UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

DIOGO PELAES FRANCO PEREIRA

Transformações geométricas com aplicações no GeoGebra para o Ensino Médio

Campinas

2017

Diogo Pelaes Franco Pereira

Transformações geométricas com aplicações no GeoGebra para o Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Claudina Izepe Rodrigues

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Diogo Pelaes Franco Pereira e orientada pela Profa. Dra. Claudina Izepe Rodrigues.

Campinas

2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P414t

Pereira, Diogo Pelaes Franco, 1982-
Transformações geométricas com aplicações no GeoGebra para o ensino médio / Diogo Pelaes Franco Pereira. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Claudina Izepe Rodrigues.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria. 2. Matrizes (Matemática). 3. GeoGebra (Programa de computador). I. Rodrigues, Claudina Izepe, 1953-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Geometric transformations with GeoGebra applications for high school
Palavras-chave em inglês:
Geometry
Matrices
GeoGebra (Computer program)
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Claudina Izepe Rodrigues [Orientador]
Cintya Wink de Oliveira Benedito
Roberto Andreani
Data de defesa: 14-12-2017
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado profissional defendida em 14 de dezembro de 2017 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Prof(a). Dr(a). CINTYA WINK DE OLIVEIRA BENEDITO

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Agradecimentos

Primeiramente aos meus familiares que sempre me apoiaram e me incentivaram em todos os momentos.

À Professora Claudina Izepe Rodriguese pelos ensinamentos e imensa dedicação.

Às estudantes da Escola Técnica de Paulínia que participaram das práticas deste trabalho.

À CAPES pelo incentivo financeiro, estímulo relevante para melhoria do ensino no país.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo básico de matrizes com o objetivo de desenvolver algumas transformações geométricas no plano e no espaço, destinado a professores de Ensino Médio. Apresentamos a definição de transformação linear e exploramos as transformações geométricas por meio de suas matrizes associadas. Após embasado os conceitos, propomos sequências de atividades voltadas ao Ensino Médio, onde exploramos as transformações geométricas e suas matrizes com a finalidade de simular um braço robótico no software GeoGebra. Finalizamos este trabalho relatando como ocorreram as aplicações das dez atividades sugeridas a estudantes do Ensino Médio.

Palavras-chave: Transformações geométricas; Matriz de rotação; GeoGebra.

Abstract

We present a basic study of matrices with the objective of developing some geometric transformations in the plane and in space, destined for High School teachers. We present the definition of linear transformation and explore the geometric transformations using their associated matrices. After basing the concepts, we propose sequences of activities directed to High School students, where we explore the geometric transformations and their matrices with the purpose of simulating a robotic arm in GeoGebra software. We finish this work by reporting how the applications of the ten activities suggested to High School students occurred.

Keywords: Geometric transformations; Rotation matrix; GeoGebra.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Translação $T_{(2,3)}$ de um quadrado. 28
Figura 2 – Aplicação da transformação de dilatação em um triângulo. 29
Figura 3 – Aplicação da transformação de contração em um triângulo. 29
Figura 4 – Aplicação da transformação de escala em um triângulo. 30
Figura 5 – Reflexão de $(2, 1)$ em torno do eixo-x 31
Figura 6 – Reflexão de $(2, 1)$ em torno do eixo-y 31
Figura 7 – Reflexão de $(2, 1)$ em torno de $y = x$ 32
Figura 8 – Rotação do ponto A em torno da origem. 32
Figura 9 – Rotação de 90° do triângulo de vértices $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(3, 2)$ em torno da origem. 34
Figura 10 – Translação $T_{\mathbf{u}}$, sendo $\mathbf{u} = (-2, 1, 5/2)$, de um cubo. 35
Figura 11 – Aplicação da transformação de dilatação em um cubo. 36
Figura 12 – Aplicação da transformação de contração em um cubo. 37
Figura 13 – Aplicação da transformação de escala no eixo-z em um cubo. 38
Figura 14 – Reflexão de uma pirâmide em torno do plano xy. 39
Figura 15 – Reflexão de uma pirâmide em torno do plano $x + y = 0$. 39
Figura 16 – Rotação de uma pirâmide por um ângulo 120°em torno do eixo-z. . . . 41
Figura 17 – Reflexão de uma pirâmide em yz. 42
Figura 18 – Rotação de uma pirâmide por 160°em torno de y. 42
Figura 19 – Reflexão de uma pirâmide em yz e rotação por 160°em torno de y. . . 43
Figura 20 – Ângulos α e β relacionados ao vetor $\mathbf{u}$. 43
Figura 21 – Rotação de uma pirâmide por 130°em torno de um vetor $\mathbf{u}$. 44
Figura 22 – Estudantes da ETEP apresentando as atividades na “Escola Aberta 2017” 85

Lista de tabelas

Tabela 1 – Custos em reais das peças A, B e C nas fábricas 1 e 2. 17
Tabela 2 – Novos custos em reais das peças A, B e C nas fábricas 1 e 2. 17
Tabela 3 – Quantidade de produtos A, B e C vendidos nas lojas 1 e 2. 18
Tabela 4 – Preços de cada produto A, B e C nas lojas 1 e 2. 18
Tabela 5 – Transformações de reflexão 31
Tabela 6 – Transformações de reflexão no espaço 38
Tabela 7 – Atividades e número de aulas estimadas. 45

Sumário

	Introdução	**12**
1	**MATRIZES**	**13**
1.1	**O que são matrizes?**	**13**
1.2	**Operações matriciais**	**15**
2	**TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS**	**25**
2.1	**Transformação Linear**	**25**
2.2	**Transformações Geométricas no Plano**	**27**
2.2.1	Transformação de translação	27
2.2.2	Transformação de dilatação	28
2.2.3	Transformação de contração	29
2.2.4	Transformação de escala	30
2.2.5	Transformação de reflexão	30
2.2.6	Transformação de rotação	32
2.3	**Transformações Geométricas no Espaço**	**34**
2.3.1	Transformação de translação no espaço	34
2.3.2	Transformação de dilatação no espaço	35
2.3.3	Transformação de contração no espaço	36
2.3.4	Transformação de escala no espaço	37
2.3.5	Transformação de reflexão no espaço	38
2.3.6	Transformações de rotação no espaço	40
2.3.7	Transformações de rotação em torno de um eixo arbitrário no espaço	43
3	**ATIVIDADES NO GEOGEBRA**	**45**
3.1	**Matrizes no GeoGebra**	**46**
3.1.1	Matrizes e operações matriciais no GeoGebra	46
3.2	**Transformações Geométricas no Plano**	**49**
3.2.1	Aplicação de matrizes em um ponto	49
3.2.2	Translação de um polígono	51
3.2.3	Dilatação e contração de um polígono	54
3.2.4	Rotação em torno de um ponto no plano	57
3.2.5	Simulação de um braço robótico com duas articulações no plano	60
3.3	**Transformações Geométricas no Espaço**	**64**
3.3.1	Rotação de um ponto no espaço	64
3.3.2	Rotação no espaço de uma haste de comprimento variado	67

3.3.3 Simulação de um braço robótico com duas articulações no espaço 72
3.3.4 Simulação de um braço robótico com duas articulações e uma garra no espaço 77

4 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES 85

Considerações Finais 87

REFERÊNCIAS 88

Introdução

Matrizes são utilizadas em diversas áreas da ciência, como por exemplo: estruturando os dados na computação, no processamento de imagens digitais e na descrição e resolução de sistemas (ANTON; RORRES, 2001). A presença das tecnologias digitais na sociedade fortalece a necessidade do estudante moderno conhecer melhor as matrizes e suas aplicações. Os livros didáticos oferecidos no Programa Nacional do Livro Didático 2018, como (DANTE, 2016), (IEZZI et al., 2016), (PAIVA, 2015) e (SMOLE; DINIZ, 2016) apresentam as matrizes com suas operações, e em alguns casos os autores descrevem suas aplicações, mas os estudantes não têm a oportunidade de visualizar aplicações geométricas envolvendo matrizes. Assim, este trabalho tem o objetivo de sugerir atividades que permitam aos estudantes do Ensino Médio visualizar uma aplicação de matrizes, neste caso por meio das transformações geométricas. Com as atividades, o estudante simulará um braço robótico no espaço, utilizando o software GeoGebra (GEOGEBRA, 2017), para movimentar o braço é aplicada a transformação de rotação, que utiliza matrizes de rotação.

Com o propósito de auxiliar professores de Matemática do Ensino Médio, apresentamos um embasamento teórico de matrizes e transformações geométricas, e em seguida são sugeridas dez atividades para a construção da simulação do braço robótico utilizando o software GeoGebra.

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino, disponibilizado gratuitamente em diversas plataformas, como pode ser visto no site oficial geogebra.org (GEOGEBRA, 2017). Com a visualização dinâmica de objetos no plano e no espaço (GeoGebra 3D) o estudante encontra uma nova forma de estudar Matemática gerando grande interesse em busca do conhecimento matemático.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1 apresentamos um estudo de matrizes, as definições, operações e propriedades necessárias para a definição de transformações geométricas permitindo ao leitor a estruturação formal dos conceitos. No Capítulo 2 apresentamos a definição de transformação linear com exemplos de dilatação, contração, escala, reflexão e rotação e a transformação de translação (não linear) tanto no plano como no espaço. Após esses estudos, no Capítulo 3 são apresentadas dez atividades que passo a passo descrevem os procedimentos para a construção de um braço robótico no GeoGebra. Tais atividades são destinadas a estudantes do Ensino Médio, e por isso se faz necessário a descrição cuidadosa dos comandos e notações do GeoGebra, bem como utilização de imagens do software com suas ferramentas. Concluímos este trabalho, no Capítulo 4, descrevendo como quatro estudantes realizaram e apresentaram as atividades, destacando a contribuição para o aprendizado de matrizes e geometria.

1 Matrizes

Neste capítulo iremos estudar matrizes: definição, casos especiais, operações e propriedades. Isso para estabelecer os conceitos necessários para definir matrizes de transformações geométricas e aplicação em rotações no plano e espaço que serão apresentados e explorados no Capítulo 3.

1.1 O que são matrizes?

Uma matriz assemelha-se a uma tabela na forma de organizar as informações horizontalmente e verticalmente, assim inicialmente a melhor forma de conhecer uma matriz é por meio de uma tabela. Matrizes são utilizadas em diversas áreas da ciência, com destaque para a computação onde as matrizes são aplicadas sobre diversos contextos como computação gráfica e processamento de sinais digitais, (ANTON; RORRES, 2001).

Definição 1.1. *Uma **matriz** $n \times m$ (lê-se n por m) é uma tabela com $n \cdot m$ números reais distribuídos em n linhas (filas horizontais) e m colunas (filas verticais). O conjunto das matrizes do tipo $n \times m$, formadas por números reais é denotado por $M_{n\times m}(\mathbb{R})$.*

As matrizes podem ser escritas utilizando parênteses ou colchetes, como mostra o Exemplo 1.1. Neste trabalho iremos utilizar a notação com parênteses.

Exemplo 1.1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 45 \\ 0 & -24 & 9 \\ 2 & 0,4 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz do tipo } 4 \times 3;$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 22 \\ 1 & 0 & 1 \\ 21 & 0,4 & 12 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz do tipo } 3 \times 3.$$

Cada número que forma a matriz é chamado de elemento e uma matriz A pode ser representada por $A = (a_{ij})_{n\times m}$. Essa representação nos diz que A é uma matriz do tipo $n \times m$ e seus elementos são a_{ij} sendo i o número da linha e j o número da coluna correspondente a posição deste elemento na matriz.

Exemplo 1.2. Seja a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 45 \\ 0 & -24 & 9 \end{pmatrix}.$$

Então os elementos a_{ij}, com $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$, são:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -1; \\ a_{12} &= 1; \\ a_{13} &= 45; \\ a_{21} &= 0; \\ a_{22} &= -24; \\ a_{23} &= 9. \end{aligned}$$

Com essa notação uma matriz genérica $A = (a_{ij})_{n\times m}$ é representada da seguinte maneira:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Por terem características relevantes algumas matrizes são consideradas como casos especiais e recebem nomenclatura própria. A seguir apresentamos algumas dessas matrizes.

Matriz Coluna: Matrizes do tipo $n \times 1$, possui apenas uma coluna;

Exemplo 1.3.

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz do tipo } 4 \times 1.$$

Matriz Linha: Matrizes do tipo $1 \times m$, possui apenas uma linha;

Exemplo 1.4.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz do tipo } 1 \times 3.$$

Matriz Nula: Matrizes do tipo $n \times m$ com todos os elementos nulos;

Exemplo 1.5.

$$0_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriz Quadrada: Matrizes do tipo $n \times n$, possui mesmo número de linhas e colunas;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ é uma matriz do tipo } n \times n.$$

Os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ formam a diagonal principal da matriz A. As matrizes quadradas do tipo $n \times n$ são chamadas de matrizes de **ordem** n.

Exemplo 1.6.

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz quadrada de ordem 2.}$$

Matriz Diagonal: Matrizes quadradas (tipo $n \times n$), tais que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos.

Exemplo 1.7.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz diagonal do tipo } 2 \times 2.$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz diagonal do tipo } 4 \times 4.$$

Matriz Identidade: Matrizes quadradas (tipo $n \times n$), tais que todos os elementos de sua diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são iguais a 0.

Exemplo 1.8.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ é a matriz identidade do tipo } 2 \times 2.$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ é a matriz identidade do tipo } 3 \times 3.$$

1.2 Operações matriciais

Antes de explorar as operações entre as matrizes é preciso definir a igualdade entre duas matrizes.

Definição 1.2. *Duas matrizes do mesmo tipo são **iguais** quando os elementos correspondentes (mesma linha e coluna) são iguais.*

Exemplo 1.9. Sejam as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -10 & \sqrt{2} & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}.$$

Então $A = B$, se e somente se, $b_{11} = 1$, $b_{12} = -3$, $b_{13} = 0$, $b_{21} = -10$, $b_{22} = \sqrt{2}$ e $b_{23} = -3$.

Definição 1.3. *Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{n\times m}$ e $B = (b_{ij})_{n\times m}$ a **soma** $A + B$ é a matriz $C = (c_{ij})_{n\times m}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.*

Exemplo 1.10. Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Então

$$C = A + B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A subtração de duas matrizes pode ser realizada de maneira análoga a soma. Mas devemos apresentar a matriz oposta para que a subtração seja definida.

Definição 1.4. *A **matriz oposta** de uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times m}$ é a matriz $B = (b_{ij})_{n\times m}$, tal que $A + B = 0_{n\times m}$. Denota-se a matriz oposta de A por $-A$.*

Exemplo 1.11. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 8 & 0 & -5 \\ 3 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

A matriz oposta de A é

$$-A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Com a definição de matriz oposta é construída a subtração de duas matrizes.

Definição 1.5. *Dadas as matrizes A e B, de mesmo tipo, a **subtração** $A - B$ é uma matriz $C = A + (-B)$.*

Exemplo 1.12. Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Restam as operações de multiplicação por um escalar (número real) e entre as matrizes. Estas duas definições não são intuitivas como as anteriores, assim exemplos contextualizados podem ser de grande valia para a compreensão do conceito.

Exemplo 1.13. Os custos, em reais, das peças A, B e C fabricadas em duas fábricas distintas de uma indústria estão dispostas na Tabela 1.

Peça	Fábrica 1	Fábrica 2
Tipo A	20,00	15,00
Tipo B	25,00	20,00
Tipo B	10,00	5,00

Tabela 1 – Custos em reais das peças A, B e C nas fábricas 1 e 2.

Observe que cada valor da Tabela 2 foi obtido multiplicando o correspondente valor da Tabela 1 por 0,95.

Um novo processo de fabricação das três peças reduziu os custos em ambas as fábricas em 5%, assim com os novos valores a nova tabela é refeita:

Peça	Fábrica 1	Fábrica 2
Tipo A	19,00	14,25
Tipo B	23,75	19,00
Tipo C	9,50	4,75

Tabela 2 – Novos custos em reais das peças A, B e C nas fábricas 1 e 2.

Utilizando a ideia do Exemplo 1.13 definimos a multiplicação de uma matriz por um número real.

Definição 1.6. ***A multiplicação de uma matriz*** $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ***por um número real*** k *é dada por* $kA = (k \cdot a_{ij})_{n\times m}$*, ou seja, cada elemento de* A *é multiplicado por* k*.*

Exemplo 1.14. Seja $k = 2$ e

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$kA = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 2 & 8 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

As matrizes $n \times m$ com elementos reais e com as operações definidas acima constituem um espaço vetorial, isso por satisfazer todos os axiomas[1] que definem um

[1] Estes axiomas são encontrados em (ANTON; RORRES, 2001)

espaço vetorial. Espaço vetorial não é objeto de estudo aqui, mas para explorar e evidenciar as características de espaço vetorial do conjunto das matrizes $n \times m$, são apresentadas propriedades relacionadas aos axiomas que definem um espaço vetorial.

Propriedade 1.1. Seja $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes do tipo $n \times m$ com elementos reais. Dadas $A, B, C \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ matrizes do tipo $n \times m$ e $k, l \in \mathbb{R}$ são válidas as propriedades:

(1) **Comutatividade da adição:** $A + B = B + A$;

(2) **Associatividade da adição:** $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(3) **Elemento neutro da adição:** Existe uma matriz $0_{n\times m} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, a matriz nula de $M_{n\times m}(\mathbb{R})$, tal que $A + 0_{n\times m} = A$;

(4) **Oposto:** Existe uma matriz $(-A) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, oposto de A, tal que $A + (-A) = 0_{n\times m}$;

(5) **Distributiva de escalar:** $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$;

(6) **Distributiva de matriz:** $(k + l)A = k \cdot A + l \cdot A$;

(7) **Associatividade da multiplicação por escalar:** $l(k \cdot A) = (l \cdot k)A$;

(8) **Identidade multiplicativa:** $1 \cdot A = A$.

A multiplicação entre duas matrizes pode ser apresentada inicialmente utilizando uma contextualização com informações contidas em duas tabelas.

Exemplo 1.15. Em uma rede de lojas um funcionário foi designado a contar os produtos A, B e C vendidos em duas lojas e o resultado foi apresentado na Tabela 3.

	Loja 1	Loja 2
A	10	7
B	12	6
C	5	10

Tabela 3 – Quantidade de produtos A, B e C vendidos nas lojas 1 e 2.

Os preços dos produtos são iguais em ambas as lojas.

	A	B	C
Preço	2,00	5,00	8,00

Tabela 4 – Preços de cada produto A, B e C nas lojas 1 e 2.

Para obter uma tabela que descreva o valor total obtido em cada loja é necessário somar os totais obtidos na venda de cada produto. Esse procedimento corresponde a "multiplicar" a matriz da Tabela 4 pela matriz da Tabela 3, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 2,00 & 5,00 & 8,00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 12 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120,00 & 124,00 \end{pmatrix}$$

Ou seja, foram obtidos R$ 120,00 na loja 1 e R$ 124,00 na loja 2.

Definição 1.7. *A **multiplicação matricial** de uma matrizes $A = (a_{ij})_{n\times k}$ por uma matriz $B = (b_{ij})_{k\times m}$, denotada por $A \cdot B$, é uma matriz $C = (c_{ij})_{n\times m}$, tal que*

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} \cdot b_{rj}, \quad \textit{para } 1 \leqslant i \leqslant n \textit{ e } 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{1.1}$$

Observação: a multiplicação entre as matrizes A e B só está definida se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

Exemplo 1.16. Calcule $C = A \cdot B$ sendo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como A é do tipo 2×4 e B é do tipo 4×3, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Então segue da definição a multiplicação:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sum_{r=1}^{4} a_{1r} \cdot b_{r1} = 5; & c_{12} &= \sum_{r=1}^{4} a_{1r} \cdot b_{r2} = -8; & c_{13} &= \sum_{r=1}^{4} a_{1r} \cdot b_{r3} = 0; \\ c_{21} &= \sum_{r=1}^{4} a_{2r} \cdot b_{r1} = 7; & c_{22} &= \sum_{r=1}^{4} a_{2r} \cdot b_{r2} = -3; & c_{23} &= \sum_{r=1}^{4} a_{2r} \cdot b_{r3} = 12; \end{aligned}$$

Portanto,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 \\ 7 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

No conjunto dos números reais as propriedades associatividade e comutatividade são válidas tanto para a adição quanto para a multiplicação, mas é importante ressaltar que no conjunto das matrizes, $M_{n\times m}(\mathbb{R})$, estas propriedades são válidas na adição, como visto na Propriedade 1.1, mas na multiplicação não valem sempre. A associatividade da multiplicação, $A(B \cdot C) = (A \cdot B)C$, é válida desde que as matrizes sejam de tipos adequados para efetuar multiplicação, já a comutatividade entre a multiplicação de duas matrizes $A \cdot B = B \cdot A$ só faz sentido para matrizes quadradas e mesmo assim a igualdade nem sempre é válida. Um bom exercício para verificar a não comutatividade de matrizes quaisquer é determinar sob quais condições duas matrizes quadradas de ordem 2 comutam. Assim como a associatividade, a propriedade distributiva é válida desde que a multiplicação entre as matrizes seja bem definida e, se este for o caso, segue que $A(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ e $(A+B)C = A\cdot C + B\cdot C$.

