

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
PROFMAT**

**JAQUELINE DOS SANTOS**

**INTRODUÇÃO AO CONCEITO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL: UM OLHAR PARA  
A EDUCAÇÃO INCLUSIVA**

**CURITIBA**

**2018**



JAQUELINE DOS SANTOS

**INTRODUÇÃO AO CONCEITO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL: UM OLHAR PARA  
A EDUCAÇÃO INCLUSIVA**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dra. Neusa Nogas Tocha

CURITIBA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

---

S237i Santos, Jaqueline dos, 1992-  
2018 Introdução ao conceito da função exponencial : um olhar para  
a educação inclusiva / Jaqueline dos Santos.-- 2018.  
92 p. : il. ; 30 cm

Disponível também via World Wide Web  
Texto em português com resumo em inglês  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do  
Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional, Curitiba, 2018  
Bibliografia: f. 83-85

1. Funções exponenciais. 2. Educação inclusiva – Santa Catarina. 3. Deficientes. 4. Braille (Sistema de escrita). 5. Jovens deficientes – Educação – Santa Catarina. 6. Inclusão escolar – Legislação. 7. Matemática – Estudo e ensino. 8. Material didático. 9. Matemática – Dissertações. I. Tocha, Neusa Nogas, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

---

CDD: Ed. 22 – 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba  
Bibliotecária : Anna T. R. Caruso CRB9/935



## TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 49

A Dissertação de Mestrado intitulada “Introdução ao conceito da função exponencial: um olhar para a educação inclusiva”, defendida em sessão pública pelo(a) candidato(a) **Jaqueline dos Santos**, no dia 23 de fevereiro de 2018, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

### BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). Neusa Nogas Tocha - Presidente – UTFPR

Prof(a). Dr(a). Márcio Rostirolla Adames – UTFPR

Prof(a). Dr(a). Carlos Henrique dos Santos - UFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 23 de fevereiro de 2018.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

*Dedico esse trabalho aos meus pais Marlene e Lindomar e à minha irmã Gislaine que sempre me incentivaram para a realização dos meus ideais, encorajando-me a enfrentar todos os momentos difíceis da vida. Amo vocês!*

## AGRADECIMENTOS

- Agradeço a Deus pela vida, saúde e sabedoria para enfrentar os desafios durante essa trajetória.
- À minha família, meus pais Lindomar e Marlene e minha irmã Gislaine, pelo apoio e torcida durante todo o mestrado. Vocês são meus exemplos de vida e a melhor parte de mim!
- Às minhas avós, que sempre cuidaram de mim e lá do céu se fizeram presente ao longo da caminhada e emanaram forças para que eu nunca desistisse. Que possam sempre se orgulhar de mim, amo vocês!
- Aos colegas e professores do PROFMAT, pela amizade, companheirismo, ensinamentos e trocas de experiências em todos os momentos dessa caminhada.
- À amiga Helena, pela amizade, sonhos compartilhados, pelos momentos de alegria e angústia durante todo curso. A nossa amizade tornou a trajetória mais leve, obrigada por tudo!
- À amiga Roxany, que mesmo de longe contribuiu para a realização desse sonho.
- Aos alunos que participaram da pesquisa, com vocês aprendi que devemos valorizar as pequenas coisas e a superar todos os limites e dificuldades do cotidiano.
- À Sociedade Brasileira de Matemática pela criação do PROFMAT.
- Especialmente à minha orientadora, Professora Neusa Nogas Tocha, por ter acreditado nas minhas ideias, pelas sugestões, contribuições e paciência durante este árduo período. Não esquecerei seus eternos ensinamentos, seus preciosos conselhos e sua inestimável confiança. Muito obrigada!
- Por fim, agradeço àqueles que passaram por minha vida durante o mestrado e contribuíram na realização de mais um sonho.



*“Não há melhor maneira de agradecer a Deus pela  
visão, do que dar ajuda a alguém que não possui”.*  
*(Helen Keller)*



## RESUMO

SANTOS, Jaqueline dos. **Introdução ao conceito da função exponencial**: um olhar para a educação inclusiva. 92 p. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Embasada nas dificuldades para ensinar Função Exponencial no Ensino Médio, o presente trabalho apresenta uma sequência didática para introduzir o conceito de função exponencial, aplicada com alunos regulares e inclusos. A aplicação aconteceu em duas escolas da rede estadual de Santa Catarina e envolveu uma turma regular de 1ª série e dois alunos inclusos (sendo um deficiente visual e outro deficiente mental) no nível de ensino médio. A abordagem para os alunos inclusos é feita utilizando-se de materiais adaptados, como o Multiplano. O trabalho aborda, também, um breve estudo sobre as deficiências, os avanços na legislação para inclusão de deficientes e as possibilidades de materiais e métodos para o ensino-aprendizagem.

**Palavras-chave:** Função Exponencial. Educação Inclusiva. Deficiências. Multiplano.





## ABSTRACT

SANTOS, Jaqueline dos. **Introduction to the concept of exponential function**: a perspective to the inclusive education. 92 p. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Based on the difficulties to teach Exponential Function in the high school, the present study presents a didactic sequence to introduce the concept of Exponential Function, applied with regular students and included ones. The application happened in two public schools in the state of Santa Catarina and involved a regular class of 1st grade and two included students (a visual-impaired and a mentally-impaired) in the high school. The approach to the included students is done through the use of adapted materials, as the Multiplano. The research also approaches a brief study about disabilities, the advances in legislation to include disable people and the possibilities of materials and methods to teaching-learning process.

**Keywords:** Exponential Function. Inclusive Education. Disabilities. Multiplano.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Aumento do número de matrículas de alunos portadores de necessidades especiais 2007-2013. . . . .	21
Figura 2 – Proporção da matrícula de alunos incluídos em relação à matrícula de alunos com deficiência por localização e rede de ensino - Brasil 2016 . . . . .	26
Figura 3 – Cella Braille . . . . .	33
Figura 4 – Configuração das letras "a", "b" e "c". . . . .	34
Figura 5 – Disposição Universal dos 63 Sinais Simples do Sistema Braille. . . . .	35
Figura 6 – Instrumentos para escrita em Braille . . . . .	36
Figura 7 – Teclas da máquina de escrever em Braille . . . . .	37
Figura 8 – Tipos de reglete. . . . .	37
Figura 9 – Funcionamento da reglete positiva . . . . .	38
Figura 10 – Números Indu-arábicos no Código Braille . . . . .	38
Figura 11 – Operações fundamentais em Braille . . . . .	39
Figura 12 – Números negativos, decimais, potência e raiz quadrada em Braille . . . . .	39
Figura 13 – <i>Kit</i> multiplano . . . . .	40
Figura 14 – Peças do <i>kit</i> multiplano . . . . .	41
Figura 15 – Exemplos de funções afim no <i>kit</i> multiplano . . . . .	42
Figura 16 – Materiais adaptados para alunos cegos . . . . .	43
Figura 17 – Calculadora para alunos cegos . . . . .	43
Figura 18 – Lousa <i>Communicare</i> . . . . .	44
Figura 19 – Gráfico da função exponencial . . . . .	53
Figura 20 – Exemplos de Funções Exponenciais . . . . .	53
Figura 21 – Compartivo entre Função Exponencial e Função Polinomial . . . . .	54
Figura 22 – Atividade Aplicada - parte inicial . . . . .	58
Figura 23 – Tabuleiro com texturas . . . . .	58
Figura 24 – Observação do tabuleiro de xadrez adaptado . . . . .	63
Figura 25 – Apostila em Braille . . . . .	64
Figura 26 – Respostas erradas questão 3 . . . . .	64
Figura 27 – Respostas das questões 1, 2 e 3 - Aluna L. . . . .	65
Figura 28 – Respostas das questões 1, 2 e 3 - Aluno A. . . . .	66
Figura 29 – Respostas da questão 4a . . . . .	67
Figura 30 – Respostas da questão 4b . . . . .	68
Figura 31 – Respostas da questão 4c . . . . .	69
Figura 32 – Respostas da questão 4 - Aluna L. . . . .	70
Figura 33 – Gráfico da função exponencial - Aluno A. . . . .	71
Figura 34 – Respostas da questão 5 . . . . .	72

Figura 35 – Resposta questão 5 - Aluna L. . . . .	73
Figura 36 – Resposta questão 5 - Aluno A. . . . .	73
Figura 37 – Respostas da questão 6 . . . . .	74
Figura 38 – Resposta questão 6 - Aluna L. . . . .	75
Figura 39 – Resposta questão 6 - Aluno A. . . . .	75
Figura 40 – Respostas da questão 7 . . . . .	76
Figura 41 – Gráfico questão 7 . . . . .	77
Figura 42 – Respostas da questão 8 . . . . .	78
Figura 43 – Questão 8 - Aluno A. . . . .	79

# SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>1</b>	<b>A EDUCAÇÃO ESPECIAL</b> . . . . .	<b>21</b>
1.1	EDUCAÇÃO INCLUSIVA . . . . .	21
1.2	POLÍTICAS PÚBLICAS DE EDUCAÇÃO INCLUSIVA . . . . .	22
1.3	DAS DEFICIÊNCIAS . . . . .	26
1.3.1	Deficiência visual . . . . .	26
1.3.2	Deficiência mental . . . . .	28
<b>2</b>	<b>METODOLOGIAS E MATERIAIS PARA O ENSINO DE ESTUDANTES COM DEFICIÊNCIA</b> . . . . .	<b>31</b>
2.1	METODOLOGIAS . . . . .	31
2.2	O SISTEMA BRAILLE . . . . .	33
2.2.1	Algumas representações matemáticas em braille . . . . .	38
2.3	O MULTIPLANO . . . . .	39
2.3.1	Usando o multiplano na construção de gráficos . . . . .	41
2.4	OUTROS MATERIAIS . . . . .	42
<b>3</b>	<b>FUNÇÃO EXPONENCIAL</b> . . . . .	<b>45</b>
3.1	BREVE HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO . . . . .	45
3.1.1	Uma breve explanação sobre as origens da função exponencial . . . . .	48
3.2	CARACTERÍSTICAS E PROPRIEDADES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL . . . . .	48
3.3	GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL . . . . .	52
<b>4</b>	<b>RELATO DE EXPERIÊNCIA</b> . . . . .	<b>55</b>
4.1	O GRUPO ESCOLHIDO PARA IMPLEMENTAÇÃO . . . . .	55
4.2	PREPARAÇÃO DAS ATIVIDADES . . . . .	56
4.3	DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES . . . . .	62
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>81</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>83</b>
	<b>ANEXO A – ATIVIDADE FUNÇÃO EXPONENCIAL</b> . . . . .	<b>87</b>



## INTRODUÇÃO

Baseada na experiência com Ensino Médio, alguns alunos apresentam muita dificuldade quando tratamos do ensino-aprendizagem de Função Exponencial. Dificuldade que pode ser agravada quando o aluno for portador de deficiência. A inclusão de todos esses alunos portadores de necessidades especiais em turmas regulares está garantida por lei. Mas, para que possamos realmente incluí-los, como qualquer outro aluno, cabe ao professor buscar adaptações e alternativas na tentativa de melhoria do ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Fernandes, assevera que:

O modo de trabalhar Matemática com os cegos pode facilitar a reflexão e busca para outros grupos de educandos com necessidades especiais (guardadas as diferenças) e inclusive a Didática da Matemática em geral, pois, se a metodologia de investigação é análoga, as soluções, podem ser indicadoras de soluções a seguir em cada caso. Dentro desta perspectiva, cada aprendiz é percebido como um aprendiz com necessidades especiais cabendo à Educação Matemática, como a todas as áreas da Educação, estruturar-se para potencializar suas competências e habilidades, e fazer desaparecer a palavra e o conceito “deficiente”. (FERNANDES, 2004)

No primeiro capítulo abordamos a Educação Especial enfatizando as dificuldades históricas em se trabalhar a educação inclusiva, as políticas públicas que garantem os alunos especiais nas escolas regulares e as melhoras que trouxeram para esse processo. Contextualizamos os tipos de deficiência apresentados no estudo de caso.

As metodologias e materiais para o ensino de estudantes com deficiência são abordadas no capítulo 2. Fez-se necessário o estudo do código Braille para elaborar as atividades do aluno cego e posteriormente analisá-las. Apresentamos o material didático especializado Multiplano, a fim de facilitar o entendimento e análise da função exponencial, bem como outros materiais.

Embasado pelo fato de que o tema da presente dissertação foi escolhido por tratar de um conteúdo com grande gama de aplicações, optamos por elaborar uma sequência didática para introduzir o conceito de função exponencial. Nesse sentido, no capítulo 3, apresentamos um breve histórico do desenvolvimento do conceito de função e, em seguida, trabalhamos a função exponencial explanando suas características e gráficos. A abordagem baseou-se em estudo de importantes referências bibliográficas como Carl B. Boyer (BOYER; MERZBACH, 2012), Howard Eves (EVES, 2004), Elon Lages Lima (LIMA et al., 2004), entre outros.

O último capítulo é dedicado para relato da experiência, na qual foi ministrada a atividade introdutória de função exponencial a uma turma regular e dois alunos especiais (um deficiente visual e outra deficiente mental). A atividade foi elaborada com base na lenda de invenção do jogo de xadrez, adaptada do livro *"O homem que calculava"* (TAHAN, 2002). Para aplicação com os alunos especiais foi desenvolvido um tabuleiro de xadrez em EVA com texturas diferentes e

código braille para que o aluno cego pudesse entender do que se tratava o tabuleiro, bem como a confecção de uma apostila com todas as questões transcritas em braille. Na construção dos gráficos pelos alunos inclusos optou-se por utilizar o material didático especializado multiplano.



# 1 A EDUCAÇÃO ESPECIAL

Esse capítulo apresenta de forma sucinta uma abordagem geral sobre a Educação Especial, trata da inclusão no sistema de ensino, assim como enfatiza legislações e definições.

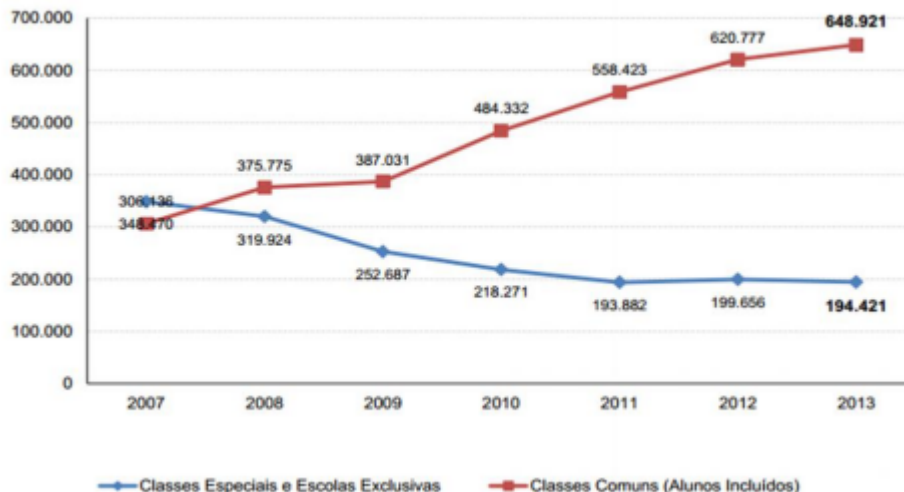
## 1.1 EDUCAÇÃO INCLUSIVA

A educação inclusiva é um movimento mundial em busca dos direitos de portadores de necessidades especiais, começando esse processo pela integração e aceitação na sociedade e em escolas regulares. Sobre a inclusão, Sasaki diz ser:

(...) um processo pelo qual a sociedade se adapta para poder incluir em seus sistemas sociais gerais pessoas com necessidades especiais e, simultaneamente, estas se preparam para assumir seus papéis na sociedade. (...) incluir é trocar, entender, respeitar, valorizar, lutar contra exclusão, transpor barreiras que a sociedade criou para as pessoas. É oferecer o desenvolvimento da autonomia, por meio da colaboração de pensamentos e formulação de juízo de valor, de modo a poder decidir, por si mesmo, como agir nas diferentes circunstâncias da vida. (SASSAKI, 1997)

Atualmente, de acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (BRASIL, 2013a), quase 25% da população brasileira apresenta algum tipo de deficiência. Os alunos com necessidades especiais representam menos de 3% da matrícula total na educação básica. Com o passar dos anos é notório o aumento da inclusão de alunos portadores de necessidades especiais nas turmas regulares, conforme podemos observar na figura 1.

Figura 1 – Aumento do número de matrículas de alunos portadores de necessidades especiais 2007-2013.



Fonte: IBGE

O contexto social em que a pessoa vive evidencia a deficiência. Segundo Omote, o deficiente mental é:

(...)uma pessoa que possui algumas limitações em suas capacidades e desempenhos; porém, há outras pessoas em nossa sociedade que também são limitadas e que não são consideradas deficientes. (...) o nome 'deficiente' refere-se a um status adquirido por estas pessoas. Daí, temos preferido utilizar o termo 'pessoa deficiente' a utilizar o termo 'pessoa portadora de deficiência'. Nesse modo de encarar a deficiência, uma variável crítica é a audiência, porque é ela que, em última instância, vai determinar se uma pessoa é deficiente ou não. (OMOTE, 1995)

Conforme Amilton (UBER, 2009), a escola inclusiva é entendida “por uma parcela da população como aquela que abarca uma maior quantidade de educandos deficientes na rede regular”, muitos desses alunos não participam das atividades da classe, apenas frequentam a escola.

## 1.2 POLÍTICAS PÚBLICAS DE EDUCAÇÃO INCLUSIVA

Por meio de leis, decretos e suas reformas, segundo a Declaração Universal de Direitos Humanos (ONU, 1948) o movimento da inclusão busca garantir educação de qualidade para esses alunos em escolas regulares.

O nascimento da educação especial no Brasil foi em 1854, quando D. Pedro II fundou no Rio de Janeiro Instituto Imperial dos Meninos Cegos, atualmente Instituto Benjamin Constant. O instituto surgiu com o intuito de acolher meninos cegos.

Em 1961, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), Lei n. 4.024/61, fundamentou o atendimento educacional às pessoas com deficiência, preferencialmente dentro do sistema regular de ensino. Sendo alterada em 1971, pela Lei n. 5.692/71, garantindo atendimento para alunos com necessidades especiais em escolas específicas.

O Centro Nacional de Educação Especial – CENESP, foi criado em 1983 pelo MEC, sendo responsável por gerenciar a educação especial no Brasil, estabelecendo políticas especiais para os alunos. Em contrapartida, alunos com superdotação tinham acesso apenas ao ensino regular sem levar em consideração as suas singularidades de aprendizagem.

A Constituição Federal de 1988 indica em seus artigos do capítulo III, seção I, que a educação:

(...) direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, ao seu preparo para o exercício da cidadania e a sua qualificação para o trabalho. [...] que todos têm igualdade de condições para acesso e permanência na escola e que é dever do Estado oferecer atendimento educacional especializado aos portadores de deficiência, preferencialmente na rede regular de ensino. (BRASIL, 1988)

Embora o Estatuto da Criança e do Adolescente, Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990, apenas reforce o que determina a Constituição Federal de 1988, vale lembrar, no entanto, segundo Mazzotta:

(...) que este Estatuto é o conjunto dos direitos e deveres legalmente estabelecidos para toda criança e adolescente, portador(a) de deficiência ou não. No que se refere à criança e ao adolescente portadores de deficiência, essa legislação significa um importante caminho para o exercício de direitos até então presentes em “declarações” genéricas e abstratas, mas muito poucas vezes praticados, por falta de mecanismos eficazes. (MAZZOTTA, 1999)

O documento que propagou as práticas de educação inclusiva em muitos países foi a Declaração de Salamanca, que no Brasil gerou as linhas de ações sobre necessidades educativas especiais (BRASIL, 1994). Mais de 80 países reuniram-se com intuito de desenvolver um plano com ações para que todas as escolas aceitem qualquer pessoa, independentemente de suas condições físicas e intelectuais. Preceituou-se que "aqueles com necessidades educacionais especiais devem ter acesso à escola regular, que deveria acomodá-los dentro de uma Pedagogia centrada na criança, capaz de satisfazer a tais necessidades ou outras". Norteadas, principalmente, no reconhecimento das diferenças, atendendo às necessidades individuais na promoção da aprendizagem, sem esquecer da formação do professor e reconhecendo a importância da escola para todos.

Na 5ª edição da LDB (BRASIL, 1996), Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996, enfatiza-se que é dever do Estado disponibilizar atendimento gratuito e especializado, preferencialmente nas turmas regulares, aos alunos com necessidades especiais, zelando pelas especificidades de cada um.

Em 1999, o Decreto nº 3.298 (BRASIL, 1999), que regulamenta a Lei nº 7.853/89, dispõe que os alunos devem frequentar as turmas regulares e as salas de apoio especializado.

As Diretrizes Nacionais para a Educação Especial na Educação Básica (BRASIL, 2001), Resolução CNE/CEB nº 2/2001, no artigo 2º, acompanhando o processo de mudanças, determinam que todas as matrículas devem ser aceitas nos sistemas de ensino, assegurando condições para uma educação de qualidade. Enfatiza também que os sistemas de ensino "devem constituir e fazer funcionar um setor responsável pela educação especial, dotado de recursos humanos, materiais e financeiros que viabilizem e deem sustentação ao processo de construção da educação inclusiva"(BRASIL, 2001).

A Política Nacional de Educação Especial – PNEE, destaca que:

(...) o grande avanço que a década da educação deve produzir será a construção de uma escola inclusiva que garanta o atendimento à diversidade humana. Ao estabelecer objetivos e metas para que os sistemas de ensino favoreçam o atendimento aos estudantes com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades/superdotação, aponta um déficit referente à oferta de matrículas para estudantes com deficiência nas classes comuns do ensino regu-

lar, à formação docente, à acessibilidade física e ao atendimento educacional especializado. (BRASIL, 2007b)

A Convenção da Guatemala (1999), promulgada no Brasil pelo Decreto nº 3.956/2001, que objetiva a eliminação de todas as formas de discriminação contra as pessoas com necessidades especiais. Desencadeando nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, a Resolução CNE/CP nº 2/2015, de 1º de julho de 2015, estabelecendo a obrigatoriedade de componentes curriculares que contemplem conhecimento sobre as especificidades dos alunos inclusos nos cursos de licenciatura.

Em 2002, a Língua Brasileira de Sinais – Libras (BRASIL, 2002), é reconhecida como meio legal de comunicação e expressão, "determinando que sejam garantidas formas institucionalizadas de apoiar seu uso e difusão, bem como a inclusão da disciplina de Libras como parte integrante do currículo nos cursos de formação de professores e de fonoaudiologia".

O Programa Educação Inclusiva foi implantado pelo MEC em 2003, com vistas a oferecer ampla formação sobre inclusão aos professores brasileiros. Já em 2004, o Ministério Público Federal lançou um documento objetivando disseminar as diretrizes e conceitos da educação inclusiva mundial.

Estabelecendo normas e critérios para a promoção da acessibilidade urbana e garantir acesso universal aos espaços públicos, das pessoas com deficiência, para impulsionar a inclusão educacional, foi implementado o decreto nº 5.296/04 que regulamentou as Leis nº 10.048/00 e nº 10.098/00.

Somente em 2005 os alunos com superdotação puderam receber atendimento especializado, com a implantação dos Núcleos de Atividades de Altas Habilidades/Superdotação – NAAH/S em todos os estados. Neste mesmo ano foi lançado o Plano Nacional de Educação em Direitos Humanos, da parceria entre a UNESCO, Ministério da Educação e Secretaria Especial dos Direitos Humanos, com o objetivo de desenvolver ações afirmativas de acesso e permanência de alunos inclusos na educação superior.

Em 2007 é lançado o Plano de Desenvolvimento da Educação – PDE (BRASIL, 2007a), enfatizando a implementação da sala de recursos multifuncionais, formação de professores para educação especial, monitoramento da permanência dos alunos portadores de necessidades especiais na educação superior e acessibilidade nos prédios escolares.

