

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
PROFMAT-UTCT**

**ORENCIO CAPESTRANO DOS ANJOS FILHO**

**PROPOSTAS DE AULAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA DE ALGUNS CONCEITOS  
MATEMÁTICOS VISANDO SEU CONTEXTO HISTÓRICO E APLICAÇÕES NOS  
DIAS ATUAIS**

**CURITIBA**

**2017**



ORENCIO CAPESTRANO DOS ANJOS FILHO

**PROPOSTAS DE AULAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA DE ALGUNS CONCEITOS  
MATEMÁTICOS VISANDO SEU CONTEXTO HISTÓRICO E APLICAÇÕES NOS  
DIAS ATUAIS**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional da Universidade Tec-  
nológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-  
UTCT como requisito parcial para obtenção do grau  
de Mestre.

Orientador: Prof. Dra. Patrícia Hess

CURITIBA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

---

A599p  
2017 Anjos Filho, Orencio Capestrano dos  
Proposta de aulas na educação básica de alguns conceitos matemáticos visando seu contexto histórico e aplicações nos dias atuais / Orencio Capestrano dos Anjos Filho.-- 2017.  
119 p.. : il. ; 30 cm

Disponível também via World Wide Web  
Texto em português, com resumo em inglês  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2017  
Bibliografia: p. 101-102

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Equações. 3. Geometria.  
4. Frações. 5. Matemática – Dissertações. I. Hess, Patrícia, orient.  
II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

---

CDD: Ed. 22 – 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba  
Bibliotecária : Anna T. R. Caruso CRB9/935



## **TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 44**

A Dissertação de Mestrado intitulada “Propostas de aulas na Educação Básica de alguns conceitos matemáticos visando seu contexto histórico e aplicações nos dias atuais”, defendida em sessão pública pelo(a) candidato(a) Orencio Capestrano dos Anjos Filho, no dia 18 de dezembro de 2017, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

### **BANCA EXAMINADORA:**

Prof(a). Dr(a). Patricia Hess - Presidente – UTFPR

Prof(a). Dr(a). Priscila Savulski Ferreira – UTFPR

Prof(a). Dr(a). Priscila Cardoso Calegari - UFSC

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 18 de dezembro de 2017.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa



## **AGRADECIMENTOS**

À minha família pelo apoio e motivação em todos os momentos.

À SBM, UTFPR e CAPES por proporcionarem essa oportunidade.

Aos professores do PROFMAT por seus valiosos ensinamentos.

Aos amigos da Turma de 2015, pelo incentivo e companheirismo, nos finais de semana em especial, aos amigos de viagem, Helena Corrêa Ribeiro e Felipe.

À minha orientadora, Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Patrícia Hess, pela orientação, paciência e tempo dedicado em buscar novas ideias quando as mesmas me faltavam durante este trabalho.



*“Resolver problemas é uma habilidade prática,  
como nadar, esquiatar ou tocar piano: você pode  
aprendê-la por meio de imitação e prática.  
(...) se você quer aprender a nadar você tem  
de ir à água e se você quer se tornar  
um bom ‘resolvedor de problemas’,  
tem que resolver problemas”*

George Polya



## RESUMO

ANJOS FILHO, Orencio Capestrano . **Propostas de aulas na educação básica de alguns conceitos matemáticos visando seu contexto histórico e aplicações nos dias atuais.** 119 p. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017

Este trabalho tem como objetivo responder algumas perguntas feitas por nossos alunos do ensino fundamental e médio, referente a alguns conceitos matemáticos. Para responder perguntas do tipo, de onde venho este conceito? E onde posso aplicá-lo no dia dia? Foram escolhidos os seguintes conteúdos a serem abordados neste trabalho: geometria, equação quadrática e frações.

De forma resumida, será apresentado como alguns conceitos matemáticos surgiram a partir das necessidades dos povos antigos, citando alguns personagens históricos, que foram fundamentais para a evolução de algumas notações usadas para representar certos números.

Além disso, será exibido algumas aplicações em que os conteúdos escolhidos podem ser usados nos dias atuais, bem como a importância da resolução de problemas como proposta de aprendizagem, tendo em vista a importância do mesmo dentro da matemática, seja para planejar, organizar, controlar ou analisar.

**Palavras-chave:** Educação Matemática, História Matemática, Geometria Elementar, Equações do Segundo grau, Frações.





## ABSTRACT

ANJOS FILHO, Orenco Capestrano . **Proposals of classes in the basic education of some mathematical concepts aiming at their historical context and applications in the present day**. 119 p. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2017

This paper aims to answer some questions asked by our elementary and middle school students about some mathematical concepts. To answer such questions, where do I come from this concept? And where can I apply it on day day? The following contents were chosen to be approached in this work: geometry, quadratic equation and fractions.

Briefly, it will be presented how some mathematical concepts emerged from the needs of the ancient peoples, citing some historical personages, who were fundamental for the evolution of some notations used to represent certain numbers.

In addition, it will show some applications in which the chosen contents can be used in the present day, as well as the importance of solving problems as a learning proposal, considering the importance of the same within mathematics, be it to plan, organize, control or analyze.

**Keywords:** Mathematical Education, Mathematical History, Elementary Geometry, Quadratic Equations, Fractions.



# SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>1</b>	<b>RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS</b> . . . . .	<b>21</b>
1.1	Motivação para o Estudo de Equações Quadráticas . . . . .	23
1.2	O Cercado dos Coelhos . . . . .	23
1.3	A Lebre e a Tartaruga . . . . .	25
<b>2</b>	<b>GEOMETRIA ELEMENTAR</b> . . . . .	<b>29</b>
2.1	Qual o Tamanho da Terra? . . . . .	30
2.2	A Geometria no Outdoor . . . . .	36
2.3	Simetria . . . . .	43
2.4	Aplicações da Simetria . . . . .	47
2.5	Rotação de Figuras Planas Envolvendo Matrizes . . . . .	48
2.6	Quebra de Simetria . . . . .	52
2.7	Quebra-Cabeça . . . . .	54
2.8	Tangram . . . . .	55
2.9	Coração em Pedacos . . . . .	58
2.10	Exercícios . . . . .	59
2.11	Proposta de Plano de Aula no Ensino Médio Usando Geometria Euclidiana Plana . . . . .	60
<b>3</b>	<b>EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU</b> . . . . .	<b>65</b>
3.1	Definições Pertinentes ao Estudo deste Capítulo . . . . .	65
3.2	Método Egípcio para Resolver Equações de Primeiro grau . . . . .	67
3.3	Método Babilônico para Resolver Equações de Segundo grau . . . . .	70
3.4	Algumas Aplicações das equações do Segundo grau na Atualidade . . . . .	73
3.5	Exercícios . . . . .	79
3.6	Proposta de Plano de Aula Usando Equações do Segundo grau . . . . .	79
<b>4</b>	<b>FRAÇÕES E DECIMAIS</b> . . . . .	<b>81</b>
4.1	Contextualização Histórica da Frações . . . . .	81
4.2	As Frações Egípcias . . . . .	82
4.3	Frações no Dia a Dia . . . . .	84
4.4	A Sinfonia das frações . . . . .	88
4.5	Decimais . . . . .	89
4.6	Exercícios . . . . .	94
4.7	Proposta de Plano de Aula para o 6º Ano do Ensino Fundamental . . . . .	95

<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>99</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>101</b>
	<b>APÊNDICE A – RESOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS . . . . .</b>	<b>103</b>
	<b>APÊNDICE B – CONSTRUÇÃO DINÂMICA DA ROTAÇÃO DE DOIS TRIÂNGULOS CONSECUTIVOS . . . . .</b>	<b>113</b>

## INTRODUÇÃO

Procurando situações em que os alunos possam dar sentido aos conceitos matemáticos e motivado pela coleção “Pra que serve a matemática?” (JAKUBOVIC; LELLIS; IMENES, 1992a), resolveu-se estudar a origem e as aplicações cotidianas de alguns conceitos. Qual professor de matemática do ensino fundamental ou médio nunca escutou estas perguntas: de onde veio isto? Para que servirá isto na minha vida?

Para responder algumas destas perguntas, será feito um resgate do contexto histórico e das necessidades humanas que culminaram na criação de determinados conhecimentos matemáticos, preenchendo algumas lacunas existentes, entre a origem destes conceitos e suas mudanças na linguagem de escrita até a forma atual.

Sobre o uso da história matemática como recurso em sala de aula, Machado afirma que:

Este recurso a história, não a história de povos, épocas ou personagens eventualmente interessantes, mas a história do desenvolvimento das ideias, dos conceitos, do modo como o conhecimento foi produzido é quase sempre suficiente para revelar uma continuidade essencial em relação ao significado dos temas tratados (MACHADO, 2001).

Como a história da matemática pode oferecer uma importante contribuição na aprendizagem dos conceitos, o professor pode criar condições, para que o aluno valorize mais os conhecimentos adquiridos, buscando uma ligação entre métodos antigos e atuais para se resolver problemas de mesma natureza.

Muitos alunos têm a impressão de que todas as fórmulas e algoritmos usados para resolver um problema sempre foram desta forma, isto se deve ao fato, principalmente, do desconhecimento do aperfeiçoamento da matemática que conhecemos hoje, que percorreu um longo caminho e é fruto de vários personagens que dedicaram seu tempo e esforço na formulação destes conceitos.

Pegue como exemplo a fórmula de resolução de equações do segundo grau:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  conhecida hoje. As situações problemas que envolviam equações do segundo surgiram a pelo menos 4000 anos, como uma tentativa de resolver problemas relacionados ao cálculo de áreas que envolviam os lados de um retângulo. Naquela época, os babilônios desenvolveram uma receita ou técnica, usando a sua linguagem de escrita é claro, para solucionar problemas desta natureza. Porém, esta receita sugeria passos que deveriam ser seguidos para resolver um tipo específico de situação e só tratava de valores positivos como solução. Dali em diante, muitos estudiosos desenvolveram vários outros métodos de resolução e mais ou menos 3000 anos após os primeiros registros, foi na Índia no Séc. XI d.C que um método geral de resolução começou a tomar forma. Porém, foi somente no século XVI, devido aos

trabalhos de François Viète e René Descartes, que generalizaram o uso de letras para representar os coeficientes de uma equação, que surgiu a fórmula conhecida (EVES, 2011).

Hoje procuramos generalizar as situações matemáticas em função de um único algoritmo, bem diferente dos povos antigos. Os egípcios, por exemplo, registravam a resolução de cada problema passo por passo, ou seja, cada problema era resolvido de um modo particular não tendo métodos gerais de resolução. Talvez com algumas raras exceções, como a conversão em frações unitárias de uma fração na forma  $\frac{2}{p}$ , com  $p$  sendo um número ímpar.

Informações de natureza histórica devem ser passadas aos alunos de forma mais clara, fazendo um paralelo entre a maneira antiga e a atual para se resolver uma situação que envolva uma equação do segundo grau, por exemplo. Mostrar aos alunos diversas situações para que ele mesmo tire suas conclusões e perceba que o algoritmo geral usado hoje é muito mais eficiente e prático.

Um outro fator importante quando se estuda Matemática, é que muitas vezes é difícil ter uma visão ampla acerca da matéria como um todo, pois dentro do currículo escolar, os diversos assuntos aparecem isolados uns dos outros, não havendo muitos elementos de ligação entre os mesmos, fazendo com que os alunos tenham dificuldades em resolver problemas e compreendam coisas novas que envolvam vários tópicos de uma vez.

É claro que é necessário uma divisão dos conteúdos, para adequação da matéria ao tempo disponível e a outros fatores, mas é preciso cuidado para que não se perca a noção do conjunto da matéria. Uma sugestão seria dar aos vários tópicos uma abordagem que permita aos alunos uma compreensão mais geral do que estão fazendo. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, Matemática (1998):

Muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento. Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos (BRASIL, 1998, p. 22).

Tendo em vista a falta de informações que os alunos possuem das origens de cada conceito e o fato dos conteúdos serem trabalhados de forma isolada. Uma alternativa é a resolução de problemas práticos do cotidiano, pois muitos alunos vivenciam alguns destas situações e trazem consigo elementos que podem os ajudar a solucioná-los. Isto é afirmado nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, Matemática (1998):

Os alunos trazem para a escola conhecimentos, ideias e intuições, construídas através das experiências que vivenciam em seu grupo sociocultural. Eles chegam à sala de aula com diferenciadas ferramentas básicas para, por exemplo, classificar, ordenar, quantificar e medir. Além disso, aprendem a atuar de acordo com os recursos, dependências e restrições de seu meio (BRASIL, 1998, p. 25).

Sendo assim, mostraremos a aplicação de alguns conceitos nos dias atuais e como a matemática está envolvida em quase todas as atividades, sob as mais diversas formas, fazendo parte do nosso crescimento e a compreensão dos conceitos matemáticos necessários, não só ao exercício de uma profissão, mas também ao desempenho das diversas atividades do cotidiano.

Ainda nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN Matemática(1998):

As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado (BRASIL, 1998, p. 29).

Desta forma, como as necessidades cotidianas, podem potencializar a aprendizagem dos alunos, o professor pode incentivar a resolução de problemas práticos, tornando a aula mais rica e atrante.

A seguir, uma descrição mais detalhada do trabalho.

#### OBJETIVO GERAL DO TRABALHO

Apresentar o contexto histórico das origens de alguns conceitos matemáticos, bem como possíveis aplicações destes conceitos na atualidade através da resolução de problemas.

#### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conhecer a origem da geometria;
- Observar aplicações da geometria na atualidade;
- Conhecer a origem das equações quadráticas bem como o surgimento da sua fórmula geral;
- Apresentar aplicações de equações quadráticas na atualidade;
- Conhecer a origem das frações e dos números decimais;
- Destacar a importância da resolução de problemas;

#### ESTRUTURA DO TRABALHO

No capítulo atual é apresentada a introdução. No Capítulo 2, a importância da metodologia de Resolução de Problemas através da matemática, usada pelos egípcios e babilônios, bem como os desafios do milênio. No Capítulo 3, o objetivo será mostrar a importância da geometria, pois ela é parte integrante dos currículos escolares e possui várias aplicações práticas no nosso dia a dia. Desta forma usando fatos históricos acerca da geometria e suas aplicações nas construções, na agricultura e na resolução de problemas, que envolvem cálculos e medidas. Como incentivo

para que os alunos se interessem por estes conceitos e despertem a sua curiosidade, tomemos o cálculo de Eratóstenes que usou dois conceitos simples, o das paralelas cortadas por uma transversal e o da proporcionalidade entre arcos e ângulos para calcular a circunferência da Terra. No Capítulo 4, será mostrado como surgiram as equações do segundo grau e como os povos antigos lidavam com a solução destas equações, fazendo uma comparação no método usado para resolvê-las com a fórmula conhecida atualmente. No Capítulo 5, será visto como frações surgiram no Egito, devido a necessidade de se representar um número de forma não inteira. Além disso, o surgimento dos números decimais através das frações. No ultimo Capítulo apresentamos as considerações finais do trabalho.



# 1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste Capítulo será apresentado a importância da resolução de problemas como estratégia de ensino e dois exemplos como motivação para o ensino de equações do segundo grau.

Resolver problemas é uma característica na história da humanidade, pois há vários registros de problemas matemáticos na história antiga como a egípcia, babilônica, chinesa entre outras. O desenvolvimento destas sociedades antigas deve-se, em grande parte, a forma como resolveram estes problemas, e certamente nenhuma destas grandes civilizações teria prosperado tanto sem o avanço da matemática. Os egípcios e babilônios eram fascinados por situações do cotidiano. Algumas destas situações foram deixadas escritas em papiros ou em placas de argila. A seguir duas situações problema. A primeira traduzida do papiro de Rhind e a segunda traduzida de uma placa de argila babilônica.

São numerosos os problemas sobre pães e cerveja no papiro de Ahmes. O problema 63, por exemplo, pede que sejam repartidos 700 pães entre quatro pessoas, sendo que as quantidades que devem receber estão na proporção prolongada  $2/3:1/2:1/3:1/4$ . A solução é encontrada fazendo o quociente de 700 pela soma das frações na proporção. Neste caso o quociente de 700 por  $1\frac{3}{4}$  é encontrado multiplicando 700 pelo recíproco do divisor, que é  $1/2 + 1/14$ . O resultado é 400; calculando  $2/3$  e  $1/2$  e  $1/3$  e  $1/4$  disto são obtidas as parcelas de pão requeridas (BOYER, 1974, p. 42).

Somei a área e dois terços do lado do meu quadrado, e o resultado é 0, 35. Tome 1, o “coeficiente”. Dois terços de 1, o coeficiente, é 0, 40. Metade disso, 0, 20, você multiplicará por 0, 20 (e o resultado) que é 0, 6, 40, você adicionará 0, 35, e (o resultado) 0, 41, 40, tem raiz quadrada 0, 50. Multiplique 0, 20 por ele próprio e subtraia (o resultado) de 0,50, e 0, 30 é (o lado) do quadrado (ASSIS, 2011, p. 11).

Esses são apenas dois exemplos dos inúmeros problemas matemáticos deixados por alguns povos antigos. Muitos destes envolvem cálculos de áreas de figuras geométricas.

O interesse por situações que envolvem matemática, retiradas do cotidiano das civilizações antigas foram se espalhando entre as próximas gerações e se tornando cada vez mais presente e necessário na vida dos seres humanos. Cada geração que se aproximava da matemática contribuía de alguma forma para que surgissem novas teorias, teoremas e novos olhares sobre esta ciência, ampliando assim seus conhecimentos.

No século atual existem vários problemas matemáticos a serem solucionados. Dentre estes, sete foram selecionados pelo Clay Mathematics Institute(CMI) em 24 de maio de 2000 e são considerados os desafios do milênio, tanto para os matemáticos quanto um desafio imposto aos educadores matemáticos. Seis destes problemas ainda seguem em aberto e podem render um prêmio de um milhão de dólares para o primeiro matemático que resolve pelo menos um deles.

Segundo o CMI esses problemas propostos poderão trazer várias contribuições para a física, para a comunicação, computação, engenharias náutica e aeronáutica. Além, é claro, de enaltecer e muito o ego do matemático que solucionar um destes desafios.

Os sete problemas foram selecionados por um comitê científico do CMI, dirigido pelo Dr. Arthur Jaffe (ex-presidente da American Mathematical Society) e somente o quinto foi solucionado em 2003, pelo russo Grigori Yakovlevich Perelman, que recusou o prêmio. Estes desafios estão descritos a seguir:

- 1- A Música dos Primos – A hipótese de Riemann.
- 2- Feitos dos Campos – Teoria de Yang-Mills e a hipótese da Lacuna de Massa.
- 3- Quando os Computadores Não Bastam – O problema P versus o NP que de todos é o que apresenta chance de ser resolvida por “um amador desconhecido”.
- 4- As Equações de Navier-Stokes.
- 5- A Matemática do Comportamento Suave – A conjectura de Poincaré.
- 6- Reconhecendo Quando a Equação Não Pode Ser Resolvida – A Conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer.
- 7- A Geometria Sem Figuras – A Conjectura de Hodge.

Será que o restante destes problemas algum dia serão solucionados? E se forem, quanto tempo levará para que sejam solucionados? Do ponto de vista da educação matemática, ensinada hoje nas escolas de educação básica são perguntas difíceis de responder, pois a solução dos mesmos dependem inteiramente de pessoas bem preparadas, que dediquem tempo e esforço.

Nas civilizações antigas, a matemática foi uma importante ferramenta na solução de questões do dia a dia. Nessa perspectiva porque não estimular nas escolas a resolução de problemas do cotidiano com o uso da matemática. Assim os alunos podem apreender a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejamento de etapas, estabelecer relações, verificar regularidades e a buscar novas alternativas, desenvolvendo a sua forma de pesquisa para aprender a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados e validar soluções.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam que a resolução de problemas é o caminho para o ensino da Matemática. Entretanto os mesmos Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam que, “tradicionalmente, os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos” (BRASIL, 1998, p. 28).

Vemos hoje que a resolução de problemas é pouco trabalhada nas escolas, sendo que os conteúdos matemáticos tem como maior foco o uso de regras e fórmulas. Segundo Lopes:

A aula de Matemática deveria ser um dos locais privilegiados para preparar o Homem que a sociedade hoje reclama. Todavia, o ensino da Matemática ministrado nas escolas prepara alunos com alguma capacidade de cálculo, mas incapazes de resolver problemas (LOPES, 2005, p. 08).

Mas o que vem a ser um problema matemático? Segundo Walle:

Um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método “correto” específico de solução (WALLE, 2009, p. 57).

Como professor de matemática tenho consciência que ensinar a resolver problemas matemáticos não é uma tarefa fácil, pois abrange vários conhecimentos construídos para desafiar o conhecimento do estudante, que precisa refletir a situação buscando estratégias e experimentar novas ferramentas matemáticas, na tentativa de chegar à solução.

Dando ao aluno a oportunidade de trabalhar com problemas matemáticos em sala de aula, pode-se tornar a matéria mais interessante e desafiadora. Além disso, os problemas exigem um maior envolvimento dos alunos nos processos de resolução, despertando sua criatividade e ainda colaboram com o desenvolvimento de diferentes estratégias, podendo no futuro estas estratégias serem aplicadas em outras situações do seu cotidiano, como no trabalho ou na vida pessoal. E quem sabe, com uma bagagem maior de conhecimento, mais bem preparados e dispostos a dedicar seu tempo na solução de um dos desafios do milênio.

A seguir será apresentado dois exemplos de situações que recaem em uma equação do segundo e como o professor pode aplicá-las em seu planejamento em sala de aula.

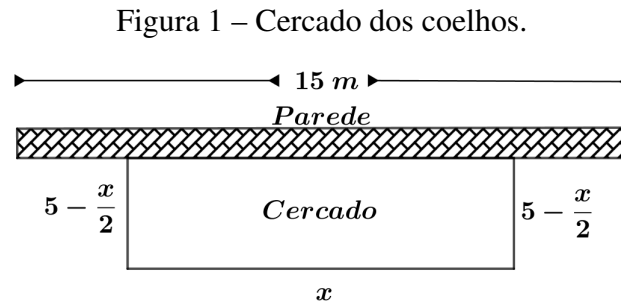
## 1.1 MOTIVAÇÃO PARA O ESTUDO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Abaixo, apresentamos dois problemas básicos apenas como motivação para o uso da Resolução de Problemas em sala de aula e como o professor pode aplicá-las, mesmo que o aluno tenha pouco conhecimento matemático.

## 1.2 O CERCADO DOS COELHOS

Joaquim quer fazer um cercado retangular em sua propriedade, para manter seus coelhos longe da sua plantação de alfaces. Para isso ele dispõe de 10 metros de tela. Ele pensou em aproveitar uma parede, de 15 metros de um galpão já construído em seu terreno. Porém, para maior conforto de seus coelhos, ele deseja que este cercado, tenha a maior área possível. Desta forma qual é a maior área do cercado que Joaquim conseguirá, utilizando a parede e apenas os 10 metros de tela?

**Resolução:** Usando os dados do problema, se uma das dimensões do cercado for representada por  $x$  a outra será  $5 - \frac{x}{2}$ , quanto ao valor deste lado será justificado na sequência. Observe a Figura 1.



Fonte: Autor.

Desta forma, a área do cercado pode ser expressa pela equação  $\text{Área} = x \left( 5 - \frac{x}{2} \right)$ . Escrevendo a equação em sua forma canônica temos:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= x \left( 5 - \frac{x}{2} \right) \\ &= -\frac{x^2}{2} + 5x \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 - 10x) \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 - 10x + 25x) + 12,5 \\ &= -\frac{1}{2} (x - 5)^2 + 12,5 \end{aligned}$$

Como os valores 5 e 12,5 coincidem com as coordenadas do vértice de uma função do segundo grau em sua forma canônica, a área máxima do cercado será  $12,5\text{m}^2$  e isto irá ocorrer quando  $x = 5$ . Observemos que não foi necessário ter o conhecimento de função ou equação quadrática para resolver este problema.

**Observações do professor:** Com certeza alguns alunos não irão compreender porque se uma dimensão do retângulo mede  $x$  a outra tem que medir  $5 - \frac{x}{2}$ . Nesta hora o professor pode usar os seguintes argumentos:

1) Mostrar que somando os 3 lados do cercado contando que um lado será a parede irá obter 10 metros, que é o tamanho da tela. Ou seja,

$$5 - \frac{x}{2} + 5 - \frac{x}{2} + x = 10 - \frac{2x}{2} + x = 10.$$

2) No retângulo chamar uma dimensão de  $x$  e a outra de  $y$ . Desta forma, somando os lados do cercado sem a parede e igualando à medida da tela terá uma equação, assim basta isolar  $y$ , obtendo  $5 - \frac{x}{2}$  que é a medida de uma das dimensões.

Depois destes argumentos, talvez alguns alunos ainda possam se questionar, se a área máxima é mesmo  $12,5\text{m}^2$ . Uma estratégia válida é atribuir valores inteiros para uma das dimensões, observando os 10 metros de tela e construir uma tabela com as respectivas áreas para estas dimensões. Por exemplo se o lado  $x$  medir 1 metro, sobram 9 metros para os outros dois lados do cercado, assim cada um deles deve medir 4,5 metros pois são iguais. Seguindo este processo podemos obter possíveis áreas em função de algumas dimensões, como pode ser visto na Tabela 1:

Tabela 1 – Possíveis áreas do cercado em função dos lados.

Se $x$ igual à	$y$ será	Área do cercado
1	4,5	$1 \times 4,5 = 4,5\text{m}^2$
2	4	$2 \times 4 = 8\text{m}^2$
3	3,5	$3 \times 3,5 = 10,5\text{m}^2$
4	3	$4 \times 3 = 12\text{m}^2$
5	2,5	$5 \times 2,5 = 12,5\text{m}^2$
6	2	$6 \times 2 = 12\text{m}^2$
7	1,5	$7 \times 1,5 = 10,5\text{m}^2$
8	1	$8 \times 1 = 8\text{m}^2$
9	0,5	$9 \times 0,5 = 4,5\text{m}^2$

Fonte: Autor.

Para finalizar, o professor pode questionar os alunos se é uma coincidência ou sempre ocorre em um retângulo, quando um dos lados já é utilizado o lado paralelo a este lado utilizado é sempre o dobro da medida do lado adjacente deste retângulo? Com isso professor e aluno ainda podem chegar há conclusão, que sempre que isso ocorre, a maior área deste retângulo será dada pela oitava parte do quadrado do perímetro dos três lados.

### 1.3 A LEBRE E A TARTARUGA

Uma jovem lebre desafia uma velha tartaruga para uma corrida pela floresta. A tartaruga aceita o desafio, se a lebre descobrir qual é a sua idade. A lebre concorda, mas exige uma pista, então a velha tartaruga fala. Qual é a minha idade se eu tenho 51 vezes a idade que tu tinhas quando eu tinha 98 anos a mais que a tua idade atual? E quando você tiver a idade que eu tenho o produto de nossas idades será 20502 anos. Vamos ajudar a lebre a descobrir a idade da tartaruga.