Continuando a explorar as propriedades sobre as matrizes considere o conjunto $M_n(\mathbb{R})$, das matrizes quadradas de ordem n, Nesse conjunto a matriz identidade I_n é a identidade multiplicativa com relação a multiplicação matricial, pois para toda matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é válida a igualdade $A\cdot I_n = I_n\cdot A = A$. A existência da identidade multiplicativa em $M_n(\mathbb{R})$ nos leva a verificar se existe inverso multiplicativo. Para isso, é preciso verificar se dado $A \in M_n(\mathbb{R})$ existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A\cdot B = B\cdot A = I_n$. Mas é fácil verificar que nem sempre existe tal matriz, como mostra o Exemplo 1.17.

Exemplo 1.17. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, existe $B \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $A\cdot B = B\cdot A = I_2$?

Para procurar a matriz B, escrevemos $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e aplicamos $A\cdot B = I_2$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a+3b & 2a+6b \\ c+3d & 2c+6d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Então pela igualdade das matrizes

$$\begin{cases} a+3b = 1 \\ 2a+6b = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} c+3d = 0 \\ 2c+6d = 1 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira linha por 2 em ambos sistemas,

$$\begin{cases} 2a+6b = 2 \\ 2a+6b = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2c+6d = 0 \\ 2c+6d = 1 \end{cases}.$$

Concluímos que os sistemas não tem solução e portanto não existe tal matriz B.

Definição 1.8. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n, se existe uma matriz B tal que $A\cdot B = B\cdot A = I_n$, sendo I_n matriz identidade de ordem n, então A é dita inversível e $B = A^{-1}$ é sua **matriz inversa**.*

Exemplo 1.18. Dada matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, então $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição 1.9. *Dada uma matriz* $A = (a_{ij})_{n\times m}$*, a* ***matriz transposta*** *de* A*, denotada por* A^T*, é dada por* $A^T = (a'_{ji})_{m\times n}$*, sendo* $a'_{ji} = a_{ij}$ *para* $1 \leqslant i \leqslant n$ *e* $1 \leqslant j \leqslant m$*. Ou seja, a primeira linha de* A *é a primeira coluna de* A^T*, a segunda linha de* A *é a segunda coluna de* A^T*, e assim por diante.*

Exemplo 1.19. Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, então $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Em uma matriz quadrada a sua transposta pode ser visualizada facilmente refletindo seus elementos com relação a diagonal principal.

Propriedade 1.2. Seja c um número real e A e B matrizes com elementos reais. São válidas as propriedades:

(1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$, para A e B do mesmo tipo;

(3) $cA^T = (cA)^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$, para A, $n \times k$, e B, $k \times m$;

(5) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, para A matriz quadrada inversível.

Demonstração. Para esta demonstração consideramos a seguinte notação de uma matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$, sendo ${}_{i,j=1}^{n,m}$ a descrição das posições do elemento, $1 \leqslant i \leqslant n$ das linhas e $1 \leqslant j \leqslant m$ das colunas nessa ordem, assim a matriz transposta de A é $A^T = (a_{ij})_{j,i=1}^{m,n}$.

(1) Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$, segue que $A^T = (a_{ij})_{j,i=1}^{m,n}$ e portanto $(A^T)^T = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$;

(2) Sejam $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ e $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$, pela definição de soma de matrizes seque que $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$, e portanto

$$\begin{aligned} (A+B)^T &= \left((a_{ij} + b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}\right)^T \\ &= (a_{ij} + b_{ij})_{j,i=1}^{m,n} \\ &= (a_{ij})_{j,i=1}^{m,n} + (b_{ij})_{j,i=1}^{m,n} \\ &= A^T + B^T; \end{aligned}$$

(3) Seja $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ e um número real c, segue da definição de multiplicação por número real que

$$\begin{aligned} cA^T &= c\left((a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}\right)^T \\ &= c(a_{ij})_{j,i=1}^{m,n} \\ &= (ca_{ij})_{j,i=1}^{m,n}, \quad \text{como } cA = (ca_{ij})_{i,j=1}^{n,m} \\ &= (cA)^T; \end{aligned}$$

(4) Sejam $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,k}$ e $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{k,m}$, segue da definição de multiplicação de matrizes que

$$\begin{aligned}
(AB)^T &= \left((a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}(b_{ij})_{i,j=1}^{n,m}\right)^T \\
&= \left(\left(\sum_{r=1}^{k} a_{ir}b_{rj}\right)_{i,j=1}^{n,m}\right)^T \\
&= \left(\sum_{r=1}^{k} a_{ir}b_{rj}\right)_{j,i=1}^{m,n} \\
&= \left(\sum_{r=1}^{k} b_{rj}a_{ir}\right)_{j,i=1}^{m,n} \\
&= (b_{ij})_{j,i=1}^{m,k}(a_{ij})_{j,i=1}^{k,n} \\
&= B^T A^T
\end{aligned}$$

(5) Seja A uma matriz quadrada inversível, então existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Como $I^T = I$, aplicando a propriedade (4), segue que

$$\begin{aligned}
(AA^{-1})^T &= (A^{-1}A)^T &= I \\
(A^{-1})^T A^T &= A^T(A^{-1})^T &= I
\end{aligned}$$

Portanto $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

□

Com a definição de matriz transposta seguem as definições de matriz simétrica, anti-simétrica e ortogonal.

Definição 1.10. *Uma matriz quadrada A de ordem n é chamada de:*

(1) ***Simétrica****, se $A^T = A$;*

(2) ***Anti-simétrica****, se $A^T = -A$.*

Exemplo 1.20.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{é matriz simétrica, pois } A^T = A;$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{é matriz anti-simétrica, pois } A^T = -A.$$

Proposição 1.1. Seja A uma matriz $n \times m$. Então as matrizes AA^T e A^TA são simétricas.

Demonstração. Seja A uma matriz $n \times m$, da propriedade 1.2, item (4) e (1), segue que

$$\begin{aligned} (AA^T)^T &= (A^T)^T A^T \\ &= AA^T \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (A^TA)^T &= A^T(A^T)^T \\ &= A^TA. \end{aligned}$$

□

Proposição 1.2. Sejam A e B matrizes quadradas. Então

(1) A matriz $\frac{1}{2}(A + A^T)$ é simétrica;

(2) A matriz $\frac{1}{2}(A - A^T)$ é anti-simétrica;

(3) Se A é matriz simétrica, então cA é matriz simétrica para todo número real c;

(4) Se A e B são matrizes simétricas, então a multiplicação AB é uma matriz simétrica se, e somente se, $AB = BA$;

(5) Se A é matriz simétrica, então A^n é simétrica para todo n número natural.

Demonstração. Sejam A e B matrizes quadradas, então segue da propriedade 1.2:

(1)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}(A + A^T)\right)^T &= \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) \\ &= \frac{1}{2}(A^T + A) \\ &= \frac{1}{2}(A + A^T). \end{aligned}$$

Portanto $\frac{1}{2}(A + A^T)$ é matriz simétrica.

(2)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}(A - A^T)\right)^T &= \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) \\ &= \frac{1}{2}(A^T - A) \\ &= -\frac{1}{2}(A - A^T). \end{aligned}$$

Portanto $\frac{1}{2}(A - A^T)$ é matriz anti-simétrica.

(3) Se A é matriz simétrica e c um número real, $(cA)^T = cA^T = cA$. Portanto cA é matriz simétrica.

(4) Se A e B matrizes simétricas,

$$\begin{aligned}(AB)^T &= B^T A^T \\ &= BA\end{aligned}$$

Portanto AB é simétrica se, e somente se, $AB = (AB)^T = BA$.

(5) Seja n um número natural, se A é simétrica aplicando repetidamente o item (4) da propriedade 1.2, $(A^n)^T = (A^T)^n = A^n$.

□

Definição 1.11. *Uma matriz quadrada A de ordem n é chamada de* ***matriz ortogonal*** *se $A^T A = AA^T = I_n$, ou seja, $A^T = A^{-1}$.*

Exemplo 1.21. Seja α um número real, então a matriz $R = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ é ortogonal, pois utilizando a identidade trigonométrica $\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1$ segue que

$$\begin{aligned} RR^T &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ -\operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) & \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) & \operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposição 1.3. Uma matriz quadrada A é ortogonal se, e somente se, A^T é matriz ortogonal.

Demonstração. Seja A uma matriz ortogonal, da definição de matriz ortogonal e utilizando a propriedade 1.2

$$\begin{aligned} A \text{ é ortogonal} &\Leftrightarrow A^T = A^{-1} \\ &\Leftrightarrow (A^T)^T = (A^{-1})^T \\ &\Leftrightarrow (A^T)^T = (A^T)^{-1} \\ &\Leftrightarrow A^T \text{ é matriz ortogonal.} \end{aligned}$$

□

2 Transformações Geométricas

Uma transformação geométrica é uma função cujo domínio e a imagem é o espaço euclidiano n-dimensional. Neste capítulo iremos apresentar as transformações geométricas e suas matrizes associadas, com o objetivo de fundamentar conceitos para aplicações de matrizes no plano e no espaço em atividades no GeoGebra para o Ensino Médio.

2.1 Transformação Linear

Nesta seção vamos definir transformação linear por meio de funções definidas no espaço (em $\mathbb{R}^n$). A generalização de transformação linear em um espaço vetorial V qualquer pode ser estudada em (ANTON; RORRES, 2001, Capítulo 8, p. 257).

Definição 2.1. *Se n é um inteiro positivo, dizemos que o conjunto formado pela sequência de números reais $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o* ***espaço n-dimensional*** *denotado por $\mathbb{R}^n$.*

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são chamados de vetores e possuem operações de soma e multiplicação por escalar definidas.

Definição 2.2. *Dados dois vetores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ do espaço $\mathbb{R}^n$ e um número real k,*

(1) $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ***iguais****, se*

$$x_1 = y_1, \;\; x_2 = y_2, \;\; \cdots \;\; x_n = y_n.$$

(2) A ***soma*** *dos vetores é definida por*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

(3) A ***multiplicação por escalar*** *é definida por*

$$k\mathbf{x} = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n).$$

Exemplo 2.1. Os vetores $\mathbf{x} = (-2, 3, 1)$ e $\mathbf{y} = (2, 1, -2)$ são vetores de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (-2 + 2, 3 + 1, 1 - 2) = (0, 4, -1)$$

e

$$5\mathbf{x} = (5 \cdot (-2), 5 \cdot 3, 5 \cdot 1) = (-10, 15, 5).$$

Para a definição de transformação linear o leitor deve conhecer a definição de função que pode ser encontrada em (FIGUEIREDO, 1996).

Definição 2.3. *Uma função $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é chamada de* ***transformação linear*** *se dados os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$ e o número real k vale*

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}); \\ T(k\mathbf{x}) &= kT(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

No caso em que o domínio e contradomínio coincidem, a transformação linear é chamada de ***operador linear****.*

Exemplo 2.2. São exemplos de transformações lineares:

$$\begin{array}{lcl} T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 & & T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T_1(x,y) = (2x+y, x, y-x) & \text{e} & T_2(x,y,z) = (-x,-y,-z) \end{array}$$

Teorema 2.1. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear, então existe uma matriz $(a_{ij})_{m\times n}$ tal que,

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

sendo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Sejam o vetores de $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \mathbf{e_1} &= (1,0,\ldots,0) \\ \mathbf{e_2} &= (0,1,\ldots,0) \\ &\vdots \\ \mathbf{e_n} &= (0,0,\ldots,1). \end{aligned}$$

Assim, se $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, podemos reescrever o vetor por

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \cdots + x_n\mathbf{e_n}$$

e, como T é transformação linear, segue que

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T(x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \cdots + x_n\mathbf{e_n}) \\ &= x_1T(\mathbf{e_1}) + x_2T(\mathbf{e_2}) + \cdots + x_nT(\mathbf{e_n}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sendo $T(\mathbf{e_j}) \in \mathbb{R}^m$, para $j = 1, 2, \ldots n$, escolhemos:

$$(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) = T(\mathbf{e_j}), \text{ para cada } j = 1, 2, \ldots n.$$

Escrevendo estes vetores na forma de uma matriz $m \times 1$, segue da equação 2.1 o resultado,

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{x}) &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

A matriz $(a_{ij})_{m \times n}$ descrita no teorema 2.1 é conhecida como matriz de transformação linear. Mais precisamente a demonstração pode ser feita utilizando o conceito de bases dos espaços vetoriais do domínio e contradomínio da transformação, e pode ser visto em (HEFEZ; FERNANDES, 2016). Neste caso o conjunto de vetores $\alpha = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ é chamada de base canônica de $\mathbb{R}^n$ e cada $T(\mathbf{e_i})$ pode ser escrito na base $\beta = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_m}\}$, canônica, de $\mathbb{R}^m$ e assim a matriz $(a_{ij})_{m \times n}$ é denotada por $[T]_\alpha^\beta$ e é chamada de matriz de T nas bases α e β.

2.2 Transformações Geométricas no Plano

As transformações (lineares ou não) aplicadas dentro do plano euclidiano são chamadas de transformações geométricas no plano, pois transformam objetos no plano. Nesta seção vamos estudar as transformações de reflexão, dilatação, contração, escala e rotação, que são lineares, e a transformação de translação, não linear.

2.2.1 Transformação de translação

A transformação de translação consiste em mover um ponto em uma determinada direção, sentido e comprimento dado. Assim a transformação de translação pode ser definida utilizando vetores[1], que indicam direção, sentido e comprimento. A translação por um vetor $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ é dada por $T_\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, com

$$T_\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}.$$

[1] A definição de vetor, com uma interpretação geométrica, pode ser encontrada em (BOLDRINI, 1986)

Uma observação importante é que a transformação de translação não é linear, pois dados o vetor $\mathbf{u}$ e $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{u}}(a,b) + T_{\mathbf{u}}(c,d) &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2u_x \\ 2u_y \end{pmatrix} \\ &\neq T_{\mathbf{u}}(a+c, b+d). \end{aligned}$$

Exemplo 2.3. Utilizando a transformação de translação $T_{(2,3)}$ deslocamos um quadrado de lado 2 com centro na origem, com vértices $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$, na direção e sentido do vetor (2,3). Aplicando a transformação $T_{(2,3)}$ em cada um de seus vértices encontramos os vértices do quadrado após a translação.

$$\begin{aligned} T_{(2,3)}(-1,-1) &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \\ T_{(2,3)}(1,-1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \\ T_{(2,3)}(1,1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \\ T_{(2,3)}(-1,1) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O resultado pode ser observado na figura 1.

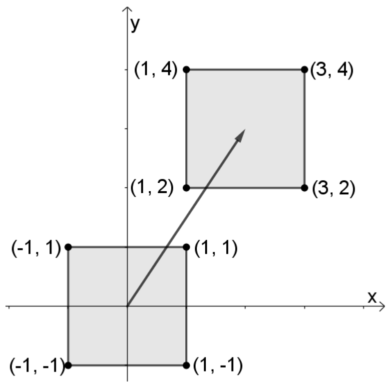


Figura 1 – Translação $T_{(2,3)}$ de um quadrado.

2.2.2 Transformação de dilatação

A transformação de dilatação é definida por $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, com

$$D(x,y) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{sendo } a > 1.$$

Exemplo 2.4. Aplicando a transformação de dilatação

$$D(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

em um triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(1,2)$ obtemos um triângulo semelhante com dimensões dobradas.

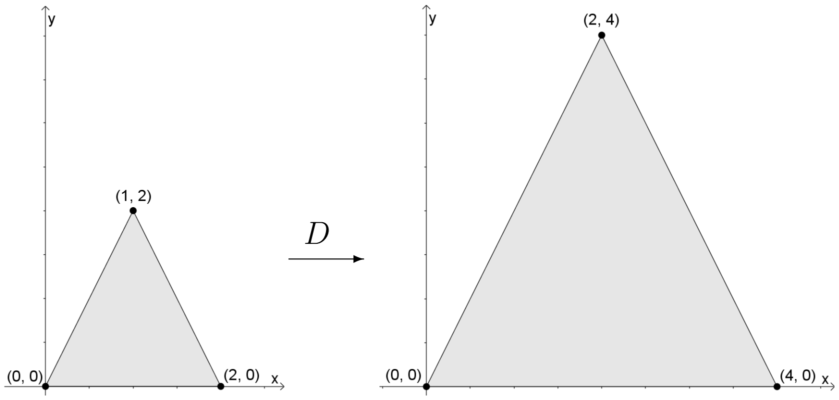


Figura 2 – Aplicação da transformação de dilatação em um triângulo.

Os vertices do triângulo resultante da transformação são: $D(0,0) = (0,0)$, $D(2,0) = (4,0)$ e $D(1,2) = (2,4)$.

2.2.3 Transformação de contração

A transformação de contração é definida por $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$C(x,y) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{sendo } 0 < a < 1. \tag{2.2}$$

Exemplo 2.5. Aplicando a transformação de contração

$$C(x,y) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

em um triângulo de vértices $(-2,0)$, $(2,0)$ e $(0,2)$ obtemos um triângulo semelhante com dimensões reduzidas a metade.

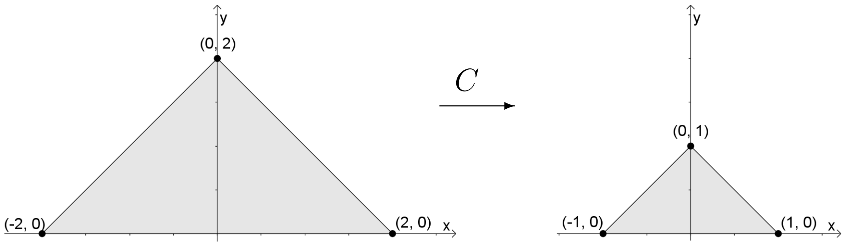


Figura 3 – Aplicação da transformação de contração em um triângulo.

Os vertices do triângulo resultante da transformação são: $C(-2,0) = (-1,0)$, $C(2,0) = (1,0)$ e $C(0,2) = (0,1)$.

2.2.4 Transformação de escala

A transformação de escala com relação a coordenada x é definida por $E_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, com

$$E_x(x,y) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{sendo } a \in \mathbb{R}^*.$$

A transformação de escala com relação a coordenada y é definida por $E_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, com

$$E_y(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{sendo } a \in \mathbb{R}^*$$

Exemplo 2.6. Aplicando a transformação de escala em x

$$E_x(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

em um triângulo de vértices $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(0,1)$, as coordenadas x de seus vértices são dobradas e as coordenadas y são mantidas.

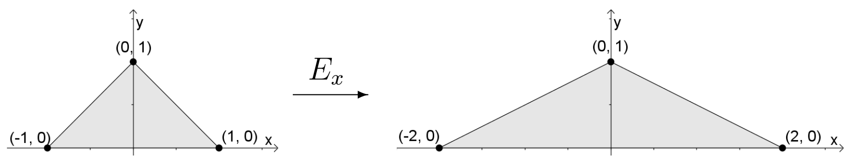


Figura 4 – Aplicação da transformação de escala em um triângulo.

Os vertices do triângulo resultante da transformação são: $E_x(-1,0) = (-2,0)$, $E_x(1,0) = (2,0)$ e $E_x(0,2) = (0,2)$.

2.2.5 Transformação de reflexão

Uma transformação de reflexão no plano consiste em “espelhar” um objeto com relação a uma reta, mais precisamente uma reflexão no plano é uma simetria ortogonal em relação a uma reta, chamada de eixo de simetria. Algumas transformações de reflexão no plano, $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, estão na Tabela 5. As transformações de reflexão, diferentemente das demais transformações geométricas apresentadas aqui, são involutivas, ou seja, uma transformação de reflexão e sua inversa são iguais.

Reflexão em torno do eixo-x	$R_x(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Reflexão em torno do eixo-y	$R_y(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Reflexão em torno de $y = x$	$R_{y=x}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Tabela 5 – Transformações de reflexão

Exemplo 2.7. Aplicando a reflexão em torno do eixo-x sobre o ponto $(2, 1)$ temos,

$$R_x(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

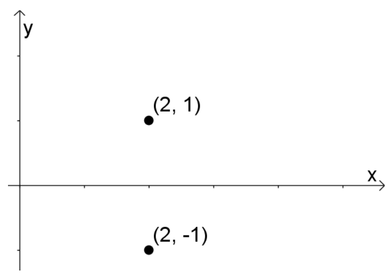


Figura 5 – Reflexão de $(2, 1)$ em torno do eixo-x

Exemplo 2.8. Aplicando a reflexão em torno do eixo-y sobre o ponto $(2, 1)$ temos,

$$R_y(2,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

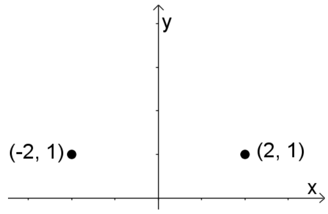


Figura 6 – Reflexão de $(2, 1)$ em torno do eixo-y

Exemplo 2.9. Aplicando a reflexão em torno da reta $y = x$ sobre o ponto $(2, 1)$ temos,

$$R_{y=x}(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

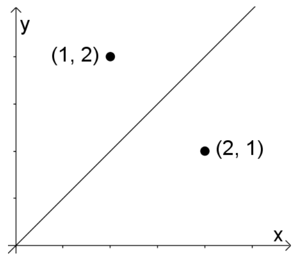


Figura 7 – Reflexão de $(2, 1)$ em torno de $y = x$

2.2.6 Transformação de rotação

Para definir a transformação de rotação será utilizado o seguinte proposição.

