse contrato define as regras de funcionamento da relação que envolve professor, aluno e o conhecimento, dentro da situação didática.

Brousseau (1986, p. 8), afirma que

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o

> professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição.

3.4 As Situações Didáticas no processo ensino/aprendizagem da matemática

Concorda-se com Teixeira e Passos (2013) quando discorrem sobre o conhecimento e o saber. O primeiro vem de uma realidade vivenciada pelo aluno. Ele traz consigo conhecimentos prévios frutos dessa vivência e, através destes conhecimentos constrói de forma autônoma o seu saber. Os autores afirmam que não basta a "verdade da realidade", ou seja, o conhecimento. É necessário construir a "realidade da verdade", o saber. A Teoria das Situações Didáticas se beneficia dessa conceituação de conhecimento e saber.

Lê-se ainda em Teixeira e Passos (2013) que Brousseau define os elementos de sua teoria estabelecendo que **situação didática** é um modelo no qual ocorre a interação sujeito/meio, onde há uma junção entre o âmbito do aluno e as relações que o aproximam ao ***milieu***[9]**.** Este por sua vez é um ambiente independente do sujeito, onde se desenrola a situação didática favorável à aprendizagem. Brousseau (2008, p.10) ainda pondera que "[...] atualmente as situações didáticas podem se caracterizar como os modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno [...] é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional".

Brousseau (1986) chama atenção que ensinar e controlar a situação didática consiste em um ***milieu.*** Isto é, sempre que um problema é colocado para ser resolvido, um dispositivo deve ser acionado. No presente caso, o dispositivo a ser colocado em ação são as fichas de trabalho que foram construídas segundo regras pré-estabelecidas (o pensamento de Arquimedes) e objetivos previamente determinados, que serão discutidos a seguir.

3.5 As Etapas de uma Situação Didática

Outro aspecto das Situações Didáticas é a sua classificação em etapas ou fases: devolução, ação, formulação, validação e institucionalização.

[9] Meio, em francês.

3.5.1 Devolução

Nessa etapa o professor cede ao aluno uma parte da responsabilidade pela aprendizagem, incluindo-o no jogo e assumindo os riscos por tal ato. O aluno é informado de seus deveres e comprometimento junto à construção do saber. Nesse momento, professor e aluno firmam o **Contrato Didático**.

3.5.2 Ação

Na Ação, o aluno projeta e simula tentativas, elegendo um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação, através da interação com o ***milieu***, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema.

3.5.3 Formulação

Nessa etapa ocorre a troca de informação entre o aluno e o ***milieu***, através da utilização de uma linguagem mais adequada, sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal, podendo ocorrer ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência na mensagem, dentro de retroações contínuas. Assim, nas situações de formulação, os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente, adequando-a às informações que devem comunicar.

3.5.4 Validação

Na etapa da validação, os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações, provas).

3.5.5 Institucionalização

Nas etapas anteriores o professor desempenha o papel de mediador. Já na institucionalização, o papel explícito do professor é manifestado. Essa etapa é destinada a estabelecer convenções sociais onde a intenção do professor é revelada. O professor retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo a constituição do saber ou descartando algumas produções equivocadas dos alunos, definindo assim os objetos de estudo através de formalizações e generalizações. O objeto é oficialmente aprendido pelo aluno e o professor reconhece tal aprendizagem.

3.6 A proposta deste trabalho

Feitas as devidas reflexões e contextualizações sobre as obras de Arquimedes e Brousseau, a proposta desse trabalho é fornecer para alunos do Ensino Médio uma pequena coleção de atividades práticas que de algum modo circundam a obra de Arquimedes e suas descobertas, uma vez que grande parte do trabalho desse matemático integra os currículos de vários níveis de ensino e de certa forma são inacessíveis a tais alunos, seja pelo desconhecimento do tema por parte dos professores, seja pela própria dificuldade de compreensão matemática de tais resultados. Acreditamos que lançar mão da História da Matemática, seja um dos caminhos que amenizam as dificuldades citadas.

Basicamente, a obra de Arquimedes será **"o que"** vamos explorar e as Situações de Didáticas de Brousseau será **"o como"** faremos isso. As atividades elaboradas seguem uma sequência de tarefas que estão de forma a propor para os alunos um Contrato Didático, como cunhou Brousseau.

Uma das premissas da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau é o âmbito em que se encontra uma situação didática. Será usado o *software* Geogebra como recurso tecnológico a fim de evidenciar esta premissa. É possível afirmar também que as atividades propostas podem perfeitamente ser aplicadas nas séries indicadas bem como servir de modelo para a criação de outras atividades que abordem outras áreas da matemática.

4 SUGESTÕES DE ATIVIDADES A SEREM APLICADAS EM SALA DE AULA

4.1 Como as atividades foram pensadas

As atividades a seguir são resultado de pesquisas nas obras de Arquimedes e algumas aplicações. Buscou-se formatar fragmentos das obras de Arquimedes ao molde das Situações Didáticas de Guy Brousseau. Entendemos que o ***milieu***, assim como definido em Brousseau, engloba o cenário que se propõem bem como as ferramentas, nesse nosso caso são a régua, o compasso e o Geogebra.

Como é proposta do trabalho, recomenda-se que sejam cumpridas as etapas das Situações Didáticas. Contudo, a primeira – ***Devolução*** – é executada totalmente de maneira interpessoal, quando professor e alunos estiverem em sala de aula. As etapas que seguem: Ação, Formulação e Validação, devem seguir as indicações das atividades sugeridas neste capítulo. Para a etapa da institucionalização, foi preparada a Ficha do Professor.

4.1.1 Atividade 1 – Eureka

Essa atividade remonta a cena mais icônica da vida de Arquimedes, quando o rei Hierão lhe incumbe de verificar se a coroa que ele encomendara a um ourives tinha a massa correta ou se havia no objeto uma mistura de ouro/prata. Arquimedes tem o ***insight*** para resolver a situação durante um banho quando, ao passo em que seu corpo afundava, certo volume de água era deslocado para fora de banheira. Apesar de esse simples fato tê-lo inspirado a desenvolver todos os seus trabalhos de hidrostática (como o empuxo), como defendem vários autores, é valido refletir que, naquele momento, que a principal descoberta de Arquimedes foi a de como medir o volume de uma figura irregular.

4.1.2 Atividade 2 – Polígono de muitos lados

Essa atividade foi baseada na obra de ***Sobre as medidas do Círculo***, quando Arquimedes, utilizando o Método da Exaustão, calcula o perímetro de polígonos inscritos e circunscritos em uma circunferência. Nesse experimento, o matemático encontra um interessante valor para $\boldsymbol{\pi}$ com aproximação de quatro casas decimais. O objetivo dessa atividade é ambientar o aluno nesse cenário de demonstrações através de repetições de processos. Dessa forma, pretende-se elucidar para o aluno a ideia de infinito bem como a natureza das medidas do círculo, como um polígono cuja quantidade de lados tende a infinito.

4.1.3 Atividade 3 – Construindo uma Espiral de Arquimedes com régua, compasso e uma mão firme

Como o nome já sugere, pensamos nessa atividade para familiarizar o aluno com a curva mecânica de Arquimedes, a ***Espiral***. Entretanto, com o intuito de resgatar a construção de desenho pelo processo mecânico, o trabalha será desenvolvido com régua e compasso. Obviamente que a ***Espiral de Arquimedes*** não foi pensada dessa forma, tão pouco construída utilizando esses materiais. Contudo, a proposta é construir uma curva que se aproxime da espiral, observando que, para tal, são necessários dois movimentos, um linear e outro circular.

4.1.4 Atividade 4 – A trisseção do ângulo

Essa atividade também se baseia em uma aplicação da Espiral de Arquimedes, sendo assim, é muito interessante que seja utilizada como uma sequência da atividade anterior.

Como Arquimedes resolveu dois dos problemas clássicos utilizando sua curva, faremos o mesmo caminho, mostrando anteriormente algumas propriedades da Espiral. O objetivo é mostrar de imediato uma aplicação da Espiral e fazer isso, novamente com os conhecidos instrumentos Régua e Compasso.

4.1.5 Atividade 5 – A Quadratura do Círculo

A exemplo das atividades anteriores, esta foi idealizada com o intuito de mostrar a natureza inovadora da curva proposta por Arquimedes. O que pensamos para essa atividade é construir uma ponte com outra aplicação da espiral, a saber, a quadratura do círculo. Utilizando o software Geogebra e verificamos a solução encontrada por Arquimedes para a Quadratura do Círculo.

4.2 Fichas de atividades para os alunos/professores

4.2.1 - Atividade 1

Título: Eureka

Objetivo: Apresentar ao aluno a dificuldade de medir o volume de objetos de formato irregular, bem como relacionar os conceitos de massa, volume e densidade.

Série: 2º ano do Ensino Médio

Classificação: Médio

Tempo Estimado: Quatro horas/aula (50 min)

Material Utilizado: Objetos como caixas de embalagens de remédios ou chocolate, pedaços de canos, bola de gude e um objeto com a forma irregular como um chaveiro ou troféu. Para a medição será utilizada uma régua e um paquímetro, além de calculadora.

Metodologia: Será exposta aos alunos a mesma situação que Hierão colocou para Arquimedes. A princípio deve-se solicitar que o aluno faça medições de volumes de figuras poliédricas ou de revolução. Por fim será solicitada a mesma medição em uma figura irregular, assim como Arquimedes que teve medir o volume de um coroa.

4.2.1.1 Ficha do aluno

1) Utilizando os instrumentos de medição e de cálculo, meça os volumes das figuras na ordem em que aparecem.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

2) Caso tenha encontrado alguma dificuldade nas medições de alguma figura, descreva-a.

4.2.1.2 Ficha do professor

1) Nas figuras a e b, o aluno conseguirá fazer as medições e cálculos de volumes sem problemas. Para as figuras c e d, o mesmo precisará do paquímetro, para medir os diâmetros. Na última figura, provavelmente o aluno não irá conseguir fazer a medição.

2) Após os alunos expressarem a dificuldade em medir e calcular o volume da última figura, é interessante que o professor lhes indique algumas propriedades que as primeiras figuras têm e que as pedras irregulares não têm.

Uma conclusão interessante que se espera que o aluno chegue é que não existe uma “régua irregular” para medirmos as dimensões desse tipo de figuras, que na verdade ora são retas, ora são curvas. Para isso, é necessário que algo contorne ou envolva essas figuras como um todo. É possível que algum aluno associe esse raciocínio com mergulhar as pedras em certa quantidade de água para encontrar o seu volume. Se isso acontecer, exclame EUREKA, o aluno construiu um saber muito relevante e avançado.

Essa atividade pode ter outros desdobramentos. É possível explorar a ideia de densidade. Na verdade, uma atividade a ser realizada após essa é exatamente a que Hierão propôs a Arquimedes. Esse momento pode ser mais explorado e recheado de conceitos físico-matemáticos. Como por exemplo, o que levou Hierão desconfiar de seu ourives? A coroa estava com o mesmo volume e com a massa menor ou com a mesma massa, porém, com o volume maior?

4.2.2 - Atividade 2

Título: O polígono de muitos lados

Objetivo: Elucidar para o aluno, através do conceito de infinito, a natureza das mensurações do círculo bem como sua forma como um polígono com a quantidade de lados tendendo a infinito.

Série: 8º e 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio

Classificação: Fácil

Tempo Estimado: Quatro horas/aula (50 min)

Material Utilizado: *Software* Geogebra

Metodologia: Seguindo a estruturação das Situações Didáticas, serão verificadas com o aluno a possibilidade de se construir e calcular as medidas dos lados e o perímetro de um polígono com muitos lados. A exemplo de Arquimedes, nessa atividade será construída uma série de polígonos regulares, inscritos num círculo, começando com um triângulo e a partir daí, será dobrada a quantidade de lados até se chegar a um polígono com 48 lados. Recorrendo ao *software* Geogebra, será feita uma aproximação da medida comprimento da circunferência; em seguida, serão medidos o comprimento dos lados e o perímetro de cada polígono.

4.2.2.1 Ficha do aluno

Resumo: Serão construídos diversos polígonos regulares, inscritos em um círculo.

Nome	Número de lados	Perímetro
Triângulo Equilátero	**3**	
Hexágono Regular	**6**	
Dodecágono Regular	**12**	
Tetracoságono Regular	**24**	
Tetracontakaioctágonos Regular	**48**	
Circunferência	**??????**	

<u>1º Passo – Triângulo Inscrito.</u>

- Abra a janela do Geogebra na função “Calculadora Geométrica”
- Construa um triângulo equilátero $A_1A_2A_3$
- Construa uma circunferência circunscrita ao triângulo equilátero
- Meça os perímetros do círculo e do triângulo e anote na tabela acima.

2º Passo – Construindo o Hexágono Regular.

- Trace a mediatriz do lado A_1A_2 do triângulo.
- Marque o ponto B_1 onde a mediatriz corta a circunferência.
- Passando pelos pontos A_1 e B_1, construa o hexágono regular $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$.
- Meça o perímetro do hexágono e anote na tabela acima.

3º Passo – Construindo os demais polígonos

- Trace a mediatriz do lado A_1B_1 do hexágono.
- Marque o ponto C_1, onde a mediatriz corta a circunferência.
- Passando pelos pontos A_1 e C_1, construa o dodecágono regular $A_1C_1B_1C_2A_2C_3B_2C_4A_3C_5B_3C_6$.
- Meça o perímetro do hexágono e anote na tabela acima.
- Repetindo esse procedimento, construa um polígono regular com 24 lados e depois, com 48 lados. Tomando nota dos perímetros desses dois últimos polígonos, responda às perguntas a seguir.

Questionário

A) Conforme o número de lados foi aumentando, o que se percebe com a forma dos polígonos?

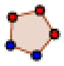
B) O que se pode dizer sobre a quantidade e a medidas dos lados dos polígonos?

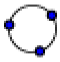
C) O que se percebe com o perímetro dos polígonos a medida que a quantidade de lados aumenta?

D) Se continuássemos esse processo, chegaríamos a que conclusão?