**Resolução:** Vamos organizar os dados em TINHA e TEM.

- a. A lebre TINHA uma idade que chamaremos de  $x$  e hoje ela TEM uma idade que chamaremos de  $y$ .

- b. Quando a lebre TINHA  $x$ , a tartaruga TINHA 98 anos a mais que a idade atual da lebre, ou seja, ela TINHA  $y + 98$ .
- c. Hoje a tartaruga TEM  $51x$ .

Coloquemos esses dados na Tabela 2:

Tabela 2 – Idade anterior e atual da lebre e da tartaruga.

•	TINHA	TEM
LEBRE	$x$	$y$
TARTARUGA	$y + 98$	$51x$

Fonte: Autor.

Como a diferença entre as idades deve ser constante, temos:

$$y - x = 51x - (y + 98) \quad (1.1)$$

$$y - x = 51x - y - 98$$

$$y + y + 98 = 51x + x$$

$$2y + 98 = 52x$$

$$y + 49 = 26x$$

$$y = 26x - 49. \quad (1.2)$$

Agora substituindo o valor de  $y$ , temos:

A lebre TINHA  $x$  e agora TEM  $26x - 49$ .

Vamos para a segunda frase:

“Quando você tiver a idade que eu tenho o produto de nossas idades será 20502 anos.”

A lebre TEM  $26x - 49$  anos e para ter a idade da tartaruga que é  $51x$ , terão se passado  $51x - (26x - 49) = 25x + 49$  anos. Observe que, somando  $26x - 49 + (25x + 49)$ , a lebre terá a idade da tartaruga, que é  $51x$ . Sendo assim, passado-se  $25x + 49$  anos, a tartaruga terá  $76x + 49$ . Como o produto das idades da lebre e da tartaruga é 20502 anos. Temos:

$$(51x)(76x + 49) = 20502$$

$$3876x^2 + 2499x = 20502$$

$$3876x^2 + 2499x - 20502 = 0 \quad (\div 51)$$

$$76x^2 + 49x - 402 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau:

$$x = \frac{-49 \pm \sqrt{(49)^2 - 4 \cdot (76) \cdot (-402)}}{2 \cdot 76}$$

$$x = \frac{-49 \pm \sqrt{2401 + 122208}}{152}$$

$$x = \frac{-49 \pm \sqrt{124609}}{152}$$

$$x = \frac{-49 \pm 353}{152}.$$

Como o valor negativo não nos interessa temos:

$$x = \frac{-49 + 353}{152} = \frac{304}{152} = 2.$$

Dai como a tartaruga TEM  $51x$  sua idade será  $51 \cdot 2 = 102$  anos.

**Observações do professor:** Este é um problema que pode confundir muito os alunos. Começando pela interpretação do problema, que pode exigir várias leituras. Depois dos dados organizados o ideal é deixar os alunos pensarem do porque da Igualdade (2.1). O professor até pode dar algumas dicas de idades aleatórias, com isso eles entenderão fácil a igualdade. Na parte da resolução da equação de segundo grau, como os valores são grandes, recomendo fortemente o uso de calculadora, para que os cálculos sejam feitos mais rapidamente e não torne o problema desgastante para os alunos. Para finalizar o ideal é que os alunos substituam as idades encontradas e confirmem com o enunciado do problema.

Os problemas trabalhados acima, podem ser um ponto de partida para introdução do conteúdo sobre equações do segundo grau. O aluno irá perceber que para resolver determinadas situações é necessário ter um conhecimento de alguns conceitos matemáticos, que podem facilitar a solução destes problemas.

É importante que o professor faça uma preparação prévia antes da realização de atividades que se pretende desenvolver com a Resolução de Problemas. Planejar estas atividades requer o estabelecimento de critérios, tanto na escolha dos problemas como também os procedimentos durante as atividades que se pretende desenvolver com os alunos.

Com uma boa escolha do problema é possível fazer uma ligação com o conhecimento que o aluno já tenha adquirido, possibilitando assim uma maior compreensão para a introdução do novo conteúdo desejado.

Nos Capítulos seguintes, será disponibilizado ao término de cada Capítulo, uma proposta de plano de aula para os conteúdos de geometria, equações do segundo grau e frações, para que o professor possa iniciar estes conteúdos, lançando uma situação problema.





## 2 GEOMETRIA ELEMENTAR

Neste Capítulo será visto como o conceito de geometria começou a tomar forma, a partir das necessidades de alguns povos em transformar a terra as margens de alguns rios em áreas de cultivo.

Foram nas margens de alguns dos grandes rios da África e da Ásia que se deu o aparecimento de novas formas de sociedade preocupadas em desenvolver técnicas para aumentar seu plantio. Para transformar as terras ao longo desses rios em regiões agricultáveis, os povos antigos que ali viviam precisavam de técnicas para drenagem de pântanos e ter um melhor controle de inundações e irrigação. Essas atividades requeriam métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra. Assim através da mensuração originou-se o estudo da Geometria, que em Grego significa (medida da terra). Em especial, dois povos que habitavam estas regiões tiveram um papel fundamental no desenvolvimento da geometria. Os babilônios e os egípcios.

Os babilônios deixaram muitas contribuições para a matemática, como o sistema sexagesimal, ou seja, a maneira como contamos as horas, minutos e segundos.

As fontes da matemática babilônica são muito mais ricas do que a dos egípcios, já que as placas ou tábuas de argila da Mesopotâmia, que eram usadas para escrever, sobreviveram muito melhor do que os papiros usados pelos egípcios.

Segundo Eves (EVES, 2011), entre 2000 a.C. a 1600 a.C., os babilônios já estavam familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e possivelmente com a área de um triângulo qualquer). Conheciam o volume de alguns prismas e resultados importantes sobre o triângulo retângulo, o qual séculos depois seria estudado por Pitágoras dando origem ao famoso teorema que leva o seu nome. Também tinham calculado um valor aproximado para o número  $\pi$ .

Por outro lado, tudo que se sabe da matemática egípcia está contido praticamente em dois papiros. O papiro de Rhind com 5 metros de comprimento e 33 centímetros de largura e o papiro de Moscou também com 5 metros de comprimento por 9 centímetros de largura.

Nestes papiros, estão contidos vários problemas com suas respectivas soluções, envolvendo várias situações que recaem em alguns conceitos matemáticos atuais como: cálculos aritméticos e algébricos como cálculo com frações, situações que recaem em equações do primeiro grau, problemas relacionados a cálculo de áreas, situações envolvendo o cálculo dos lados e o volume de algumas pirâmides e também situações envolvendo proporções e progressões (EVES, 2011).

Tanto a civilização egípcia como a civilização babilônica, contribuíram de alguma forma para que geometria desce seus primeiros passos rumo ao conceitos atuais.

Desta forma, resgatando um pouco da história, e focando em exemplos atuais, vamos apresentar alguns problemas em que a geometria se faz necessária, mas de forma simples, usando um pouco de intuição e sem demonstrações rigorosas. O objetivo deste capítulo será a fixação dos conteúdos como: retas paralelas, ângulos, proporcionalidade, triângulo retângulo e simetria.

A seguir, veja que com alguns conceitos simples de geometria, foi possível calcular o comprimento do nosso planeta a mais de 2000 anos atrás.

## 2.1 QUAL O TAMANHO DA TERRA?

Antes de respondermos a esta questão, precisamos de conteúdos relacionados a retas paralelas e ângulos. Sendo assim, é impossível não lembrarmos do Teorema de Tales (século VI - VII a.C). Tales de Mileto defendia a tese de que os raios solares que chegavam à Terra estavam na posição inclinada. Partindo desse princípio básico observado na natureza, ele estabeleceu uma situação de proporcionalidade que relaciona as retas paralelas e as transversais.

Vale a pena apresentarmos brevemente o teorema com uma demonstração simplificada.

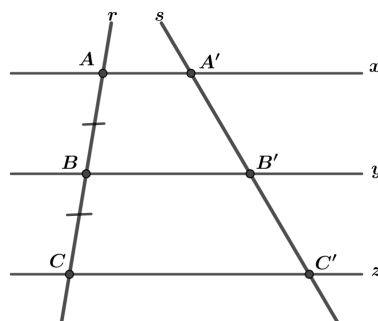
**Lema 2.1.** *Se duas retas paralelas são cortadas por uma reta transversal os ângulos correspondentes formados são congruentes.*

**Lema 2.2.** *Em todo paralelogramo os lados opostos são congruentes.*

**Teorema 2.3.** *Se um feixe de paralelas determina sobre uma secante qualquer segmentos de mesmo comprimento, determinará sobre qualquer outra secante, segmentos de mesmo comprimento.*

*Demonstração.* Considere as retas paralelas  $x, y$  e  $z$ , e as secantes a elas  $r$  e  $s$ , com os pontos de interseção como na Figura 2.

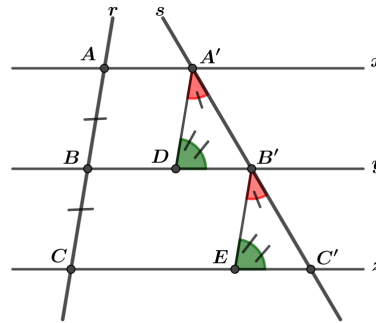
Figura 2 – Feixe de retas paralelas  $x, y$  e  $z$ , e secantes  $r$  e  $s$ .



Fonte: Autor.

Vamos mostrar que, se o segmento  $\overline{AB} = \overline{BC}$  então o segmento  $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$ . Trace duas retas paralelas a  $r$ , uma passando pelo ponto  $A'$  e outra pelo ponto  $B'$ . Marque os pontos de interseção  $D$  e  $E$  sobre  $y$  e  $z$ , respectivamente conforme na Figura 3.

Figura 3 – Feixe de retas paralelas cortadas por retas transversais.



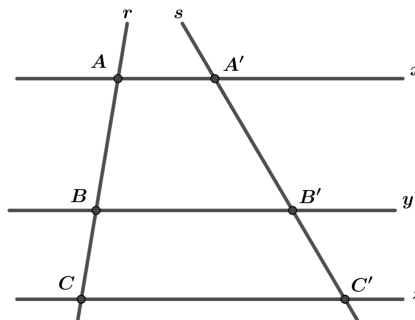
Fonte: Autor.

Observe que o quadrilátero  $AA'DB$  é um paralelogramo pois  $\overline{A'D}$  é paralelo a  $\overline{AB}$ . Desta forma, pelas propriedades do paralelogramo, seus lados opostos são congruentes, ou seja,  $\overline{AB} = \overline{A'D}$ . De forma análoga  $\overline{BC} = \overline{B'E}$ . Como os segmentos  $\overline{A'D}$  e  $\overline{B'E}$  são paralelos, podemos afirmar que os ângulos  $\widehat{DA'B'}$  e  $\widehat{EB'C'}$  são congruentes. Da mesma forma, como  $y$  é paralelo a  $z$  e  $\overline{A'D}$  é paralelo a  $\overline{B'E}$ , os ângulos  $\widehat{A'DB'}$  e  $\widehat{B'EC'}$  também são congruentes. Assim pelo caso ângulo, lado, ângulo (A.L.A), os triângulos  $A'DB'$  e  $B'EC'$  são congruentes, o que implica que os segmentos  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$  tem mesma medida.  $\square$

**Teorema 2.4.** (Tales) *Um feixe de paralelas determina sobre duas secantes quaisquer segmentos proporcionais.*

*Demonstração.* Sejam três retas paralelas  $x$ ,  $y$  e  $z$  e as secantes a elas  $r$  e  $s$ , como na Figura 4.

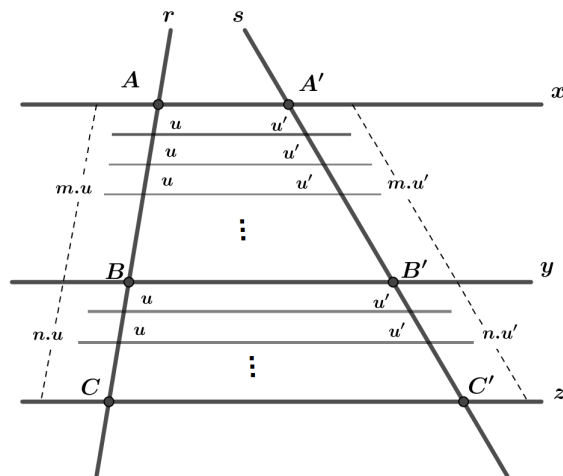
Figura 4 – Feixe de retas paralelas cortadas por transversais.



Fonte: Autor.

Faremos a demonstração somente para segmentos comensuráveis. Suponha que seja possível traçar novas retas paralelas de maneira que se possa dividir a reta  $r$  em segmentos congruentes de medida  $u$ . Pelo Teorema 2.3, estas mesmas retas paralelas dividirão a reta  $s$  em segmentos de mesma medida  $u'$ . Conforme a Figura 5.

Figura 5 – Retas paralelas cortadas por uma transversal.



Fonte: Autor.

Assim temos,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{m.u}{m.u'} = \frac{u}{u'}$$

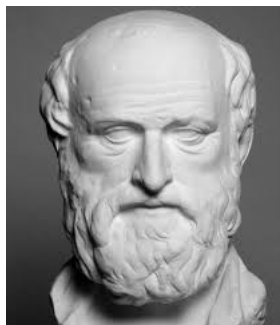
Além disso,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{n.u}{n.u'} = \frac{u}{u'}$$

o que implica que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ , como gostaríamos. □

Nos dias atuais a maioria das pessoas não faz ideia do tamanho aproximado do planeta em que vivemos nem mesmo como calculá-lo. Já não podemos falar a mesma coisa do matemático grego Eratóstenes de Cirene que viveu no século III antes de Cristo.

Figura 6 – Eratóstenes: 276 - 194 a.C.

Fonte: < <http://elhombredeanchiano.blogspot.com.br/>>.

Eratóstenes foi o primeiro homem a calcular o comprimento do nosso planeta com uma precisão bem próxima da verdadeira. Para realizar tal feito, sua descoberta se baseou em alguns fatos.

O primeiro deles é que ele conhecia duas cidades do Egito, Alexandria e Siene (atualmente chamada de Assuã), que estavam localizadas num mesmo meridiano e que a distância entre estas duas cidades era aproximadamente de 800 quilômetros (utilizando a unidade de medida atual).

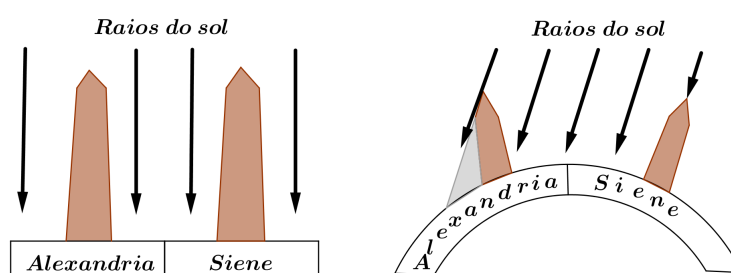
O segundo fato é que Eratóstenes também sabia que em um determinado dia do ano ao meio dia um fenômeno raro se repetia na localidade de Siene. Neste dia, o sol ficava a pino exatamente na vertical e iluminava até mesmo o fundo dos poços; o mesmo não ocorria em Alexandria, onde os raios solares incidiam de forma oblíqua, formando um ângulo não nulo com a vertical.

Com este último fato ele pode sugerir que a Terra era redonda e não plana como se acreditava até então. Usando o fato de que os raios solares são paralelos, devido a grande distância entre o sol e a terra, e juntamente com alguns conhecimentos de geometria, ele chegou na seguinte conclusão: a distância entre estas duas cidades (Alexandria e Siene) é 50 vezes menor do que a circunferência da Terra.

Para entendermos melhor esta conclusão, vamos seguir os passos deste matemático e descobrir qual o comprimento da circunferência da terra.

A primeira conclusão de Eratóstenes foi que a Terra era redonda e não plana, pois se fosse plana, em Alexandria também não poderia haver projeção de sombras naquele momento. A Figura 7 retrata as duas possibilidades.

Figura 7 – Raios solares atingindo a terra.



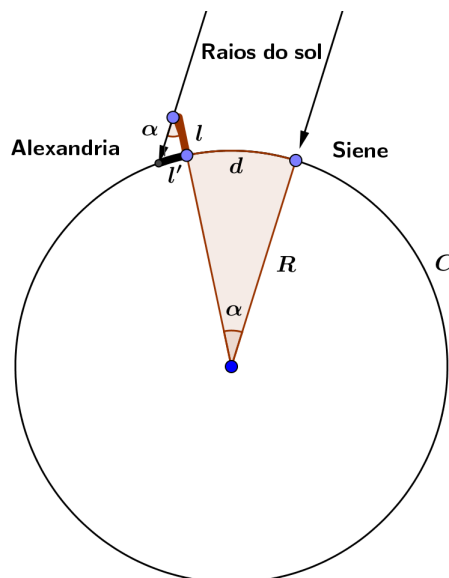
Fonte: Autor.

Eratóstenes tinha ainda alguns conhecimentos sobre retas paralelas, ângulos e sombras, e sabia que era possível medir o ângulo do sol formado pela sombra projetada pelos objetos. A Figura 8 apresenta esta ideia, sendo:

- $d$  a distância entre Siene e Alexandria;
- $\alpha$  o ângulo formado pelas cidades de Siene e Alexandria com o centro da terra;
- $C$  o comprimento da circunferência da terra;

- $R$  o raio da terra;
- $l$  o comprimento do poste;
- $l'$  o comprimento da sombra do poste.

Figura 8 – Esquema para calcular a circunferência da Terra.

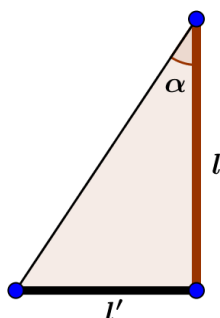


Fonte: Autor.

Era necessário então descobrir o valor do ângulo  $\alpha$ , que correspondia a uma fração dos  $360^\circ$  graus, correspondente a circunferência inteira. Como ele conhecia o conceito de retas paralelas, era só estender de forma imaginária, o poste até o centro da terra, tendo assim uma reta transversal passando pelas paralelas, que são os raios de sol que passam pelas duas cidades, obtendo ângulos alternos internos, ou seja, de mesma medida. Com isso bastaria calcular o ângulo formado pela projeção da sombra do poste em Alexandria.

Observando a Figura 8, podemos notar que o poste, sua sombra e a linha imaginária dos raios solares podem ser aproximados por um triângulo retângulo, onde um dos ângulos é exatamente o ângulo  $\alpha$ , como na Figura 9.

Figura 9 – Triângulo aproximado representando a incidência do raio solar.



Fonte: Autor.

Assim precisamos conhecer apenas o comprimento  $l$  do poste e o comprimento de sua sombra  $l'$  para conhecer o ângulo  $\alpha$ . E isto pode ser calculado usando a seguinte razão trigonométrica:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{l'}{l}.$$

Desta forma,  $\alpha$  é dado por  $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{l'}{l}\right)$ . Utilizando tabelas com a relação entre o ângulo e a razão entre os comprimentos Eratóstenes encontrou um ângulo aproximado de 7,2 graus. Vale observar que o comprimento do poste e da sombra não foram encontrados nas referências procuradas. Com o valor do ângulo  $\alpha = 7,2^\circ$ , o comprimento da terra  $C$  pode ser calculado usando uma simples regra de proporcionalidade, a regra de três:

$$\frac{7,2^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{50} = \frac{800\text{km}}{C}.$$

Eratóstenes então determinou que a distância entre Alexandria e Siene era 50 vezes menor que a volta inteira na terra, ou seja,  $50 \cdot 800\text{km} = 40000\text{km}$  era o comprimento da Terra. Com este valor ainda é possível calcular o raio e o diâmetro da terra:

$$C = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{C}{2\pi} = \frac{40000}{2\pi} \cong 6366.$$

Logo o raio da Terra é aproximadamente 6366 quilômetros e o diâmetro é aproximadamente

$$2 \cdot 6366\text{km} \cong 12732\text{km}.$$

□

Atualmente medidas obtidas com sistemas sofisticados de medição, mostram que a circunferência da terra ou perímetro equatorial, tem aproximadamente 40.075,02 quilômetros (TERRA, 2013). O erro na medição de Eratóstenes se deu ao fato dos instrumentos de medição da época serem muito precários, como a distância entre as duas cidades, que foi medido em estádios, unidade de medida usada na época.

O mais impressionante é que o fato foi descoberto com poucas informações e conhecimentos básicos de geometria. Isto nos mostra que grandes descobertas como a de Eratóstenes podem se apoiar em conceitos simples.

Observe que quando estamos realizando uma atividade, muitas vezes não a associamos a algum conhecimento matemático. Embora a matemática muitas vezes apareça de forma discreta no nosso dia-a-dia, ela ocupa um papel significativo em quase tudo o que fazemos, e é importante darmos o devido a matemática.

Na seção seguinte, veja uma aplicação interessante de alguns conceitos matemáticos contido em um painel utilizado em propagandas.

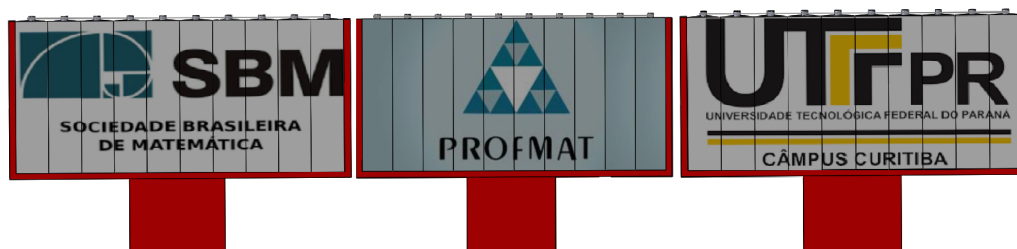
## 2.2 A GEOMETRIA NO OUTDOOR

A geometria também está presente na propaganda. Quem nunca viu anúncios colocados em grandes painéis? Verificando um pouco da matemática contida nestes painéis. Nesta seção, será trabalhado com algumas propriedades de triângulos, circunferência circunscrita, noção de tangência e Teorema de Pitágoras.

Atualmente, painéis digitais estão cada vez mais comuns nas ruas, mas até pouco tempo os painéis giratórios podiam ser facilmente encontrados. Vejamos um mesmo outdoor que contém três anúncios diferentes, como na Figura 10 e Figura 11.

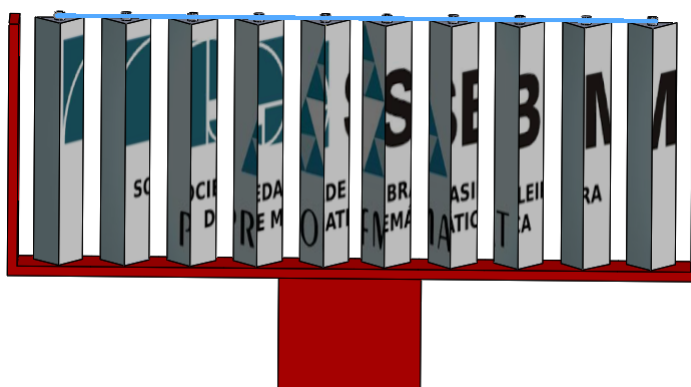


Figura 10 – Painéis.



Fonte: Autor.

Figura 11 – Painel formado por prismas triangulares.



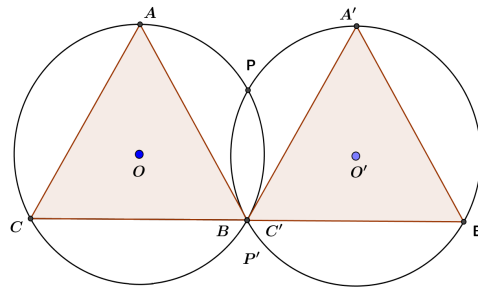
Fonte: Autor.

Este painel é formado por diversos prismas triangulares enfileirados, em que todos giram ao mesmo tempo, na mesma velocidade e no mesmo sentido em torno de um eixo, que passa pelo centro dos prismas e, quando todas as faces estão alinhadas, exibem um dos anúncios.

Visto de cima, tem-se a visão de vários triângulos equiláteros, em que cada um possui dois de seus vértices encostados nos vértices dos triângulos vizinhos, salvo os triângulos que estão nas extremidades. Desta forma, quando todas as faces do painel estão alinhadas, é observado uma reta que contém um dos lados de cada triângulo, conforme Figura 12.

Pode-se observar que o giro de um triângulo descreve a circunferência circunscrita a ele. Supondo que os prismas triangulares giram ao mesmo tempo no mesmo sentido e na mesma velocidade, como os triângulos são equiláteros, eles não se chocam, ou seja, não possuem ponto de interseção até que outros dois vértices fiquem lado a lado novamente. Para verificar isso matematicamente de maneira simplificada, considere que os vértices que estão lado a lado coincidem, como na Figura 12.

Figura 12 – Rotação dos triângulos.



Fonte: Autor.

Mostrando que, ao girar dois triângulos adjacentes, eles irão se chocar apenas em dois pontos, a saber, os pontos de interseção das circunferências circunscritas.

Considere os triângulos equiláteros  $ABC$  e  $A'B'C'$  e as circunferências circunscritas a eles, como na Figura 12. Como os ângulos internos dos triângulos medem  $60$  graus cada, os arcos menores  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{AC}$ ,  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{A'B'}$ ,  $\widehat{A'C'}$  e  $\widehat{B'C'}$  medem  $120$  graus cada. Pois sejam  $P$  e  $P'$  os pontos de interseção entre estas duas circunferências.

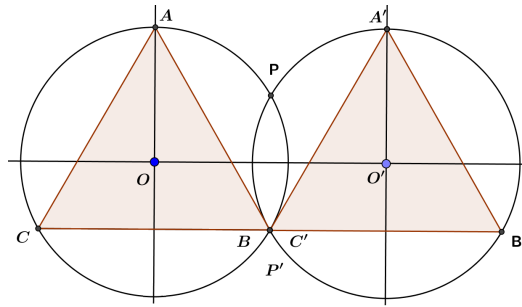
Note que basta mostrar que o triângulo  $OPP'$  é equilátero. Uma vez que, como o arco  $\widehat{AP'} = \widehat{AB} = 120^\circ$ , teremos que  $\widehat{AP}$  será  $60^\circ$ , pois desta forma, quando o vértice  $A$  sair da posição que está deslocando-se no sentido horário, ele percorrerá um arco de  $60^\circ$  até  $P$ . O mesmo ocorre com o vértice  $C'$ , demonstrando que os vértices dos triângulos, quando rotacionados, se encontram apenas nos pontos  $P$  e  $P'$ . Na verdade, estes serão os únicos pontos em que os triângulos irão se encontrar.

Isto pode ser fácil para o aluno visualizar, principalmente se ele contar com a ajuda de um aplicativo matemático com ferramentas de interação dinâmica, em que ele consiga fazer os triângulos girarem e verificar os pontos de interseção. No Apêndice B será disponibilizado uma sequência para a construção dinâmica desta situação usando o GeoGebra.