Proposição 2.1. Dado um ponto $A = (x_A, y_A)$, o ponto $A' = (x_{A'}, y_{A'})$ obtido pela rotação de A por um ângulo θ no sentido anti-horário em torno da origem é tal que,

$$\begin{pmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Dado um ponto $A = (x_A, y_A)$, seja α o menor ângulo formado entre o eixo-x e o segmento OA, sendo $O = (0, 0)$. Aplicando ao ponto A uma rotação de um ângulo θ, no sentido anti-horário, em tono da origem obtemos o ponto $A' = (x_{A'}, y_{A'})$, que por sua vez forma um ângulo de $\alpha + \theta$ com o eixo-x, como mostra a Figura 8.

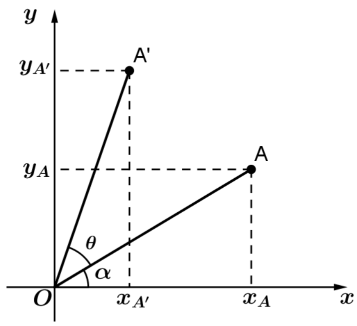


Figura 8 – Rotação do ponto A em torno da origem.

Sendo $r = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$, distância de A com a origem O, então calculando o seno e o cosseno do ângulo α no triângulo retângulo formado pelos pontos O, A e $(x_A, 0)$ obtemos

$$x_A = r\cos(\alpha); \tag{2.3}$$

$$y_A = r\operatorname{sen}(\alpha). \tag{2.4}$$

Como a rotação não altera o comprimento do segmento, segue que $r = \sqrt{x_{A'}^2 + y_{A'}^2}$ é o comprimento de OA'. Calculando o seno e o cosseno do ângulo $\alpha + \theta$ no triângulo formado por O, A' e $(x_{A'}, 0)$ e utilizando as igualdades trigonométricas: seno da soma de arcos e cosseno da soma de arcos, obtemos

$$\begin{aligned} x_{A'} &= r\cos(\alpha+\theta) \\ &= r\cos(\alpha)\cos(\theta) - r\,\text{sen}(\alpha)\,\text{sen}(\theta); \qquad (2.5) \\ y_{A'} &= r\,\text{sen}(\alpha+\theta) \\ &= r\,\text{sen}(\alpha)\cos(\theta) + r\cos(\alpha)\,\text{sen}(\theta). \qquad (2.6) \end{aligned}$$

Substituindo as equações 2.3 e 2.4 nas equações 2.5 e 2.6 concluímos

$$\begin{aligned} x_{A'} &= x_A\cos(\theta) - y_A\,\text{sen}(\theta); \\ y_{A'} &= y_A\cos(\theta) + x_A\,\text{sen}(\theta). \end{aligned}$$

Escrevendo estas equações na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}.$$

□

Assim definimos transformação de rotação por um ângulo θ em torno da origem, no sentido anti-horário, por $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$R_\theta(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \qquad (2.7)$$

Exemplo 2.10. Sobre o triângulo de vértices $(1,1)$, $(3,1)$ e $(3,2)$ aplicamos uma rotação de $90°$ em torno da origem (Figura 9), assim os vértices do triângulo rotacionado são obtidos utilizando a transformação

$$\begin{aligned} R_{90^\circ}(x,y) &= \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\text{sen}(90^\circ) \\ \text{sen}(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Então,

$$R_{90^\circ}(1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad R_{90^\circ}(3,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad R_{90^\circ}(3,2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

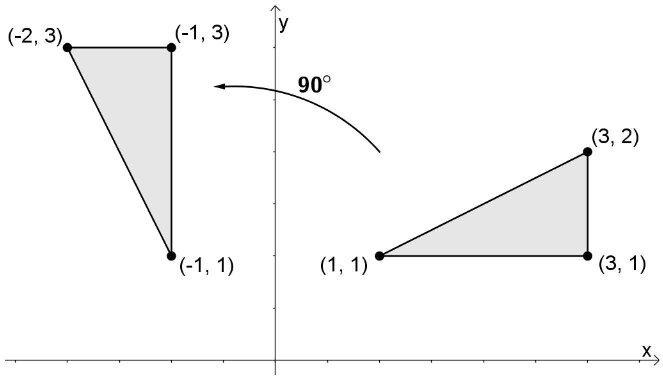


Figura 9 – Rotação de 90° do triângulo de vértices $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(3, 2)$ em torno da origem.

As transformações de rotação foram definidas no sentido anti-horário. Para obter uma rotação no sentido horário basta redefinir a matriz de transformação por sua transposta. Este fato decorre da função seno ser ímpar e a função cosseno ser par, ou seja, $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$ e $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$. Assim aplicando um ângulo negativo, $-\theta$, para a rotação ser no sentido horário a transformação de rotação fica sendo:

$$\begin{aligned} R_{-\theta}(x, y) &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.3 Transformações Geométricas no Espaço

As transformações geométricas no espaço são definidas por matrizes do tipo 3×3 de forma similar as aplicações no plano e suas aplicações são fundamentais para diversas áreas, como computação gráfica e a robótica.

2.3.1 Transformação de translação no espaço

Assim como definido na Seção 2.2.1 a transformação de translação no espaço é definida utilizando um vetor $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$, que indica, direção sentido e comprimento da translação a ser realizada. Definimos a transformação de translação por $T_{\mathbf{u}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, com

$$T_{\mathbf{u}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.11. Utilizando a transformação de translação $T_{\mathbf{u}}$, sendo $\mathbf{u} = (-2, 1, 5/2)$, deslocamos um cubo com vértices $(-1, -1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, 1, -1)$ e $(1, 1, 1)$. Aplicando a transformação $T_{\mathbf{u}}$ em cada um de seus vértices encontramos os vértices do cubo após a translação.

$$\begin{array}{ll} T_{\mathbf{u}}(-1,-1,-1) = (-3,0,3/2); & T_{\mathbf{u}}(1,-1,-1) = (-3,2,3/2); \\ T_{\mathbf{u}}(-1,-1,1) = (-3,0,7/2); & T_{\mathbf{u}}(1,-1,1) = (-3,2,7/2); \\ T_{\mathbf{u}}(-1,1,-1) = (-1,0,7/2); & T_{\mathbf{u}}(1,1,-1) = (-1,2,7/2); \\ T_{\mathbf{u}}(-1,1,1) = (-1,0,3/2); & T_{\mathbf{u}}(1,1,1) = (-1,2,3/2). \end{array}$$

O resultado pode ser observado na Figura 10.

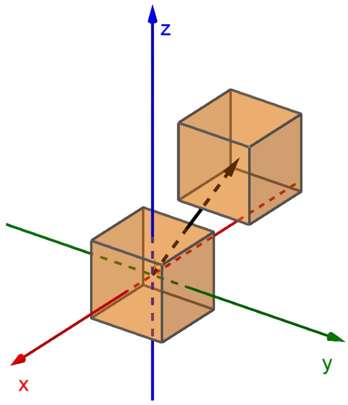


Figura 10 – Translação $T_{\mathbf{u}}$, sendo $\mathbf{u} = (-2, 1, 5/2)$, de um cubo.

2.3.2 Transformação de dilatação no espaço

A transformação de dilatação no espaço é definida por $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, com

$$D(x,y,z) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{sendo } a > 1.$$

Exemplo 2.12. Aplicando a transformação de dilatação

$$D(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

em um cubo de vértices $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$ e $(1,1,1)$ obtemos um cubo semelhante com dimensões dobradas.

$$\begin{array}{ll} T_{\mathbf{u}}(-1,-1,-1) = (-2,-2,-2); & T_{\mathbf{u}}(1,-1,-1) = (2,-2,-2); \\ T_{\mathbf{u}}(-1,-1,1) = (-2,-2,2); & T_{\mathbf{u}}(1,-1,1) = (2,-2,2); \\ T_{\mathbf{u}}(-1,1,-1) = (-2,2,-2); & T_{\mathbf{u}}(1,1,-1) = (2,2,-2); \\ T_{\mathbf{u}}(-1,1,1) = (-2,2,2); & T_{\mathbf{u}}(1,1,1) = (2,2,2). \end{array}$$

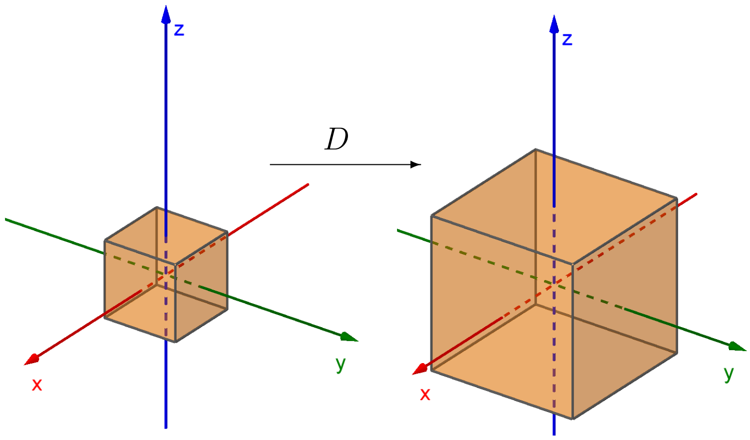


Figura 11 – Aplicação da transformação de dilatação em um cubo.

2.3.3 Transformação de contração no espaço

A transformação de contração no espaço é definida por $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, com

$$C(x,y,z) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{sendo } 0 < a < 1.$$

Exemplo 2.13. Aplicando a transformação de contração

$$C(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

em um cubo de vértices $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$ e $(1,1,1)$ obtemos um cubo semelhante com dimensões divididas por 2.

$T_{\mathbf{u}}(-1,-1,-1) = (-1/2,-1/2,-1/2)$; $T_{\mathbf{u}}(1,-1,-1) = (1/2,-1/2,-1/2)$;
$T_{\mathbf{u}}(-1,-1,1) = (-1/2,-1/2,1/2)$; $T_{\mathbf{u}}(1,-1,1) = (1/2,-1/2,1/2)$;
$T_{\mathbf{u}}(-1,1,-1) = (-1/2,1/2,-1/2)$; $T_{\mathbf{u}}(1,1,-1) = (1/2,1/2,-1/2)$;
$T_{\mathbf{u}}(-1,1,1) = (-1/2,1/2,1/2)$; $T_{\mathbf{u}}(1,1,1) = (1/2,1/2,1/2)$.

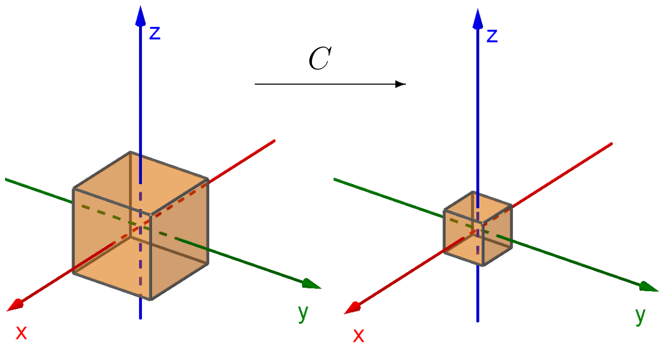


Figura 12 – Aplicação da transformação de contração em um cubo.

2.3.4 Transformação de escala no espaço

As transformações de escala no espação são definidas de forma similar as transformações de escala no plano, com relação a cada um dos eixos: $E_x, E_y, E_z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$E_x(x,y,z) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$E_y(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$E_z(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

sendo $a \in \mathbb{R}^*$.

Exemplo 2.14. Aplicando a transformação de escala

$$E_z(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

em um cubo de vértices $(-1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$ e $(1,1,1)$ obtemos um paralelepípedo, onde as coordenadas, do vértices, x e y não foram alteradas e a coordenada z é dobrada.

$$\begin{aligned}
&T_{\mathbf{u}}(-1,-1,-1) = (-1,-1,-2); && T_{\mathbf{u}}(1,-1,-1) = (1,-1,-2);\\
&T_{\mathbf{u}}(-1,-1,1) = (-1,-1,2); && T_{\mathbf{u}}(1,-1,1) = (1,-1,2);\\
&T_{\mathbf{u}}(-1,1,-1) = (-1,1,-2); && T_{\mathbf{u}}(1,1,-1) = (1,1,-2);\\
&T_{\mathbf{u}}(-1,1,1) = (-1,1,2); && T_{\mathbf{u}}(1,1,1) = (1,1,2).
\end{aligned}$$

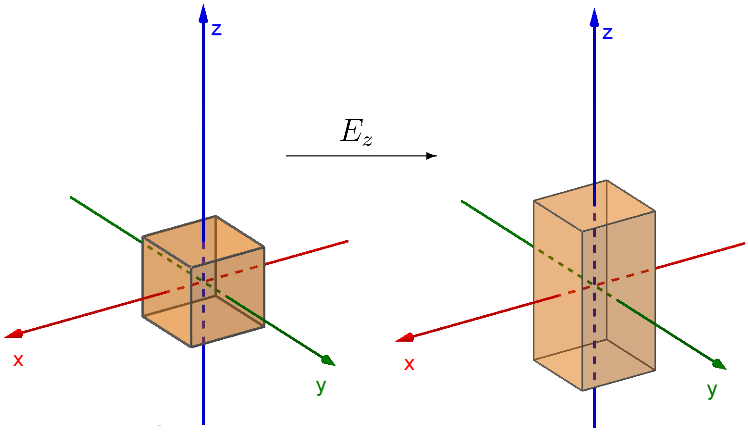


Figura 13 – Aplicação da transformação de escala no eixo-z em um cubo.

2.3.5 Transformação de reflexão no espaço

Uma transformação de reflexão no espaço consiste em "espelhar" um objeto com relação a um plano, mais precisamente uma reflexão no espaço é uma simetria ortogonal em relação a um plano, chamada de plano de simetria. Algumas transformações de reflexão no espaço, $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, estão na tabela 6.

Reflexão em torno do plano xy	$R_{xy}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Reflexão em torno do plano xz	$R_{xz}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Reflexão em torno do plano yz	$R_{yz}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Reflexão em torno do plano $x + y = 0$	$R_{x+y=0}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Tabela 6 – Transformações de reflexão no espaço

Exemplo 2.15. Aplicando a transformação de reflexão em torno do plano xy sobre a pirâmide de vértices $(1,1,2)$, $(4,1,2)$, $(4,4,2)$, $(1,4,2)$ e $(4,4,5)$.

$$\begin{array}{rcl} R_{xy}(1,1,2) & = & (1,1,-2) \\ R_{xy}(4,1,2) & = & (4,1,-2) \\ R_{xy}(4,4,2) & = & (4,4,-2) \\ R_{xy}(1,4,2) & = & (1,4,-2) \\ R_{xy}(4,4,5) & = & (4,4,-5) \end{array}$$

O resultado da reflexão definida por R_{xy} pode ser vista na Figura 14.

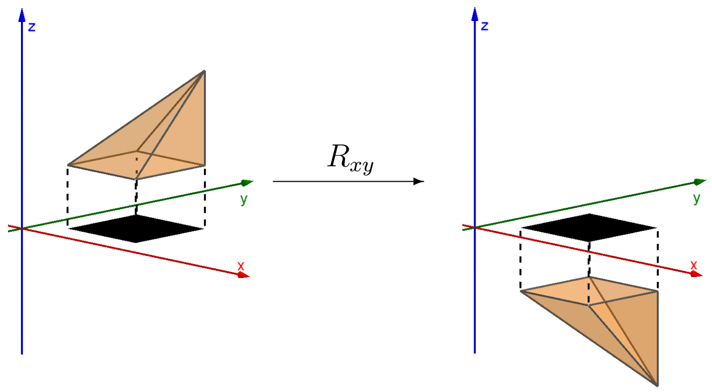


Figura 14 – Reflexão de uma pirâmide em torno do plano xy.

Exemplo 2.16. Aplicando a transformação de reflexão em torno do plano $x+y=0$ sobre a pirâmide de vértices $(1,1,2)$, $(4,1,2)$, $(4,4,2)$, $(1,4,2)$ e $(4,4,5)$.

$$\begin{array}{rcl} R_{x+y=0}(1,1,2) & = & (-1,-1,2) \\ R_{x+y=0}(4,1,2) & = & (-4,-1,2) \\ R_{x+y=0}(4,4,2) & = & (-4,-4,2) \\ R_{x+y=0}(1,4,2) & = & (-1,-4,2) \\ R_{x+y=0}(4,4,5) & = & (-4,-4,5) \end{array}$$

O resultado da reflexão definida por $R_{x+y=0}$ pode ser vista na Figura 15.

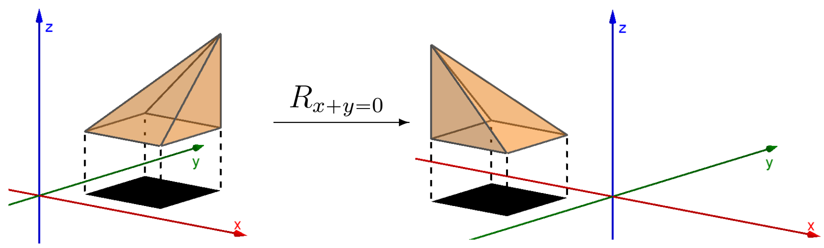


Figura 15 – Reflexão de uma pirâmide em torno do plano $x+y=0$.

2.3.6 Transformações de rotação no espaço

Assim como na rotação no plano, Seção 2.2.6, utilizamos um resultado para definir a transformação de rotação no espaço.

Proposição 2.2. Dado um ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$, o ponto $A' = (x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$ obtido pela rotação de A em torno do eixo-x por um ângulo θ, com sentido definido pela Regra de Fleming (regra da mão direita[2]) é tal que

$$\begin{pmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \\ z_{A'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Dado o ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$, sua rotação por um ângulo θ em torno do eixo-x no sentido estabelecido pela regra da mão direita, não altera a coordenada x do ponto, portanto esta rotação é equivalente a uma rotação do ponto (y_A, z_A) em torno da origem no plano yz, no sentido anti-horário. Como visto na equação 2.7, segue que

$$\begin{pmatrix} y_{A'} \\ z_{A'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_A \\ z_A \end{pmatrix}.$$

E como a coordenada x não é alterada, segue o resultado.

$$\begin{pmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \\ z_{A'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}.$$

□

Um resultado semelhante pode ser obtido para cada rotação em torno do eixo-y e eixo-z. Assim definimos as rotações em torno do eixo-x, eixo-y e eixo-z de um ângulo θ, no sentido estabelecido pela regra da mão direita.

(1) Rotação por um ângulo θ em torno do eixo-x. $R_{x,\theta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$R_{x,\theta}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

(2) Rotação por um ângulo θ em torno do eixo-y. $R_{y,\theta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$R_{y,\theta}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

[2] Com o polegar da mão direita no sentido positivo do eixo, os demais dedos indicam o sentido da propagação do ângulo (SANTOS, 2010)

(3) Rotação por um ângulo θ em torno do eixo-z. $R_{z,\theta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$R_{z,\theta}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.17. Aplicando a transformação de rotação por um ângulo 120°em torno do eixo-z, sobre a pirâmide de vértices $(1,1,2)$, $(4,1,2)$, $(4,4,2)$, $(1,4,2)$ e $(4,4,5)$. A transformação é dada por

$$\begin{aligned} R_{z,120^\circ}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \cos(120^\circ) & -\operatorname{sen}(120^\circ) & 0 \\ \operatorname{sen}(120^\circ) & \cos(120^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O resultado da rotação pode ser vista na Figura 16.

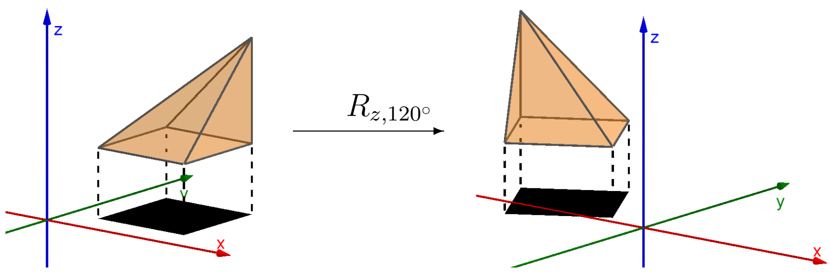


Figura 16 – Rotação de uma pirâmide por um ângulo 120°em torno do eixo-z.