O Decreto nº 6571/2008, incorporado pelo Decreto nº 7611/2011, institui:

(...) a política pública de financiamento no âmbito do Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação - FUNDEB, estabelecendo o duplo cômputo das matrículas dos estudantes com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades/superdotação. Visando ao desenvolvimento inclusivo dos sistemas públicos de ensino, este Decreto também define o atendimento educacional especializado complementar ou suplementar à escolarização e os demais servi-

ços da educação especial, além de outras medidas de apoio à inclusão escolar. (BRASIL, 2008)

Procurando orientar o Atendimento Educacional Especializado - AEE, o Conselho Nacional de Educação – CNE (BRASIL, 2009) publica a Resolução CNE/CEB, 04/2009. O documento visa o público alvo da educação especial e define as funções do AEE na escola.

A Resolução CNE/CEB nº04/2010 (BRASIL, 2010b), que institui Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica e preconiza que todos os alunos portadores de necessidades especiais devem ser matriculados em turmas regulares e nas salas de recursos multifuncionais.

Em 2010, através do Decreto nº7084/2010, o Ministério da Educação (BRASIL, 2010a) estabelece mecanismos para a promoção de acessibilidade a materiais didáticos que contribuam para melhor aprendizagem do aluno. Além de consolidar um conjunto de direitos, este decreto estipula punição ao gestor que recusar matrícula de qualquer aluno na escola.

Ancorada nas deliberações da Conferência Nacional de Educação – CONAE,

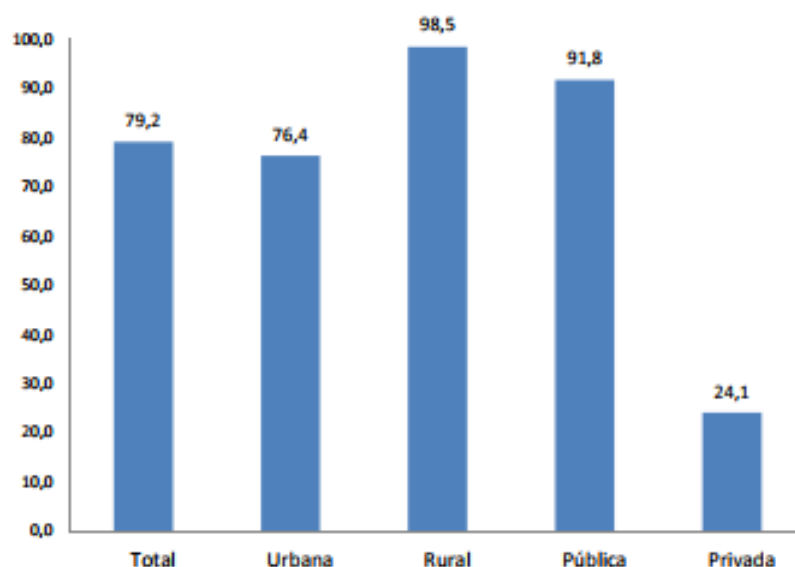
(...) a Lei nº 13.005/2014, que institui o Plano Nacional de Educação – PNE, no inciso III, parágrafo 1º, do artigo 8º, determina que os Estados, o Distrito Federal e os Municípios garantam o atendimento as necessidades específicas na educação especial, assegurado o sistema educacional inclusivo em todos os níveis, etapas e modalidades. Com base neste pressuposto, a meta 4 e respectivas estratégias objetivam universalizar, para as pessoas com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades/superdotação, na faixa etária de 04 a 17 anos, o acesso à educação básica e ao atendimento educacional especializado. O AEE é ofertado preferencialmente na rede regular de ensino, podendo ser realizado por meio de convênios com instituições especializadas, sem prejuízo do sistema educacional inclusivo. (BRASIL, 2014)

A Portaria nº 243, de 15 de abril de 2016, do Ministério da Educação (BRASIL, 2016), "estabelece os critérios para o funcionamento, a avaliação e a supervisão de instituições públicas e privadas que prestam atendimento educacional a alunos com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades/superdotação".

Segundo Romeu (SASSAKI, 1997) o fato do aluno estar integrado a sala regular ou de apoio sem haver troca de ideias e conhecimentos não são suficientes, muitos alunos tem sua capacidade subestimada, com atividades aquém das trabalhadas com o restante da turma.

Políticas públicas de educação inclusiva buscam garantir os direitos dos portadores de necessidades especiais e facilitar sua inclusão social. No Brasil, segundo o Plano Nacional de Educação (BRASIL, 2007b), a implementação dessas políticas preveem que em 2020 todos os alunos especiais deverão estar frequentando turmas regulares. Conforme o censo escolar de 2016, podemos perceber que estamos próximos de alcançar o objetivo, onde quase 80% dos alunos especiais frequentaram turmas regulares. Com destaque para as escolas públicas, alcançando quase a totalidades dos alunos, conforme podemos observar na Figura 2.

Figura 2 – Proporção da matrícula de alunos incluídos em relação à matrícula de alunos com deficiência por localização e rede de ensino - Brasil 2016



Fonte: (BRASIL, 2016)

### 1.3 DAS DEFICIÊNCIAS

A educação está assegurada a todos pelas leis brasileiras. Devemos ensinar nossos alunos com base em suas potencialidades e habilidades e não suas limitações. O ensino dos alunos com deficiência não se faz diferente, devemos reconhecer as limitações para desenvolver métodos e técnicas que diminuam os impactos no processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com o Decreto 3.298 (BRASIL, 1999), de 20/12/1999, pessoa portadora de deficiência é aquela que apresenta, em caráter permanente, perda ou anormalidade de uma estrutura ou função psicológica, fisiológica ou anatômica que gere incapacidade para o desempenho de atividade, dentro do padrão considerado normal.

Nesta seção abordaremos, de forma sucinta, as definições clínicas dos alunos deficientes visuais e mentais.

#### 1.3.1 DEFICIÊNCIA VISUAL

A deficiência visual é a redução ou perda total da visão com o melhor olho e é caracterizada da seguinte forma:

> cegueira: perda da visão, em ambos os olhos, de menos de 0,1 no melhor olho após correção, ou um campo visual não excedente a 20 graus, no maior meridiano do melhor olho, mesmo com o uso de lentes de correção. Sob o enfoque educacional, a cegueira representa a perda total ou o resíduo mínimo da visão que leva o indivíduo a necessitar do método braille como meio de leitura e escrita, além de outros recursos didáticos e equipamentos especiais para a sua educação;

> visão reduzida: acuidade visual dentre 6/20 e 6/60, no melhor olho, após correção máxima. Sob o enfoque educacional, trata-se de resíduo visual que permite ao educando ler impressos a tinta, desde que se empreguem recursos didáticos e equipamentos especiais. (BRASIL, )

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs (BRASIL, 2000), deficiência visual “é a redução ou perda total da capacidade de ver com o melhor olho e após a melhor correção ótica”.

A cegueira afeta a capacidade de perceber tamanho, distância, forma, cor e movimento. Pode ocorrer desde o nascimento (cegueira congênita), ou posteriormente (cegueira adquirida) em decorrência de causas acidentais ou orgânicas.

O documento de Atendimento Educacional Especializado para o aluno com deficiência mental (BRASIL, 2010b), diz que a aprendizagem visual depende não apenas do olho, mas também da capacidade de o cérebro realizar as suas funções, de capturar, codificar, selecionar e organizar imagens fotografadas pelos olhos. Essas imagens são associadas a outras mensagens sensoriais e armazenadas na memória para serem lembradas mais tarde. Para que ocorra o desenvolvimento da eficiência visual, duas condições precisam estar presentes: o amadurecimento ou desenvolvimento dos fatores anatômicos e fisiológicos do olho, vias óticas e córtex cerebral e o uso dessas funções, o exercício de ver.

Para avaliar o funcionamento da visão é preciso considerar a acuidade visual (que indica a distância de um ponto ao outro em uma linha reta por meio da qual o objeto é visto), o campo visual (abrangência e amplitude do ângulo da visão em que os objetos são focalizados) e o uso eficiente do potencial da visão.

A cartilha da Secretaria de Educação Especial (BRASIL, 2007b), enfatiza que as crianças cegas operam com dois tipos de conceitos: "aqueles que têm significado real para elas a partir de suas experiências e aqueles que fazem referência a situações visuais, que embora sejam importantes meios de comunicação, podem não ser adequadamente compreendidos ou decodificados e ficam desprovidos de sentido".

Os sentidos têm as mesmas características e potencialidades para todas as pessoas. As informações tátil, auditiva, sinestésica e olfativa são mais desenvolvidas pelas pessoas cegas porque elas recorrem a esses sentidos com mais frequência para decodificar e guardar na memória as informações. Sem a visão, os outros sentidos passam a receber a informação de forma intermitente, fugidia e fragmentária. O desenvolvimento aguçado da audição, do tato, do olfato e do paladar é resultante da ativação contínua desses sentidos por força da necessidade. Portanto, não é um fenômeno extraordinário ou um efeito compensatório. Os sentidos remanescentes funcionam de forma complementar e não isolada. A audição desempenha um papel relevante na seleção e codificação dos sons que são significativos e úteis. A habilidade de atribuir significado a um som sem perceber visualmente a sua origem é difícil e complexa. A experiência tátil não se limita ao uso das mãos. O olfato e o paladar funcionam conjuntamente e são coadjuvantes indispensáveis. O sistema háptico é o tato ativo, constituído por componentes cutâneos e sinestésicos, através dos quais impressões, sensações e

vibrações detectadas pelo indivíduo são interpretadas pelo cérebro e constituem fontes valiosas de informação. As retas, as curvas, o volume, a rugosidade, a textura, a densidade, as oscilações térmicas e dolorosas, entre outras, são propriedades que geram sensações táteis e imagens mentais importantes para a comunicação, a estética, a formação de conceitos e de representações mentais. (BRASIL, 2007b)

A falta de recursos adequados e estímulos pode acabar com o interesse e reforçar o comportamento passivo dos alunos com deficiência visual. É imprescindível incentivar o comportamento exploratório, a experimentação e a observação para que estes alunos possam ter uma percepção global.

### 1.3.2 DEFICIÊNCIA MENTAL

Devido a alta complexidade em conceituar a deficiência mental, ela tem sido um impasse na inclusão em salas regulares e até mesmo nos atendimentos especializados. Suas definições têm sido atualizadas frequentemente.

A Constituição Brasileira (BRASIL, 1988), corroborada pela Convenção da Guatemala, define deficiência como “uma restrição física, mental ou sensorial, de natureza permanente ou transitória, que limita a capacidade de exercer uma ou mais atividades essenciais da vida diária, causada ou agravada pelo ambiente econômico e social”.

O termo deficiência mental vem sendo utilizado desde meados do século XIX, para denominar, classificar e conceituar pessoas com dificuldades de desenvolvimento na área cognitiva, influenciando na independência, adaptação ao meio social e autossuficiência. Entre as características destaca-se a dificuldade de aprendizado e o comprometimento comportamental.

A Psicanálise, por exemplo, traz à tona a dimensão do inconsciente, uma importante contribuição que introduz os processos psíquicos na determinação de diversas patologias, entre as quais a deficiência mental. A inibição, desenvolvida por Freud, pode ser definida pela limitação de determinadas atividades, causada por um bloqueio de algumas funções, como o pensamento, por exemplo. A debilidade, para Lacan, define uma maneira particular de o sujeito lidar com o saber, podendo ser natural ao sujeito, por caracterizar um mal-estar fundamental em relação ao saber, ou seja, todos nós temos algo que não conseguimos ou não queremos saber. Mas também define a debilidade como uma patologia, quando o sujeito se fixa numa posição débil, de total recusa de apropriação do saber. Além de todos esses conceitos, que em muitos casos são antagônicos, existe a dificuldade de se estabelecer um diagnóstico diferencial entre o que seja, doença mental (que engloba diagnósticos de psicose e psicose precoce) e deficiência mental, principalmente no caso de crianças pequenas em idade escolar. (BRASIL, 2010a)

Faz-se necessário angariar definições e posicionamentos de profusas áreas do conhecimento para conseguir compreender mais amplamente a deficiência mental. São indelévels as consequências, em via das dificuldades de conceituação, na maneira em lidarmos com ela e com



quem a possui. A discriminação, motivada pelo desconhecimento e medo das diferenças, parece ser maior para com as pessoas com deficiência mental.

Em relação à deficiência mental, a CID-10<sup>1</sup> admite a mensuração de QI como definidora da deficiência e, com base nesse índice, aplica seu sistema de classificação. Assim, a exemplo do DSM-IV, adota a classificação proposta pela AAMR<sup>2</sup> de 1959 a 1983, com algumas reformulações: (a) retardo mental leve; (b) retardo mental moderado; (c) retardo mental grave; (d) retardo mental profundo; (e) outro retardo mental; (f) retardo mental não especificado. Admitindo o caráter sumário da classificação, os autores da CID-10 admitem a necessidade de um sistema mais amplo e específico para a deficiência mental. (CARVALHO, 2012)

Em 2001 foi proposta pela Organização Mundial de Saúde, a publicação da CIF - Classificação Internacional de Funcionalidade, Incapacidade e Saúde. Com base nisso, o modelo atual de avaliação do MEC é fundamentado. Segundo Carvalho:

É um instrumento de classificação utilizado como complemento à CID-10. Nesse ponto, ultrapassa a visão apenas médica e inclui a perspectiva social e ambiental. Adota, como o Sistema 2002, o conceito de funcionalidade.

A CIF<sup>3</sup> organiza-se em duas partes, com seus respectivos componentes:

Parte 1: (a) funções do corpo e estruturas do corpo – referindo-se às funções fisiológicas dos sistemas corporais (inclusive as funções mentais), bem como suas partes estruturais ou anatômicas, tais como órgãos e membros; b) atividades e participação. Quatro construtos estão relacionados à Parte 1: mudanças na função e na estrutura do corpo; capacidade e desempenho.

Parte 2: (a) fatores ambientais; (b) fatores pessoais. Um construto está associado à Parte 2: facilitadores ou barreiras existentes nos fatores ambientais.

A deficiência mental pode acarretar problemas significativos à pessoa nos seguintes aspectos: (a) em sua capacidade de realizar, por impedimentos na funcionalidade; (b) em sua habilidade de realizar, devido a limitações na atividade de um modo geral; (c) em suas oportunidades de funcionar no meio físico e social, devido a restrições de participação.

Além de fatores pessoais, a CIF abrange importantes domínios contextuais do convívio humano: o lar, a família, a educação, o trabalho e a vida social/social.

O Sistema 2002 da AAMR e a CIF têm em comum a perspectiva funcionalista, ecológica e multidimensional. Esse paralelo pode ter sido possível pela contemporaneidade de suas publicações. (CARVALHO, 2012):

Segundo a Organização Mundial da Saúde - (OMS, 2012), a deficiência mental pode ser diagnosticada em quatro graus: profunda, grave, moderada ou leve.

– Profunda: • Grandes problemas sensorio-motores e de comunicação, bem como de comunicação com o meio; • São dependentes dos outros em quase todas as funções e atividades, pois os seus handicaps físicos e intelectuais são gravíssimos; • Excepcionalmente terão autonomia para se deslocar e responder a treinos simples de autoajuda.

<sup>1</sup> Código Internacional de Doenças

<sup>2</sup> American Association on Mental Retardation

<sup>3</sup> Classificação Internacional de Funcionalidade, Incapacidade e Saúde

- Grave/severa: • Necessitam de proteção e ajuda, pois o seu nível de autonomia é muito pobre; • Apresentam muitos problemas psicomotores; • A sua linguagem verbal é muito deficitária – comunicação primária; • Podem ser treinados em algumas atividades de vida diária básicas e em aprendizagens pré-tecnológicas simples;
- Moderado/média: • São capazes de adquirir hábitos de autonomia pessoal e social; • Podem aprender a comunicar pela linguagem oral, mas apresentam dificuldades na expressão e compreensão oral; • Apresentam um desenvolvimento motor aceitável e têm possibilidade para adquirir alguns conhecimentos pré-tecnológicos básicos que lhes permitam realizar algum trabalho; • Dificilmente chegam a dominar as técnicas de leitura, escrita e cálculo;
- Leve/ligeira: • São educáveis; • Podem chegar a realizar tarefas mais complexas; • A sua aprendizagem é mais lenta, mas podem permanecer em classes comuns embora precisem de um acompanhamento especial; • Podem desenvolver aprendizagens sociais e de comunicação e têm capacidade para se adaptar e integrar no mundo laboral; • Apresentam atraso mínimo nas áreas perceptivas e motoras; • Geralmente não apresentam problemas de adaptação ao ambiente familiar e social. É notório que a inclusão e o Atendimento Educacional Especializado necessitam de premente reestruturação e reinterpretação para alunos com deficiência mental. (OMS, 2012)

É notório que a inclusão e o Atendimento Educacional Especializado necessitam de premente reestruturação e reinterpretação para alunos com deficiência mental.

## 2 METODOLOGIAS E MATERIAIS PARA O ENSINO DE ESTUDANTES COM DEFICIÊNCIA

Quando falamos de inclusão em escolas regulares é comum a dificuldade que todos sentem. Prevaecem as queixas de que não receberam formação adequada e que não estão preparados para trabalhar com esse público. Assim buscamos abordar, no capítulo 2, metodologias e materiais para o ensino de estudantes com deficiência.

### 2.1 METODOLOGIAS

Consoante as limitações e possibilidades de cada aluno devemos estabelecer o plano de intervenção educativa. Não existe fórmula mágica para ensinar alunos inclusos. Nesse contexto, Teresa (MANTOAN, 2011) acredita que não são os métodos de ensino ou especialistas "que garantem a inserção de todos os alunos à escola regular, mas que é necessário um esforço efetivo e coletivo, visando transformar as escolas e aprimorar a formação dos professores para trabalhar com as diferenças nas salas de aula".

Os conteúdos trabalhados com esses alunos devem estar em consonância com a turma regular, sobre isso a LDB enfatiza que,

Os programas educativos direcionados para os deficientes visuais devem ir ao encontro das mesmas áreas e atividades que se encontram nos programas regulares (sendo feitas adaptações consoante as necessidades e dificuldades dos alunos). As adaptações devem ser feitas no ajuste do tempo ao seu ritmo de trabalho, no processo de avaliação e nas metodologias utilizadas. (BRASIL, 2013b)

Deparamo-nos com inúmeras dificuldades no desenvolvimento de um aluno deficiente mental, principalmente motoras, sensoriais, nas relações interpessoais, autonomia e linguagem. Conhecendo as dificuldades específicas e acompanhando o seu desenvolvimento, devemos atentar-nos à capacidade de aprendizagem de cada um. O aluno pode ficar frustrado quando não consegue atingir os objetivos, por isso devemos tomar cuidado e evitar que as atividades sejam exigentes demais. Em contrapartida, não podemos prendê-los à atividades tão simples, devendo favorecer ao máximo o desenvolvimento de suas potencialidades.

Segundo a Organização Mundial da Saúde - (OMS, 2012), "a criança deficiente mental tem dificuldade em estruturar as suas experiências e a aquisição de capacidades perceptivo-motoras não terá a mesma significação que têm para a maioria dos indivíduos da sociedade a que pertencem". A dificuldade agrava-se ao se comunicar com a criança porque muitas experiências comuns estão fora do alcance da criança deficiente e, ao mesmo tempo, teremos de entrar no seu mundo de representações. Para suprir as necessidades, vários autores sugerem, que

é recomendável estabelecer estratégias que permitam revestir-se de significado para o aluno, podendo fazer parte não apenas do seu meio ambiente, mas também do seu próprio meio.

Quando tratamos do aluno deficiente visual, segundo informação do MEC, são necessárias algumas adaptações:

- A educação da criança deficiente visual pode se processar por meio de programas diferentes, desenvolvidos em classes especiais ou na classe comum, recebendo apoio do professor especializado;
- As crianças necessitam de uma boa educação geral, somada a um tipo de educação compatível com seus requisitos especiais, fazendo ou não, uso de materiais ou equipamentos de apoio;
- A educação do deficiente visual necessita de professores especializados nesta área, métodos e técnicas específicas de trabalho, instalações e equipamentos especiais, bem como algumas adaptações ou adições curriculares;
- A tendência atual da educação especial é manter na escola comum o maior número possível de crianças com necessidades educativas especiais;
- Cabe à sociedade a responsabilidade de prover os auxílios necessários para que a criança se capacite e possa integrar-se no grupo social. (BRASIL, 2010b)

O comportamento do professor é de suma importância na construção do ensino aprendizagem eficaz. O documento do Programa de Capacitação de Recursos Humanos do Ensino Fundamental, voltado para os alunos cegos, enfatiza que algumas atitudes dos professores podem ajudar os alunos cegos em sala de aula, como:

Ler em voz alta – já que o aluno não possui o sentido que lhe proporciona a visão o professor precisa fazer com que ele desenvolva os outros sentidos, e porque não o da audição?

Aceitação do aluno – não rejeitar o aluno, sem fazer discriminação ou distinção;

Preparação dos colegas de classe – é necessária a preparação dos colegas de classe do(s) aluno(s) cego(s), no sentido de relacioná-lo(s) com todos da classe;

Oferecer ajuda – sempre que for necessário oferece ajuda ao aluno cego, mas só conceda se o mesmo aceitar;

Caminhe com o aluno pela sala – caminhe pela sala em linha reta, oferecendo-lhe o braço, para que assim, ele consiga se locomover sozinho. O aluno não deve ser puxado;

Ida ao banheiro – Ao guiá-lo ao banheiro, mostre-o a pia, o vaso sanitário, o cesto de lixo, fazendo desenvolver o tato;

Falar o que escreve no quadro – O professor da classe comum que tem alunos com necessidades educativas especiais, em especial, os cegos, deve criar a habilidade de falar o que está escrevendo no quadro, mais um motivo para que o aluno sintá-se igual aos outros, que da mesma forma que ele estarão escutando o que está sendo escrito na lousa.

Dizer o nome do objeto ou figura que apresenta à classe – Durante a explicação, o professor deve se preocupar com o esclarecimento do que for apresentar à classe, ou seja, cada objeto ou figura mostrado aos alunos em geral, deve ser apresentado de forma comentada e detalhada, proporcionando assim, que o educando especial possa imaginar do que se trata o objeto/figura de estudo.

Mencionar o nome do educando especial – Sempre que se tornar necessária à participação de algum aluno durante a exposição da aula, procurar envolver

o educando especial, chamando-o pelo seu nome e pronunciando este em voz alta;

Faça com que o aluno seja ativo – interrogue-o, peça para buscar objetos, pergunte a sua opinião, para que assim, ele se sinta útil e sujeito ativo dentro da escola. (BRUNO; MOTA, 2001)

## 2.2 O SISTEMA BRAILLE

O sistema braille é conhecido universalmente como código ou meio de escrita e leitura das pessoas cegas. Segundo Renata (COSTA, 2009), em 1819, o oficial francês Charles Barbier levou para o Instituto Nacional dos Jovens Cegos um procedimento de escrita utilizado para que os soldados conseguissem escrever e ler mensagens a noite, com 12 pontos em relevo.

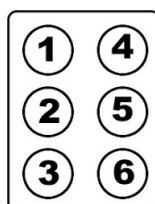
O código utilizado hoje em dia foi criado pelo francês Louis Braille (1809 - 1852), que perdeu a visão aos 3 anos após ter o olho perfurado por uma ferramenta na oficina do pai, ele teve uma infecção grave, resultando em cegueira nos dois olhos. Aos 16 anos, a escrita apresentada por Charles Barbier, instigou Louis Braille que durante anos adaptou o código, até chegar aos 6 pontos que conhecemos hoje, atendendo as necessidades de seus colegas cegos e facilitando a leitura e escrita.

O Brasil foi o primeiro país da América Latina a adotar o código Braille, em 1854 no Rio de Janeiro, na inauguração do Instituto Benjamin Constant, fundado por D. Pedro II. Para Renata (COSTA, 2009), "o sistema foi trazido por José Álvares de Azevedo, jovem cego que teve contato com o braille em Paris". A missão do instituto é a educação e profissionalização das pessoas com deficiência visual.