Ainda assim, os conceitos de geometria são fundamentais para argumentar a veracidade dos fatos.

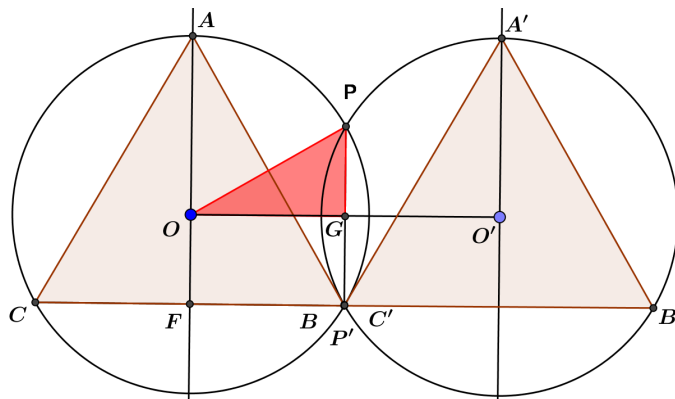
Assumindo que os vértices  $B$  e  $C'$  coincidem com  $P'$ , traçamos um eixo passando pelo centro de cada circunferência, conforme a Figura 13. É fácil ver que o eixo que passa por  $O$  e  $O'$  é paralelo aos lados  $BC$  e  $B'C'$  pois os lados estão alinhados (pertencem a uma mesma reta) e a distância de  $O$  à  $BC$  é a mesma que a de  $O'$  à  $B'C'$ , que é de um terço da altura do triângulo equilátero. Baixando uma perpendicular de  $A$  e uma de  $A'$  até os lados opostos, elas passarão pelos pontos  $O$  e  $O'$ , respectivamente.

Figura 13 – Rotação dos triângulos.



Fonte: Autor.

Trace o segmento  $PP'$ , conforme Figura 14. Observe que o segmento  $OO'$  é perpendicular a este segmento e cada um passa pelo ponto médio do outro. Seja  $G$  o ponto de interseção entre os segmentos  $PP'$  e  $OO'$ . Desta forma temos o triângulo retângulo  $OPG$ . Primeiro será calculado a altura do triângulo  $ABC$  em função de seu lado. Seja  $L$  a medida do lado e  $H$  a altura do triângulo  $ABC$ , com  $L, H > 0$ .

Figura 14 – Triângulo retângulo  $OPG$ .

Fonte: Autor.

Calculando a altura do triângulo  $AFB$ , temos:

$$\begin{aligned}
 L^2 &= \left(\frac{L}{2}\right)^2 + H^2 \\
 H^2 &= L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\
 H^2 &= L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \\
 H &= \frac{L\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Observe que o centro  $O$  da circunferência é também o baricentro do triângulo  $ABC$ , assim

temos  $\overline{AO} = \frac{2H}{3}$ . Mas  $\overline{AO}$  também representa o raio da circunferência, então

$$\overline{AO} = R = \frac{2H}{3}. \quad (2.2)$$

Substituindo (3.1) em (3.2), obtemos

$$R = \frac{2L\sqrt{3}}{3} \Rightarrow L = \sqrt{3}R.$$

Observe que

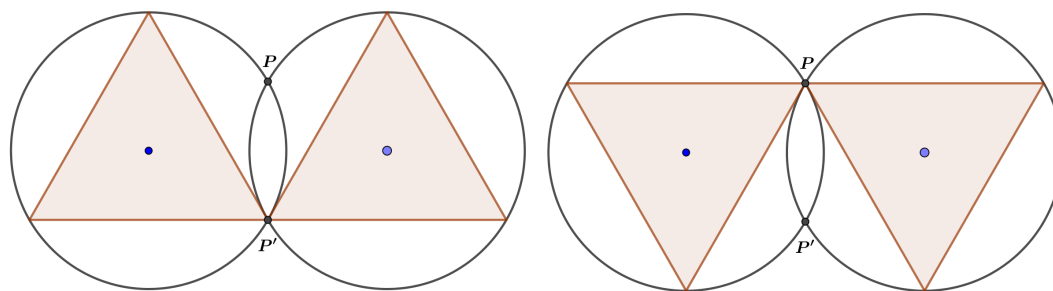
$$\frac{L}{2} = \frac{\sqrt{3}R}{2}.$$

Portanto, no triângulo retângulo  $OPG$ , temos:

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)^2 + \overline{PG}^2 \\ \overline{PG}^2 &= R^2 - \left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)^2 \\ \overline{PG}^2 &= R^2 - \frac{3R^2}{4} \\ \overline{PG}^2 &= \frac{R^2}{4} \\ \overline{PG} &= \pm\sqrt{\frac{R^2}{4}} \\ \overline{PG} &= \frac{R}{2}. \end{aligned}$$

Como  $\overline{PP'} = 2\overline{PG}$ , temos que  $\overline{PP'} = R$ . Isto mostra que o triângulo  $OPP'$  é equilátero, portanto o arco  $\widehat{PP'} = 60^\circ$ , e conseqüentemente, o arco  $\widehat{AP} = 60^\circ$ . Desta forma, quando o vértice  $A$  sair da posição em que se encontra e percorrer um arco de  $60^\circ$ , ele se encontrará no ponto  $P$  com o vértice  $C'$  do outro triângulo. E quando  $A$  percorrer um arco de  $120^\circ$ , ele se encontrará com  $B'$  no ponto  $P'$ . Os demais pontos seguem o mesmo ciclo, mostrando que os vértices dos triângulos só estarão simultaneamente em  $P$  e  $P'$ .

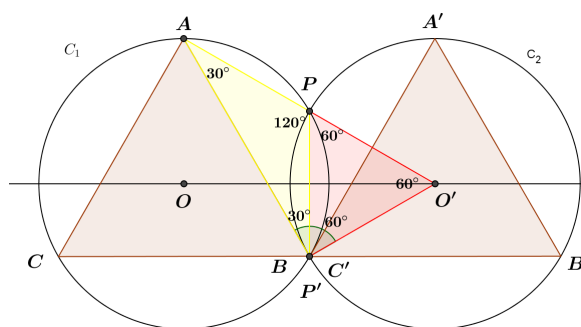
Portanto os dois triângulos congruentes e consecutivos, só irão se tocar nos pontos  $P$  e  $P'$ , quando ambos girarem ao mesmo tempo no mesmo sentido horário e com a mesma velocidade, como pode ser observado na Figura 15.

Figura 15 – Triângulos com tangencia no ponto  $P$  e  $P'$ .

Fonte: Autor.

Mas será que pode haver outros pontos dos triângulos, diferentes dos vértices, que se chocam durante a rotação? Se existirem tais pontos, eles devem se encontrar na região compreendida na interseção das duas circunferências. Mas, de fato, a resposta é não.

Observe na Figura 16 que o triângulo  $O'PP'$  também é equilátero, logo o ângulo  $O'P'P$  mede  $60^\circ$ . Além disso, no triângulo  $APP'$  temos  $\widehat{AP'P} = 120^\circ$ , pois o arco maior  $AP'$  mede  $240^\circ$  e como  $\overline{AP} = \overline{P'P}$  o triângulo  $APP'$  é isósceles, assim cada ângulo da base  $\overline{AP'}$  mede  $30^\circ$ . Sendo assim, o ângulo  $\widehat{AP'O'} = 90^\circ$ , o que mostra que a reta que passa pelo segmento  $\overline{AB}$  é tangente à circunferência a sua direita em  $P'$ ; O mesmo ocorrerá no ponto  $P$  quando o triângulo rotacionar mais  $60^\circ$  em sentido horário. Salvo nesses pontos, o segmento  $\overline{AB}$  não terá interseção com a circunferência adjacente durante a rotação.

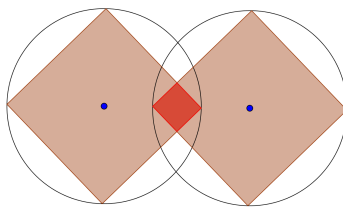
Figura 16 – Segmento  $AB$  tangente a circunferência  $C_2$  em  $P'$ .

Fonte: Autor.

Acabamos de ver que com prismas triangulares é possível se fazer um out-door com 3 faces. Então porque não aumentar o número de lados dos prismas para se ter mais anúncios?

Isto não seria possível se os prismas tivessem uma base quadrada por exemplo, pois ao efetuar o giro eles se chocariam, como mostra a Figura 17.

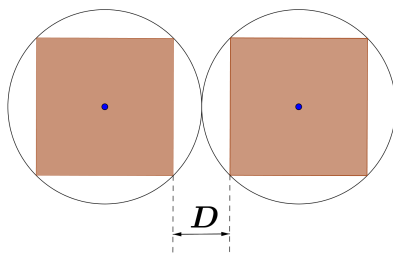
Figura 17 – Rotação dos quadrados se intersectando.



Fonte: Autor.

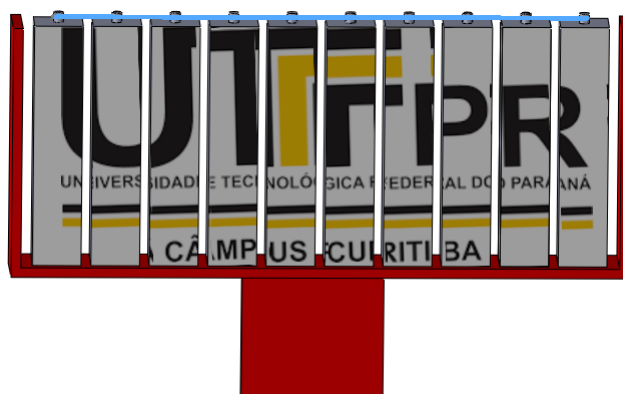
Desta forma dois quadrados sucessivos devem estar a uma certa distância  $D$  um do outro, a menor seria se considerássemos que as circunferências circunscritas aos quadrados são tangentes. Mas isso prejudicaria a leitura do cartaz devido ao espaço entre os prismas, como ilustra as Figuras 18 e 19.

Figura 18 – Rotação dos quadrados sem haver interseção.



Fonte: Autor.

Figura 19 – Painel formado por prismas de base quadrada.



Fonte: Autor.

Para outros prismas, formados por bases regulares com mais lados, a leitura seria ainda mais prejudicada, pois os anúncios se misturariam. Vejamos como exemplo o pentágono. Sabendo que a soma ângulos internos de um polígono regular com  $L$  lados é dado por:

$$S_L = (L - 2)180^\circ.$$

Para um polígono de 5 lados, temos que cada ângulo interno mede:

$$S_5 = \frac{(5 - 2)180^\circ}{5} = 108^\circ.$$

Como o pentágono tem ângulos internos obtusos, quando olha-se o anúncio de frente é possível ver três faces do prisma, como pode ser observado na Figura 20.

Figura 20 – Painel formado por prismas pentagonais.



Fonte: Autor.

A conclusão que obtida é que os ângulos agudos do triângulo, só deixam uma face do prisma visível. Os ângulos retos do quadrado deixam uma face visível, mas com um espaço entre os prismas, enquanto ângulos obtusos do pentágono, deixam três faces visíveis. Como os demais polígonos regulares possuem ângulos internos obtusos (basta calculá-los pela fórmula usada anteriormente), concluímos que o prisma triangular é o único que serve para este painel, pois quanto maior o número de lados, maior o valor do ângulo interno.

## 2.3 SIMETRIA

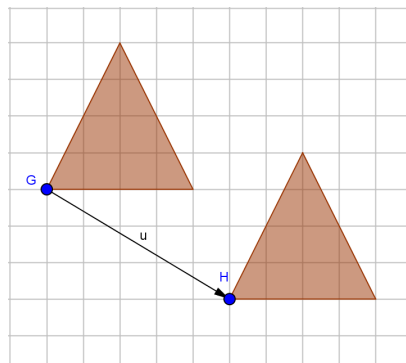
Apresentaremos agora o conceito de simetria, com algumas aplicações na atualidade, pois a maioria dos livros didáticos trazem a simetria sem aplicações práticas.

Simetria é a conservação de uma forma através de um deslocamento, preservando suas características tais como comprimento dos lados, distância, ângulos, tipos e tamanhos. Isto pode ocorrer através de um ponto, de uma reta ou um plano. As técnicas usadas neste procedimento são chamadas de transformações isométricas e cada uma gera um diferente tipo de simetria. As transformações isométricas incluem: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante.

- **Translação:** é o termo usado para deslocar formas, sendo necessárias duas medidas: a direção (que pode ser medida em graus) e a magnitude (que pode ser medida em alguma unidade de comprimento).

**Exemplo 2.5.** Translação do triângulo.

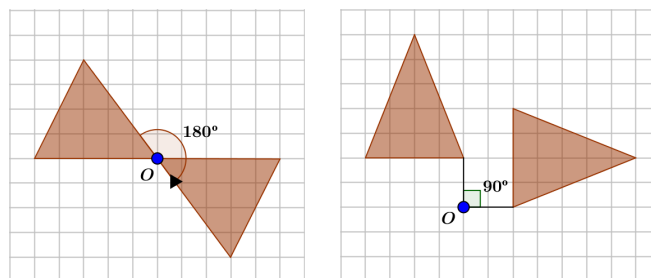
Figura 21 – Triângulo transladado.



Fonte: Autor.

- Rotação: rotacionar um objeto significa girá-lo ao redor de um ponto, chamado de centro. Cada rotação tem um centro e um ângulo.

**Exemplo 2.6.** Rotacionando o triângulo em torno do centro  $O$  sob ângulos de  $180^\circ$  e  $90^\circ$ .

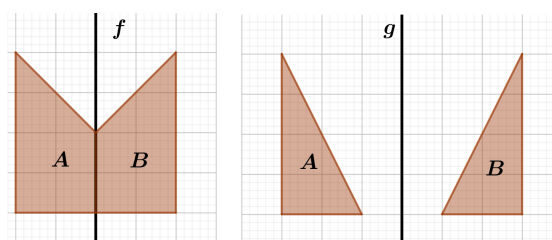
Figura 22 – Triângulos rotacionados  $90^\circ$  graus em torno do ponto  $O$ .

Fonte: Autor.

- Reflexão: refletir um objeto significa gerar sua imagem como num espelho. Cada reflexão tem um eixo, chamado de eixo de simetria que divide a figura em duas partes iguais ou congruentes estando a mesma distância deste eixo.

**Exemplo 2.7.** A Figura A e sua simétrica B, em relação aos eixos  $f$  e  $g$ .

Figura 23 – Triângulos refletidos.



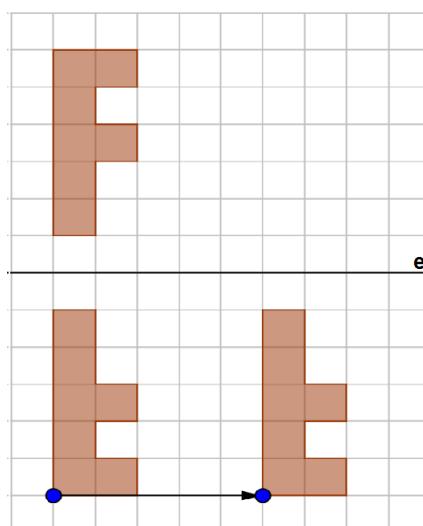
Fonte: Autor.



- Reflexão Deslizante: uma reflexão com deslizamento corresponde a uma reflexão com uma translação ao longo do sentido do eixo. As reflexões com deslizamento são os únicos tipos de simetria que envolvem mais de uma etapa.

**Exemplo 2.8.** Imagem refletida em relação a um eixo  $e$ , depois transladada.

Figura 24 – Imagem refletida e transladada.



Fonte: Autor.

Com estas definições informais das isometrias, um aluno do ensino básico conseguirá compreendê-las e identificá-las quando necessário. A percepção visual de cada uma delas faz com que o aprendizado seja facilmente assimilado.

Tendo o conhecimento de funções, uma definição para o conceito de isometrias pode ser encontrada em (LIMA, 2007). Vamos apresentá-las a seguir.

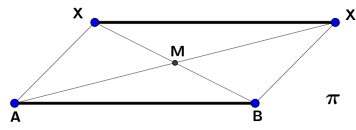
**Definição 2.9.** Uma *isometria* no plano  $\Pi$  é uma função  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que preserva distâncias. Dados quaisquer pontos  $X, Y \in \Pi$ , pondo  $X' = T(X)$  e  $Y' = T(Y)$ , tem-se  $d(X', Y') = d(X, Y)$ , sendo  $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função distância.

- Note que a função identidade  $T(x) = x$  é uma isometria.

Existem apenas quatro tipos de isometrias  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  no plano  $\Pi$ , além da função identidade que são: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante.

**Definição 2.10.** Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos de um plano  $\Pi$ . A *translação*  $T_{AB} : \Pi \rightarrow \Pi$  é a função assim definida: dado  $X \in \Pi$ , sua imagem  $X' = T_{AB}(X)$  é o quarto vértice do paralelogramo que tem  $AB$  e  $AX$  como lados.

Figura 25 – Ilustração da função translação.



Fonte: (LIMA et al., 2006).

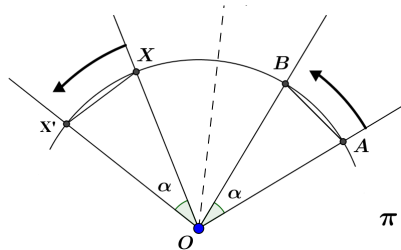
**Definição 2.11.** *Sejam  $O$  um ponto tomado do plano  $\Pi$  e  $\alpha = \widehat{AOB}$  um ângulo de vértice  $O$ . A **rotação** de ângulo  $\alpha$  em torno do ponto  $O$  é a função  $\rho_{o,\alpha} : \Pi \rightarrow \Pi$  assim definida:  $\rho_{o,\alpha}(O) = O$  e, para todo ponto  $X \neq O$  em  $\Pi$ ,  $\rho_{o,\alpha}(X) = X'$  é o ponto do plano  $\Pi$  tal que*

$$d(X, O) = d(X', O) \quad X\widehat{O}X' = \alpha$$

e o “sentido de rotação” de  $A$  para  $B$  é o mesmo de  $X$  para  $X'$ .

- A condição  $X\widehat{O}X' = \alpha$ , em termos geométricos, se tomarmos os pontos  $A$  e  $B$  tais que  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OX} = \overline{OX'}$  então  $\overline{AB} = \overline{XX'}$ .

Figura 26 – Ilustração da função rotação.

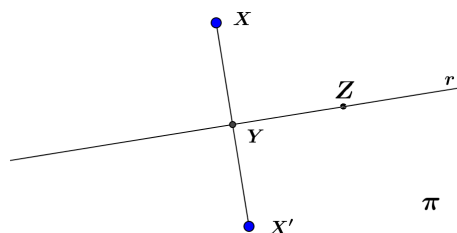


Fonte: (LIMA et al., 2006).

**Definição 2.12.** *Seja  $r$  uma reta no plano  $\Pi$ . A **reflexão** em torno da reta  $r$  é a função  $R_r : \Pi \rightarrow \Pi$  assim definida:  $R_r(Z) = Z$  para todo  $X \in r$  e, para  $X \notin r$ ,  $R_r(X) = X'$  é tal que a mediatriz do segmento  $XX'$  é a reta  $r$ .*

- Assim seja  $Y$  o pé da perpendicular baixada de  $X$  sobre  $r$ . Então  $Y$  é o ponto médio do segmento  $XX'$ .

Figura 27 – Ilustração da função reflexão.



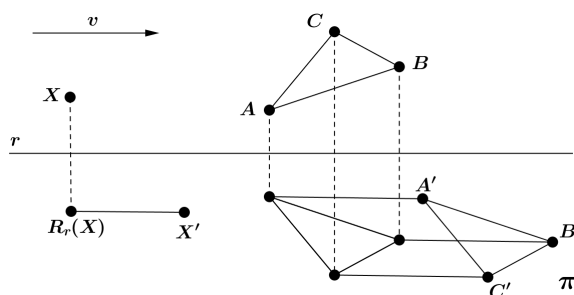
Fonte: (LIMA et al., 2006).

**Definição 2.13.** Sejam  $v = \overline{AB}$  um vetor não-nulo e  $r$  uma reta paralela a  $v$  no plano  $\Pi$ .

A **reflexão com deslizamento**, determinada pelo vetor  $v$  e pela reta  $r$ , é a isometria  $T = R_r \circ T_v : \Pi \rightarrow \Pi$ , obtida fazendo à reflexão  $R_r$  e a seguir a translação  $T_v$ . Tanto a reflexão quanto a translação  $T_v$ , não possuem pontos fixos.

- Seja um ponto  $X \notin r$  e uma perpendicular baixada de  $X$  sobre  $r$ , assim  $r$  passa pelo ponto médio do segmento  $XR_r(X)$ , a extremidade do vetor  $v = R_r(X)X'$ .
- Seja um triângulo  $ABC$ , aplicando em cada vértice deste triângulo a função  $T = R_r \circ T_v$  como no item anterior, temos o triângulo  $A'B'C'$ .

Figura 28 – Ilustração da função reflexão com deslizamento.



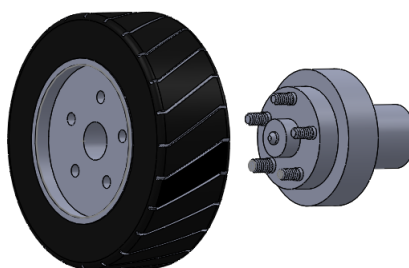
Fonte: (LIMA et al., 2006).

## 2.4 APLICAÇÕES DA SIMETRIA

Duas aplicações bem simples do uso da simetria rotacional no dia-a-dia pode ser observada a seguir.

**Exemplo 2.14.** Veja a roda de um veículo por exemplo que possui 5 furos, cada um dos furos é encaixado em um pino não importando qual furo vai em cada pino, como na Figura 29.

Figura 29 – Roda e eixo.



Fonte: Autor.

Os furos são localizados de tal modo que a roda tem simetria de  $72^\circ$  rotacional. De fato, como os furos estão todos à mesma distância do centro e distam igualmente entre si, basta fazer

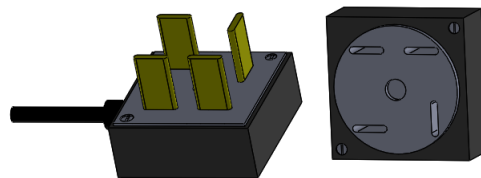
$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ,$$

ou seja, se a roda for encaixada no pino seguinte, ela vai girar  $72^\circ$  e terá novamente o encaixe desejado.

Mas o que aconteceria se não existisse essa simetria no encaixe dos pinos? Não havendo simetria entre os pinos do eixo e os furos roda, não seria possível um encaixe entre os mesmos, ou seja, não existiria equilíbrio para a sustentação da roda.

**Exemplo 2.15.** Vejamos o plugue de telefone e a tomada, ilustrado na Figura 30 e 31.

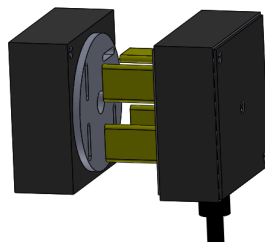
Figura 30 – Plugue e tomada de telefone.



Fonte: Autor.

Podemos observar que, da maneira que os pinos do plugue estão dispostos, o mesmo não apresenta nenhuma simetria rotacional, exceto para  $360^\circ$ . Desta forma, só há uma posição em que os pinos se encaixam na tomada permitindo somente a conexão desejada.

Figura 31 – Plugue e tomada de telefone.



Fonte: Autor.

Veja na seção seguinte um outro tipo de simetria envolvendo outro conteúdo matemático.

## 2.5 ROTAÇÃO DE FIGURAS PLANAS ENVOLVENDO MATRIZES

Nesta seção, apresentaremos a rotação de figuras associada a outro conteúdo matemático apresentado no ensino médio. Usaremos o conhecimento de matrizes, plano cartesiano e um

pouco de trigonometria para mostrar uma outra aplicação de matrizes que não é usualmente abordada na escola.

É conhecido da Álgebra Linear a matriz de rotação, mas não é uma abordagem feita no ensino médio no conteúdo de matrizes. No trabalho de Egidio (COSTA FILHO, 2013), é feita uma abordagem sobre este conteúdo com conhecimentos de matemática apenas de ensino médio. Lá é mostrado que, para rotacionar um polígono ou uma estrutura definida por pontos e segmentos de reta em torno da origem de um sistema cartesiano  $OXY$ , basta efetuarmos a multiplicação entre a matriz de rotação

$$M_r = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

pela matriz que armazena os vértices do ponto a ser rotacionado, em que  $\theta$  é o ângulo de rotação:

$$M_v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A matriz produto dessa multiplicação é a matriz que armazena as coordenadas dos vértices da estrutura após a rotação:

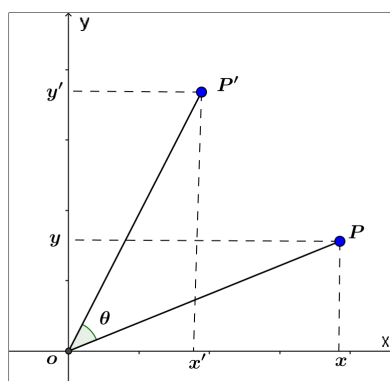
$$M_{\text{Produto}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Assim, dado um ponto qualquer  $P = (x, y)$  no sistema de coordenadas, para determinar  $P' = (x', y')$  basta fazer

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

A Figura 32, ilustra a rotação.

Figura 32 – Ponto  $P$  rotacionado um ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário.



Fonte: Autor.

- Caso deseja-se rotacionar vários vértices ao mesmo tempo, basta

$$\begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & \cdots & x'_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

**Exemplo 2.16.** O ponto  $\bar{P} = (1, 2)$  sofreu uma rotação de  $60^\circ$  em torno da origem. Sabendo que a rotação ocorreu no sentido anti-horário, determine a nova posição do ponto  $\bar{P}$ .

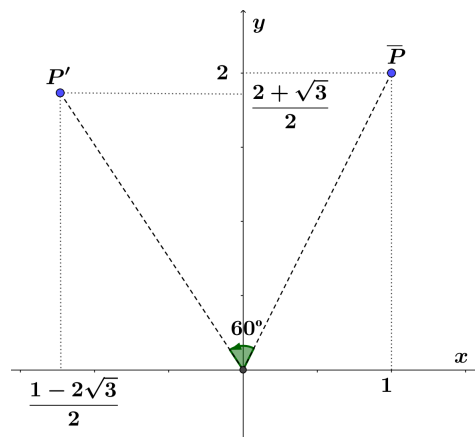
**Resolução:**

Após a rotação de  $60^\circ$ , o ponto  $\bar{P} = (x, y)$  se transforma no ponto  $P' = (x', y')$ . Vamos determiná-lo usando a multiplicação de matrizes. Temos que  $\bar{P} = (1, 2)$  e o ângulo  $\theta = 60^\circ$ , por (3.3) temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\operatorname{sen} 60^\circ \\ \operatorname{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo a nova coordenada de  $\bar{P} = (1, 2)$  é  $P' = \left( \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2}, \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right)$ . Veja a ilustração da rotação sofrida pelo ponto  $\bar{P}$  na Figura 33.