Exemplo 2.18. Dado a pirâmide de vértices $(1,1,2)$, $(4,1,2)$, $(4,4,2)$, $(1,4,2)$ e $(4,4,5)$, para aplicar uma reflexão em torno do plano yz e em seguida rotacionar por um ângulo de 160°em torno do eixo-y, efetuamos a composição das transformações $R_{y,160^\circ} \circ R_{yz}(x,y,z) = R_{y,160^\circ}(R_{yz}(x,y,z))$, sendo

$$\begin{aligned} R_{y,160^\circ}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \cos(160^\circ) & 0 & \operatorname{sen}(160^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(160^\circ) & 0 & \cos(160^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ R_{yz}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Efetuando a composição,

$$
\begin{aligned}
R_{y,160^\circ}(R_{yz}(x,y,z)) &= \begin{pmatrix} \cos(160^\circ) & 0 & \operatorname{sen}(160^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(160^\circ) & 0 & \cos(160^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\cos(160^\circ) & 0 & \operatorname{sen}(160^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}(160^\circ) & 0 & \cos(160^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Agora ao aplicar $R_{y,160^\circ}(R_{yz}(x,y,z))$ sobre a pirâmide o resultado pode ser visto separadamente nas Figuras 17 e 18.

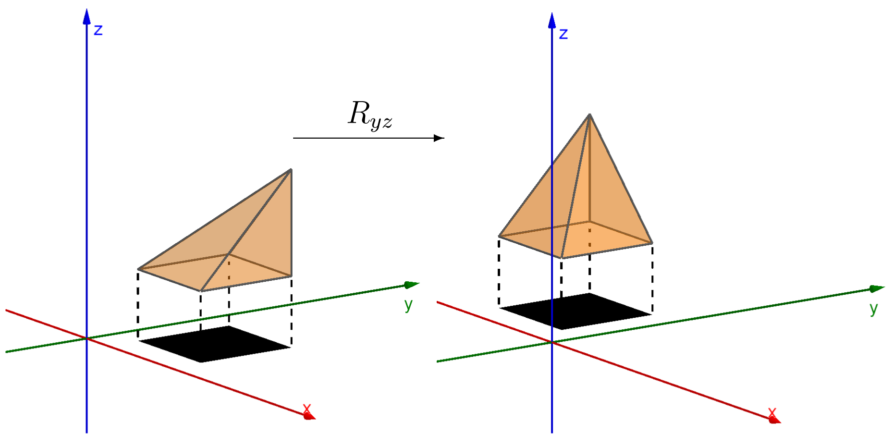


Figura 17 – Reflexão de uma pirâmide em yz.

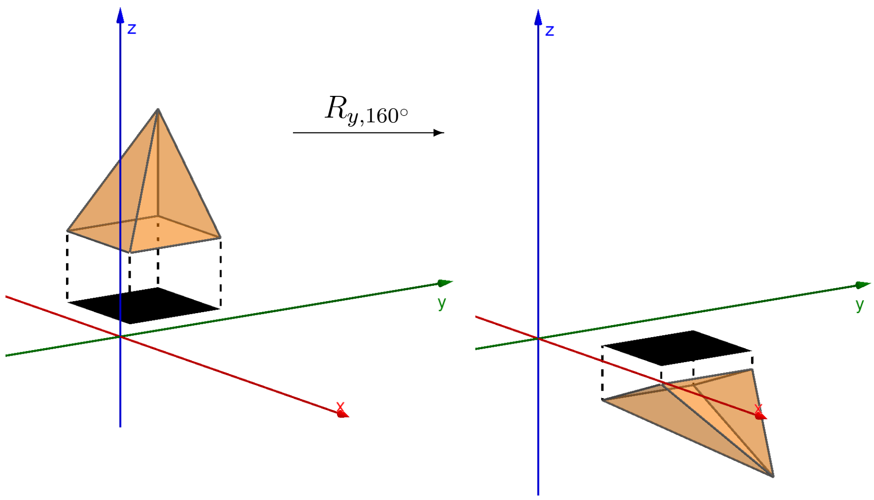


Figura 18 – Rotação de uma pirâmide por 160°em torno de y.

E com a aplicação da composição $R_{y,160^\circ} \circ R_{yz}$ diretamente na Figura 19.

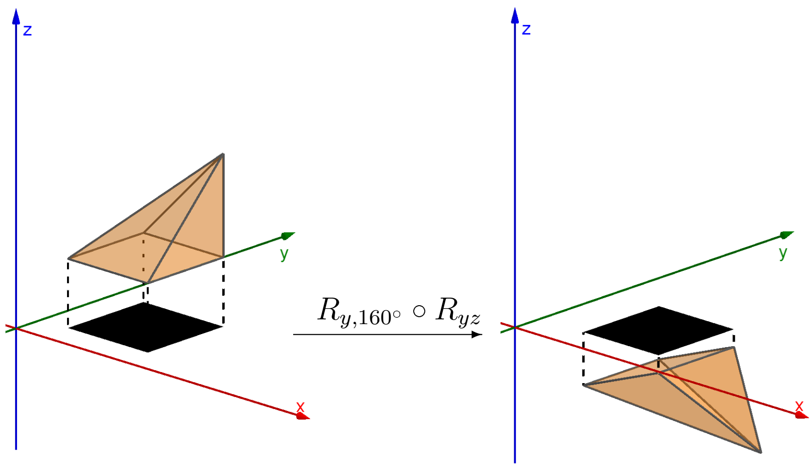


Figura 19 – Reflexão de uma pirâmide em yz e rotação por 160°em torno de y.

2.3.7 Transformações de rotação em torno de um eixo arbitrário no espaço

Seja $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ um vetor unitário representando um eixo arbitrário no espaço. Para definir a rotação em torno deste eixo descrevemos os ângulos:

- α formado entre o eixo-x positivo e a projeção ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre o plano xy, com $\alpha \in [0, 2\pi[$;
- β formado entre o eixo-z positivo e o vetor $\mathbf{u}$, com $\beta \in [0, \pi]$.

Estes ângulos são mostrados na Figura 20. Consideramos as rotações inversas definidas pelas transformações $R_{z,-\alpha}$ e $R_{y,-\beta}$, nessa ordem, para mudar o referencial do eixo de rotação para o eixo-z.

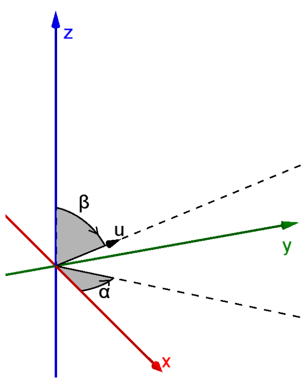


Figura 20 – Ângulos α e β relacionados ao vetor $\mathbf{u}$.

Assim para aplicar a rotação de um ponto em torno do eixo definido por $\mathbf{u}$ com um ângulo de θ, a transformação pode ser definida por $R_{\mathbf{u},\theta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$R_{\mathbf{u},\theta} = R_{z,\alpha} \circ R_{y,\beta} \circ R_{z,\theta} \circ R_{y,-\beta} \circ R_{z,-\alpha},$$

onde α e β são tais que

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}};\\
\operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}};\\
\cos(\beta) &= u_z;\\
\operatorname{sen}(\beta) &= \sqrt{u_x^2+u_y^2}.
\end{aligned}$$

Portanto a matriz associada a transformação $R_{\mathbf{u},\theta}$ é obtida pela multiplicação das matrizes associadas a $R_{z,\alpha}$, $R_{y,\beta}$, $R_{z,\theta}$, $R_{y,-\beta}$ e $R_{z,-\alpha}$, nessa ordem, resultando na matriz $(R_{\mathbf{u},\theta})$ que é igual a

$$\begin{pmatrix}
u_x^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_xu_y(1-\cos\theta)-u_z\operatorname{sen}\theta & u_xu_z(1-\cos\theta)+u_y\operatorname{sen}\theta\\
u_xu_y(1-\cos\theta)+u_z\operatorname{sen}\theta & u_y^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_yu_z(1-\cos\theta)-u_x\operatorname{sen}\theta\\
u_xu_z(1-\cos\theta)-u_y\operatorname{sen}\theta & u_yu_z(1-\cos\theta)+u_x\operatorname{sen}\theta & u_z^2(1-\cos\theta)+\cos\theta
\end{pmatrix}.$$

Como a matriz $(R_{\mathbf{u},\theta})$ foi determinada por meio das transformações de rotação que respeitam a regra da mão direita, a transformação de rotação em torno de $\mathbf{u}$, $R_{\mathbf{u},\theta}$ é definida pela matriz $(R_{\mathbf{u},\theta})$ também respeita a regra da mão direita.

Exemplo 2.19. Seja o vetor $\mathbf{v}=(1,2,3)$ a rotação da pirâmide de vértices $(1,1,2)$, $(4,1,2)$, $(4,4,2)$, $(1,4,2)$ e $(4,4,5)$ em torno de $\mathbf{v}$ por um ângulo de $130°$ é obtida aplicando $R_{\mathbf{u},130°}$, onde $\mathbf{u}=\dfrac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$. O resultado pode ser visto na Figura 21.

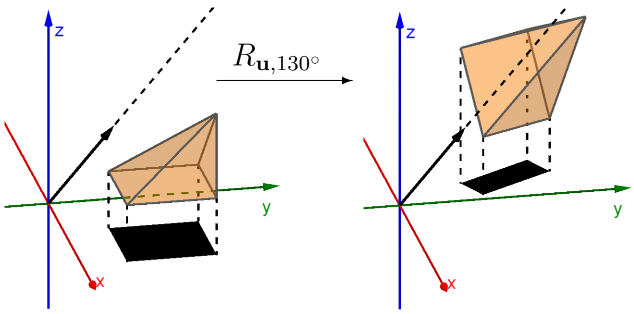


Figura 21 – Rotação de uma pirâmide por 130°em torno de um vetor **u**.

3 Atividades no GeoGebra

As atividades sugeridas aqui apresentam os passos para a construção de um braço robótico no espaço utilizando o software GeoGebra, e ao final de cada atividade são sugeridos alguns problemas ou exercícios para o estudante explorar e consolidar os conceitos trabalhados. As dez atividades estão em uma sequência didática com o objetivo de apresentar os comandos necessários para a construção da atividade seguinte. As atividades se completam, mas dependendo do conhecimento de GeoGebra e de matemática do estudante, não é necessário seguir a sequência. Ao final das atividades o estudante terá explorado as matrizes e as transformações geométricas no plano e no espaço utilizando as ferramentas do GeoGebra de forma dinâmica, que contribui muito para o processo de aprendizagem dos conceitos envolvidos. Como complemento às atividades é sugerido aos estudantes a construção de um braço hidráulico, que se assemelha muito com a simulação construída, utilizando materiais simples como pode ser visto no vídeo "How to Make Hydraulic Powered Robotic Arm from Cardboard" (JUAN, 2015).

A tabela 7 mostra as atividades e o tempo sugerido para execução em aulas de 50 minutos.

Atividade	Título	N. de Aulas
1	Construção de matrizes e operações matriciais.	1
2	Aplicação de matrizes em um ponto.	1
3	Translação de um polígono.	1
4	Dilatação e contração de um polígono.	1
5	Rotação em torno de um ponto no plano	1
6	Simulação de um braço robótico com duas articulações no plano.	2
7	Rotação de um ponto no espaço.	1
8	Rotação no espaço de uma haste de comprimento variado.	2
9	Simulação de um braço robótico com duas articulações no espaço.	2
10	Simulação de um braço robótico com duas articulações e uma garra no espaço.	3

Tabela 7 – Atividades e número de aulas estimadas.

3.1 Matrizes no GeoGebra

3.1.1 Matrizes e operações matriciais no GeoGebra

A primeira atividade tem como objetivo apresentar o procedimento para inserir matrizes no GeoGebra, o estudante deve ter o conhecimento básico de matrizes para realizar esta atividade.

ATIVIDADE 1
INSERIR MATRIZES E APLICAR OPERAÇÕES MATRICIAIS

Conteúdos: Matrizes e operações matriciais.
Objetivos: Conhecer e explorar comandos de matrizes no GeoGebra.

Nesta atividade vamos inserir matrizes no GeoGebra e efetuar operações matriciais.

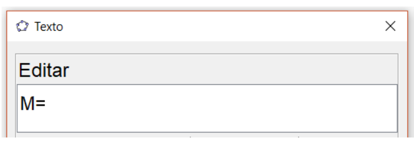
Atividade

1. Inserir a matriz M no GeoGebra.

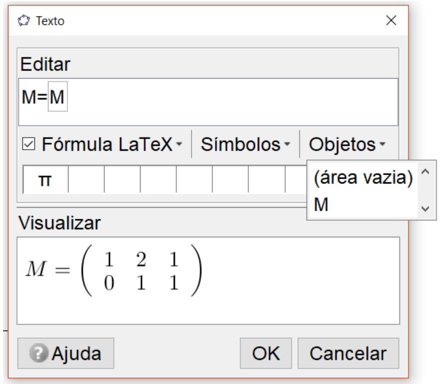
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma matriz é composta por linhas (horizontal) e colunas (vertical), neste exemplo a matriz M é formada por 2 linhas e 3 colunas. Para inserir uma matriz no GeoGebra escrevemos os elementos linha por linha, da seguinte maneira:

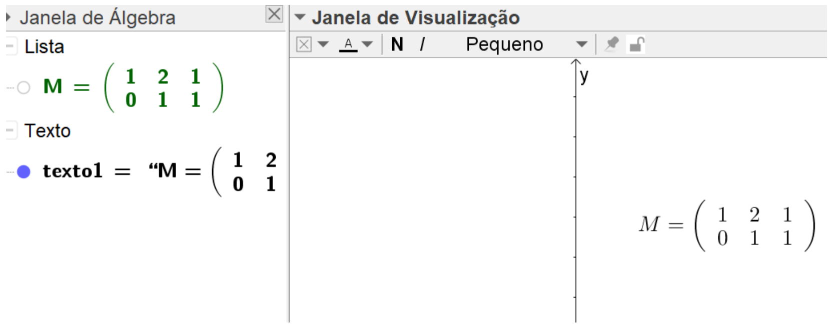
Para mostrar a matriz na *Janela de Visualização*, selecione a ferramenta *Texto* ABC, clique dentro da *Janela de Visualização*, em seguida selecione a caixa Fórmula LaTex, digite no campo Editar M=



Selecione em Objetos a matriz M como mostra a figura:



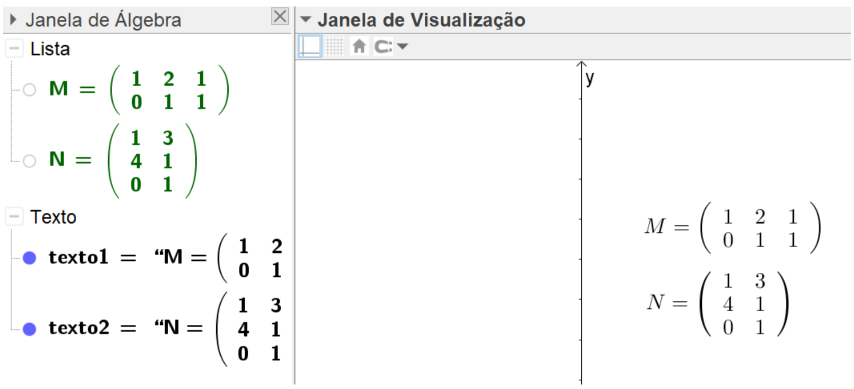
Resultado esperado:



2. No mesmo arquivo do GeoGebra onde foi inserida a matriz M repita o procedimento para a matriz

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

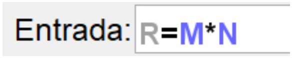
Resultado esperado:



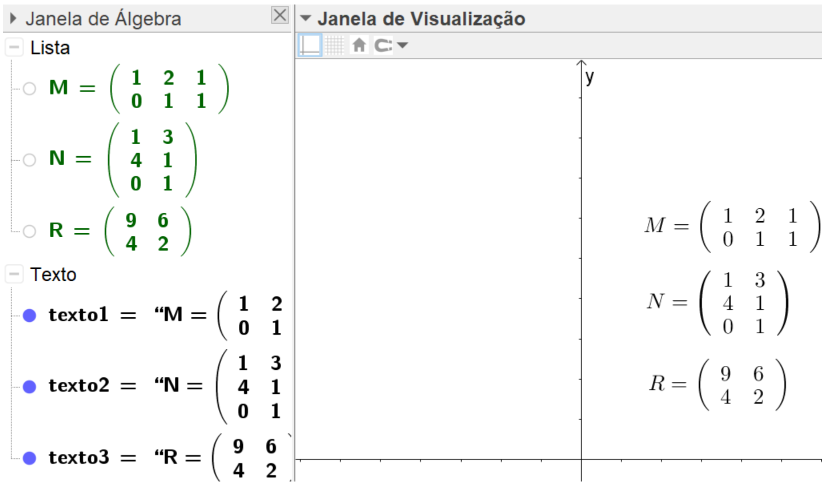
3. Multiplicação das matrizes M e N

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para efetuar a multiplicação matricial $M \cdot N$ basta digitar R=M*N no campo de Entrada.



Mostre a matriz R na *Janela de Visualização*.
Resultado esperado:



Exercícios:
Para os exercícios de 1 a 4 considere as matrizes,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Efetue a multiplicação das matrizes, $A \cdot B$.
2. Efetue a soma das matrizes, $A + B$.
3. Efetue a subtração das matrizes, $A - B$.
4. Efetue a potência A^7.
5. Insira duas matrizes 3×3 quaisquer e refaça com essas matrizes os ítens de 1 a 4.

Dica: basta utilizar o campo de Entrada e os operadores $+$ para a soma, $-$ para a subtração e ^ para a potência.

3.2 Transformações Geométricas no Plano

As atividades desta seção abordam transformações geométricas, entretanto durante as atividades o estudante irá utilizar apenas a matriz associada a transformação geométrica. Para visualizar os efeitos geométricos de uma transformação linear no GeoGebra é utilizado comando *AplicarMatriz* com a matriz associada a transformação geométrica.

3.2.1 Aplicação de matrizes em um ponto

Esta atividade permite que o estudante explore como funciona o comando *AplicarMatriz* do GeoGebra, mostrando como uma matriz altera geometricamente um ponto no plano.

ATIVIDADE 2
APLICAÇÃO DE MATRIZES EM UM PONTO

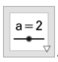
Conteúdos: Transformações geométricas.
Objetivos: Aplicar transformações geométricas em um ponto no plano.

Nesta atividade vamos inserir uma matriz no GeoGebra e aplicar em um ponto no plano.

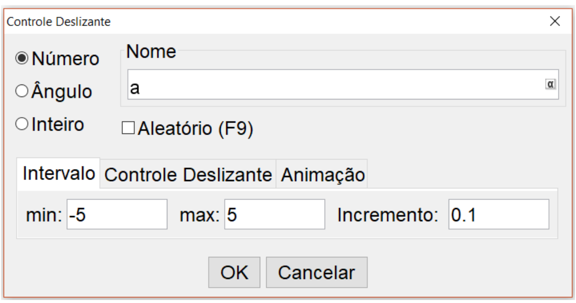
Atividade

1. Inserir matriz com entradas variáveis,

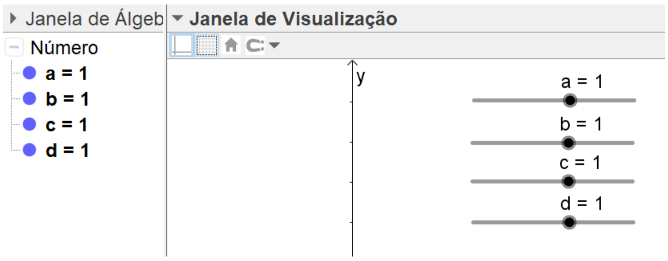
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Selecione a ferramenta *Controle Deslizante*, 

, clique dentro da *Janela de Visualização* para inserir a variável a e mantenha as configurações, como na figura:



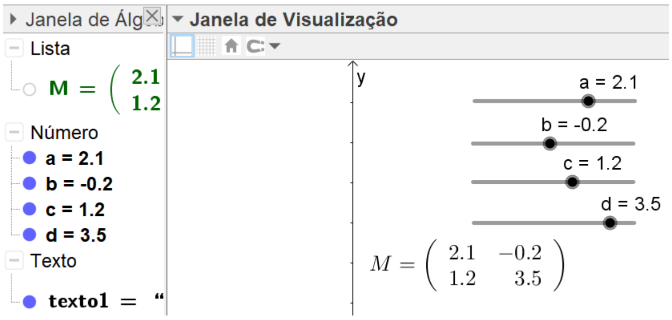
Repita o procedimento para as variáveis b, c e d.



