



**UNICAMP**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE  
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica

MARIANA BEATRIZ LELIS DE LIMA

**Atividades para sala de aula usando como  
recurso pedagógico a Geometria das dobraduras.  
Da Geometria Euclidiana básica às Cônicas.**

Campinas

2017

Mariana Beatriz Lelis de Lima

**Atividades para sala de aula usando como recurso pedagógico a Geometria das dobraduras. Da Geometria Euclidiana básica às Cônicas.**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientadora: Maria Lúcia Bontorim de Queiroz

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Mariana Beatriz Lelis de Lima e orientada pela Profa. Dra. Maria Lúcia Bontorim de Queiroz.

Campinas

2017

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** CAPES

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

L628a Lima, Mariana Beatriz Lelis de, 1981-  
Atividades para sala de aula usando como recurso pedagógico a geometria das dobraduras : da geometria euclidiana básica às cônicas / Mariana Beatriz Lelis de Lima. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Maria Lúcia Bontorim de Queiroz.  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria - Estudo e ensino. 2. Origami. 3. Geometria euclidiana. 4. Matemática - Estudo e ensino. I. Queiroz, Maria Lúcia Bontorim de, 1946-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Classroom activities using as pedagogical resource the folding geometry : from basic euclidean geometry to conics

**Palavras-chave em inglês:**

Geometry - Study and teaching

Origami

Euclidean geometry

Mathematics - Study and teaching

**Área de concentração:** Matemática em Rede Nacional

**Titulação:** Mestra

**Banca examinadora:**

Maria Lúcia Bontorim de Queiroz [Orientador]

Eliane Quelho Frota Rezende

Roseli de Alvarenga Corrêa

**Data de defesa:** 30-11-2017

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado profissional defendida em 30 de novembro de 2017 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). MARIA LUCIA BONTORIM DE QUEIROZ**

**Prof(a). Dr(a). ELIANE QUELHO FROTA REZENDE**

**Prof(a). Dr(a). ROSELI DE ALVARENGA CORRÊA**

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

*Ao meu esposo, Rubens*

*A todos os professores que acreditam no futuro da educação.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

Agradeço a meus pais, Francisco e Benedita, por todo ensinamento e apoio em toda minha formação como pessoa e profissional.

Ao meu marido Rubens, por todo amor, compreensão e força e por cuidar de tudo enquanto estava ausente.

Aos meus irmãos, Ivone e José, por entenderem a minha ausência e cuidarem de nossos pais.

A minha orientadora Professora Maria Lúcia, por toda compreensão, pelos ensinamentos, pelo profissionalismo e por não ter desistido da orientação, mesmo com todas as dificuldades.

Aos professores do Profmat, por todo ensinamento e por acreditarem que podemos fazer a diferença.

À CAPES, pelo apoio financeiro, à SBM e ao IMPA, pela criação e manutenção do PROFMAT.

Aos meus amigos do Profmat, por toda ajuda, ensinamentos e principalmente pela amizade. Em especial à Juliana, por toda amizade e por todas as horas de estudo e apoio.

Aos meus amigos, em especial a Lucyani e Aline, que além de compreensão me deram suporte para continuar.

Aos meus amigos do Kung Fu, por estarem sempre dispostos a ouvir, e ao mestre Paulo, pelos ensinamentos que fazem toda diferença na nossa vida.

A todos professores que passaram por minha formação e foram fundamentais em minha vida.

A todos meus alunos, que me fazem querer sempre aprender mais.

# Resumo

A Geometria, desde a antiguidade, é objeto de estudo e interesse devido à sua relação com outras áreas da Matemática e sua aplicabilidade no dia a dia. Atualmente, o ensino de Geometria oferece a possibilidade de inovação com várias ferramentas de estudo, trazendo benefícios para a aprendizagem e desenvolvimento do ensino de Matemática. Este trabalho apresenta o desenvolvimento de algumas teorias relevantes da Geometria Euclidiana Plana e alguns números construtíveis. Abordamos um breve relato histórico sobre Euclides e sua obra e sobre as diversas tentativas de resolução de alguns problemas clássicos. Em seguida, exibimos de forma sucinta um estudo sobre Cônicas. Passamos então a falar sobre Origami, sua história e o sistema axiomático de Huzita-Hatori, sua relação com a Geometria Euclidiana Plana e os conceitos geométricos apresentados por Euclides. Durante o desenvolvimento do trabalho apresentamos algumas aplicações sobre diferentes temáticas, com resoluções através de conceitos matemáticos ou dobraduras. Para finalizar, são apresentadas atividades com dobraduras, que podem ser realizados com alunos do Ensino Fundamental ao Médio.

**Palavras-chave:** geometria, ensino, origami, números, dobraduras, matemática.

# Abstract

Since antiquity, Geometry is an object of study and interest because of its relation with other areas of Mathematics and its applicability in the daily life. Currently, the teaching of Geometry offers the possibility of innovation with several study tools, bringing benefits to the learning and development of Mathematics teaching. This project presents the development of some relevant theories about Plane Euclidean Geometry and some constructible numbers. It is also addressed a brief historical account of Euclid and his work and the various attempts to solve some classical problems. Then, it is briefly presented a study on Conics. The next topic is about Origami, its history and the axiomatic system of Huzita-Hatori, its relation with Plane Euclidean Geometry and the geometric concepts presented by Euclid. During the development of this work, it is presented some applications on different themes, with resolutions through mathematical concepts or folding. Finally, activities are presented with folds, which can be performed with elementary or high school students.

**Keywords:** geometry, teaching, origami, numbers, foldings, math.



# Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Congruência de triângulos. . . . .	25
Figura 1.2 – Caso de congruência L.A.L. . . . .	26
Figura 1.3 – Caso de congruência A.L.A. . . . .	26
Figura 1.4 – Demonstração do caso de congruência A.L.A. . . . .	27
Figura 1.5 – Caso de congruência L. L. L. . . . .	27
Figura 1.6 – Demonstração do caso de congruência L. L. L. . . . .	28
Figura 1.7 – Definição de ângulo externo. . . . .	29
Figura 1.8 – Caso de congruência L.A.Ao. . . . .	29
Figura 1.9 – Demonstração do caso de congruência L.A.A. . . . .	30
Figura 1.10 – Mediatriz de um segmento de reta. . . . .	30
Figura 1.11 – Reflexão do ponto $P$ em relação à reta $r$ . . . . .	32
Figura 1.12 – Eixo de simetria no trapézio. . . . .	33
Figura 1.13 – Translação de um ponto $P$ no plano. . . . .	33
Figura 1.14 – Translação do triângulo $XYZ$ . . . . .	34
Figura 1.15 – Rotação de um ponto $X$ sobre um ângulo $\theta$ , com $-180^\circ < \theta < 180^\circ$ . . . . .	34
Figura 1.16 – Axioma das Paralelas. . . . .	35
Figura 1.17 – Teorema 1.3.3. . . . .	36
Figura 1.18 – Demonstração do Teorema 1.3.3. . . . .	36
Figura 1.19 – Demonstração do Teorema da base média de um triângulo. . . . .	37
Figura 1.20 – Demonstração do Teorema da base média de um trapézio. . . . .	37
Figura 1.21 – Demonstração do Teorema de Tales. . . . .	38
Figura 1.22 – Demonstração do Teorema de Tales. . . . .	39
Figura 1.23 – Semelhança de triângulos. . . . .	40
Figura 1.24 – Demonstração do caso de semelhança A.A.A. . . . .	41
Figura 1.25 – Demonstração do caso de semelhança L.L.L. . . . .	42
Figura 1.26 – Demonstração do Teorema da semelhança nos triângulos retângulos. . . . .	43
Figura 1.27 – Demonstração do Teorema de Pitágoras. . . . .	44
Figura 1.28 – Aplicação 1.5.1. . . . .	44
Figura 1.29 – Aplicação 1.5.2. . . . .	45
Figura 1.30 – Aplicação 1.5.3. . . . .	46
Figura 1.31 – Aplicação 1.5.3. . . . .	46
Figura 1.32 – Aplicação 1.5.4. . . . .	47
Figura 1.33 – Aplicação 1.5.5. . . . .	47
Figura 2.1 – Demonstração do Teorema de Ceva. . . . .	50
Figura 2.2 – Demonstração do Teorema de Ceva. . . . .	50
Figura 2.3 – Recíproca da demonstração do Teorema de Ceva. . . . .	51

Figura 2.4 – Demonstração do Teorema de Ceva. . . . .	52
Figura 2.5 – Demonstração do Teorema de Ceva. . . . .	53
Figura 2.6 – Baricentro. . . . .	54
Figura 2.7 – Demonstração do Teorema 2.3. . . . .	54
Figura 2.8 – Demonstração do teorema 2.3. . . . .	55
Figura 2.9 – Ortocentro. . . . .	56
Figura 2.10–Incentro. . . . .	57
Figura 2.11–Circunferência inscrita ao triângulo. . . . .	58
Figura 2.12–Aplicação 2.3.1. . . . .	59
Figura 2.13–Aplicação 2.3.1. . . . .	59
Figura 2.14–Aplicação 2.3.1. . . . .	60
Figura 2.15–Aplicação 2.3.2. . . . .	60
Figura 2.16–Aplicação 2.3.3. . . . .	61
Figura 2.17–Proposição 2.3.1. . . . .	63
Figura 2.18–Demonstração da proposição 2.3.1. . . . .	64
Figura 2.19–Ponto de Nagel. . . . .	65
Figura 2.20–Ponto de Gergonne. . . . .	66
Figura 2.21–Circunferência de nove pontos. . . . .	68
Figura 2.22–Demonstração da circunferência de nove pontos. . . . .	68
Figura 2.23–Demonstração do Teorema da Circunferência de Nove Pontos. . . . .	69
Figura 2.24–Demonstração da circunferência de nove pontos. . . . .	69
Figura 2.25–Demonstração da circunferência de nove pontos. . . . .	69
Figura 2.26–Demonstração da reta de Euler. . . . .	70
Figura 2.27–Demonstração da reta de Euler. . . . .	71
Figura 3.1 – Construção do segmento de medida $a + b$ , $a$ e $b$ construtíveis. . . . .	76
Figura 3.2 – Construção do segmento de medida $a + b$ e $a - b$ , $a$ e $b$ construtíveis. . . . .	76
Figura 3.3 – Construção do segmento de medida $a.b$ , $a$ e $b$ construtíveis. . . . .	77
Figura 3.4 – Construção do segmento de medida $a.b$ , $a$ e $b$ construtíveis. . . . .	77
Figura 3.5 – Construção do segmento de medida $\frac{a}{b}$ , $a$ e $b$ construtíveis. . . . .	78
Figura 3.6 – Construção do segmento de medida $\frac{a}{b}$ , $a$ e $b$ construtíveis. . . . .	78
Figura 3.7 – Construção do segmento de medida $\sqrt{a}$ , $a$ construtível. . . . .	79
Figura 3.8 – Construção das soluções da equação quadrática de mesmo sinal. . . . .	81
Figura 3.9 – Construção das soluções da equação quadrática de mesmo sinal. . . . .	82
Figura 3.10–Construção das soluções da equação quadrática de sinais diferentes. . . . .	83
Figura 3.11–Construção das soluções da equação quadrática de sinais diferentes. . . . .	83
Figura 3.12–Segmento áureo interno. . . . .	84
Figura 3.13–Construção do segmento áureo. . . . .	85
Figura 3.14–Construção retângulo áureo. . . . .	86
Figura 3.15–Trissecção do ângulo com uso do deslizamento de régua. . . . .	88