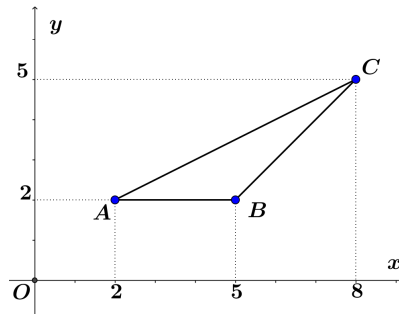
Figura 33 – Rotação do ponto  $\bar{P}$  em torno da origem.



Fonte: Autor.

□

**Exemplo 2.17.** Determine a posição do triângulo  $ABC$  da Figura 34 após uma rotação no sentido anti-horário de  $90^\circ$  em torno do centro  $O$ .

Figura 34 – Triângulo  $ABC$ .

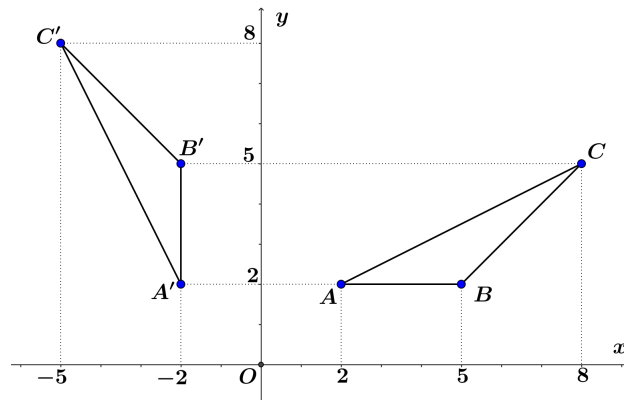
Fonte: Autor.

**Resolução:**

Temos que  $A = (2, 2)$ ,  $B = (5, 2)$ ,  $C = (8, 5)$  e que  $\theta = 90^\circ$ . Sejam  $A' = (x', y')$ ,  $B' = (x'', y'')$  e  $C' = (x''', y''')$  as novas coordenadas de  $A, B$  e  $C$  após a rotação, respectivamente. Agora usando a multiplicação de matrizes obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\operatorname{sen} 90^\circ \\ \operatorname{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, temos que  $A' = (-2, 2)$ ,  $B' = (-2, 5)$  e  $C' = (-5, 8)$ . A nova posição do triângulo  $ABC$  é o triângulo  $A'B'C'$  que pode ser visto na Figura 35.

Figura 35 – Triângulo  $ABC$  rotacionado  $90^\circ$ .

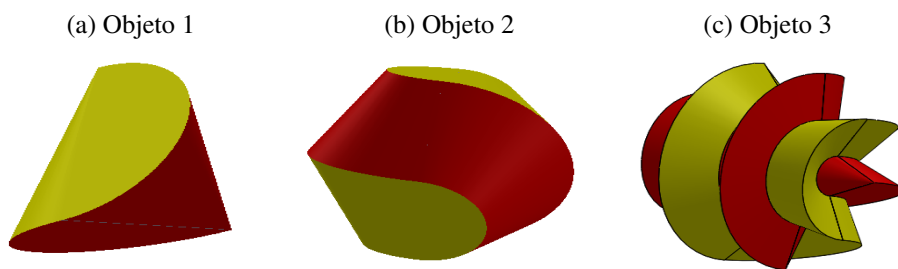
Fonte: Autor.

## 2.6 QUEBRA DE SIMETRIA

Nesta seção, será mostrado como a partir de alguns polígonos que possuem eixo de simetria é possível construir sólidos interessantes.

Alguns objetos apesar de apresentarem um padrão construção não apresentam evidências simétricas. A seguir, veja alguns sólidos, onde através de uma rotação, houve uma quebra de simetria dos mesmos. Observe na Figura 36, alguns destes sólidos.

Figura 36 – Formas montadas a partir de uma rotação.

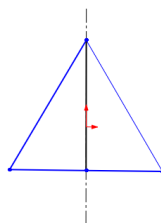


Fonte: Autor.

Estes sólidos foram construídos a partir de polígonos regulares, rotacionados em torno de um de seus eixos de simetria. Logo após, foram cortados ao meio e rotacionando apenas uma de suas metades, foram encaixados novamente. A quebra de simetria ocorreu com a rotação de uma de suas metades. Para entender um pouco como isso funciona, veja a construção dos dois primeiros objetos da Figura 36.

**Objeto 1:** Dado um triângulo equilátero, trace um eixo de simetria, conforme Figura 37.

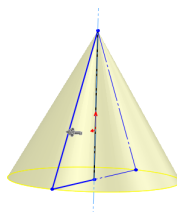
Figura 37 – Triângulo equilátero e seu eixo de simetria.



Fonte: Autor.

Rotacionando  $180^\circ$ , em torno de seu eixo de simetria, tem-se um cone, conforme Figura 38.

Figura 38 – Cone gerado pela rotação do triângulo equilátero.

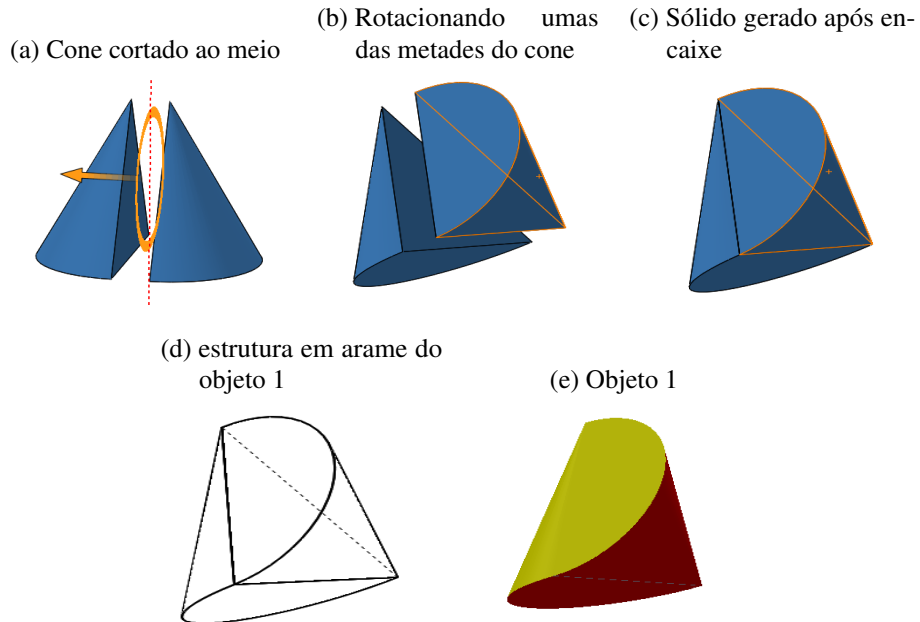


Fonte: Autor.



Corte o cone ao meio e rotacione  $120^\circ$  graus uma das metades, depois encaixe novamente, para obter um novo sólido. A ilustração na Figura 39 descreve os passos.

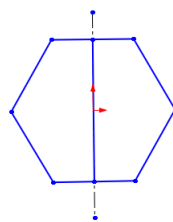
Figura 39 – Construção do objeto 1.



Fonte: Autor.

**Objeto 2:** Dado um hexágono regular, trace um eixo de simetria, conforme Figura 40. Observe que alguns polígonos, assim como o hexágono, possuem mais de um eixo de simetria e dependendo do eixo que escolhido o objeto assume uma nova forma.

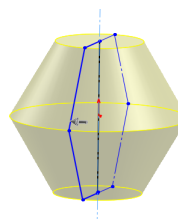
Figura 40 – hexágono regular e seu eixo de simetria.



Fonte: Autor.

Rotacionando  $180^\circ$  em torno de seu eixo de simetria, tem-se um sólido, conforme Figura 41.

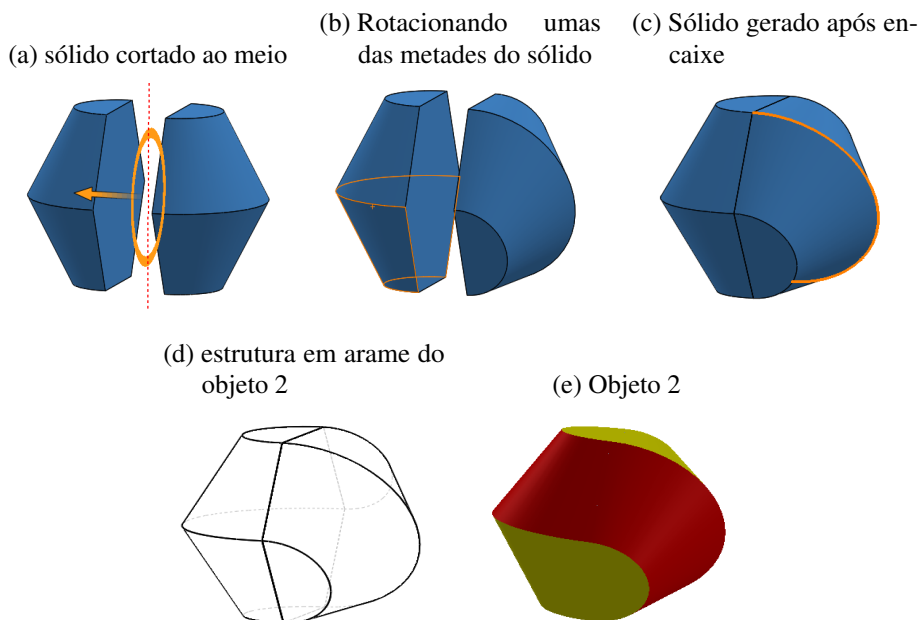
Figura 41 – Sólido gerado pela rotação do hexágono regular.



Fonte: Autor.

Cortando o sólido ao meio e rotacionando  $60^\circ$  graus uma das metades, depois encaixe novamente, para obter um novo sólido. A ilustração na Figura 42a descreve os passos.

Figura 42 – Construção do objeto 2.



Fonte: Autor.

Estes, e outros sólidos diferentes, podem ser observados em (SIMÕES, 2017).

## 2.7 QUEBRA-CABEÇA

Nesta seção será visto o uso de quebra-cabeças, como recurso didático, não apenas como motivação para o desenvolvimento do cognitivo, mas como uma ferramenta para construção do conhecimento sobre as formas geométricas.

As noções geométricas são fundamentais para o desenvolvimento das formas e das medidas. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental:

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (PCN 1998, p.51).

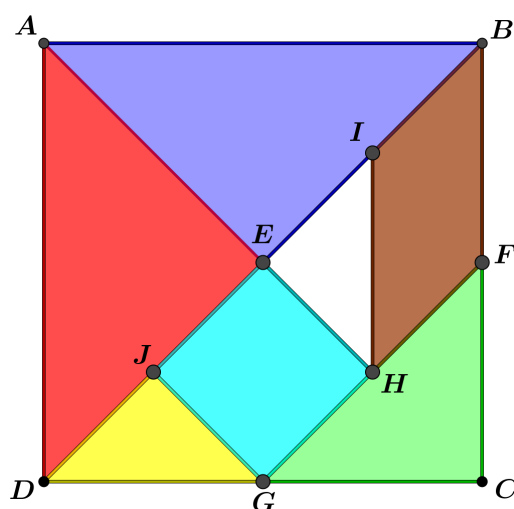
Uma das muitas formas de despertar a criatividade e a imaginação dos alunos é através de quebra-cabeças. Uma vez que os estudantes exploram as peças e os diferentes tipos de encaixe. Esta atividade além de melhorar a coordenação motora e a visualização geométrica dos alunos, permite ao professor trabalhar vários conceitos geométricos, tornando a aprendizagem mais significativa.

A seguir veja dois tipos de quebra-cabeças, que podem ser usados em sala de aula como instrumentos de aprendizagem.

## 2.8 TANGRAM

O Tangram é um quebra-cabeça de origem chinesa, composto de 2 triângulos grandes, 2 triângulos pequenos, 1 triângulo médio, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Conforme a Figura 43.

Figura 43 – Tangram.



Fonte: Autor.

Não existe registros históricos que revelem seu verdadeiro significado, porém a mais aceita está relacionada à dinastia T'ang (618-906) e significa literalmente, quebra-cabeça chinês (SOUZA, 1997, p. 2).

Veja um caminho para sua construção seguindo os passos descritos a seguir, que podem ser acompanhados na Figura 61.

1º passo: Considere um quadrado ABCD.

2º Passo: Trace um segmento de reta que que une os vértices D e B, dividindo o quadrado em dois triângulos iguais.

3º Passo: Encontre o ponto médio do segmento de reta BD e marque o ponto E.

4º Passo: Agora trace um segmento de reta que que une os vértices A e E, formando três triângulos.

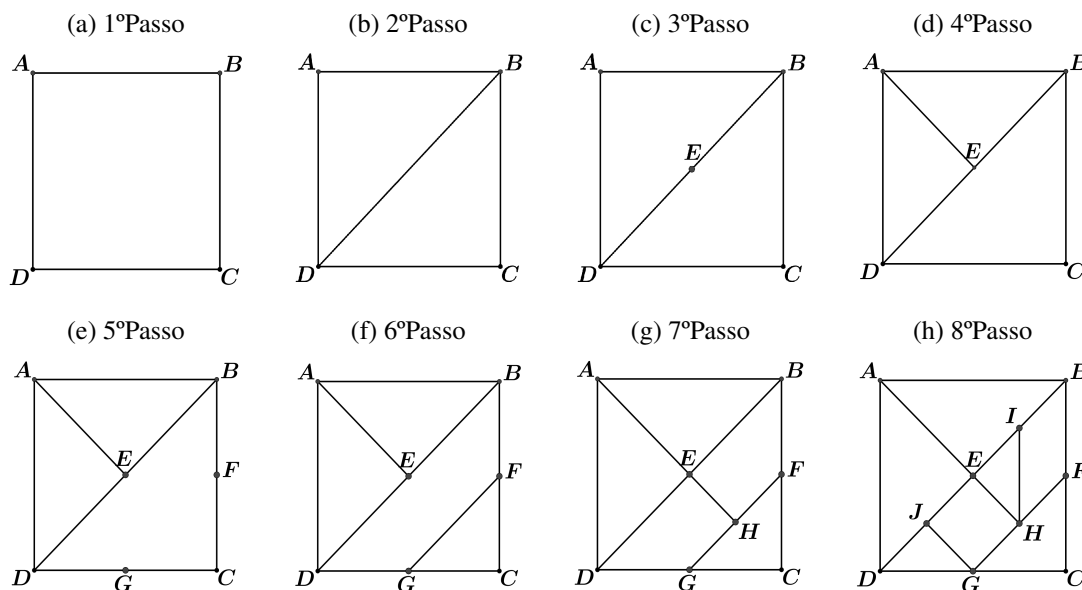
5º passo: Encontre os pontos médios dos segmentos BC e CD e marque os pontos F e G, respectivamente.

6º Passo: Agora trace um segmento de reta do ponto F ao ponto G.

7º Passo: Prolongue o segmento AE até FG e marque o ponto H sobre FG.

8º Passo: Trace um segmento de reta paralelo ao segmento BF passando por H e marque o ponto I sobre BD. Trace um segmento paralelo a EH passando por G e marque o ponto J sobre BD.

Figura 44 – Passos para construção do Tangram.



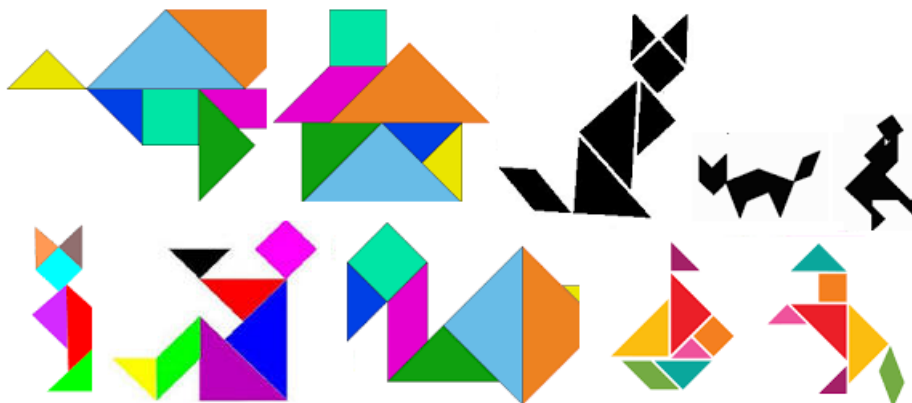
Fonte: Autor.

Muitas atividades podem ser propostas pelo professor com o uso do Tangram, pois com as sete peças é possível criar e montar muitas figuras, como, animais, plantas, objetos, letras, números, figuras geométricas e outras como pode ser visto na Figura 45.

Muitas destas atividades podem ser uma excelente estratégia para promover a reflexão dos alunos sobre alguns tópicos de geometria como: identificação, comparação, descrição, classificação e representação de figuras planas, além da exploração de transformações geométricas por meio de decomposição e composição de figuras, bem como a resolução de problemas através de padrões geométricos.

O professor também pode trabalhar o conceito de números irracionais e frações de cada peça em relação ao quebra cabeça todo.

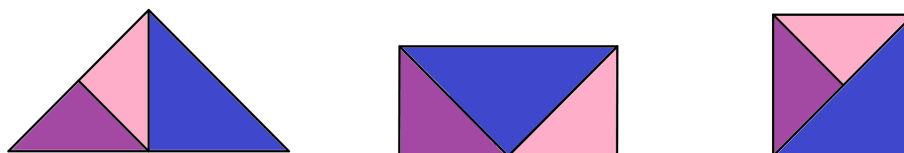
Figura 45 – Imagens montadas a partir do Tangram.

Fonte: <<http://www.espacoeducar.net/2011/07/sugestoes-e-ideias-para-montagem-do.html>>.

Veja algumas atividades de composição de formas e cálculo de área que podem ser trabalhadas com o uso do Tangram.

**Exemplo 2.18.** É possível construir um triângulo, um retângulo e um quadrado, usando os dois triângulos menores e o triângulo médio, conforme Figura 46:

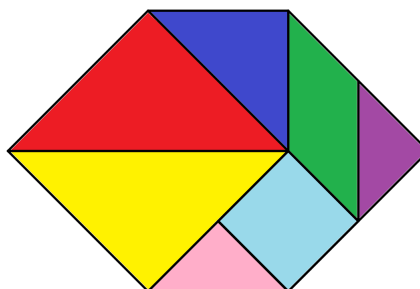
Figura 46 – Triângulo, retângulo e quadrado montados a partir do Tangram.



Fonte: Autor.

**Exemplo 2.19.** Dado o hexágono montado com as sete peças do Tangram, conforme ilustrado na Figura 47, calcule a área deste hexágono sabendo que a área do menor triângulo é  $\frac{1}{4}\text{cm}^2$ .

Figura 47 – Hexágono montado a partir do Tangram.

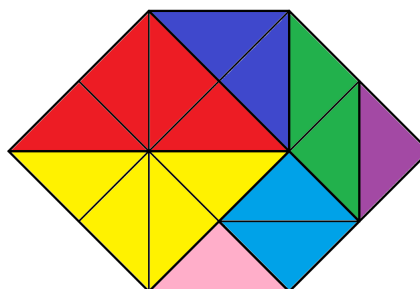


Fonte: Autor.

### Resolução:

Usando o triângulo menor, podemos ver quantas vezes ele cabe em cada peça como mostra a Figura 48.

Figura 48 – Hexágono montado a partir do Tangram.



Fonte: Autor.

Observe que o triângulo menor cabe 16 vezes dentro do hexágono. Assim, a área do hexágono será:

$$16 \times \frac{1}{4} = 4\text{cm}^2.$$

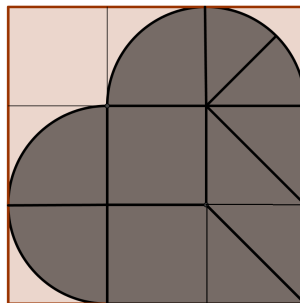
A seguir apresentamos outro quebra-cabeça um pouco diferente. Este pode ser trabalhado não só com figuras poligonais, mas também com circunferência e setor circular.

## 2.9 CORAÇÃO EM PEDAÇOS

Este quebra-cabeças tem como principal objetivo conhecer algumas formas planas e desenvolver o raciocínio lógico na construção de figuras, que possuem ou não eixo de simetria. Veja a construção do quebra-cabeças, que será chamado de coração em pedaços, como ilustrado na Figura 49.

- 1 - Considere um quadrado de 30cm;
- 2 - Decomponha o quadrado em nove quadrados menores;
- 3 - Faça as marcações conforme Figura 49;

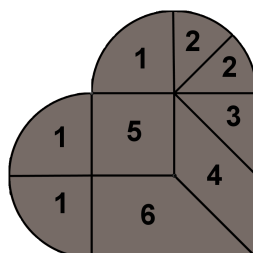
Figura 49 – Coração em pedaços.



Fonte: Autor.

- 4 - O coração em pedaços é montado através das partes hachuradas no cinza escuro;
- 5 - Separe as nove peças como ilustrado na Figura 50.

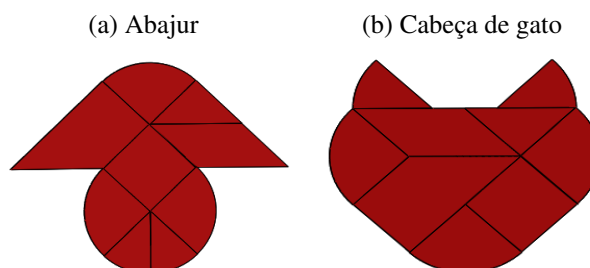
Figura 50 – Coração em pedaços.



Fonte: Autor.

Agora com as 9 peças do coração, este pode se transformar em outras formas, como por exemplo o abajur e a cabeça de gato, ilustrada na Figura 51. Note que possuem apenas um eixo de simetria.

Figura 51 – Formas montadas a partir do coração.



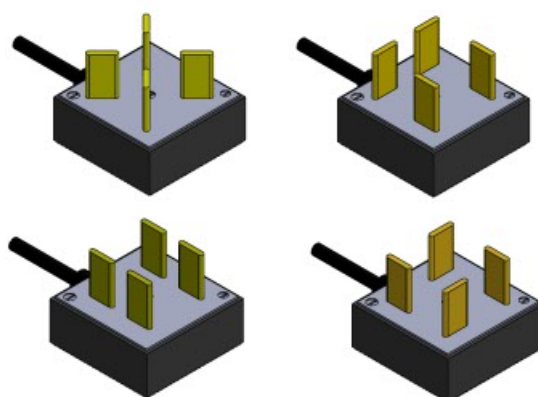
Fonte: Autor.

## 2.10 EXERCÍCIOS

Nesta seção será apresentado alguns exercícios relacionados a simetria e aos quebra-cabeças. As soluções encontram-se no Apêndice A.

1. Qual é a simetria rotacional e quantas posições de encaixe cada plugue a seguir possui?

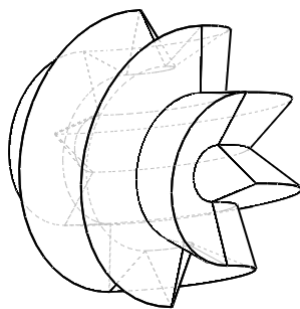
Figura 52 – Plugues.



Fonte: Autor.

2. Determine a nova posição do retângulo  $ABCD$ . Sendo  $A = (2, 1)$ ,  $B = (3, 1)$ ,  $C = (3, 4)$  e  $D = (2, 4)$ , após uma rotação de  $30^\circ$  no sentido anti-horário em torno do ponto  $P = (0, 0)$ .
3. Tente descobrir qual polígono gerou o objeto 3 da Figura 36c. Observe a estrutura em arame para facilitar.

Figura 53 – Estrutura em arame do objeto 3.



Fonte: Autor.

4. Dada a Figura 43, determine a fração correspondente de cada peça do Tangram em relação ao todo.
5. Monte outras formas usando as 9 peças do quebra-cabeça do coração em pedaços, como ilustrado na Figura 50.

A seguir uma proposta de plano de aula para o conteúdo de geometria euclidiana plana no ensino médio.

## 2.11 PROPOSTA DE PLANO DE AULA NO ENSINO MÉDIO USANDO GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

### OBJETIVO GERAL

Revisar no ensino médio os principais conceitos de geometria plana, necessários para o estudo de geometria espacial e geometria analítica.

### OBJETIVO ESPECIFICO

- Identificar um ponto, uma reta, um plano, uma semi-reta, um segmento e um ângulo.
- Rever as definições de ponto médio de um segmento, bissetriz de uma região angular, perpendicular a um segmento, mediatriz de um segmento, circunferência e triângulo retângulo.
- Evidenciar os casos de congruência entre triângulos, o teorema de Tales, a semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras.
- Rever as definições de ângulo central e inscrito a uma circunferência.
- Contextualizar sempre que possível, tornando a disciplina atrativa e interessante.
- Identificar as possíveis dificuldades dos alunos e auxiliá-los na construção do conhecimento.



- Incentivar os alunos a desenvolver uma argumentação matemática para construir competências e habilidades.

### JUSTIFICATIVA

Muitos dos conteúdos de geometria euclidiana plana estudadas no ensino fundamental, não são aprofundados e no ensino médio, há pelo menos duas razões para a realização desta revisão:

- propriedades da geometria euclidiana plana são demonstradas em problemas clássicos de geometria analítica;
- propriedades de elementos de geometria métrica (como apótemas e alturas) lançam mão de semelhança ou de triângulos retângulos.

### MATERIAL A SER UTILIZADO

Utilize livros usados no ensino fundamental, que trabalhem com os tópicos de geometria euclidiana plana.

### METODOLOGIA

- Divida a classe em duplas e certifique-se de que cada dupla tenha um livro para consulta, mas cada aluno deve preencher seu próprio material.
- Entregue um roteiro para cada aluno, sendo que haja espaço no próprio roteiro para que o aluno resolva os exercícios, mas eles também podem ser feitos no caderno.
- Combine com a turma um prazo para preencher todo o roteiro, ou limite um tempo para cada conjunto de itens.
- Seis aulas devem ser o tempo máximo para conclusão desta atividade.

### ROTEIRO

1) Dê um exemplo através de um desenho de:

- um ponto;
- uma reta;
- um plano;
- uma semi-reta;
- um segmento;
- um ângulo.

2) Escreva as definições dos seguintes entes geométricos:

- ponto médio de um segmento;
- bissetriz de uma região angular;
- perpendicular a um segmento;
- mediatriz de um segmento;
- circunferência;

- triângulo retângulo.

3) Ilustre através de desenhos os casos de congruência entre triângulos:

- caso LLL;
- caso LAL;
- caso ALA;
- caso LAAo.

4) Ilustre através de desenhos:

- o teorema de Tales;
- a semelhança de triângulos;
- o teorema de Pitágoras.