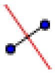
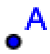
4.2.1.2 Ficha do professor (Soluções e respostas esperadas)

1º Passo

- Acesse https://www.geogebra.org;
- Clique na opção "Geometry Calculator";
- No ferramenta de polígonos, selecione a opção "Polígono Regular" que está representada pelo ícone ;
- Marque dois pontos que em seguida será aberta automaticamente uma janela pedindo a quantidade de lados do polígono, digite 3;

- Nos ícones dos círculos, selecione a opção Círculo definido por Três Pontos, representado pelo ícone  ;
- Clique nos três vértices do triângulo.
- Renomeie os pontos que formam o triângulo para A_1, A_2 e A_3;
- Selecione a opção "Distância, Comprimento ou Perímetro"  e clique no triângulo e no círculo. Anote os perímetros encontrados na tabela;

2º Passo

- Posicione o cursor na opção das retas e escolha a opção "Mediatriz", representada pelo ícone  ;
- Clique nos pontos A_1 e A_2 e surgirá a mediatriz do lado A_1A_2;
- Para marcar o ponto B_1, interseção entre a reta mediatriz e a circunferência, clique no ícone Ponto ;
- Em seguida, posicione o cursor próximo à região de interseção e repare que a reta e a circunferência se "acenderão". Nesse momento, clique em cima dessa região que o ponto desejado será fixado na cor cinza. Clique em cima do mesmo com o botão direito, depois selecione a opção "Renomear" e digite B_1;
- Mais uma vez com opção "Polígono Regular" selecionada, clique nos pontos A_1 e B_1 e construa um polígono com seis lados;
- Renomeie os pontos novos que formam o hexágono regular para B_2 e B_3.
- Mais uma vez com a opção "Distância, Comprimento ou Perímetro" selecionada, clique no hexágono recém-formado e anote o valor do perímetro encontrado na tabela.

3º Passo

- Outra vez com a função mediatriz selecionada, clique nos pontos A_1 e B_1. Marque então o ponto C_1, que será a interseção entre a mediatriz recém formada e a circunferência;
- Selecione a opção Polígono Regular e em seguida clique em cima dos pontos A_1 e C_1. Quando surgir a opção da quantidade de lados do novo polígono, digite 12;
- Com a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro selecionada, clique em cima do dodecágono regular e anote na tabela o valor encontrado;
- Repita o procedimento até encontrar um polígono de 48 lados, sempre anotando os valores dos perímetros encontrados;

<u>Questionário (Respostas esperadas)</u>

A) Conforme o número de lados foi aumentando, o que se percebe com a forma dos polígonos?

Conforme a quantidade de lados foi aumentando, a figura foi ficando mais "arredondada", ou seja, foi tomando uma forma cada vez mais semelhante a um círculo.

B) O que se pode dizer sobre a quantidade e a medidas dos lados dos polígonos?

Foi possível observar que quanto maior a quantidade de lados, menor era a medida de cada lado.

C) O que se percebe com o perímetro dos polígonos à medida que a quantidade de lados aumenta?

Quanto mais lados o polígono tinha, mais próximo o seu perímetro ficava do comprimento da circunferência.

D) Se continuássemos esse processo, chegaríamos a que conclusão?

Chegaríamos a um polígono com tantos lados que se confundiria com o círculo no qual ele está inscrito. Podemos concluir que se fosse possível desenhar um polígono com infinitos lados, esse polígono seria na verdade uma circunferência de círculo.

Vale ressaltar que a aproximação dos perímetros dos polígonos à circunferência nessa atividade é feita por falta, uma vez que os polígonos são inscritos. Um desdobramento da atividade é repetir o processo por excesso, com polígonos circunscritos, e assim, com a famosa dupla redução ao absurdo de Arquimedes, chegar a conclusões mais assertivas sobre o perímetro da circunferência e até mesmo uma boa aproximação do valor de π.

4.2.3 Atividade 3

Título: Construindo uma Espiral de Arquimedes com Régua, Compasso e uma mão firme.

Objetivo: Queremos nessa atividade que os alunos se ambientem com o cenário limitado tecnologicamente no qual Arquimedes desenvolveu todo o seu conhecimento, bem como familiarizá-lo com as construções mecânicas.

Série: 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio

Classificação: Médio

Tempo Estimado: Duas horas/aula (50 min)

Material Utilizado: Régua, compasso, lápis e folha A4.

Metodologia: Será construída a curva que Arquimedes apresentou ao mundo. Não se sabe se esse foi o procedimento utilizado pelo matemático; contudo, trata-se de um método bem criativo e simples.

4.2.3.1 Ficha do aluno

Passo 1

Trace uma circunferência de centro O” e divida-a em dezesseis partes iguais. Escolhemos esse número por ser facilmente obtido traçando a mediatriz de um diâmetro inicial e, a partir desse, divide-se a circunferência em duas, quatro, oito e dezesseis partes iguais. Em seguida, trace os dezesseis raios, dividindo a circunferência em dezesseis setores. Denomine os raios, em sentido anti-horário, de A, B, C, ..., P.

Passo 2

Agora divida o raio A em dezesseis partes iguais. Esse processo pode ser efetuado mais uma vez com a utilização da mediatriz. Nomeie esses pontos por A’, B’, C’, ..., P’, começando com ponto que se encontra a mais próximo do centro e terminando no que está mais afastado.

Passo 3

Trace circunferências concêntricas com a circunferência inicial, de forma que as mesmas passem pelos pontos A’, B’, C’, etc. Ao todo serão quinze circunferências mais a inicial. Atribua os nomes dados aos pontos no passo anterior, às circunferências. Dessa forma teremos as circunferências A, B, C, etc.

Passo 4

Marque a intersecção da circunferência A com o raio A, da circunferência B com o raio B, assim por diante, até marcar a interseção da do raio P com a circunferência P.

Passo 5

Começando pelo ponto O”, ligue-o com um segmento de reta ao ponto onde o raio A corta a circunferência A. Em seguida, ligue este ao ponto onde o raio B corta a circunferência B, e assim por diante. A figura que surgirá será um esboço da Espiral de Arquimedes.

<u>Questionário</u>

A) Qual grau de dificuldade você daria para essa construção?

( ) Muito Fácil
( ) Fácil
( ) Médio
( ) Difícil
( ) Muito Difícil

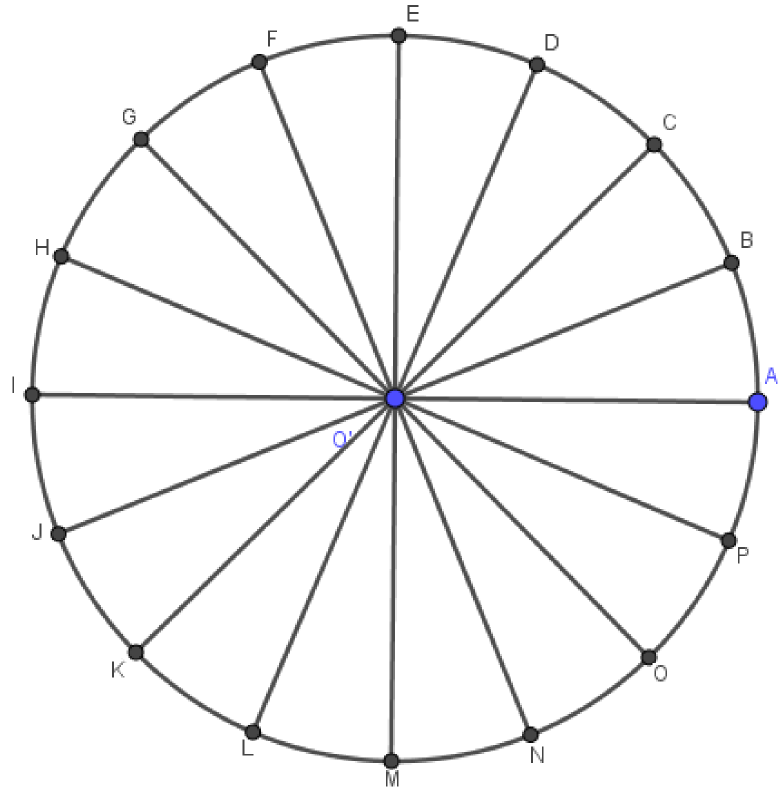
B) Sabendo que a construção feita é na verdade uma aproximação da Espiral de Arquimedes, pois essa não contém segmentos de reta por se tratar de uma curva, que análise se pode fazer sobre o processo de construção da espiral?

4.2.3.2 Ficha do professor (Soluções e respostas esperadas)

1º Passo

- Construa uma circunferência centrada no ponto O";
- Trace um diâmetro e marque os pontos de intersecção com a circunferência. Denomine o da direita de A e o da esquerda I;
- Trace a mediatriz entre os pontos A e I; em seguida marque as interseções da mediatriz com a circunferência, denominando E o de cima e de M o de baixo;
- Trace a mediatriz entre os pontos A e E. Chame de C a ponto de interseção entre os pontos A e E e de K a intersecção entre os pontos I e M;
- Repita o procedimento acima, encontrando a mediatriz entre os pontos E e I. A intersecção entre a mediatriz e a circunferência entre os pontos E e I será o ponto G e a que está entre os pontos M e A será o ponto O.
- Repetia o procedimento acima, ou seja, traçando as mediatrizes entre os pontos A e C, C e E, E e G e por fim, G e I, em seguida marcando as duas intersecções que cada mediatriz faz com a circunferência, teremos os pontos A, B, C, ..., P.
- Vamos atribuir a nomenclatura os pontos A, B, C, etc, aos raios que chegam nesses pontos. Dessa forma teremos os raios A, B, C, ..., P.

Figura 18 – Construção da espiral

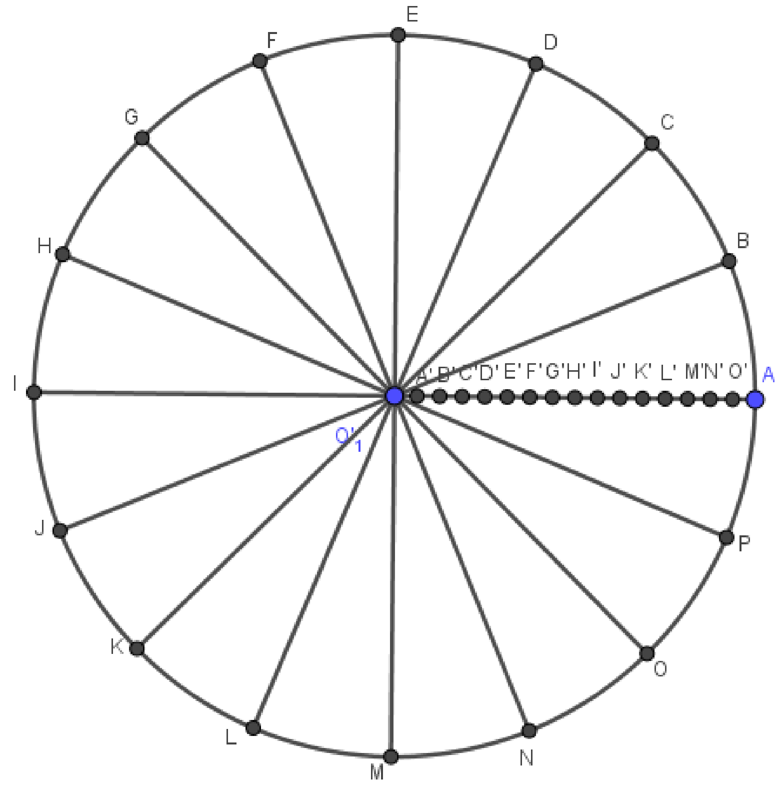


Fonte: O autor

2º Passo

- Divida o raio A em dezesseis partes iguais. Para isso, utilize o compasso, marcando os pontos médios.
- Essas dezesseis marcações serão nomeadas por A', B', C', ..., e P' (sendo que P' pertencente à circunferência). O ponto P' no raio coincidirá com o ponto A, feito no procedimento anterior.

Figura 19 – Construção da espiral

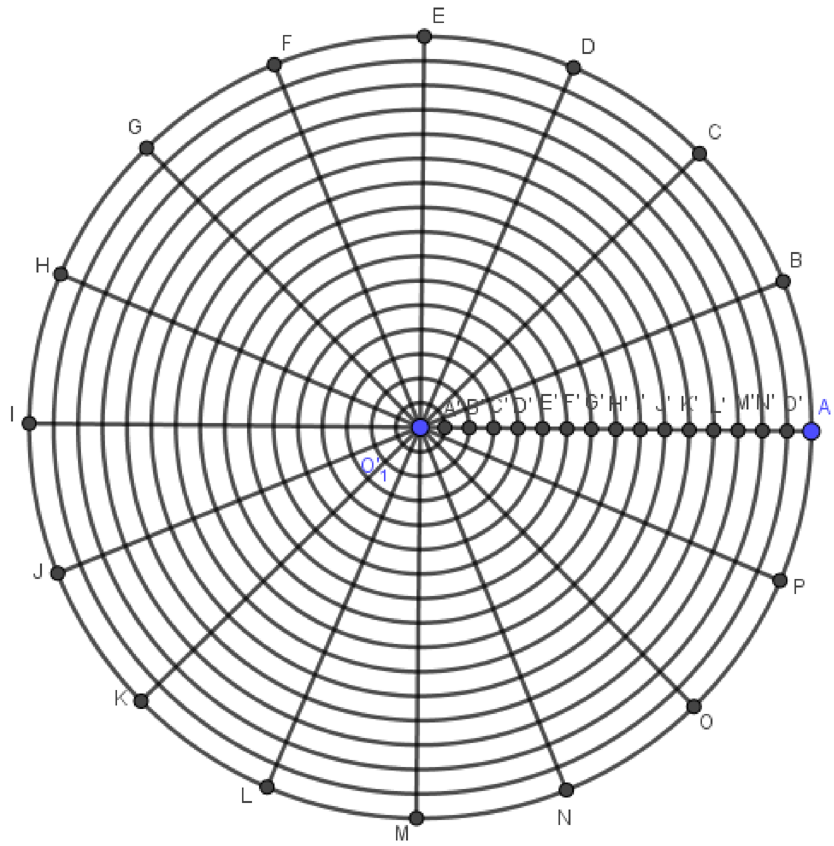


Fonte: O autor

3º Passo

- Utilizando o compasso trace quinze circunferências concêntricas a inicial, de forma que cada circunferência passe em um dos pontos marcados no raio A. Para tal, basta utilizar o próprio raio A como referência para as aberturas do compasso. A décima sexta e maior circunferência será a construída inicialmente. Atribua agora a numeração feita no Passo 2 para as circunferências feitas nesse passo, ou seja, a circunferência A é a que passa no ponto A', a circunferência B que passa no ponto B' e assim por diante.