Figura 4.1 – Superfície cônica de revolução. . . . .	91
Figura 4.2 – Secção cônica obtendo uma circunferência, $\beta = 90^\circ$ . . . . .	91
Figura 4.3 – Secção cônica obtendo uma elipse, $\theta < \beta < 90^\circ$ . . . . .	91
Figura 4.4 – Secção cônica obtendo uma hipérbole, $0 \leq \beta < \theta$ . . . . .	92
Figura 4.5 – Secção cônica obtendo uma parábola, $\beta = \theta$ . . . . .	92
Figura 4.6 – Elipse com focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ . . . . .	93
Figura 4.7 – Elipse com focos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ . . . . .	94
Figura 4.8 – Hipérbole com focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ . . . . .	95
Figura 4.9 – Hipérbole com focos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ . . . . .	97
Figura 4.10–Parábola com foco $F = (p, 0)$ . . . . .	98
Figura 4.11–Parábola com foco $F = (-p, 0)$ . . . . .	98
Figura 4.12–Parábola com foco $F = (0, p)$ . . . . .	99
Figura 4.13–Parábola com foco $F = (0, -p)$ . . . . .	100
Figura 4.14–Demonstração: reta tangente a cônica no ponto $P$ . . . . .	101
Figura 4.15–Reta tangente à hipérbole em um ponto $P$ . . . . .	102
Figura 4.16–Reta tangente à parábola em um ponto $P$ . . . . .	102
Figura 4.17–Aplicação 4.5.1. . . . .	103
Figura 4.18–Propriedade de reflexão da elipse: fontes de iluminação. . . . .	104
Figura 4.19–Propriedade de reflexão da elipse: sala dos sussurros. . . . .	104
Figura 4.20–Galeria dos sussurros. . . . .	104
Figura 4.21–Propriedade reflexiva da parábola. . . . .	105
Figura 4.22–Antena parabólica. . . . .	105
Figura 4.23–Propriedade reflexiva da parábola: faróis automotivos. . . . .	106
Figura 4.24–Propriedade reflexiva da hipérbole. . . . .	106
Figura 4.25–Propriedade reflexiva da hipérbole: lentes hiperbólicas. . . . .	107
Figura 4.26–Construção da envoltória de uma parábola. . . . .	107
Figura 5.1 – Noshi . . . . .	110
Figura 5.2 – Tsuru. . . . .	110
Figura 5.3 – Tsuru e sua forma desdobrada. . . . .	113
Figura 5.4 – Axioma I de Huzita-Hatori . . . . .	114
Figura 5.5 – Axioma II de Huzita-Hatori . . . . .	115
Figura 5.6 – Axioma III de Huzita-Hatori . . . . .	115
Figura 5.7 – Axioma IV de Huzita-Hatori . . . . .	115
Figura 5.8 – Axioma V de Huzita-Hatori . . . . .	116
Figura 5.9 – Axioma VI de Huzita-Hatori . . . . .	116
Figura 5.10–Axioma VII de Huzita-Hatori . . . . .	116
Figura 5.11–Construção de uma dobra paralela a uma reta $r$ dada passando por um ponto $P$ não pertencente a $r$ . . . . .	118

Figura 5.12—Construção de uma dobra paralela a uma reta $r$ dada passando por um ponto $P$ não pertencente a $r$ . . . . .	119
Figura 5.13—Construção de uma dobra paralela a uma reta $r$ dada passando por um ponto $P$ não pertencente a $r$ . . . . .	119
Figura 5.14—Construção de um segmento paralelo e congruente a um segmento e um ponto dado. . . . .	120
Figura 5.15—Construção de um segmento paralelo e congruente a um segmento e um ponto dado. . . . .	121
Figura 5.16—Construção do ponto simétrico de um ponto em relação à uma reta dada.	122
Figura 5.17—Construção de um segmento congruente. . . . .	122
Figura 5.18—Construção de um ângulo congruente. . . . .	123
Figura 5.19—Construção de um ângulo congruente. . . . .	123
Figura 5.20—Construção de um triângulo retângulo dadas as medidas de um cateto e da hipotenusa. . . . .	124
Figura 5.21—Construção de um triângulo retângulo dadas as medidas de um cateto e da hipotenusa. . . . .	124
Figura 5.22—Construção de um triângulo equilátero. . . . .	125
Figura 5.23—Construção de um triângulo equilátero. . . . .	125
Figura 5.24—Justificativa da construção de um triângulo equilátero. . . . .	125
Figura 5.25—Reta determinada pelos pontos $A$ e $B$ . . . . .	126
Figura 5.26—Circunferência de centro $M$ e raio $r$ . . . . .	127
Figura 5.27—Retas $l_1$ e $l_2$ concorrentes em um ponto $P$ . . . . .	127
Figura 5.28—Reta $l$ que intersecciona a circunferência $c = \{M; r\}$ nos pontos $F$ e $G$ .	128
Figura 5.29—Intersecção das circunferências $c_1 = \{M_1; r_1\}$ e $c_2 = \{M_2; r_2\}$ , tal que $ r_1 - r_2  < M_1M_2 < r_1 + r_2$ . . . . .	128
Figura 5.30—Intersecção das circunferências $c_1 = M_1; r_1$ e $c_2 = M_2; r_2$ , tal que $M_1M_2 = r_1 + r_2$ e $M_1M_2 =  r_1 - r_2 $ . . . . .	129
Figura 5.31—Construção por dobradura do raio de uma circunferência $c = \{M; r\}$ . . . . .	129
Figura 5.32—Construção por dobradura dos pontos $P$ e $P'$ pertencentes a circunferência $c = \{M; r\}$ . . . . .	130
Figura 5.33—Construção por dobradura da reta $t$ tangente a circunferência $c = \{M; r\}$ em $P$ . . . . .	130
Figura 5.34—Construção por dobradura da intersecção da circunferência $c = \{M; r\}$ com a reta $l$ . . . . .	131
Figura 5.35—Intersecção das circunferências $c_1 = \{M_1; r_1\}$ e $c_2 = \{M_2; r_2\}$ , tal que $ r_1 - r_2  < M_1M_2 < r_1 + r_2$ . . . . .	132
Figura 5.36—Intersecção das circunferências $c_1 = \{M_1; r_1\}$ e $c_2 = \{M_2; r_2\}$ , tal que $ r_1 - r_2  < M_1M_2 < r_1 + r_2$ . . . . .	132

Figura 5.37–Triângulos $ABC$ e $AGD$ com $AB = \sqrt{r_1^2 + m^2 - r_2^2}$ , $AC = m$ e $AD = \sqrt{r_1^2 + m^2 - r_2^2}$ . . . . .	133
Figura 5.38–Construção por dobradura da bissetriz $b$ de $\angle PQP'$ . . . . .	134
Figura 5.39–Construção por dobradura da perpendicular a reta $d$ passando por $P$ . . . . .	135
Figura 5.40–Aplicação 5.5.1 utilizando o método da dobradura. . . . .	137
Figura 5.41–Aplicação 5.5.1 utilizando o método da dobradura. . . . .	137
Figura 5.42–Verificação do resultado da Aplicação 5.5.1 utilizando o método da dobradura. . . . .	138
Figura 5.43–Aplicação 5.5.2 utilizando o método da dobradura. . . . .	139
Figura 5.44–Justificativa da aplicação 5.5.2 utilizando o método da dobradura. . . . .	139
Figura 6.1 – Quadrado padrão e final do primeiro desafio. . . . .	142
Figura 6.2 – Resolução do primeiro desafio. . . . .	143
Figura 6.3 – Quadrado padrão para segundo desafio. . . . .	143
Figura 6.4 – Resolução do segundo desafio. . . . .	143
Figura 6.5 – Quadrado padrão terceiro desafio. . . . .	144
Figura 6.6 – Resolução do terceiro desafio. . . . .	144
Figura 6.7 – Quadrado padrão para quarto desafio. . . . .	144
Figura 6.8 – Resolução do quarto desafio. . . . .	145
Figura 6.9 – Quadrado padrão para quinto desafio. . . . .	145
Figura 6.10–Resolução do quinto desafio. . . . .	145
Figura 6.11–Construção estrela de quatro pontas. . . . .	147
Figura 6.12–Construção estrela de quatro pontas. . . . .	148
Figura 6.13–Construção estrela de quatro pontas. . . . .	148
Figura 6.14–Construção estrela de quatro pontas. . . . .	148
Figura 6.15–Reta real. . . . .	151
Figura 6.16–Segmentos $\overline{OP} = n\overline{OX}$ e $\overline{OA} = m\overline{OX}$ na reta real. . . . .	151
Figura 6.17–Construção do segmento de medida $\frac{1}{3}$ com régua e compasso. . . . .	153
Figura 6.18–Construção do segmento de medida $\frac{1}{3}$ com régua e compasso. . . . .	153
Figura 6.19–Construção do segmento de medida $\frac{1}{2}$ com dobradura. . . . .	154
Figura 6.20–Construção do segmento de medida $\frac{1}{3}$ com dobradura. . . . .	155
Figura 6.21–Construção do segmento de medida $\frac{1}{3}$ com dobradura. . . . .	155
Figura 6.22–Construção do segmento de medida $\frac{1}{4}$ com dobradura. . . . .	156
Figura 6.23–Construção do segmento de medida $\frac{1}{n}$ com dobradura. . . . .	156
Figura 6.24–Construção do segmento de medida $\frac{1}{n}$ com dobradura. . . . .	157
Figura 6.25–Construção do retângulo áureo. . . . .	159
Figura 6.26–Construção do retângulo áureo. . . . .	160