No final do século XIX, o governo fez muitos investimentos na área da Educação Especial, e como consequência disso o número de escolas destinadas exclusivamente para esses alunos cresceu de forma significativa. Segundo Daner (MARTINS, 2013), "o Instituto de Cegos Padre Chico foi criado em 1928, em São Paulo, visando atender crianças cegas em idade escolar, já em 1935 foi aprovado uma lei para criação de uma cadeira específica de Professores de primeiras letras para o ensino de cegos e surdos nas escolas".

O Código Braille é baseado na combinação de seis pontos em relevo, dispostos em uma matriz  $3 \times 2$ , denominada "Cela Braille" e enumerada de acordo com a Figura 3.

Figura 3 – Cela Braille

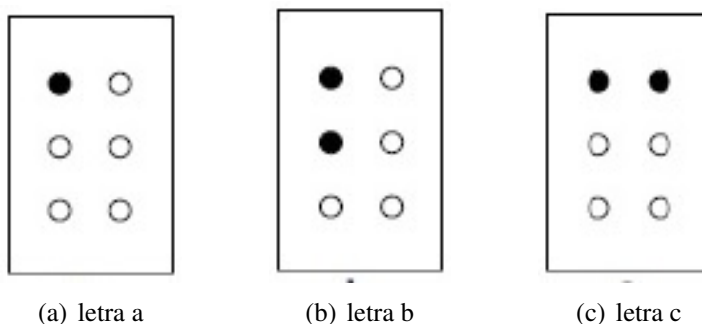


Fonte: Apostila preparatória para OBMEP.

Para registrar uma letra do alfabeto, um número ou sinal, alguns desses pontos devem ser marcados, tornando-se em alto relevo, para que possamos sentir com as pontas dos dedos. Nas imagens desse texto, para expressar quando um ponto estiver marcado usa-se um círculo preto e quando não estiver um círculo branco.

Na Figura 4, temos como exemplo as representações das letras: letra a [figura 5(a)], onde apenas o ponto (1) é marcado; letra b [figura 5(b)] onde os pontos (1) e (2) são marcados; e a letra c [figura 5(c)] marcada pelos pontos (1) e (4).

Figura 4 – Configuração das letras "a", "b" e "c".



Fonte: Apostila preparatória para OBMEP.

Devido a esse tipo de configuração, o código admite um número de caracteres finito, pois posicionamos os pontos em relevo em lugares distintos, gerando as seguintes possibilidades:

- Combinação de seis pontos agrupados seis a seis;  

$$C_{6,6} = \frac{6!}{1!(6-6)!} = 1$$
- Combinação de seis pontos agrupados cinco a cinco;  

$$C_{6,5} = \frac{6!}{1!(6-5)!} = 6$$
- Combinação de seis pontos agrupados quatro a quatro;  

$$C_{6,4} = \frac{6!}{1!(6-4)!} = 15$$
- Combinação de seis pontos agrupados três a três;  

$$C_{6,3} = \frac{6!}{1!(6-3)!} = 20$$
- Combinação de seis pontos agrupados dois a dois;  

$$C_{6,2} = \frac{6!}{1!(6-2)!} = 15$$
- Combinação de seis pontos agrupados um a um;  

$$C_{6,1} = \frac{6!}{1!(6-1)!} = 6$$

Portanto, a quantidade de caracteres que podemos representar pelo código braille é dada pela soma das combinações<sup>1</sup>:

$$C_{6,6} + C_{6,5} + C_{6,4} + C_{6,3} + C_{6,2} + C_{6,1} = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 = 63$$

Além dos 63 sinais simples, temos também temos sinais composto, que são formados por duas ou mais celas. Os principais sinais estão representados na Figura 5.

Figura 5 – Disposição Universal dos 63 Sinais Simples do Sistema Braille.

<b>1ª linha</b>									
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
●○	●○	●●	●●	●○	●●	○●	●○	○●	●●
○●	●○	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●
○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○	○○
<b>2ª linha</b>									
k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
●○	●○	●●	●●	●○	●●	●●	●○	○●	○●
○●	●○	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●
●○	●○	●○	●○	●○	●○	●○	●○	●○	●○
<b>3ª linha</b>									
u	v	x	y	z	ç	é	á	è	ú
●○	●○	●●	●●	●○	●●	●●	●○	○●	○●
○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●
●●	●●	●●	●●	●●	●●	●●	●●	●●	●●
<b>4ª linha</b>									
â	ë	ï	ô	ù	à	î	û	õ	ò/w
●○	●○	●●	●●	●○	●●	●●	●○	○●	○●
○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●
○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●
<b>5ª linha</b>									
,	;	:	.	?	!	=	"	*	o
○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●
○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●
○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●	○●
<b>6ª linha</b>									
í	ã	ó	sinal de algarismo	apóstrofo	hífen				
○●	○●	○●	○●	○●	○●				
○●	○●	○●	○●	○●	○●				
○●	○●	○●	○●	○●	○●				
<b>7ª linha</b>									
grifo	sinal de maiúsculo	reticências	travessão	abre e fecha parênteses					
○●	○●	○●	○●	○●					
○●	○●	○●	○●	○●					
○●	○●	○●	○●	○●					

Fonte: Apostila preparatória para OBMEP.

<sup>1</sup> A combinação  $C_{6,6}$  não é considerada como possibilidade de carácter, tendo em vista que ela representa apenas o espaçamento e não um símbolo em si.

Conforme a figura 5, as linhas (que também são chamadas de séries) classificam-se da seguinte maneira:

- A 1ª linha é constituída por 10 sinais, todos superiores, pelo que é denominada linha superior. Serve de base às 2ª, 3ª e 4ª linhas, bem como de modelo à 5ª.
- A 2ª linha obtém-se juntando a cada um dos sinais da 1ª o ponto 3.
- A 3ª linha resulta da adição dos pontos 3 e 6 aos sinais da linha superior.
- A 4ª linha é formada pela junção do ponto 6 a cada um dos sinais da 1ª.
- A 5ª linha é toda formada por sinais inferiores, pelo que também é chamada linha inferior, e reproduz formalmente a 1ª.
- A 6ª linha não deriva da 1ª e desenvolve-se pelos pontos 3, 4, 5, 6, e consta apenas de 6 sinais.
- A 7ª linha, que também não se baseia na 1ª, é formada unicamente pelos 7 sinais da coluna direita.

Podemos escrever um texto em braille por meio de uma impressora [Figura 7(a)], uma máquina de escrever braille [Figura 7(b)] ou da reglete [Figura 7(c)].<sup>2</sup>

Figura 6 – Instrumentos para escrita em Braille



Fonte: Site Tece<sup>2</sup>.

A impressora em braille, figura 7(a), possui grande versatilidade. Através de *softwares* específicos é possível transcrever textos com grande agilidade, bem como figuras, gráficos e tabelas. Os maiores problemas estão no preço e na dificuldade de edição dos textos por parte do deficiente visual.

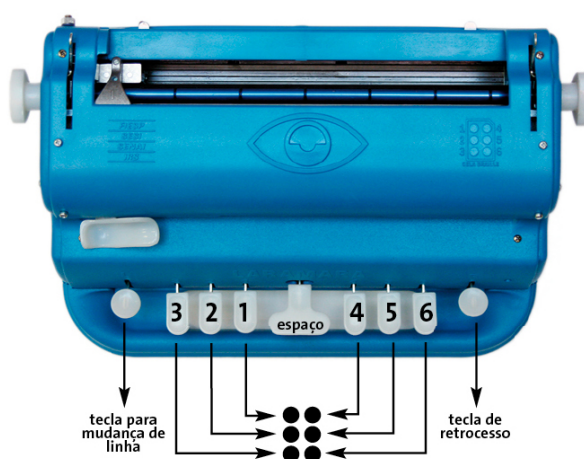
A máquina de escrever possui 9 teclas, sendo que seis correspondem a cela braille, uma tecla para mudança de linha, outra para dar espaço e a última que é a tecla de retrocesso

<sup>2</sup> Disponível em <<http://www.tece.com.br/>>



(conforme podemos ver na Figura 7). Além disso, conta com travas para folha e uma manivela para deslizar a folha. Tocando simultaneamente em uma combinação de teclas produzimos os símbolos desejados, de acordo com os pontos escolhidos. As vantagens são a escrita rápida, a possibilidade de levar para a sala de aula e não depender de nenhum programa de edição no computador (o que dificulta muito para os alunos cegos), além de raramente precisar de manutenção, o preço relativamente baixo e a durabilidade (que não chega a décima parte do valor de uma impressora).

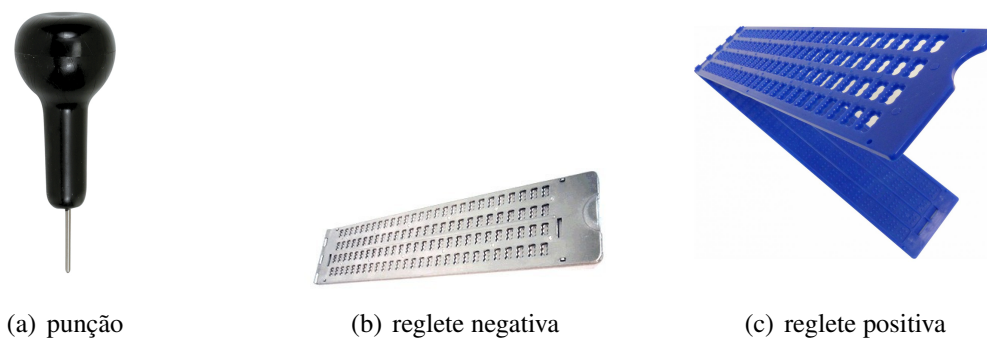
Figura 7 – Teclas da máquina de escrever em Braille



Fonte: Apostila preparatória para OBMEP.

A reglete é uma régua de plástico, madeira ou metal com um conjunto de celas braille que estão distribuídas em linhas horizontais. Para escrever nela utilizamos um instrumento chamado punção, que tem formato de pera com uma ponta metálica, utilizado para perfuração da cela braille. Atualmente, existem dois tipos específicos de reglete a negativa e a positiva, conforme indicada na Figura 14.

Figura 8 – Tipos de reglete.



(a) punção

(b) reglete negativa

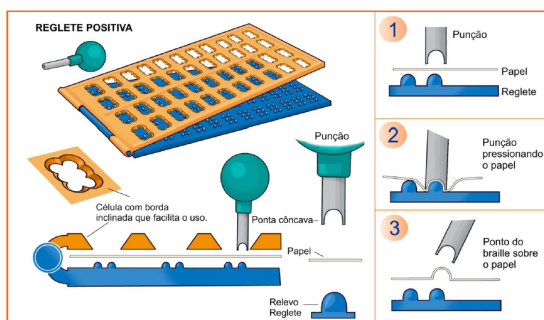
(c) reglete positiva

Fonte: Site Tece.

A principal diferença entre a reglete positiva e negativa é a maneira que devemos escrever.

Na reglete negativa, Figura 9(b), devemos realizar o movimento de perfuração da cela braille, da direita para esquerda, para produzir a escrita em relevo espelhado, ou seja, a leitura deverá ser realizada da esquerda para direita no verso da folha, o que dificulta muito já que devemos aprender o braille das duas maneiras. Enquanto isso, na reglete positiva, Figura 9(c), a escrita e a leitura são feitas da esquerda para direita, o que economiza muito tempo, conforme podemos perceber na figura 9.

Figura 9 – Funcionamento da reglete positiva



Fonte: Site TECE.

O preço e o tamanho são as principais vantagens da reglete, contudo tem a desvantagem de ser lento devido à perfuração de cada ponto, exige boa coordenação motora e dificulta a correção de erros.

### 2.2.1 ALGUMAS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS EM BRAILLE

Para representar os números no sistema braille, antecede-se com a combinação (3456) os símbolos que representam as letras de *a* até *j* (figura 10).

Figura 10 – Números Indo-arábicos no Código Braille

Indo-arábicos	Combinações de Pontos	Símbolos Braille	Indo-arábicos	Combinações de Pontos	Símbolos Braille
1	(3456)(1)		9	(3456) (24)	
2	(3456)(12)		0	(3456) (245)	
3	(3456) (14)		10	(3456) (1)(245)	
4	(3456) (145)		20	(3456) (12)(245)	
5	(3456) (15)		38	(3456)(14)(125)	
6	(3456)(124)		100	(3456) (1)(245)(245)	
7	(3456) (1245)		123	(3456) (1)(12)(14)	
8	(3456) (125)		2.456	(3456) (12)(3)(145)(15)(124)	

Fonte: Apostila preparatória para OBMEP

As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, são representadas conforme a figura 11.

Figura 11 – Operações fundamentais em Braille

Operadores	+	–	×	÷
Combinações de pontos	(235)	(36)	(236)	(256)
Símbolos Braille				

Fonte: Apostila preparatória para OBMEP

Na representação de números decimais devemos indicar o ponto (2) para separar a parte inteira da decimal. Para os números negativos, iniciamos com os pontos (36) à esquerda do número. Após a escrita do número da base, devemos indicar os pontos (12) e em seguida o algarismo do expoente, assim podemos representar uma potência. Se colocar a combinação (1246)(156) à esquerda do número, podemos representar uma raiz. Assim representada na figura 12.

Figura 12 – Números negativos, decimais, potência e raiz quadrada em Braille

Outras Representações	Números negativos	Números decimais	Potência	Raiz Quadrada
Exemplos	- 3	2,8	$2^3$	$\sqrt{4}$
Combinações de pontos	(36)(3456)(14)	(3456) (2)(125)	(3456)(12)(16)(3456) (14)	(1246)(156)(3456)(145)
Símbolos Braille				

Fonte: Apostila preparatória para OBMEP

Além disso, podemos representar no código braille, os conjuntos numéricos, alguma notações de geometria, dentre outras.

## 2.3 O MULTIPLANO

Diante do desafio de ensinar matemática a um estudante com deficiência visual, o Professor Rubens Ferronato (2002) notou que com uma placa perfurada, alguns pinos e elásticos era possível desenvolver um recurso didático que o auxiliasse no ensino dos conteúdos de modo a potencializar o desenvolvimento, evolução e autonomia deste aluno.

Segundo descrição do professor Rubens (FERRONATO, 2002), "o material concreto denominado Multiplano consiste, basicamente, em uma placa perfurada de linhas e colunas perpendiculares, onde os furos são equidistantes, sendo que o tamanho da placa e a distância entre os furos pode variar consoante a necessidade".

Assim surgiu o multiplano, que permite trabalhar os conceitos matemáticos baseado na observação e percepção nos mais variados níveis de ensino. Também, é um recurso metodológico adequado para ser utilizado com os deficientes visuais, pois permite que o aluno identifique gráficos, figuras geométricas, frações e as mais diversas operações através da percepção tátil, que é extremamente apurada.

Devemos levar em conta que o material não se restringe apenas aos educandos cegos, podendo também ser utilizado por alunos que enxergam, servindo como alternativa para trabalhar com toda a turma sem gerar constrangimento. Para o professor Ferronato:

(...) dentro de uma mesma classe os mesmos conteúdos matemáticos podem ser trabalhados com a turma toda, sem diferenciações e através dos mesmos métodos e procedimentos, pois o que vai propiciar ao aluno cego a leitura dos pinos é o toque de suas mãos na superfície dos mesmos e ao aluno vidente bastará a visualização dos algarismos de que ele necessita. (FERRONATO, 2002)

O multiplano estimula a autonomia, a curiosidade e a criatividade, permitindo que o educando faça suas próprias descobertas em busca de uma situação concreta para uma determinada situação. O *kit* multiplano<sup>3</sup> pode ser adquirido em duas versões: simples ou braille. A única diferença consiste no fato de a versão braille possui os pinos com números escritos no código braille. Os dois *kits* vem em uma maleta, conforme a figura 13.

Figura 13 – *Kit* multiplano

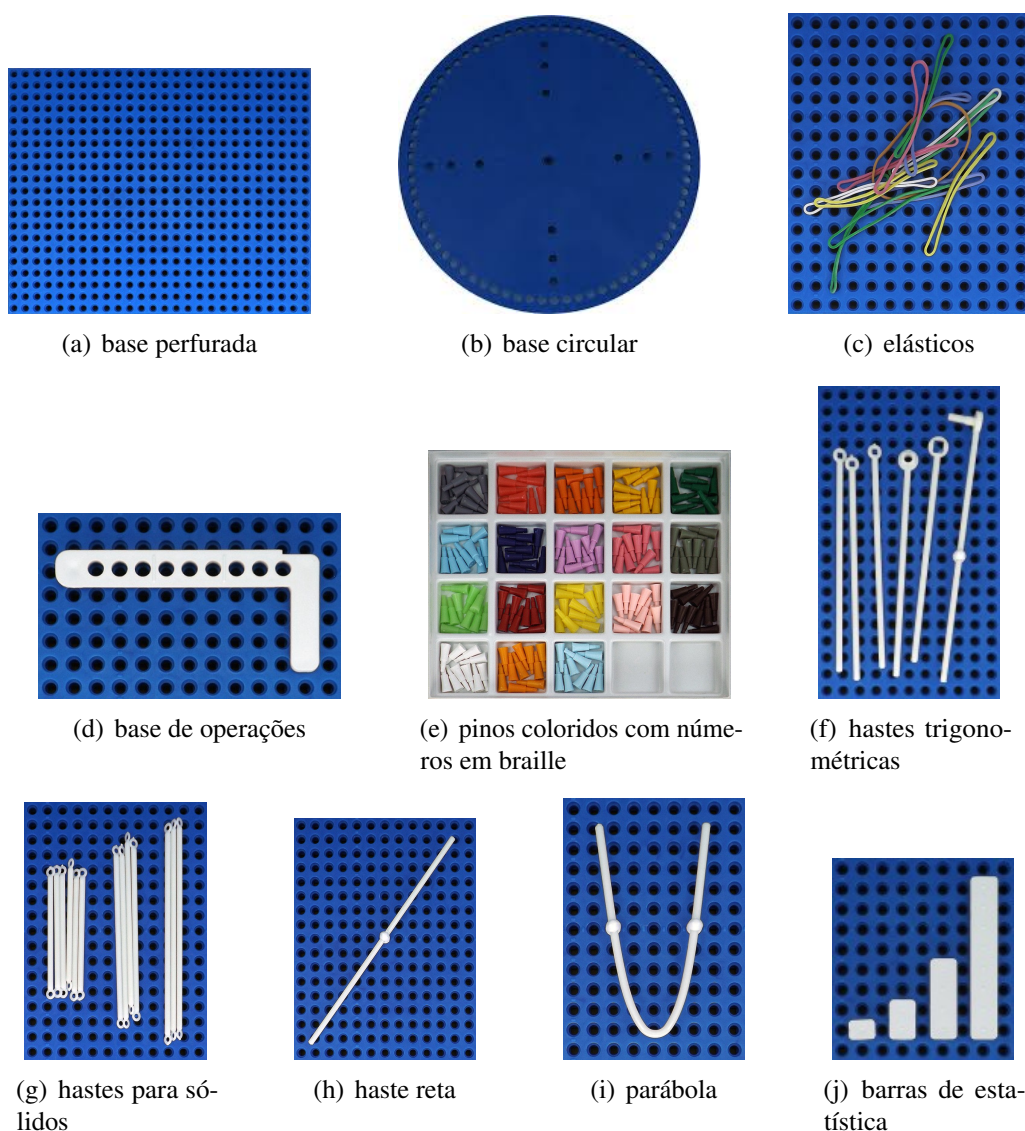


Fonte: Site Multiplano

<sup>3</sup> Para saber mais acesse <<http://www.multiplano.com.br>>

Dentro da maleta encontramos as seguintes peças:

Figura 14 – Peças do *kit* multiplano



Fonte: autoria própria.

Dessa forma, o tocar substitui o olhar para o educando cego, possibilitando-o mais liberdade para desenvolver os conteúdos no material.

### 2.3.1 USANDO O MULTIPLANO NA CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

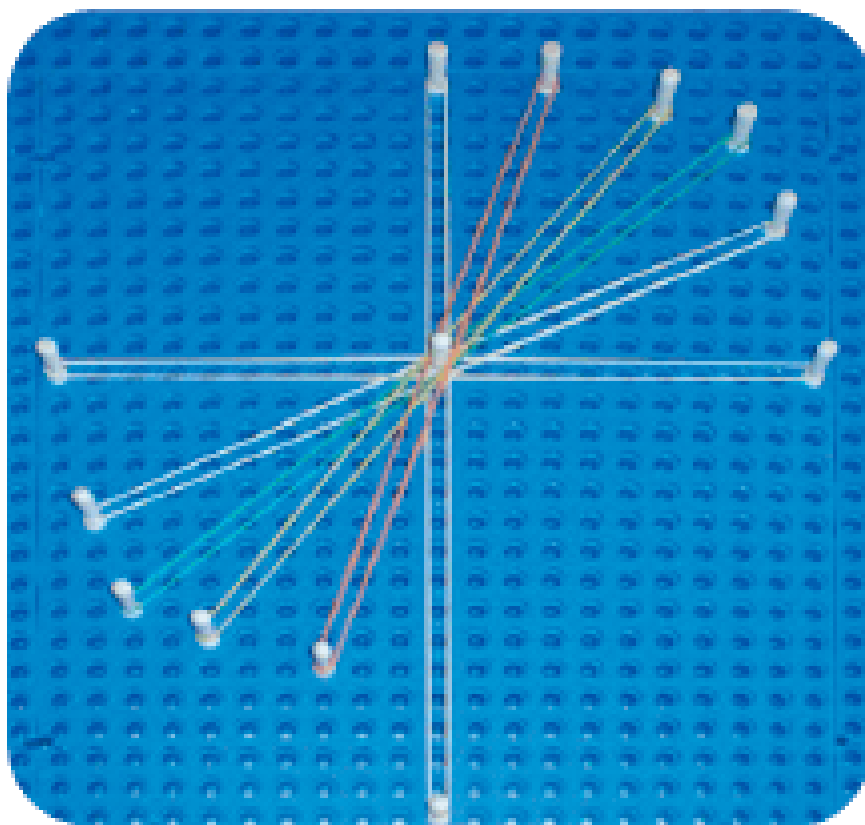
Podemos utilizar o *kit* multiplano na construção do gráfico de uma função, por exemplo. Primeiramente, devemos fixar o eixo das abscissas ( $x$ ) e o eixo das ordenadas ( $y$ ) usando os elásticos fixados nos pinos (um horizontalmente e o outro verticalmente). Com a delimitação dos eixos o plano ficará dividido em quatro quadrantes, possibilitando análises diversas do conteúdo.

Dando continuidade, localizamos o ponto de origem  $(0, 0)$ , situado na intersecção dos eixos. A partir daí, podemos localizar outro ponto qualquer deslizando os dedos sobre os

elásticos, respeitando o quadrante em que está localizado, em conformidade com os números do par ordenado.

Dada a equação de uma função afim, após determinar alguns pontos, podemos localizar os pontos no plano cartesiano, feito anteriormente no multiplano. Quando ligamos esses pontos encontramos uma reta, por se tratar de uma função afim. Podemos explorar a inclinação da reta e relacioná-la com a equação que depende do sinal do coeficiente do termo de primeiro grau.

Figura 15 – Exemplos de funções afim no *kit* multiplano



Fonte: autoria própria.