Figura 20 – Construção da espiral



Fonte: O autor

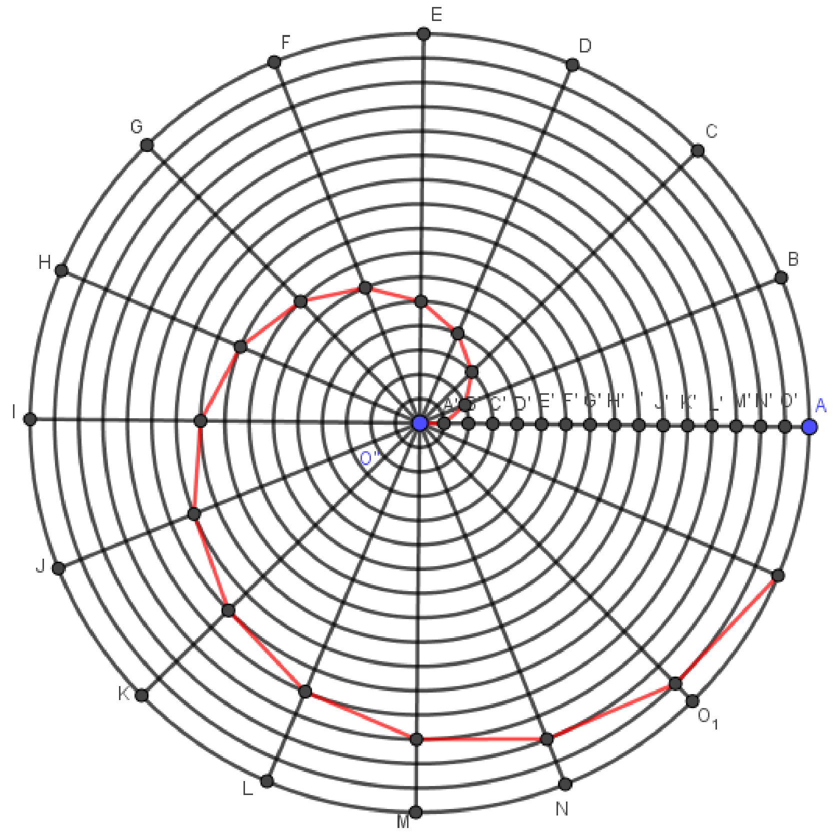
4º Passo

- Marque a intersecção da circunferência A com o raio A, da circunferência B com o raio B, assim por diante até marcar a interseção da do raio P com a circunferência P.

5º Passo

- Por fim, ligue com segmento de reta o centro da circunferência com a interseção do raio A com a circunferência A, em seguida, ligue esse ponto a interseção do raio B com a circunferência B, e assim por diante. Teremos a seguir um esboço da Espiral de Arquimedes.

Figura 21 – Construção da espiral



Fonte: O autor

Questionário (Respostas esperadas)

1) Espera-se que o aluno selecione a opção Difícil ou Muito Difícil, em vista de quão trabalhosa é a construção.

2) Após a realização dessa atividade, é interessante que seja feita uma reflexão sobre a engenhosidade de Arquimedes em buscar soluções para as situações, utilizando argumentos mecânicos, a exemplo de sua espiral.

4.2.4 Atividade 4

Título: A trissecção do ângulo

Objetivo: Aproximar o aluno, tanto desse ambiente de demonstrações de proposições outrora enunciadas, quanto mostrar uma aplicação prática da utilização da Espiral de Arquimedes.

Série: 8º e 9º ano do Ensino Fundamental

Classificação: Fácil

Tempo Estimado: Uma hora/aula (50 min)

Material Utilizado: Folha A4, régua e compasso.

Metodologia: Primeiramente será exibido para os alunos um trecho do vídeo "História da Matemática para Professores 6 – Arquimedes" disponível em https://www.youtube.com/watch?v=QEGQe5QBcy8. O aluno receberá uma folha com um pedaço da Espiral de Arquimedes e a partir dessa figura, ele irá construir a demonstração da trisseção do ângulo. Para facilitar, a folha terá os eixos coordenados da espiral para minimizar os erros.

4.2.4.1 Ficha do aluno

Essa atividade se trata da construção da trisseção do ângulo pela Espiral de Arquimedes, utilizando suas propriedades enunciadas no vídeo. A figura a seguir é um pedaço da Espiral de Arquimedes, que será é suficiente para que o problema da Trisseção do Ângulo seja resolvido.

Passo 1

Trace um ângulo qualquer de forma que um dos seus lados coincida com o eixo OX. Em seguida marque o ponto O, o vértice do ângulo, o ponto P no lado do ângulo que está sobre o eixo OX e o ponto C, na interseção da espiral com o outro lado do ângulo.

Passo 2

Trisseccione o segmento OC, marcando em seguida os pontos A e B de forma OA=AB=BC.

Passo 3

Trace três circunferências centradas em O, com raio AO, OB e OC, respectivamente.

Passo 4

Marque as interseções das circunferências com o lado OP, a saber, os pontos, A', B' e C' respectivamente.

Passo 5

Marque os pontos P_1 e P_2, nas interseções da espiral com as circunferências de raio OA e OB, respectivamente. Em seguida, trace as semirretas OP_1 e OP_2.

Conforme a propriedade demonstrada no vídeo, o ângulo PÔC foi trisseccionado.

Questionário.

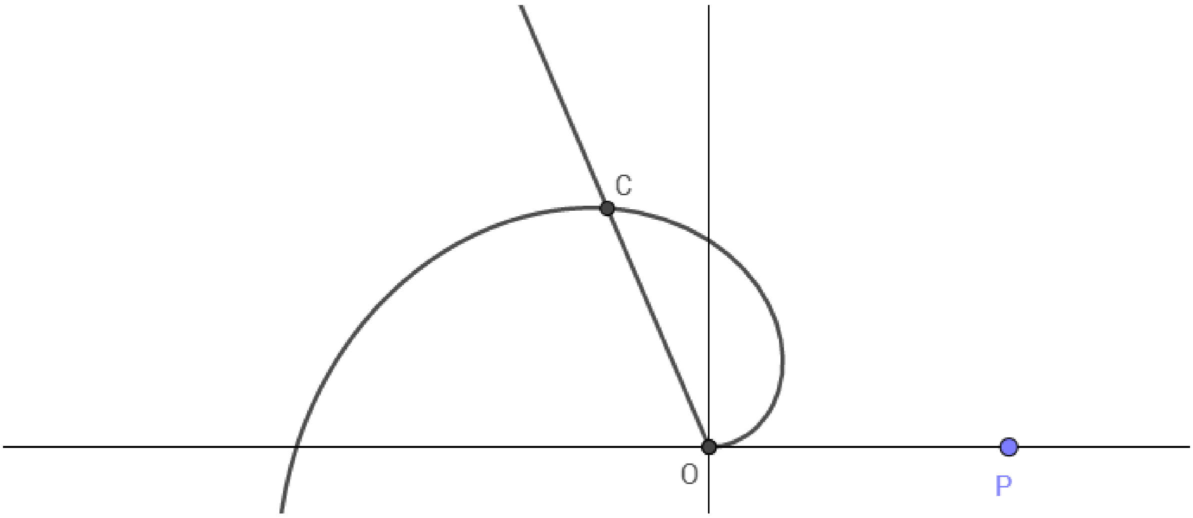
Utilizando a propriedade da Espiral de Arquimedes, enunciada no vídeo, mostre que sua construção de fato trisseccionou o ângulo construído.

4.2.3.2 Ficha do Professor (Soluções e resposta esperadas)

1º Passo

- Marque o ponto O, na origem do sistema;
- Trace duas semirretas saindo de O, sendo uma sobre eixo OX e outra em que pertença ao segundo quadrante. Marque o ponto C, onde a segunda semirreta corta a espiral.

Figura 22 – Trissecção do ângulo pela Espiral

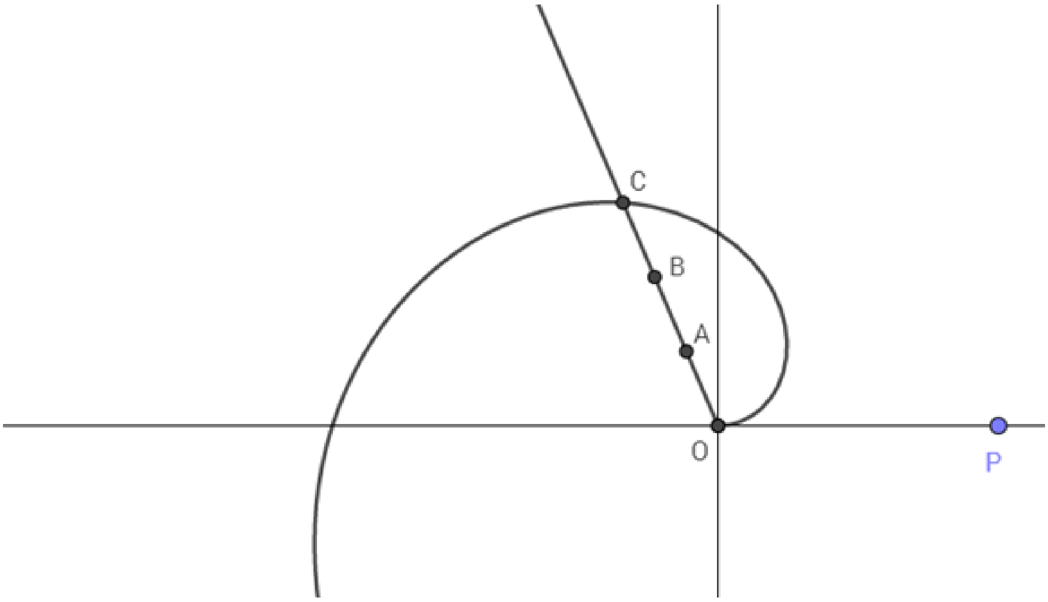


Fonte: O autor

2º Passo

- Trisseccione o segmento OC (Com régua e compasso, basta encontrar o ponto médio entre dois pontos e, ainda com o compasso transportar a medida de metade desse segmento na reta que contém os pontos).

Figura 23 – Trissecção do ângulo pela Espiral

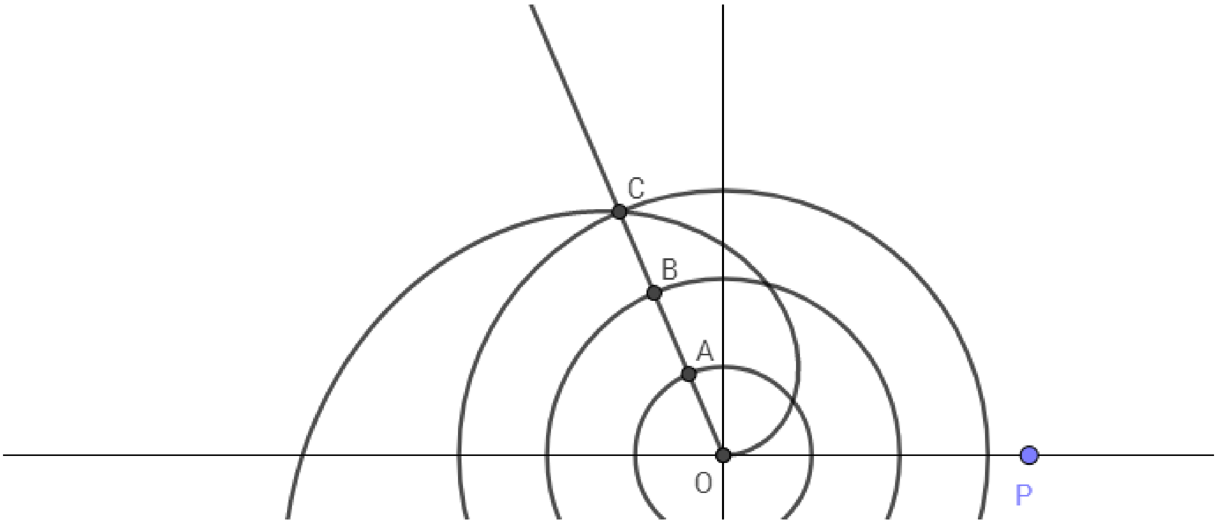


Fonte: O autor

3º Passo

- Centrado em O, trace três circunferências que passem, respectivamente, nos pontos, A, B e C.

Figura 24 – Trisseção do ângulo pela Espiral

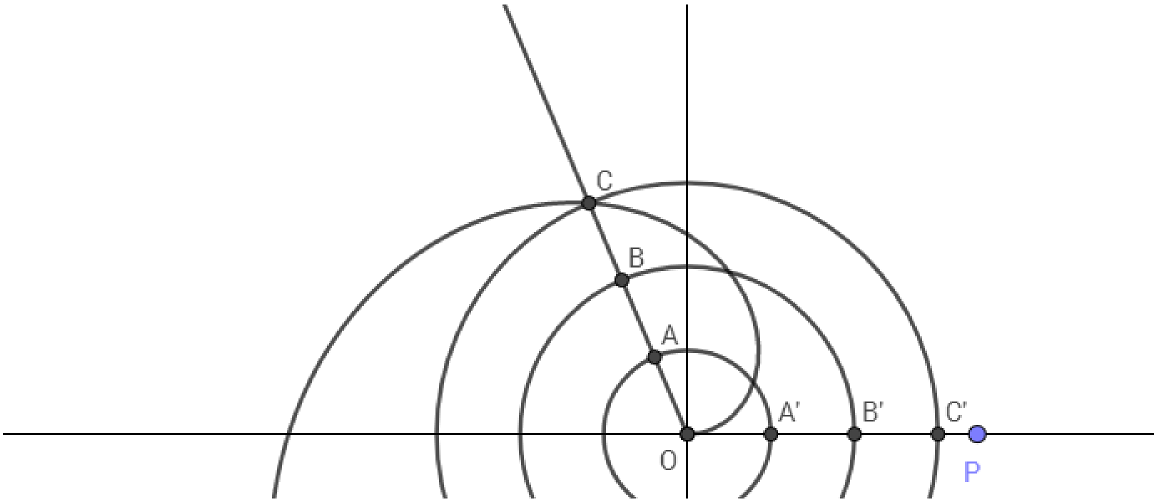


Fonte: O autor

4º Passo

- Marque as interseções das circunferências com o lado OP, a saber, os pontos, A’, B’ e C’ respectivamente.