Figura 6.27–Construção do retângulo áureo. . . . .	160
Figura 6.28–Demonstração da construção do retângulo áureo. . . . .	160
Figura 6.29–Construção de um retângulo com um lado de medida $\sqrt{5} + 2$ e diagonal de medida $\sqrt{5} + 3$ . . . . .	162
Figura 6.30–Construção de um retângulo com um lado de medida $\sqrt{5} + 2$ e diagonal de medida $\sqrt{5} + 3$ . . . . .	163
Figura 6.31–Construção de um retângulo com um lado de medida $\sqrt{5} + 2$ e diagonal de medida $\sqrt{5} + 3$ . . . . .	163
Figura 6.32–Construção trissecção do ângulo reto. . . . .	165
Figura 6.33–Construção trissecção do ângulo reto. . . . .	166
Figura 6.34–Construção trissecção do ângulo reto. . . . .	166
Figura 6.35–Construção trissecção do ângulo agudo $EAB$ . . . . .	167
Figura 6.36–Construção trissecção do ângulo agudo. . . . .	167
Figura 6.37–Construção trissecção do ângulo agudo. . . . .	167
Figura 6.38–Construção trissecção do ângulo agudo. . . . .	168
Figura 6.39–Demonstração da trissecção do ângulo agudo. . . . .	168
Figura 6.40–Trissecção do ângulo obtuso. . . . .	169
Figura 6.41–Construção da aresta de um cubo de medida $\sqrt[3]{2}$ . . . . .	170
Figura 6.42–Construção da aresta de um cubo de medida $\sqrt[3]{2}$ . . . . .	171
Figura 6.43–Demonstração da construção da aresta de um cubo de medida $\sqrt[3]{2}$ . . . . .	171
Figura 6.44–Construção soma dos ângulos internos de um triângulo. . . . .	174
Figura 6.45–Construção soma dos ângulos internos de um triângulo. . . . .	174
Figura 6.46–Construção soma dos ângulos internos de um triângulo. . . . .	175
Figura 6.47–Construção para demonstração do Teorema de Tales. . . . .	176
Figura 6.48–Construção para demonstração do Teorema de Tales. . . . .	176
Figura 6.49–Construção para demonstração do Teorema de Tales. . . . .	177
Figura 6.50–Construção para demonstração do Teorema de Pitágoras. . . . .	178
Figura 6.51–Construção para demonstração do Teorema de Pitágoras. . . . .	179
Figura 6.52–Construção para demonstração do Teorema de Pitágoras. . . . .	179
Figura 6.53–Construção para demonstração do Teorema de Pitágoras. . . . .	179
Figura 6.54–Construção para demonstração do Teorema de Pitágoras. . . . .	180
Figura 6.55–Obtenção do circuncentro de um triângulo. . . . .	182
Figura 6.56–Obtenção do circuncentro de um triângulo. . . . .	183
Figura 6.57–Obtenção do circuncentro de um triângulo. . . . .	183
Figura 6.58–Construção do circuncentro de um triângulo. . . . .	183
Figura 6.59–Obtenção do incentro de um triângulo. . . . .	184
Figura 6.60–Obtenção do incentro de um triângulo. . . . .	184
Figura 6.61–Obtenção do incentro de um triângulo. . . . .	184
Figura 6.62–Construção do incentro de um triângulo. . . . .	185

Figura 6.63–Obtenção do ortocentro de um triângulo. . . . .	185
Figura 6.64–Obtenção do ortocentro de um triângulo. . . . .	186
Figura 6.65–Obtenção do ortocentro de um triângulo. . . . .	186
Figura 6.66–Construção do ortocentro de um triângulo obtusângulo. . . . .	186
Figura 6.67–Obtenção do ortocentro de um triângulo obtusângulo. . . . .	187
Figura 6.68–Obtenção do baricentro de um triângulo. . . . .	187
Figura 6.69–Obtenção do baricentro de um triângulo. . . . .	187
Figura 6.70–Obtenção do baricentro de um triângulo. . . . .	188
Figura 6.71–Obtenção do baricentro de um triângulo. . . . .	188
Figura 6.72–Construção do baricentro de um triângulo. . . . .	188
Figura 6.73–Verificação da relação $GA = 2GM_3$ . . . . .	189
Figura 6.74–Verificação da relação $GA = 2GM_3$ . . . . .	189
Figura 6.75–Verificação da relação $GB = 2GM_2$ . . . . .	189
Figura 6.76–Verificação da relação $GB = 2GM_2$ . . . . .	190
Figura 6.77–Verificação da relação $GC = 2GM_1$ . . . . .	190
Figura 6.78–Verificação da relação $GC = 2GM_1$ . . . . .	190
Figura 6.79–Construção de retas tangentes a uma Parábola. . . . .	192
Figura 6.80–Construção de retas tangentes a uma Parábola. . . . .	192
Figura 6.81–Construção de retas tangentes a uma Parábola. . . . .	193
Figura 6.82–Construção de retas tangentes a uma Parábola. . . . .	193
Figura 6.83–Construção de retas tangentes a uma Parábola. . . . .	194
Figura 6.84–Família de retas tangentes formando a envoltória de uma Parábola. . . . .	194
Figura 6.85–Construção de retas tangentes a uma Elipse. . . . .	195
Figura 6.86–Construção de retas tangentes a uma Elipse. . . . .	195
Figura 6.87–Construção de retas tangentes a uma Elipse. . . . .	195
Figura 6.88–Construção de retas tangentes a uma Elipse. . . . .	196
Figura 6.89–Construção da envoltória de retas tangentes a uma Elipse. . . . .	196
Figura 6.90–Construção da envoltória de retas tangentes a uma Elipse. . . . .	197
Figura 6.91–Construção da envoltória de retas tangentes a uma Elipse. . . . .	197
Figura 6.92–Construção de retas tangentes a uma Hipérbole. . . . .	198
Figura 6.93–Construção de retas tangentes a uma Hipérbole. . . . .	198
Figura 6.94–Construção de retas tangentes a uma Hipérbole. . . . .	198
Figura 6.95–Construção da envoltória de retas tangentes a uma hipérbole. . . . .	199
Figura 6.96–Construção da envoltória de retas tangentes a uma Hipérbole. . . . .	199
Figura 6.97–Construção do módulo triangular. . . . .	201
Figura 6.98–Construção do módulo triangular. . . . .	201
Figura 6.99–Construção do módulo triangular. . . . .	202
Figura 6.100–Construção do módulo de conexão. . . . .	202
Figura 6.101–Construção do módulo de conexão. . . . .	203

Figura 6.102	Construção módulo quadrado. . . . .	203
Figura 6.103	Construção módulo quadrado. . . . .	204
Figura 6.104	Justificativa da construção módulo triangular. . . . .	204
Figura 6.105	Justificativa da construção módulo conexão. . . . .	205
Figura 6.106	Justificativa da construção módulo quadrado. . . . .	205
Figura 6.107	Construção do módulo pentagonal. . . . .	205
Figura 6.108	Construção do módulo pentagonal. . . . .	206
Figura 6.109	Construção módulo pentagonal. . . . .	206
Figura 6.110	Demonstração da construção do módulo pentagonal. . . . .	207
Figura 6.111	Demonstração da construção do módulo pentagonal. . . . .	207
Figura 6.112	Demonstração da construção do módulo pentagonal. . . . .	207
Figura 6.113	Demonstração da construção do módulo pentagonal. . . . .	208
Figura 6.114	Demonstração da construção do módulo pentagonal. . . . .	209
Figura 6.115	Demonstração da construção do módulo pentagonal. . . . .	209
Figura 6.116	Construção do tetraedro regular. . . . .	210
Figura 6.117	Construção do cubo. . . . .	210
Figura 6.118	Construção do octaedro regular. . . . .	210
Figura 6.119	Construção do icosaedro regular. . . . .	211
Figura 6.120	Construção do dodecaedro regular. . . . .	211
Figura 6.121	Construção do dodecaedro regular. . . . .	212



# Lista de símbolos

$AB$	Medida do segmento definido pelos pontos $A$ e $B$ .
$\overline{AB}$	Segmento definido pelos pontos $A$ e $B$ .
$\equiv$	Congruência.
$\sim$	Semelhança.
$\triangle ABC$	Triângulo definido pelos vértices $A$ , $B$ e $C$ .
$\angle ABC$	Ângulo ou medida do ângulo definido pelos pontos $A$ , $B$ e $C$ , com vértice em $B$ .

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>1</b>	<b>ELEMENTOS DE GEOMETRIA</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>1.1</b>	<b>Congruência de triângulos</b> . . . . .	<b>25</b>
1.1.1	Casos de congruência . . . . .	25
<b>1.2</b>	<b>Congruência e isometrias</b> . . . . .	<b>31</b>
1.2.1	Reflexões em retas . . . . .	31
1.2.2	Propriedades da reflexão das retas: . . . . .	32
1.2.3	Translação . . . . .	33
1.2.4	Rotação . . . . .	34
<b>1.3</b>	<b>Axiomas da Geometria Euclidiana Plana.</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>1.4</b>	<b>Semelhança de triângulos</b> . . . . .	<b>40</b>
1.4.1	Casos de semelhança. . . . .	41
1.4.2	Semelhança nos triângulos retângulos. . . . .	43
1.4.3	O Teorema de Pitágoras. . . . .	43
<b>1.5</b>	<b>Aplicações.</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>2</b>	<b>SOBRE OS PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO</b> . . . . .	<b>49</b>
<b>2.1</b>	<b>Teorema de Ceva</b> . . . . .	<b>49</b>
<b>2.2</b>	<b>Os pontos notáveis de um triângulo</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>2.3</b>	<b>Aplicações</b> . . . . .	<b>58</b>
<b>2.4</b>	<b>Ponto de Nagel</b> . . . . .	<b>64</b>
<b>2.5</b>	<b>Ponto de Gergonne</b> . . . . .	<b>66</b>
<b>2.6</b>	<b>A Reta de Euler e a circunferência de nove pontos.</b> . . . . .	<b>66</b>
<b>2.7</b>	<b>A Circunferência de Nove Pontos</b> . . . . .	<b>67</b>
2.7.1	A reta de Euler . . . . .	70
<b>3</b>	<b>A GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA E OS NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS</b> . . . . .	<b>72</b>
<b>3.1</b>	<b>A Geometria de Euclides</b> . . . . .	<b>72</b>
<b>3.2</b>	<b>Números construtíveis com régua e compasso e resolução de equações quadráticas</b> . . . . .	<b>74</b>
3.2.1	Outros exemplos de números reais construtíveis. . . . .	79
3.2.2	Construção de $\sqrt[n]{a}$ , para $n$ par. . . . .	79
<b>3.3</b>	<b>Construtibilidade de Números e Pontos no Plano.</b> . . . . .	<b>80</b>
<b>3.4</b>	<b>Resolução de equações quadráticas.</b> . . . . .	<b>81</b>

<b>3.5</b>	<b>Aplicação</b>	<b>84</b>
3.5.1	Secção Áurea de um segmento de reta	84
<b>3.6</b>	<b>Números reais não construtíveis com régua sem escala e compasso.</b>	<b>86</b>
3.6.1	Os três problemas clássicos da matemática grega	87
<b>4</b>	<b>SECÇÕES CÔNICAS</b>	<b>89</b>
<b>4.1</b>	<b>História</b>	<b>89</b>
<b>4.2</b>	<b>Secções planas numa superfície cônica de revolução.</b>	<b>90</b>
<b>4.3</b>	<b>Secções cônicas definidas como um conjunto de pontos num plano.</b>	<b>92</b>
4.3.1	Hipérbole	95
4.3.2	Parábola.	97
<b>4.4</b>	<b>Retas tangentes às cônicas</b>	<b>100</b>
<b>4.5</b>	<b>Aplicações</b>	<b>103</b>
4.5.1	Elipses: propriedade da reflexão.	103
4.5.2	Parábolas.	105
4.5.3	Hipérboles.	106
<b>5</b>	<b>ORIGAMI E A GEOMETRIA</b>	<b>109</b>
<b>5.1</b>	<b>Um pouco de história</b>	<b>109</b>
5.1.1	Modelos de Origami	111
5.1.2	O Origami e a Matemática	112
<b>5.2</b>	<b>Construções elementares e Axiomas de Huzita-Hatori</b>	<b>113</b>
5.2.1	Axiomas de Huzita-Hatori	114
5.2.2	Algumas construções decorrentes	118
<b>5.3</b>	<b>Relação entre Geometria Euclidiana e a Geometria do Origami</b>	<b>126</b>
<b>5.4</b>	<b>Resolução de equações cúbicas</b>	<b>135</b>
<b>5.5</b>	<b>Aplicações</b>	<b>137</b>
<b>6</b>	<b>ATIVIDADES PARA SALA DE AULA ENVOLVENDO DOBRADU- RAS</b>	<b>140</b>
<b>6.1</b>	<b>Atividades de introdução</b>	<b>141</b>
6.1.1	Quebra cabeças geométricos	142
6.1.2	Estrela de quatro pontas	146
<b>6.2</b>	<b>Atividades envolvendo números reais</b>	<b>149</b>
6.2.1	Localização do número $\frac{1}{n}$ na reta numérica	150
6.2.2	O número de ouro e o retângulo áureo	158
6.2.3	Construção de um retângulo com um lado de medida $\sqrt{5} + 2$ e diagonal $\sqrt{5} + 3$ .	161
<b>6.3</b>	<b>Os três problemas clássicos da matemática grega</b>	<b>164</b>
6.3.1	Trissecção do ângulo	164