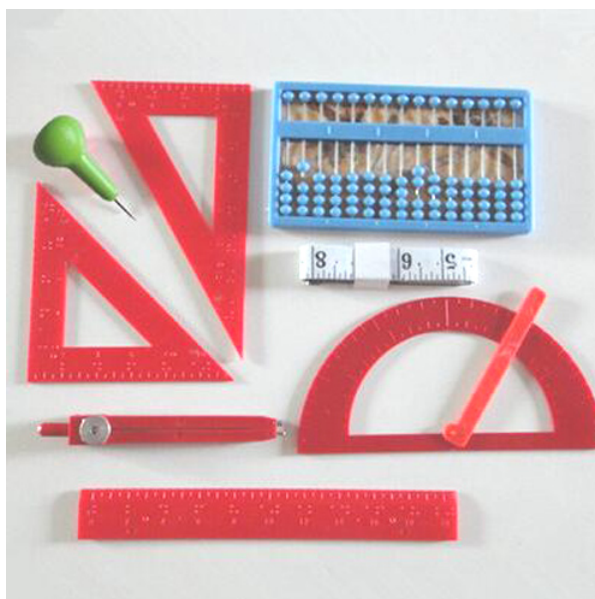
Pode-se explorar também as funções quadráticas, exponencias, trigonométricas e até mesmo outros conteúdos.

## 2.4 OUTROS MATERIAIS

Atualmente, existem muitos materiais concretos com a descrição em braille, o que facilita muito a aprendizagem de alunos deficientes visuais. Materiais básicos, como régua, compasso, esquadros, transferidor, ábaco e até mesmo fita métrica, ao qual diferem dos que já conhecemos apenas pelo código braille presente em todos os símbolos e numerações, conforme podemos observar na figura 16.



Figura 16 – Materiais adaptados para alunos cegos



Fonte: autoria própria.

Outro material bastante conhecido na área matemática é a calculadora, que na sua versão adaptada ganhou também a escrita braille em todas as teclas e a opção de leitura sonora de todas as operações e resultados obtidos nela (figura 17).

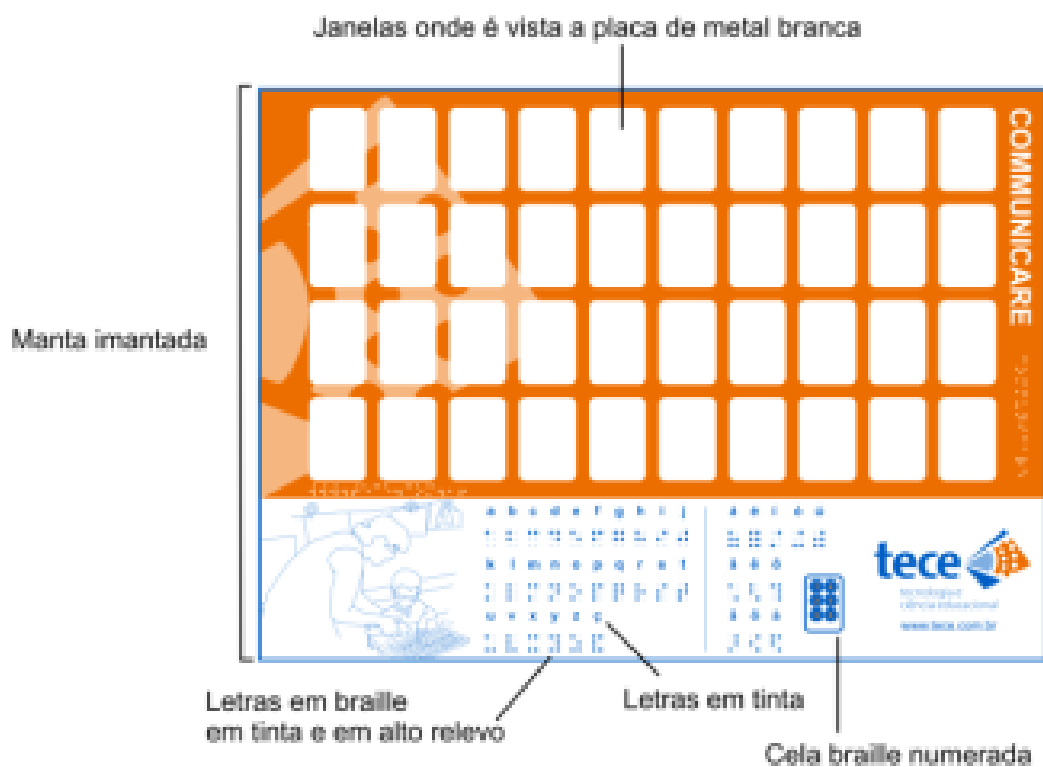
Figura 17 – Calculadora para alunos cegos



Fonte: autoria própria.

A *Communicare*<sup>4</sup>, figura 18, é uma lousa em aço, que facilita a comunicação entre deficientes visuais e videntes tanto no ambiente doméstico quanto no profissional, mesmo para quem não conhece o sistema braille. Foi criada através de um estudo feito por profissionais de diversas áreas para o ensino do Sistema Braille, de português e de cálculos em braille para videntes e deficientes visuais.

<sup>4</sup> Para saber mais acesse <<http://www.lojaciviam.com.br/communicare>>

Figura 18 – Lousa *Communicare*

Fonte: site CIVIAM.

Apesar da variedade de materiais adaptados para alunos cegos, deparamo-nos com a dificuldade em conseguí-los, tendo em vista que costumam possuir valor elevado e raramente são fornecidos pelas escolas.



### 3 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Neste capítulo será apresentado um breve histórico da função exponencial, através de uma abordagem cronológica das contribuições para o desenvolvimento do conceito. Abordaremos também características e propriedades da função exponencial.

#### 3.1 BREVE HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

As necessidades e experiências dos homens contribuíram, ao longo dos séculos, para o que se tem hoje concebido como função. Ao longo do texto que segue, podemos perceber que o conceito de função está atrelado a períodos diferentes da evolução humana.

Segundo Youschkevitch, o conceito de função foi se aprimorando no decorrer dos séculos podendo ser dividido em três partes principais:

Antiguidade que compreende desde os babilônios até Nicole Oresme, ainda não se destaca a noção de variáveis e funções, mas podemos verificar a alguns casos de dependência entre quantidades. (...) Idade Média, que seria entre Da Vinci, Descartes a Newton, onde começa a aparecer a noção de função sob a forma geométrica e mecânica, ainda em descrições gráficas e verbais. (...) Período Moderno, a partir de Leibniz aparecem as expressões analíticas de função, revolucionando a Matemática devido a sua eficácia, assegurando a esta noção um lugar de destaque nas ciências exatas. (YOUSCHKEVITCH, 1976)

Encontramos em Carl e Uta (BOYER; MERZBACH, 2012), que na Antiguidade, mais precisamente na Idade da Pedra, a partir das vivências diárias, o homem viu a possibilidade de estabelecer relações de semelhanças e analogias entre conjuntos de objetos que geram o processo de contagem. A noção de função tem sua origem nesse período, aparece como uma dependência de valores de forma intuitiva pois estamos tratando de um período em que a linguagem é completamente arcaica.

Para Patricia, Caroline e Graciela (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008), após muito anos os gregos e babilônios destacam-se como precursores da dependência funcional. Apesar da dificuldade em compreender a escrita dos gregos, devido a maneira peculiar que se expressavam, ambos utilizavam tabelas de funções relacionais. É por isso que os babilônios são considerados os maiores compiladores de tabelas e também por expressar evidentemente a ideia de dependência de valores por meio de operações básicas de multiplicação, divisão, potências e raízes, demonstrando ser um povo que já tinham a álgebra muito bem desenvolvida.

No Século II, na Grécia Antiga, Ptolomeu desenvolveu as tabelas trigonométricas que exhibe os valores de seno, cosseno e tangente para alguns ângulos notáveis. Mas, segundo Bento de Jesus (CARAÇA, 1989), "todas essas relações são apenas respostas a certas necessidades da

situação Matemática que eles se deparavam na época, e que eles não tinham noção nenhuma de função".

Já na Idade Média o matemático e filósofo francês Nicole Oresme (1323-1382) fez a primeira apresentação gráfica de funções ao traçar o gráfico da velocidade de um objeto em constante aceleração. Segundo Campitelli, Oresme demonstrou que:

(...) a distância percorrida por um objeto em movimento com velocidade variável, associava os instantes de tempo dentro do intervalo aos pontos de um segmento de reta horizontal (chamado linha de longitudes) e para cada um desses pontos ele erguia, num plano, um segmento de reta vertical (latitude), cujo comprimento representava a velocidade do objeto no tempo correspondente. Conectando as extremidades dessas perpendicularidades ou latitudes, obtinha uma representação da variação funcional da velocidade com relação ao tempo. (CAMPITELLI; CAMPITELLI, 2006)

No Renascimento o conceito de função na forma implícita apareceu em diversos trabalhos. No trabalho de Leonardo da Vinci (1452-1519) surgiram indícios de leis quantitativas para entendimento de fenômenos da natureza, atreladas a ferramentas matemáticas. Já Johannes Kepler (1571-1630), com a descoberta das leis sobre as trajetórias planetárias, esboçou uma versão primitiva da representação gráfica e Galileu Galilei (1564-1642) com o estudo sobre a queda dos corpos e da relação entre espaço e tempo. Assim, segundo Carl e Uta (BOYER; MERZBACH, 2012), Kepler e Galileu, "introduziram o quantitativo nas representações gráficas e a relação entre duas grandezas envolvidas, expressadas matematicamente por intermédio da experimentação".

Para os autores Sá, Souza e Silva (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003), o método analítico para definir funções, mesmo sem ser conceituada dessa forma, foi apresentado por René Decartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665), a partir deles foram utilizadas equações para analisar as relações entre as variáveis conectadas com uma curva. Contudo, a análise cartesiana era centrada basicamente nas curvas, e estas eram vistas apenas como uma materialização da relação  $x$  e  $y$  e não necessariamente o gráfico de uma função  $y = f(x)$ .

Ao longo do século XVII, muitos outros teóricos matemáticos trouxeram contribuições à análise cartesiana e descobriram como desenvolver funções em séries infinitas, possibilitando a representação analítica de todas as relações funcionais conhecidas na época. Uma descoberta, de fato, importantíssima para o avanço do conceito funcional e para toda história da matemática, porventura, das ciências em geral. (CAMPITELLI; CAMPITELLI, 2006)

Foi somente no Período Moderno, usando os nomes "fluentes" e "fluxões" que o primeiro conceito de função foi citado, por Isaac Newton (1642-1727). Ele introduziu o termo "variável independente" e mostrou que uma função poderia ser escrita como uma série de potência. Possibilitou que a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passassem a serem quantidades variáveis, com seus métodos de fluxos, em que o movimento contínuo de um ponto gera uma curva. Segundo Howard (EVES, 2004), se aproximou do atual conceito de função ao utilizar termos

como “relatia quantias para designar variáveis dependentes e genita para designar quantidade obtida a partir de outras por intermédio de operações aritméticas”.

Ainda para Sá, Souza e Silva (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003), Gottfried Leibniz (1646-1716) introduziu o termo função para designar quantidades geométricas que dependiam de um ponto e uma curva, também foi o primeiro a usar os termos constantes, variável e parâmetro. Então Johann Bernoulli (1667-1748) definiu função como uma quantidade composta de um modo qualquer de uma variável e algumas constantes.

Em Howard (EVES, 2004), embora todos os matemáticos citados tenham contribuído para evolução da Matemática como ciência e também com o conceito de função, nenhum outro matemático contribuiu tanto para essa evolução quanto o aluno de Bernoulli, o matemático, físico suíço Leonhard Euler (1707-1793). Foi ele quem fez a distinção entre função algébrica e transcendente e tratou logaritmos usando a forma exponencial trazendo a notação  $f(x)$  para uma função de  $x$ .

Segundo Eves, Richard Dedekind (1831-1916) dá o conceito de função que usamos até hoje:

Uma aplicação  $\alpha$  de um sistema  $S$  é uma lei, que associa a cada elemento  $s$  de  $S$  certa coisa, que é chamada imagem de  $s$  e que escrevemos  $\alpha(s)$ , onde o domínio e contradomínio podem ser qualquer conjunto, não somente de número, mas de matrizes, vetores e mesmo de funções. (EVES, 2004)

Para Tatiana (ROQUE, 2012), a definição formal de função oferecida na escola atualmente segue o padrão bourbakista, sendo *Bourbaki* um pseudônimo adotado por um grupo de matemáticos franceses dos anos de 1930 que elaboravam livros contemporâneos sobre todos os ramos da matemática. Esse grupo definiu função como:

Sejam  $E$  e  $F$  dois conjuntos, que podem ser distintos ou não. Uma relação entre um elemento variável  $x$  de  $E$  e um elemento variável  $y$  de  $F$  é dita uma relação funcional se, para todo  $x$  pertencente a  $E$ , existe um único  $y$  pertencente a  $F$  que possui a relação dada com  $x$ . Damos o nome função à operação que associa, desse modo, a todo elemento  $x$  pertencente a  $E$ , o elemento  $y$  pertencente a  $F$  que possui a relação dada com  $x$ ;  $y$  será dito o valor da função no elemento  $x$ . (ROQUE, 2012)

Constata-se que a evolução apresentada até aqui propiciou ao que hoje é conhecido como função. Diversas são as formas de se conceituar, mas em essência, todas estão ligadas a função como relação entre variáveis, como expressão analítica, como relação entre conjuntos e como transformação.

### 3.1.1 UMA BREVE EXPLANAÇÃO SOBRE AS ORIGENS DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Para o conceito de função exponencial chegar a definição que hoje é utilizada e difundida, precisou passar por inúmeros processos de experimentos, erros e acertos por várias pessoas. Segundo Carl e Uta (BOYER; MERZBACH, 2012), em meados de 1360, Nicole Oresme deixou manuscritos com "notações utilizando potências com expoentes racionais e irracionais, regras sistematizadas para operar com potências". Já em 1484 o médico Nicolas Chuquet utilizou potências com expoente zero.

O desenvolvimento tecnológico e científico da época desencadeou uma problemática relacionada às grandes quantidades de dados numéricos e os cálculos que envolviam números grandes. John Napier (1550-1617), inspirado por trabalhos anteriores, sentiu-se motivado e iniciou seus estudos sobre logaritmos, que durariam cerca de 20 anos, para elaborar suas tabelas, segundo Sá, Souza e Silva (SÁ; SOUZA; SILVA, 2003), ele pensou nos logaritmos como "valores de uma sequência geométrica, escrevendo os expoentes de maneira a formar uma faixa contínua de valores". Portanto, o conceito de função exponencial, que é dependente também do conceito de potência, está intimamente ligado ao conceito de logaritmo. Em contrapartida, o conceito de base de logaritmo que temos hoje não é o mesmo que o Napier havia elaborado na época.

O conceito de exponencial como função foi desenvolvido por Bernoulli em 1697 com a obra *Principia Calculi Exponentialum seu Percurrentium*, onde apresenta diversos cálculos em que a variável da função é o expoente.

Vários matemáticos contribuíram para o desenvolvimento da notação exponencial até que René Descartes, em meados de 1637, nos deixou a notação de potência utilizada hoje, pela utilização de numerais como expoente de uma determinada base.

Segundo Campiteli (CAMPITELI; CAMPITELI, 2006), após Napier, muitos matemáticos se dedicaram ao estudo de logaritmos e funções exponenciais. Devido à especificidade histórica e original de sua criação, ele tronou-se o mais exímio e importante nome ligado aos logaritmos. Concomitantemente a evolução dos conceitos de função e logaritmo fez ascender ao que hoje conhecemos como função exponencial.

### 3.2 CARACTERÍSTICAS E PROPRIEDADES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

O conceito de função se desenvolveu mediante pesquisas de diferentes povos e ramos do conhecimento ao decorrer da história. Até se chegar ao que hoje entendemos como função, durante o processo evolutivo muitas leis de relação foram estabelecidas.

Para caracterizar a função exponencial é necessário compreender a potência  $a^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , quando  $a$  é um número real positivo.

Inicialmente, definamos potências de expoente natural

**Definição 3.1.** *Seja  $a$  um número real positivo. Para cada  $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  a potência  $a^n$  de base  $a$  e expoente  $n$  é definida como o produto de  $n$  fatores iguais a  $a$ , ou seja,  $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ .*

Assim, da definição segue que:

1. Para  $n = 1$ ,  $a^1 = a$ .
2. Para quaisquer  $n, m \in \mathbb{N}$  tem-se que  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ .

Para estender o conceito de potência de expoente natural para expoente inteiro devemos manter a regra fundamental  $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ . Dessa forma, para  $n = 0$ , da igualdade

$$a^0 \cdot a^1 = a^{0+1} = a^1 = a = 1 \cdot a$$

segue que  $a^0 = 1$ .

Agora, para  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n < 0$ , da igualdade  $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$  segue que  $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$  (ou seja,  $a^{-n}$  é o inverso multiplicativo de  $a^n$ ).

Então, definimos potência de expoente inteiro como:

**Definição 3.2.** *Seja  $a$  um número real positivo. Definimos:*

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}} & \text{se } n > 0 \\ 1 & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{a^{-n}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Agora, para estender o conceito de potência para expoente racional para  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r = \frac{m}{n}$ , com  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $n > 0$ , tem-se que

$$(a^r)^n = \underbrace{a^r \cdot \dots \cdot a^r}_{n \text{ vezes}} = a^{r+\dots+r} = a^{n \cdot r} = a^{n \cdot \frac{m}{n}} = a^m.$$

Neste caso, o número  $a^r$  é a raiz  $n$ -ésima de  $a^m$ . Ou seja, define-se  $a^r = \sqrt[n]{a^m}$ . Destacamos que a propriedade  $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$  com  $r$  e  $s \in \mathbb{Q}$  continua válida.

Das propriedades da multiplicação nos reais, são reservadas as relações de ordem:

1. Para  $a \in \mathbb{R}$  e  $a > 1$ ,  $a^r < a^s$  se, e somente se  $r < s$ .

2. Para  $a \in \mathbb{R}$  e  $0 < a < 1$ ,  $a^r < a^s$  se, e somente se  $s < r$ .

Ao estender o conceito de potência para expoente número real, além de manter a regra  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$  devemos preservar a relação de ordem.

Então, dado o real positivo, analisamos o caso  $a > 1$  (para  $0 < a < 1$  o procedimento é análogo). Dado  $x \in \mathbb{R}$ , existem  $r, s \in \mathbb{Q}$  tais que  $r < x < s$ . Assim,  $a^r < a^x < a^s$ . Suponhamos que existem  $A$  e  $B \in \mathbb{R}$  distintos tais que  $a^x = A$  e  $a^x = B$ . Sem perda de generalidade, suponhamos que  $A < B$ . Assim  $a^r < A < B < a^s$ . Ou seja, o intervalo  $[A, B]$  não contém nenhuma potência de  $a$  com expoente racional. Isto contradiz o fato de que em todo intervalo de  $\mathbb{R}^+$  existe alguma potência  $a^h$ , com  $h \in \mathbb{Q}$ . Portanto  $A = B$ .

Desta forma, existe uma única maneira de definir o valor  $a^x$  quando  $x \in \mathbb{R}$ :  $a^x$  é o número real cujas aproximações por falta são  $a^r$ , com  $r < x$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ , e cujas aproximações por excesso são  $a^s$ , com  $x < s$ ,  $s \in \mathbb{Q}$ .

**Definição 3.3.** (*Função Exponencial*) Dado  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , denomina-se função exponencial de base  $a$  a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , a cada  $x \in \mathbb{R}$  associa o número  $a^x$ , ou seja  $f(x) = a^x$ .

Da definição apresentada, a função  $f(x) = a^x$  é injetiva e sobrejetiva. Além disso, ela é crescente, no caso  $a > 1$ , e decrescente no caso  $a < 1$ .

No próximo teorema, apresentamos a caracterização da função exponencial.

**Teorema 3.4.** (*Caracterização da Função Exponencial*) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente), as seguintes afirmações são equivalentes:

1.  $f(rx) = f(x)^r$ , para todo  $r \in \mathbb{Z}$  e todo  $x \in \mathbb{Q}$ ;
2.  $f(x) = a^x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $a = f(1)$ ;
3.  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Provaremos as implicações: (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (1). Para mostrar que (1)  $\Rightarrow$  (2) observamos que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional  $r = \frac{m}{n}$ , (com  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$ ) tem-se  $f(rx) = f(x)^r$ .

Sendo  $nr = m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

logo,

$$f(rx) = \sqrt[n]{(f(x))^m}$$

, ou seja,

$$f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r.$$

Tomando  $f(1) = a$ , obtemos

$$f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}.$$

Suponhamos que  $f$  seja crescente. Assim,

$$1 = f(0) < f(1) = a, \text{ pois } f(0) = 1 \text{ e } f(1) = a.$$

Então, suponhamos, por absurdo, que existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) \neq a^x$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $f(x) < a^x$ . Assim, existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que  $f(x) < a^r < a^x$  pois em todo intervalo de  $\mathbb{R}^+$  existe uma potência  $a^l$ , com  $l \in \mathbb{Q}$ .

Desta forma,  $f(x) < f(r) < a^x$  pois  $f(r) = a^r$ . Sendo  $f$  crescente, tendo  $f(x) < f(r)$  segue que  $x < r$ . Do fato de  $a^r < a^x$  temos que  $r < x$ . Uma contradição. Portanto  $f(x) = a^x$ .

$$(2) \Rightarrow (3): \text{ Sejam } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Então } f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y).$$

$$(3) \Rightarrow (1): \text{ Inicialmente observamos que}$$

$$f(0) = 1, \text{ pois } 1 \cdot f(0) = f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0).$$

Dado  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f(nx) = \underbrace{f(x + \dots + x)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{f(x) \cdot \dots \cdot f(x)}_{n \text{ vezes}} = f(x)^n.$$

Seja  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r = \frac{m}{n}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $m > 0$ ,  $f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$ , pois  $r \cdot n = m$ .

No caso de  $m < 0$ ,

$$f(0) = f(mx + (-mx)) = f(mx) \cdot f(-mx) = f(mx) \cdot f(x)^{-m}.$$

Assim,  $f(mx)$  é o inverso multiplicativo de  $f(x)^{-m}$ , ou seja,

$$f(mx) = \frac{1}{f(x)^{-m}} = f(x)^m.$$

Desta forma, segue que  $f(rx) = \sqrt[n]{(f(x))^m}$ , com  $r \in \mathbb{Q}$ . Ou seja,  $f(rx) = f(x)^r$ .  $\square$

**Definição 3.5.** (Função do Tipo Exponencial) Dizemos que uma função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é de tipo exponencial quando se tem  $g(x) = ba^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes estritamente positivas.

Da definição segue que, se  $a > 1$  a função é crescente e se  $0 < a < 1$  a função é decrescente.

Observe que se a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é do tipo exponencial então, para quaisquer  $x, h \in \mathbb{R}$ , os quocientes

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \text{ e } \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de  $h$ , mas não de  $x$ .

**Teorema 3.6.** (*Caracterização da Função de Tipo Exponencial*) *Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para  $x, h \in \mathbb{R}$  quaisquer, o acréscimo relativo  $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}$  dependa apenas de  $h$ , mas não de  $x$ . Então, se  $b = g(0)$  e  $a = \frac{g(1)}{g(0)}$ , tem-se  $g(x) = ba^x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Da hipótese tem-se que  $\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = K(h)$ .

Assim,  $\frac{g(x+h)}{g(x)} = K(h) + 1$ , ou seja  $\frac{g(x+h)}{g(x)}$  independe de  $x$ .

Denotemos por  $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$ .

Sendo  $b = g(0) > 0$  e  $g$  monótona e injetiva, a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  dada por  $f(x) = \frac{g(x)}{b}$  também é monótona e injetiva. Além disso,

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{\frac{g(x+h)}{b}}{\frac{g(x)}{b}} = \frac{g(x+h)}{g(x)} = K(h) + 1$$

independe de  $x$ ,

$$f(0) = \frac{g(0)}{b} = \frac{b}{b} = 1 \text{ e } \frac{f(x+h)}{f(x)} = \varphi(h).$$

Na relação  $\frac{f(x+h)}{f(x)} = \varphi(h)$ , quando  $x = 0$ , tem-se que  $f(h) = \varphi(h)$ . Desta forma,

$$f(x+h) = \varphi(h) \cdot f(x) = f(h) \cdot f(x).$$

Ou seja,  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Pelo teorema anterior segue que  $f(x) = a^x$ , onde  $a = f(1)$ .