5) O caso AAA é um caso de congruência entre triângulos? Justifique.

6) Façam desenhos para evidenciar as seguintes propriedades:

- num triângulo isósceles a mediana relativa à base é perpendicular a essa base;
- num triângulo isósceles, a mediana relativa à base é a bissetriz do ângulo do vértice;
- o baricentro de um triângulo equilátero divide as medianas em segmentos que estão na razão de 2:1, isto é, a distância entre o baricentro e um vértice é o dobro da distância entre o baricentro e o ponto médio do lado oposto;
- quando se baixa a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, obtemos dois outros triângulos retângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo retângulo original. Tais relações de semelhança têm o nome de de relações métricas no triângulo retângulo.

7) Sobre ângulos na circunferência, ilustre através de desenho:

- ângulo central: todo ângulo cujo vértice coincide com o centro da circunferência;
- ângulo inscrito: todo ângulo cujo vértice pertence à circunferência e os lados são secantes a essa circunferência.

8) Ilustre através de desenho as seguintes propriedades:

- a medida em graus de um ângulo central será a medida de seu arco correspondente;
- um quadrilátero convexo está inscrito numa circunferência se, e somente se, os ângulos opostos são suplementares;
- um quadrilátero está circunscrito a uma circunferência se, e somente se, a soma das medidas dos lados opostos é igual à soma das medidas dos outros dois lados;
- um triângulo inscrito em uma semicircunferência é sempre retângulo;
- quando duas cordas AB e CD de uma circunferência cruzam-se em um ponto P, determinam dois triângulos APD e BPC, que são semelhantes

9) Quais das sentenças abaixo são verdadeiras?

- Dois triângulos equiláteros quaisquer são semelhantes.
- Dois triângulos retângulos são semelhantes se os catetos de um são proporcionais aos catetos do outro.

- Num triângulo qualquer, cada lado é maior que a soma dos outros dois.
- Se as diagonais de um quadrilátero se interceptam nos seus pontos médios, então esse quadrilátero é um retângulo.
- Se pelo ponto médio do lado AB de um triângulo ABC traçarmos uma reta paralela ao lado BC, então esta reta interceptará o lado AC no seu ponto médio.
- Todo quadrado é um losango. Todo quadrado é um retângulo.
- Todo retângulo é um paralelogramo. Todo triângulo equilátero é isósceles.
- Se as diagonais de um quadrilátero convexo se interceptam perpendicularmente e são congruentes, então o quadrilátero é um quadrado.
- Duplicando-se a base de um retângulo, a área torna-se o dobro da área do retângulo original;
- Duplicando-se a altura de um triângulo, a área torna-se o dobro da área do triângulo original.
- Duplicando-se o raio de um círculo, a área torna-se o dobro da área do círculo original.

10) Calcular a área de um triângulo qualquer (em cada caso, faça o desenho, nomeie os elementos citados e construa a fórmula da área para cada caso):

- conhecendo a base e a altura relativa a essa base;
- conhecendo as medidas de dois lados e do ângulo entre esses lados;
- conhecendo as medidas dos três lados;
- conhecendo o semiperímetro e o raio da circunferência inscrita.

#### CONCLUSÃO DA ATIVIDADE

- Não deixe de enfatizar que todas as propriedades mencionadas são passíveis de demonstração. O ideal é fazer a demonstração de todas.

- Peça que os alunos comentem a qualidade do livro utilizado: se encontraram o que queriam, se é de fácil leitura, se as figuras ajudaram ou se foi preciso consultar outra obra.

- Faça com que os alunos comentem a atividade: se foi esclarecedora, se completaram todos os exercícios, se restou alguma dúvida ou se lembraram os conteúdos estudados no ensino fundamental.

- Prepare uma lista de problemas sobre geometria analítica ou geometria espacial e peça para a turma resolvê-los consultando o roteiro.



### 3 EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Neste Capítulo, será abordado o uso das equações do segundo grau e também serão resgatados fatos históricos de como os egípcios resolviam equações do primeiro grau e mesopotâmios já utilizam técnicas para resolver problemas relacionados a equações quadráticas. Estas são as primeiras civilizações que se tem registros de resolução dessas equações.

Antes façamos algumas definições.

#### 3.1 DEFINIÇÕES PERTINENTES AO ESTUDO DESTE CAPÍTULO

Nesta seção apresentamos a definição de equações do primeiro grau, do segundo grau, funções quadráticas e forma canônica de uma função quadrática.

**Definição 3.1.** *Denomina-se equação do primeiro grau com uma incógnita, a toda sentença aberta em  $x$  que possa ser reduzida à forma  $ax = b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , e  $a \neq 0$ .*

- Sendo  $x$  a incógnita e  $a$  e  $b$  os coeficientes da equação.

**Definição 3.2.** *Chama-se equação do segundo grau à toda equação do tipo*

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (3.1)$$

*com  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$ , em que  $a \neq 0$ .*

- Quando uma equação do segundo grau  $ax^2 + bx + c = 0$  possuir seus coeficientes  $b = 0$  ou  $c = 0$  ou ambos,  $b = c = 0$ , falamos que ela está em sua forma incompleta. Se a equação tiver a forma  $ax^2 = 0$ , com  $a \neq 0$ , ela não tem aplicação prática pois as raízes serão nulas.

**Definição 3.3.** *Definimos uma função quadrática como*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax^2 + bx + c, \end{aligned}$$

*em que  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$ .*

**Proposição 3.4.** *Seja  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , chama-se forma canônica de  $f(x)$ , quando a mesma estiver escrita na forma  $f(x) = (x - m)^2 + k$ , sendo  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ .*

- Se  $a < 0$ , o valor de  $f(x)$  será máximo quando  $x = m$ .
- Se  $a > 0$ , o valor de  $f(x)$  será mínimo quando  $x = m$ .
- A coordenada do vértice de uma função quadrática é dada por  $(m, k)$ . Ou ainda por  $(x_v, y_v)$ , sendo  $x_v = -\frac{b}{2a}$  e  $y_v = \frac{4ac - b^2}{4a}$ .

*Demonstração.* Generalizando  $f(x)$  temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ f(x) &= a \left( x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right) \\ f(x) &= a \left( x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ f(x) &= a \left( x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ \Rightarrow f(x) &= a \left( x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Chame  $m = -\frac{b}{2a}$  e  $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ , assim chega-se a relação

$$f(x) = (x - m)^2 + k.$$

□

Muitos matemáticos desenvolveram formas diferentes de escrever a resolução de uma equação do 2º grau. Mesmo não usando o formalismo atual, a forma para resolver problemas envolvendo alguns tipos de equações do 2º grau já apareciam, há pelo menos quatro mil anos atrás, em textos escritos em papiros no Egito e principalmente em placas de argila na Mesopotâmia.

A fórmula que conhecemos hoje para a solução da equação (3.1), dado por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.2)$$

assumiu este aspecto somente quando se generalizou o uso de letras para representar os coeficientes de uma equação. Isto se deve principalmente aos trabalhos de François Viète (1540-1603) e de René Descartes (1596-1650), usando as receitas usadas por Bhaskara (1114-1185), embora o próprio Bhaskara afirmava que a regra que usava era devido a outro matemático, o hindu Sridhara do Século XI d.C (EVES, 2011).

### 3.2 MÉTODO EGÍPCIO PARA RESOLVER EQUAÇÕES DE PRIMEIRO GRAU

Nesta seção, será visto como os egípcios a mais de 4000 mil atrás, resolviam situações que recaiam em equações do primeiro grau, utilizando um método que ficou conhecido como falsa posição.

O método da falsa posição ou da falsa suposição é uma forma muito antiga de resolver problemas que atualmente interpretamos como relacionados a equações e sistemas de equações lineares. Tendo surgido independentemente em vários locais e em várias civilizações da antiguidade, suas origens remontam ao antigo Egito e aos primórdios da civilização chinesa. O método consiste em um procedimento de tentativas e erros como uma alternativa para resolver problemas cotidianos ligados, por exemplo, ao comércio, à cobrança de impostos, ao armazenamento de animais e à agrimensura (LUMPKIN, 1988).

Os egípcios, por possuírem uma álgebra simbólica, utilizavam recursos retóricos, ou seja, destacavam os valores como as frações, para organizar a situação em um procedimento de tentativas e erros. Este procedimento era conhecido como cálculo de “aha”, nome dado à quantidade desconhecida. Esse método posteriormente ficou conhecido como o método da falsa posição, pois tinha seu ponto de partida o levantamento inicial de uma hipótese, ou posição inicial, sobre o valor da quantidade a ser determinada. Esta suposição inicial, não era totalmente aleatória, mas sim conveniente e obedecia ao propósito de simplificar os cálculos pela iniciativa de evitar as frações presentes na formulação do problema (BUNT; JONES; BEDIENT, 1992).

Veja alguns dos problemas de equações de primeiro grau traduzidos do Papiro de Rhind, datado aproximadamente do ano 1650 a.C. A Figura 54 traz uma foto de uma parte deste papiro.

(Problema 24) Uma quantidade e seu sétimo, somadas juntas, dão 19. Qual é a quantidade?

(Problema 25) Uma quantidade e sua metade, somadas juntas, resultam 16. Qual é a quantidade?

(Problema 26) Uma quantidade e  $\frac{2}{3}$  dela são somadas. Subtraindo-se, desta soma,  $\frac{1}{3}$  dela, restam 10. Qual é a quantidade?

Figura 54 – Pedaco do Papiro de Rhind.



Fonte: < <http://www.matematicafacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html> >.

Para resolver problemas desse tipo, isto é, que se reduzem a uma equação da forma  $a.x = b$ , os egípcios adotavam duas linhas de raciocínio:

- Em primeiro lugar, usavam um valor inicial de falsa posição para o valor da incógnita “aha” convenientemente para eliminar as frações.
- Em segundo, usavam uma proporção entre o valor resultante das somas pelo valor atribuído e o valor correto pela incógnita.

Vamos resolver dois destes problemas usando o método empregado pelos egípcios. Usando a notação atual de frações para simplificar os cálculos e resolver os problemas, pois os egípcios expressavam as frações sempre reduzidas a uma soma de frações unitárias, ou seja, com numerador 1. No próximo capítulo abordaremos o assunto de frações de forma mais concisa.

### Resolução do problema 24.

Inicialmente vamos escrever o problema usando a linguagem matemática moderna, logo:

$$X + \frac{X}{7} = 19$$

Assim os egípcios escolhiam um número inteiro divisível por 7, para eliminar a fração. Suponha ser o próprio 7. Desta forma obtinham:

$$7 + \frac{7}{7} = 8$$

mas este não é o valor procurado que é 19. Então usavam uma proporção para determinar o valor correto, ou seja:

quantidade	resultado
7	8
$x$	19.

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{7}{x} &= \frac{8}{19} \\ \Rightarrow 8x &= 7 \cdot 19 \\ \Rightarrow 8x &= 133 \\ \Rightarrow x &= \frac{133}{8} \\ \therefore x &= 16\frac{5}{8} \quad \text{ou} \quad 16 + \frac{5}{8}, \end{aligned}$$



que era representado pelos egípcios como frações unitárias,  $x = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ . Observe que, se o valor da falsa posição ou valor inicial tivesse sido 14 ao invés de 7, teríamos:

$$14 + \frac{14}{7} = 16,$$

mas este não é o valor procurado que é 19. Usando proporção para determinar o valor correto temos:

quantidade	resultado
14	16
$x$	19.

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{14}{x} &= \frac{16}{19} \\ \Rightarrow 16x &= 114.19 \\ \Rightarrow 16x &= 266 \\ \Rightarrow x &= \frac{266}{16} \\ \therefore x &= 16\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Note que isto sempre será verdadeiro.

*Demonstração.* Tome qualquer múltiplo 7, ou seja, um número da forma  $7n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , então

$$7n + \frac{7n}{7} = 8n.$$

Assim,

quantidade	resultado
$7n$	$8n$
$x$	19

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{8n}{x} &= \frac{7n}{19} \\ \Rightarrow 8nx &= 7n.19 \\ \Rightarrow 8nx &= 133n \\ \Rightarrow x &= \frac{133n}{8n} \\ \therefore x &= 16\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

□

**Resolução do problema 25.**

Equacionando o problema, temos:

$$X + \frac{X}{2} = 16.$$

Escolhendo um número inteiro divisível por 2, para eliminarmos a fração. Suponha ser o próprio 2. Desta forma:

$$2 + \frac{2}{2} = 3$$

mas este não é o valor procurado, que é 16. Então:

quantidade	resultado
2	3
$x$	16

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} &= \frac{3}{16} \\ \Rightarrow 3x &= 2 \cdot 16 \\ \Rightarrow 3x &= 32 \\ \Rightarrow x &= \frac{32}{3} \\ \therefore x &= 10\frac{2}{3} \text{ ou } 10 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Vimos que os egípcios resolviam equações do primeiro grau usando o método da falsa posição. Entretanto não são conhecidos registros do tratamento da equação do segundo grau pelos egípcios, mas os historiadores matemáticos suspeitam que eles dominavam alguma técnica de resolução dessas equações. A crença se baseia no fato de ter sido encontrada no papiro de Kahun, uma resolução da equação hoje escrita como  $x^2 + y^2 = k$ , com  $k$  um número positivo, pelo método da falsa posição, desenvolvido pelos egípcios para resolver equações do primeiro grau (RPM 15, p.18).

### 3.3 MÉTODO BABILÔNICO PARA RESOLVER EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU

Nesta seção, veja a receita usada pelos babilônios a mais de 4000 anos atrás, para resolver situações envolvendo os lados de um retângulo, que recaem em uma equação do segundo grau.

A respeito da resolução de equações do segundo grau, foram encontrados alguns problemas resolvidos pelos babilônios, semelhantes ao que chamamos de “fórmula geral de resolução de

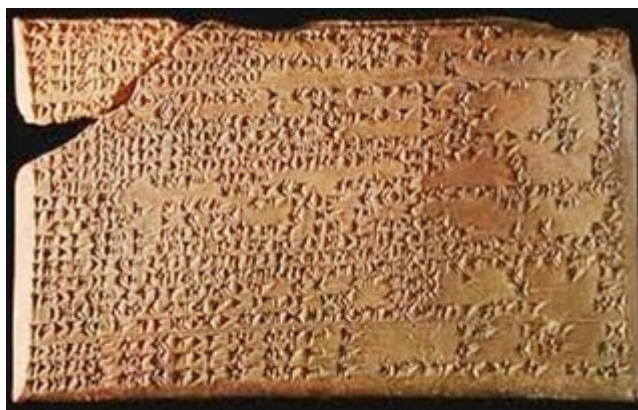
equações quadráticas”, tomando o cuidado de descartar a raiz negativa. As equações quadráticas mais estudadas eram as da forma

$$x^2 - ax = b \quad \text{e} \quad x^2 + ax = b.$$

Veja a seguir um problema encontrado e traduzido de uma placa de argila babilônica. A Figura 55, ilustra uma foto de uma placa de argila.

“Multipliquei comprimento por largura obtendo a área 252. Somei comprimento e largura, encontrei 32. Encontre o comprimento e a largura.”

Figura 55 – Placa de argila babilônica aproximadamente (1700 a.C).



Fonte: < <https://www.thinglink.com/scene/754356068745740290>>.

O método ou receita empregada pelos babilônios, para determinar problemas deste tipo com duas incógnitas (as quais eram chamadas de comprimento e largura), é equivalente ao que chamamos de completar quadrados.

Resolvendo este problema pelo método Babilônico temos:

- Tome metade da soma do comprimento pela largura (isto dá 16);
- Multiplique 16 por 16 (o que dá 256);
- Subtraia 252 de 256 (que dá 4);
- 4 é o quadrado de 2;
- Agora acrescente 2 a 16 e subtraia 2 de 16 (o que dá 18 e 14);
- Multiplique 18 por 14 (resultando 252).

Assim o comprimento e a largura procurados são 18 e 14.

*Demonstração.* Traduzindo o problema anterior para uma notação atual, podemos reescrevê-lo da seguinte forma: dados dois comprimentos  $x$  e  $y$ , cuja a soma é  $p$  e o produto é  $q$ , temos  $x + y = p$  e  $xy = q$ . Tomando

$$x = \frac{p}{2} + a \quad \text{e} \quad y = \frac{p}{2} - a \tag{11}$$

com  $a > 0$ , temos

$$\begin{aligned} xy &= \left(\frac{p}{2} + a\right) \left(\frac{p}{2} - a\right) = \frac{p^2}{4} - a^2 = q \\ \Rightarrow a^2 &= \frac{p^2}{4} - q = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \Rightarrow a &= \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de  $a$  em (11), obtemos:

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{e} \quad y = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (3.3)$$

Observe que (3.3) é exatamente (3.2). Isto pode ser facilmente verificado.

Temos então:

$$\begin{cases} x + y = p & (1) \\ xy = q & (2) \end{cases}$$

isolando  $y$  em (1), obtemos  $y = p - x$ . Agora substituindo em (2),

$$\begin{aligned} x(p - x) &= q \\ -x^2 + px - q &= 0 \quad (\cdot -1) \\ x^2 - px + q &= 0. \end{aligned}$$

Usando a fórmula (3.2), temos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \\ &= \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{4q}{4}} \\ &= \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ &= \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \end{aligned}$$

Agora substituindo os valores dados no problema, temos:

$$x = \frac{32}{2} + \sqrt{\left(\frac{32}{2}\right)^2 - 252} = 16 + \sqrt{16^2 - 252} = 16 + \sqrt{256 - 252} = 16 + \sqrt{4} = 16 + 2 = 18$$

e

$$y = \frac{32}{2} - \sqrt{\left(\frac{32}{2}\right)^2 - 252} = 16 - \sqrt{16^2 - 252} = 16 - \sqrt{256 - 252} = 16 - \sqrt{4} = 16 - 2 = 14.$$

Assim,  $18.14 = 252$ . □

Vimos que o método babilônico é exatamente a fórmula de resolução de equações do segundo grau utilizada na atualidade, ou seja (3.2). Porém, os babilônicos utilizavam a sua receita, apenas para resolver problemas ligados aos lados de um retângulo.

### 3.4 ALGUMAS APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU NA ATUALIDADE

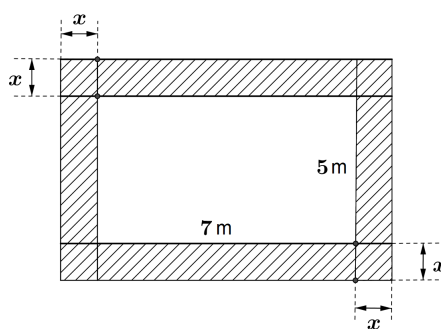
Nesta seção, veja algumas situações que recaem em uma equação do segundo grau.

Assim como na antiguidade, as equações quadráticas tem várias aplicações, seja para cálculo de áreas, divisão de heranças ou taxas de juros. Vejamos algumas situações atuais que recaem em uma equação do segundo grau.

**Exemplo 3.5.** Dona Maria comprou uma piscina retangular de 7m de comprimento por 5m de largura. Ela deseja fazer uma calçada ao redor desta piscina, para que as pessoas não pisem na terra ao sair ou entrar na mesma. Para tanto dispõe de  $64\text{m}^2$  de piso, que sobraram de outra obra. Qual deverá ser a largura desta calçada para que a quantidade de piso seja exatamente o que ela dispõe?

**Resolução:** A ilustração da Figura 56 mostra a calçada desejada ao redor da piscina.

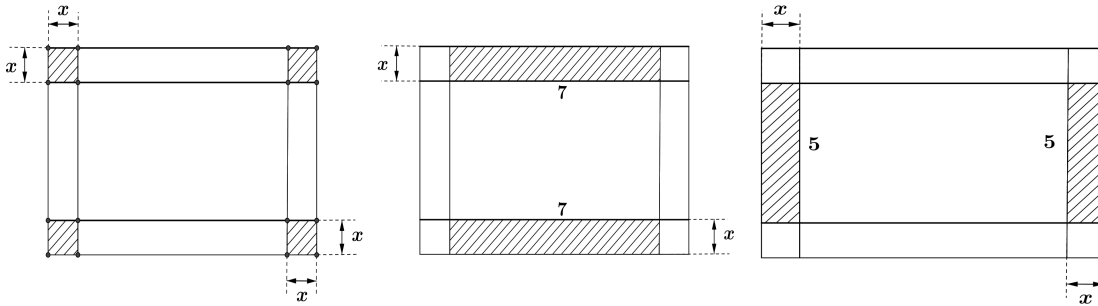
Figura 56 – Calçada em torno da piscina.



Fonte: Autor.

A calçada sempre terá a mesma largura  $x$ . Vamos descobrir o valor de  $x$  calculando a área da calçada. Observe que a área da calçada pode ser dividida em três partes: 4 quadrados de lado  $x$ , mais 2 retângulos de base 7 e altura  $x$ , mais 2 retângulos de base 5 e altura  $x$ , conforme Figura 57 e sejam  $\text{Área}_1$ ,  $\text{Área}_2$  e  $\text{Área}_3$  as respectivas áreas. Assim temos:

Figura 57 – Esquema para calcular a área da calçada.



$$\text{Área}_1 = 4x^2$$

$$\text{Área}_2 = 2 \cdot 7 \cdot x = 14x$$

$$\text{Área}_3 = 2 \cdot 5 \cdot x = 10x$$

$$\begin{aligned} \text{Área}_{\text{calçada}} &= \text{Área}_1 + \text{Área}_2 + \text{Área}_3 \\ &= 4x^2 + 14x + 10x \\ &= 4x^2 + 24x. \end{aligned}$$

Mas a área da calçada deve ser igual a área  $64\text{m}^2$  dos pisos, assim:

$$4x^2 + 24x = 64.$$

Reescrevendo a equação na forma geral (3.1) e simplificando-a, obtemos:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 24x - 64 &= 0 \quad (\div 4) \\ x^2 + 6x - 16 &= 0. \end{aligned}$$

Usando a fórmula geral de equações quadráticas (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} \\ &= \frac{-6 \pm 10}{2}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} x' &= \frac{-6 - 10}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \\ x'' &= \frac{-6 + 10}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Note que a solução  $x'$  não serve para o problema, uma vez que o lado da calçada deve ter um valor maior que zero. Desta forma, para que dona Maria use todos os  $64\text{m}^2$  de piso, a calçada deverá ter 2 metros de largura.  $\square$

A seguir um exemplo envolvendo taxa de juros.

**Exemplo 3.6.** A loja Compre Aqui está com o seguinte anúncio em um de seus produtos:

- À vista por R\$ 5.000,00.
- À prazo em duas prestações mensais de R\$ 2.575,00 (30 e 60 dias).

Um cliente que compre este produto, optando pelo pagamento em prestações, estará pagando qual taxa de juros?

**Resolução:** Para resolver este problema, inicialmente vamos usar uma propriedade de porcentagens. Se um valor sofreu um aumento, digamos que 25%, então para obter seu novo valor, basta multiplicar o valor inicial pelo fator 1,25, que corresponde a 100% do valor inicial mais os 25% do aumento ( $1 + 0,25$ ).

Vamos indicar por  $x$  a taxa procurada acrescida dos 100%. Desta forma quem comprar este produto ficará com uma dívida, que será atualizada todo mês pela loja, usando este fator  $x$ . Vamos acompanhar a evolução da dívida.

No dia da compra: 5000

$$\begin{array}{l} \text{Depois de 30 dias} \\ \text{Depois de 60 dias} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{antes do pagamento da prestação : } 5000x \\ \text{depois do pagamento da prestação : } 5000x - 2575 \\ \text{antes do pagamento da prestação : } (5000x - 2575)x \\ \text{depois do pagamento da prestação : } (5000x - 2575)x - 2575 \end{array} \right.$$

Depois da última prestação a dívida termina, ou seja é zero. Então:

$$(5000x - 2575)x - 2575 = 0$$

$$5000x^2 - 2575x - 2575 = 0.$$

Portanto temos uma equação do segundo grau para resolver. Dividindo ambos os membros por 25, obtemos:

$$200x^2 - 103x - 103 = 0$$

Usando a fórmula geral de resolução de equações quadráticas (3.2) com

$$a = 200, \quad b = -103, \quad c = -103,$$

temos

$$\begin{aligned} x &= \frac{103 \pm \sqrt{(-103)^2 - 4 \cdot (200) \cdot (-103)}}{2 \cdot 200} \\ &= \frac{103 \pm \sqrt{10609 + 82400}}{400} \\ &= \frac{103 \pm \sqrt{93009}}{400} \\ &\cong \frac{103 \pm 304,97}{400}. \end{aligned}$$

Então

$$x' \cong \frac{103 - 304,97}{400} \cong \frac{-201,97}{400} \cong -0,51$$

$$x'' \cong \frac{103 + 304,97}{400} \cong \frac{407,97}{400} \cong 1,02$$

Note que a solução  $x'$  não serve para o problema, uma vez que a taxa de juros deve ser um valor positivo. Assim a loja cobra aproximadamente  $1,02 - 1 = 0,02$  ou 2% de juros mensais nesta compra.

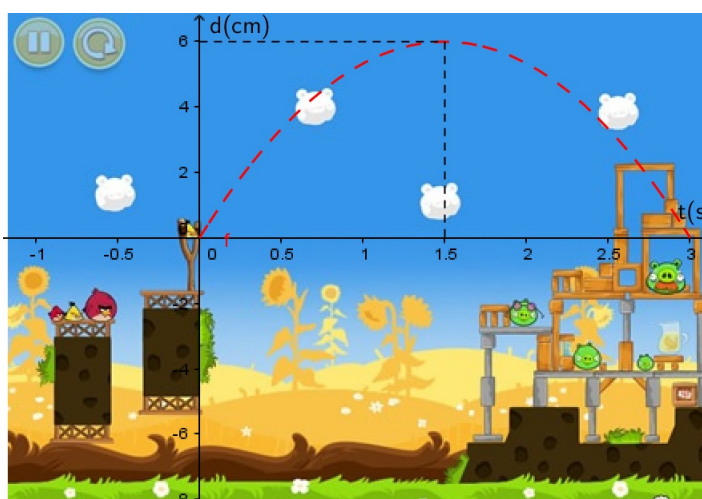
□

Vale uma observação para o exemplo anterior. Situações em função de uma taxa de juros, só recairão em equações do segundo grau, quando o número de prestações for igual a 2.

Veja a seguir um exemplo envolvendo uma função quadrática, em que será preciso ter o conhecimento de coordenadas dos vértices, para solucionar o exemplo.

**Exemplo 3.7.** Angry birds é um popular jogo eletrônico onde os pássaros são lançados de um estilingue para destruir as construções dos porcos. A função do movimento do pássaro descreve uma parábola com a concavidade voltada para baixo, ou seja, o ponto máximo da parábola será a altura máxima atingida pelo pássaro. Observando a ilustração na Figura 58, qual será a altura do pássaro 2,5 segundos após o lançamento?

Figura 58 – Jogo eletrônico Angry birds.



Fonte: Autor.

**Resolução:** Por se tratar de um conteúdo envolvendo função quadrática, os alunos devem ter um prévio conhecimento do que é uma parábola e como determinar as coordenadas do vértice.