6.3.2	Duplicação do cubo . . . . .	169
<b>6.4</b>	<b>Validando alguns resultados da Geometria Euclidiana através de construções com dobraduras . . . . .</b>	<b>173</b>
6.4.1	Soma dos ângulos internos de um triângulo . . . . .	173
6.4.2	Construções com dobraduras para demonstração do Teorema de Tales . . . . .	175
6.4.3	Teorema de Pitágoras . . . . .	178
<b>6.5</b>	<b>Atividades envolvendo outros tópicos de geometria . . . . .</b>	<b>181</b>
6.5.1	Pontos Notáveis dos triângulos . . . . .	182
6.5.2	O circuncentro . . . . .	182
6.5.3	O incentro . . . . .	183
6.5.4	O ortocentro . . . . .	185
6.5.5	O baricentro . . . . .	187
6.5.6	Parábola, elipse e hipérbole . . . . .	191
6.5.7	Parábola . . . . .	192
6.5.8	Elipse . . . . .	194
6.5.9	Hipérbole . . . . .	197
6.5.10	Poliedros regulares de Platão . . . . .	200
6.5.11	Tetraedro regular . . . . .	210
6.5.12	Cubo . . . . .	210
6.5.13	Octaedro regular . . . . .	210
6.5.14	Icosaedro regular . . . . .	211
6.5.15	Dodecaedro regular . . . . .	211
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>213</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>215</b>
	<b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	<b>215</b>

# Introdução

No atual cenário em que se encontram os níveis de aprendizado de Matemática no país, de acordo com as avaliações e índices nacionais e estaduais, podemos perceber uma leve melhora, porém não significativa no ensino de Matemática. De acordo com minha experiência há muitos anos em sala de aula, acredito que ainda estamos presos a um currículo extenso, apostilas e livros didáticos com conteúdos e procedimentos mecanizados e sem significado para o aluno, o tempo para cumprir todo o conteúdo estipulado é insuficiente, o que muitas vezes não deixa espaço para atividades investigativas e interdisciplinares que valorizam e desenvolvem habilidades necessárias para a construção do aprendizado, como jogos, uso de tecnologia, jornais, revistas, modelagem, maquetes etc.

Procurar compreender como se forma o aprendizado em Matemática e buscar então, auxílio e metodologias compatíveis com a formação e que ajudem na construção desse aprendizado, tem sido uma busca incessante por todo o grupo de estudiosos e especialistas, com objetivo de gerar melhoras na formação de professores, no currículo e nas metodologias de ensino de Matemática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais [6], trazem os princípios nos quais se pauta o ensino de Matemática, entre eles vamos enfatizar:

“A atividade Matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. ” P. 19.

“Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática. ” P. 19.

Após trabalhar com as dobraduras em sala de aula, observei que se tratava de um recurso muito eficiente para o ensino de Matemática e, que facilmente despertava o interesse dos alunos. A maneira como o aluno desenvolve conceitos e habilidades ao fazer as construções com pouco recursos, foi o que me trouxe a realizar este trabalho enriquecendo meu conhecimento sobre o assunto e conseqüentemente meu trabalho em sala de aula.

“As atividades geométricas podem contribuir também para o desenvolvimento de procedimentos de estimativa visual, seja de comprimentos, ângulos ou outras propriedades métricas das figuras, sem usar instrumentos de desenho ou de medida. Isso pode ser feito, por exemplo, por meio de trabalhos com dobraduras, recortes, espelhos, empilhamentos, ou pela modelagem de formas em argila ou massa. ” P. 83.

Vamos então, aqui, apresentar o trabalho com dobradura como um recurso para o ensino de Geometria. A relação entre a arte do Origami e a Matemática é facilmente observada e, pouco tempo após a popularização do Origami já despertou-se o interesse de matemáticos profissionais e amadores sobre as relações existentes e, séculos depois, sobre o ensino de Matemática. A ligação entre o Origami e arte, desenho e geometria nos proporciona inúmeros benefícios no ensino de Matemática.

Pretendemos então, com este trabalho, salientar como a dobradura e o Origami utilizados com recurso didático e sua relação com a Geometria podem trazer inúmeros benefícios ao aprendizado da Geometria e do desenvolvimento cognitivo dos alunos em aspectos como a criatividade, a habilidade de concentração e memorização, a cooperação, o trabalho em grupo, o controle motor e o senso estético.

Através da experiência em sala de aula, justificamos a opção por tal recurso didático, tendo em vista que a utilização de dobraduras e/ou Origami em seu desenvolvimento sob vários aspectos e em todos os ciclos de ensino, expressa e revela conceitos algébricos e, principalmente, geométricos.

O trabalho com dobraduras também se mostra um importante instrumento de avaliação do aprendizado dos conteúdos desenvolvidos, ressaltando também avaliação de conteúdos procedimentais. Além do mais é viável e prático, uma vez que, precisamos de material básico e de fácil acesso como papel, tesoura, cola e lápis. Como usamos algumas técnicas como recortes e colagens que são proibidas no Origami tradicional chamaremos as mesmas de atividades com dobraduras. Optamos, nas atividades com Origami, por ocultar a linguagem e diagramas usados tradicionalmente na prática do Origami, nos atendo mais ao desenvolvimento matemático do processo das dobras. Neste trabalho pretendemos tratar de assuntos pertinentes ao Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Para tal pretensão temos como objetivos específicos deste trabalho:

Apresentar uma alternativa de ferramenta de construção geométrica e algébrica, formalizando alguns dos principais conceitos para o estudo de geometria.

Desenvolver e apresentar os Axiomas do Origami e seu contexto histórico, como itens principais para as construções geométricas e atividades por meio de dobraduras, associando com Axiomas e teorias da Geometria Euclidiana Plana e Geometria Analítica.

Apresentar uma revisão de conceitos geométricos que serão desenvolvidos e utilizados nas atividades apresentadas, bem como alguns conceitos que apesar de não serem utilizados nas atividades estão relacionados com o trabalho desenvolvido.

Explorar brevemente o contexto histórico da Geometria Euclidiana Plana e os três problemas clássicos da geometria antiga e as diversas tentativas por solucioná-los.

Apresentar atividades utilizando dobraduras, desenvolver através de figuras o

passo a passo para realização das atividades, justificando e representando geometricamente e algebricamente todos os passos e objetivos propostos nas atividades, a fim de tornar prático e significativo o desenvolver das mesmas, buscando soluções através da geometria do Origami e relacionando a forma do Origami com formas geométricas.

Estabelecer relação dos movimentos de transformação do Origami com as isometrias matemáticas, como reflexão através de uma reta ou ponto, rotação e simetria; através destas relações observar em uma figura as múltiplas linhas de simetria, retas perpendiculares, paralelas, congruências, bissetrizes etc.

Desenvolver algumas das atividades em sala de aula, trazendo os resultados obtidos, assim como os aspectos positivos e negativos e toda a experiência adquirida com o processo.

Apresentar o Origami como um importante recurso metodológico, através de observação e comparação, integrando geometria e arte.

No capítulo 1, serão revisadas as teorias e conceitos geométricos que serão desenvolvidos ou utilizados nas construções e demonstrações ao desenvolver das atividades, assim como curiosidades. Procuramos fazer uma abordagem de forma diferente dos livros didáticos procurando aumentar as opções de desenvolvimento para os professores. Inclusive enfatizar alguns tópicos que são tratados com pouca importância no Ensino Fundamental e são de grande importância na Geometria.

No capítulo 2 é dada exclusividade aos pontos notáveis do triângulo e suas consequências. Assunto em que muitas vezes é excluído do currículo de Matemática e de alguns livros didáticos.

No capítulo 3 abordaremos uma axiomática da Geometria Euclidiana Plana e suas construções, um breve relato sobre sua história e a dos três problemas clássicos da geometria grega antiga. Verificaremos alguns números construtíveis e não construtíveis com uso dessa Geometria e devidas consequências.

No capítulo 4 teremos um breve relato histórico e teórico sobre Seções Cônicas, assunto que muitas vezes é tratado em um número mínimo de aulas e sem nenhuma ênfase no Ensino Médio. Também abordaremos algumas aplicações no cotidiano.

Chegamos então ao Capítulo 5, onde trataremos da arte do Origami, sua história e axiomática, conhecido como e axiomas de Huzita-Hatori, e sua incrível relação com a Geometria Euclidiana Plana. Para finalizar será feita a relação da axiomática do Origami e a Geometria Euclidiana Plana, mostrando que com a Geometria do Origami é possível fazer construções além da Geometria Euclidiana, que se limitam a construções com régua sem escala e compasso. Serão abordadas inclusive consequências dos axiomas do Origami e suas construções.

No sexto capítulo, chegando ao objetivo principal desse trabalho, serão apresentadas as atividades utilizando dobraduras, como material de apoio para o ensino de Geometria, suas justificativas e o passo a passo das construções com papel, além de resoluções alternativas de dois dos três problemas clássicos da geometria grega através de dobraduras. Relataremos o processo de aplicação de algumas das atividades em sala, os desafios vencidos, os aspectos positivos e negativos bem como toda a experiência envolvida e as conclusões.

Esperamos então, que este trabalho possa auxiliar no trabalho em sala de aula e também enriquecer o conhecimento do leitor

As figuras deste trabalho foram extraídas da internet ou feitas com o software livre Geogebra, disponível gratuitamente em <http://geogebra.org/>.



# 1 Elementos de Geometria

Neste capítulo abordaremos aspectos teóricos da Geometria Euclidiana envolvida nos capítulos posteriores, nas atividades e suas demonstrações, no intuito de facilitar e agregar ao leitor requisitos necessários ao estudo dos tópicos posteriores.

Temos como objetivo falar sobre a geometria plana fundamental e básica constantes no currículo da Educação Básica, assim como suas demonstrações, que muitas vezes são pouco enfatizadas em sala de aula.