Para inserir a matriz M, basta digitar no campo Entrada:

Entrada: M={{a,b},{c,d}}

Mostre a matriz na *Janela de Visualização* como feito na Atividade 1.
Resultado esperado:



2. Aplicando a matriz M sobre um ponto P.

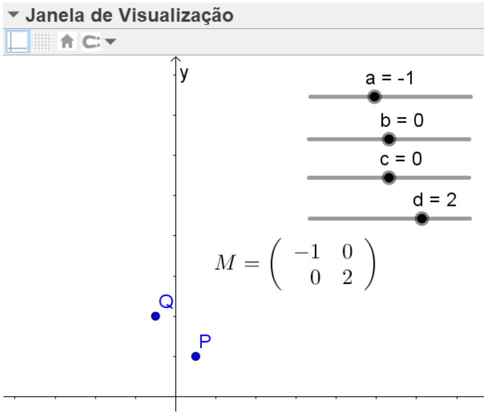
Escreva P=(1,2) no campo Entrada:

Entrada: P=(1,2)

A aplicação da matriz M sobre o ponto P é a multiplicação matricial $M \cdot P$, considerando P como uma matriz 2×1. Entretanto, para a visualização do efeito geométrico que tal multiplicação tem sobre um ponto P deve-se utilizar o comando *AplicarMatriz* do GeoGebra e não efetuar a multiplicação, pois o ponto P não é uma matriz.

Entrada: Q=AplicarMatriz[M, P]

Resultado esperado:



Exercícios:

Considerando os pontos P, Q e a matriz M construídos nessa atividade.

1. Altere a visualização dos pontos P e Q para Nome & Valor. Para isso clique com o botão direto sobre o ponto P e selecione Propriedades, procure por Exibir Rótulo e dentre as opções selecione Nome & Valor.
   Sugestão: explore as propriedades para conhecer as opções de visualização dos pontos.

2. Para $Q = P$ quais devem ser os valores de a, b, c e d?

3. Para $Q = -P = (-1, -2)$ quais devem ser os valores de a, b, c e d?

4. Para $Q = -P = (-1, 2)$ quais devem ser os valores de a, b, c e d?

5. Insira a matriz N: `Entrada: N={{x(P)},{y(P)}}`, observe que as entradas de N correspondem as coordenadas de P. Efetue $R = M \cdot N$ e insira na *Janela de Visualização* (como na Atividade 1). Altere aleatoriamente os valores de a, b, c e d e descreva qual relação existe entre o ponto Q e a matriz R.

6. Com $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ utilize a ferramenta  para arrastar o ponto P alterando suas coordenadas descreva como o ponto Q é alterado.

7. Utilize a ferramenta *Polígono*  para criar um polígono clicando dentro da *Janela de Visualização*. Em seguida aplique a matriz M no polígono, `Entrada: AplicarMatriz[M, pol1]`. Altere aleatoriamente os valores de a, b, c e d e observe os vértices do polígono.

3.2.2 Translação de um polígono

A translação de um objeto utilizando um vetor é simples e necessário para a construção final, assim esta atividade explora a translação por meio de um vetor no GeoGebra e com isso o estudante aprenderá o conceito de vetor e como utilizá-lo para transladar um objeto no plano.

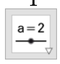
ATIVIDADE 3
TRANSLAÇÃO DE UM POLÍGONO

Conteúdos: Translação de pontos no plano.
Objetivos: Efetuar translação no plano utilizando o comando *Transladar* do GeoGebra.

Nesta atividade vamos efetuar translação de um polígono.

Atividade

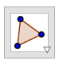
1. Translação de um ponto no plano.

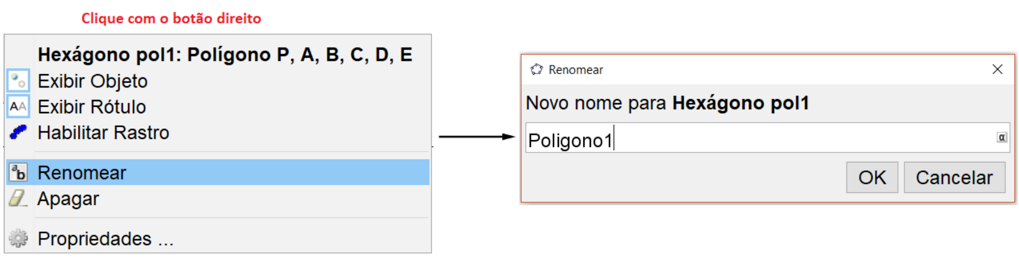
Utilize a ferramenta *Ponto*  para escolha um ponto P qualquer no plano, por exemplo $P = (1, 2)$. Crie duas variáveis a e b utilizando o *Controle Deslizante*  com intervalo de -10 a 10 e defina $Q = P + (a, b)$.

Entrada: Q=P+(a,b)

Assim o ponto Q será a translação do ponto P de a unidades com relação ao eixo das abscissas e b unidades com relação ao eixo das ordenadas.

2. Translação de um polígono.

Utilize a ferramenta *Transladar*  pra construir um polígono com um de seus vértices no ponto P, após constuir o polígono renomei para Poligono1 e deixe apenas os pontos P e Q visíveis, como na figura.

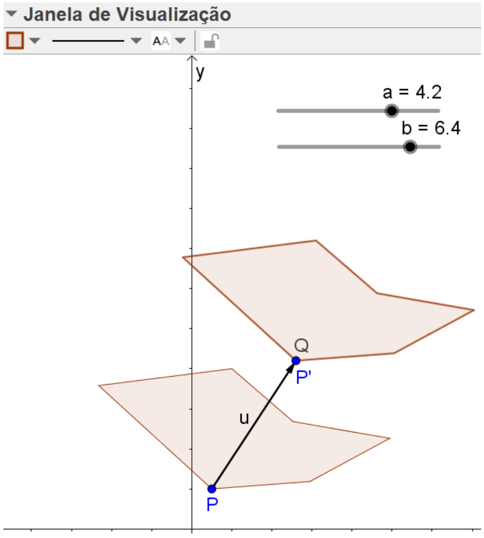


Para transladar o polígono basta transladar cada vértice, de forma análoga feita anteriormente. Mas o GeoGebra oferece o comando *Transladar*, que pode ser utilizado com um vetor para orientar o caminho da translação.
Assim crie o vetor **u** e em seguida utilize o comando *Transladar*.

Entrada: u=Vetor[P, Q]

Entrada: Transladar[Poligono1, u]

Resultado esperado:



Altere os valores de a e b para explorar a translação.

Exercícios:

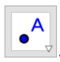
Considerando os pontos P e Q construídos nessa atividade.

1. Determine os valores de a e b para:

   a) $P = (1, 1)$ e $Q = (3, 2)$.

   b) $P = (0, 1)$ e $Q = (-3, 3)$.

2. Qual é a relação entre as coordenadas do vetor $\mathbf{u}$ e os valores de a e b?

3. Em um novo arquivo do GeoGebra utilize as ferramentas *Ponto* , *Vetor* , *Polígono* e o comando *Transladar* no campo Entrada para:

   a) Criar dois pontos A e B quaisquer;

   b) Criar um vetor $\mathbf{u}$ de A a B;

   c) Criar um polígono qualquer, renomeei para Poligono2;

   d) Faça a translação do Poligono2 pelo vetor $\mathbf{u}$.

   Após transladar o Poligono2 arraste o ponto B e descreva como se comporta o polígono transladado.

4. No campo Entrada insira uma função qualquer, exemplo $f(x) = -3x + 1$, crie um vetor qualquer utilizando  e translade a função pelo vetor. Observe na *Janela Algébrica* que uma nova função aparece, a função translada. Compare as duas funções, descrevendo suas diferenças nas seguintes situações:

   a) O vetor paralelo ao eixo das abscissas.

   b) O vetor paralelo ao eixo das ordenadas.

3.2.3 Dilatação e contração de um polígono

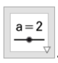
As transformações geométricas de dilatação e contração são exploradas para que o estudante conheça mais uma aplicação de matrizes em objetos no plano.

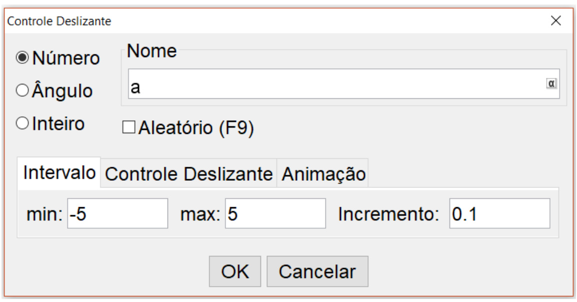
ATIVIDADE 4
DILATAÇÃO E CONTRAÇÃO DE UM POLÍGONO

Conteúdos: Transformação de dilatação e contração no plano.
Objetivos: Aplicar e explorar a transformação de dilatação e contração.

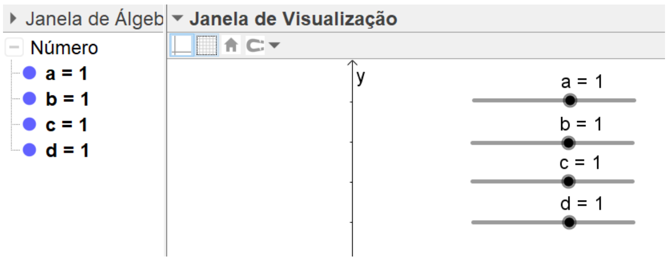
Nesta atividade vamos inserir uma matriz de transformação para dilatar ou contrair um polígono.

Atividade

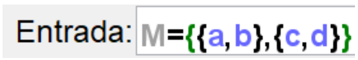
1. Descobrindo a Matriz de dilatação e contração em um polígono.
Seja a matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, com a, b, c e d variáveis. Para criar a, b, c e d selecione a ferramenta *Controle Deslizante* , clique dentro da *Janela de Visualização* para inserir a variável a e mantenha as configurações como na figura.



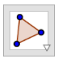
Repita o procedimento para as variáveis b, c e d.

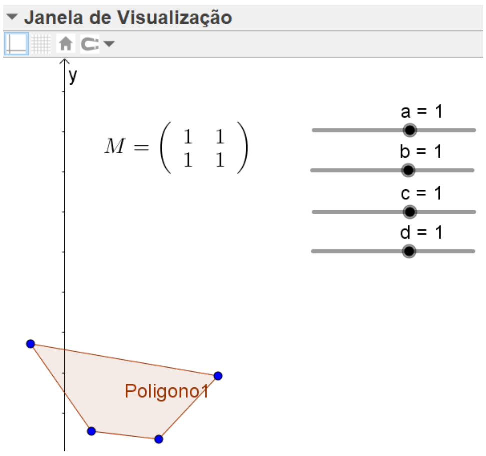


Para inserir a matriz M, basta digitar no campo Entrada:

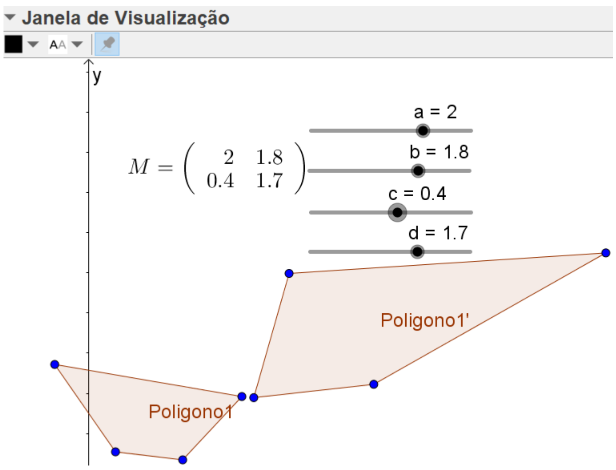


Insira a matriz na *Janela de Visualização* como feito na Atividade 1.

Utilize a ferramenta *Polígono*  para criar um polígono e renomeei para Poligono1.



Agora aplique a matriz M no Poligono1, para isso digite no campo Entrada:



A dilatação consiste em aumentar o tamanho dos lados do polígono mantendo suas proporções. Como exemplo considere a, b, c e d tais que a transformação dobra de tamanho os lados do polígono. Para determinar os valores de a, b, c e d, segue a demonstração: Dado um ponto $P = (x, y)$ a aplicação da matriz M em P corresponderá a multiplicação matricial:

$$M \cdot P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

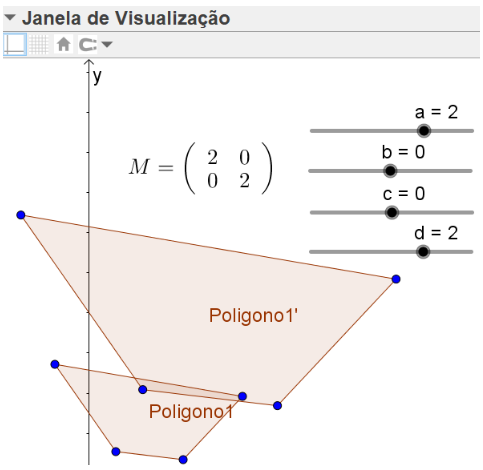
Por outro lado, se os valores dobram é necessário que

$$M \cdot P = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Ou seja, $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ e $d = 2$.
Assim uma matriz de dilatação ou contração é dada por

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Sendo a constante de dilatação, se $a > 1$, ou contração, se $0 \leqslant a < 1$.
Portanto com $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ e $d = 2$ segue o resultado esperado:



Exercícios:

1. Construa um triângulo semelhante ao triângulo de vertices $(1, 1)$, $(3, 1)$ e $(0, 0)$, com as medidas dos lados triplicadas.

2. Utilize o *Controle Deslizante* para criar a variável a, com $-10 < a < 10$ e a matriz $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ e aplique a matriz sobre o polígono $ABCDEFGH$, sendo $A = (1, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (4, 1)$, $D = (4, 3)$, $E = (3, 4)$, $F = (1, 4)$, $G = (0, 3)$ e $= (0, 1)$.

3.2.4 Rotação em torno de um ponto no plano

A construção do braço robótico no GeoGebra tem como principal elemento a matriz de rotação que recebe esse nome por se tratar da matriz da transformação geométrica de rotação (veja 2.2.6). Assim esta atividade é muito importante para a construção final. O estudante deve conhecer os conceitos de seno e cosseno no triângulo retângulo para desenvolver com qualidade esta atividade.

ATIVIDADE 5
ROTAÇÃO EM TORNO DE UM PONTO NO PLANO

Conteúdos: Transformação de rotação (matriz de rotação).
Objetivos: Aplicar a matriz de rotação no GeoGebra.

Nesta atividade vamos construir uma matriz de rotação em torno da origem e mostrar como pode ser a aplicação de uma rotação em torno de um ponto qualquer no plano.

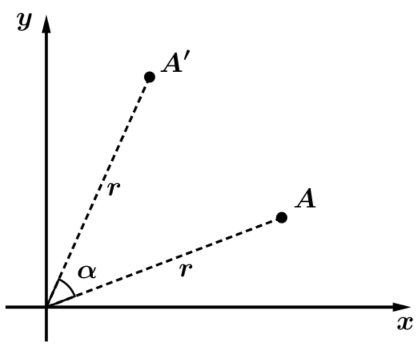
Atividade

1. Matriz de rotação.

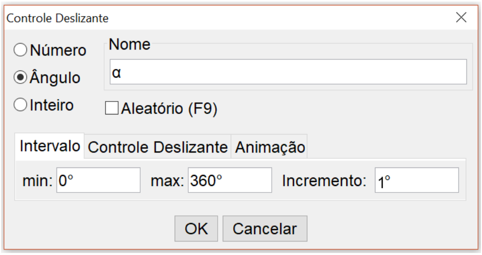
A matriz de rotação no sentido anti-horário com relação a origem é dada por:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Sendo α o ângulo de rotação com relação a origem. A aplicação dessa matriz sobre um ponto A corresponderá ao ponto A' como mostra a figura.

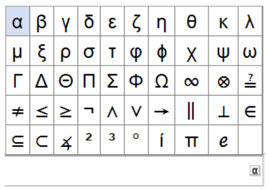


Observe que a distância com relação a origem se mantem.
Para inserir a matriz de rotação é necessário definir o ângulo α, para isso use o *Controle Deslizante* com a opção ângulo selecionada e incremento 1°, como na figura.



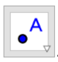
Utilizando o campo Entrada escreva a matriz de rotação, para inserir a variável α utilize a opção de inserir caracteres no canto direito dentro do campo Entrada.

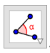
Observação: as letras gregas, como α, estão disponíveis em baixo a direita, dentro do campo Entrada, no ícone e ao clicar abre uma aba com as opções das letras gregas para inserir no campo Entrada.



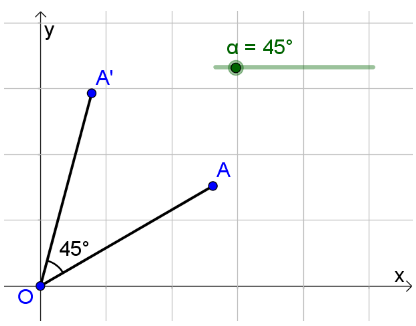
Outra maneira de escrever é utilizando atalhos, como `Alt + A` para α. os atalhos podem ser encontrados em <https://wiki.geogebra.org/en/Keyboard_Shortcuts>.

2. Rotação em torno da origem.

Com a ferramenta *Ponto*, , insira um ponto A qualquer na *Janela de Visualização*. Em seguida utilize o comando *AplicarMatriz*

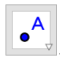
Para verificar o ângulo formado construa o ponto $O = (0, 0)$, os segmentos OA e OA', com , e o ângulo $A\hat{O}A'$, com .

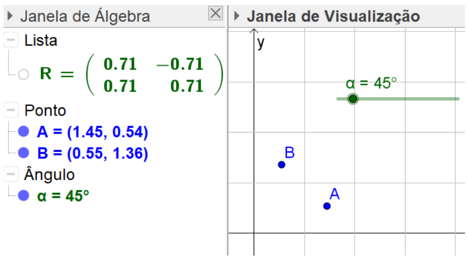
Resultado esperado



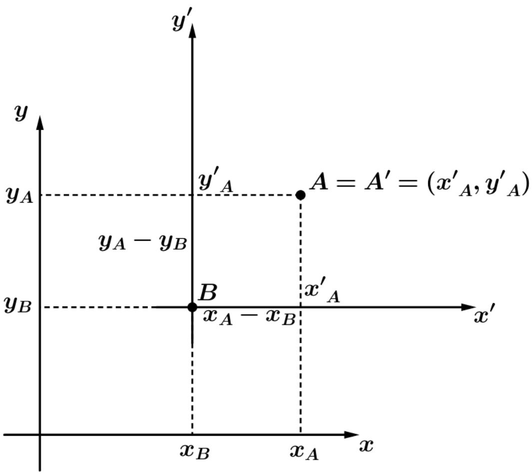
Altere os valores de α para verificar as rotações.

3. Rotação em torno de um ponto.

Em um novo arquivo do GeoGebra refaça a etapa 1 desta atividade para criar o ângulo α e a matriz de rotação R, em seguida insira os pontos A e B quaisquer, com .



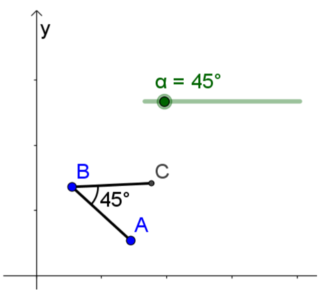
A ideia para aplicar a rotação em torno do ponto B é transladar o sistema de coordenada xy levando a origem ao ponto B, criando o sistema de coordenadas $x'y'$. Neste sistema de coordenadas aplique a matriz de rotação sobre o ponto $A' = A - B$, que corresponde ao ponto A escrito no sistema de coordenadas $x'y'$.



Assim para aplicar a rotação diretamente no plano xy é utilize o seguinte comando:

```
Entrada: C=AplicarMatriz[R, A-B]+B
```

Onde a subtração $A - B$ é necessária para deslocar a origem para B e após a rotação é somado o ponto B para retornar com a origem $(0, 0)$.
Após inserir os segmentos BA, BC e o ângulo $A\hat{B}C$ o resultado esperado é:



Exercícios:
Para cada exercício crie um arquivo novo do GeoGebra.

1. Cire os pontos $A = (2,1)$ e $B = (3,4)$, utilizando a matriz de rotação crie os pontos C e D definidos pela rotação de 70°no sentido anti-horário dos pontos A e B, respectivamente, em torno da origem. Faça os segmentos OA, AB, OC e CD, sendo $O = (0,0)$. Alteres os valores do ângulo de rotação para observar como os segmentos rotacionam em torno de B.

2. Refaça a parte 2 da atividade com a matriz de rotação R definida por
$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$
Identifique como a rotação é alterada.

3. Insira na *Janela de Visualização* dois pontos A e B quaisquer, utilizando a matriz de rotação crie o ponto C definido pela rotação de 70°no sentido anti-horário do ponto A em torno do ponto B.

4. Construa um triângulo qualquer, insira um ponto B qualquer e aplique a rotação de 60°do triângulo em torno do ponto B. (Dica: aplique a rotação em cada vértice do triângulo).

5. Cire os pontos $A = (3,1)$, $B = (1,2)$ e $C = (5,2)$, utilizando a matriz de rotação crie os pontos D e E definidos pela rotação de 70°no sentido anti-horário dos pontos A e C, respectivamente, em torno do ponto B. Faça os segmentos BA, AC, BD e DE. Alteres os valores do ângulo de rotação para observar como os segmentos rotacionam em torno de B.