Desta forma de acordo com os dados do problema é possível montar um sistema de equações com duas variáveis e descobrir os coeficientes da função.

Como o deslocamento do pássaro descreve uma parábola, temos que o deslocamento em função do tempo é da forma  $d(t) = at^2 + bt + c$ . Observando a ilustração, extraímos os seguintes dados:  $x_v = 1,5$ ,  $y_v = 6$  e  $c = 0$ , pois a trajetória inicia com altura zero, ou seja,  $d(0) = 0$ . Desta maneira:

$$\begin{aligned}x_v &= \frac{-b}{2a} \\1,5 &= \frac{-b}{2a} \\3a &= -b \\-3a &= b\end{aligned}\tag{3.4}$$

e

$$\begin{aligned}y_v &= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \\6 &= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \\24a &= -(b^2 - 4ac) \\-24a &= b^2 - 4ac.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Substituindo (3.4) em (3.5) e o fato de  $c = 0$ , temos:

$$\begin{aligned}-24a &= (-3a)^2 - 4a \cdot 0 \\-24a &= 9a^2 \\0 &= a(9a + 24).\end{aligned}$$

Com isto, temos que  $a = 0$  ou  $a = -\frac{8}{3}$ . Mas,  $a = 0$  não serve pois temos uma equação do segundo grau, logo  $a = -\frac{8}{3}$ , o que implica em  $b = 8$ . Portanto, a expressão do deslocamento do pássaro é:

$$d(t) = -\frac{8t^2}{3} + 8t.$$

*Demonstração.* No instante 2,5 segundos, sua posição será:

$$\begin{aligned}d(2,5) &= -\frac{8(2,5)^2}{3} + 8(2,5) \\d(2,5) &= -\frac{8 \cdot 6,25}{3} + 20 \\d(2,5) &= -\frac{50}{3} + 20 \\d(2,5) &= \frac{-50 + 60}{3} \\d(2,5) &= \frac{10}{3} \text{ cm,}\end{aligned}$$

ou 3,333... cm. □

A seguir veja um exemplo que pode ser usado em sala de aula relacionado a distância percorrida por um veículo após o acionamento dos freios.

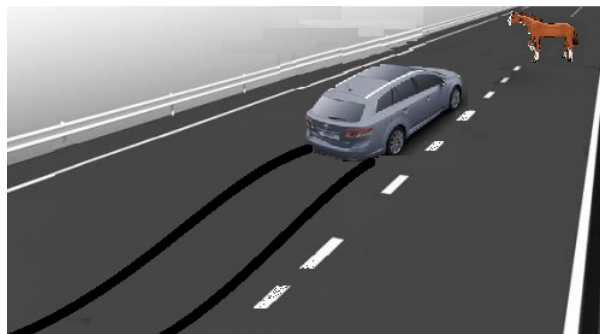
**Exemplo 3.8.** Um motorista com seu veículo transitando por uma estrada vê um animal sobre a pista e aciona o freio, como ilustrado na Figura 59. No entanto, do momento em que o animal é visto até a parada, o veículo percorre uma certa distância. Esta distância depende de vários fatores: dos reflexos do motorista, das condições da pista, da qualidade do sistema de freios, etc. Mas o fator mais importante é a velocidade que o veículo vinha desenvolvendo (JAKUBOVIC; LELLIS; IMENES, 1992b). Uma das fórmulas usadas para calcular a distância percorrida por um automóvel em função da velocidade após ver o obstáculo é dada por uma função quadrática:

$$d = \frac{V}{10} + \frac{V^2}{250},$$

em que:

- $d$ : distância em metros que o carro percorre desde que o motorista vê o obstáculo até o carro parar;
- $V$ : velocidade que o carro vinha desenvolvendo, em quilômetros por hora;
- $\frac{V}{10}$ : são os metros percorridos entre a visão do obstáculo e o acionamento do freio;
- $\frac{V^2}{250}$ : são os metros percorridos após o freio ser acionado.

Figura 59 – Perigo na estrada.



Fonte: Autor.

Desta forma, qual a distância percorrida por um automóvel a 75km/h, desde o momento em que o obstáculo é visto até a parada?

**Resolução:** Temos

$$d = \frac{V}{10} + \frac{V^2}{250}$$

$$d = \frac{75}{10} + \frac{75^2}{250}$$

$$d = \frac{75}{10} + \frac{5625}{250}$$

$$d = 7,5 + 22,5$$

$$d = 30$$

Ou seja, ele percorre 30 metros.

□

Nesta seção, vimos alguns exemplos de situações do cotidiano que recaem em uma equação do segundo e podem ser utilizadas como problemas iniciais para o estudo destas equações.

### 3.5 EXERCÍCIOS

Nesta seção será apresentado alguns exercícios relacionados a equações do primeiro e segundo grau. As soluções encontram-se no Apêndice A.

1. Usando o método egípcio resolva o problema 26 da seção 3.2.
2. Usando o método babilônico determine as dimensões de um retângulo cujo perímetro é 24cm e a área é 34,04cm<sup>2</sup>.
3. Com base no Exemplo 3.8, determine a que velocidade vinha um automóvel que percorreu 100 metros, desde o momento em que o motorista viu o animal sobre a pista, acionou o freio, até o veículo parar.

A seguir uma proposta de plano de aula para o conteúdo de equações do segundo grau.

### 3.6 PROPOSTA DE PLANO DE AULA USANDO EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

#### OBJETIVO GERAL

A partir de um retângulo qualquer, estabelecer uma relação entre o perímetro e a área para calcular as dimensões deste retângulo usando o método babilônico e também usando as técnicas atuais.

### OBJETIVO ESPECIFICO

- Mediar e agir como um facilitador na construção dos conceitos matemáticos.
- Contextualizar sempre que possível, tornando a disciplina atrativa e interessante.
- Identificar as possíveis dificuldades dos alunos e auxiliá-los na construção do conhecimento.
- Ajudar os alunos a aplicar a receita usada pelos babilônios na resolução de problemas envolvendo os lados e a área de um retângulo, bem como ajudar a identificar a equação do segundo grau de modo a estabelecer um raciocínio investigativo.
- Incentivar os alunos a desenvolver uma argumentação matemática para construir competências e habilidades.
- Retomar conteúdos anteriores e aplicá-los na resolução das situações problemas que envolvem equações do segundo grau.
- Desenvolver um termo geral pelo método babilônico e pelo método atual para resolver problemas que envolvem área e perímetro de retângulos.
- Comparar os termos encontrados pelo método babilônico e pelo método atual.

### JUSTIFICATIVA

- Estabelecer relação entre teoria-prática, do método antigo e do método atual.
- Desenvolver as técnicas de ensino na resolução de situações problemas.
- Incentivar a troca de experiências.
- Realização de trabalho e projetos em grupo.

### METODOLOGIA

- Iniciar a aula com um ou dois exemplos mostrando como o povo babilônico resolvia problemas relacionados aos lados de um retângulo e a área, de modo a provocar curiosidade e desejo de resolver este tipo de problema.
- A seguir, propor que, usando o mesmo raciocínio, construam uma expressão para o termo geral para cálculo das dimensões de um retângulo qualquer em função da área e do perímetro.
- Após a construção da expressão, atribuir valores para os lados deste retângulo e substituir na expressão para verificar a sua validade.
- Para finalizar, discutir com os alunos se o método empregado pelos babilônicos sempre funciona em situações envolvendo um retângulo e comparar a expressão com a fórmula geral de resolução de equações do segundo grau.

## 4 FRAÇÕES E DECIMAIS

Neste Capítulo, será abordado como as frações surgiram na antiguidade e como os decimais surgiram através frações como uma necessidade de realizar cálculos com as frações como se fossem números inteiros.

### 4.1 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA DA FRAÇÕES

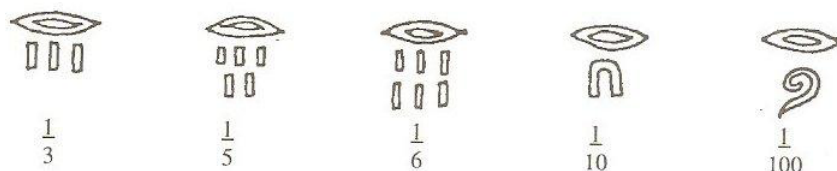
As frações surgiram da necessidade do homem em medir e representar medidas. Muitas civilizações antigas criaram e utilizaram o conceito de fração de acordo com suas necessidades.

Os primeiros passos rumo às frações remota-se ao Egito por volta do ano 3.000 a.C., onde o faraó da época de nome Sesóstris resolveu repartir o solo às margens do rio Nilo, entre alguns habitantes privilegiados. Mas todos os anos na época de cheia do Nilo as divisórias entre os terrenos era perdida, trazendo a necessidade de remarcação dos terrenos atingidos pela enchente.

Esta tarefa era realizada pelos funcionários do faraó, os estiradores de cordas, pois se utilizavam desta como unidade de medição. Para medir as terras estiravam cordas para verificar o número de vezes que a unidade de medida estava contida nos lados do terreno. Muitas vezes, a medição não era finalizada por um número inteiro de vezes em que as cordas eram estiradas. Desta forma, a resposta encontrada pelos egípcios foi criar um novo tipo de número com a intenção de dividir o todo em partes, surgindo assim os números fracionários.

Quanto à notação desenvolvida pelos egípcios para representar as frações que eram unitárias, ou seja, aquelas frações cujo numerador é um, os egípcios usavam um hieróglifo parecido com uma boca, que tinha o sentido de “parte”. Esse símbolo era colocado acima do número que servia de numerador (IFRAH, 1997). A Figura 60 apresenta algumas frações unitárias egípcias.

Figura 60 – Hieróglifo egípcio de algumas frações unitárias.



Fonte: Ifrah, 1997a, p. 349.

Da evolução do conceito de fração até sua organização como representação numérica conhecida atualmente, percorre-se vários séculos, pois praticamente todos os povos antigos contribuíram para sua evolução, desde as frações unitárias dos egípcios até o nosso sistema de numeração decimal posicional dos dias de hoje.

Segundo Boyer (BOYER, 1974), os documentos históricos apontam a existência de grande variação na representação do sistema fracionário segundo a sociedade e a época histórica. Usadas em diferentes situações como os relacionados ao direito dos herdeiros na distribuição de patrimônios, declaração de propriedade, cálculo e registro de câmbio de moedas, taxas, realização de arquitetura, etc.

A notação atual de fração deve-se aos hindus que expressavam frações da seguinte forma:

$$37$$

$$797$$

Essa notação foi adotada e aperfeiçoada pelos árabes, que inventaram a barra horizontal ficando como é hoje:

$$\frac{37}{797}$$

Veja na próxima seção como as frações eram interpretadas pelos egípcios.

## 4.2 AS FRAÇÕES EGÍPCIAS

As frações eram interpretadas pelos egípcios como uma parte da unidade. Por isso, utilizavam apenas as frações unitárias, isto é, com numerador igual a 1, com uma exceção para a fração  $\frac{2}{3}$ , mas não se sabe o porquê. As demais frações eram expressas por uma soma de frações de numerador 1. Como os sinais de adição e subtração ainda não tinham sido inventados os egípcios não usavam os mesmos.

Vejamos como os egípcios representavam algumas frações. Para isto vamos usar a notação atual.

*Demonstração.* Seja  $\frac{2}{p}$ , tal que  $p$  é ímpar e  $p = a \cdot b$ , com  $a, b \in \mathbb{N}$ . Assim:

$$\begin{aligned} \frac{2}{p} &= \frac{2(a+b)}{p(a+b)} \\ &= \frac{2a+2b}{p(a+b)} \\ &= \frac{2a}{p(a+b)} + \frac{2b}{p(a+b)} \\ &= \frac{1}{\frac{p(a+b)}{2a}} + \frac{1}{\frac{p(a+b)}{2b}} \\ &= \frac{1}{\frac{p}{a} \left( \frac{a+b}{2} \right)} + \frac{1}{\frac{p}{b} \left( \frac{a+b}{2} \right)}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Fazendo

$$x = \frac{p}{a} \left( \frac{a+b}{2} \right) \text{ e } y = \frac{p}{b} \left( \frac{a+b}{2} \right),$$

obtemos:

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Se  $p$  é um primo diferente de 2, assim temos:

$$\begin{aligned} \frac{2}{p} &= \frac{2(p+1)}{p(p+1)} \\ &= \frac{2p+2}{p(p+1)} \\ &= \frac{2p}{p(p+1)} + \frac{2}{p(p+1)} \\ &= \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)} \\ &= \frac{2p}{p(p+1)} + \frac{2}{p(p+1)} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{p+1}{2}\right)} + \frac{1}{p\left(\frac{p+1}{2}\right)} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Fazendo

$$x = \frac{p+1}{2} \text{ e } y = p\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

Obtemos:

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Desta forma podemos obter uma soma de duas frações unitárias de qualquer fração na forma  $\frac{2}{p}$ , com  $p$  primo maior que 2 ou  $p$  ímpar.

□

Veja a seguir um exemplo da aplicação do método egípcio.

**Exemplo 4.1.** Seja a fração  $\frac{2}{15}$ . Os egípcios faziam da seguinte maneira:

De (4.1), temos

$$\begin{aligned} \frac{2}{15} &= \frac{1}{\frac{15}{3} \left(\frac{3+5}{2}\right)} + \frac{1}{\frac{15}{5} \left(\frac{3+5}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{5(4)} + \frac{1}{3(4)} \\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Portanto a fração  $\frac{2}{15}$  era escrita pelos egípcios como sendo  $\frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ .

Vale salientar que o motivo de desconsiderarmos o denominador par nas frações se deve ao fato de que as frações na forma  $\frac{2}{p}$ , com  $p$  par, já serem tratadas como frações unitárias pelos egípcios. Por exemplo  $\frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ .

A seguir veja algumas situações, em que as frações estão presentes.

### 4.3 FRAÇÕES NO DIA A DIA

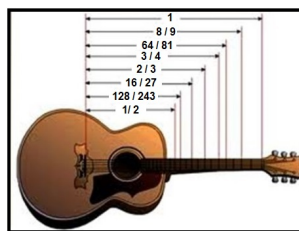
Como foi visto, as frações surgiram da necessidade do homem em obter medidas mais precisas. Hoje as frações tem um papel fundamental no nosso dia a dia e podemos encontrá-las em diversas situações nos trazendo significados. Veja na Figura 61 algumas situações em que aparecem números fracionários.

Figura 61 – Situações envolvendo números fracionários.

(a) Marcador de combustível



(b) Violão



(c) Chave de boca



(d) Receita de bolo



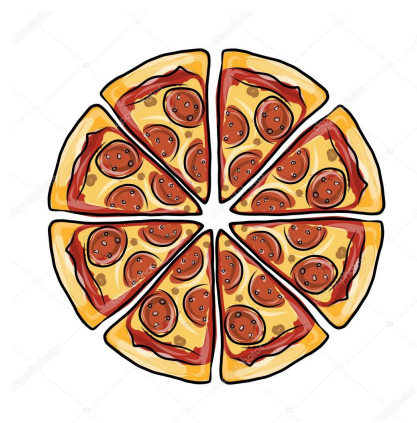
Fonte: Autor.

**Exemplo 4.2.** Ana foi a pizzaria com três amigas. Elas pediram ao garçom uma pizza grande, que foi dividida em oito partes iguais conforme Figura 62. Ana comeu três pedaços, Bia comeu



dois, Camila comeu dois e Daniela comeu um. Veja como podemos representar a pizza e a quantidade que cada uma comeu em forma de fração:

Figura 62 – Pizza dividida em 8 pedaços.



Fonte: <<https://br.depositphotos.com>>.

**Resolução:** Como a Pizza foi dividida em 8 pedaços, temos:

Ana comeu 3 pedaços dos 8, logo Ana comeu  $\frac{3}{8}$  da Pizza.

Bia comeu 2 pedaços dos 8, logo Bia comeu  $\frac{2}{8}$  da Pizza.

Camila comeu 2 pedaços dos 8, logo Camila comeu  $\frac{2}{8}$  da Pizza.

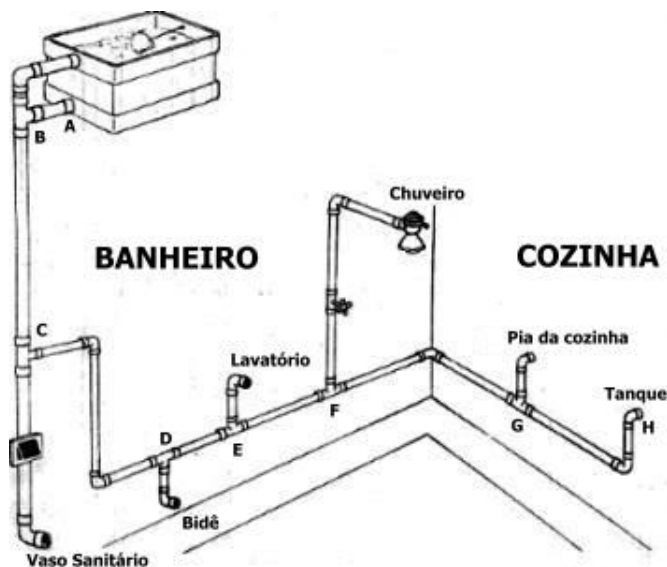
Daniela comeu 1 pedaço dos 8, logo Daniela  $\frac{1}{8}$  da Pizza.

Desta forma as quatro amigas comeram  $\frac{8}{8}$ , ou uma pizza inteira.

Isto mostra que as frações é uma importante ferramenta na divisão de quantidades não inteiras.

**Exemplo 4.3.** Podemos encontrar as frações quando temos que comprar encanamento para nossa casa. Vejamos a ilustração da Figura 63.

Figura 63 – Encanamento.

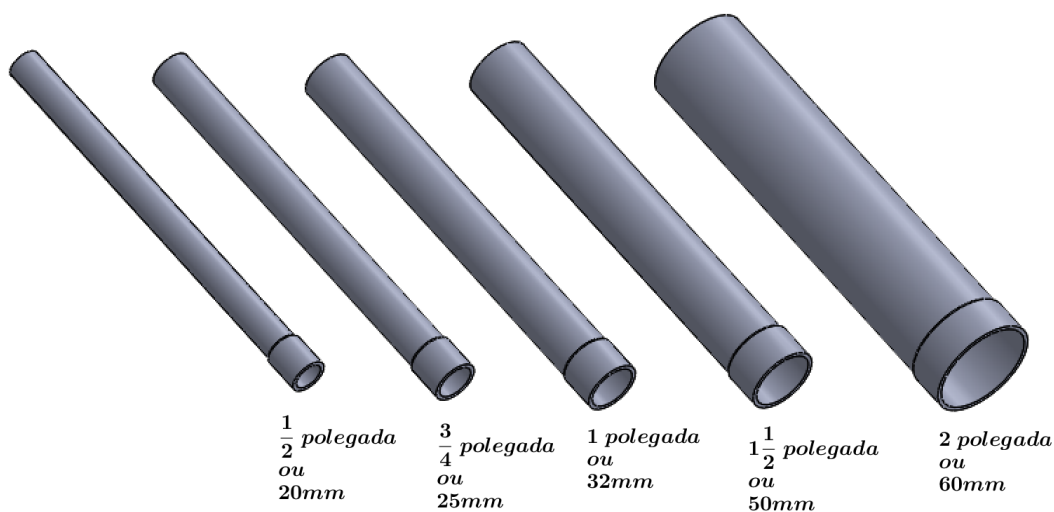


Fonte: <<https://br.pinterest.com/celioandrade965/medidas-padr%C3%A3o/?lp=true>>.

Neste encanamento são usados canos de diferentes tipos, cada um com uma medida específica que pode ser em polegadas ou milímetros.

Por exemplo, um tubo de  $\frac{1}{2}$  polegada que é a medida do diâmetro interno, na edificação predial, possui como similar um tubo de 20mm na linha soldável, pois é medido por sua parte externa, contando assim as duas paredes opostas do tubo, gerando um diâmetro externo de aproximadamente 20mm. Vejamos alguns tubos e suas medidas na figura a seguir.

Figura 64 – Diâmetro de alguns tubos.

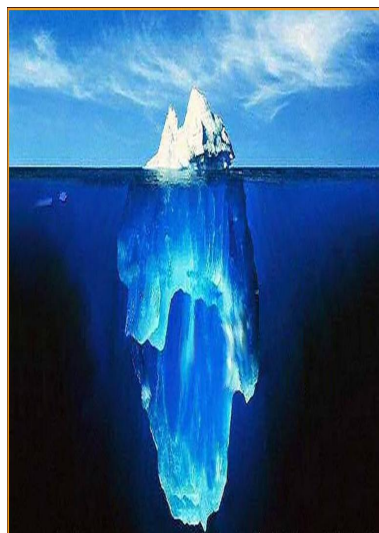


Fonte: Autor.

Este exemplo mostra a importância, das frações nas medidas dos sistemas hidráulicos.

**Exemplo 4.4.** Um Iceberg flutuando no mar é algo muito perigoso devido a maior parte do gelo estar submersa, como ilustrado na Figura 65. Sabendo que a densidade do gelo a  $0^{\circ}C$  é de  $0,917g/cm^3$  e a densidade da água do mar é de  $1,003g/cm^3$ , qual a fração de gelo que está abaixo do nível da água?

Figura 65 – Iceberg.



Fonte:<<https://br.depositphotos.com>>.

**Resolução:** O princípio físico que explica a flutuação de um Iceberg é o Princípio de Arquimedes. Portanto o volume submerso e emerso são calculadas de acordo com as leis da Hidrostática através da seguinte equação:

$$\frac{\rho_g}{\rho_{am}} = \frac{V_{am}}{V_g},$$

$$\text{sendo } \begin{cases} P_g : \text{densidade do gelo} \\ P_{am} : \text{densidade da água do mar} \\ V_{am} : \text{volume da água do mar deslocada} \\ V_g : \text{volume total do Iceberg.} \end{cases}$$

Assim

$$\frac{\rho_g}{\rho_{am}} = \frac{0,917}{1,03} \cong 0,89$$

Isso significa que  $\frac{89}{100}$  do volume total de um Iceberg está abaixo da superfície do mar.

□

#### 4.4 A SINFONIA DAS FRAÇÕES

Nesta seção, veja uma situação interessante que acontece entre o produto de dois números, cujos fatores são formados por números com dígitos iguais a 1.

Observe os produtos a seguir.

$$1 \times 1 = 1$$

$$11 \times 11 = 121$$

$$111 \times 111 = 12321$$

$$1111 \times 1111 = 1234321$$

$$11111 \times 11111 = 123454321$$

$$111111 \times 111111 = 12345654321$$

$$1111111 \times 1111111 = 1234567654321$$

$$11111111 \times 11111111 = 123456787654321$$

$$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$

Veja uma situação interessante usando frações para representar os produtos acima.

$$1 = \frac{1 \times 1}{1}$$

$$121 = \frac{22 \times 22}{1 + 2 + 1}$$

$$12321 = \frac{333 \times 333}{1 + 2 + 3 + 2 + 1}$$

$$1234321 = \frac{4444 \times 4444}{1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1}$$

$$123454321 = \frac{55555 \times 55555}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}$$

$$12345654321 = \frac{666666 \times 666666}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}$$

$$1234567654321 = \frac{7777777 \times 7777777}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}$$

$$123456787654321 = \frac{88888888 \times 88888888}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}$$

$$12345678987654321 = \frac{999999999 \times 999999999}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}$$

Pode-se ver que o numerador de cada fração é o produto de dois números iguais, sendo que estes possuem a quantidade de dígitos correspondentes ao dígito central da representação inteira do número. E cada dígito tem o valor deste termo central. Por exemplo,

$$12 \boxed{3} 21 = \frac{\boxed{3} \times \overbrace{333} \times 333}{1+2+3+2+1}.$$

Quanto ao denominador é dado pela soma dos dígitos deste número inteiro.

O interessante destes produtos que foram transformados em fração, é a observação da regularidade que ocorre entre o número inteiro, o numerador e o denominador da fração.

Esta regularidade pode ser utilizada pelo professor como um complete os espaços vazios, fazendo com que o aluno primeiro deva perceber esta regularidade para depois completar estes espaços vazios.

## 4.5 DECIMAIS

Nesta seção, será abordado como os decimais surgiram das frações decimais como uma tentativa de resolver operações com estes números, como se eles fossem inteiros.

Na sequência dos números naturais, sabemos que o sucessor de 5 é 6, e não existem números naturais entre eles. Para escrever um número maior que 5 e menor que 6 sem usar frações passou-se um longo período. Apesar de uma fração ser a forma mais natural de se representar um número não inteiro, os decimais surgiram através das frações como uma necessidade de representar e realizar cálculos com estes números, como se eles fossem inteiros. E também para auxiliar na representação dos números irracionais pela impossibilidade de escrevê-los como uma razão de números inteiros. Mesmo que os números decimais não possam determinar a medida exata de um número irracional, podia-se fazer uma aproximação, tão próxima quanto necessária, desta medida. Desta forma, os números decimais tiveram uma grande importância, fazendo com que diversos matemáticos e estudiosos aperfeiçoassem esta notação. O passo decisivo rumo a notação atual de decimais se deve a Simon Stevin em 1582, quando anotou o número 679,567 da seguinte forma:  $679_{(0)}5_{(1)}6_{(2)}7_{(3)}$  (simbolizando deste modo: 679 unidades inteiras, 5 unidades decimais da primeira ordem ou décimos, 6 unidades decimais da segunda ordem ou centésimos e 7 unidades decimais da terceira ordem ou milésimos) (IFRAH, 1997, p.328).

A seguir, uma comparação entre a forma de fração decimal da época e o método de Stevin para o número 2,354.

<i>Frações decimais da época</i>	<i>Método de Stevin</i>	<i>Forma atual</i>
$2\frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000}$	$= 2_{(0)}3_{(1)}5_{(2)}4_{(3)}$	$= 2,354$

Veja a seguir, exemplos que abordam algumas operações feitas antes da notação atual de decimais e como Simon Stevin propôs que estas operações deveriam ser feitas.

1. Para somar as três parcelas  $10,438 + 9,432 + 5,974$ .

Usando a forma de frações decimais da época temos:

$$\left. \begin{array}{l} 10\frac{4}{10} + \frac{3}{100} + \frac{8}{1000} = 10\frac{438}{1000} \\ 9\frac{4}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000} = 9\frac{432}{1000} \\ 5\frac{9}{10} + \frac{7}{100} + \frac{4}{1000} = 5\frac{974}{1000} \end{array} \right\} = 10\frac{438}{1000} + 9\frac{432}{1000} + 5\frac{974}{1000} = 25\frac{844}{1000}.$$

Com o algoritmo de Stevin, está soma podia ser feita da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcccc} & (0) & (1) & (2) & (3) \\ & 1 & 0 & 4 & 3 & 8 \\ + & & 9 & 4 & 3 & 2 \\ & & 5 & 9 & 7 & 4 \\ \hline & 2 & 5 & 8 & 4 & 4 & . \end{array}$$

Na notação de Stevin o resultado ficaria:  $25_{(0)}8_{(1)}4_{(2)}4_{(3)}$ .