Iniciaremos por congruência de triângulos, assunto que, na maioria das vezes, é tratado de forma equivalente com outros tópicos, porém, ele é parte fundamental de muitos tópicos básicos de geometria como por exemplo congruências e isometrias no plano, assunto que integra muitos teoremas clássicos da geometria.

## 1.1 Congruência de triângulos

**Definição 1.1.1.** Dois triângulos são congruentes se houver uma correspondência entre seus vértices e os pares de ângulos e os pares de lados correspondentes forem congruentes.

Considere os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ .

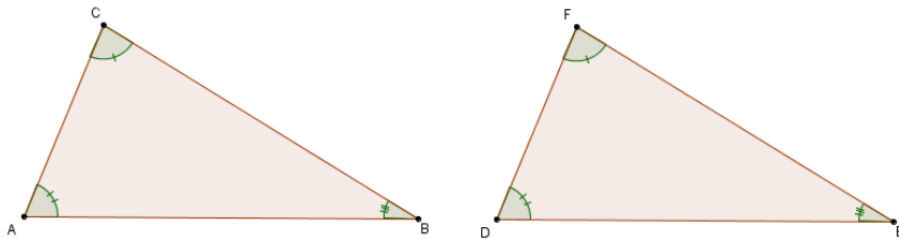


Figura 1.1 – Congruência de triângulos.

Havendo a correspondência entre os vértices  $A$  e  $D$ ,  $B$  e  $E$  e  $C$  e  $F$ , se  $\angle A \equiv \angle D$ ,  $\angle B \equiv \angle E$ ,  $\angle C \equiv \angle F$ ,  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ ,  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$  e  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$  os dois triângulos são congruentes, o que será denotado por  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

### 1.1.1 Casos de congruência

Existem alguns resultados sobre congruência onde não há a necessidade de analisar as seis congruências entre seus pares de elementos correspondentes, para garantir

que dois triângulos são congruentes, facilitando assim a abordagem de algumas situações envolvendo congruência. Vejamos:

### Caso de congruência L.A.L.

Na axiomática que estamos abordando, este caso de congruência é escolhido como um postulado e diz que: se dois triângulos têm dois pares de lados correspondentes congruentes e os ângulos compreendidos entre eles congruentes, então o terceiro lado e os outros dois ângulos restantes também são congruentes de forma correspondente.

Sejam os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ ,  $\angle A \equiv \angle D$  e  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

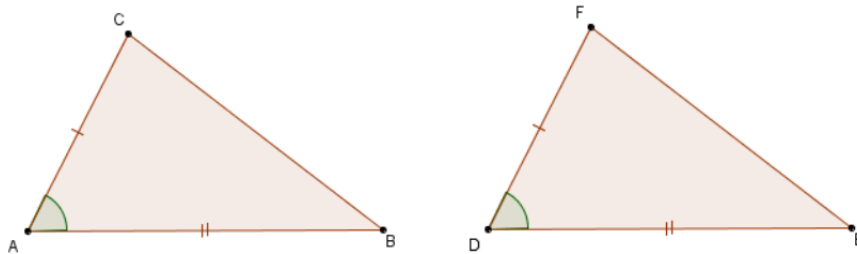


Figura 1.2 – Caso de congruência L.A.L.

### Caso de congruência A. L. A.

Sejam os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , com  $\angle C \equiv \angle F$ ,  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$  e  $\angle A \equiv \angle D$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

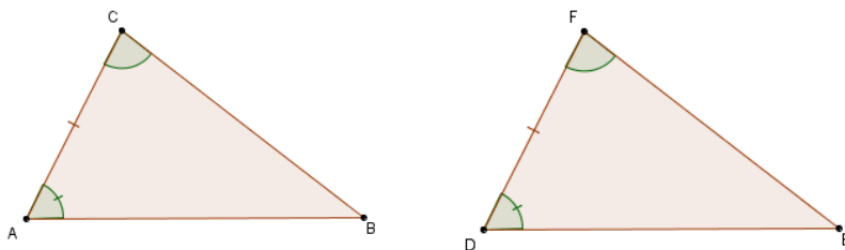


Figura 1.3 – Caso de congruência A.L.A.

**Demonstração:** Seja  $E'$  um ponto da semirreta  $FE$  de forma que  $\overline{FE'} \equiv \overline{BC}$ .

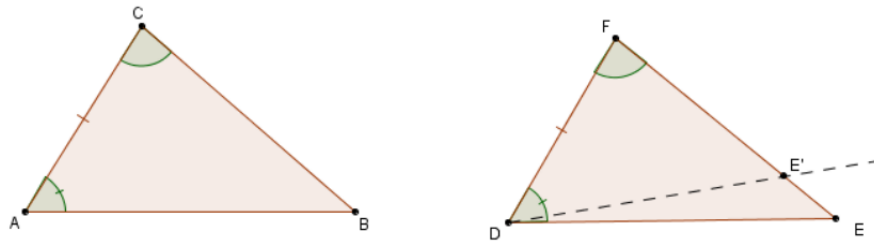


Figura 1.4 – Demonstração do caso de congruência A.L.A.

Comparando os triângulos  $ABC$  e  $DE'F$ , temos  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$  e  $\angle A \equiv \angle D$ , por hipótese, e  $\overline{CE'} \equiv \overline{FE'}$  por construção. Então, pelo caso L.A.L.,  $\triangle ABC \equiv \triangle DE'F$ . Dessa congruência e pela hipótese temos que as semirretas  $DE'$  e  $DE$  coincidem e  $E'$  coincide com  $E$ .

### Caso de congruência L. L. L.

Sejam os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ ,  $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

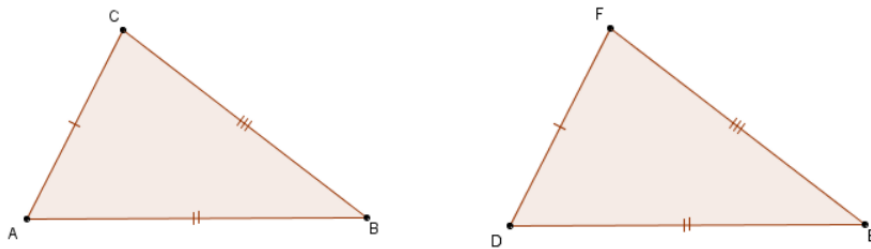


Figura 1.5 – Caso de congruência L. L. L.

**Demonstração:** A reta que passa por  $\overline{AB}$  divide o plano em dois semiplanos. No semiplano oposto a  $C$ , consideremos uma semirreta com origem em  $A$  e sobre ela um ponto  $F'$  de tal forma que  $\angle BAF' \equiv \angle FDE$  e  $\overline{AF'} \equiv \overline{DF}$ . Pelo caso de congruência L.A.L. decorre que  $\triangle ABF' \equiv \triangle DEF$ .

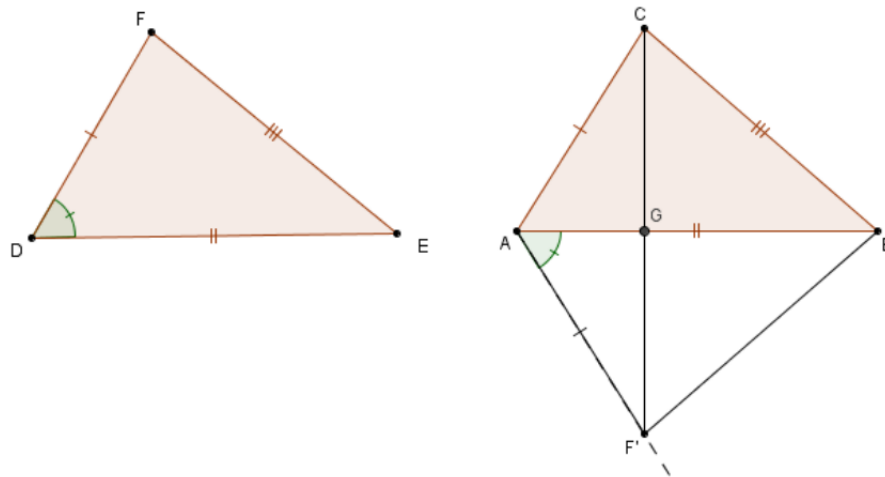


Figura 1.6 – Demonstração do caso de congruência L. L. L.

Seja  $G$  o ponto em que  $\overline{CF'}$  encontra  $\overline{AB}$ . Vamos supor inicialmente  $G$  entre  $A$  e  $B$ .

Temos:  $\triangle CAF'$  isósceles de base  $\overline{CF'}$  então:

$$\angle ACF' \equiv \angle AF'C \quad (1.1)$$

$\triangle CBF'$  isósceles de base  $\overline{CF'}$  então:

$$\angle BCF' \equiv \angle BF'C \quad (1.2)$$

Por soma de 1.1 e 1.2 temos:

$\angle ACF' + \angle BCF' = \angle AF'C + \angle BF'C$ , daí  $\angle ACB = \angle AF'B$  e então, pelo caso L.A.L temos  $\triangle ABC \equiv \triangle ABF'$ .

Como também pelo caso L. A. L., segundo construção,  $\triangle ABF' \equiv \triangle DEF$  então, por transitividade,  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

Agora, se o ponto  $G$  não estiver entre  $A$  e  $B$ , a demonstração é análoga à anterior.

Os dois resultados que seguem, podem ser facilmente demonstrados com o uso do caso de congruência L.A.L.

**Teorema 1.1.2. Teorema do Triângulos Isósceles** *Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [BARBOSA] [3].

**Definição 1.1.3.** Dado um triângulo  $ABC$ , se  $C$  está entre  $B$  e  $D$  então  $\angle ACD$  é um ângulo externo desse triângulo.

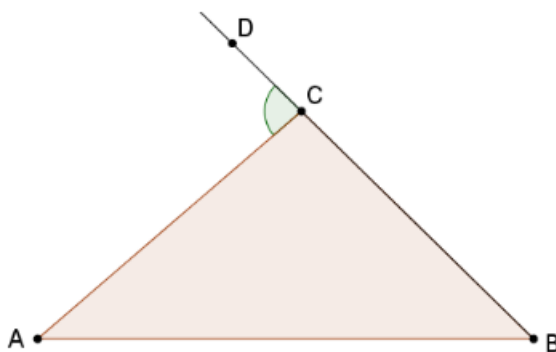


Figura 1.7 – Definição de ângulo externo.

**Teorema 1.1.4. Teorema do Ângulo Externo:** *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.*

Uma demonstração se encontra em [REZENDE] [26] p. 44.

#### Caso de congruência L.A.Ao.

Sejam os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ ,  $\angle A \equiv \angle D$  e  $\angle B \equiv \angle E$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

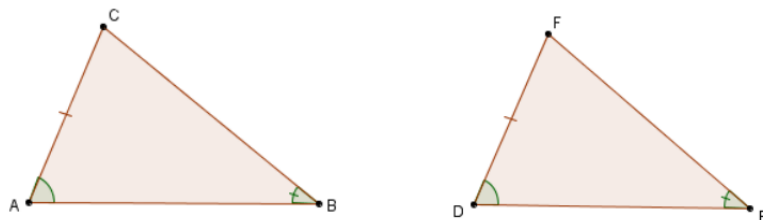


Figura 1.8 – Caso de congruência L.A.Ao.