Figura 25 – Trisseção do ângulo pela Espiral

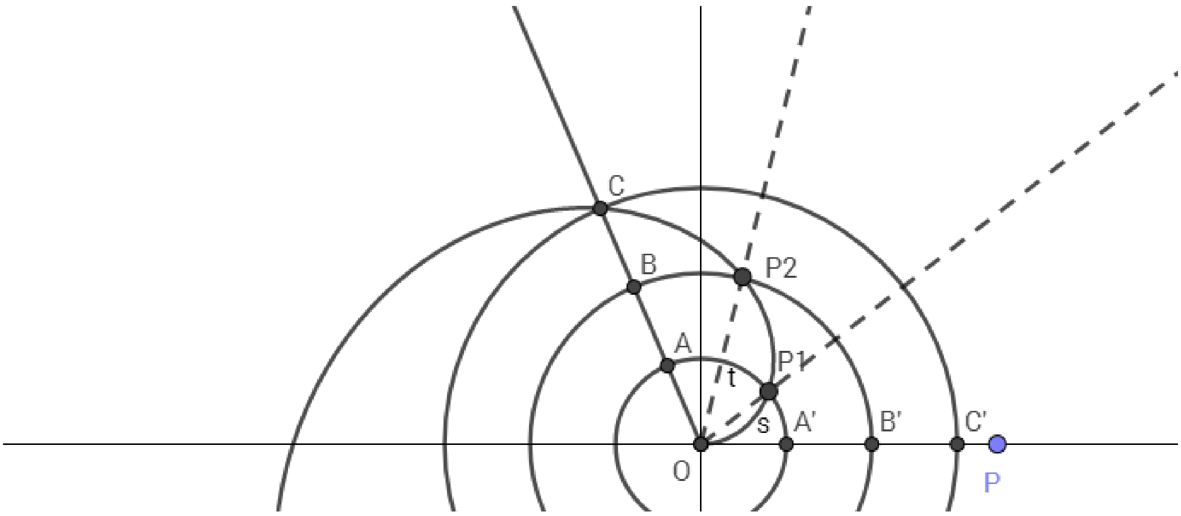


Fonte: O autor

5º Passo

- Marque os pontos P1 e P2, nas interseções da espiral com as circunferências de raio OA e OB, respectivamente. Em seguida, trace as semirretas OP1 e OP2.

Figura 26 – Trisseção do ângulo pela Espiral



Fonte: O autor

Questionário (Resposta esperada)

Pela propriedade das espirais

$$OA = OP1 : OC :: A'P1 : C'C$$

Como

$$OA = OP1 = \frac{1}{3} OC$$

Então

$$A'P1 = \frac{1}{3} C'C$$

4.2.5 Atividade 5

Título: Construindo um quadrado e um círculo com áreas iguais.

Objetivo: Abordando mais um problema clássico, o objetivo dessa atividade é trabalhar o conceito de números irracionais em um contexto de multiplicações e cálculo de áreas.

Série: 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio

Classificação: Médio

Tempo Estimado: Duas horas/aula (50 min)

Material Utilizado: Geogebra

Metodologia: Utilizando o *software* citado, será construindo um quadrado e um círculo equivalente, ou seja, com mesma área, mostrando assim que a solução do problema da "Quadratura do Círculo" se dá com a inserção de um número irracional. Vale ressaltar que será utilizada a espiral de Arquimedes para construir o quadrado.

4.2.5.1 Ficha do Aluno

Nessa atividade, serão construídos um círculo e um quadrado com áreas iguais. Para isso, será utilizado o software Geogebra.

Passo 1

Construa um circulo de raio 1 e centro O, na origem, e marque os pontos de interseção A e B entre a circunferência e o eixo OX.

Passo 2

Para construir a espiral, na **Entrada**, digite $\boldsymbol{r = \theta}$. Em seguida, marque o ponto de interseção P entre a curva e o eixo OY.

Passo 3

Construa um retângulo ABCD cuja base seja o segmento AB e altura OP.

Exercícios

Utilize as ferramentas adequadas do *software* para executar as atividades a seguir.

1) Calcule a área do círculo.

2) Calcule a medida do segmento AB, base do retângulo e diâmetro do círculo.

3) Calcule o valor do segmento OP, altura do retângulo ABCD?

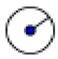
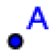
4) Calcule a área do retângulo ADCD.

5) Compare as áreas do retângulo e do círculo.

6) Determine algebricamente a medida do lado de um quadrado que teria a mesma área do círculo. Comente sobre o valor encontrado.

4.2.5.2 Ficha do Professor

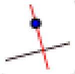
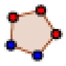
1º Passo

Com o Geogebra aberto, selecione a opção **Circulo dados Centro e Raio** no botão  Em seguida clique na origem e digite 1. Após, com a opção **Ponto**  marque os pontos A e B, clicando nas interseções do círculo com o eixo OX.

2º Passo

Na **Entrada**, digite $\boldsymbol{r = \theta}$. Em seguida, marque o ponto de interseção P entre a curva e o eixo OY.

3º Passo

- Para construir o retângulo ABCD, serão traçadas retas perpendiculares.
- Selecione a opção Reta Perpendicular .
- Clique no eixo OX e no ponto A, clique novamente no eixo OX e depois no ponto B. Finalmente, clique no eixo OY e no ponto P, nessa ordem.
- Marque o ponto D, interseção entre a reta que passa em A e a que passa em P.
- Marque o ponto C, interseção entre a reta que passa em B e a que passa em P.
- Selecione a opção Polígono Regular  e clique nos pontos A, B, C e D, construindo assim o retângulo ABCD.

Exercícios (Respostas Esperadas)

1) Como o raio mede 1, teremos então

$$A = \pi r^2 = \pi, 1^2 = \pi$$

2) Facilmente chega-se a medida do segmento AB pois se trata da distância entre os pontos A(-1,0) e B(1,0), ou até mesmo pelo fato de ser o diâmetro de uma circunferência cujo raio mede 1, portanto AB=2

3) Nota-se que a medida do segmento é imagem da função $\boldsymbol{r = \theta}$ para $\theta = \frac{\pi}{2}$. Assim, OP mede $\frac{\pi}{2}$.

4)

$$A(ABCD) = AB.OP$$

$$A(ABCD) = 2.\frac{\pi}{2}$$

$$A(ABCD) = \pi$$

5) As áreas são iguais

6) Considere um quadrado de lado x e área π. Logo, termos

$$x^2 = \pi$$

$$x = \sqrt{\pi}$$

O lado do quadrado deve ser medir $\sqrt{\pi}$, que é um número irracional.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi possível perceber com esse trabalho o quanto são valiosas para o ensino/aprendizagem da matemática, as diferenciadas vertentes do raciocínio matemático. Apesar de grande parte dos assuntos que eram temas dos estudos de Arquimedes integrar o currículo de matemática na Educação Básica, sua forma de pensar, seus artifícios e métodos são relegados a segundo plano, se não totalmente esquecidos. Um exemplo desse lapso é o **Método da Exaustão**, que sequer é citado na escola, inclusive no Ensino Médio.

O que se busca resgatar com esse trabalho é justamente uma construção de conhecimento alimentada pela curiosidade, pela iniciativa de buscar soluções para problemas e para isso, desenvolver métodos e algoritmos que resolvam as situações. Arquimedes usava seu conhecimento para resolver problemas de ordem diária como deslocar objetos pesados com o uso de alavancas, drenar água para um lugar mais alto, entre outros. Seus inventos bélicos também foram de grande valia para o povo de Siracusa, garantindo uma resistência considerável ao exército romano, que era infinitamente mais numeroso e preparado.

Em uma época onde a escola corre o risco de se tornar uma academia, os professores meros treinadores e os alunos corpulentos acumuladores de fórmulas e passagens secretas para resolver questões e assim passarem no quimérico vestibular, nossa proposta se desvia desse modelo incompleto e fomenta justamente o pensamento crítico e sugestivo, que através do ***milieu***, buscará soluções para as situações propostas. Essa conjuntura é muito propícia à construção de conhecimento por parte do aluno, sendo esse o objetivo principal.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática**. 2 ed. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

ARAUJO, Marcos P. Ferreira de. **Aula 15 – A trisseção de um ângulo?**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=pOP4jYTHPfA>. Acesso em 4 de jun. de 2017.

ASSIS, Andre Koch Torres de; MAGNAGHI, Ceno Pietro. **O Método Ilustrado de Arquimedes**: Utilizando a Lei da Alavanca para Calcular Áreas, Volumes e Centros de Gravidade. Montreal, Quebec, Canadá: Apeiron Montreal, 2014.

ASSIS, André Koch Torres de. Sobre Corpos Flutuantes: Tradução Comentada de um Texto de Arquimedes. **Revista da SBHC**, São Paulo, n. 16, p. 69-80, 1996.

BLOG FATOS MATEMÁTICOS. **A área do segmento e da calota esférica**. Disponível em < Fonte: http://fatosmatematicos.blogspot.com.br>. Acesso em 10 dezembro de 2017.

BORGES FILHO, Francisco. **O desenho e o canteiro no renascimento medieval. (séculos XII e XIII)**: Indicativos da formação dos arquitetos mestres construtores. 2005. 262 f. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, São Paulo, 2005.

BOGOMOLNY, Alexander. **Salinon**: Do Livro de Lemmas de Arquimedes de Matemática Interativa Miscelânea e Puzzles. Disponível em: <https://www.cut-the-knot.org/proofs/Lemma.shtml>. Acesso em 17 de outubro de 2017.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**: Conteúdos e Métodos de Ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques**. Recherches em Didactique des Mathématiques. 2 ed. Grenoble: 1986.

CARVALHO, João Pitombeira . Os três problemas clássicos da Matemática Grega. In: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2., 2004. **Anais...** Salvador: SBM, 2006. p.1-21.

CHANDLER, David. **Finding Pi by Archimedes' Method**. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=_rJdkhlWZVQ&t=209s>. Acesso em 4 de jun. de 2017.

COMANDINNO, Frederico. Euclides - **Elementos de Geometria**. São Paulo: Edições Cultura, 1944.

CONTADOR, Paulo R. M. **Matemática**: Uma Breve História. vol 1, São Paulo: Livraria da Física, 2006.

CORDEIRO, Jean Carlo da Silva. **Utilização do Geogebra na Construção de instrumentos:** Elipsógrafo. 2014. 63 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

CORVEN, O Von. **A grande Biblioteca de Alexandria**. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ancientlibraryalex.jpg>. Acesso em 22 de outubro de 2017.

DASSIE, Bruno Alves; LIMA, M. L. Alves. O livro dos lemas de Arquimedes. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2004, Recife. **Anais...** Recife: SBEM, 2004. p. 1-6.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Campinas, SP: Editora Unicamp, 1995.

FETTI, Domenico. **Arquimedes Pensativo**. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ancientlibraryalex.jpg>. Acesso em 15 de dezembro de 2017.

FREITAS, Juliana Martins. **Os três problemas clássicos da Matemática grega**. 2014. 75 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, SP, 2014.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências**: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

GASPARIN, João Luiz. **Comênio ou da Arte de Ensinar Tudo a Todos**. Papirus, 1994.

HEATCH, T. L. **The work of Archimedes**. Cambridge, 1897.

JÚNIOR, Edmar L. G; BENFICA, Welessandra. A Iniciação ao Pensamento Probabilístico por Intermédio da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2013, Campos dos Goytacazes. **Anais...** Campos dos Goytacazes: IFF – Campos, 2013.

KELLER, Adolf Lutz. **Descobrindo o Número π**. 2013. 66 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, SP, 2013.

KILHIAN, Kleber. **O teorema da corda quebrada**. Disponível em <http://www.obaricentrodamente.com/2015/06/o-teorema-da-corda-quebrada-de.html>, acesso em 24 de set. de 2017.

LÜBECK, Kelly Roberta Mazzutti; LÜBECK, Marcos. **Tópicos sobre o "PI" e os números reais**. In: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 5, 2010, João Pessoa. **Anais...** João Pessoa: SBM, 2010.

NELSEN, Roger. **Proof without words**: The area of a salinon. Disponível em <https://www.cut-the-knot.org/proofs/Lemma.shtml>, acesso em 26 de nov. de 2017.

PITOMBEIRA, João Bosco; ROQUE, Tatiana. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

POMMER, Wagner Marcelo. Brousseau e a ideia de Situações Didáticas. In: Seminário de Ensino de Matemática, 2008, São Paulo. **Anais...** São Paulo: FEUSP, 2008. p. 1-10.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática**: Desde a criação das pirâmides ate a exploração do infinito. São Paulo: M Books, 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
ROQUE, Tatiana. **História da Matemática para Professores 6 – Arquimedes**. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=QEGQe5QBcy8 >. Acesso 5 de mai. de 2017.

ROSS, W. D. **Aristóteles**: Metafísica – Livros I e II. São Paulo: Abril, 1984.

SCOTT, J. F. **A History of Mathematics**. 2 ed. Londes: Taylor & Francis Ltda, 1958.

SILVA, Nilson A. da; FERREIRA, Marcus V. V; TOZETTI, Karla D. **Um estudo sobre a situação didática de Guy Brousseau**. In: EDUCERE – CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 12, 2015, Curitiba. **Anais...** Curitiba: PUCPR, 2015. p. 19950-19961.

SOUZA, Jose Miguel. **Trissecção do Angulo e Duplicação do Cubo**: as Soluções na Antiga Grécia. 2001. 114 f. Dissertação (Mestrado em Matemática – Fundamentos e Aplicações) – Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2001.

SITE EHOW BRASIL. **Foto**. Disponível em: <http://www.ehow.com.br/polias-levantar-objetos-pesados-como_63673/>. Acesso em 25 de novembro de 2017.