Assim, como  $g(x) = b \cdot f(x)$  então,  $g(x) = b \cdot a^x$ . □

### 3.3 GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Devemos dar atenção especial aos gráficos, que estão presentes em diversas situações do cotidiano do aluno. Os gráficos, além do apelo visual, favorecem a observação de comportamento

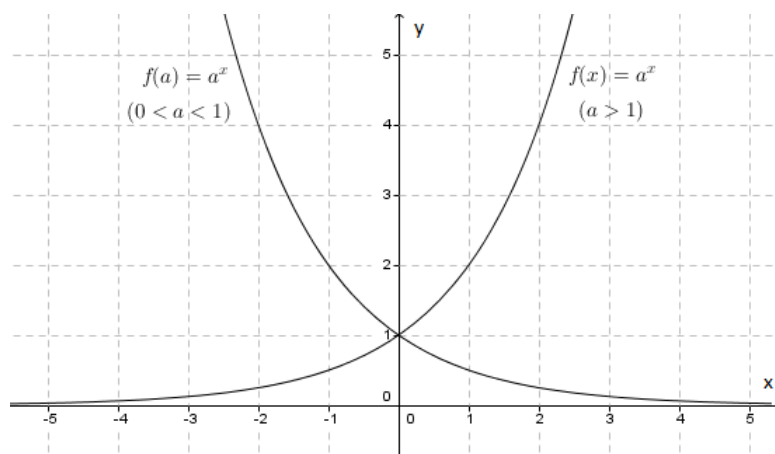


que são difíceis de serem percebidos em outras representações (numéricas, algébricas e por tabelas).

Assim, sobre o gráfico da função exponencial  $f(x) = a^x$ , temos:

1. a curva representativa está toda acima do eixo  $x$ , pois  $y = a^x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ;
2. corta o eixo  $y$  no ponto de ordenada 1;
3. se  $a > 1$  o de uma função crescente e se  $0 < a < 1$  o de uma função decrescente;
4. tem os aspectos da Figura 19.

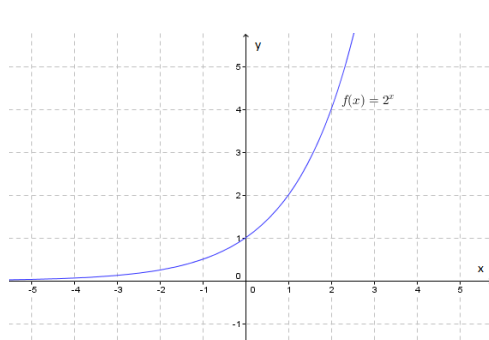
Figura 19 – Gráfico da função exponencial



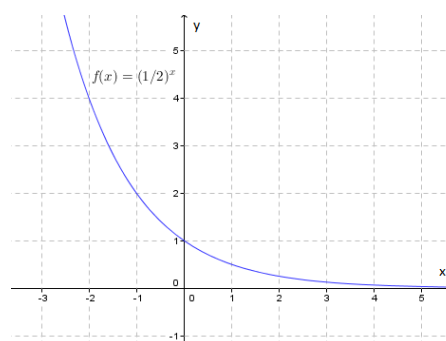
Fonte: autoria própria.

Com exemplos particulares, temos os gráficos das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definidas por  $f(x) = 2^x$ , na figura 21(a), e  $g(x) = \frac{1}{2}^x$ , na figura 21(b)

Figura 20 – Exemplos de Funções Exponenciais



(a) comportamento crescente



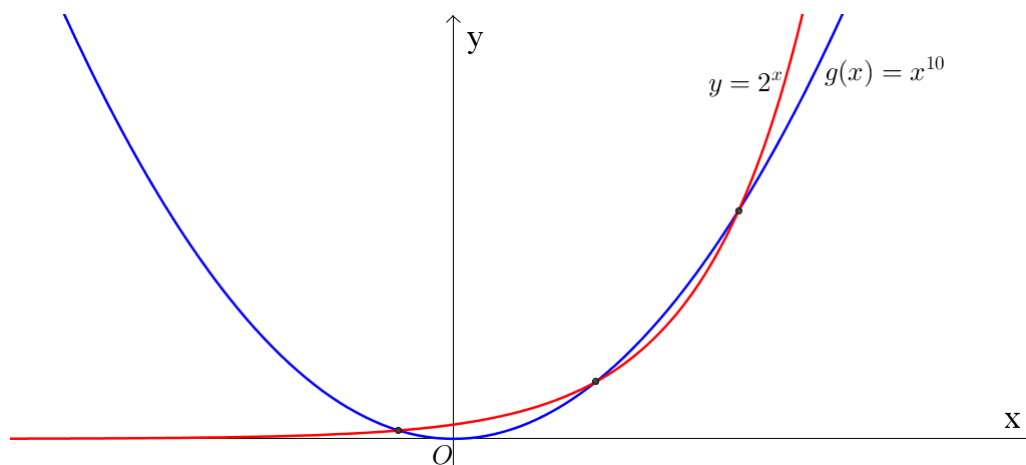
(b) comportamento decrescente

Fonte: autoria própria.

Com base na experiência com alunos de Ensino Médio, um dos erros mais comuns na hora de traçar o gráfico da função exponencial, no ensino médio, é fazê-lo na forma de uma parábola. Mas, devemos enfatizar, que o crescimento exponencial é diferente do crescimento polinomial.

Como podemos observar nos seguintes gráficos de  $y = 2^x$  com o de  $g(x) = x^{10}$ , representadas na figura 21, temos:

Figura 21 – Comparativo entre Função Exponencial e Função Polinomial



Fonte: autoria própria.

- para  $0 < x < 1,077$  temos  $x^{10} < 2^x$
- para  $1,077 < x < 58,77$  temos  $x^{10} > 2^x$
- para todo  $x > 58,77$  têm-se sempre  $2^x > x^{10}$

Portanto, através dos gráficos, conseguimos visualizar as interações entre as variáveis e perceber, com maior facilidade, as relações entre elas, prevendo comportamentos em intervalos maiores, chegando às conclusões com maior facilidade. É assim que a representação gráfica das funções exponenciais surge como um agente facilitador para o processo de aprendizagem.

## 4 RELATO DE EXPERIÊNCIA

Neste capítulo, após o estudo dos temas abordados nos capítulos anteriores, elaboramos uma proposta de atividade que visa corroborar com o processo de ensino-aprendizagem de conceitos iniciais de Função Exponencial na 1ª série do Ensino Médio. A atividade visa atender turmas regulares e alunos com deficiência, explorando suas experiências, vivências.

Inicialmente aplicamos a atividade, por três aulas de 45 minutos cada, em uma turma regular de 1ª série do Ensino Médio de uma escola estadual. Num segundo momento aplicamos a mesma atividade, agora com o auxílio do multiplano, para uma aluna com deficiência mental, com duração de 5 aulas de 45 minutos cada. E por fim, aplicamos a atividade, também com auxílio do Multiplano, para um aluno cego, num período de 5 aulas de 45 minutos cada.

Preparamos essa atividade, objetivando:

- investigar o potencial da atividade de Função Exponencial para alunos de classes regulares;
- investigar o potencial da atividade de Função Exponencial para a aluna deficiente mental;
- investigar o potencial da atividade de Função Exponencial para o aluno cego;
- analisar, comparar e relatar a postura dos alunos com relação as atividades aplicadas.

### 4.1 O GRUPO ESCOLHIDO PARA IMPLEMENTAÇÃO

A aplicação da atividade foi no segundo semestre letivo de 2017. Para escolha dos alunos levou-se em conta os que ainda não haviam estudado função exponencial.

Inicialmente, a aplicação da atividade ocorreu na Escola de Ensino Médio Professor Roberto Grant, na cidade de São Bento do Sul - SC. Optou-se por uma turma regular de 1ª série do Ensino Médio que ainda não tinha visto o conteúdo de função exponencial, cuja pesquisadora não era professora da turma, do período vespertino, composta por 26 alunos. Cabe ressaltar que, no ano letivo em que a atividade foi aplicada ocorreram várias trocas de professores de Matemática (quatro vezes). A duração da atividade nessa turma, foi de 3 aulas de 45 minutos, em dois dias seguidos.

Dessa mesma escola, foi escolhida uma aluna, que denotaremos por L., também aluna da 1ª série só que em outra turma do período vespertino, que não havia tido o conteúdo por ausentar-se das aulas devido a tratamento médico. Ela possui deficiências mental (média) e física, comprometendo em grande escala o desenvolvimento cognitivo e motora. Em sala de aula ela conta com auxílio de uma segunda professora, porém optou-se por realizar a atividade somente

com ela em período do contra turno, por 5 aulas de 45 minutos no mesmo dia.

Por fim, a última implementação ocorreu na Escola de Educação Básica Barão de Antonina, na cidade de Mafra - SC. Optou-se por essa escola por possuir um aluno com deficiência visual, identificado por aluno A., que tem a deficiência devido à má formação, sendo que desde que nasceu enxerga apenas alguns vultos. O aluno destaca-se por rápido raciocínio lógico matemático e por conseguir chegar até a escola, desde seu primeiro ano, pegando duas conduções sem qualquer auxílio de outra pessoa. Foram utilizadas 5 aulas de 45 minutos cada para aplicação da atividade, sendo todas no mesmo dia, em período de contra turno. Apesar de toda essa desenvoltura, nunca havia feito, ou se quer tinha noção de um gráfico.

## 4.2 PREPARAÇÃO DAS ATIVIDADES

Após as pesquisas realizadas, elaboramos as atividades com base em uma lenda do livro "*O homem que calculava*", de Malba Tahan (TAHAN, 2002). A problemática trata da lenda de invenção do jogo de xadrez, ao qual o súdito pede ao rei que lhe dê certa quantidade de grãos de trigo por cada casa do tabuleiro. A lenda original, diz o seguinte:

O jogo de xadrez foi inventado na Índia. Quando o rei hindu Sheram tomou conhecimento deste divertimento estratégico, ficou maravilhado com sua engenhosidade e com a variedade de movimentos que eram possíveis.

Ao saber que o inventor desse jogo era um de seus servos, o rei requisitou sua presença com o intuito de recompensá-lo pessoalmente pelo seu grande invento.

O autor do invento, o qual era conhecido como Seta, apresentou-se diante do soberano. Era um sábio que se vestia modestamente e que vivia dos mantimentos que lhe eram dados por seus discípulos.

- Seta, quero lhe compensar generosamente pelo engenhoso jogo que você inventou – disse o rei.

O estudioso contestou a proposta do rei com uma reverência.

- Sou poderoso e rico o bastante para conceder o seu maior desejo – continuou o rei, explicando – Diga-me uma recompensa que lhe satisfaça e será sua.

O sábio se manteve calado.

- Não seja tímido – incentivou o rei – Conte-nos seu desejo. Não estimarei gastos para concedê-lo.

- Grande é a sua benevolência, grande soberano. Entretanto, peço que me conceda um curto período de tempo para pensar na resposta. Amanhã, depois de uma profunda meditação, transmitirei o meu pedido.

Na manhã seguinte, Seta compareceu novamente perante o monarca e o deixou maravilhado com seu desejo, sem precedente algum por sua humildade.

- Oh grande soberano – disse Seta – desejo que me entreguem um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez que eu inventei.

- Somente um grão de trigo? – perguntou o rei, surpreso.

- Sim, meu senhor. E pela segunda casa, peço que me entreguem dois grãos de trigo; pela terceira casa, quatro grãos; pela quarta casa, oito; pela quinta casa, dezesseis; pela sexta casa, trinta e dois...

- Basta! – interrompeu o rei, enfadado – Será entregue a você o trigo correspondente as 64 casas do tabuleiro, tal como é o seu desejo; para cada nova casa, o dobro da quantidade da casa anterior. Entretanto, o seu pedido é indigno da minha benevolência. Ao me pedir um pagamento tão ínfimo, você menospreza de maneira irreverente a minha recompensa. Tão inteligente como é, poderia ter dado maior prova de respeito à magnificência do seu rei. Já pode se retirar. Meus servos entregarão a você um saco com o trigo que pediu.

Seta esboçou um sorriso e, depois de sair da sala, ficou esperando nos portões do palácio.

Durante sua refeição, o rei se lembrou do criador do xadrez e enviou alguém para saber se já tinham entregado a Seta sua mesquinha recompensa.

- Majestade, sua ordem está sendo cumprida – foi a resposta. – Os matemáticos da corte estão calculando o número de grãos de trigo que devem ser entregues.

O monarca franziu a testa. Não estava acostumado a que demorassem tanto para cumprir seus decretos.

À noite, quando foi se retirar para descansar em seus aposentos, o rei perguntou novamente quanto tempo fazia que o sábio Seta tinha deixado o castelo com seu saco de trigo.

- Majestade – responderam – seus matemáticos ainda estão trabalhando sem descanso e esperam finalizar os cálculos ao amanhecer.

- Por que isso está demorando tanto? – gritou o monarca, irado -. Que amanhã, antes que eu me levante, já tenham entregado a Seta até o último grão de trigo. Não costumo dar duas vezes a mesma ordem.

Pela manhã, o governante foi comunicado que o maior matemático da corte solicitava uma audiência para comunicar-lhe um fato muito importante.

O soberano ordenou que o deixassem entrar.

- Antes que comece a tratar do assunto – disse Sheram –, quero saber se finalmente entregaram a Seta a pobre recompensa que solicitou.

- Precisamente por causa desse assunto que ousei chamá-lo tão cedo – respondeu o ancião. – Calculamos cuidadosamente a quantidade total de grãos que seta deseja receber e o resultado é uma cifra descomunal...

- Seja qual for o resultado – interrompeu o governante com desdém – meus celeiros e despensas não empobrecerão. Prometi dar a ele essa recompensa e ela será entregue.

- Majestade, não depende da sua vontade cumprir semelhante desejo. Mesmo em todos os seus celeiros, não existe a quantidade de trigo que Seta pediu. Tampouco existe nas despensas do reino inteiro. Até mesmo os celeiros do mundo inteiro são insuficientes. Se deseja entregar sem falta a recompensa que prometeu, ordene que todos os reinos da Terra sejam convertidos em plantações, mande secar os mares e oceanos, ordene que derretam o gelo e a neve que cobrem os longínquos desertos do norte. Que esse espaço seja totalmente plantado de trigo e ordene que toda a colheita conseguida seja entregue a Seta. Somente dessa maneira o sábio receberá sua recompensa.

O monarca escutou perplexo às palavras do ancião matemático.

- Diga-me qual é essa cifra colossal. – falou o monarca, duvidando.

- Oh, majestade! Dezoito trilhões, quatrocentos e quarenta e seis mil setecentos e quarenta e quatro bilhões, setenta e três mil setecentos e nove milhões, quinhentos e cinquenta e um mil seiscentos e quinze grãos de trigo. {MALBA

Para melhor desenvolvimento da atividade, adaptamos a quantidade inicial para 2 grãos de trigo, sendo necessário ao aluno, estabelecer a quantidade de grãos das casas seguintes sempre

dobrando o valor da casa anterior, gerando uma potência de base 2 e consequentemente o estudo da função exponencial, suas características, propriedades e gráfico.

Essa atividade foi planejada para servir como introdução aos conceitos iniciais de função exponencial, tendo em vista que os alunos vão estudar a função exponencial e suas aplicações no próximo ano letivo. A atividade foi entregue impressa para os alunos, sendo transcrita para braille para o aluno cego.

Na parte inicial, temos um trecho breve da lenda, com o tabuleiro de xadrez ao lado, juntamente com as coordenadas das casas do tabuleiro, conforme figura 22. Assim, dada a explicação da lenda pela pesquisadora e mostrado o tabuleiro, eles têm os dados na folha para que possam retomar assim que preciso.

Figura 22 – Atividade Aplicada - parte inicial

**ATIVIDADE 1 - O JOGO DE XADREZ**

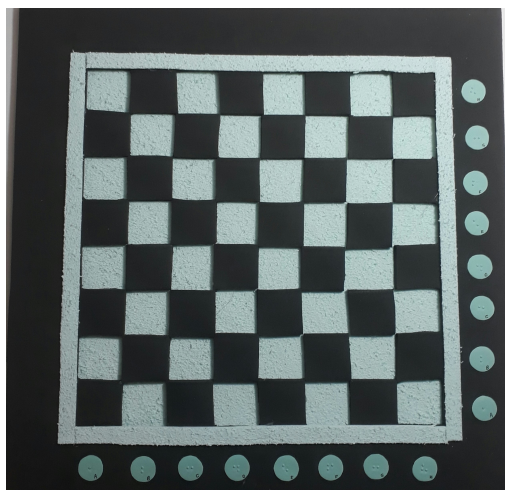
*"... – Bondoso Rei, dê-me então dois grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, quatro pela segunda casa, dobrando sempre o número de grãos na passagem de cada casa, até a última casa do tabuleiro".*

8								
7								
6								
5								
4								
3								
2								
1								
	a	b	c	d	e	f	g	h

Fonte: autoria própria.

Para aplicação da atividade com os alunos especiais foi desenvolvido pela autora um tabuleiro de xadrez em EVA, conforme a figura 23, com texturas diferentes e código braille para que o aluno cego pudesse entender do que se tratava o tabuleiro.

Figura 23 – Tabuleiro com texturas



Fonte: autoria própria.

**Questão 1.** Quantas casas possui o tabuleiro aqui apresentado?

*Espera-se que o aluno consiga concluir o número de casas que um tabuleiro de xadrez possui através da operação multiplicação, sem que precise contar casa a casa.*

**Questão 2.** Como podemos representar cada casa? Uma possibilidade é procedendo da seguinte forma: nomeando as linhas do tabuleiro com os numerais 1,2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, nesta ordem, de baixo para cima, e as colunas com as letras a, b, c, d, e, f, g e h, nesta ordem, da esquerda para a direita. Assim,

(i)  $a_5$  representa a casa que está na coluna ..... e linha .....

(ii)  $f_2$  representa a casa que está na coluna ..... e linha .....

(iii)  $e_6$  representa a casa que está na coluna ..... e linha .....

*Nessa questão o aluno deverá completar as lacunas com a localização de cada casa no tabuleiro. Tem por objetivo padronizar essa localização.*

**Questão 3.** Como podemos numerar as casas do tabuleiro usando as representações definidas no exercício 2? Uma possibilidade é numerá-las deslocando-se em linha, da esquerda para a direita. Assim:

REPRESENTAÇÃO DA CASA	NÚMERO DA CASA	REPRESENTAÇÃO DA CASA	NÚMERO DA CASA
$a_1$	1	$f_2$	
$b_1$		$a_3$	
$c_1$	3	$c_3$	
$a_2$	9	$e_3$	
$b_2$		$d_4$	
$c_2$		$g_7$	

*O aluno precisa encontrar o número da casa de acordo com a localização, novamente seguindo o padrão estabelecido.*

**Questão 4.** Com a numeração das casas definidas no exercício 3, determine a quantidade de grãos que o Rei deverá pagar por cada uma das seguintes casas:

a) Qual é a regularidade que você observa na sequência:

(i) Número da casa ( $a_1, b_1, c_1, \dots, h_1, a_2, b_2$ )?

(ii) Quantidade de grãos ( $f(a_1), f(b_1), \dots, f(h_1), f(a_2), f(b_2)$ )?

b) Qual é a regra que você observa para calcular a quantidade de grãos em função do número da casa?

REPRESENTAÇÃO DA CASA ( $k_i$ )	NÚMERO DA CASA ( $n$ )	QUANTIDADE DE GRÃOS ( $f(n)$ )
$a_1$	1	$f(1) = 2$
$b_1$	2	$f(2) = 4$
$c_1$		
$d_1$		
$e_1$		
$f_1$		
$g_1$		
$h_1$		
$a_2$		
$b_2$		

c) Faça o esboço do gráfico relacionando o número da casa ( $n$ ) com a quantidade de grãos ( $f(n)$ ).

Na questão 4, o aluno deve, inicialmente completar a tabela e após responder os questionamentos. Nessa questão é esperado do aluno que ele perceba a regularidade nas seqüências de números das casas (de um termo para outro ocorria o acréscimo de um valor constante) e também da quantidade de grãos (de um termo para outro ocorria a multiplicação por um valor constante) e assim elabore uma regra para calcular o número de grãos em função do número da casa. Visto que os alunos já aprenderam potências, é esperado que ele chegue na fórmula da função exponencial  $f(n) = 2^n$ . Espera-se, também que o aluno consiga esboçar o gráfico dessa função e perceber que se tratar de uma curva com outras características, diferente das estudadas.

**Questão 5.** Com a numeração das casas definidas no exercício 3, complete as lacunas:

NÚMERO DA CASA	QUANTIDADE DE GRÃOS	QUANTIDADE DE GRÃOS
$b_1 + a_2 = 2 + 9 = 11$	$f(b_1 + a_2) = f(11) =$	$f(b_1) \cdot f(a_2) = f(2) \cdot f(9) = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} =$
$a_2 + a_5 =$	$f(a_2 + a_5) =$	$f(a_2) \cdot f(a_5) = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} =$
$a_2 + b_3 =$	$f(a_2 + b_3) =$	$f(a_2) \cdot f(b_3) = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} =$
$b_3 + d_4 =$	$f(b_3 + d_4) =$	$f(b_3) \cdot f(d_4) = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} =$

Qual é a regularidade que você observa na quantidade de grãos?



O aluno deverá preencher primeiro a tabela, relacionando as colunas e depois responder a pergunta da questão. O objetivo é perceber uma das propriedades da função exponencial, que transforma a soma em produto, apenas no preenchimento da tabela, mesmo que não tenha sido falado sobre isso anteriormente.

**Questão 6.** Complete as lacunas:

número da casa	representação da casa	escreva o número da casa usando as representações $a_1$ 's e/ou $b_1$ 's	escreva a quantidade de grãos que o Rei deverá pagar usando $f(a_1)$ 's e/ou $f(b_1)$ 's
3	$c_1$	$1 \cdot a_1 + 1 \cdot b_1$	$f(3) = f(a_1) \cdot f(b_1) = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$
4			
8			
9	$a_2$	$1 \cdot a_1 + 4 \cdot b_1$	$f(9) = f(a_1) \cdot f(b_1)^4 = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$
11			
16			
17			
20			
24			
26			
29			
32			
33			
40			
48			
64			

O aluno deve responder a questão preenchendo a tabela, mesmo que não seja sem sua totalidade. Espera-se que ele perceba outra propriedade da equação exponencial, que

*transforma o monômio de primeiro grau em uma potência.*

**Questão 7.** Ao invés de dobrar o número de grãos na passagem de cada casa, o Rei devesse pagar um grão pela primeira casa e o triplo de grãos na passagem de uma casa para outra, como seria essa função? Esboce o gráfico desta função.

*Na resolução dessa questão o aluno deve chegar a nova função do tipo exponencial, calcular alguns valores da função e esboçar o gráfico. Tem-se por objetivo a comparação entre duas funções exponenciais diferentes, com seus valores e gráficos, para que o aluno possa perceber a diferença de valores e também do gráfico.*

**Questão 8.** E se o Rei devesse pagar 80 toneladas pela primeira casa, caindo pela metade na passagem de uma casa para outra, responda:

- a) Como se representaria analiticamente e graficamente a quantidade de grãos a serem pagos por cada casa?
- b) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de uma tonelada?
- c) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de 100 kilos?
- d) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de um kilo?
- e) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de 100 gramas?
- f) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de um grama?
- g) Você poderia estimar quanto o Rei pagaria ao todo? Ou seja, qual seria a soma total?

*Na última questão ocorre a inversão, é dado o valor que o rei deverá pagar pela primeira casa, devendo pagar a metade na passagem de uma casa para outra. Espera-se que o aluno chegue à função e também consiga fazer o esboço do gráfico. É sabido que o cálculo se torna cansativo e complexo, por isso, esperamos que o aluno determine valores por meio de estimativas.*

### 4.3 DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES

Faremos a análise e comparação das aplicações das atividades para a turma regular, a aluna com deficiência mental (L.) e o aluno deficiente visual (A.). As aulas iniciaram com uma breve apresentação da mestrandia, falando que seria executado um trabalho do curso de Mestrado da UTFPR.