**Demonstração:** Observando os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{DE}$ , temos três possibilidades:  $AB = DE$ ,  $AB > DE$  ou  $AB < DE$ .

Se  $AB = DE$ , temos  $\angle A \equiv \angle D$  e  $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ , então, pelo caso de congruência L.A.L.  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

Se  $AB > DE$ , existe um ponto  $G$  pertencente a semirreta  $AB$ , entre  $A$  e  $B$ , tal que  $\overline{AG} \equiv \overline{DE}$ , então pelo caso de congruência L.A.L. vem que  $\triangle AGC \equiv \triangle DEF$  e  $\angle CGA \equiv \angle FED$ . Porém,  $\angle CGA$  é externo ao triângulo  $CGB$  e  $\angle CBG$  é interno não adjacente. Pelo Teorema do Ângulo Externo, temos  $\angle CGA > \angle CBG$ . Então  $\angle CGA > \angle FED$ , o que é uma contradição.

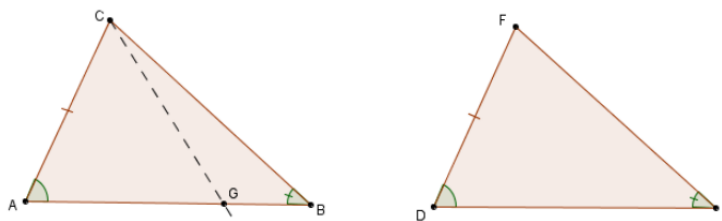


Figura 1.9 – Demonstração do caso de congruência L.A.A.

Se  $AB < DE$ , analogamente, também temos uma contradição. Logo,  $G$  coincide com  $B$ , pela primeira possibilidade e, então  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ .

**Definição 1.1.5.:** *Mediatriz de um segmento de reta* é a reta perpendicular a ele e que contém seu ponto médio.

De acordo com [REZENDE] [26], observamos que todo segmento possui um ponto médio, que é único, e pelo ponto médio passa exatamente uma reta perpendicular que portanto também é única. Logo, a mediatriz é única.

**Teorema 1.1.6.** *A mediatriz de um segmento de reta é o conjunto de todos os pontos do plano que são equidistantes das extremidades desse segmento.*

**Demonstração:** Seja um segmento  $\overline{AB}$  e  $M$  seu ponto médio. Seja  $m$  a mediatriz de  $\overline{AB}$  e seja  $P$  um ponto de  $m$ .

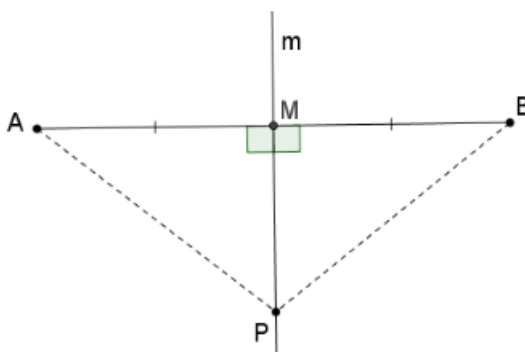


Figura 1.10 – Mediatriz de um segmento de reta.

Se  $P$  pertence a  $\overline{AB}$ , então  $P = M$  e  $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ , uma vez que  $M$  é ponto médio.

Se  $P$  não pertence a  $\overline{AB}$ , por congruência L.A.L., temos  $\triangle PMA \equiv \triangle PMB$  pois,  $\overline{PM}$  é lado comum,  $\angle PMA \equiv \angle PMB = 90^\circ$  e  $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ . Logo,  $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ .

Agora, seja  $P$  um ponto equidistante de  $A$  e  $B$ . Se  $P$  pertence a  $\overline{AB}$ , então  $P = M$ , e,  $P$  pertence a  $m$ .

Se  $P$  não pertence a  $\overline{AB}$ , seja  $m' = \overleftrightarrow{PM}$ . Pelo caso de congruência L.L.L.

como temos  $\overline{PM} \equiv \overline{PM}$ ,  $\overline{MA} \equiv \overline{MB}$  e  $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ , então  $\Delta PMA \equiv \Delta PMB$ . Daí  $\angle PMA \equiv \angle PMB = 90^\circ$ , então  $m'$  é perpendicular a  $\overline{AB}$ . Pela unicidade, temos que  $m = m'$  e, então  $P$  pertence a  $m$ .

## 1.2 Congruência e isometrias

As isometrias, conhecidas como transformações geométricas no plano, sendo historicamente encontradas em pinturas rupestre, cerâmicas e tecelagens. Na natureza também podemos encontrar isometrias.

As isometrias nos permitem encontrar métodos diversos para resolução de alguns problemas envolvendo construções geométricas. Em dobraduras as isometrias se encontram no processo de dobrar.

**Definição 1.2.1. Isometrias** são transformações em um plano que preservam distância entre pontos, isto é, se  $T$  é uma isometria no plano, para quaisquer pontos  $A$  e  $B$  do plano vale a relação  $T(A), T(B) = (A, B)$ .

Sem muito rigor, podemos dizer que as isometrias transformam uma figura em outra congruente a ela ou, que duas figuras planas são congruentes quando existe uma isometria que leva uma na outra e vice versa.

**Teorema 1.2.2** *Uma isometria  $T$ , possui as seguintes propriedades:*

- (i)  $T$  leva pontos colineares em pontos colineares. Sejam os pontos  $A$ ,  $B$ , e  $C$ , se  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , então  $T(B)$  está entre  $T(A)$  e  $T(C)$ .  
Logo,  $T$  leva retas em retas e ângulos em ângulos.
- (ii)  $T$  preserva a medidas de ângulos, ou seja, para qualquer ângulo  $\theta$ ,  $\angle T(\theta) = \angle \theta$ . Como consequência temos que,  $T$  leva retas perpendiculares em retas perpendiculares.
- (iii)  $T$  preserva paralelismo entre as retas, isto é, se  $r$  e  $s$  são retas paralelas, então  $T(r)$  e  $T(s)$  também são paralelas.

Uma demonstração desse resultado se encontra em [REZENDE] [26] p. 216.

Vamos apresentar os três tipos de isometrias no plano: Reflexão, translação e rotação.

### 1.2.1 Reflexões em retas

**Definição 1.2.3.** Dois pontos  $P$  e  $P'$  são simétricos em relação a um terceiro ponto  $O$ , quando  $O$  é ponto médio do segmento que une  $P$  e  $P'$ . Neste caso, o ponto  $O$  é chamado centro da simetria.

Sejam dados uma reta  $r$  e um ponto  $P$ , inicialmente não pertencente a  $r$ . A projeção  $Q$  de  $P$  sobre a reta  $r$  é o pé da perpendicular baixada de  $P$  a  $r$ . O simétrico de  $P$  em relação á reta  $r$  é o ponto  $P'$ , pertencente à reta perpendicular  $s$  tal que  $P'Q = PQ$ .

Considere uma reta  $r$ . Reflexão em relação a uma reta  $r$ , é a transformação que leva cada ponto  $P$  do plano em seu simétrico  $P'$  em relação à reta  $r$ . Também é conhecida como simetria de reflexão na reta  $r$ .

Se  $r$  divide o plano em dois semiplanos, a reflexão de um ponto  $P$  em relação a  $r$ , leva o ponto  $P$  ao outro semiplano de forma que  $P$  e seu simétrico  $P'$ , equidistem de  $r$  e pertençam à mesma perpendicular à  $r$ . A reta  $r$  é chamada de *eixo de reflexão*.

Graficamente, traçamos a reta  $r$  e a reta  $s$  perpendicular à  $r$  por  $P$ .

Podemos observar que  $r$  é mediatriz de  $\overline{PP'}$ .

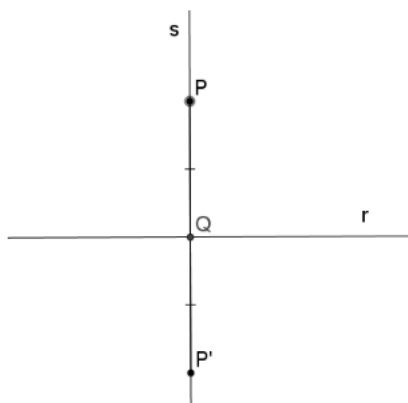


Figura 1.11 – Reflexão do ponto  $P$  em relação à reta  $r$ .

### 1.2.2 Propriedades da reflexão das retas:

- (i) A reflexão de  $P$  em relação à  $r$  é igual a  $P$  se, e somente se,  $P$  pertence à  $r$ .
- (ii) Se  $s$  é perpendicular à  $r$ , então a reflexão de  $s$  em relação à  $r$  é igual a  $s$ .
- (iii) Se refletirmos duas vezes o ponto  $P$  em relação à  $r$  teremos  $P$  original, isso é verdade para todo  $P$  no plano.
- (iv) A transformação inversa de uma reflexão numa reta  $r$  é a reflexão nessa mesma reta.

Algumas figuras podem ser vistas como a união de duas figuras, onde a reta  $r$  intersecciona a figura fazendo com que, uma figura seja a reflexão da outra figura em relação à  $r$ , formando assim uma única figura. Nesse caso dizemos que  $r$  é o *eixo de simetria* interno da figura.



Um exemplo, é o trapézio isósceles, ele possui como eixo de simetria a mediatriz de suas bases, separando o trapézio em duas figuras congruentes.

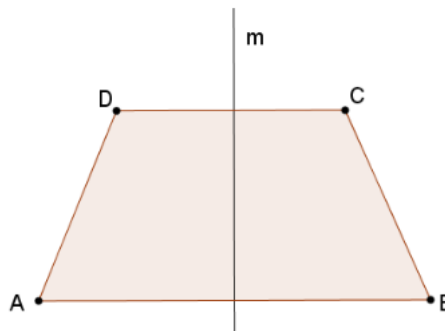


Figura 1.12 – Eixo de simetria no trapézio.

Algumas figuras geométricas admitem mais que um eixo de simetria interna.

### 1.2.3 Translação

Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos do plano. A translação  $T$  é a transformação no plano que leva um ponto  $P$  do plano no ponto  $T_{AB}(P) = P'$ , tal que  $ABP'P$  é um paralelogramo e os segmentos  $\overline{AP'}$  e  $\overline{BP}$  têm o mesmo ponto médio  $M$ , se  $A$ ,  $B$  e  $P$  não são colineares. No caso em que  $A$ ,  $B$  e  $P$  são colineares então a translação  $T_{AB}$  acontece de forma que o segmento  $\overline{PP'}$  está na reta  $AB$  e o ponto médio  $M$  é o mesmo nos segmentos  $\overline{AP'}$  e  $\overline{BP}$ .