SITE FATOS MATEMÁTICOS. **A área do segmento esférico (Arquimedes)**. Disponível em <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2009/07/area-do-segmento-esferico-arquimedes.html>. Acesso em 18 de julho de 2017.

TECHESSE. **Matlab – Exemplo 1: O Cálculo de pi pelo método de Arquimedes**. Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=jbbEe4xZc3s>. Acesso em 4 de jun. de 2017.

TEIXEIRA, Paulo J. M.; PASSOS, Claudio C. M. Um pouco das Situações didática (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetiké – FE/Unicamp**, Campinas, v. 21, n 39, p. 155-168, jan/jun. 2013.

VASCONCELLOS, F. de Almeida. **História das Matemáticas na Antiguidade**. Lisboa: Bertrand, 1975.

VIANA, Carlos Arthur Ferrari. **Facas Artesanais**. Disponível em: < https://www.picstoc.com/media/1292438371478382075_1971389809>. Acesso em 15 de dezembro de 2017.

WEISSTEIN, Eric W. **Arbelos**. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/Arbelos.html>, acesso em 29 de nov. 2017.

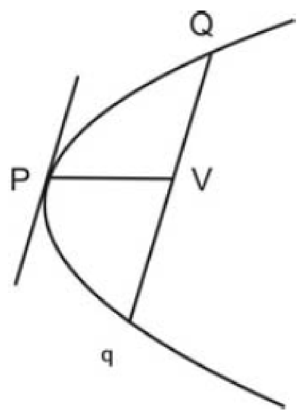
WIJNGAARDEM, M. A. **Foto**. Disponível em: < https://commons.wikimedia.org/wiki/File:IMG_1729_Gemaal_met_schroef_van_Archimedes_bij_Kinderdijk.JPG>. Acesso em 20 de dezembro de 2017.

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DA QUADRATURA DA PARÁBOLA

Roque (2014) afirma que para demonstrar a quadratura da parábola, Arquimedes utilizou algumas proposições que, segundo ele, estavam no livro sobre cônicas de Euclides, um livro a que não se tem acesso. Roque e Pitombeira (2012, p. 109) trazem em seu livro as proposições que seguem:

> Proposição 1: Se por um ponto P de uma parábola traçarmos uma reta PV que é o próprio eixo da parábola ou é paralela a esse eixo, e se Qq é uma corda paralela à tangente à parábola por P e que corta PV em V, então: QV = Vq. Reciprocamente, se QV = Vq, a corda Qq será paralela à tangente em P.

Figura 27 – Propriedade da parábola

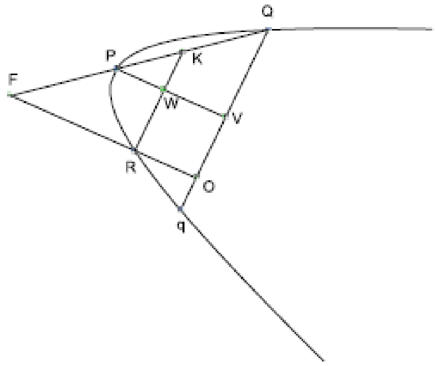


Fonte: ROQUE E PITOMBEIRA, p.109, 2012

Os autores ainda apresentam a seguinte proposição:

> Proposição 3. Se por um ponto da parábola traçarmos uma reta que é o eixo ou é paralela ao eixo da parábola, como PV, e se por dois outros pontos da parábola Q e R traçarmos retas paralelas à tangente à parábola por P e que cortam PV respectivamente em V e W, então PV : PW :: $(QV)^2$: $(RW)^2$. (ROQUE, PITOMBEIRA, 2012, p. 109)

Figura 28 – Propriedade da parábola



Fonte: ROQUE E PITOMBEIRA, p.118, 2012

Roque (2017) ressalta que a propriedade acima pode ser interpretada atualmente como a equação da parábola. Considerando $PV = y$, $PW = y$, $QV = x$ e $RW = x'$, pela Propriedade 3 que

$$PV : PW :: (QV)^2 : (RW)^2 \qquad (1)$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{x^2}{x'^2}$$

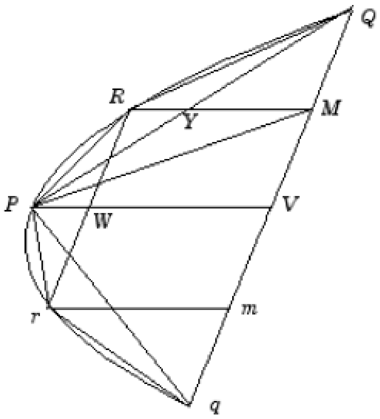
$$y = kx^2$$

Roque (2017) ainda cita que essa relação, chamada **Sintoma da Parábola**, era muito utilizada por geômetras como Euclides, Arquimedes e Apolônio entre outros, e que na verdade não existia a noção de equação e tão pouco de quantidades algébricas; sua interpretação era puramente geométrica e feita com medidas de segmentos.

Roque e Pitombeira (2012) mencionam que Arquimedes afirma que as propriedades anteriores têm suas demonstrações em uma obra de Euclides sobre cônicas, que se havia perdido. Os autores discorrem ainda sobre outras duas propriedades essenciais para a quadratura da parábola.

> Proposição 19. Sejam P o vértice e Q um ponto qualquer sobre a parábola e R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela a PQ, e seja M o ponto em que a paralela ao eixo da parábola por R corta Qq, paralela à tangente em P. Então, PV=(4/3)RM. (ROQUE E PITOMBEIRA, 2012, p. 110)

Figura 29 – Propriedade da parábola



Fonte ROQUE E PITOMBEIRA, p.111, 2012

Concordamos com Roque (2017) quando diz que pela Propriedade 1, observando a figura 14, pode-se afirmar que $PY = YQ$. Por outro lado, como PV é paralelo à RM, os triângulos PQV e YQM são semelhantes. Conclui-se então que assim como $PY = YQ$ tem-se que $MV = MQ$, ou seja $QV = 2MV$, . Como PV e RM também são paralelos, pode-se concluir que $RW = MV \Rightarrow 2RW = 2MV \Rightarrow 2RW = QV$.

Pela Propriedade 19 tem –se que

$$PV : PW :: (QV)^2 : (RW)^2 \tag{2}$$

Por construção $WV = RM$, donde vem que

$$PW = PV - WV = PV - RM \tag{3}$$

Substituindo em (2)

$$PV : PV - RM :: (2RW)^2 : (RW)^2 \tag{4}$$

$$\frac{PV}{PV - RM} = \frac{4RW^2}{RW^2} = 4$$

$$PV = 4PV - 4RM$$

$$PV = \frac{4}{3}RM$$

Roque e Pitombeira (2012, p.111) ainda citam a “**Proposição 21:** Sejam Qq a base e P o vértice de um segmento parabólico PQq. Seja R o ponto no segmento parabólico no qual a tangente é paralela PQ. Então $\Delta PQq = 8\Delta PRQ$.” (Figura 14)

Para demonstrar essa propriedade, Roque (2014) divide a Figura 14 em vários triângulos. Para mostrar que $\Delta PQq = 8\Delta PRQ$, primeiramente mostra-se que $\Delta PQV =$

$4\Delta PRQ$. Para isso, mostra-se que $\Delta PQM = 2\Delta PRQ$. Sabendo que $\Delta PQM = \Delta MQY + \Delta PMY$, deve-se mostrar que $\Delta MQY = 2\Delta RQY$ e $\Delta PMY = 2\Delta PRY$.

Para demonstrar as duas últimas iguadades, a professora mostra pela Propriedade 19 que $MY = 2RY$. Como já foi citado, os triângulos PQV e MQY são semelhantes, logo

$$QV = 2QM \Rightarrow PV = 2MY \qquad (5)$$

Pela Propriedade 19, vem que

$$PV = \frac{4}{3}RM \qquad (6)$$

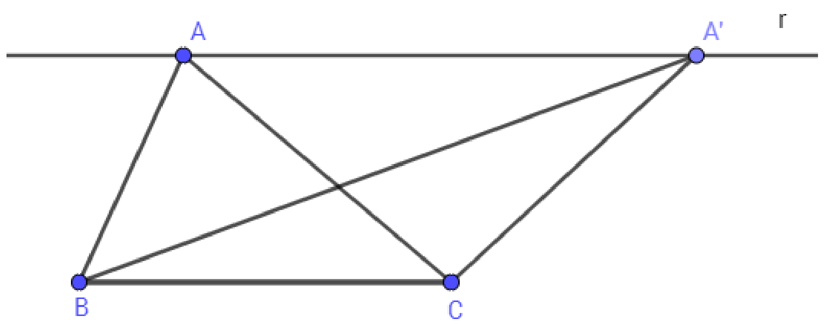
$$2MY = \frac{4}{3}(RY + MY)$$

$$6MY = 4RY + 4MY$$

$$MY = 2RY$$

Roque (2017) evoca também uma proposição presente nos Elementos de Euclides, sobre área de triângulos. A Proposição 38 do Livro I que diz. "**Triângulos com bases iguais e o terceiro vértice na mesma paralela são iguais**" (BORGES FILHO, 2005, p. 31)

Figura 30 – Proposição 38 do Livro I dos Elementos de Euclides



Fonte: O autor

Com base nessas propriedades, Roque (2017) afirma que assim com (7)

$$RY = 2MY$$

então

$$\Delta MQY = 2\Delta RQY \text{ e } \Delta PMY = 2\Delta PRY \qquad (8)$$

Pois os referidos triângulos têm alturas iguais dois a dois.

Logo

$$\Delta PQM = \Delta MQY + \Delta PMY = 2\Delta RQY + 2\Delta PRY = 2(\Delta RQY + \Delta PRY) = 2\Delta PRQ \qquad (9)$$

Conclui-se então, novamente pela Proposição 38 de Euclides que

$$\Delta PMV = \Delta PQM \Rightarrow \Delta PQV = 2\Delta PQM = 4\Delta PRQ \qquad (10)$$

Pela Proposição 1 temos que $QV = Vq$, portanto

$$\Delta PVq = \Delta PQV \Rightarrow \Delta PQq = 2\Delta PQV = 8\Delta PRQ \qquad (11)$$

Roque e Pitombeira (2012) afirmam que a partir dessas proposições, Arquimedes utiliza o método da exaustão para desenvolver a quadratura da parábola.

Considere na Figura 11 que $T = A(\Delta ABC)$. Repare que nos lados AB e BC do triângulo, saão construídos respectivamente os triângulos ΔAPB e ΔBQC, em que se pode afirmar pela Proposição 21 que

$$\Delta ABC = 8\Delta APB \Rightarrow \Delta APB = \frac{T}{8} \qquad (12)$$

De maneira análoga, chegamos a

$$\Delta BQC = \frac{T}{8} \qquad (13)$$

Nesse procedimento,adicionam-se dois triângulos de área $\frac{T}{8}$, ou seja, soma-se $\frac{T}{4}$

Repetindo esse processo, constroem-se quatro novos triângulos cuja área mede $\frac{T}{64}$, somando $\frac{T}{16}$ à área já preenchida.

O que se percebe é que na busca de preencher o segmento parabólico com as contruções desses triângulos, tem-se a seguinte soma, na n-ésima itereção.

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{4^{n-1}} \qquad (14)$$

Roque (2014) afirma que nesse problema, Arquimedes tinha que mostrar que soma acima é igual a $\frac{4}{3}T$. Evitado a soma de uma série infinita, Arquimedes lança mão da **Propriedade 23**: Dada uma sucessão finita de áreas, *A*, *B*, *C*, *D*,...., *Z*, das quais A é a maior, e cada uma das outras é quatro vezes suas sua sucessora, então

$$A + B + C + D + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A \qquad (15)$$

A demonstração da proposição acima é bem simples. Utilizando a premissa da Proposição 23, podemos afirmar que

$$A = 4B, B = 4C, C = 4D, \dots, Y = 4Z \qquad (16)$$

Por outro lado

$$B + C + D + \cdots + Z + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \cdots + \frac{1}{3}Z = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \cdots + \frac{1}{3}Y \qquad (17)$$

Somando A dos dois lados da igualdade obtêm-se

$$A + B + C + D + \cdots + Z + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \cdots + \frac{1}{3}Z = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \cdots + \frac{1}{3}Y + A \qquad (18)$$

Cancelando as parcelas iguais nos dois membros, teremos

$$A + B + C + D + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{1}{3}A + A = \frac{4}{3}A \qquad (19)$$

Logo, pode-se concluir que

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{4^{n-1}} + \frac{1}{3}\frac{T}{4^{n-1}} = \frac{4}{3}T \qquad (20)$$

ROQUE E PITOMBEIRA (2012) afirmam que Arquimedes aplica esse resultado à soma gerada pelas sucessivas contruções de triângulos sobre os lados dos já existentes. Com essas propriedades anteriores, Arquimedes demonstra a quadratura da parábola. A **Propriedade 24**: "Qualquer segmento limitado por uma parábola e um corda Qq é igual a quatro terços do triângulo que tem a mesma base que o segmento e mesma altura que ele." (Figura 11)

Mais uma vez, Arquimedes mostra sua colossal capacidade de agumentar e criar provas que se sustentam até hoje, para os resultados de seus trabalhos. Como Garbi (2006) afirma, Arquimedes utilizava a dupla redução ao absurdo. Nesse trabalho não foi diferente. Seguindo esse racioncínio, vamos denotar a área do segmento como S e a área do triângulo como T. Pela dupla redução ao absurdo, basta mostrar que $S \geq \frac{4}{3}T$ e que $S \leq \frac{4}{3}T$, logo $S = \frac{4}{3}T$. Vamos mostrar que as desigualdades $S < \frac{4}{3}T$ e $S > \frac{4}{3}T$ chegam a absurdos.