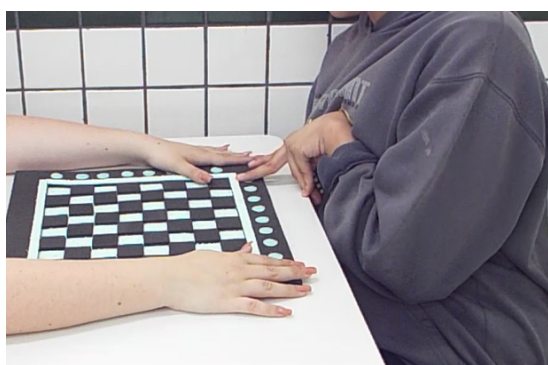
Em seguida, para dar início a sequência didática, em sala de aula, foram feitas algumas perguntas aos alunos. Sobre o conhecimento deles do que é uma função, qual os tipos eles haviam estudado e seus respectivos gráficos. Na turma regular alguns alunos disseram que função é "uma coisa que depende da outra", e que conheciam a função do primeiro grau sendo que o gráfico era uma "linha" ou "reta" e a função quadrática cujo gráfico alguns lembraram se chamar parábola. A aluna L., portadora de deficiência mental, disse não saber o que é uma função (sendo que já

havia estudado naquele ano, mas, o esquecimento é devido aos comprometimentos cognitivos), não conseguiu lembrar os nomes das funções que havia estudado e sobre os gráficos disse fazer eles em formato de "linha" e "U".

O aluno A. disse lembrar de ter estudado a função afim e a função do segundo grau, e os gráficos eram reta e parábola, definida por ele como uma curva. Ele relatou que nunca fez nem sentiu o gráfico de uma função, que lembrava da professora dele ter dito que "o gráfico da função afim é uma reta" e "o gráfico da função do segundo grau é uma parábola", e quando perguntou para ela o que é uma parábola ela disse se tratar de uma curva.

Após esse contato inicial, foi contado a lenda para os alunos e mostrado o tabuleiro de xadrez. Os alunos da turma regular demonstram-se muito interessados com a estória e todos disseram conhecer o tabuleiro de xadrez. A L. disse que brincava com as peças do xadrez na aula de Educação Física e perguntou para a mestrandia "o que é um grão de trigo?" e ficou observando o tabuleiro, figura 27(a). O A. disse não conhecer o tabuleiro de xadrez, foi então que a mestrandia apresentou o tabuleiro adaptado, figura 27(b), ele ficou por um tempo sentindo o tabuleiro e disse parecer ser um jogo muito legal.

Figura 24 – Observação do tabuleiro de xadrez adaptado



(a) Aluna L.



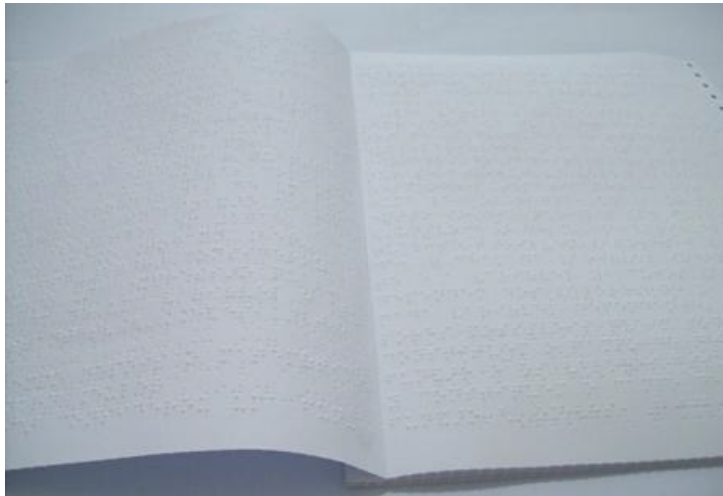
(b) Aluno A.

Fonte: autoria própria.

Em seguida, os alunos receberam a apostila com as atividades, foi pedido para colocar o nome já que trabalharíamos por mais aulas com ela. Para o aluno cego foi entregue a apostila transcrita em braille, figura 28, ele disse "é a primeira vez que um professor traz a atividade já na minha língua, eu nunca posso fazer sozinho pois preciso que alguém faça da leitura".

Foi explicado que cada casa do tabuleiro poderia ser representada nomeando as linhas do tabuleiro com os numerais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, nesta ordem, de baixo para cima, e as colunas com as letras a, b, c, d, e, f, g e h, nesta ordem, da esquerda para a direita. A resolução das três primeiras atividades estava voltada para a caracterização e numeração das casas do tabuleiro, em geral, os alunos da turma regular não apresentaram dificuldades. Quando perguntado sobre a quantidade de casas no tabuleiro, todos concluíram ser 64 casas, a maioria chegou ao resultado

Figura 25 – Apostila em Braille



Fonte: autoria própria.

pelo produto 8 por 8 e somente dois alunos contaram uma por uma. Na caracterização da localização das casas a maioria conseguiu com bastante facilidade, alguns alunos escreveram as coordenadas de cada casa no tabuleiro da apostila. Na segunda questão todos os alunos chegaram na resposta correta, apenas dois erraram parte da questão três, figura 26.

Figura 26 – Respostas erradas questão 3

REPRESENTAÇÃO DA CASA	NÚMERO DA CASA	REPRESENTAÇÃO DA CASA	NÚMERO DA CASA
f <sub>2</sub>	14	f <sub>2</sub>	→ 9
a <sub>3</sub>	15	a <sub>3</sub>	17
c <sub>3</sub>	19	c <sub>3</sub>	19
e <sub>3</sub>	21	e <sub>3</sub>	21
d <sub>4</sub>	22	d <sub>4</sub>	28
g <sub>7</sub>	→ 63	g <sub>7</sub>	→ 31

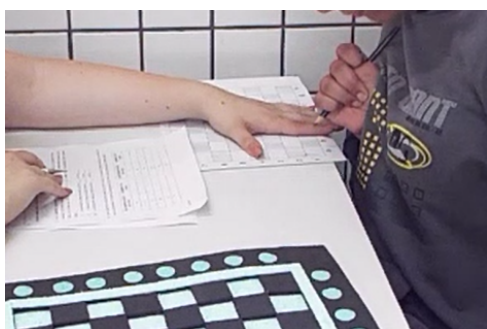
(a) (b)

Fonte: autoria própria.

A dificuldade da aluna L. nessa parte inicial foi em chegar ao total de casas, quando indagada em como poderíamos concluir esse resultado ela disse que seria possível apenas contando. Num primeiro momento ela começou a contar, casa por casa, e após a casa de número 39, teve dificuldades em lembrar que próxima é a casa de número 40. Ela iniciou o preenchimento das casas do tabuleiro, conforme a figura 28(a), como ela possui dificuldades cognitivas, a mestranda optou por realizar o preenchimento do tabuleiro com o número de cada

casa, figura 28(b), assim ela não precisaria contar de uma por uma cada vez que fosse perguntado sobre uma casa. Devido ela ter atrofia nas mãos, o que reduz muito seus movimentos e quando forçada a escrita por muito tempo gera dores, a aluna iniciou o preenchimento do tabuleiro e, após algumas casas, a mestranda auxiliou na escrita, enquanto a aluna falava as respostas. Com o tabuleiro preenchido e explicado sobre a representação das casas, as três primeiras questões foram resolvidas facilmente pela aluna, conforme figuras 28(c) e 28(d).

Figura 27 – Respostas das questões 1, 2 e 3 - Aluna L.



(a) representação das casas do tabuleiro

8	51	51	51	60	61	62	63	69
7	49	50	51	52	53	54	55	56
6	41	42	43	44	45	46	47	48
5	31	31	35	D 5	37	38	39	40
4	25	26	27	28	29	30	31	32
3	17	17	17	20	21	22	G 3	24
2	9	10	11	12	13	14	15	15
1	1	2	C 13	4	5	6	7	8
	a	b	c	d	e	f	g	h

(b) tabuleiro preenchido

- (i)  $a_5$  representa a casa que está na coluna A e linha 5.  
(ii)  $f_2$  representa a casa que está na coluna F e linha 2.  
(iii)  $e_6$  representa a casa que está na coluna E e linha 6.

(c) resposta questão 2

REPRESENTAÇÃO DA CASA	NÚMERO DA CASA	REPRESENTAÇÃO DA CASA	NÚMERO DA CASA
$a_1$	1	$f_2$	14
$b_1$	2	$a_3$	17
$c_1$	3	$c_3$	19
$a_2$	9	$e_3$	21
$b_2$	10	$d_4$	28
$c_2$	11	$g_7$	35

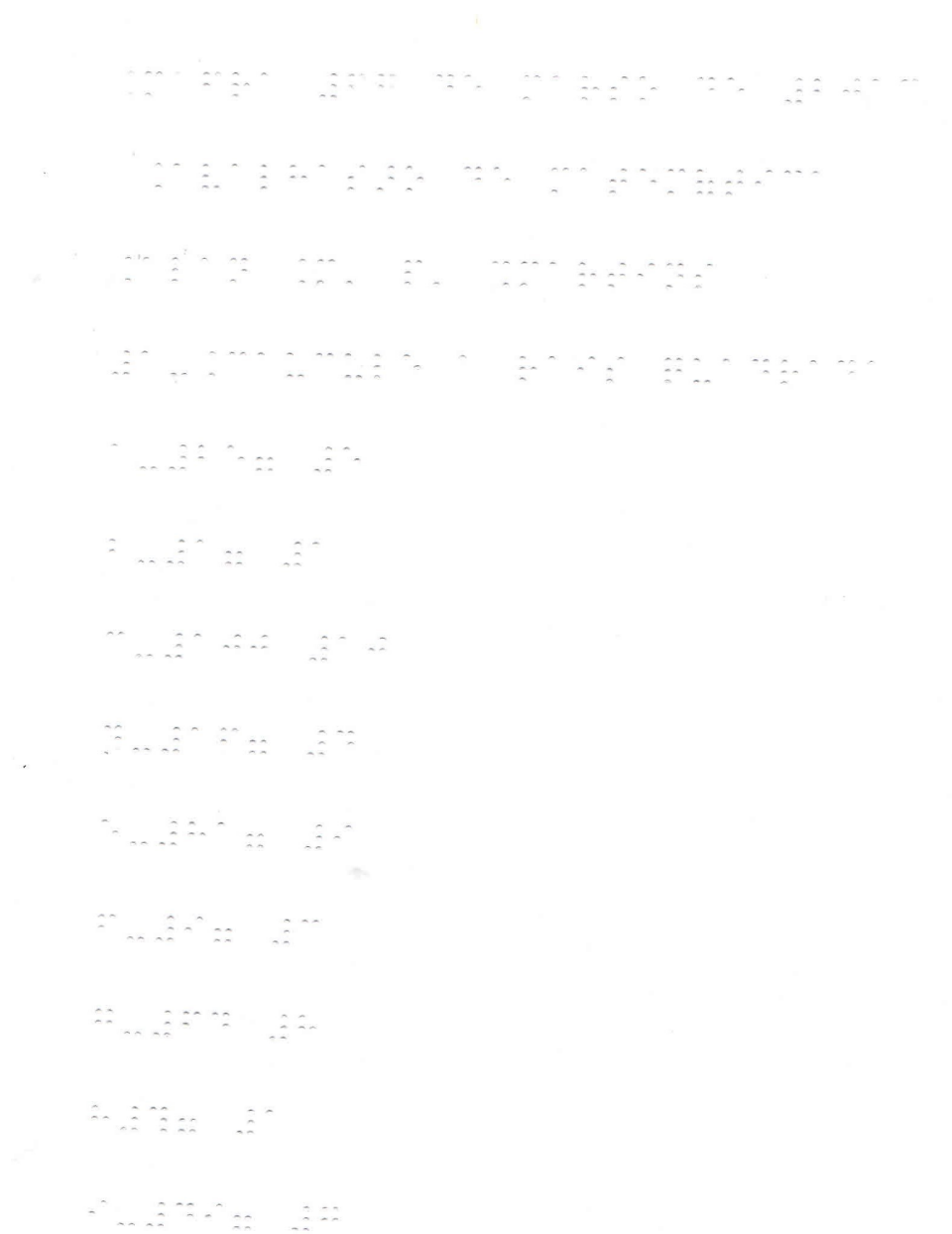
(d) reposta questão 3

Fonte: autoria própria.

O aluno cego resolveu corretamente as questões 1, 2 e 3. Como a escrita braille no papel é bastante sensível, optou-se pelo desenvolvimento das questões em outra folha, tendo em vista que se a apostila fosse colocada na máquina de escrever, comprometeria a leitura do que já estava no papel pois poderia danificar. A mestranda solicitou para o aluno ler os problemas em voz alta, para conseguir ajudá-lo caso não entendesse alguma parte. Para encontrar o número de casas, após tocar o tabuleiro, ele disse "posso fazer oito vezes oito". Explicado sobre como

pode ser representada cada casa do tabuleiro, o aluno resolveu tranquilamente as questões 2 e 3, apenas sentindo o tabuleiro, conforme as coordenadas em numerais e letras transcritas em braille. Para encontrar o número da casa, ele disse em uma das questões "se eu ando 8 casas em cada linha, para chegar até a casa  $d_4$  será  $8 \times 3$  mais 4 casas na linha 4, o que dá 28 casas". A única dificuldade nessa parte inicial foi quando apareceu índice em braille, ele disse que não conhecia aquele símbolo, então a mestrandia explicou do que se tratava. Algumas respostas conforme as figuras abaixo.

Figura 28 – Respostas das questões 1, 2 e 3 - Aluno A.



Fonte: autoria própria.

A questão número 4 não teve maiores dificuldades, apenas alguns erros por falta de atenção. No preenchimento da tabela, todos os alunos da turma acertaram. Quando perguntados

sobre a regularidade na sequência do número da casa, as respostas que mais apareceram no do item (i) da letra a) foram "aumenta um número a cada casa" e "+1". Já no item b), sobre a regularidade da quantidade de grãos, as repostas mais apresentadas foram "dobra a quantia de grãos a cada casa" e "vezes 2". Conforme podemos observar, na figura 29

Figura 29 – Respostas da questão 4a

a) Qual é a regularidade que você observa na sequência:

(i) Número da casa ( $a_1, b_1, c_1, \dots, h_1, a_2, b_2$ )?

O número aumenta 1 de cada vez

(ii) Quantidade de grãos ( $f(a_1), f(b_1), \dots, f(h_1), f(a_2), f(b_2)$ )?

O número dobra

(a) aluno 1

a) Qual é a regularidade que você observa na sequência:

(i) Número da casa ( $a_1, b_1, c_1, \dots, h_1, a_2, b_2$ )?

Aumenta 1 número a cada casa

(ii) Quantidade de grãos ( $f(a_1), f(b_1), \dots, f(h_1), f(a_2), f(b_2)$ )?

Dobra a quantia de grãos a cada casa

(b) aluno 2

a) Qual é a regularidade que você observa na sequência:

(i) Número da casa ( $a_1, b_1, c_1, \dots, h_1, a_2, b_2$ )?

AUMENTANDO

(ii) Quantidade de grãos ( $f(a_1), f(b_1), \dots, f(h_1), f(a_2), f(b_2)$ )?

MULTIPLICANDO POR 2

(c) aluno 3

Fonte: autoria própria.



No item b) da questão 4, que pedia a regra para calcular a quantidade de grãos em função do número da casa, apesar da maioria dos alunos acertar, muitos trocaram o  $n$  por  $x$ , mesmo aparecendo no enunciado do exercício. Acredita-se que seja devido ao costume dos alunos em usar a letra  $x$ .

Figura 30 – Respostas da questão 4b

- b) Qual é a regra que você observa para calcular a quantidade de grãos em função do número da casa?  $F(n) = 2^n$

(a) aluno 1

- b) Qual é a regra que você observa para calcular a quantidade de grãos em função do número da casa?

$$f(n) = 2^n$$

multiplica 2 vezes o número da casa

(b) aluno 2

- b) Qual é a regra que você observa para calcular a quantidade de grãos em função do número da casa? o número 2 elevado a potência que é o nº da casa

$$f(n) = 2^x \rightarrow (1, 2, 3, 4, \dots, 64)$$

(c) aluno 3

- b) Qual é a regra que você observa para calcular a quantidade de grãos em função do número da casa?

a regra é que todo número é elevado a 2.

(d) aluno 4

- b) Qual é a regra que você observa para calcular a quantidade de grãos em função do número da casa?

2 elevado ao nº de casa

$$F(n) = 2^n$$

(e) aluno 5

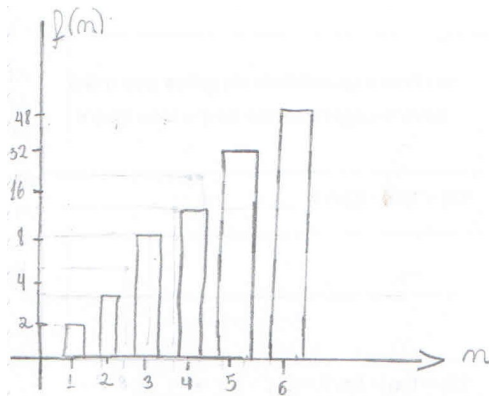
Fonte: autoria própria.

O item c) da questão 4, pedia o esboço do gráfico relacionando o número da casa ( $n$ ), com a quantidade de grãos  $f(n)$ . Apesar de a representação gráfica de funções ser um assunto estudado por várias vezes na 1ª série, percebeu-se que alguns alunos ainda não apropriaram-se dos conceitos. Podemos observar, na figura 31, que alguns gráficos foram feitos errados, onde

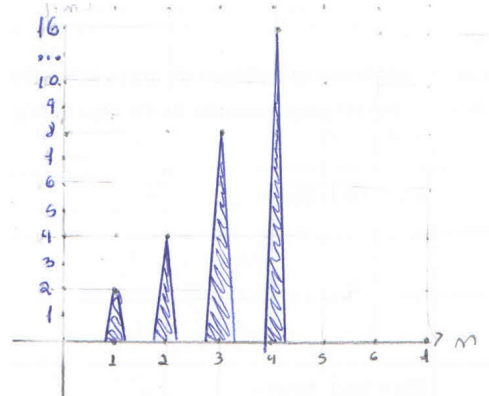


o aluno fez um gráfico de colunas com os valores, e até mesmo outros erros. Muitos alunos esboçaram o gráfico corretamente, mas não nominaram os eixos ( $n$ ) e  $f(n)$ .

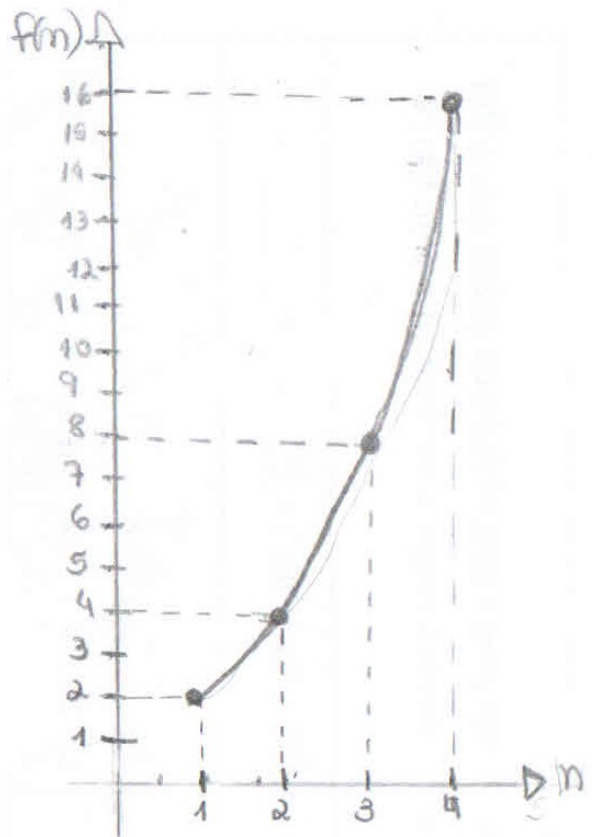
Figura 31 – Respostas da questão 4c



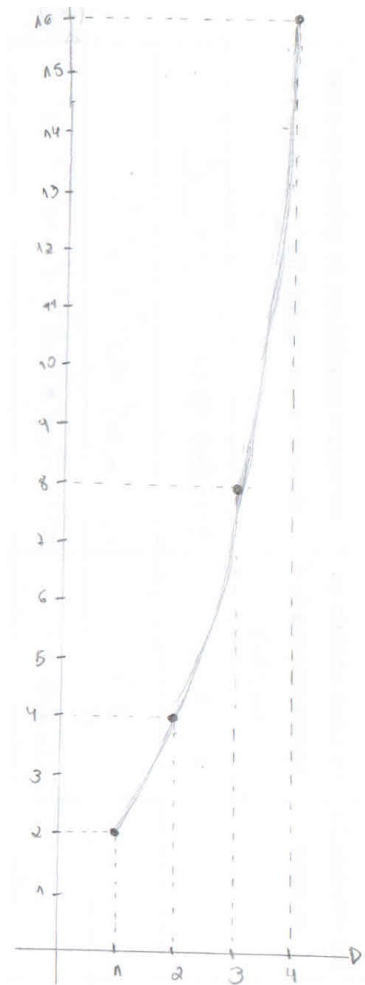
(a) gráfico errado



(b) gráfico errado



(c) gráfico parcial



(d) gráfico correto

Fonte: autoria própria.

Na resolução da questão 4, a aluna L., conseguiu preencher a tabela corretamente,

precisou montar o cálculo mesmo sendo apenas o dobro. Sobre a regularidade nas sequências (item a), ela disse que o número da casa está "aumentando", e a quantidade de grãos é o "dobro ou  $\times 2$ ". No item b, conseguiu concluir que a quantidade de grãos é dada por uma potência de base 2 e por isso chegou a  $f(n) = 2^n$ . O gráfico foi elaborado no multiplano, a estudante precisou do auxílio para fixar alguns pinos e elásticos no tabuleiro, apenas apontava onde deveria ser colocado pois, devido ao comprometimento motoro não consegue fixá-los sozinha. Apesar da dificuldade em fixar os pinos, ela conseguiu esboçar o gráfico corretamente.

Figura 32 – Respostas da questão 4 - Aluna L.

- 4) Com a numeração das casas definidas no exercício 3, determine a quantidade de grãos que o Rei deverá pagar por cada uma das seguintes casas:

REPRESENTAÇÃO DA CASA ( $k_i$ )	NÚMERO DA CASA ( $n$ )	QUANTIDADE DE GRÃOS ( $f(n)$ )
$a_1$	1	$f(1) = 2$
$b_1$	2	$f(2) = 4$
$c_1$	3	$f(3) = 8$
$d_1$	4	$f(4) = 16$
$e_1$	5	$f(5) = 32$
$f_1$	6	$f(6) = 64$
$g_1$	7	$f(7) = 128$
$h_1$	8	$f(8) = 256$
$a_2$	9	$f(9) = 512$
$b_2$	10	$f(10) = 1024$

$2 \cdot 2$   
 $2 \cdot 2 \cdot 2$

- a) Qual é a regularidade que você observa na sequência:

- (i) Número da casa ( $a_1, b_1, c_1, \dots, h_1, a_2, b_2$ )?

UMENTA N DO

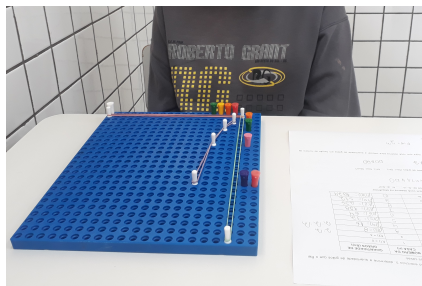
- (ii) Quantidade de grãos ( $f(a_1), f(b_1), \dots, f(h_1), f(a_2), f(b_2)$ )?