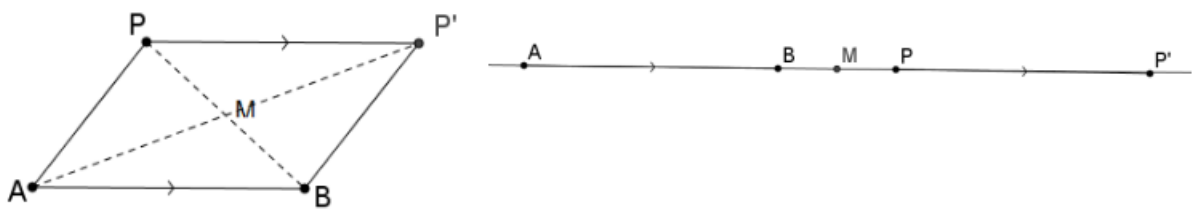


Figura 1.13 – Translação de um ponto  $P$  no plano.

Podemos observar que o sentido de  $P$  para  $P'$  é o mesmo que de  $A$  para  $B$ , podemos também realizar a translação no sentido oposto  $T_{BA}$ , nesse caso o paralelogramo será  $ABPP'$  e  $M$  será ponto médio de  $\overline{BP'}$  e  $\overline{AP}$ .

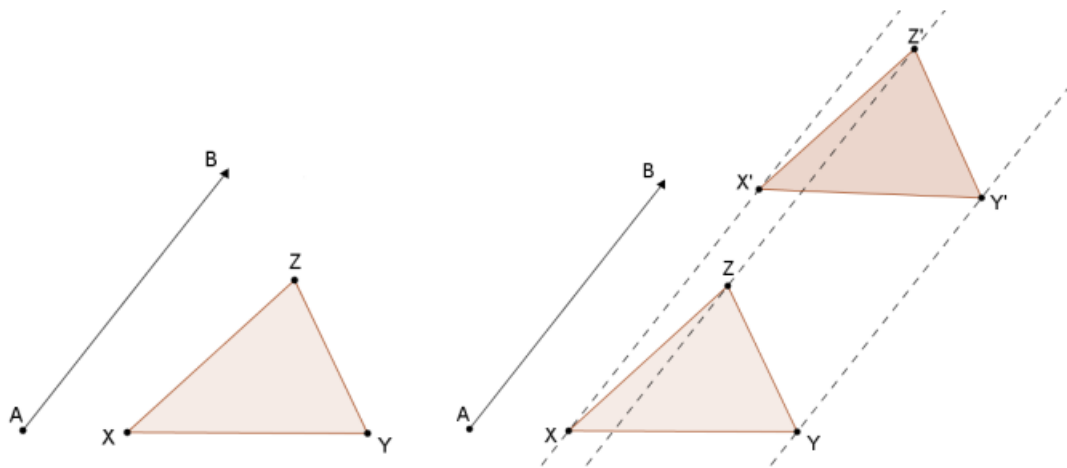


Figura 1.14 – Translação do triângulo XYZ.

Para obter a imagem transladada do triângulo  $XYZ$ , basta traçarmos retas paralelas a  $\overline{AB}$ , passando pelos pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , transportamos os pontos no sentido de  $A$  para  $B$ , obtemos os pontos  $X'$ ,  $Y'$  e  $Z'$ , respectivamente. Pode-se mostrar que os triângulos  $XYZ$  e  $X'Y'Z'$  são congruentes.

### 1.2.4 Rotação

Seja o ângulo  $\theta$  cuja medida é um número real tal que  $180^\circ < \theta < 180^\circ$  e  $O$  um ponto do plano. A rotação de ângulo  $\theta$  e centro  $O$  é a isometria  $\Delta_{O,\theta}$  no plano, de ponto  $O$  fixo, que leva um ponto  $X$  do plano, com  $X \neq O$ , no ponto  $X' = \Delta_{O,\theta}(X)$ , tal que  $OX = OX'$  e o ângulo orientado  $\angle XOX'$  tem medida  $\theta$ .

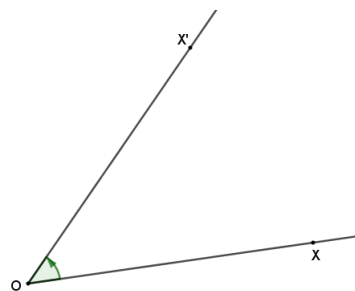


Figura 1.15 – Rotação de um ponto  $X$  sobre um ângulo  $\theta$ , com  $-180^\circ < \theta < 180^\circ$ .

Para o caso em que  $\theta = 180^\circ$ ,  $O$  é ponto médio de  $\overline{XX'}$ ; se  $\theta = 0^\circ$ ,  $X' = X$ .

### 1.3 Axiomas da Geometria Euclidiana Plana.

No capítulo 3, falaremos sobre a Geometria Euclidiana e sobre o livro de grande importância na Matemática antiga, *Os Elementos*, de Euclides.

Esse livro, que têm grande influência na Matemática também nos dias atuais, tem início com cinco postulados e cinco axiomas que são a base para as demais teorias e demonstrações presentes no livro.

Aqui falaremos sobre o *quinto postulado*, de acordo com [EVES] [11] que nos diz:

V: Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas irão encontrar-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

De forma equivalente, Playfair<sup>1</sup> reformulou o postulado:

**Axioma das Paralelas:** Por um ponto não pertencente a uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

Seja a reta  $r$  e  $P$  um ponto não pertencente a  $r$ , pelo ponto  $P$  podemos traçar uma reta  $s$  paralela à  $r$ , e essa reta é única.

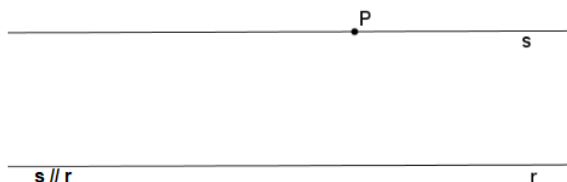


Figura 1.16 – Axioma das Paralelas.

Este postulado permite a demonstração de inúmeros resultados dos quais fazemos uso em nossos estudos de Geometria, entre eles, o tão conhecido Teorema de Tales o qual será apresentado mais adiante.

Dadas duas retas paralelas cortadas por uma transversal, os ângulos que estão entre as retas paralelas e de lados opostos à reta transversal são chamados de alternos internos.

**Teorema 1.3.3** *Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal. Então, a reta transversal determina com as retas paralelas ângulos alternos internos congruentes.*

**Demonstração:** Sejam  $r$  e  $s$  duas retas paralelas e  $t$  uma transversal que intersecciona  $r$  e  $s$  nos pontos  $P$  e  $Q$  respectivamente. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  ângulos alternos internos.

<sup>1</sup>John Playfair(1748 – 1819) matemático, geólogo e escocês, é o responsável por reformular o quinto postulado de Euclides, hoje conhecido como Postulado das paralelas.

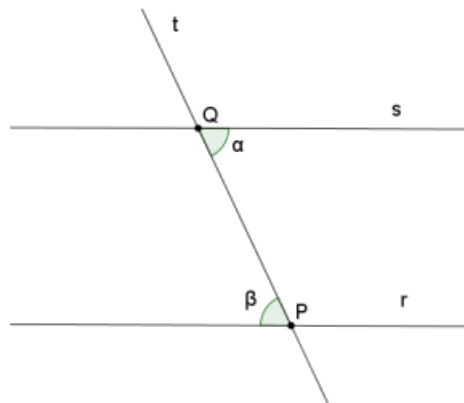


Figura 1.17 – Teorema 1.3.3.

Vamos supor  $\alpha$  e  $\beta$  ângulos alternos internos não congruentes.

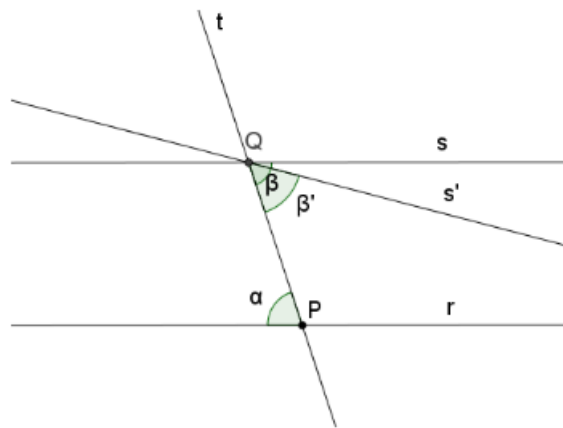


Figura 1.18 – Demonstração do Teorema 1.3.3.

Seja  $s'$  uma reta que intersecciona  $t$  em  $Q$  formando com as retas  $r$  e  $t$  os ângulos  $\alpha$  e  $\beta'$  alternos internos congruentes. Pelo resultado que encontramos em 4.5 de [REZENDE] [26], p. 57, podemos garantir que  $r$  e  $s'$  são paralelas e, pela hipótese, temos então duas retas paralelas passando por  $Q$ , o que é uma contradição, uma vez, pela propriedade das paralelas, passando por  $Q$  só existe uma reta paralela a  $r$ . Então  $\alpha$  e  $\beta$  são congruentes.

**Teorema 1.3.4 Base média de um triângulo.** *O segmento com extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.*

**Demonstração:** Seja o triângulo  $ABC$  e  $D$  e  $E$  pontos médios de  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ , respectivamente.

Vamos mostrar que  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$  e que  $DE = \frac{1}{2}AB$ .

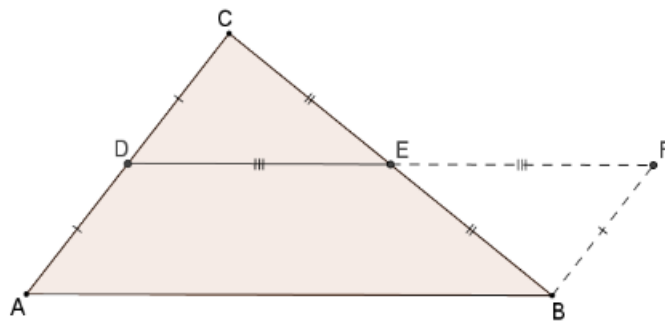


Figura 1.19 – Demonstração do Teorema da base média de um triângulo.

Seja  $F$  ponto da semirreta oposta a  $\overrightarrow{ED}$  de forma que  $\overline{EF} \equiv \overline{DE}$ . Pelo caso de congruência *L.A.L.*, como  $\angle CED \equiv \angle BEF$  pois são opostos pelo vértice, e  $\overline{CE} \equiv \overline{BE}$  por hipótese, então  $\triangle BEF \equiv \triangle CED$ , logo  $\angle DCE \equiv \angle EBF$ .

Pelo Teorema 1.3.3, se, duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos congruentes, as retas são paralelas; temos então que  $\overline{AC} \parallel \overline{BF}$ . Como por hipótese  $\overline{CD} \equiv \overline{DA}$ , e  $\triangle BEF \equiv \triangle CED$ , temos  $\overline{DC} \equiv \overline{BF}$ , então  $\overline{AD} \equiv \overline{BF}$ . Logo  $ABFD$  é um paralelogramo, então  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ .

Como sabemos, dois lados opostos quaisquer de um paralelogramo são congruentes, temos então  $DE = \frac{1}{2}AB$ .