Para mostrar que $S > \frac{4}{3}T$ conduz a uma contradição, Arquimedes supõe que após construir triângulos n-vezes nos sobre lados dos triângulos, teremos um polígono cuja área é A, tal que $\frac{4}{3}T <. A < S$. Contudo, pelo processo de construção de tal polígono, pode-se escrever

$$A = T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{4^{n-1}} \qquad (21)$$

Por outro lado, sabemos pela Proposição 23 que

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{4^{n-1}} + \frac{1}{3}\frac{T}{4^{n-1}} = \frac{4}{3}T \qquad (22)$$

Portanto

$$A + \frac{1}{3}\frac{T}{4^{n-1}} = \frac{4}{3}T \qquad (23)$$

$$A = \frac{4}{3}T - \frac{1}{3}\frac{T}{4^{n-1}} \Rightarrow A < \frac{4}{3}T$$

o que é uma contradição pois $A > \frac{4}{3}T$

Para mostrar que $S < \frac{4}{3}T$ também chega a um absurdo, Arquimedes mais uma vez lança mão do raciocínio geométrico, bem diferente das atuais manipulações infinitesimais. Supondo que após m iterações, chega-se a um triângulo cuja área é $T_m = \frac{4}{3}T - S$, uma vez que $\frac{4}{3}T - S < 0$.

Por outro lado

$$T_m = \frac{T}{4^{m-1}} \qquad (24)$$

Pode-se afirmar então que

$$T_m = \frac{T}{4^{m-1}} > \frac{1}{3}T_m = \frac{1}{3}\frac{T}{4^{m-1}} \qquad (25)$$

O que conduz a

$$\frac{4}{3}T - S > \frac{1}{3}\frac{T}{4^{m-1}} \qquad (26)$$

Contudo, pela Proprosição 23 temos

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{4^{m-1}} + \frac{1}{3}\frac{T}{4^{m-1}} = \frac{4}{3}T \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{T}{4^{m-1}} = \frac{4}{3}T - \left(T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{4^{m-1}}\right) \qquad (27)$$

Sustituindo

$$\frac{4}{3}T - S > \frac{4}{3}T - \left(T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{4^{m-1}}\right) \qquad (28)$$

Logo

$$-S > -\left(T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{4^{m-1}}\right) \qquad (29)$$

Que equivale a

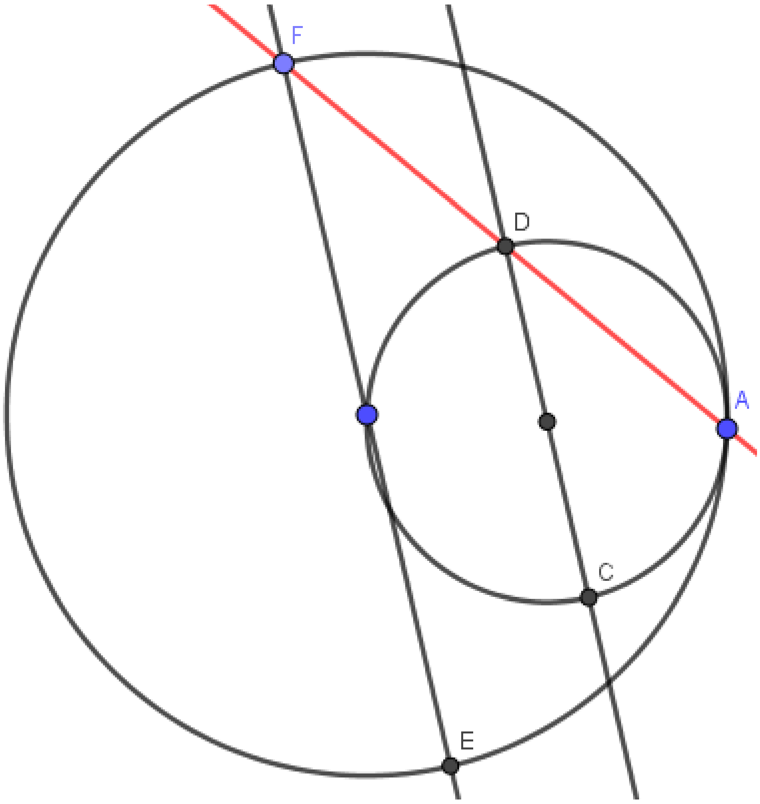
$$S < T + \frac{T}{4} + \frac{T}{16} + \cdots + \frac{T}{4^{m-1}} \qquad (30)$$

O que é uma contradição, pois geométricamente falando a soma das áreas de triângulos inscritos em segmento parabólico sempre será menor que a área do segmento. Com essa dupla redução ao absurdo, Arquimedes mostrou que a área do segmento parabólico é igual a quatro terços da área do triângulo com mesma base e altura.

APÊNDICE B – DEMONSTRAÇÃO ARBELOS

Vamos utilizar uma proposição prévia, que se encontra no mesmo Livro de Lemas. A Proposição 1: "Se dois círculos são tangentes em A, e se BD e EF são diâmetros paralelos, então A, D e F estão alinhados." (DASSIE, LIMA, 2004, p. 4)

Figura 31 – Proposição 1 do Livro dos Lemas de Arquimedes



Fonte: O autor

A demonstração dessa proposição se dá por construção. Primeiramente, denomina-se de O_1 e O_2 os centros das circunferências e traça-se a reta DH, paralela a O_1O_2 e com H em EF. Dessa construção, afirmar-se que

$$O_1H = O_2D = O_2A \tag{1}$$

e

$$O_1F = O_1A \tag{2}$$

Fazendo (1) – (2), teremos

$$HF = O_1O_2 = DH \tag{3}$$

Disso vem que os triângulos AO_2D e DHF são isósceles. Por outro lado, a construção nos fornece a conclusão que os ângulos ADO_2 e DFH são congruentes, logo

$$\angle ADO_2 = \angle DFH \qquad (4)$$

Somando $\angle O_2DF$ nos dois lados, teremos

$$\angle ADO_2 + \angle O_2DF = \angle DFH + \angle O_2DF = 180° \qquad (5)$$

Ou seja, ADF é uma linha reta.

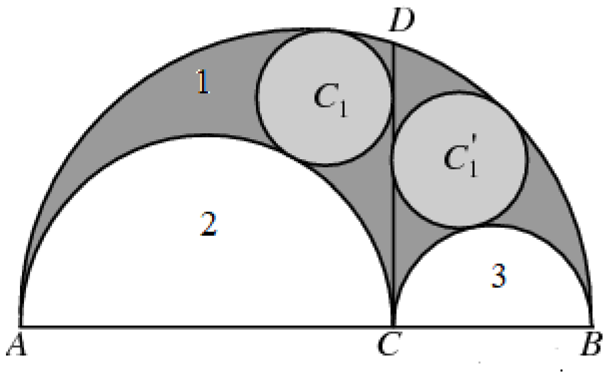
Por conveniência, foi feito o caso das circunferências tangentes internas. Contudo, a demonstração é a mesma para a tangência externa.

Segue-se agora a demonstração da Proposição 5 dos **Livro dos Lemas** de Arquimedes, mais conhecida como **Arbelos** ou Faca de Sapateiro.

> Seja AB o diâmetro de um semicírculo, C um ponto em AB, e CD perpendicular a ele, e seja semicírculos descritos no interior do primeiro semicírculo e tendo AC e CB como diâmetro. Então, se dois círculos forem traçados tangenciando CD em diferentes lados e tangenciando os dois semicírculos, os círculos traçados serão congruentes. (DASSIE; LIMA, 2004, p.4)

Para facilitar a compreensão da proposição bem como de sua demonstração, será feita a construção da figura desde o início. Construa um semicírculo de diâmetro AB (semicírculo 1) , em seguida, marque em AB o ponto C. Construa os semicírculos de diâmetros AC (semicírculo 2) e CB (semicírculo 3) , internamente ao semicírculo 1. Trace agora o segmento CD, perpendicular a AB e com D sendo um ponto do semicírculo de diâmetro AB. Construa agora dois círculos (C_1 e C_2) , um que tangencia simultaneamente CD e os semicírculos 1 e 2, e o outro que tangencie CD e os semicírculos 1 e 3. (Figura 34)

Figura 32 - Arbelos

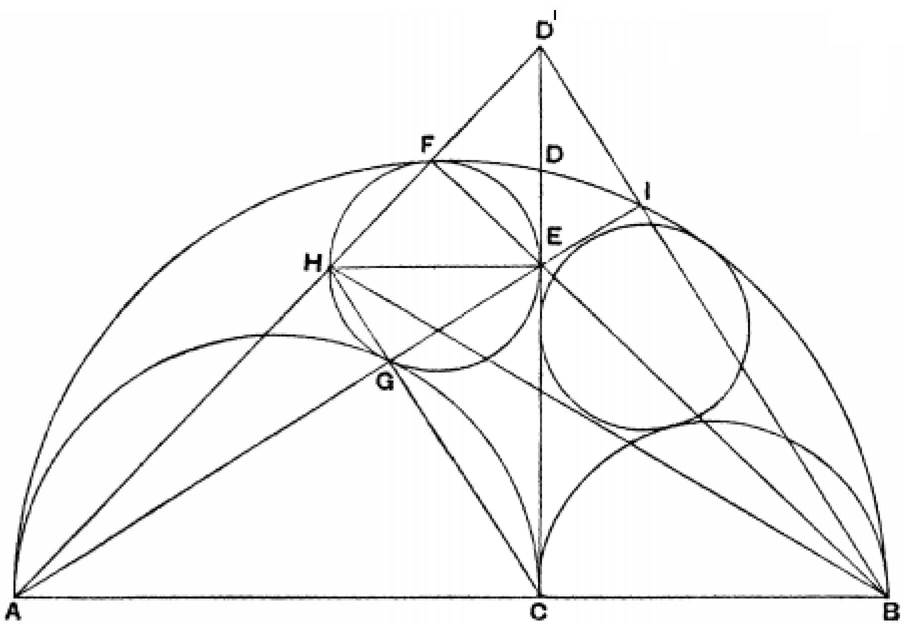


Fonte: WEISSTEIN

Marquemos os pontos G, onde C_1 tangencia o semicírculo 2, F onde C_1 tangencia o semicírculo 1 e E onde C_1 tangencia CD. Trace agora o diâmetro HE de C_1. Como HE é perpendicular a CD, será paralelo a AB. Por último, construa os segmentos FH, HA, FE e EB.

Para conduzir a demonstração, será feito o uso da Proposição 1, que permite afirmar que FHA, assim como FEB, são linhas retas. Utilizando o mesmo argumento, conclui-se que AGE e CGH são linhas retas.

Figura 33 – Demonstração arbelos



Fonte: HEATH, 1912, p. 305, adaptado.

Prolonga-se o AF até D', um ponto da reta CD; prolongue também AE até o ponto I, do semicírculo 1. Em seguida, traçam-se os segmentos BI e ID'. Pode-se observar que o ângulo AIB é inscrito e projeta um arco de 180°, portanto, AIB é reto. Por outro lado, observando o triângulo ABD',afirmar-se pela construção que CD' é perpendicular a AB. Mais uma vez utilizando a propriedade do ângulo inscrito que projeta um arco de 180º, pode se afirmar que FB é perpendicular a AD'. OU seja, CD' e FB são alturas do triângulo ABD' e E, o ponto onde esses segmentos se encontram é o ortocentro do triângulo em questão. Como AI passa por E, é perpendicular ao lado BD'. Conclui-se então que, como os ângulos AIB e AID' são dois retos, então BID' é uma linha reta.

Mais uma vez consegue-se perceber um ângulo reto nessa construção, a saber, o AGC, o que nos garantirá que CH também será perpendicular a AI e nos levará a conclusão que AI e CH são paralelos. Podemos tirar então do triângulo ABD' que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD'}{DH} = \frac{AC}{HE} \tag{6}$$

O que nos leva a

$$AC.CB = AB.HE \tag{7}$$

Considerando ***d*** o diâmetro do outro círculo, pela mesma construção chega-se a

$$AC.CB = AB.d \tag{8}$$

Logo, como HE=***d***, portanto, os círculos são iguais.

APÊNDICE C – DEMONSTRAÇÃO SALINON

Para demonstrar a Proposição 14 do **Livro dos Lemas** de Arquimedes, mais conhecida como **Salinon**, vamos utilizar a **Proposição14 do livro II** dos Elementos de Euclides, que diz

> Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais, e se em direitura com ela se puser outra reta qualquer, serão os quadrados da toda com a adjunta e da adjunta o dobro dos quadrados da metade, e daquela reta, que se compõe da metade e da adjunta. (COMANDINNO, 1944, p. 36)

O que se diz nessa proposição, é que dada um segmento de reta AB, vamos prolongá-lo a partir de B, por exemplo, até o ponto D. Em seguida, marca-se o ponto C, sendo ele o médio entre A e B. (Figura 30).

Figura 34 – Teorema 10 Livro do II dos Elementos de Euclides

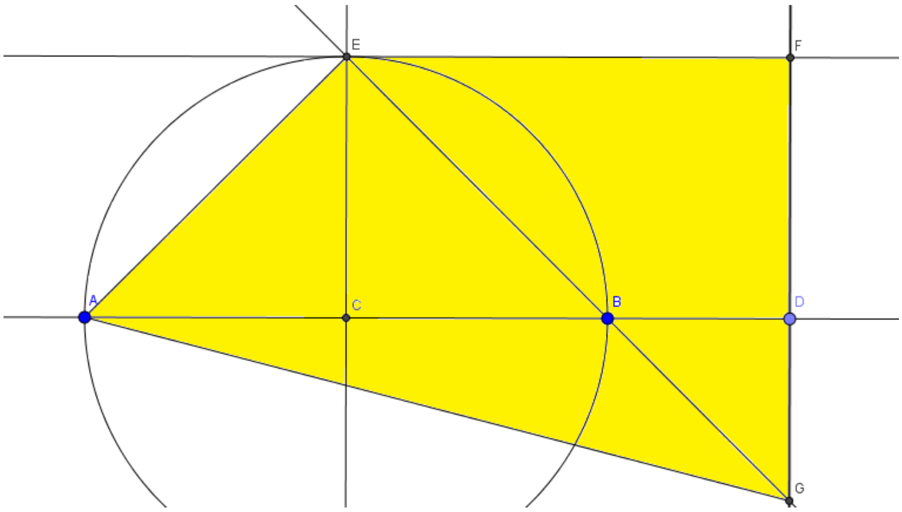
Fonte: O autor

Tem-se então que

$$AD^2 + BD^2 = 2AC^2 + 2CD^2 \qquad (1)$$

Para demonstrar essa proposição, faz-se uma construção a partir da Figura 30. Primeiramente, traça-se o segmento CE, perpendicular a AB, de forma que AC=CE. Em seguida, traça-se uma paralela a AB, que passe por E e, uma paralela a CE que passe em D. Essa retas se encontrarão no ponto F. É necessário agora construir alguns segmentos, a saber, AE e EB. Para concluir, prolonga-se o segmento EB, até que o mesmo corte a reta DF, no ponto G; em seguida, traça-se o segmento AG.