$\times 2$  DOBRO

- b) Qual é a regra que você observa para calcular a quantidade de grãos em função do número da casa?

$f(n) = 2^n$

(a) itens a, b e c



(b) gráfico no multiplano

Fonte: autoria própria.

Iniciamos a questão 4 com o aluno A. respondendo a tabela, a fez com cálculo mental e rapidamente. Após ele responder que a regularidade na sequência do número da casa é que está "aumentando de 1 em 1" e que a quantidade de grãos é "sempre o dobro da casa anterior". A dificuldade na resolução da questão 4 pelo aluno cego, foi na hora de fazer o gráfico, tendo em vista que o estudante nunca teve contato com tal situação. Foi necessária uma breve explicação ao aluno sobre os eixos e par ordenado. Ao mostrar a construção de um gráfico da função afim ao aluno, ele disse: "é a primeira vez que eu faço um gráfico na minha vida, agora eu entendo quando a professora disse que é uma reta". Logo em seguida ele conseguiu fazer o gráfico, conforme a figura 33, corretamente.

Figura 33 – Gráfico da função exponencial - Aluno A.



(a) gráfico

1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10

(b) tabela de valores

Fonte: autoria própria.

Após o término da questão 4, foi explicado aos alunos que o problema tratava de uma função exponencial, cuja as propriedades trabalharíamos posteriormente.

Na questão 5, a maioria dos alunos da turma regular conseguiram responder corretamente a tabela, mas apenas quatro concluíram corretamente que a questão relacionava soma em produto. Grande parte dos alunos, disse que a regularidade observada na quantidade de grãos estava no fato de "a base ser sempre 2", sem chegar a resposta correta apesar de ter preenchido a tabela sem erros.

Figura 34 – Respostas da questão 5

5) Com a numeração das casas definidas no exercício 3, complete as lacunas:

NÚMERO DA CASA	QUANTIDADE DE GRÃOS	QUANTIDADE DE GRÃOS
$b_1 + a_2 = 2 + 9 = 11$	$f(b_1 + a_2) = f(11) = 2^{11}$	$f(b_1) \cdot f(a_2) = f(2) \cdot f(9) = 2^2 \cdot 2^9 = 2^{11}$
$a_2 + a_5 = 9 + 33 = 42$	$f(a_2 + a_5) = f(42) = 2^{42}$	$f(a_2) \cdot f(a_5) = f(9) \cdot f(33) = 2^9 \cdot 2^{33} = 2^{42}$
$a_2 + b_3 = 9 + 18 = 27$	$f(a_2 + b_3) = f(27) = 2^{27}$	$f(a_2) \cdot f(b_3) = f(9) \cdot f(18) = 2^9 \cdot 2^{18} = 2^{27}$
$b_3 + d_4 = 18 + 28 = 46$	$f(b_3 + d_4) = f(46) = 2^{46}$	$f(b_3) \cdot f(d_4) = f(18) \cdot f(28) = 2^{18} \cdot 2^{28} = 2^{46}$

Qual é a regularidade que você observa na quantidade de grãos?  
 Tem a base 2 pois da o dobro de grãos em n° da casa

(a) aluno 1

5) Com a numeração das casas definidas no exercício 3, complete as lacunas:

NÚMERO DA CASA	QUANTIDADE DE GRÃOS	QUANTIDADE DE GRÃOS
$b_1 + a_2 = 2 + 9 = 11$	$f(b_1 + a_2) = f(11) = 2^{11}$	$f(b_1) \cdot f(a_2) = f(2) \cdot f(9) = 2^2 \cdot 2^9 = 2^{11}$
$a_2 + a_5 = 42$	$f(a_2 + a_5) = f(42) = 2^{42}$	$f(a_2) \cdot f(a_5) = f(9) \cdot f(33) = 2^9 \cdot 2^{33} = 2^{42}$
$a_2 + b_3 = 27$	$f(a_2 + b_3) = f(27) = 2^{27}$	$f(a_2) \cdot f(b_3) = f(9) \cdot f(18) = 2^9 \cdot 2^{18} = 2^{27}$
$b_3 + d_4 = 46$	$f(b_3 + d_4) = f(46) = 2^{46}$	$f(b_3) \cdot f(d_4) = f(18) \cdot f(28) = 2^{18} \cdot 2^{28} = 2^{46}$

Qual é a regularidade que você observa na quantidade de grãos?  
 Os números estão sempre trabalhando na base 2

(b) aluno 2

5) Com a numeração das casas definidas no exercício 3, complete as lacunas:

NÚMERO DA CASA	QUANTIDADE DE GRÃOS	QUANTIDADE DE GRÃOS
$b_1 + a_2 = 2 + 9 = 11$	$f(b_1 + a_2) = f(11) = 2^{11}$	$f(b_1) \cdot f(a_2) = f(2) \cdot f(9) = 2^2 \cdot 2^9 = 2^{11}$
$a_2 + a_5 = 9 + 33 = 42$	$f(a_2 + a_5) = f(42) = 2^{42}$	$f(a_2) \cdot f(a_5) = f(9) \cdot f(33) = 2^9 \cdot 2^{33} = 2^{42}$
$a_2 + b_3 = 9 + 18 = 27$	$f(a_2 + b_3) = f(27) = 2^{27}$	$f(a_2) \cdot f(b_3) = f(9) \cdot f(18) = 2^9 \cdot 2^{18} = 2^{27}$
$b_3 + d_4 = 18 + 28 = 46$	$f(b_3 + d_4) = f(46) = 2^{46}$	$f(b_3) \cdot f(d_4) = f(18) \cdot f(28) = 2^{18} \cdot 2^{28} = 2^{46}$

Qual é a regularidade que você observa na quantidade de grãos?  
 Sempre sempre na base 2  
 PO ESTOU TRABALHANDO O VALOR

(c) aluno 3

Fonte: autoria própria.

A aluna com deficiência mental apresentou dificuldade em concluir a questão 5, apesar de responder parcialmente correta a tabela (com ajuda na escrita), ela não conseguiu encontrar a regularidade. Disse apenas "usei muito o número 2". Conforme podemos observar as respostas na figura 35.

Figura 35 – Resposta questão 5 - Aluna L.

5) Com a numeração das casas definidas no exercício 3, complete as lacunas:

NÚMERO DA CASA	QUANTIDADE DE GRÃOS	QUANTIDADE DE GRÃOS
$b_1 + a_2 = 2 + 9 = 11$	$f(b_1 + a_2) = f(11) = 2^{11}$	$f(b_1) \cdot f(a_2) = f(2) \cdot f(9) = 2^2 \cdot 2^9 = 2^{11}$
$a_2 + a_5 = 9 + 33 = 42$	$f(a_2 + a_5) = f(42) = 2^{42}$	$f(a_2) \cdot f(a_5) = 9 \cdot 33 = 2^9 \cdot 2^{33} = 2^{42}$
$a_2 + b_3 = 9 + 18 = 27$	$f(a_2 + b_3) = f(27) = 2^{27}$	$f(a_2) \cdot f(b_3) = 9 \cdot 18 = 2^9 \cdot 2^{18} = 2^{27}$
$b_3 + d_4 = 18 + 28 = 46$	$f(b_3 + d_4) = f(46) = 2^{46}$	$f(b_3) \cdot f(d_4) = 18 \cdot 28 = 2^{18} \cdot 2^{28} = 2^{46}$

Fonte: autoria própria.

O aluno A., precisou relembra o código braille para representar índices. Apesar da difícil leitura em braille para conseguir identificar cada parte, ele conseguiu responder a tabela corretamente, conforme a figura 36 podemos observar na quantidade de caracteres necessários para responder apenas a primeira linha da tabela, ele conseguiu responder a questão corretamente. Quando perguntado sobre qual regularidade observada na quantidade de grãos, ele disse "eu consigo transformar soma em produto". Então a mestrandia explicou tratar-se de uma propriedade da função exponencial.

Figura 36 – Resposta questão 5 - Aluno A.

Fonte: autoria própria.



A questão 6 foi respondida corretamente pela maioria dos alunos da turma regular. Quando perguntados sobre a diferença entre  $a_1$  e  $b_1$  uma aluna disse " $a_1$  corresponde a uma casa e  $b_1$  a duas casas". Dentre as observações que os alunos fizeram em sala, um aluno disse "número par é só usar a metade do número da casa vezes  $b_1$ " e outro completou "e para escrever o número ímpar pode usar a representação do número par mais uma vez o  $a_1$ ". Após completar a tabela de algumas casas, alguns alunos falaram que não precisam terminar de preencher, pois já haviam entendido.

Figura 37 – Respostas da questão 6

6) Complete as lacunas:

número da casa	representação da casa	escreva o número da casa usando as representações $a_1$ 's e/ou $b_1$ 's	escreva a quantidade de grãos que o Rei deverá pagar usando $f(a_1)$ 's e/ou $f(b_1)$ 's
3	$c_1$	$1 \cdot a_1 + 1 \cdot b_1 = 3$	$f(3) = f(a_1) \cdot f(b_1) = 2^1 \cdot 2^2 = 2^3$
4	$d_1$	$2 \cdot b_1$	$f(4) = f(b_1)^2 = (2^2)^2 = 2^4$
8	$h_1$	$4 \cdot b_1$	$f(8) = f(b_1)^4 = (2^2)^4 = 2^8$
9	$a_2$	$1 \cdot a_1 + 4 \cdot b_1$	$f(9) = f(a_1) \cdot f(b_1)^4 = 2^1 \cdot (2^2)^4 = 2^9$
11	$c_2$	$1 \cdot a_1 + 5 \cdot b_1$	$f(11) = f(a_1) \cdot f(b_1)^5 = 2^1 \cdot (2^2)^5 = 2^{11}$
16	$h_2$	$8 \cdot b_1$	$f(16) = f(b_1)^8 = (2^2)^8 = 2^{16}$
17	$a_3$	$1 \cdot a_1 + 7 \cdot b_1$	$f(17) = f(a_1) \cdot f(b_1)^7 = 2^1 \cdot 2^{14} = 2^{15}$
20	$d_3$	$10 \cdot b_1$	$f(20) = f(b_1)^{10} = 2^{20}$
24	$h_3$	$12 \cdot b_1$	$f(24) = f(b_1)^{12} = 2^{24}$
26	$b_4$	$13 \cdot b_1$	$f(26) = f(b_1)^{13} = 2^{26}$
29	$e_4$	$1 \cdot a_1 + 14 \cdot b_1$	$f(29) = f(a_1) \cdot f(b_1)^{14} = 2^{29}$
32	$h_4$	$16 \cdot b_1$	$f(32) = f(b_1)^{16} = 2^{32}$
33	$a_5$	$1 \cdot a_1 + 16 \cdot b_1$	$f(33) = f(a_1) \cdot f(b_1)^{16} = 2^{33}$
40	$h_5$	$20 \cdot b_1$	$f(40) = f(b_1)^{20} = 2^{40}$
48	$h_6$	$24 \cdot b_1$	$f(48) = f(b_1)^{24} = 2^{48}$
64	$h_7$	$32 \cdot b_1$	$f(64) = f(b_1)^{32} = 2^{64}$

(a) aluno 1

6) Complete as lacunas:

número da casa	representação da casa	escreva o número da casa usando as representações $a_1$ 's e/ou $b_1$ 's	escreva a quantidade de grãos que o Rei deverá pagar usando $f(a_1)$ 's e/ou $f(b_1)$ 's
3	$c_1$	$1 \cdot a_1 + 1 \cdot b_1$	$f(3) = f(a_1) \cdot f(b_1) = 2^1 \cdot 2^2 = 2^3$
4	$d_1$	$2 \cdot b_1$	$f(4) = f(b_1)^2 = (2^2)^2 = 2^4$
8	$h_1$	$2 \cdot a_1 + 3 \cdot b_1$	$f(8) = f(a_1)^2 \cdot f(b_1)^3 = 2^2 \cdot (2^2)^3 = 2^8$
9	$a_2$	$1 \cdot a_1 + 4 \cdot b_1$	$f(9) = f(a_1) \cdot f(b_1)^4 = 2^1 \cdot (2^2)^4 = 2^9$
11	$c_2$	$2 \cdot a_1 + 5 \cdot b_1$	$f(11) = f(a_1)^2 \cdot f(b_1)^5 = 2^2 \cdot (2^2)^5 = 2^{11}$
16	$h_2$	$2 \cdot a_1 + 7 \cdot b_1$	$f(16) = f(a_1)^2 \cdot f(b_1)^7 = 2^2 \cdot (2^2)^7 = 2^{16}$
17	$e_2$	$3 \cdot a_1 + 2 \cdot b_1$	$f(17) = f(a_1)^3 \cdot f(b_1)^2 = 2^3 \cdot (2^2)^2 = 2^{17}$
20	$d_3$	$2 \cdot a_1 + 9 \cdot b_1$	$f(20) = f(a_1)^2 \cdot f(b_1)^9 = 2^2 \cdot (2^2)^9 = 2^{20}$
24	$h_3$	$4 \cdot a_1 + 10 \cdot b_1$	$f(24) = f(a_1)^4 \cdot f(b_1)^{10} = 2^4 \cdot (2^2)^{10} = 2^{24}$
26	$b_4$	$13 \cdot b_1$	$f(26) = f(b_1)^{13} = (2^2)^{13} = 2^{26}$
29	$e_4$	$13 \cdot b_1 + 3 \cdot a_1$	$f(29) = f(b_1)^{13} \cdot f(a_1)^3 = (2^2)^{13} \cdot 2^3 = 2^{29}$
32	$h_4$	$15 \cdot b_1 + 2 \cdot a_1$	$f(32) = f(b_1)^{15} \cdot a_1^2 = 2^{30} \cdot 2^2 = 2^{32}$
33	$a_5$	$15 \cdot b_1 + 3 \cdot a_1$	$f(33) = f(b_1)^{15} \cdot f(a_1)^3 = 2^{30} \cdot 2^3 = 2^{33}$
40	$h_5$	$20 \cdot b_1$	$f(40) = f(b_1)^{20} = 2^{40}$
48	$h_6$	$20 \cdot b_1 + 8 \cdot a_1$	$f(48) = f(b_1)^{20} \cdot f(a_1)^8 = 2^{40} \cdot 2^8 = 2^{48}$
64	$h_8$	$30 \cdot b_1 + 4 \cdot a_1$	$f(64) = f(b_1)^{30} \cdot a_1^4 = 2^{60} \cdot 2^4 = 2^{64}$

(b) aluno 2

Fonte: autoria própria.

Para a L. conseguir resolver a questão 6, foi preciso utilizar duas peças, um quadrado em EVA, do tamanho de uma casa, e um retângulo do tamanho de duas casas. Com o auxílio das peças ela sobreponha as casas e contava quantos  $a_1$  e  $b_1$  precisava. Em algumas ela se perdia na hora de contar e acabou marcando errado, mesmo a mestranda pedindo para recontar. Na hora de escrever a quantidade de grãos em função de  $f(a_1)$  e  $f(a_2)$  ela acertou poucas. Conforme a figura 38.

Na questão 6, o aluno A. sentiu dificuldade apenas na parte de escrever a quantidade de grãos em função de  $f(a_1)$  e  $f(a_2)$ . Como o texto em braille ficava extenso, ele precisava voltar a folha na máquina muitas vezes para lembrar o que havia feito. Disse que para representar casas de número par deveria usar metade do número da casa vezes  $b_1$  e que as casas de número ímpar "são mais extensas para fazer". Conforme podemos ver na figura 39, para uma das casas, a tabela foi assim respondida.

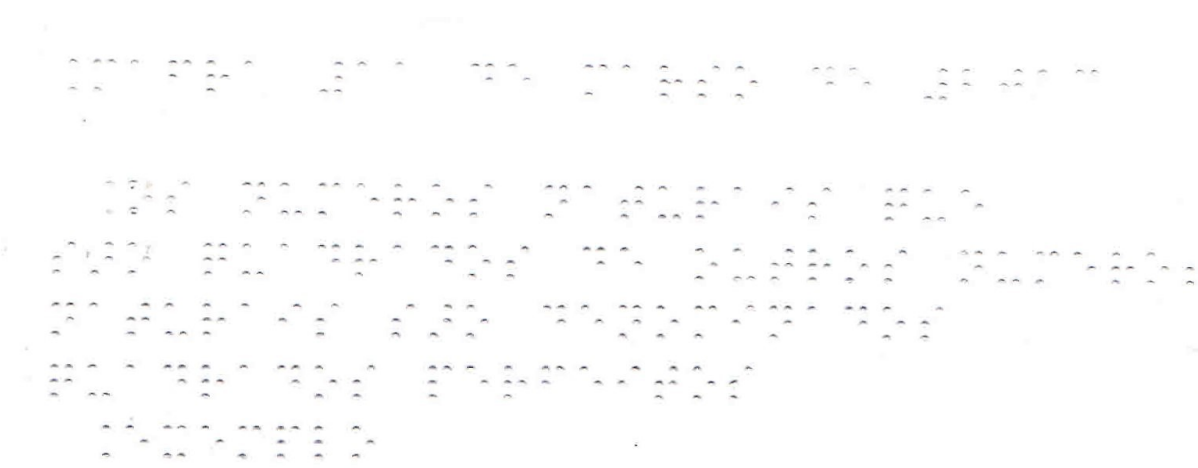
Figura 38 – Resposta questão 6 - Aluna L.

6) Complete as lacunas:

número da casa	representação da casa	escreva o número da casa usando as representações $a_1$ 's e/ou $b_1$ 's	escreva a quantidade de grãos que o Rei deverá pagar usando $f(a_1)$ 's e/ou $f(b_1)$ 's
3	$c_1$	$1 \cdot a_1 + 1 \cdot b_1$	$f(3) = f(a_1) \cdot f(b_1) = 2^1 \cdot 2^2 = 2^3$
4	$d_1$	$2 \cdot b_1^2$	$f(4) = f(b_1^2)^2 = (2^2)^2 = 2^4$
8	$H_1$	$4 \cdot b_1^4$	$f(8) = f(b_1^4)^4 = (2^2)^4 = 2^8$
9	$a_2$	$1 \cdot a_1 + 4 \cdot b_1^2$	$f(9) = f(a_1) \cdot f(b_1^4) = 2^1 \cdot (2^2)^4 = 9$
11	$C_2$	$a_1 + 5 \cdot b_1^5$	$f(11) = f(a_1) \cdot f(b_1^5)^5 = 2^1 \cdot (2^2)^5 = 2^{11}$
16	$H_2$	$8 \cdot b_1^8$	$f(16) = f(b_1^8)^8 = (2^2)^8 = 2^{16}$
17	$A_3$	$a_1 \cdot 8 \cdot b_1^8$	$f(17) = f(a_1)^2 \cdot (b_1^8)^8 = 2^4 \cdot (2^2)^8 = 2^{17}$

Fonte: autoria própria.

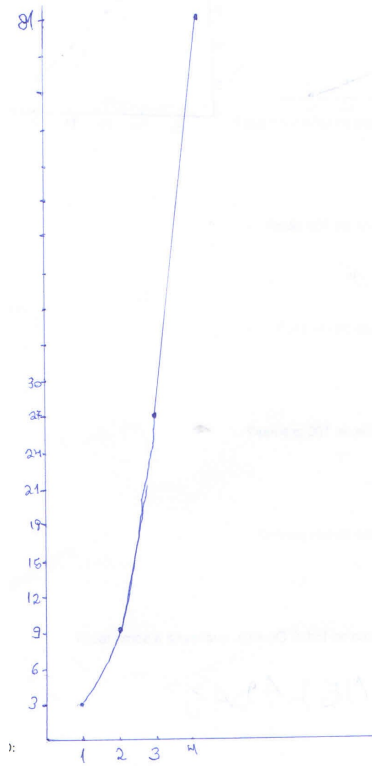
Figura 39 – Resposta questão 6 - Aluno A.



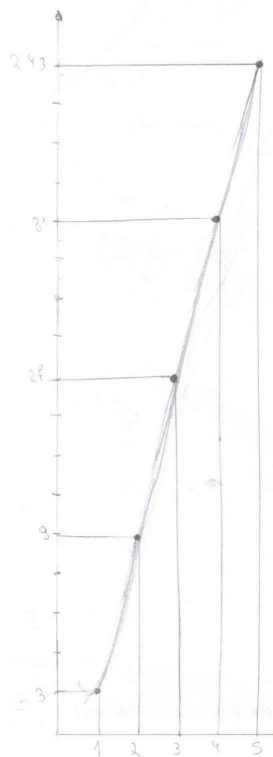
Fonte: autoria própria.

Os alunos da turma regular, em sua maioria, conseguiram relacionar facilmente a questão 7 com a número 4, conforme a figura 40. Apesar de que persistiram nos mesmos erros, como usa  $(n)$  e  $f(x)$ , não definir os eixos e os mesmos erros no gráfico. Além disso, muitos alunos acabaram não se atentando pelo fato de que a primeira casa correspondia a um grão e por isso a função deveria ser  $f(x) = 3^{n-1}$ .

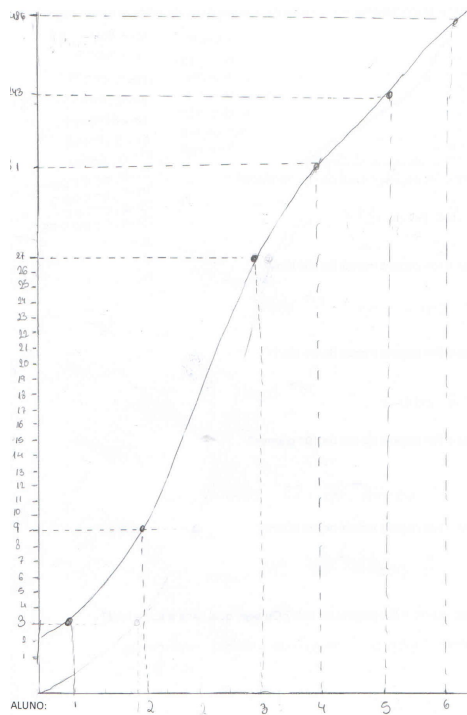
Figura 40 – Respostas da questão 7



(a) aluno 1



(b) aluno 2



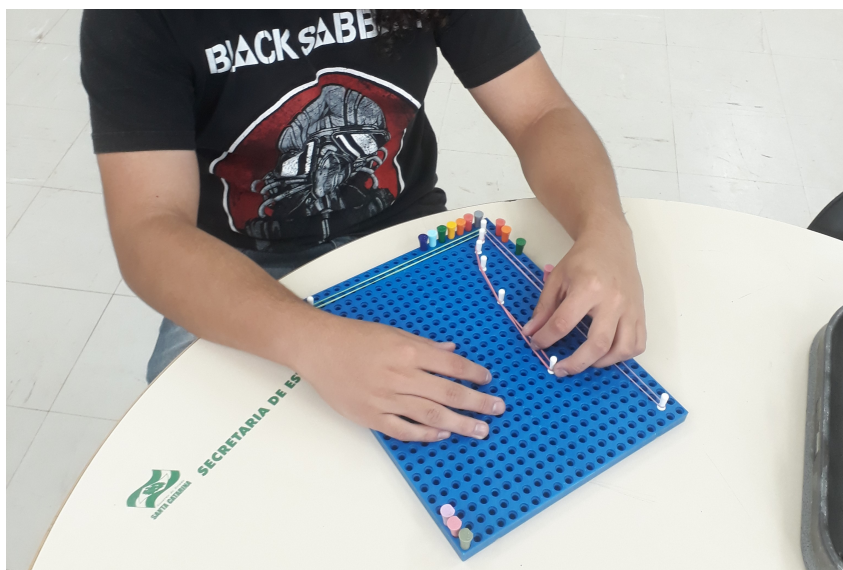
(c) aluno 3

Fonte: autoria própria.