2. No caso da subtração de  $37,658 - 19,876$ .

Na forma de frações decimais da época:

$$\left. \begin{array}{l} 37\frac{6}{10} + \frac{5}{100} + \frac{8}{1000} = 37\frac{658}{1000} \\ 19\frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{6}{1000} = 19\frac{876}{1000} \end{array} \right\} = 37\frac{658}{1000} - 19\frac{876}{1000} = 17\frac{782}{1000}.$$

Usando o algoritmo de Stevin:

$$\begin{array}{rcccc} & (0) & (1) & (2) & (3) \\ & 3 & 7 & 6 & 5 & 8 \\ - & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ \hline & 1 & 7 & 7 & 8 & 2 \end{array}$$

Obtendo  $17_{(0)}7_{(1)}8_{(2)}2_{(3)}$ .

3. A multiplicação  $15,35 \times 12,26$ .

Em notação da época:

$$\left. \begin{array}{l} 15\frac{3}{10} + \frac{5}{100} = 15\frac{35}{100} \\ 12\frac{2}{10} + \frac{6}{100} = 12\frac{26}{100} \end{array} \right\} = 15\frac{35}{100} \times 12\frac{26}{100} = 180 + \frac{39}{10} + \frac{42}{10} + \frac{91}{1000} = 188\frac{191}{1000}$$

Pelo método de Stevin o resultado ficaria  $188_{(0)}1_{(1)}9_{(2)}1_{(3)}$ .

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & & & (0) & (1) & (2) \\
 & & & & 1 & 5 & 3 & 5 \\
 & & & & 1 & 2 & 2 & 6 \\
 \hline
 & & & & 9 & 2 & 1 & 0 \\
 & & & 3 & 0 & 7 & 0 & \\
 + & & 3 & 0 & 7 & 0 & & \\
 & 1 & 5 & 3 & 5 & & & \\
 \hline
 & 1 & 8 & 8 & 1 & 9 & 1 & 0 \\
 & & & & (0) & (1) & (2) & (3) & (4)
 \end{array}$$

4. A divisão  $17,7216 \div 5,68$ .

Na forma de frações da época.

$$\left. \begin{array}{l}
 17\frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{6}{10000} = 17\frac{7216}{10000} \\
 5\frac{6}{10} + \frac{8}{100} = 5\frac{68}{100}
 \end{array} \right\} = 17\frac{7216}{10000} \div 5\frac{68}{100} = 3\frac{12}{100}$$

Pelo método de Stevin os números eram divididos como se fossem naturais e logo após eram colocadas as suas casas decimais.

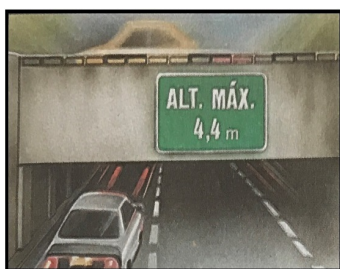
$$\begin{array}{rcccccc|ccc}
 & 1 & 7 & 7 & 2 & 1 & 6 & 5 & 6 & 8 \\
 - & 1 & 7 & 0 & 4 & & & 3 & 1 & 2 \\
 \hline
 & 0 & 0 & 6 & 8 & 1 & & (0) & (1) & (2) \\
 & & - & 5 & 6 & 8 & & & & \\
 \hline
 & & & 1 & 1 & 3 & 6 & & & \\
 & & - & 1 & 2 & 3 & 6 & & & \\
 \hline
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 
 \end{array}$$

Com o uso deste método e a facilidade em resolver operações, esta notação se popularizou viabilizando o uso de divisões das moedas, pesos e medidas em geral (JUCÁ, 2008).

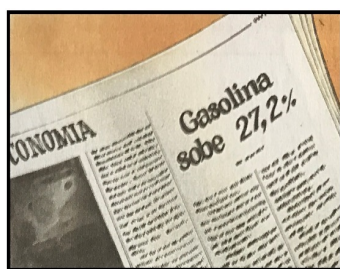
No entanto o primeiro livro em que a vírgula foi usada para escrever os hoje números decimais é de 1592 e teve como autor um cartógrafo, G.A. Magini. Antes dele, outros já tinham usado notações parecidas, mas não tão simples (JAKUBOVIC; LELLIS; IMENES, 2009).

Atualmente há uma grande utilização destas representações decimais, e elas podem ser vistas por toda a parte. Como nos exemplos ilustrados na Figura 66.

Figura 66 – Situações envolvendo números decimais.



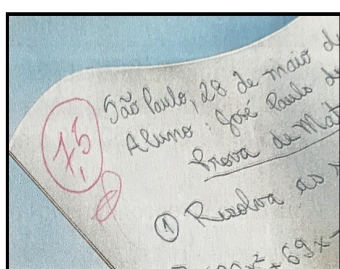
Túnel



Jornal



Refrigerante



Avaliação



Balança



Calculadora

Fonte: (JAKUBOVIC; LELLIS; IMENES, 2009).

Veja uma situação nos recordes mundiais do atletismo, Figura 67, em que os decimais tem um papel fundamental, pois trazem consigo uma precisão na aferição das medidas.

Figura 67 – Largada dos 100 metros rasos.



Fonte: < [https://pt.wikipedia.org/wiki/Atletismo\\_nos\\_Jogos\\_Olímpicos\\_de\\_Verão\\_de\\_2012\\_-\\_100\\_m\\_masculino](https://pt.wikipedia.org/wiki/Atletismo_nos_Jogos_Olímpicos_de_Verão_de_2012_-_100_m_masculino)>.



Tomemos como exemplo o jamaicano Usain Bolt, recordista mundial dos 100 metros rasos, obtido durante o campeonato mundial de atletismo em Berlim, na Alemanha, em 16 de agosto de 2009, com a marca de 9,58 segundos.

O tempo que o jamaicano levou do bloco de partida até a linha de chegada foi registrado da maneira mais acurada possível. Até 1960 os tempos eram registrados manualmente e só até os décimos de segundo. Logo, um atleta que correria 100 metros em 10,4 segundos, na aferição manual, poderia estar em qualquer casa decimal de 10,41 à 10,49. Na aferição eletrônica a partir de 1968, já era possível determinar os tempos com duas casas decimais, desta forma tinha-se certeza que o atleta fez 100 metros em 10,42 ou em 10,48, por exemplo. Com isso, as medidas dos tempos com os sistemas eletrônicos, acabaram sendo mais precisas do que as medidas com os sistemas manuais.

A seguir alguns aplicações de representações decimais.

**Exemplo 4.5.** O Sr. Geraldo é caminhoneiro e iniciou uma viagem numa estrada do Paraná. Após dirigir 57km, teve de voltar 12,8km para apanhar outra carga, andou mais 37,8km e olhando para a placa da estrada, viu que estava no quilômetro 150.

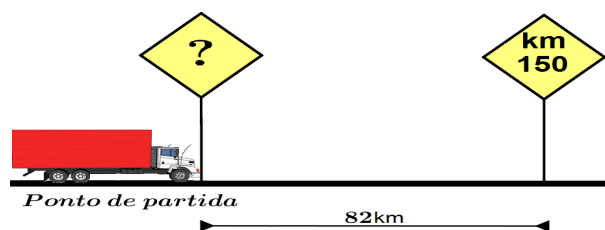
- Em que quilômetro da estrada o Sr. Geraldo iniciou sua viagem?
- Quantos quilômetros andou ao todo?

**Resolução:**

- A distância entre o ponto de partida e o ponto de chegada do Sr. Geraldo foi de

$$57 - 12,8 + 37,8 = 82\text{km.}$$

Figura 68 – Caminhão se deslocando até o quilômetro 150.



Fonte: Autor.

Observando a Figura 68 vemos que o ponto de partida está 82km antes da placa que indica o quilômetro 150. Portanto, o ponto de partida foi no quilômetro

$$150 - 82 = 68\text{km.}$$

- Ele andou no total

$$57 + 12,8 + 37,8 = 107,6\text{km.}$$

## 4.6 EXERCÍCIOS

Nesta seção será apresentado alguns exercícios relacionados a frações e a números decimais. As soluções encontram-se no Apêndice A.

1. Represente com frações unitárias a fração  $\frac{2}{17}$ .
2. Como os egípcios faziam para repartir 9 pães entre 10 trabalhadores. Conforme Figura 69.

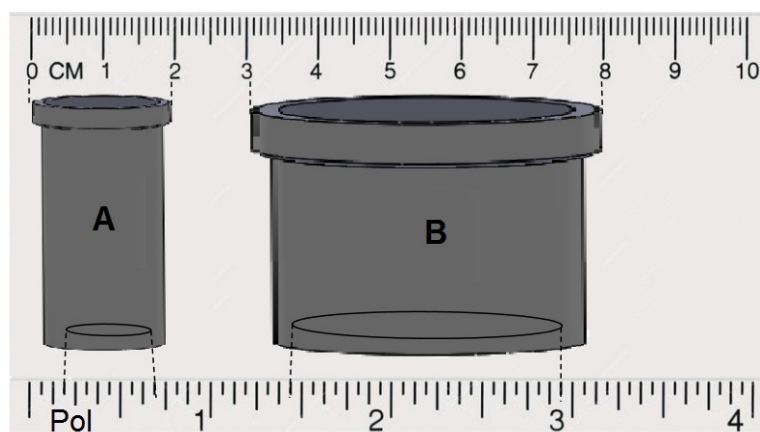
Figura 69 – Dez pratos e nove pães.



Fonte: Autor.

3. Sabendo que o diâmetro interno de um tubo é em polegadas e o externo é em milímetros, determine de quantas polegadas e de quantos milímetros é cada cano da Figura 70.

Figura 70 – Diâmetro dos tubos.



Fonte: Autor.

4. Para transformar uma medida dada de polegadas para milímetros, basta multiplicar a polegada por 25,4mm. Assim, se você tem em casa uma furadeira e um conjunto de brocas medidas em milímetros, para instalar a secadora de roupas de sua mãe, é necessário fazer um furo na parede de  $\frac{5}{16}$ ". Qual a medida da broca que você precisa para fazer o furo?

5. Seguindo o raciocínio da Seção 4.4, represente as frações dos produtos a seguir:

$$1 \times 2$$

$$11 \times 22$$

$$111 \times 222$$

$$1111 \times 2222$$

$$11111 \times 22222.$$

6. Usando frações decimais, ou seja, com denominador sendo uma potência de base 10, calcule  $23,67 \times 2,45$ .

A seguir uma proposta de plano de aula para o 6º ano do ensino fundamental sobre adição e subtração de frações.

#### 4.7 PROPOSTA DE PLANO DE AULA PARA O 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

##### OBJETIVO GERAL

Fazer o aluno identificar, compreender e desenvolver a ideia de fração como um todo, bem como resolver operações de adição e subtração de frações, conseguindo assim resolver situações problemas que envolvam frações.

##### OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desenvolver a ideia de fração;
- Fazer com que os alunos compreendam a ideia de número fracionário bem como realizem cálculos de adição e subtração de números racionais;
- Incentivar a resolução de problemas com números racionais que envolvam as operações de adição e subtração de frações.

##### JUSTIFICATIVA

Devido a grande dificuldade que o aluno tem em entender o conceito de fração, tornam-se necessárias aulas diferenciadas para sanar estas dificuldades.

##### MATERIAL A SER UTILIZADO

Pode-se utilizar vários recursos materiais e tecnológicos, tais como:

- data show com utilização de slides para melhor visualização e compreensão dos alunos;
- lousa e canetão ou giz se for o caso;
- computador para jogos e eventuais situações que julgar necessária sobre o tema;
- material escolar dos alunos.

## METODOLOGIA

- Proponha aos estudantes que visitem, em duplas o laboratório de informática e façam um pequeno texto sobre a história das frações.

- Depois poderão ser realizadas pelos alunos medições em objetos como: porta da sala, janela, carteira ou em algum local favorável na escola, utilizando elementos variados, como tênis, palmas, ou qualquer objeto sem escala.

- Peça para que os alunos anotem as medidas obtidas. Essa atividade pode ser feita em grupos.

- Na socialização das marcações obtidas, valorize aquelas que não foram exatas e pergunte qual foi a solução dada pelo grupo para que chegassem ao resultado. Inclua comentários que verbalizem ações e pensamentos do estudante.

- Em seguida pergunte qual a semelhança entre essa atividade e aquela realizada pelos egípcios do texto pesquisado. Após todos darem suas impressões, peça que cada grupo escreva tudo o que compreenderam sobre a atividade realizada.

- Logo após de corrigidos e comentados os relatos, apresente as frações, como uma possível solução para o problema.

- Depois que os alunos perceberem a necessidade de um número não inteiro para resolver alguns problemas, chegou a sua vez de conduzi-los no conhecimento das técnicas matemáticas para operá-los adequadamente.

- Apresente o conceito de frações e da notação utilizada, definindo a função do numerador e do denominador de cada fração.

- Faça o aluno escrever e comparar números racionais de uso frequente, nas representações fracionárias.

- Utilize situações que envolvam frações do dinheiro.

- Faça com que os alunos identifiquem e produzam frações equivalentes.

- Apresente as operações de adição e subtração envolvendo números fracionários com denominadores iguais e diferentes.

- Elabore algumas situações problema, em que os alunos utilizem a adição ou subtração de frações.

## ALGUNS EXEMPLOS DE SITUAÇÕES PROBLEMA ENVOLVENDO ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES

1) Paula iniciou uma viagem com  $\frac{3}{4}$  do tanque de gasolina abastecido e gastou durante essa viagem o equivalente a  $\frac{1}{2}$  do tanque. A gasolina que sobrou equivale a que fração do tanque?

2) Três automóveis estão indo de A para B. O primeiro veículo percorreu  $\frac{1}{4}$  da distância de A até

B, o segundo veículo percorreu  $\frac{1}{2}$  da distância de A até B e o terceiro percorreu  $\frac{5}{6}$  da distância de A até B. Quanto do percurso de A até B cada um já completou e determine:

- a) A diferença de distância entre o primeiro e o segundo veículo.
- b) A diferença de distância entre o primeiro e o terceiro veículo.
- c) A diferença de distância entre o segundo e o terceiro veículo.

Para finalizar solicite aos alunos que façam uma síntese do que estudamos até aqui. Esta síntese poderá ser realizada por meio de texto, história ou desenho livre que represente o que foi estudado. Esta atividade poderá ser realizada como tarefa de casa.



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscou-se neste trabalho uma abordagem histórica e atual de alguns conceitos matemáticos no intuito de despertar o interesse dos alunos.

Abordamos o surgimento da geometria através de técnicas de mensuração, vimos um resultado importante feito por Eratóstenes no Século III, além de apresentarmos algumas aplicações de conceitos de geometria como: proporção, teorema de Pitágoras e simetria em situações do cotidiano.

Na parte de equações do segundo grau, vimos como o povo babilônico lidava com situações que recaiam em uma equação do segundo grau, seguido de algumas aplicações destas equações quadráticas na atualidade.

Nas frações e decimais, vimos a contextualização histórica destes números e a importância destes números nos dias atuais como medidas de precisão.

Para finalizar, acreditamos que o ensino da Matemática possa ser uma aprendizagem mais significativa para os estudantes quando os mesmos conhecem o contexto histórico dos povos que buscaram na matemática conceitos para resolver seus problemas e onde estes podem ser usados nos dias atuais. Além disso, associar personagens que contribuíram para a evolução do tema estudado, proporciona um conhecimento da história da matemática na humanidade e contribui de forma significativa para a formação dos alunos. Mas para que isso ocorra, é fundamental a precisão da linguagem matemática, suas conexões entre diferentes temas e aplicações.

Um outro fator importante do aprendizado, além do contexto histórico, é desenvolver em sala de aula pequenas atividades que exercitem o raciocínio lógico-dedutivo com a resolução de problemas menores, assim o professor pode tornar esta atividade um hábito sem que os alunos percebam, abrindo espaço a cada dia, para a introdução de outros problemas com um grau mais elevado de dificuldade, fazendo com que o aluno tenha que pensar um pouco mais e rever estratégias para tentar resolver estes problemas. Estas atividades podem desenvolver intelectualmente os alunos, tanto na interpretação de situações problema, como na organização dos dados e isso irá melhorar seu desempenho dentro e fora de sala de aula.





## REFERÊNCIAS

- ASSIS, J. G. et al. **Licenciatura em matemática a distância**: livro 8. João Pessoa. Paraíba: UFPB, 2011.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. 1. ed. São Paulo: Edgar Blucher, EDUSP, 1974. v. 1.
- BRASIL Ministério da Educação e do Desporto. **Secretaria de educação fundamental**: PCN - parâmetros curriculares nacionais 3º e 4º ciclos (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BUNT, L. N. H.; JONES, P. S.; BEDIANT, J. D. **From egypt to Benjamin Banneker**: african origins of false position solutions. 1. ed. Toronto: Vita Mathematica, 1992. v. 1.
- COSTA FILHO, E. **Matrizes**: uma aplicação no ensino médio a partir de transformações geométricas. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Curitiba, 2013.
- EVES, H. **Introdução a história da matemática**. 5. ed. São Paulo: Unicamp, 2011. v. 1.
- IFRAH, G. **História universal dos algorismos**. 1. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1.
- JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. C.; IMENES, L. M. **Pra que serve a matemática**: geometria. 1. ed. São Paulo: Atual editora LTDA, 1992.
- \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_.: equações do 2º grau. 7. ed. São Paulo: Atual editora LTDA, 1992.
- \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_.: frações e números decimais. 17. ed. São Paulo: Atual editora LTDA, 2009.
- JUCÁ, R. de S. **Uma sequência didática para o ensino das operações com os números decimais**. Universidade do Estado do Pará. Belém: Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Educação, 2008.
- LIMA, E. L. **Isometria**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM-sociedade brasileira de matemática, 2007. v. 1.
- LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2.
- LOPES, A. V. et al. **Resolução de problemas**: atividades matemáticas na sala de aula. Lisboa: Cortez, 2005.
- LUMPKIN, B. **The historical roots of elementary mathematics**. 1. ed. Nova Iorque: Dover Publications, 1988. v. 1.
- MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2001. v. 1.
- SIMÕES, F. B. **Quebra de simetria**. 2017. Disponível em: <<http://matemateca.ime.usp.br/?q=quebra-simetria>>. Acesso em: 28 nov. 2017.
- TERRA: Planetas e planetas anões. 2013. Disponível em: <<http://www.bdt.org/bdt/avifauna/aves>>. Acesso em: 08 nov. 2017.

WALLE, J. A. D. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.

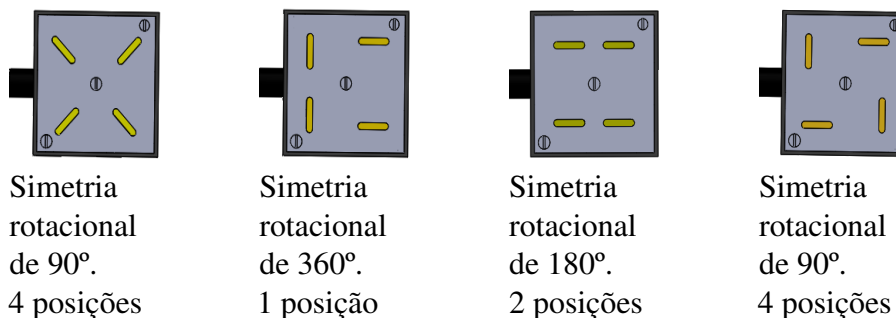
## APÊNDICE A – RESOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

Neste apêndice apresentamos as soluções dos exercícios dos Capítulos 3, 4 e 5.

### CAPÍTULO 3

#### Exercício 1

Figura 71 – Plugues de telefone.



Fonte: Autor.

□

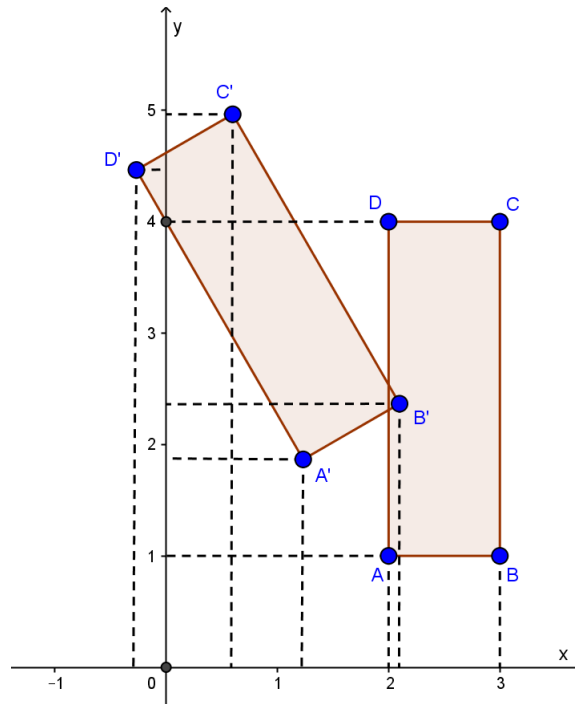
#### Exercício 2

Temos  $A = (2, 1)$ ,  $B = (3, 1)$ ,  $C = (3, 4)$ ,  $D = (2, 4)$  e  $\theta = 30^\circ$ . Seja  $A' = (x'_1, y'_1)$ ,  $B' = (x'_2, y'_2)$ ,  $C' = (x'_3, y'_3)$  e  $D' = (x'_4, y'_4)$  as novas coordenadas de  $A, B, C$  e  $D$  respectivamente após a rotação. Agora usando a multiplicação de matrizes (2.4), obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\operatorname{sen} 30^\circ \\ \operatorname{sen} 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}-1}{2} & \frac{3\sqrt{3}-1}{2} & \frac{3\sqrt{3}-4}{2} & \frac{2\sqrt{3}-4}{2} \\ \frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{3+\sqrt{3}}{2} & \frac{3+4\sqrt{3}}{2} & \frac{2+4\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Temos  $A' = \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $B' = \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  
 $C' = \left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2}, \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$  e  $D' = \left(\frac{2\sqrt{3}-4}{2}, \frac{2+4\sqrt{3}}{2}\right)$ . Logo a nova posição do retângulo  $ABCD$  é o retângulo  $A'B'C'D'$  como pode ser visto na Figura 72.

Figura 72 – Retângulo ABCD rotacionado.



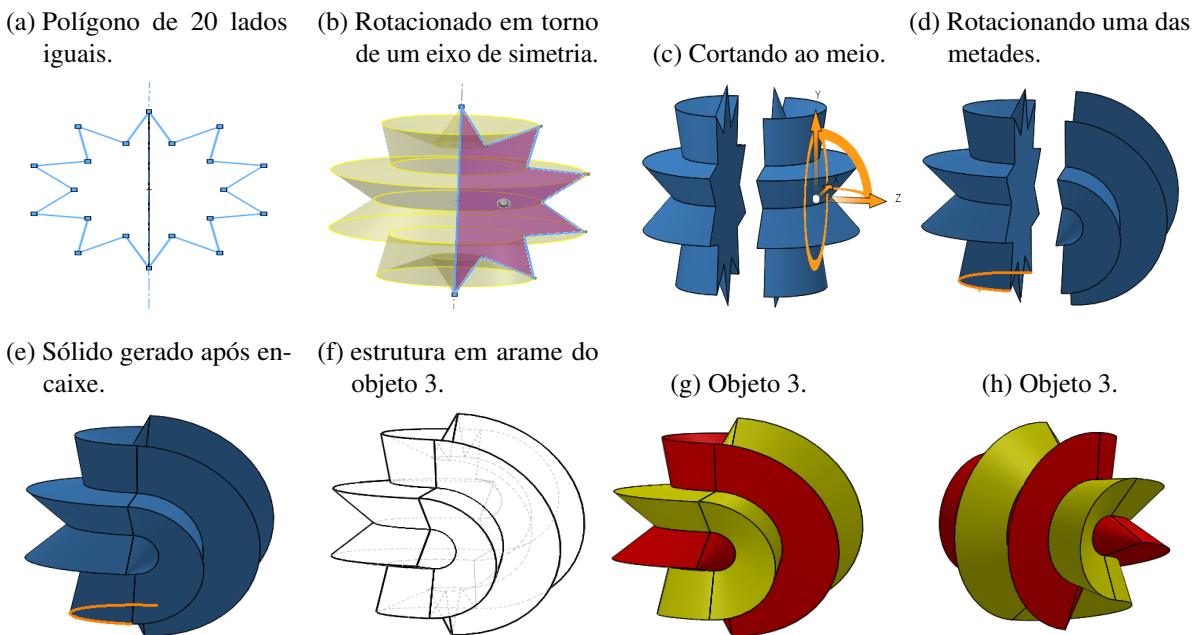
Fonte: Autor.



**Exercício 3**

Dado um polígono de 20 lados iguais tracemos um eixo de simetria.

Figura 73 – Construção do objeto 3 da Seção 2.6.



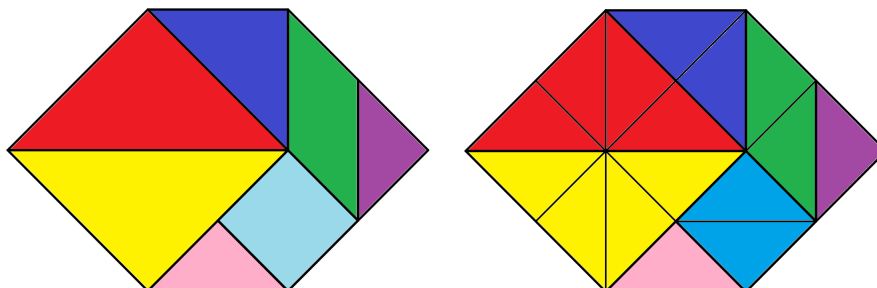
Fonte: Autor.



### Exercício 4

Com base na Figura 74, podemos concluir que:

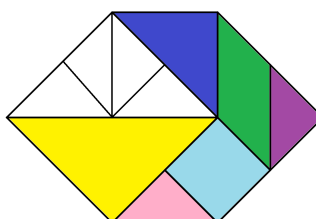
Figura 74 – Hexágono.



Fonte: Autor.

- 1 O triângulo maior corresponde à  $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$  do Hexágono como pode ser observado na parte branca da Figura 75.

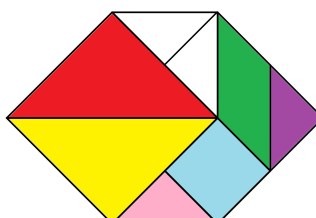
Figura 75 – Triângulo maior do Hexágono.



Fonte: Autor.

- 2 O triângulo médio corresponde à  $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$  do Hexágono como pode ser observado na parte branca da Figura 76.

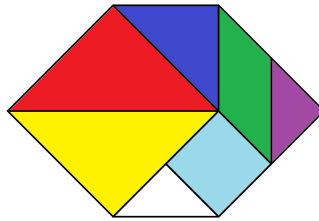
Figura 76 – Triângulo médio do Hexágono.