3.2.5 Simulação de um braço robótico com duas articulações no plano

Esta é a ultima atividade no plano e serve de base para a construção do braço robótico no espaço, pois será utilizado o mesmo tipo de construção e a rotação é similar no espaço. A notação utilizada para as matrizes foi adotada para facilitar a digitação no GeoGebra, pois os estudantes não têm familiaridade com estas notações.

ATIVIDADE 6
SIMULAÇÃO DE UM BRAÇO ROBÓTICO COM DUAS ARTICULAÇÕES NO PLANO

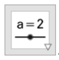
Conteúdos: Transformação de rotação (matriz de rotação).
Objetivos: Construir uma simulação de braço robótico por meio de matrizes de rotação.

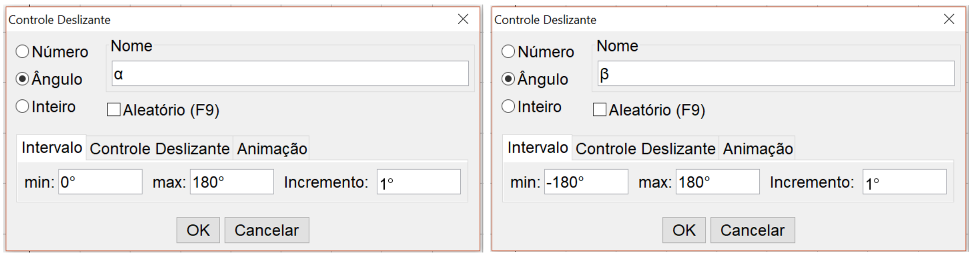
Nesta atividade vamos construir uma simulação de braço robótico no plano.

Atividade

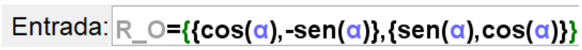
1. Ângulos e matrizes das rotações.

A simulação terá dois pontos articulados, assim será necessário inserir uma matriz de rotação para cada ponto.

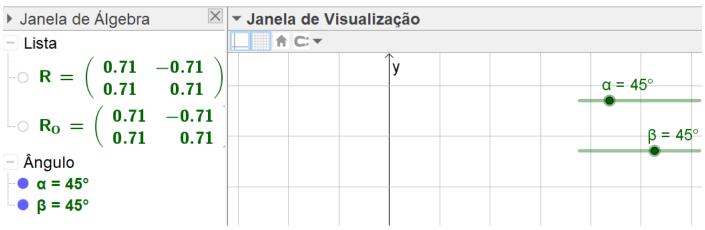
Primeiro construa dois ângulos α e β utilizando o *Controle Deslizante*, , ambos com incremento de 1°, mas α variando de 0°a 180°e β variando de $-180°$ a 180°.



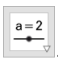
Agora insira a matriz de rotação, R_O, em torno da origem $O = (0, 0)$ e a matriz de rotação R em torno da segunda junta de rotação:

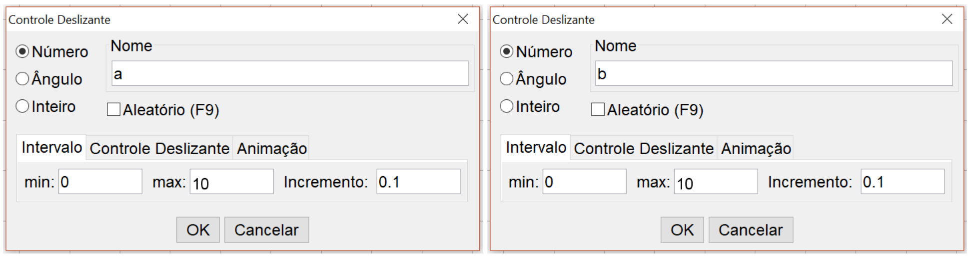


Resultado esperado,



Além das matrizes de rotação serão utilizadas mais duas matrizes que definirão o comprimento de cada haste que formará o braço. Como visto na Atividade 4, uma matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ é uma matriz de dilatação $(a > 1)$ ou contração $(0 < a < 1)$ e aplicada sobre um ponto irá aumentar ou diminuir a distância deste ponto com a origem, portanto tal matriz servirá para alterar o comprimento de cada haste do braço.

Crie duas variáveis a e b utilizando o *Controle Deslizante*, , ambas com incremento de 0.1 e variação de 0 a 10.

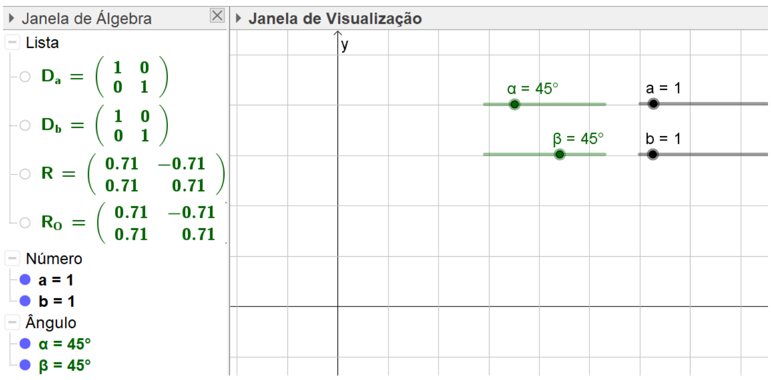


Insira as matrizes $D_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ e $D_b = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ para posteriormente utiliza-las para aumentar ou diminuir as hastes do braço.

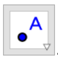
Entrada: D_a={{a,0},{0,a}}

Entrada: D_b={{b,0},{0,b}}

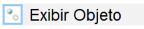
Resultado esperado,



2. Primeira haste do braço.

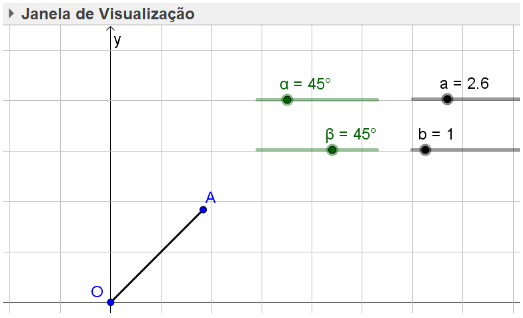
A primeira haste do braço robótico será definido como o elo entre a origem $O = (0, 0)$ e o ponto A, obtido pela rotação em torno da origem de um ponto inicial I.
Construa a origem $O = (0, 0)$ e um ponto inicial $I = (1, 0)$, utilizando o campo Entrada ou a ferramenta *Ponto* , em seguida faça o ponto A, definido pela a rotação de I em torno da origem e dilatado por D_a. Como explicado na Atividade 2 a aplicação das matrizes sobre os pontos correspondem a multiplicações matriciais, assim a aplicação de duas matriz sobre um ponto é equivalente a aplicação do produto dessas matrizes, respeitando a ordem de aplicação, neste caso primeiro a rotação e depois a dilatação, ou seja, para obter o resultado desejado basta aplicar a matriz $D_a \cdot R_O$ sobre o ponto I:

Entrada: A=AplicarMatriz[D_a*R_O, I]

Para concluir faça o segmento OA, utilizando a ferramenta  e deixe oculto o ponto I (botão direito 

).

Resultado esperado,



3. Segunda haste.

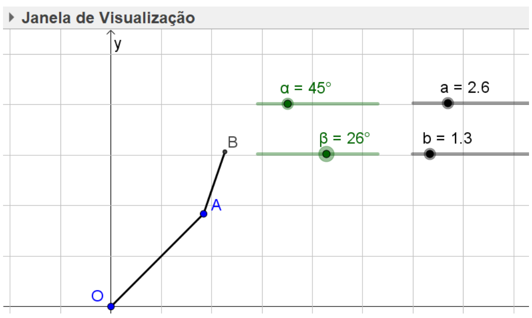
Para concluir o braço robótico falta apenas a segunda haste, para isso será necessário construir um ponto B que rotaciona em torno de A e tem suas distância ao ponto A definido por b. Para isso rotacione o ponto inicial I em torno de O com a matriz R_O (para alinhar com a primeira aste), aplique a dilatação por D_b e rotacione em torno de A com a matriz R, essa sequência de aplicações corresponde a aplicar a matriz obtida pelo produto $R \cdot D_b \cdot R_O$ deslocando a origem para A.

Entrada: **B=AplicarMatriz[R*D_b*R_O, I]+A**

Observe que o ponto A é adicionado a aplicação matricial para deslocar a origem para que a matriz R corresponda a rotação em torno de A.

Para concluir faça o segmento AB, utilizando a ferramenta .

Resultado esperado,



Exercícios:

1. No mesmo arquivo criado nesta atividade insira o ponto $P = (4, 1)$ e com $a = 4$ e $b = 1$ fixos determine os ângulos α e β para que o ponto B se aproxime ao máximo de P. Quantos valores podem ser atribuídos aos ângulos α e β para solucionar esse problema?

2. Construa um braço robótico com três juntas articuladas O, A e B e três hastes OA, AB e AC.

3.3 Transformações Geométricas no Espaço

3.3.1 Rotação de um ponto no espaço

Para estudantes que nunca construíram objetos no espaço utilizando o GeoGebra esta atividade irá apresentar a *Janela de Visualização 3D*. Além de explorar a rotação por matrizes no espaço.

ATIVIDADE 7
ROTAÇÃO DE UM PONTO NO ESPAÇO

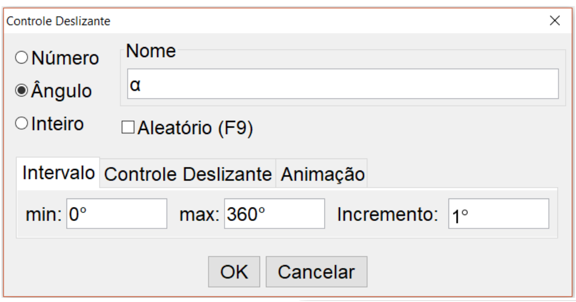
Conteúdos: Transformação de rotação (matrizes de rotação).
Objetivos: Aplicar matrizes de rotação com relação aos eixos ordenados sobre um ponto no espaço.

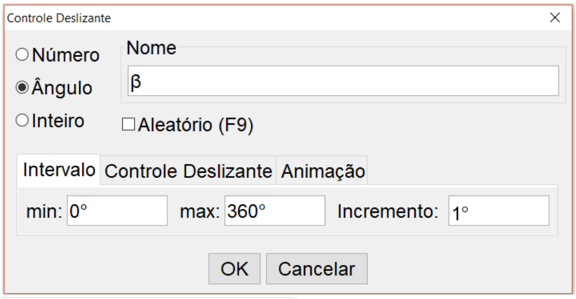
Nesta atividade vamos efetuar a rotação no espaço de um ponto com relação aos eixos ordenados, utilizando a janela 3D do GeoGebra.

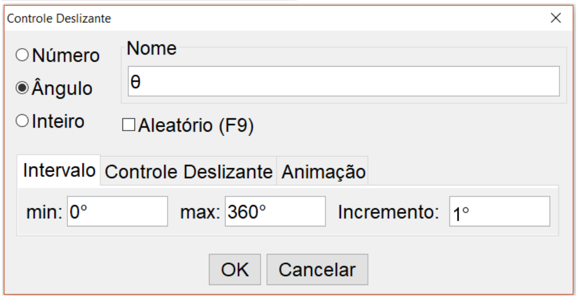
Atividade

1. Ângulos e matrizes.

Sendo o objetivo aplicar as matrizes de rotações com relação aos três eixos ordenados, eixo-x, eixo-y e eixo-z, é necessário construir três ângulos, um para cada rotação. Na *Janela de Visualização* utilize a ferramenta *Controle Deslizante*, para construir os ângulos α, β e θ com intervalos de 0°a 360°e incremento de 1°.







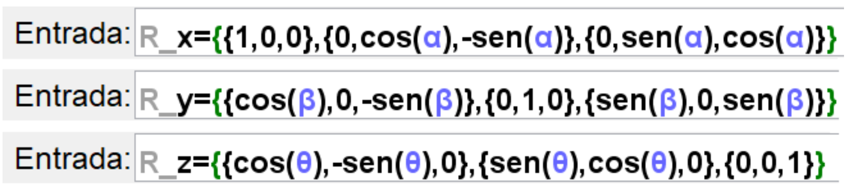
Para esta atividades as matrizes de rotação no espaço são definidas como:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{para rotação em torno do eixo-}x;$$

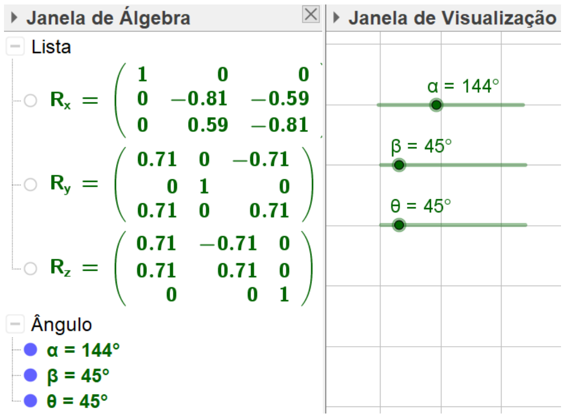
$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \quad \text{para rotação em torno do eixo-}y;$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{para rotação em torno do eixo-}z.$$

Utilizando o campo Entrada escreva as matrizes R_x, R_y e R_z:

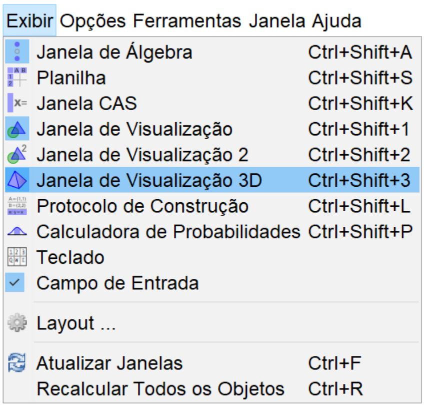


Resultado esperado,

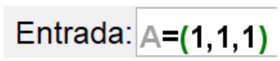


2. Aplicando a Rotação.

A partir desta etapa é necessário a utilizar *Janela de Visualização 3D* (clique em Exibir → *Janela de Visualização 3D*).



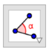
Para inserir um ponto no espaço utilize três coordenadas, x, y e z, no campo Entrada crie um ponto A:



Para rotacionar o ponto A em torno do eixo-x basta efetuar $R_x \cdot A$, entretanto, como explicado na Atividade 2, no GeoGebra esta multiplicação corresponde ao comando *AplicarMatriz*, assim construa o ponto A_x sendo a rotação de A em torno do eixo-x em α graus.

Para visualizar melhor a rotação em torno do eixo-x utilize segmentos ligando cada um dos pontos A e A_x ao eixo-x, para isso construa o ponto B sobre o eixo-x tal que AB seja perpendicular ao eixo-x.

Entrada: B=(x(A),0,0)

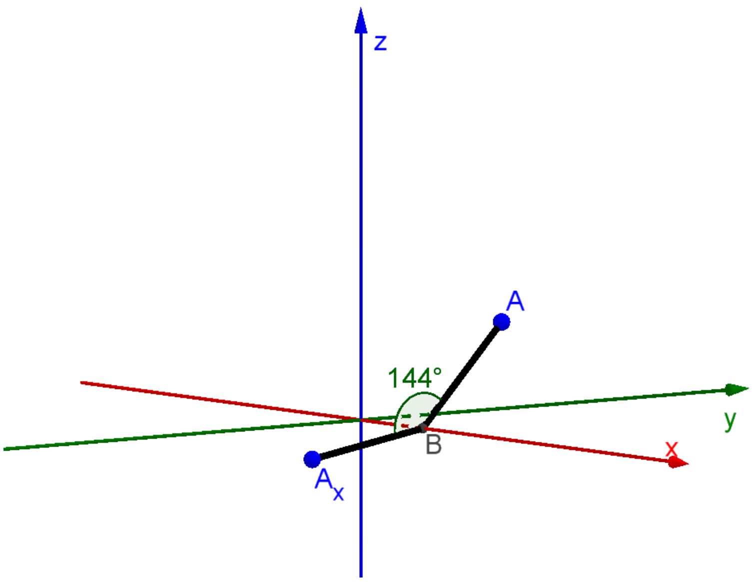
O comando *x(A)*, retorna o valor da coordenada x do ponto A, por isso AB é perpendicular ao eixo-x. Agora construa os segmentos AB, A_xB e o ângulo $A\hat{B}A_x$, pode-se usar as ferramentas  e  ou os comandos:

Entrada: Segmento[A, B]

Entrada: Segmento[A_x, B]

Entrada: Ângulo[A, B, A_x]

Com $\alpha = 144°$ o resultado esperado é:



Exercícios:

1. Refaça a atividade criando os pontos A_y, rotação de A em torno do eixo-y e A_z, rotação de A em torno do eixo-z

2. Construa os pontos: $A_1 = R_x \cdot R_y \cdot R_z \cdot A$ e $A_2 = R_y \cdot R_z \cdot R_x \cdot A$. Utilizando o *Controle Deslizante* para alterar os valores de α, β e θ e observe como se comportam os pontos A_1 e A_2. Os pontos se coincidem? Por que?

3.3.2 Rotação no espaço de uma haste de comprimento variado

A primeira visualização de um braço robótico no espaço é por meio da construção de um segmento no espaço que representa uma haste.

ATIVIDADE 8

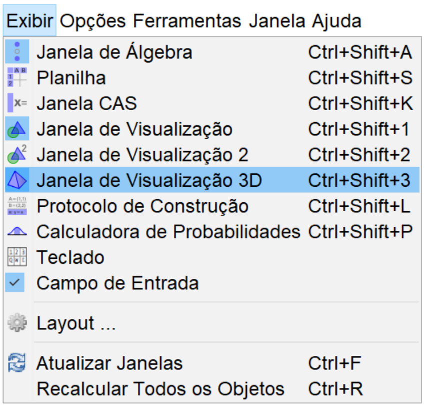
ROTAÇÃO NO ESPAÇO DE UMA HASTE DE COMPRIMENTO VARIADO

Conteúdos: Transformação de rotação (matrizes de rotação) e pontos no espaço.
Objetivos: Aplicar matrizes de rotação com relação aos eixos ordenados sobre um ponto no espaço e representar uma haste no espaço.

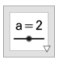
Nesta atividade vamos construir uma haste, representada por um segmento, com uma articulação na origem rotacionando em torno do eixo-y e do eixo-z.

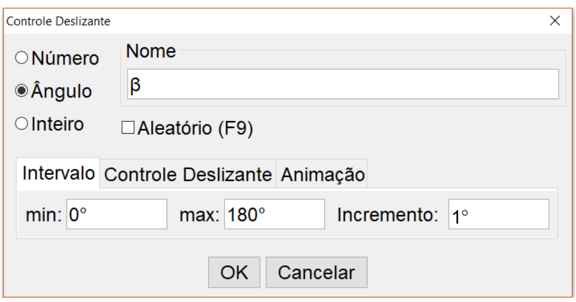
Atividade

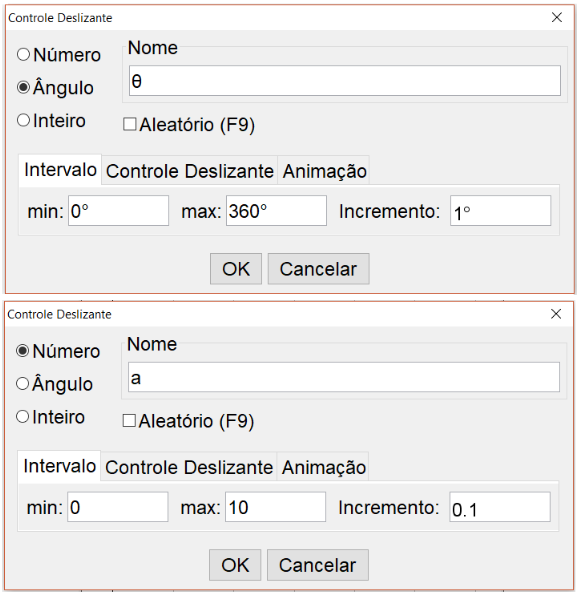
Esta atividade explora o espaço 3D, assim a visualização é feita na *Janela de visualização 3D*, acesse no menu Exibir e selecione *Janela de Visualização 3D*



1. Ângulos e matrizes de rotações.

Utilize o *Controle Deslizante*  para construir o ângulo β que será o ângulo de rotação em torno do eixo-y, variando de 0°a 180°com incremento de 1°, o ângulo θ que será o ângulo de rotação em torno do eixo-z, variando de 0°a 360°com incremento de 1°e o comprimento a da haste, variando de 0 a 10 com incremento de 0.1.