Figura 35 – Teorema 10 Livro II dos Elementos de Euclides



Fonte: O autor

Após a construção, nota-se que o triângulo ACE é retângulo e isósceles, de onde se pode concluir que

$$EA^2 = EC^2 + AC^2 = 2AC^2 \quad (2)$$

Através de observações simples, chega-se a mesma conclusão sobre o triângulo AFG, portanto

$$EG^2 = EF^2 + FG^2 = 2EF^2 \quad (3)$$

Contudo, por construção pode-se afirmar que EF=CD, logo

$$EG^2 = 2CD^2 \quad (4)$$

Somando (2) e (4), vem que

$$EA^2 + EG^2 = 2AC^2 + 2CD^2 \quad (5)$$

Observando o triângulo retângulo AEG, pode-se substituir em (5)

$$AG^2 = 2AC^2 + 2CD^2 \quad (6)$$

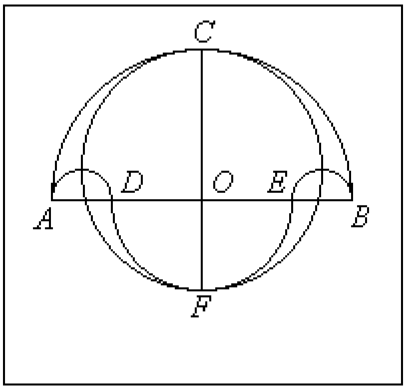
Observando agora o triângulo retângulo ADG, vamos substituir em (6), concluindo que

$$AD^2 + BD^2 = 2AC^2 + 2CD^2 \qquad (7)$$

Feita a demonstração preliminar, partiremos para a demonstração do Salinon. Eis o seu enunciado.

> Seja ACB um semicírculo tendo AB como diâmetro, e seja AD, BE congruentes ao longo de AB a partir de A, B respectivamente. Com AD, BE como diâmetros descreva semicírculos no mesmo lado de C, e com DE como diâmetro um semicírculo no lado oposto. Seja a perpendicular a AB passando por O, o centro do primeiro semicírculo, encontrando os semicírculos nos pontos C, F respectivamente. Então a área da figura limitada pelas semicircunferências de todos os semicírculos é igual a área do círculo tendo CF como diâmetro. (DASSIE; LIMA, 2004, p. 4)

Figura 36 - Salinon



Fonte: BOGOMOLNY

Para utilizar a proposição anterior, considera-se a Figura 35, sendo O é o ponto médio de DE, prolongamos DE em suas extremidades até A e B, de forma que AD=BE. Pela proposição de Euclides, tem-se que:

$$EA^2 + AD^2 = 2EO^2 + 2OA^2 \qquad (8)$$

Por outro lado,

$$CF = OA + EO = EA \qquad (9)$$

Vem disso que

$$AB^2 + DE^2 = 4(EO^2 + 2OA^2) = 2(CF^2 + AD^2 \qquad (10)$$

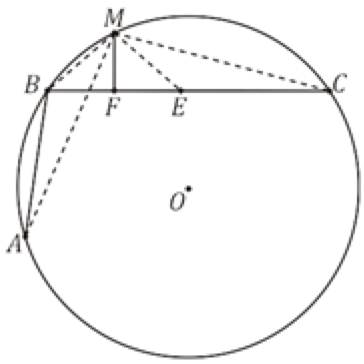
Como as áreas de círculos e semicírculos são proporcionais ao quadrado do diâmetro ou o do raio, podemos concluir com (10) que a soma dos semicírculos de diâmetros AB e DE é igual ao círculo de diâmetro CF, mais a soma dos semicírculos de diâmetros AD e BE. Ou seja, a área do Salinon é igual a área do círculo de diâmetro CF.

APÊNDICE D – DEMONSTRAÇÃO TEOREMA DA CORDA QUEBRADA

Vamos primeiramente enunciar essa elegante proposição.

“Se AB e BC compõem uma corda quebrada ABC, onde BC>AB e se M é o ponto médio do arco ABC, então o pé F da perpendicular de M sobre BC é o ponto médio da corda quebrada.” (KILHIAN, 2015)

Figura 37 – Teorema da Corda Quebrada



Fonte: KILHIAN, 2015

Podemos notar que demonstrar tal teorema equivale a mostrar que na Figura 36

$$AB + BF = FC = \frac{AB + BC}{2} \qquad (1)$$

Considerando AB < BC, pode-se supor que existe um ponto E, em BC, tal que EC=AB. Supõe-se também a hipótese que M é ponto médio do arco ABC, portanto, AM=MC, pois arcos congruentes produzem cordas congruentes. Por outro lado, os ângulos inscritos BAM e MCB projetam o mesmo arco, logo, são congruentes. Como, por suposição existe um ponto E de tal forma que AB=EC, conclui-se que os triângulos ABM e CEM são congruentes pelo caso LAL.

Segue-se dessas congruências que BM=ME, sendo assim, o triângulo BME é isósceles, consequentemente $\angle MBF = \angle MEB$. Como MF é sua altura relativa à base BE, então os triângulos BMF e EMF são congruentes, novamente pelo caso LAA_o. Portanto, BF=FE, o que resulta que

$$AB + BF + EC + FE = FC \tag{2}$$

logo

$$AB + BC = (AB + BF) + FC = 2FC \tag{3}$$

$$\Rightarrow FC = AB + BF = \frac{AB + BC}{2}$$

ANEXO E – DEMONSTRAÇÃO ALGORITMO DE ARQUIMEDES – FRAGMENTO DISSERTAÇÃO DE MESTRADO FLÁVIA ADOLF LUTZ KELLER

Arquimedes, em seu tratado "A medida de um círculo" obteve a aproximação do valor do número π utilizando-se da aproximação do comprimento da circunferência de raio R através do comprimento de polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência.

Arquimedes demonstrou que

$$P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n} \tag{1}$$

$$p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}} \tag{2}$$

sendo que P_n e p_n denotam os perímetros dos polígonos regulares de *n* lados circunscrito e inscrito ao mesmo círculo respectivamente. Para tanto ele iniciou os cálculos obtendo os valores de P_6 e p_6 (hexágonos), e calculando sucessivamente P_{12}, p_{12}, P_{24}, p_{24}, P_{48}, p_{48}, P_{96} e p_{96}.

Nosso objetivo será mostrar estas duas fórmulas e obter os valores encontrados por Arquimedes.

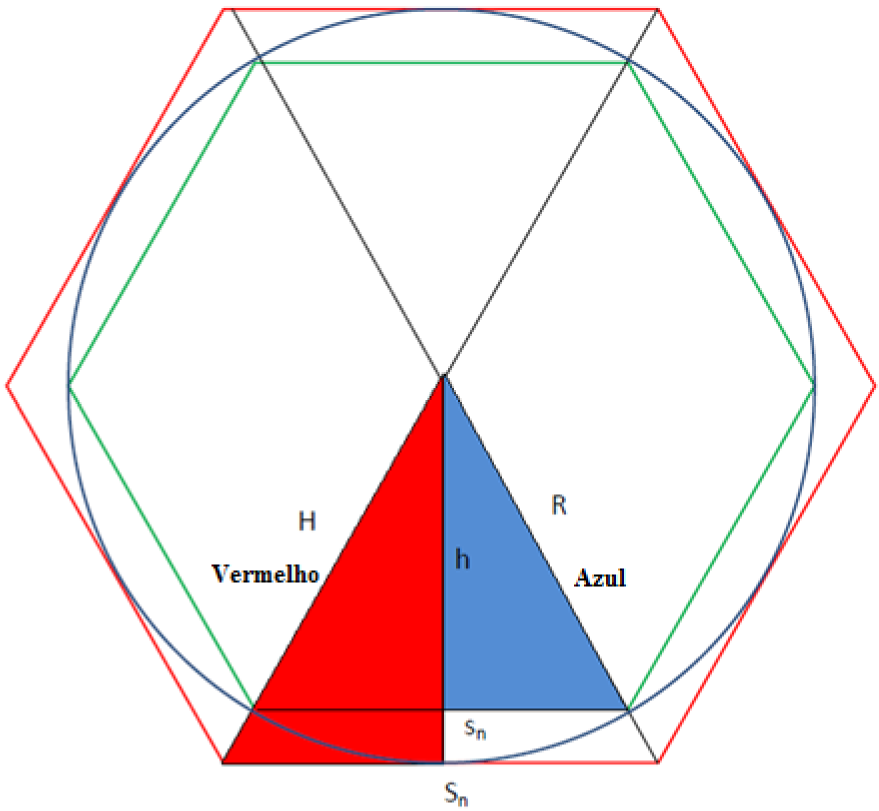
Vamos inicialmente demonstrar que tendo dois polígonos regulares de *n* lados, um inscrito e outro circunscrito a um círculo, podemos obter a medida do lado de um a partir da medida do lado do outro. Denotemos por S_n a medida do lado do polígono circunscrito e s_n a medida do lado do polígono inscrito, e seja R o raio da circunferência. Então valem as seguintes relações

$$s_n = \frac{2RS_n}{\sqrt{4R^2 + S_n^2}} \tag{3}$$

$$S_n = \frac{2Rs_n}{\sqrt{4R^2 - s_n^2}} \tag{4}$$

A figura a seguir servirá de auxílio aos cálculos. Apesar de a figura ser um hexágono, os resultados obtidos não dependem deste fato.

Figura 38 – Relações no polígono inscrito e circunscrito



Fonte: KELLER, 2011, p. 53.

Aplicando o Teorema de Pitágoras temos as seguintes relações

$$H^2 = R^2 + \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 = \frac{4R^2 + S_n^2}{4} \rightarrow H = \sqrt{\frac{4R^2 + S_n^2}{2}} \qquad (5)$$

$$h^2 = R^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 = \frac{4R^2 + s_n^2}{4} \rightarrow h = \sqrt{\frac{4R^2 + s_n^2}{2}} \qquad (6)$$

Não é difícil verificarmos que os triângulos azul e vermelho são semelhantes pelo caso AA (Caso Ângulo – Ângulo). Portanto temos

$$\frac{\frac{S_n}{2}}{\frac{s_n}{2}} = \frac{H}{R} \rightarrow \frac{S_n}{s_n} = \frac{\frac{\sqrt{4R^2 + S_n^2}}{2}}{R} \rightarrow s_n = \frac{2RS_n}{\sqrt{4R^2 + S_n^2}} \qquad (7)$$

Analogamente podemos obter a medida do lado Sn do polígono circunscrito a partir da medida do lado s_n do polígono inscrito, ambos em um círculo de raio R. Da relação acima temos que

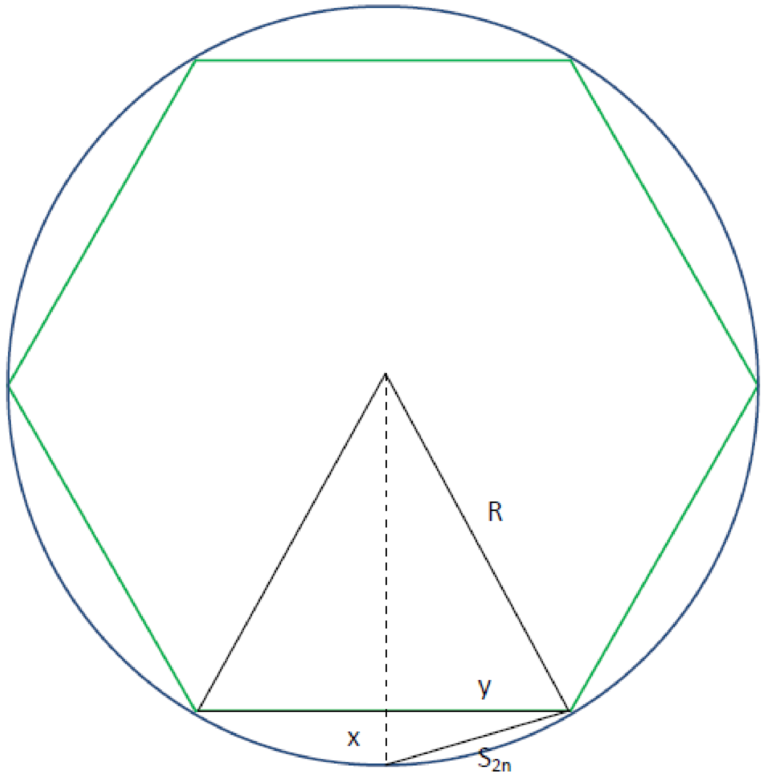
$$\frac{\frac{S_n}{2}}{\frac{s_n}{2}} = \frac{R}{h} \rightarrow \frac{S_n}{s_n} = \frac{R}{\frac{\sqrt{4R^2 - s_n^2}}{2}} \rightarrow S_n = \frac{2Rs_n}{\sqrt{4R^2 - s_n^2}} \qquad (8)$$

concluindo assim a demonstração das fórmulas (3) e (4).

Agora, vamos mostrar uma fórmula geral para encontrar o lado de um polígono regular de 2n lados inscrito em um círculo em função de um polígono de n lados.

Para ilustração usaremos o hexágono

Figura 39 – Relações no polígono regular inscrito de n e 2n lados.



Fonte: KELLER, 2011, p. 53.