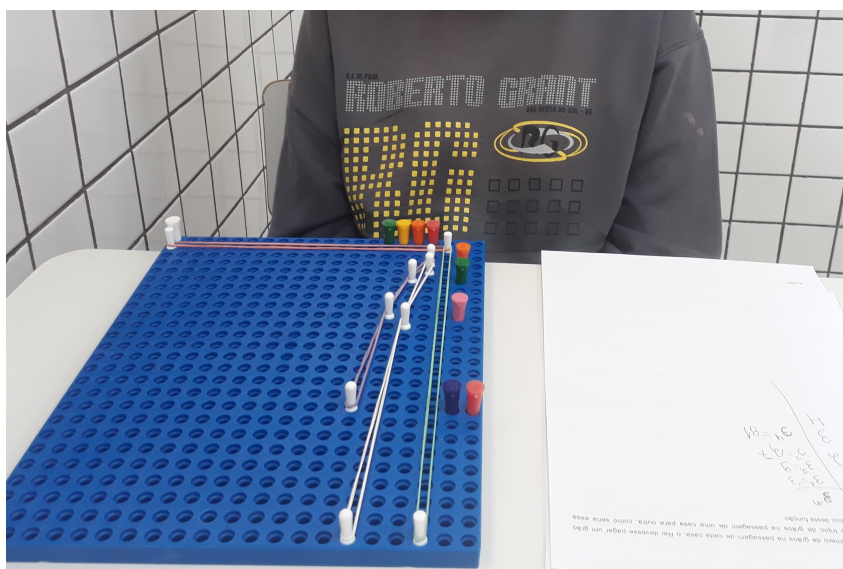


Os alunos inclusos novamente fizeram o gráfico no multiplano, conforme a figura 41. A L. teve dificuldade em lembrar as potências de três. Foi solicitado que os alunos utilizassem o mesmo plano que o gráfico da função 4, item c. Ao pedir que comparassem os dois gráficos a aluna deficiente mental disse "esse gráfico fica mais para cima e antes do outro", já o aluno cego conseguiu concluir "a base é maior e conseqüentemente o gráfico atinge valores maiores mais rapidamente".

Figura 41 – Gráfico questão 7



(a) Aluna L.



(b) Aluno A.

Fonte: autoria própria.

Na última questão, a número 8, alguns alunos montaram uma tabela relacionando o número da casa com a quantidade de toneladas daquela casa. Os gráficos seguiram a mesma linha dos anteriores, muitos não definiram os eixos, conforme podemos ver na figura 42. Ao

terminar o gráfico, uma aluna disse "essa função é decrescente professora, é só olhar o gráfico dela".

Figura 42 – Respostas da questão 8

8) E se o Rei devesse pagar 80 toneladas pela primeira casa, caindo pela metade na passagem de uma casa para outra, responda:

a) Como se representaria analiticamente e graficamente a quantidade de grãos a serem pagos por cada casa?

b) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de uma tonelada?

1) a sétima casa, dividindo pela metade chegamos no resultado 0,625

c) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de 100 kilos?

Na casa 11, 0,078

d) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de um kilo?

A partir da 17ª casa

e) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de 100 gramas?

A partir da 20ª casa

f) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de um grama?

A partir da 23ª casa

g) Você poderia estimar quanto o Rei pagaria ao todo? Ou seja, qual seria a soma total?

158 100 grãos

n	grãos
1	80
2	40
3	20
4	10
5	5
6	2,5
7	1,25
8	0,625
9	0,312
10	0,156
11	0,078
12	0,039
13	0,019
14	0,009
15	0,004
16	0,002
17	0,001
18	0,0005
19	0,0002
20	0,0001
21	0,00005
22	0,00002
23	0,00001

(a) aluno 1

8) E se o Rei devesse pagar 80 toneladas pela primeira casa, caindo pela metade na passagem de uma casa para outra, responda:

a) Como se representaria analiticamente e graficamente a quantidade de grãos a serem pagos por cada casa?

b) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de uma tonelada?

A partir da 8ª casa.  
(dividindo pela metade)

c) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de 100 kilos?

A partir da 11ª casa

d) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de um kilo? 0,001

A partir da 17ª

e) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de 100 gramas? 0,0001

A partir da 21ª casa

f) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de um grama? 0,00001

A partir da 23ª casa

g) Você poderia estimar quanto o Rei pagaria ao todo? Ou seja, qual seria a soma total?

158 800 toneladas

9	0,625
10	0,3125
11	0,15625
12	0,078125
13	0,0390625
14	0,01953125
15	0,009765625
16	0,0048828125
17	0,00244140625
18	0,001220703125
19	0,0006103515625

(b) aluno 2

Fonte: autoria própria.

Na hora de responder os outros itens da questão, percebeu-se que os alunos que escolheram essa estratégia conseguiram obter maior número de acertos na questão. Muitos não conseguiram estabelecer relações entre as unidades de medida e acabaram errando grande parte dos itens, outros resolveram errada uma divisão acarretando no erro de vários itens.

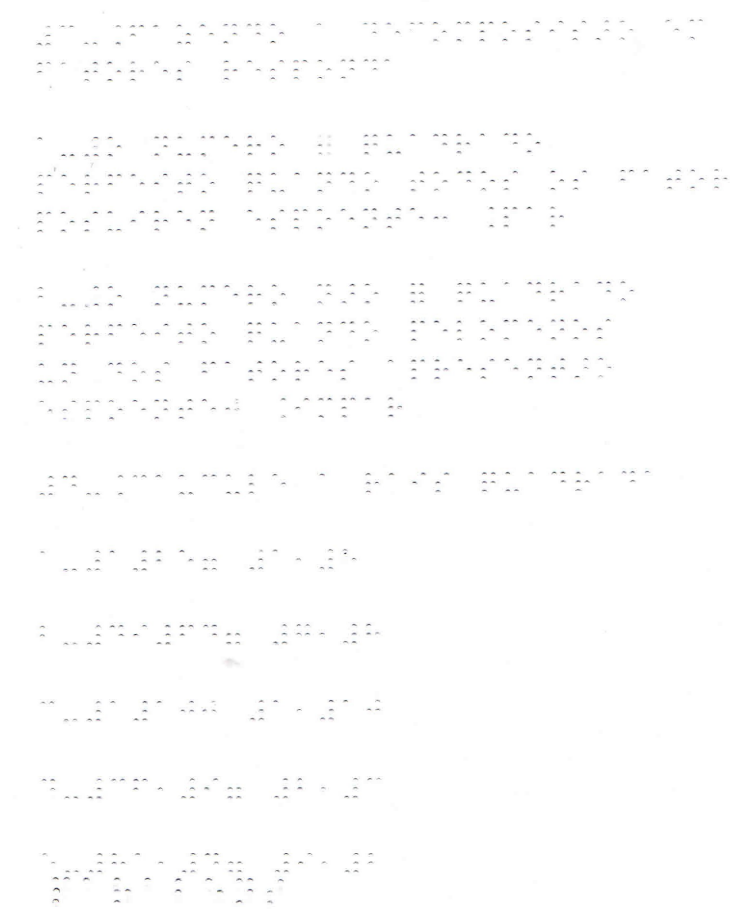
A aluna L., conseguiu esboçar o gráfico no multiplano. A dificuldade apareceu na hora das divisões com vírgula, ela não conseguiu efetuar nenhuma delas corretamente.

Ao fazer o gráfico no multiplano, o A. comentou "não posso ter quantidade negativa de trigo, só que ela (função) está cada vez mais perto do zero". Percebeu-se certa dificuldade ao efetuar algumas divisões de número não inteiros, quando a mestranda perguntou como ele resolvia esse tipo de conta em sala de aula, ele disse "minha professora deixa eu usar calculadora, tenho ela aqui na mochila". A mestranda solicitou que o aluno mostrasse a calculadora e deixou que a utilizasse para concluir a questão. Tratava de uma calculadora com avisos sonoros dos números, operações e resultados que apareciam na tela, ele contou que precisou decorar a localização de casa número e operação e que no começo errava muitas vezes.

Figura 43 – Questão 8 - Aluno A.



(a) calculadora



(b) resoluções

Fonte: autoria própria.



## 5 CONCLUSÕES

A aplicabilidade da Função Exponencial em situações cotidianas e a dificuldade enfrentada por professores e alunos especiais para de fato gerar a inclusão, são os temas norteadores desse trabalho. Constatou-se, por intermédio dessa pesquisa, que a inclusão exige muito mais do que leis e, por mais que no Brasil muitas leis amparam os educandos especiais, não se consolidam na prática. Apesar de as escolas receberem os alunos em turmas regulares, na prática diária, percebeu-se que os sujeitos pesquisados não estão incluídos no ensino regular por não dominar conteúdos matemáticos de níveis anteriores.

Ficou evidente que esses alunos são prejudicados, principalmente na disciplina de Matemática, no processo de ensino-aprendizagem. Isso é concebido por uma série de motivos, desde a falta de preparo dos professores para atender as necessidades educacionais, os livros didáticos muitas vezes não são adaptados para a sua realidade (o braille para alunos cegos, por exemplo), até os alunos que acabam não tendo acesso aos conteúdos curriculares em totalidade devido as dificuldades e peculiaridades que possuem. Ao assumir a postura de educadores, possibilitamos a modificação da nossa própria prática e contribuímos com a responsabilidade de começar a inclusão a partir de nós mesmos.

Apesar de existirem alguns recursos pedagógicos para o auxílio do ensino-aprendizagem desses alunos, muitos desses materiais não são conhecidos por algumas comunidades escolares. Como é o caso do Multiplano, que foi criado pelo professor Rubens Ferronato em 2002, e mesmo passado quase duas décadas é pouco conhecido.

Os resultados dessa pesquisa nos permitem afirmar que a presença da deficiência não é barreira intransponível para o desenvolvimento matemático do educando. Ao longo das sessões, pudemos observar como os estudantes A. e L. puderam desenvolver os trabalhos matemáticos, dentro de suas possibilidades, sem grandes dificuldades. O estudante A., através do tato, manipulando o Multiplano, conseguiu pela primeira vez fazer um gráfico. Além disso, a confecção tabuleiro de xadrez em EVA com texturas diferentes e código braille para que o aluno cego pudesse entender do que se tratava o tabuleiro, bem como a confecção de uma apostila com todas as questões transcritas em braille possibilitou a autonomia e confiança do aluno, tendo em vista que ele dificilmente recebe suas atividades adaptadas, enfrentando muitas dificuldades. Leva-nos a concluir, que realmente o *kit* de material e as adaptações serviram para proporcionar aos estudantes compreensão dos tópicos de Função Exponencial contemplados.

Esperamos, que através desta, possam ser realizadas outras pesquisas que visem à promoção da inclusão, que ainda está a mercê de um sistema de ensino despreparado, mas vem ganhando espaço na sociedade ao longo dos anos. E só assim, um dia quem sabe, possamos ter a real educação para todos.



## REFERÊNCIAS

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil**. Brasília: Senado Federal, 1988.

\_\_\_\_\_. Decreto nº 3.298 de 24 de outubro de 1989. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, 1999. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/dec3298.pdf>>. Acesso em: 04 out. 2017.

\_\_\_\_\_. Lei nº 10.436: dispõe sobre a libras. **Secretaria de Educação Especial**, Brasília, 2002. Disponível em: <<http://www.camara.gov.br/sileg/integras/821803.pdf>>. Acesso em: 05 out. 2017.

\_\_\_\_\_. Decreto nº 6.571: dispõe sobre o atendimento educacional especializado. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, Brasília, 2008. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2007-2010/2008/decreto/d6571.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2008/decreto/d6571.htm)>. Acesso em: 04 out. 2017.

\_\_\_\_\_. Resolução cne/ceb nº 04. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, Brasília, 2009. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rceb004\\_09.pdf](http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rceb004_09.pdf)>. Acesso em: 04 out. 2017.

\_\_\_\_\_. Decreto nº 7.084: dispõe sobre programas de material didático. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, Brasília, 2010. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2007-2010/2010/decreto/d7084.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2010/decreto/d7084.htm)>. Acesso em: 04 out. 2017.

\_\_\_\_\_. Resolução cne/ceb nº 04. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, Brasília, 2010. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rceb004\\_09.pdf](http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rceb004_09.pdf)>. Acesso em: 04 out. 2017.

\_\_\_\_\_. Lei nº 13.005: aprova o pne. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, Brasília, 2014. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/politica.pdf>>. Acesso em: 04 out. 2017.

\_\_\_\_\_. Portaria nº 243 de 15 de abril de 2016. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, Brasília, 2016. Disponível em: <[https://seguro.mprj.mp.br/documents/112957/15113396/PORTARIA\\_N\\_243\\_DE\\_15\\_DE\\_ABRIL\\_DE\\_2016.pdf](https://seguro.mprj.mp.br/documents/112957/15113396/PORTARIA_N_243_DE_15_DE_ABRIL_DE_2016.pdf)>. Acesso em: 04 out. 2017.

BRASIL Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio - ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: [s.n.]. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 30/01/2017.

\_\_\_\_\_. **Declaração de Salamanca e linha de ação sobre necessidades educativas especiais**. Brasília: [s.n.], 1994. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/salamanca.pdf>>. Acesso em: 28/04/2017.

\_\_\_\_\_. **LDB Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília: [s.n.], 1996. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394\\_ldbn1.pdf](http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei9394_ldbn1.pdf)>. Acesso em: 02/10/2017.

\_\_\_\_\_. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio.** Brasília: [s.n.], 2000. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/14\\_24.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/14_24.pdf)>. Acesso em: 28/04/2017.

\_\_\_\_\_. **Diretrizes Nacionais para a Educação Especial na Educação Básica.** Brasília: CNE, 2001. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CEB0201.pdf>>. Acesso em: 04 out. 2017.

\_\_\_\_\_. **PDE Plano de Desenvolvimento de Educação.** Brasília: MEC, 2007. Disponível em: <<http://www.http://portal.mec.gov.br/arquivos/livro/livro.pdf>>. Acesso em: 04 out. 2017.

\_\_\_\_\_. **PNEE Política Nacional de Educação Especial.** Brasília: MEC, 2007. Disponível em: <[http://peei.mec.gov.br/arquivos/politica\\_nacional\\_educacao\\_especial.pdf](http://peei.mec.gov.br/arquivos/politica_nacional_educacao_especial.pdf)>. Acesso em: 04 out. 2017.

\_\_\_\_\_. **Atendimento educacional especializado para o aluno com deficiência mental.** Brasília: [s.n.], 2010. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/aee\\_dm.pdf](http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/aee_dm.pdf)>. Acesso em: 28/04/2017.

\_\_\_\_\_. **Atendimento educacional especializado para o aluno com deficiência visual.** Brasília: [s.n.], 2010. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/aee\\_dv.pdf](http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/aee_dv.pdf)>. Acesso em: 28/04/2017.

\_\_\_\_\_. **Censo da Educação Básica 2013.** Brasília: [s.n.], 2013. Disponível em: <[http://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/censo\\_escolar/apresentacao/2014/apresentacao\\_coletiva\\_censo\\_edu\\_basica\\_022014.pdf](http://download.inep.gov.br/educacao_basica/censo_escolar/apresentacao/2014/apresentacao_coletiva_censo_edu_basica_022014.pdf)>. Acesso em: 05/12/2017.

\_\_\_\_\_. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica.** Brasília: [s.n.], 2013. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf>>. Acesso em: 02/10/2017.

\_\_\_\_\_. **Censo Escolar da Educação Básica 2016.** Brasília: [s.n.], 2016. Disponível em: <[http://download.inep.gov.br/educacao\\_basica/censo\\_escolar/notas\\_estatisticas/2017/notas\\_estatisticas\\_censo\\_escolar\\_da\\_educacao\\_basica\\_2016.pdf](http://download.inep.gov.br/educacao_basica/censo_escolar/notas_estatisticas/2017/notas_estatisticas_censo_escolar_da_educacao_basica_2016.pdf)>. Acesso em: 05/12/2017.

BRUNO, M. M. G.; MOTA, M. G. B. **Programa de capacitação de recursos humanos do ensino fundamental: deficiência visual.** Brasília: Secretaria de Educação Especial, 2001. v. 1.

CAMPITELI, H. C.; CAMPITELI, V. C. **Funções.** Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática.** 9. ed. Lisboa: Livraria Sá e Costa, 1989. v. 1.

CARVALHO, R. E. **Removendo barreiras para a aprendizagem.** Porto Alegre: Mediação, 2012.

COSTA, R. Como funciona o sistema braille? **Revista online Escola Abril**, v. 8, p. 18–25, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas: UNICAMP, 2004.

FERNANDES, S. H. A. A. **Análise Vygostkiana da apropriação do conceito de simetria por aprendizes sem acuidade visual.** Dissertação (Mestrado) — PUC, São Paulo, 2004.

FERRONATO, R. **Construção de Instrumento de Inclusão no Ensino de Matemática.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.



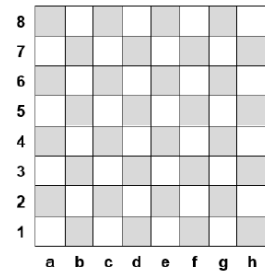
- LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 7. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. v. 1.
- MANTOAN, M. T. E. Inclusão promove a justiça. **Revista online Escola Abril**, 2011. Disponível em: <<http://revistaescola.abril.com.br/inclusao/inclusao-no-brasil/maria-teresaeagler-mantoan-424431.shtml>>. Acesso em: 18 ago. 2017.
- MARTINS, D. S. **Educação Especial**: oficina de capacitação para professores de matemática na área da deficiência visual. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.
- MAZZOTTA, M. J. S. **Educação especial no Brasil**: histórias e políticas públicas. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1999.
- OMOTE, S. A integração do deficiente: um pseudo-problema científico. **Temas em Psicologia**, v. 3, n. 2, p. 55–62, 1995.
- OMS Organização Mundial da Saúde. **Relatório mundial sobre a deficiência**. São Paulo: Banco Mundial, 2012.
- ONU Assembleia Geral das Nações Unidas. **Declaração Universal dos Direitos Humanos**. 1948. Disponível em: <<http://www.onu.org.br/img/2014/09/DUDH.pdf>>. Acesso em: 28 set. 2017.
- ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- SASSAKI, R. K. **Inclusão**: construindo uma sociedade para todos. 3. ed. Rio de Janeiro: WVA, 1997.
- SÁ, P. F.; SOUZA, G. S.; SILVA, I. A. A construção de um conceito de função: alguns dados. **Traços**, v. 11, p. 81–94, 2003.
- TAHAN, M. **O Homem que calculava**. 58. ed. Rio de Janeiro: Record, 2002.
- UBER, A. O ensino da matemática para o educando cego. **SEED - Secretaria de Educação do Estado do Paraná**, v. 5, n. 16, p. 25–38, 2009.
- VÁZQUEZ, S.; REY, G.; BOUBÉE, C. El concepto de función através de la historia. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 4, n. 16, p. 141–151, 2008.
- YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 4, n. 16, p. 6–9, 1976.



## ANEXO A – ATIVIDADE FUNÇÃO EXPONENCIAL

### ATIVIDADE 1 - O JOGO DE XADREZ

“... – Bondoso Rei, dê-me então dois grãos de trigo pela primeira casa do tabuleiro, quatro pela segunda casa, dobrando sempre o número de grãos na passagem de cada casa, até a última casa do tabuleiro”.



1) Quantas casas possui o tabuleiro aqui apresentado?

2) Como podemos representar cada casa? Uma possibilidade é procedendo da seguinte forma: nomeando as linhas do tabuleiro com os numerais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, nesta ordem, de baixo para cima, e as colunas com as letras a, b, c, d, e, f, g e h, nesta ordem, da esquerda para a direita. Assim,

- (i)  $a_5$  representa a casa que está na coluna ..... e linha .....
- (ii)  $f_2$  representa a casa que está na coluna ..... e linha .....
- (iii)  $e_6$  representa a casa que está na coluna ..... e linha .....

3) Como podemos numerar as casas do tabuleiro usando as representações definidas no exercício 2? Uma possibilidade é numerá-las deslocando-se em linha, da esquerda para a direita. Assim:

REPRESENTAÇÃO DA CASA	NÚMERO DA CASA
$a_1$	1
$b_1$	
$c_1$	3
$a_2$	9
$b_2$	
$c_2$	

REPRESENTAÇÃO DA CASA	NÚMERO DA CASA
$f_2$	
$a_3$	
$c_3$	
$e_3$	
$d_4$	
$g_7$	

<sup>0</sup> ATIVIDADE DESENVOLVIDA POR NEUSA NOGAS TOCHA E JAQUELINE DOS SANTOS  
PROFMAT UTFPR CURITIBA

4) Com a numeração das casas definidas no exercício 3, determine a quantidade de grãos que o Rei deverá pagar por cada uma das seguintes casas:

REPRESENTAÇÃO DA CASA ( $k_i$ )	NÚMERO DA CASA ( $n$ )	QUANTIDADE DE GRÃOS ( $f(n)$ )
$a_1$	1	$f(1) = 2$
$b_1$	2	$f(2) = 4$
$c_1$		
$d_1$		
$e_1$		
$f_1$		
$g_1$		
$h_1$		
$a_2$		
$b_2$		

a) Qual é a regularidade que você observa na sequência:

(i) Número da casa ( $a_1, b_1, c_1, \dots, h_1, a_2, b_2$ )?

(ii) Quantidade de grãos ( $f(a_1), f(b_1), \dots, f(h_1), f(a_2), f(b_2)$ )?

b) Qual é a regra que você observa para calcular a quantidade de grãos em função do número da casa?

c) Faça o esboço do gráfico relacionando o número da casa ( $n$ ) com a quantidade de grãos ( $f(n)$ ).

5) Com a numeração das casas definidas no exercício 3, complete as lacunas:

NÚMERO DA CASA	QUANTIDADE DE GRÃOS	QUANTIDADE DE GRÃOS
$b_1 + a_2 = 2 + 9 = 11$	$f(b_1 + a_2) = f(11) =$	$f(b_1) \cdot f(a_2) = f(2) \cdot f(9) = \_ \cdot \_ =$
$a_2 + a_5 =$	$f(a_2 + a_5) =$	$f(a_2) \cdot f(a_5) = \_ \cdot \_ = \_ \cdot \_ =$
$a_2 + b_3 =$	$f(a_2 + b_3) =$	$f(a_2) \cdot f(b_3) = \_ \cdot \_ = \_ \cdot \_ =$
$b_3 + d_4 =$	$f(b_3 + d_4) =$	$f(b_3) \cdot f(d_4) = \_ \cdot \_ = \_ \cdot \_ =$

Qual é a regularidade que você observa na quantidade de grãos?

6) Complete as lacunas:

número da casa	representação da casa	escreva o número da casa usando as representações $a_1$ 's e/ou $b_1$ 's	escreva a quantidade de grãos que o Rei deverá pagar usando $f(a_1)$ 's e/ou $f(b_1)$ 's
3	$c_1$	$1 \cdot a_1 + 1 \cdot b_1$	$f(3) = f(a_1) \cdot f(b_1) = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$
4			
8			
9	$a_2$	$1 \cdot a_1 + 4 \cdot b_1$	$f(9) = f(a_1) \cdot f(b_1)^4 = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$
11			
16			
17			
20			
24			
28			
29			
32			
33			
40			
48			
64			

7) Ao invés de dobrar o número de grãos na passagem de cada casa, o Rei devesse pagar um grão pela primeira casa e o triplo de grãos na passagem de uma casa para outra, como seria essa função? Esboce o gráfico desta função.

8) E se o Rei devesse pagar 80 toneladas pela primeira casa, caindo pela metade na passagem de uma casa para outra, responda:

a) Como se representaria analiticamente e graficamente a quantidade de grãos a serem pagos por cada casa?

b) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de uma tonelada?

c) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de 100 kilos?

d) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de um kilo?

e) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de 100 gramas?

f) A partir de qual casa o Rei pagaria menos de um grama?

g) Você poderia estimar quanto o Rei pagaria ao todo? Ou seja, qual seria a soma total?