Fonte: Autor.

- 3 O triângulo pequeno corresponde à  $\frac{1}{16}$  do Hexágono como pode ser observado na parte branca da Figura 77.

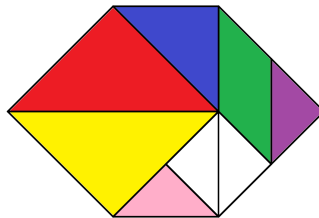
Figura 77 – Triângulo pequeno do Hexágono.



Fonte: Autor.

- 4 O quadrado corresponde à  $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$  do Hexágono como pode ser observado na parte branca da Figura 78.

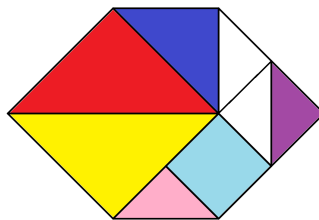
Figura 78 – Quadrado do Hexágono.



Fonte: Autor.

- 5 O paralelogramo corresponde à  $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$  do Hexágono como pode ser observado na parte branca da Figura 79.

Figura 79 – Paralelogramo do Hexágono.



Fonte: Autor.

Assim podemos verificar que:

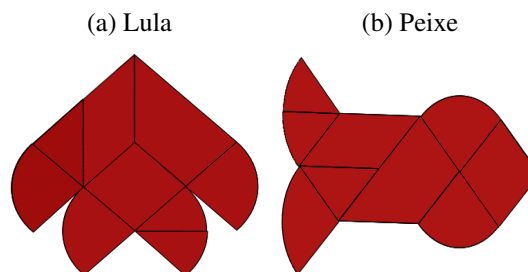
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

□

### Exercício 5

Veja na Figura 80, outras formas montadas a partir do quebra-cabeça do coração em pedaços.

Figura 80 – Formas montadas a partir do quebra cabeça da Figura 49 da Subseção 2.9



Fonte: Autor.

□

## CAPÍTULO 4

### Exercício 1

Inicialmente vamos escrever o problema usando a linguagem matemática moderna, logo:

$$\left(x + \frac{2x}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2x}{3}\right) = 10.$$

Escolhendo 9 como um número inteiro divisível por 3, temos:

$$\left(9 + \frac{18}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(9 + \frac{18}{3}\right) = (9 + 6) - \frac{1}{3}(9 + 6) = 15 - 5 = 10.$$

Assim o valor procurado é 9.

□

### Exercício 2

Como o perímetro é 24, então o comprimento mais a largura é 12. Assim:

- Tome metade da soma do comprimento pela largura (isto dá 6);
- Multiplique 6 por 6 (o que é 36);
- Subtraia 34,04 de 36 (que dá 1,96);
- 1,96 é o quadrado de 1,4;
- Agora acrescente 1,4 a 6 e subtraia 1,4 de 6 (o que dá 7,4 e 4,6);
- Multiplique 7,4 por 4,6 (resultando 34,04).

Assim o comprimento e a largura procurados são 7,4cm e 4,6cm.

□

**Exercício 3**

Temos que a distância percorrida após observar o obstáculo é 100 metros. Assim:

$$\begin{aligned}d &= \frac{V}{10} + \frac{V^2}{250} \\100 &= \frac{V}{10} + \frac{V^2}{250} \\25000 &= 25V + V^2 \\0 &= V^2 + 25V - 25000\end{aligned}$$

Usando a fórmula de resolução de equações do segundo grau temos:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-25000)}}{2 \cdot 1} \\x &= \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 100000}}{2} \\x &= \frac{-25 \pm \sqrt{100625}}{2} \\x &= \frac{-25 \pm 25\sqrt{161}}{2}.\end{aligned}$$

Como, somente o valor positivo nos interessa, temos

$$x = \frac{-25 + 25\sqrt{161}}{2} \cong 146,107.$$

Desta forma o automóvel vinha a aproximadamente 146km/h.

□

**CAPÍTULO 5****Exercício 1**

Usando a fórmula egípcia, ou seja (4.2), temos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{p} &= \frac{1}{\left(\frac{p+1}{2}\right)} + \frac{1}{p\left(\frac{p+1}{2}\right)} \\ \frac{2}{17} &= \frac{1}{\left(\frac{17+1}{2}\right)} + \frac{1}{17\left(\frac{17+1}{2}\right)} \\ \frac{2}{p} &= \frac{1}{\left(\frac{18}{2}\right)} + \frac{1}{17\left(\frac{18}{2}\right)} \\ \frac{2}{17} &= \frac{1}{9} + \frac{1}{153}.\end{aligned}$$

□



### Exercício 2

Primeiro usavam a maior fração para dividir os 9 pães, ou seja,  $\frac{2}{3}$ . Depois encontravam uma fração para dividir o restante em 10 partes iguais, neste caso  $\frac{1}{5}$ . O restante do  $\frac{1}{3}$  era dividido em  $\frac{1}{30}$ . Desta forma cada trabalhador recebe

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30} = \frac{9}{10}$$

A Figura 81 ilustra as frações.

Figura 81 – Frações dos pães.



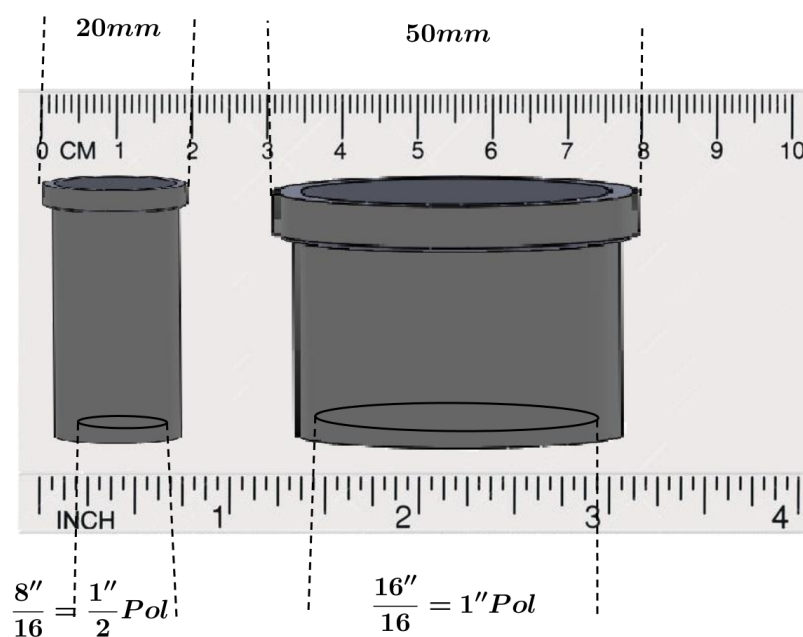
Fonte: Autor.

□

### Exercício 3

Observe que uma polegada possui 16 subdivisões ou 16 polegadas fracionárias, desta forma temos:

Figura 82 – Diâmetro dos tubos.



Fonte: Autor.

□

**Exercício 4**

$$\frac{5}{16} \cdot 25,4 = \frac{127}{16} = 7,9375mm.$$

□

**Exercício 5**

Observe que

$$1 \times 2 = 1 \times 1 \times 2 = 2 \times 1$$

$$11 \times 22 = 11 \times 11 \times 2 = 2 \times 121$$

$$111 \times 222 = 111 \times 111 \times 2 = 2 \times 12321$$

$$1111 \times 2222 = 1111 \times 1111 \times 2 = 2 \times 1234321$$

$$11111 \times 22222 = 11111 \times 11111 \times 2 = 2 \times 123454321.$$

Desta forma

$$1 \times 2 = 2 \times \frac{1 \times 1}{1}$$

$$121 \times 2 = 2 \times \frac{22 \times 22}{1 + 2 + 1}$$

$$12321 \times 2 = 2 \times \frac{333 \times 333}{1 + 2 + 3 + 2 + 1}$$

$$1234321 \times 2 = 2 \times \frac{4444 \times 4444}{1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1}$$

$$123454321 \times 2 = 2 \times \frac{55555 \times 55555}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}.$$

Logo

$$2 = \frac{1 \times 2}{1}$$

$$246 = \frac{22 \times 44}{1 + 2 + 1}$$

$$24642 = \frac{333 \times 666}{1 + 2 + 3 + 2 + 1}$$

$$2468642 = \frac{4444 \times 8888}{1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1}$$

$$246908642 = \frac{55555 \times 111110}{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1}.$$

□

**Exercício 6**

$$\left. \begin{array}{l} 23\frac{6}{10} + \frac{7}{100} = 23\frac{67}{100} \\ 2\frac{4}{10} + \frac{5}{100} = 2\frac{45}{100} \end{array} \right\} = 23\frac{67}{100} \times 2\frac{45}{100} = 46 + 10\frac{35}{100} + 1\frac{34}{100} + \frac{3015}{10000} = 57\frac{9915}{10000}.$$

□

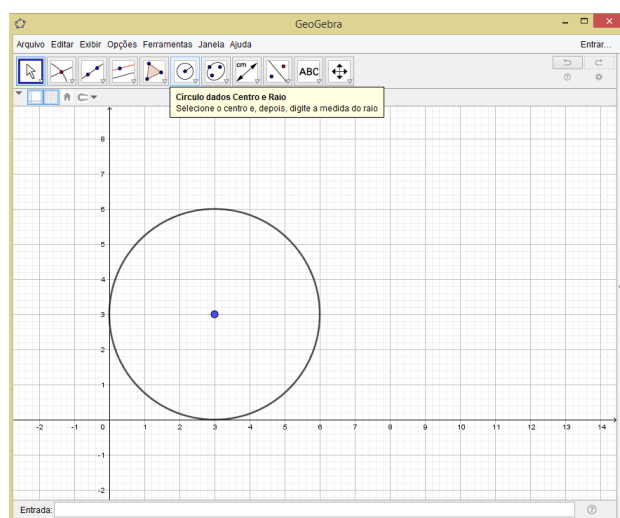


## APÊNDICE B – CONSTRUÇÃO DINÂMICA DA ROTAÇÃO DE DOIS TRIÂNGULOS CONSECUTIVOS

Veja neste apêndice os passos para construção dinâmica da rotação dos dois triângulos consecutivos referente a Seção 2.2, utilizando o aplicativo GeoGebra.

- 1- Construa uma circunferência de raio 3, conforme Figura 83.

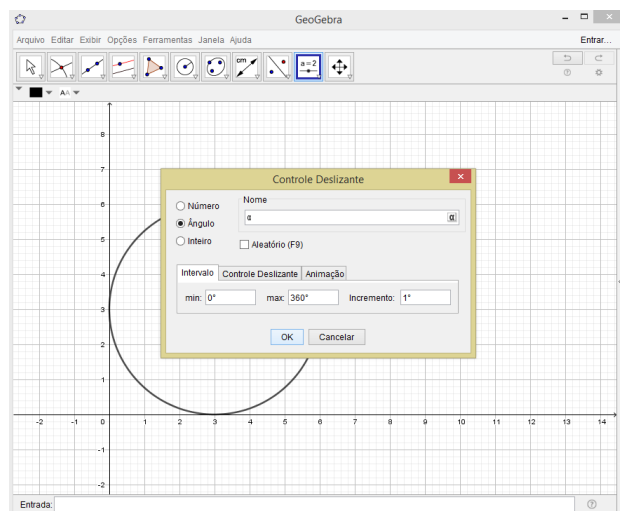
Figura 83 – Aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autor.

- 2- Construa um controle deslizante e chame de  $\alpha$ , conforme Figura 84.

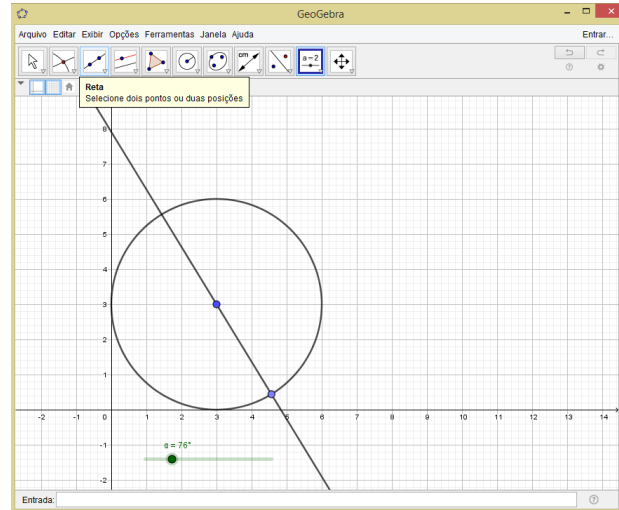
Figura 84 – Aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autor.

- 3- Construa uma reta passando pelo centro da circunferência e marque o ponto de interseção da circunferência com esta reta, conforme Figura 85.

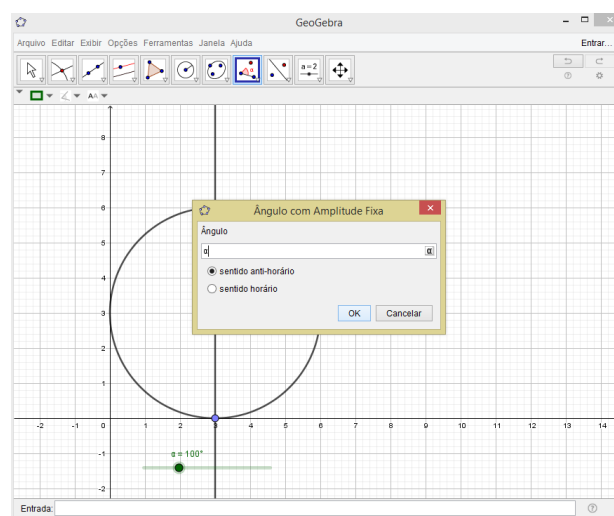
Figura 85 – Aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autor.

- 4- Construa um ângulo de amplitude fixa, clicando primeiro no ponto de interseção da reta com a circunferência, depois no centro da circunferência e de o nome de  $\alpha$  para este ângulo, conforme Figura 86.
- Observe se ao movimentar o controle deslizante o ângulo criado também se movimenta.

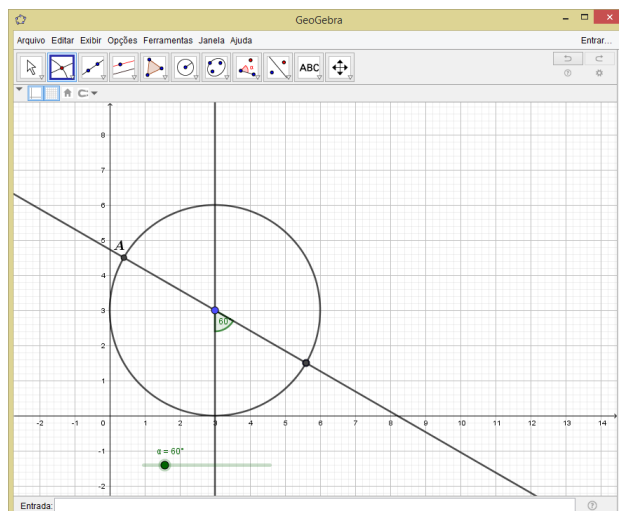
Figura 86 – Aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autor.

- 5- Construa uma reta passando pelos pontos deste ângulo, tal que a reta se movimente conforme se mova no controle deslizante, conforme Figura 87.

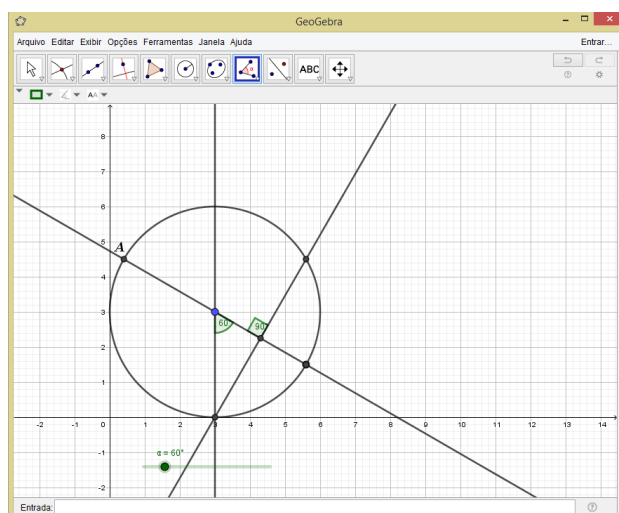
Figura 87 – Aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autor.

- 6- Encontre o ponto médio desta última reta criada entre o centro da circunferência e o ponto de interseção na circunferência. Agora construa uma reta perpendicular a esta reta passando por este ponto médio e usando a ferramenta de interseção marque os pontos de interseção na circunferência com esta última reta criada, conforme Figura 88.

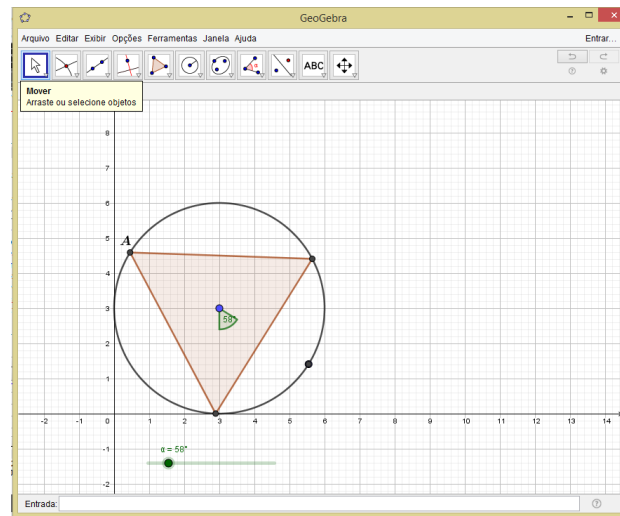
Figura 88 – Aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autor.

- 7- Utilizando a ferramenta de construção de polígonos construa um triângulo com vértices nos dois últimos pontos criados, conforme Figura 89 e retire as retas para melhor visualização do triângulo.

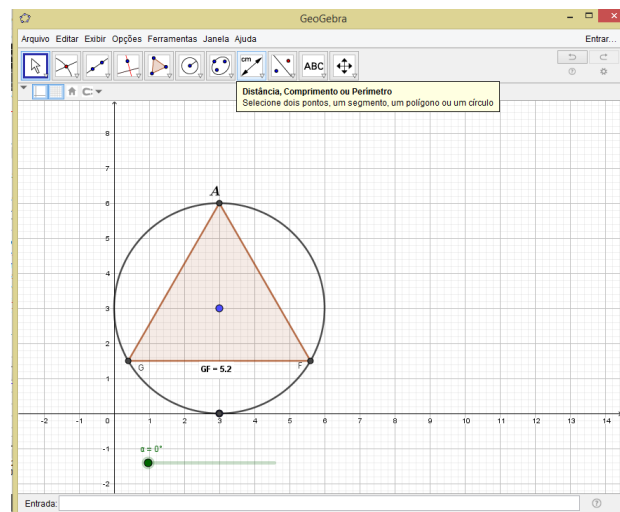
Figura 89 – Aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autor.

- 8- Primeiro com a ferramenta distância, determine o comprimento de um dos lados do triângulo, conforme Figura 90.

Figura 90 – Aplicativo GeoGebra.

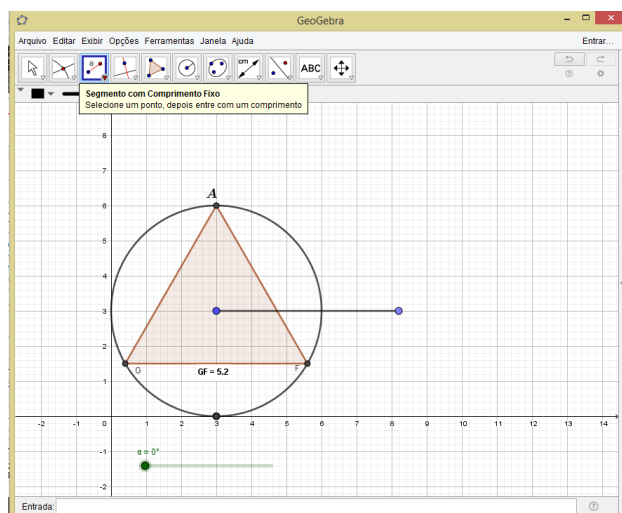


Fonte: Autor.

- 9- Vamos construir o segundo triângulo. Com a ferramenta segmento com comprimento fixo, marque sobre o centro da circunferência e coloque o valor encontrado no lado do triângulo, conforme Figura 91.



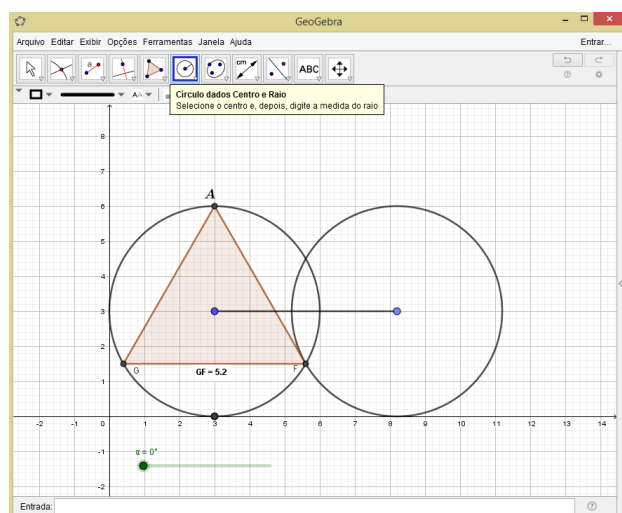
Figura 91 – Aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autor.

- 10- Com a ferramenta circunferência dado centro e raio, construa uma circunferência de raio 3 e centro no outro ponto do segmento, conforme Figura 92.

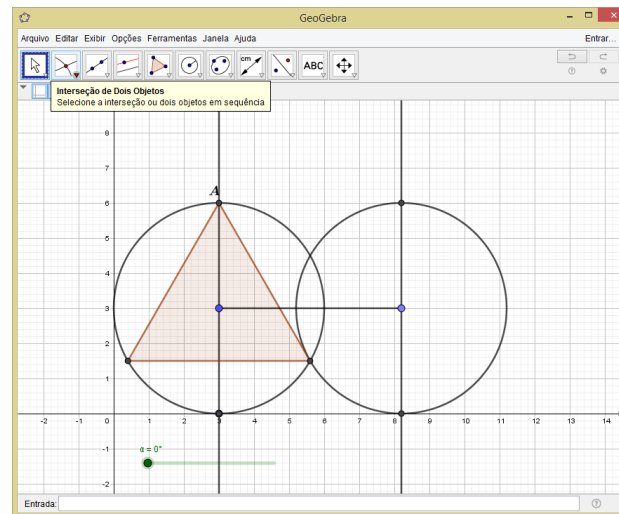
Figura 92 – Aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autor.

- 11- Construa uma reta passando por um dos vértices do triângulo e pelo centro da circunferência circunscrita a este triângulo, depois com a ferramenta retas paralelas construa uma reta paralela a esta última reta criada passando pelo centro da outra circunferência e marque os pontos de interseção desta reta com a circunferência, conforme Figura 93.

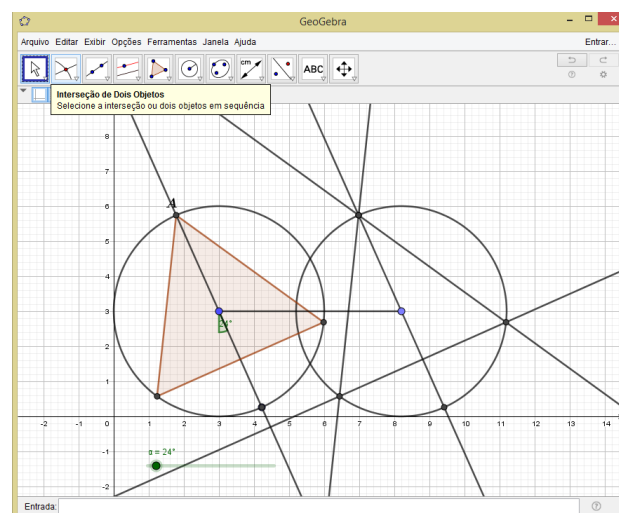
Figura 93 – Aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autor.

- 12- Com a ferramenta retas paralelas, construa retas paralelas a dois dos lados do triângulo passando pelo ponto de interseção da última reta criada com a circunferência. Agora com a ferramenta interseção marque os pontos de interseção destas retas criadas com a circunferência, conforme Figura 94.

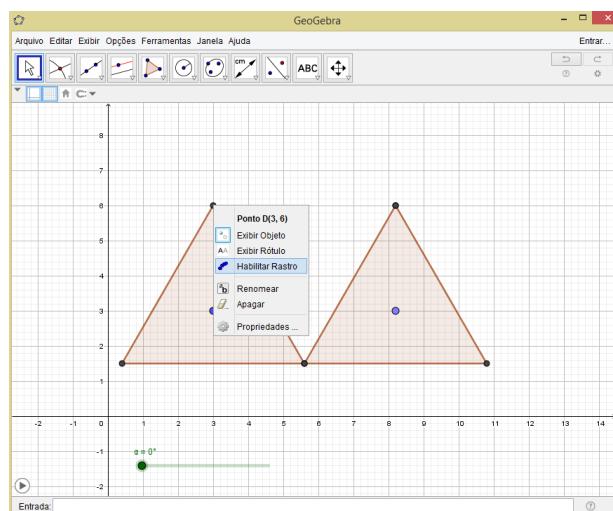
Figura 94 – Aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autor.

- 13- Com a ferramenta polígono construa um triângulo nestes novos vértices e retire as retas para melhor visualização. Escolha um ponto e com o botão direito do mouse selecione habilitar rastro deste ponto, conforme Figura 95.

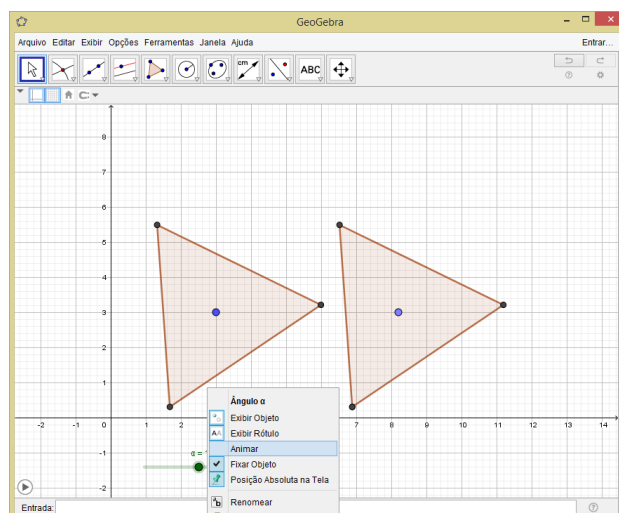
Figura 95 – Aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autor.

- 14- Clique no controle deslizante com o botão direito do mouse e selecione animação, conforme Figura 96.

Figura 96 – Aplicativo GeoGebra.



Fonte: Autor.