Denotemos por x a diferença entre a medida do raio do círculo e a medida da altura do triângulo isósceles formado e y a metade da medida do lado do polígono inscrito neste círculo.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$R - x = \sqrt{R^2 - y^2} \rightarrow x = R - \sqrt{R^2 - y^2} \rightarrow \tag{9}$$
$$x^2 = R^2 - 2R\sqrt{R^2 - y^2} + R^2 - y^2 \rightarrow$$
$$x^2 + y^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - y^2}$$

Por outro lado, temos que

$$(s_{2n})^2 = x^2 + y^2 \tag{10}$$

Logo

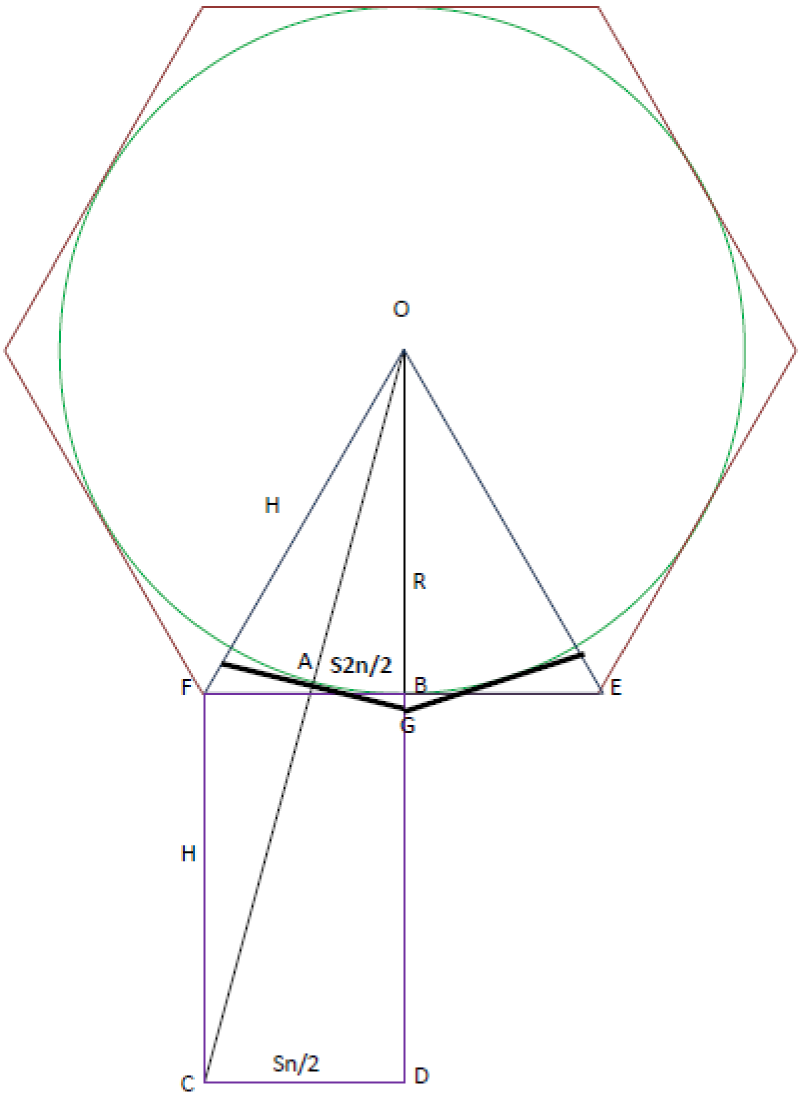
$$(s_{2n})^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - y^2} \rightarrow s_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}} \tag{11}$$

o que nos leva a

$$S_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - s_n^2}}. \tag{12}$$

Na sequência, demonstraremos uma fórmula que nos permite determinar o lado de um polígono regular circunscrito a um círculo com 2n lados, conhecendo o lado do polígono circunscrito de n lados. Novamente com o auxílio da figura temos

Figura 40 – Relações no polígono regular circunscrito de n e 2n lados



Fonte: KELLES, 2011, p. 55.

Sejam A, B, C, D, E, F e G pontos tais que A é ponto médio do lado do polígono circunscrito de 2n lados, BDCF um retângulo com lados medindo H e Sn/2, OEF um triângulo isósceles com lados congruentes iguais a H e base o lado do polígono regular circunscrito de n lados. O ponto G é o vértice do polígono circunscrito de 2n lados.

Aplicando Teorema de Pitágoras no triângulo OBE obtemos

$$H^2 = \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 + R^2 \rightarrow H = \frac{1}{2}\sqrt{S_n^2 + 4R^2}. \qquad (13)$$

Observe que os triângulos AOG e DOC são retângulos em A e D e tem o ângulo O em comum, por isso, pelo caso AA, eles são semelhantes. Portanto vale a seguinte relação

$$\frac{\frac{S_{2n}}{2}}{\frac{S_n}{2}} = \frac{R}{R+H} \rightarrow \frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{R'}{R + \frac{1}{2}\sqrt{S_n^2 + 4R^2}} \rightarrow s_{2n} = \frac{2RS_n}{2R + \sqrt{S_n^2 + 4R^2}} \qquad (14)$$

Usando as expressões deduzidas acima, vamos agora demonstrar as fórmulas (1) e (2) utilizadas por Arquimedes. Mostraremos inicialmente a fórmula (1), isto é $P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n+P_n}$, em que P_n e p_n correspondem aos perímetros dos polígonos regulares de lados *n* circunscrito e inscrito no círculo de raio R.

De fato. Por (4) temos que

$$P_{2n} = 2n.S_{2n} = 2n\frac{2RS_n}{2R + \sqrt{S_n^2 + 4R^2}} = 2n\frac{2RS_n}{2R + \frac{2RS_n}{s_n}} = \frac{4nRS_ns_n}{2Rs_n + 2RS_n} \qquad (15)$$

$$= \frac{2nS_ns_n}{s_n + S_n} = \frac{2nS_nns_n}{ns_n + nS_n} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n}$$

Vamos agora demonstrar a fórmula $p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$.

Já sabemos que

$$s_n = \frac{2RS_n}{\sqrt{4R^2 + S_n^2}} \Longrightarrow \sqrt{4R^2 + S_n^2} = \frac{2RS_n}{s_n} \qquad (16)$$

$$S_n = \frac{2Rs_n}{\sqrt{4R^2 - s_n^2}} \Longrightarrow \sqrt{4R^2 - s_n^2} = \frac{2Rs_n}{S_n} \qquad (17)$$

$$\sqrt{4R^2 + S_n^2} = \sqrt{4R^2 + \frac{4R^{2s_n^2}}{4R^2 - s_n^2}} = \sqrt{\frac{16R^4 - 4R^{2s_n^2} + 4R^{2s_n^2}}{4R^2 - s_n^2}}$$

$$(18)$$

$$= \sqrt{\frac{16R^4}{4R^2 - s_n^2}} = \frac{4R^2}{\sqrt{4R^2 - s_n^2}} \Rightarrow$$

$$4R^2 = \sqrt{4R^2 + S_n^2}\sqrt{4R^2 - s_n^2}$$

Assim

$$s_n^2 = \frac{4R^{2S_n^2}}{4R^2 + S_n^2} \Leftrightarrow 4R^{2s_n^2} + s_n^2 S_n^2 = 4R^{2S_n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4R^2 S_n}{s_n} = \frac{4R^2 s_n}{S_n} + \frac{s_n S_n^2}{S_n}$$

(19)

$$\Leftrightarrow 4R^2 \frac{2RS_n}{s_n} = 4R^2 \frac{2Rs_n}{S_n} + S_n^2 \frac{2Rs_n}{S_n}$$

$$\Leftrightarrow 4R^3 \sqrt{4R^2 + S_n^2} = 4R^3 \sqrt{4R^2 - s_n^2} + S_n^2 R \sqrt{4R^2 - s_n^2}$$

$$\Leftrightarrow 4R^3 \sqrt{4R^2 + S_n^2} - 4R^3 \sqrt{4R^2 - s_n^2} - S_n^2 R \sqrt{4R^2 - s_n^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4R^3 \sqrt{4R^2 + S_n^2} + 8R^4 - 8R^4 - 4R^3 \sqrt{4R^2 - s_n^2} - S_n^2 R \sqrt{4R^2 - s_n^2} + 2R^2 S_n^2 = 2R^2 S_n^2.$$

Substituindo a equação (19) temos

(20)

$$4R^3 \sqrt{4R^2 + S_n^2} + 8R^4 + 2R^2 S_n^2 - 2R^2 \sqrt{4R^2 + S_n^2} \sqrt{4R^2 - s_n^2}$$

$$-4R^3 \sqrt{4R^2 - s_n^2} - S_n^2 R \sqrt{4R^2 - s_n^2} = 2R^2 S_n^2$$

$$\Leftrightarrow 2R^2 \left(2R \sqrt{4R^2 + S_n^2} + 4R^2 + S_n^2 \right) - R \sqrt{4R^2 - s_n^2} \left(2R \sqrt{4R^2 + S_n^2} + 4R^2 + S_n^2 \right) = 2R^2 S_n^2$$

$$\Leftrightarrow \left(2R \sqrt{4R^2 + S_n^2} + 4R^2 + S_n^2 \right) \left(2R^2 - R \sqrt{4R^2 - s_n^2} \right) = 2R^2 S_n^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4R^2 + S_n^2} \left(2R + \sqrt{4R^2 + S_n^2} \right) (s_{2n})^2 = 2R^2 S_n^2$$

$$\Leftrightarrow (s_{2n})^2 = \frac{2R^2S_n^2}{\sqrt{4R^2+S_n^2}\left(2R+\sqrt{4R^2+S_n^2}\right)} =$$

$$\frac{RS_n}{\sqrt{4R^2+S_n^2}} \cdot \frac{2RS_n}{2R+\sqrt{4R^2+S_n^2}} = \frac{S_n}{2} . S_{2n}$$

Portanto, $(s_{2n})^2 = \frac{s_n}{2} . S_{2n}$, o que nos leva a

$$4n^2(s_{2n})^2 = 4n^2\frac{s_n}{2}S_{2n} \tag{21}$$

$$\Leftrightarrow (2ns_{2n})^2 = ns_n . 2n . S_{2n}$$

$$\Leftrightarrow (p_{2n})^2 = p_nP_{2n}$$

$$\Leftrightarrow p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}$$

concluindo assim a demonstração.

Voltando aos cálculos de Arquimedes, vamos determinar o valor de π para os polígonos de 6, 12, 24, 48 e 96 lados. Para o polígono hexágono temos

$$p_6 < A_c < P_6$$

ou seja,

$$6R < 2\pi R < 4R\sqrt{3}$$

e dividindo por *2R* concluímos, com 4 casas decimais de aproximação, que

$$3 < \pi < 3{,}4641$$

Para o polígono de 12 lados, temos

$$P_{12} = \frac{2.6.R.4.R\sqrt{3}}{6R + 4R\sqrt{3}} = \frac{24R\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = \frac{24R\sqrt{3}(3 - 2\sqrt{3})}{9 - 12} = 8R\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 3) = 48R - 24R\sqrt{3}$$

$$p_{12} = \left[6R(48R - 24R\sqrt{3})\right]^{1/2} = \sqrt{144R^2(2 - \sqrt{3})} = 12R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Assim

$$p_{12} < A_c < P_{12}$$

Levando a

$$12R\sqrt{2 - \sqrt{3}} < 2\pi R < 48R - 24R\sqrt{3}$$

Dividindo tudo por *2R* obtemos

$$6\sqrt{2 - \sqrt{3}} < \pi < 24 - 12\sqrt{3}$$

Usando 6 casas decimais de aproximação obtemos

$$3{,}105828 < \pi < 3{,}21539$$

Para o polígono de 24 lados temos

$$P_{24} = \frac{2.24R(2 - \sqrt{3}).12R\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{24R(2 - \sqrt{3}) + 12R\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{48R(2 - \sqrt{3})\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2(2 - \sqrt{3}) + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

$$= 48R\,\frac{(2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}}.\left[2(2 - \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\right]}{4(2 - \sqrt{3}) - 1} = 48R\,\frac{2(2 - \sqrt{3})^{\frac{3}{2}} - (2 - \sqrt{3})}{7 - 4\sqrt{3}}$$

$$= 48R\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left[2\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]\left(7+4\sqrt{3}\right)}{49-48} = 48R\left(2+\sqrt{3}\right)\left[2\sqrt{2-\sqrt{3}}-1\right].$$

Agora, para o polígono p_{24} temos

$$p_{24} = \left[12R\sqrt{2-\sqrt{3}}.\,48R\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt{576R^2\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2\left(2-\sqrt{3}\right)-\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} =$$

$$24R\sqrt{2(4-3)-\left(2+\sqrt{3}\right)-\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$24R\sqrt{2-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Assim, como $p_{24} < A_c < P_{24}$ então

$$24R\sqrt{2-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}} < 2\pi R < 48R\left(2+\sqrt{3}\right)\left[2\sqrt{2-\sqrt{3}}-1\right]$$

onde segue que

$$12\sqrt{2-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}} < \pi < 24\left(2+\sqrt{3}\right)\left[2\sqrt{2-\sqrt{3}}-1\right]$$

O que nos dá, com 9 casas decimais de aproximação

$$3{,}132628631 < \pi < 3{,}159716334.$$

Repetindo o argumento para o polígono de 48 lados, temos:

$$P_{48} = \frac{2.6{,}26525726R\,.\,6{,}319432668R}{6{,}265257262R + 6{,}319432668R} = \frac{79{,}18574283R^2}{12{,}58468993R} = 6{,}291123885R$$

e

$$p_{48} = (6{,}265257262R\,.\,6{,}291123885R)^{\frac{1}{2}} = 6{,}278177252R.$$

Uma vez que $p_{48} < A_c < P_{48}$ e, para evitar maiores equações aproximando as expressões obtemos que

$$6{,}278177252R < 2\pi R < 6{,}291123885$$

ou seja

$$3{,}139088626 < \pi < 3{,}145561943$$

Para o polígono de 96 lados temos

$$P_{96} = \frac{2\,.\,6{,}278177252R\,.\,6{,}291123885R}{6{,}278177252R + 6{,}291123885R} = \frac{78{,}993558173R^2}{12{,}56930114R} = 6{,}284643899R$$

e

$$p_{96} = (6{,}278177252R\,.\,6{,}284643899R)^{\frac{1}{2}} = 6{,}281409743R$$

portanto $p_{96} < A_c < P_{96}$ e

$$6{,}281409743R < 2\pi R < 6{,}284643899R$$

e dividindo por 2R, nos dá aproximação, com 9 casas decimais

$$3{,}140704872 < \pi < 3{,}14232195$$

Podemos continuar o processo para obtermos uma aproximação do valor do número π com precisão desejada.