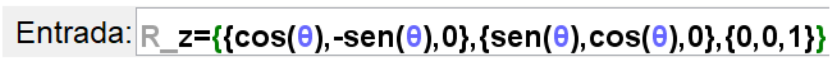




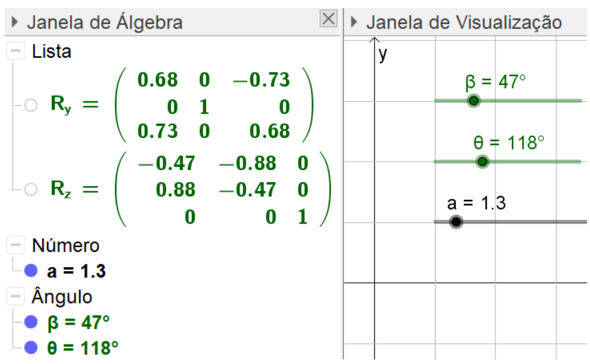
Insira as matrizes: R_y de rotação em torno do eixo-y e R_z de rotação em torno do eixo-z.

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix};\ R_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escreva as matrizes R_y e R_z utilizando o campo Entrada.



Resultado esperado,



2. Aplicando as matrizes.

Aplicar a rotação em torno do eixo-y e em seguida em torno do eixo-z em um ponto P, corresponde a multiplicação matricial

$$R_z \cdot R_y \cdot P.$$

Para essa leitura P é uma matriz 3×1, entretanto, no GeoGebra essa multiplicação deve ser feita utilizando o comando *AplicarMatriz* para que seja possível visualizar o resultado geometricamente. Como ponto de partida considere o ponto $P = (a, 0, 0)$, assim a haste tem comprimento a e inicialmente está sobre o eixo-x. Não é necessário criar o ponto $(a, 0, 0)$, vamos inserir esse ponto diretamente no comando *AplicarMatriz*.
Efetuando a rotação em torno do eixo-y e em seguida em torno do eixo-z sobre o ponto $(a, 0, 0)$ é criado o ponto A que coresponde a uma das extremidades da haste, a outra extremidade será a origem $O = (0, 0, 0)$:

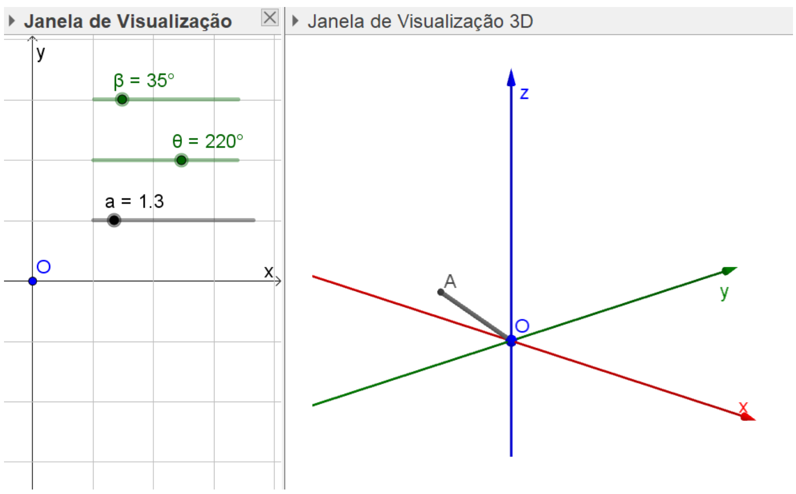
Entrada: A=AplicarMatriz[R_z*R_y, (a,0,0)]

Entrada: O=(0,0,0)

Construa o segmento que representa a haste.

Entrada: Segmento[O, A]

Resultado esperado,



3. Projeções.

A visualização das rotações podem não ser muito simples para alguns estudantes, assim para facilitar construa a projeção ortogonal de A sobre o plano XY.
Considerando um ponto $Q = (x, y, z)$ sua projeção sobre o plano XY é o ponto $Q_{XY} = (x, y, 0)$. Portanto utilize os comandos *x(A)* e *y(A)* para obter as respectivas coordenadas x e y do ponto A e criar o ponto A' obtido pela projeção.

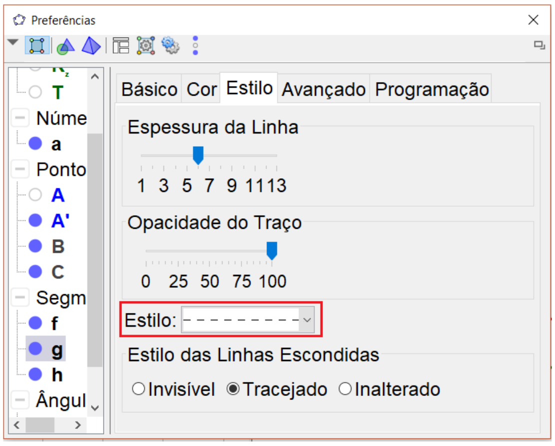
Entrada: A'=(x(A),y(A),0)

Criar os segmentos AA' e OA' ajudam na visualização indicando melhor as projeções. Para isso utilize a ferramenta *Segmento*, ou os comandos no campo Entrada:

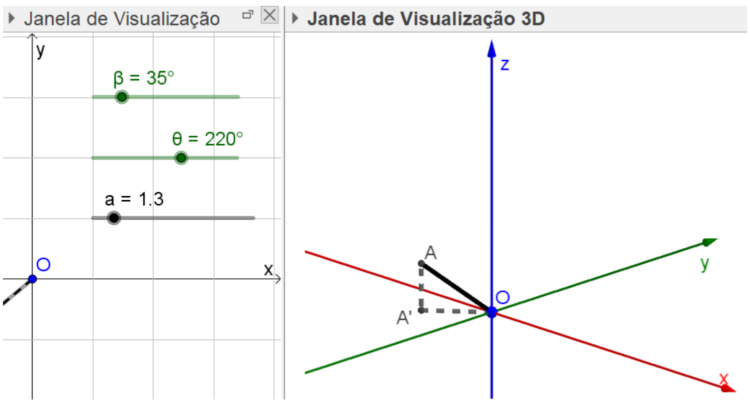
Entrada: **Segmento[A, A']**

Entrada: **Segmento[O, A']**

Acesse as Propriedades dos segmentos criados por $A'B$ e OB e na aba estilo escolha Estilo tracejado, como na figura:



Resultado esperado,



Observações: as configurações dos eixos podem ser acessadas selecionando a ferramenta *Mover* e clicando com o botão direto dentro da *Janela de Visualização 3D*, dentre as opções clique em *Janela de Visualização* e explore as abas, nelas são disponibilizadas opções como exibir eixos, exibir números, graduação dentre outras.

Exercícios:

Utilizando o arquivo do GeoGebra criado nesta atividade.

1. Construa o ângulo $A\hat{O}A'$. O ângulo $A\hat{O}A'$ possui alguma relação com β ou θ?

2. Explore o comando *Ângulo[]* do GeoGebra para construir um ângulo que mostre a rotação de θ graus em torno do eixo-z.

3. Considerando todos os valores de β, θ e a de acordo com suas construções, descreva quais pontos do espaço estão ao alcance de A.

3.3.3 Simulação de um braço robótico com duas articulações no espaço

Por fim apresentamos a construção da simulação de um braço robótico no espaço, nesta atividade é aplicado os conceitos de pontos no espaço, segmentos no espaço, matrizes de rotação (transformações geométricas) e translação. As matrizes de rotação são aplicadas em torno dos eixos x, y e z e para que um ponto rotacione com relação a uma das hastes é utilizado a translação, assim não é necessário inserir uma matriz de rotação sobre um eixo arbitrário.

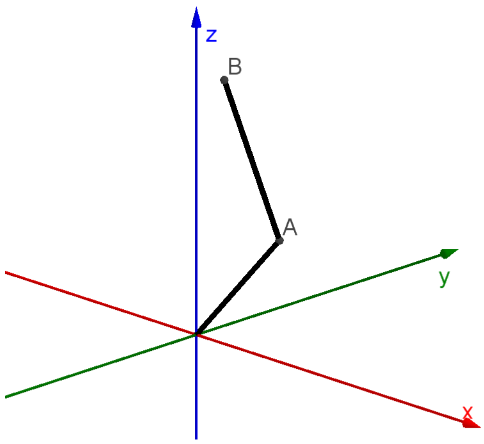
ATIVIDADE 9

SIMULAÇÃO DE UM BRAÇO ROBÓTICO COM DUAS ARTICULAÇÕES NO ESPAÇO

Conteúdos: Transformação de rotação (matrizes de rotações), translação, pontos e segmentos no espaço.

Objetivos: Aplicar matrizes de rotação com relação aos eixos ordenados sobre um ponto no espaço, aplicar translação e representar haste no espaço.

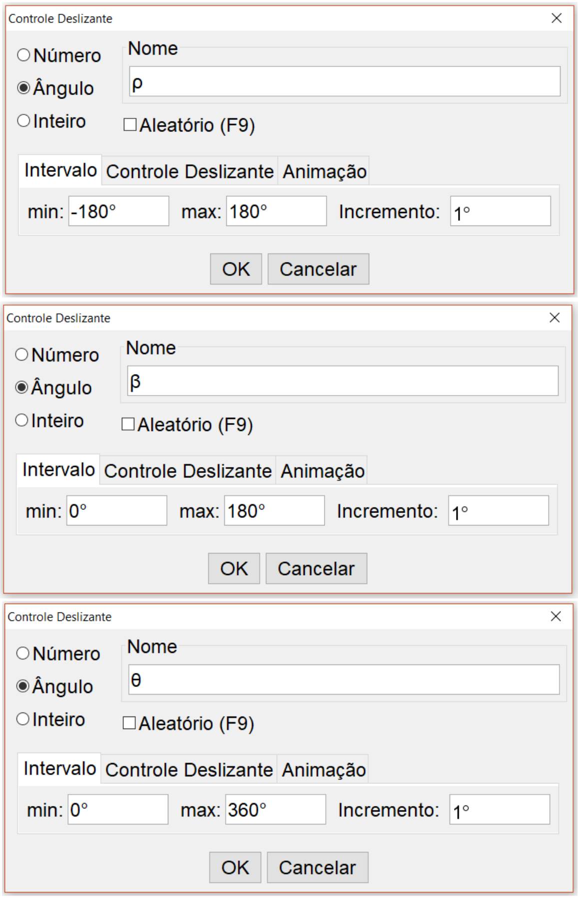
Nesta atividade vamos simular um braço robótico com duas juntas de articuladas, dois pontos no espaço, e duas hastes que formam o elo entre os pontos, representadas por dois segmentos. A ideia para essa construção é inicialmente construir o ponto B, uma das extremidades do braço, aplicar sua rotação e em seguida deslocar este ponto construindo o ponto A, elo entre as duas hastes, e por fim aplicar as rotações nestes dois pontos.



Atividade

1. Matrizes.

Utilize o *Controle Deslizante* para construir o ângulo ρ que será o ângulo de rotação em torno do eixo-y de B, variando de -180°a 180°com incremento de 1°, o ângulo β que será o ângulo de rotação em torno do eixo-y de A e B, variando de 0°a 180°com incremento de 1°, o ângulo θ que será o ângulo de rotação em torno do eixo-z de A e B, variando de 0°a 360°com incremento de 1°e os comprimentos a e b das hastes, variando de 0 a 10 com incremento de 0.1.
Observe que foi criado dois ângulos que serão aplicados como rotação em torno do eixo-y, isso porque a rotação definida por ρ será a rotação que irá movimentar a segunda aste, AB, com relação ao ponto A, enquanto β será a rotação dos dois pontos, A e B, em torno do eixo-y.



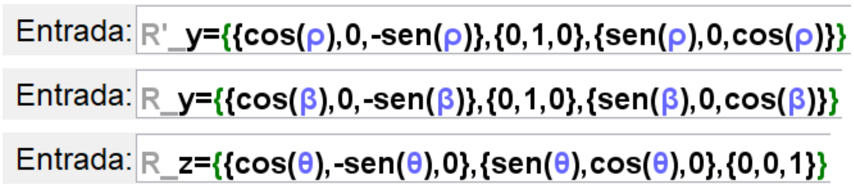
Insira as matrizes: R'_y de rotação em torno do eixo-y pelo ângulo ρ, R_y de rotação em torno do eixo-y pelo ângulo β e R_z de rotação em torno do eixo-z pelo ângulo θ.

$$R'_y = \begin{pmatrix} \cos\rho & 0 & -\operatorname{sen}\rho \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\rho & 0 & \cos\rho \end{pmatrix};$$

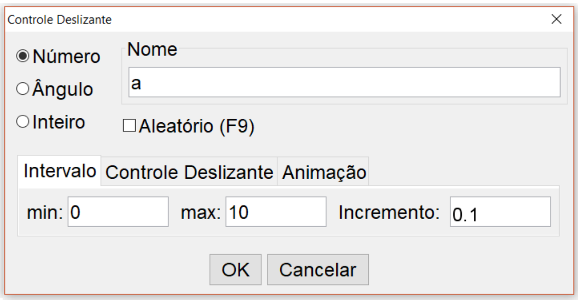
$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix};$$

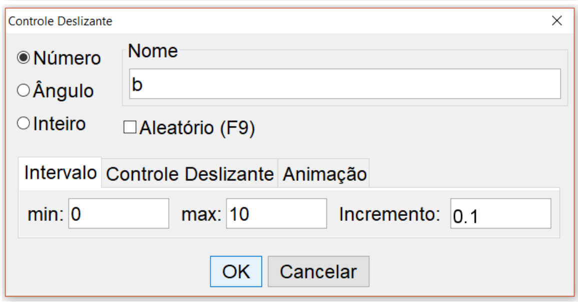
$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escreva as matrizes R'_y, R_y e R_z utilizando o campo Entrada.

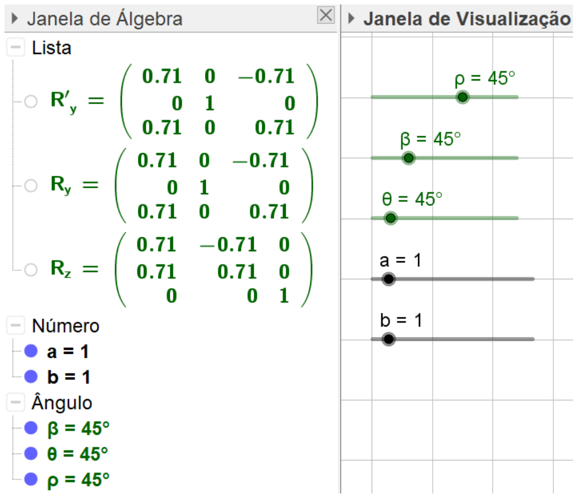


Construa os comprimentos a, da primeira haste, e b, da segunda haste, variando de 0 a 10 com incremento de 0.1.





Resultado esperado,



2. Aplicando as matrizes.

O ponto A será a rotação de $(a, 0, 0)$ por R_y e em seguida por R_z, por meio do comando *AplicarMatriz*:

```
Entrada: A=AplicarMatriz[R_z*R_y, (a,0,0)]
```

Antes de inserir o comando veja como é feita a construção do ponto B com um comando por vez:

1. Rotacionar $(b, 0, 0)$ em torno do eixo-y utilizando a matriz R'_y
   `AplicarMatriz[R'_y, (b,0,0)]`;

2. Deslocar por $(a, 0, 0)$
   `AplicarMatriz[R'_y, (b,0,0)]+(a,0,0)`;

3. Rotacionar por R_y e em seguida por R_z
   `AplicarMatriz[R_z*R_y, AplicarMatriz[R'_y, (b,0,0)]+(a,0,0)]`.

Todas as etapas escritas em um só comando no campo Entrada:

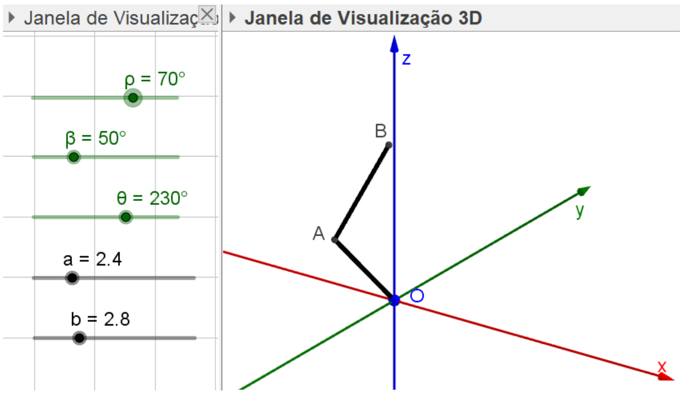
```
Entrada: B=AplicarMatriz[R_z*R_y, AplicarMatriz[R'_y, (b,0,0)]+(a,0,0)]
```

Por fim crie o ponto O na origem e os segmentos OA e AB, Entrada: `O=(0,0,0)`

Entrada: `Segmento[O, A]`

Entrada: `Segmento[A, B]`

Resultado esperado,



Exercícios:

Utilizando o arquivo do GeoGebra criado nesta atividade.

1. Construa a projeção A' do ponto A sobre o plano XY, como feito na Atividade 8.

2. Construa a projeção B' do ponto B sobre o plano XY.

3. Construa o ângulo $A\hat{O}A'$. O ângulo $A\hat{O}A'$ possui valor equivalente a ρ, β ou θ?

4. Construa o ângulo $B\hat{A}O$. O ângulo $B\hat{A}O$ possui valor equivalente a ρ, β ou θ?

5. Considerando todos os valores de ρ, β, θ, a e b de acordo as construções, descreva quais pontos do espaço estão ao alcance de B.

6. Utilizando o *Controle Deslizante* construa um ângulo α, variando entre 0°e 360°com 1°de incremento. Insira a matriz de rotação em torno do eixo-x:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

   Reescreva o ponto B:

   Entrada: `B=AplicarMatriz[R_z R_y,AplicarMatriz[R_x,AplicarMatriz[R'_y, (b, 0, 0)] + (a, 0, 0)]]`

   Descreva como a matriz R_x atua sobre o braço após inserido o comando.

3.3.4 Simulação de um braço robótico com duas articulações e uma garra no espaço

Esta atividade complementa a Atividade 9 inserindo uma garra ao braço construído, assim é necessário realizar a Atividade 9.

ATIVIDADE 10
SIMULAÇÃO DE UM BRAÇO ROBÓTICO COM DUAS ARTICULAÇÕES E UMA GARRA NO ESPAÇO

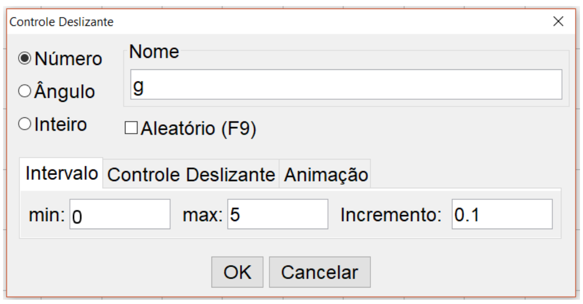
Conteúdos: Transformação de rotação (matrizes de rotação), matriz transposta, translação, pontos e segmentos no espaço.
Objetivos: Aplicar matrizes de rotação com relação aos eixos ordenados sobre um ponto no espaço, aplicar translação e representar haste no espaço.

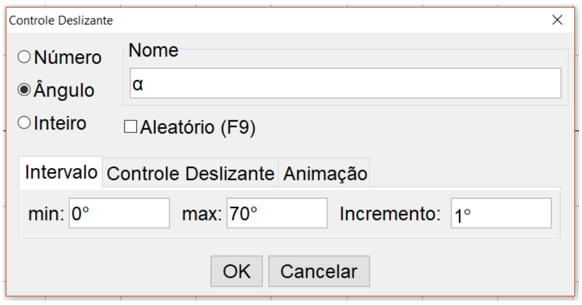
Nesta atividade vamos simular um braço robótico com duas juntas de articuladas, dois pontos no espaço, duas hastes que formam o elo entre os pontos, representadas por dois segmentos e uma garra na extremidade representada por quatro segmentos devidamente construídos.

Atividade

1. Simulação de uma garra robótica no plano.

Antes de inserir uma garra no braço construído na Atividade 9 esta atividade propõe a construção de uma garra no plano para compreender melhor o processo. Portanto nesta primeira etapa será utilizada apenas a *Janela de Visualização*
Para iniciar insira o comprimento de alcance da garra, com variação de 0 a 5 e incremento de 0.1 e um ângulo α, variando de 0°a 70°com incremento de 1°, para abrir e fechar a garra. O ângulo máximo para α pode ser escolhido de acordo com o interesse, este ângulo corresponde a abertura máxima da garra.





Insira a matriz de rotação em torno do eixo-z,

$$R'_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observação: a notação R'_z foi escolhida para ser condizente com a Atividade 9, pois a matriz R_z já foi construída.

```
Entrada: R'_z={{cos(α),sen(α),0},{-sen(α),cos(α),0},{0,0,1}}
```

Como pontos básicos na construção da garra use $(0,0,0)$, ponto fixo, $(g,0,0)$, extremidade da garra, e $(2g/3,-g/3,0)$ elo das duas hastes que formam metade da garra. Não é necessário construir estes pontos, pois estes serão inseridos diretamente na construção dos pontos C e D por meio da rotação, R'_z, em torno do eixo-z com ângulo α dos pontos $(2g/3,-g/3,0)$ e $(g,0,0)$ respectivamente.

```
Entrada: C=AplicarMatriz[R'_z, (2g/3,-g/3,0)]
Entrada: D=AplicarMatriz[R'_z, (g,0,0)]
```

Para visualizar a metade da garra construída crie o ponto $O=(0,0,0)$ e faça os segmentos $s=OC$ e $r=CD$.

```
Entrada: O=(0,0,0)
Entrada: s=Segmento(O, C)
Entrada: r=Segmento(C, D)
```

Para construir a outra parte da garra vamos construir os pontos C' e D' rotacionando os pontos $(2g/3,g/3,0)$ e $(g,0,0)$ em torno do eixo-z pelo mesmo ângulo α. Não será necessário de outra matriz para efetuar a rotação, pois basta utilizar o comando *MatrizTransposta* no campo entrada, uma vez que a matriz transposta de R'_z corresponde a rotação aplicada por R'_z mas no sentido oposto.

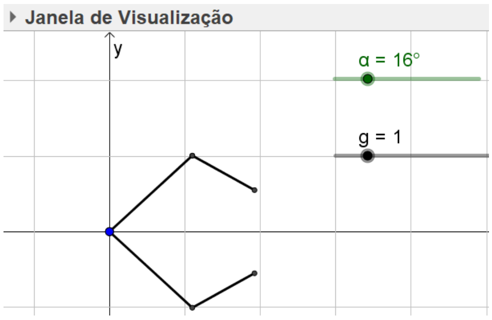
$$(R'_z)^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

```
Entrada: C'=AplicarMatriz[MatrizTransposta[R'_z], (2g/3,g/3,0)]
Entrada: D'=AplicarMatriz[MatrizTransposta[R'_z], (g,0,0)]
```

Insira os segmentos OC' e $C'D'$ para representar as hastes,

```
Entrada: s'=Segmento(O, C')
Entrada: r'=Segmento(C', D')
```

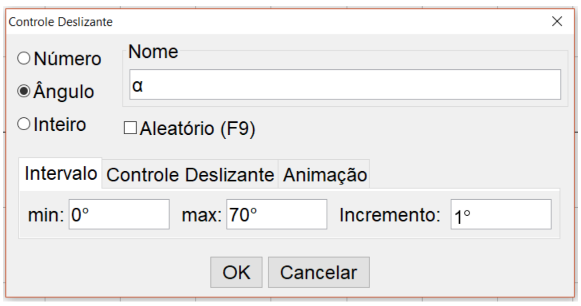
Resultado esperado,

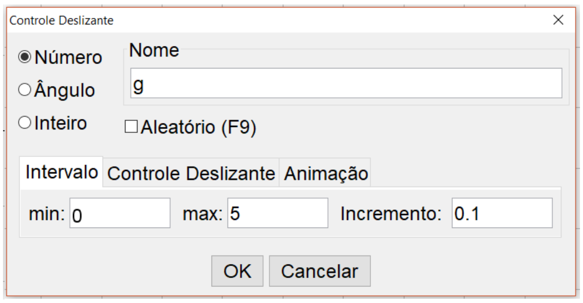


Dica: acesse as propriedades dos pontos e segmentos para ocultar esses objetos demarcando a caixa de seleção de Exibir Objeto.

2. Simulação de um braço robótico com garra no espaço.

Agora o objetivo é inserir a garra no braço construído na Atividade 9, portanto deve-se utilizar o arquivo gerado pela Atividade 9 (sem os exercícios).
Como visto na etapa anterior desta atividade é necessário um ângulo de rotação para movimentar a garra e definir um comprimento g, assim construa o ângulo α e o comprimento g.





Insira a matriz de rotação em torno do eixo-z e a matriz de reflexão com relação ao eixo-x

$$R'_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

```
Entrada: R'_z={{cos(α),sen(α),0},{-sen(α),cos(α),0},{0,0,1}}
```

Como a garra deve ser inserida na extremidade de uma haste que rotaciona o ponto C (como da etapa anterior) deve rotacionar junto por isso o comando que o cria é extenso, segue cada etapa para formar o comando.

1. Rotacionar $(2g/3, -g/3, 0)$ em torno do eixo-z utilizando a matriz R'_z, para abrir e fechar a garra;

   ```
   AplicarMatriz[R'_z, (2g/3, -g/3, 0)]
   ```

2. Deslocar $(b, 0, 0)$;

   ```
   AplicarMatriz[R'_z, (2g/3, -g/3, 0)]+(b,0,0)
   ```

3. Rotacionar por R'_y, para se movimentar junto com a haste AB;

   ```
   AplicarMatriz[R'_y, AplicarMatriz[R'_z, (2g/3, -g/3, 0)]+(b,0,0)]
   ```

4. Deslocar $(a, 0, 0)$;

   ```
   AplicarMatriz[R'_y, AplicarMatriz[R'_z, (2g/3, -g/3, 0)]+(b,0,0)] + (a, 0, 0)
   ```

5. Rotacionar por R_y e em seguida por R_z para se movimentar junto com a haste OA

   ```
   AplicarMatriz[R_z R_y, AplicarMatriz[R'_y,
   AplicarMatriz[R'_z, (2g/3, -g/3, 0)]+(b,0,0)] + (a, 0, 0)]
   ```

Todas as etapas escritas em um só comando no campo Entrada:

Entrada: C=AplicarMatriz[R_z R_y, AplicarMatriz[R'_y, AplicarMatriz[R'_z, (2g/3, -g/3, 0)]+(b,0,0)] + (a, 0, 0)]

O ponto D é construído da mesma maneira,

Entrada: D=AplicarMatriz[R_z R_y, AplicarMatriz[R'_y, AplicarMatriz[R'_z, (g, 0, 0)]+(b,0,0)] + (a, 0, 0)]

Construa os segmentos $r = CD$ e $s = BC$ para representar parte da garra,

Entrada: s=Segmento(B, C)

Entrada: r=Segmento(C, D)

Para a outra parte da garra construa os pontos C' e D', utilizando $(2g/3, g/3, 0)$ e $(g, 0, 0)$ como pontos de partida e aplique a matriz transposta de R'_z para uma rotação em torno do eixo-z, no sentido oposto, com o mesmo ângulo α.

Entrada: C'=AplicarMatriz[R_z R_y, AplicarMatriz[R'_y, AplicarMatriz[MatrizTransposta(R'_z), (2g/3, g/3, 0)] +(b,0,0)] + (a, 0, 0)]

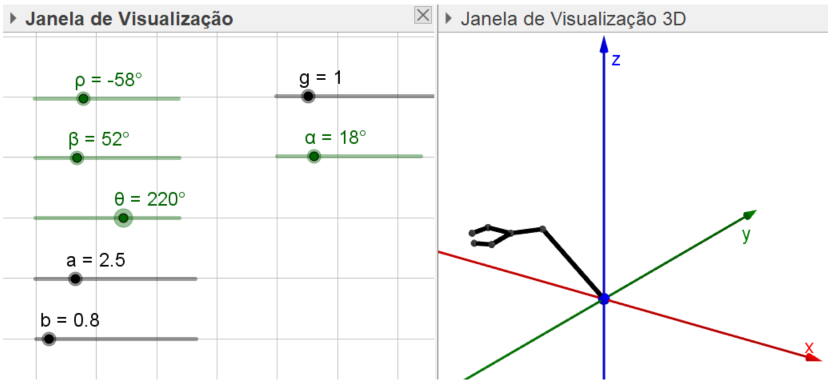
Entrada: D'=AplicarMatriz[R_z R_y, AplicarMatriz[R'_y, AplicarMatriz[MatrizTransposta(R'_z), (g, 0, 0)] +(b,0,0)] + (a, 0, 0)]

Por fim construa os segmentos $r' = C'D'$ e $s' = BC'$ para completar a garra.

Entrada: s'=Segmento(B, C')

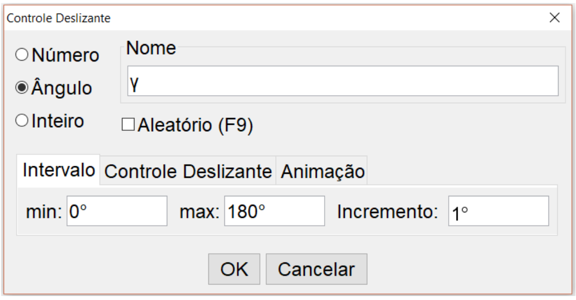
Entrada: r'=Segmento(C', D')

Resultado esperado,

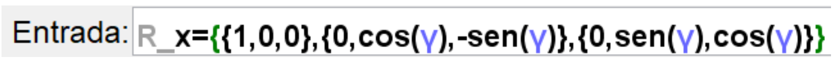


3. Rotação da garra.

Muitas vezes é necessário que uma garra de um braço robótico rotacione em torno de seu próprio eixo. Para isso aplique uma rotação da garra em torno do eixo-x antes de aplicar as rotações R'_y, R_y e R_z. Construa um novo ângulo γ, variando entre 0°e 180°, com incremento de 1°pra esta rotação.



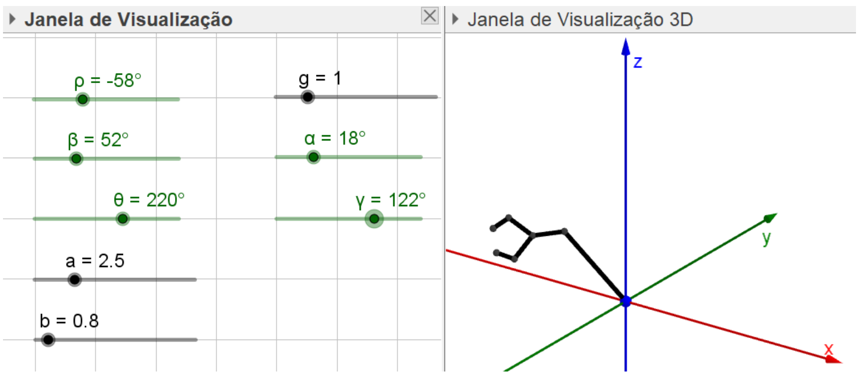
E insira a matriz R_x de rotação em torno do eixo-x por um ângulo γ,



A rotação da garra deve ser inserida antes das rotações R'_y, R_y e R_z, assim reescreva os pontos C, D, C' e D' inserindo R_x logo após a rotação por R'_z. A imagem abaixo mostra os comandos no campo Entrada que definem os pontos C, D, C' e D' com a alteração que insere a rotação em destaque.

```
Entrada: C=AplicarMatriz[R_z R_y, AplicarMatriz[R'_y,
         AplicarMatriz[R_x, AplicarMatriz[R'_z, (2g / 3, (-g) / 3, 0)]]
         + (b, 0, 0)] + (a, 0, 0)]
Entrada: D=AplicarMatriz[R_z R_y, AplicarMatriz[R'_y,
         AplicarMatriz[R_x, AplicarMatriz[R'_z, (g, 0, 0)]]
         + (b, 0, 0)] + (a, 0, 0)]
Entrada: C'=AplicarMatriz[R_z R_y, AplicarMatriz[R'_y,
         AplicarMatriz[R_x, AplicarMatriz[MatrizTransposta(R'_z), (2g / 3, g / 3, 0)]]
         + (b, 0, 0)] + (a, 0, 0)]
Entrada: D'=AplicarMatriz[R_z R_y, AplicarMatriz[R'_y,
         AplicarMatriz[R_x, AplicarMatriz[MatrizTransposta(R'_z), (g, 0, 0)]]
         + (b, 0, 0)] + (a, 0, 0)]
```

Resultado esperado,



Exercícios:
Utilizando o arquivo do GeoGebra criado nesta atividade.

1. Reescreva os pontos C, D, C' e D' escolhendo pontos diferentes para $(2g/3, -g/3, 0)$ e $(2g/3, g/3, 0)$.

2. Acesse as propriedades do ângulo γ (clique com o botão direito sobre o ângulo na *Janela algébrica*) e configure como na figura a área destinada a animação,

   Animação
   Velocidade: 5 Repetir: ⇒ Crescente

   Em seguida ative a animação deste ângulo, clique com o botão direito sobre o ângulo na *Janela Algébrica* e selecione *Animar*.

3. Acessando as propriedades dos ângulos (clique com o botão direito sobre o ângulo na *Janela algébrica*) e altere seus valores máximos e mínimos e descreva como tais alterações mudam o comportamento do braço.

4. Altere as matrizes de rotações criadas invertendo o sentido de cada rotação, exemplo:

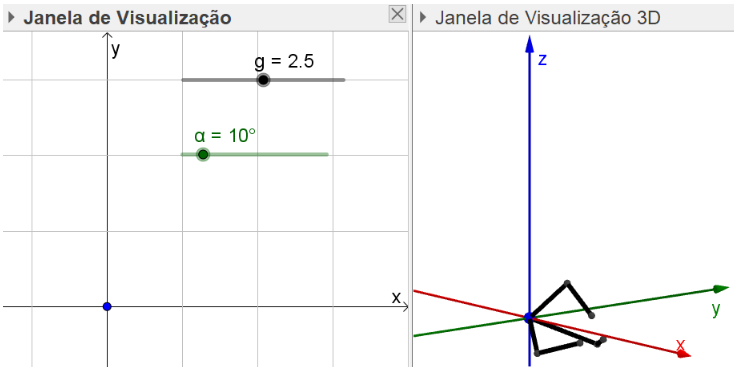
$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Com essas mudanças o braço perde capacidade de alcançar algum objeto que anteriormente alcançava?

5. Insira mais uma haste entre o ponto B e a garra, faça com que esta haste rotacione de tal modo que melhore o posicionamento da garra.

6. O comando *AplicarMatriz* pode atuar sobre diferentes objetos criados no GeoGebra e não apenas sobre pontos, reescreva a primeira etapa desta atividade (*Simulação de uma garra robótica no plano*) aplicando as rotações sobre os segmentos que unem $(0,0,0)$, $(2g/3, -g/3, 0)$ e $(g,0,0)$ e não sobre os pontos.

7. Em um novo arquivo construa uma garra com três extremidades, como na figura, com comprimento g e com um ângulo α que controla a abertura da garra. Dica: Assim como feito na primeira etapa desta atividade construa a garra num arquivo separado.



8. Insira a garra do exercício anterior no braço construído na Atividade 9.

4 Aplicação das Atividades

Com o objetivo de verificar como as atividades descritas no Capítulo 3 podem contribuir para o aprendizado de matrizes, foram selecionados quatro estudantes da 1ª série do Ensino Médio da ETEP (Escola Técnica de Paulínia) para executa-las. Como esses estudantes não conheciam matrizes, foi ministrada uma aula expositiva para apresentar os conceitos necessários para a realização das atividades (Capítulo 1).

Após a aula sobre matrizes os estudantes receberam as atividades para realizar individualmente fora do horário regular de aula, sem a presença do professor, e foram orientados a fazer anotações de suas dúvidas durante a execução das atividades. Os estudantes relataram dificuldades com relação a conhecimentos de GeoGebra, como escrever letras gregas e inserir alguns comandos no campo entrada. Com isso ficou claro a necessidade de apresentar melhor o GeoGebra, e por isso foi inserido na Atividade 5 instruções de como inserir as letras gregas no campo entrada do GeoGebra. Fica como sugestão que antes da aplicação das atividades, o professor explore mais as ferramentas básicas do GeoGebra e seus comandos no campo entrada. De forma geral, os estudantes realizaram as atividades sem problemas e relataram demorar de 20 a 30 minutos nas Atividades 1 a 7 e de 30 a 60 minutos nas Atividades 8, 9 e 10, o que parece ser um tempo bem razoável de acordo com o previsto na Tabela 7.

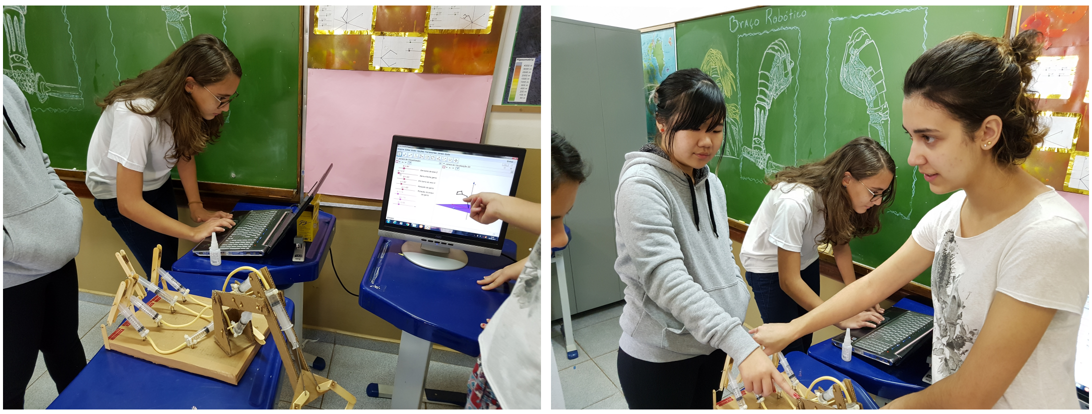


Figura 22 – Estudantes da ETEP apresentando as atividades na “Escola Aberta 2017”

Para complementar o trabalho realizado pelos estudantes foi sugerido a construção de um braço hidráulico (Figura 22) utilizando materiais simples como papelão e seringas, de acordo com as orientações apresentadas no vídeo “How to Make Hydraulic Powered Robotic Arm from Cardboard” (JUAN, 2015). Por fim, os estudantes apresentaram o trabalho no evento “Escola Aberta 2017” realizado em 05 e 06 de setembro na ETEP, onde foi possível verificar os conhecimentos adquiridos pelos estudantes durante a realização das atividades. Ficou claro que todos compreenderam como as matrizes podem ser aplicadas em objetos geométricos, ou seja, indiretamente aprenderam informalmente conceitos de transformações geométricas.

Considerações Finais

Inicialmente apresentamos os conceitos de matrizes com o objetivo de preparar para o estudo de transformações. Definimos as operações matriciais, o espaço das matrizes reais, e algumas propriedades formando o conhecimento necessário para nosso objetivo. Com o conceito de matrizes formalizado definimos transformações lineares e suas matrizes associadas, criando o elo para nosso estudo principal, que são as transformações geométricas. Utilizando exemplos para melhor conceituar, apresentamos algumas transformações geométricas: translação, dilatação, contração, escala, reflexão e rotação. Apresentamos e exemplificamos todas essas transformações no plano e no espaço. Para as transformações lineares apresentamos suas matrizes associadas, e no caso da rotação mostramos como determinar a matriz.

Após este estudo teórico exploramos as transformações geométricas em dez atividades realizadas no GeoGebra destinadas a estudantes do Ensino Médio, na qual propomos a construção de uma simulação de um braço robótico no espaço. Elaboramos as atividades de forma a descrever passo a passo as construções, pois os estudantes aos quais se destinam essas atividades, não são familiarizados com as notações necessárias e nem com os comandos do software, além de não ser comum a visualização e construção de objetos no espaço.

Por fim, foi proposto a quatro estudantes da Escola Técnica de Paulínia que executassem as atividades. Por meio de relatos e da apresentação realizada no evento "Escola Aberta 2017", verificamos que houve um grande aproveitamento dos estudos realizados, permitindo o aprendizado dos conceitos de matrizes e de suas aplicações em objetos geométricos (transformações geométricas). As atividades permitem que os estudantes explorem as aplicações de matrizes de forma dinâmica no GeoGebra e a característica dinâmica é muito estimulante, pois permite uma visualização totalmente nova para esses estudantes.

Como proposta de trabalhos futuros podemos utilizar o GeoGebra para aplicar as transformações geométricas, mais especificamente a rotação, em cônicas e quádricas. Contribuindo muito no aprendizado de tais conceitos no Ensino Médio.

Esperamos que os conceitos aqui apresentados contribuam no desenvolvimento do trabalho docente de professores do Ensino Médio, explorando as atividades propostas, levando a apropriação dos conhecimentos, e despertando o interesse pela Matemática nos estudantes.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações*. 8ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 12, 13, 17 e 25.

BOLDRINI, J. L. *Álgebra Linear*. 3ª. ed. Campinas: Harbra, 1986. Citado na página 27.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. 3ª. ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 2. Citado na página 12.

FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise I*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. Citado na página 26.

GEOGEBRA. *GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone*. 2017. Versão: 5.0.395.0-d. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Citado na página 12.

HEFEZ, A.; FERNANDES, C. d. S. *Introdução à Álgebra Linear*. 2ª. ed. [S.l.]: SBM, 2016. Citado na página 27.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. *Matemática: ciência e aplicações*. 9ª. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 2. Citado na página 12.

JUAN. *How to Make Hydraulic Powered Robotic Arm from Cardboard*. 2015. Acesso em: 13 ago. 2017. Disponível em: <https://youtu.be/R82cqi4JLV8>. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 85.

PAIVA, M. *Matemática: Paiva*. 3ª. ed. São Paulo: Moderna, 2015. v. 3. Citado na página 12.

SANTOS, R. de J. *Matrizes, vetores e geometria anaítica*. Belo Horizonte: UFMG, 2010. Citado na página 40.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática para compreender o mundo*. 1ª. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 2. Citado na página 12.