**Teorema 1.3.5. Base média de um trapézio.** *Seja um trapézio  $ABCD$ , de lados opostos paralelos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ . Sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios dos lados  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  respectivamente. Então a metade da soma das medidas das bases do trapézio é igual a medida da base média. Ou seja:*

$$MN = \frac{AB + CD}{2}.$$

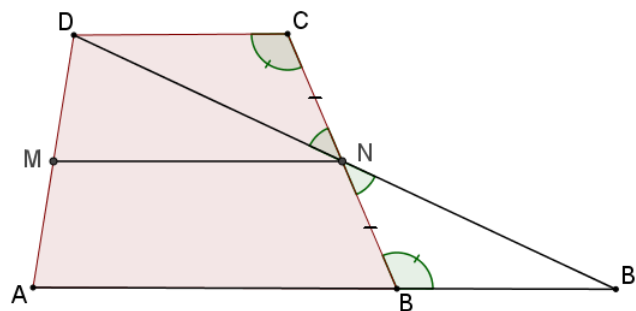


Figura 1.20 – Demonstração do Teorema da base média de um trapézio.

**Demonstração:** Seja  $B'$  a intersecção das semirretas  $AB$  e  $DN$ .

Vamos observar os triângulos  $\triangle DNC$  e  $\triangle B'NB$ , temos que:  $\angle DCN \equiv \angle NBB'$ , ângulos alternos internos, uma vez que  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ;  $\angle BNB' = \angle DNC$ , ângulos opostos pelo vértice e  $CN = NB$  pois,  $N$  é ponto médio de  $\overline{BD}$  e  $CD = BB'$ .

Observando o  $\triangle AB'D$ , temos pela hipótese que  $M$  é ponto médio de  $\overline{AD}$  e  $N$  ponto médio de  $\overline{DB'}$  logo,  $\overline{MN}$  é base média do triângulo  $\triangle AB'D$ . Então, pelo Teorema da Base Média do Triângulo:  $MN = \frac{1}{2}AB'$ ;  $MN = \frac{AB + BB'}{2}$ ;  $MN = \frac{AB + CD}{2}$ ;

Logo, a metade da soma das medidas das bases do trapézio é igual a medida da base média.

**Teorema 1.3.6. Teorema de Tales.** *Sejam  $r, s$  e  $t$  retas paralelas e sejam os pontos  $A$  e  $A'$  pertencentes a  $r$ ,  $B$  e  $B'$  pertencentes a  $s$  e  $C$  e  $C'$  pertencentes a  $t$ , de modo que os pontos  $A, B, C$  e  $A', B', C'$  sejam dois ternos de pontos colineares. Então:*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

**Demonstração:** Considere um plano com retas paralelas  $r, s$  e  $t$ . Considere as retas  $u$  intersectando as retas  $r, s$  e  $t$  em  $A, B$  e  $C$  e  $v$  intersectando as retas  $r, s$  e  $t$  nos  $A', B'$  e  $C'$ , respectivamente.

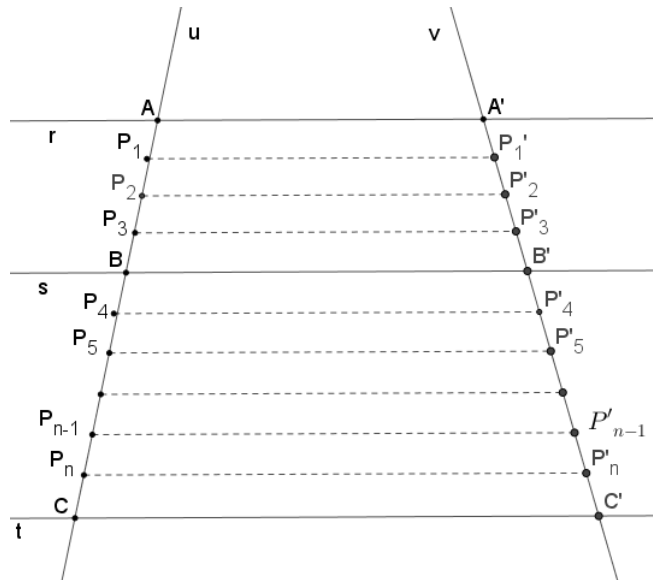


Figura 1.21 – Demonstração do Teorema de Tales.

Se  $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ , obtemos, de acordo com o Teorema da Base Média do Trapézio, que  $\overline{A'B'} \equiv \overline{B'C'}$ . Logo:

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC} = 1$$

Dividindo agora,  $\overline{AB}$  em  $m$  partes iguais e  $\overline{BC}$  em  $n$  partes iguais, supondo que com  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos então  $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{m}{n}$  e  $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ .

Agora, seja  $\frac{AB}{BC} = p$ , com  $p$  irracional. Vamos escolher uma sequência  $(a_n)$ , com  $n \geq 1$  e  $a_n \in \mathbb{Q}_+$ , tal que:  $p < a_n < p + \frac{1}{n}$ , com  $n \in \mathbb{R}$ . Considere o ponto  $C_n$  pertence a  $u$  tal que:

$$\frac{AB}{BC_n} = a_n$$

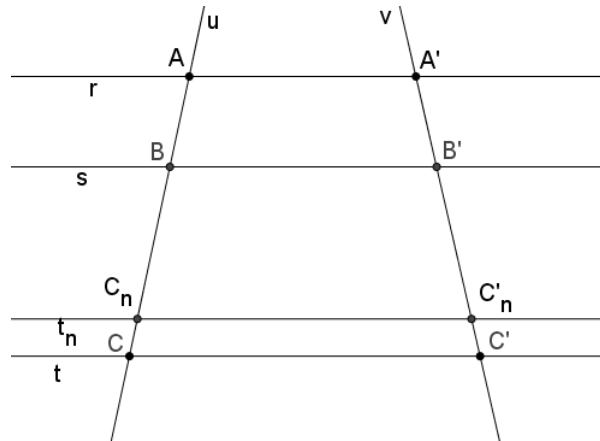


Figura 1.22 – Demonstração do Teorema de Tales.

Seja  $t_n$  paralela às retas  $r$ ,  $s$  e  $t$ , passando por  $C_n$  e  $C'_n$  as intersecções entre  $t_n$  e  $u$  e  $v$  respectivamente.

Como  $a_n \in \mathbb{Q}_+$ , temos:

$$\frac{A'B'}{B'C'_n} = a_n$$

De outra forma temos:

$$p < \frac{AB}{BC_n} < p + \frac{1}{n} \Rightarrow p < \frac{A'B'}{B'C'_n} < p + \frac{1}{n} \text{ ou seja:}$$

$$\frac{AB}{BC} < \frac{AB}{BC_n} < \frac{AB}{BC} + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{AB}{BC} < \frac{A'B'}{B'C'_n} < \frac{AB}{BC} + \frac{1}{n}$$

Assim,

$$\frac{A'B'}{B'C'_n} \rightarrow \frac{AB}{BC} \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Como  $t_n \parallel t$ , então:

$$\frac{A'B'}{B'C'_n} \rightarrow \frac{A'B'}{B'C'} \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Portanto,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Temos que, a razão entre os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  da reta  $u$  é igual a razão entre os segmentos correspondentes da reta  $v$ ,  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{B'C'}$ .

## 1.4 Semelhança de triângulos

A semelhança de triângulos é um conceito importante da Geometria, tendo muitas funções e auxiliando na resolução de vários tipos de problemas.

Através da proporcionalidade, nos permite calcular distâncias inacessíveis, por isso no cotidiano de engenheiros, topógrafos, cartógrafos e geólogos a semelhança é usada com frequência, também é utilizada na ampliação e redução de figuras, mapas, maquetes e miniaturas.

**Definição 1.4.1.** Seja dada uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

Considere os triângulos semelhantes  $ABC$  e  $DEF$ . Com a correspondência que leva  $A$  em  $D$ ,  $B$  em  $E$ ,  $C$  em  $F$ , neste caso temos:

$$\angle A \equiv \angle D, \angle B \equiv \angle E, \angle C \equiv \angle F \text{ e } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

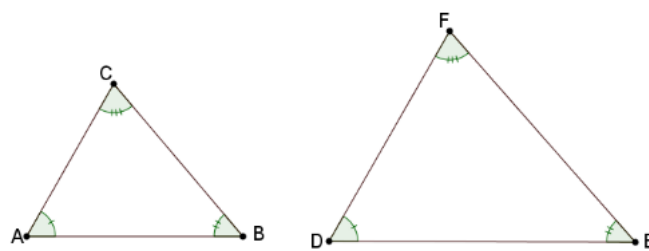


Figura 1.23 – Semelhança de triângulos.

Então o triângulo  $ABC$  e o triângulo  $DEF$  são semelhantes o que denotamos por  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ .

Ou seja, os ângulos correspondentes são congruentes e a razão entre os lados correspondentes é a mesma.

Assim como no caso de congruência de triângulos, há resultados sobre semelhança de triângulos que facilitam a identificação e demonstrações de triângulos semelhantes. São os chamados Casos de Semelhança de Triângulos.



### 1.4.1 Casos de semelhança.

**Caso de semelhança A.A.A:** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se os ângulos  $\angle A \equiv \angle D$ ,  $\angle B \equiv \angle E$  e  $\angle C \equiv \angle F$ , então  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ .

**Demonstração:** Considere os triângulos  $ABC$  e  $DEF$ :

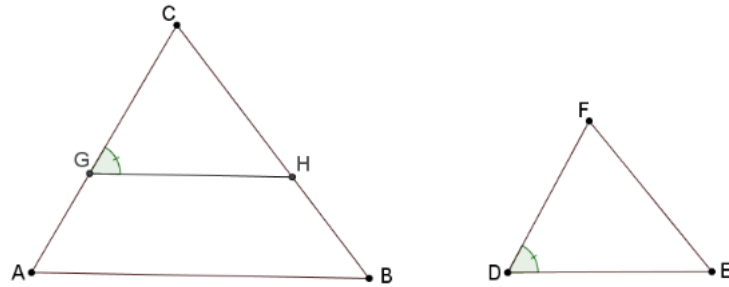


Figura 1.24 – Demonstração do caso de semelhança A.A.A.

Consideremos  $G$  e  $H$  pontos de  $\overline{CA}$  e  $\overline{CB}$ , respectivamente, tais que  $\overline{CG} \equiv \overline{FD}$  e  $\overline{CH} \equiv \overline{FE}$ . Pelo Caso de Congruência de Triângulos L.A.L, temos que:  $\Delta CGH \equiv \Delta FDE$ . Logo, pela hipótese, os ângulos  $CGH$  e  $A$  são congruentes e então  $\overline{GH}$  e  $\overline{AB}$  são paralelas ou coincidem. Se coincidem temos que  $\Delta ABC \equiv \Delta CGH$  então  $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$  temos  $\overline{CA} \equiv \overline{FD}$  e  $\overline{CB} \equiv \overline{FE}$ :

$$\frac{CA}{FD} = \frac{CB}{FE} = 1, \text{ a razão de semelhança é } k=1.$$

Se  $\overline{GH} \parallel \overline{AB}$ , pelo Teorema de Tales temos:

$$\frac{CA}{CG} = \frac{CB}{CH}, \text{ como } \overline{CG} \equiv \overline{FD} \text{ e } \overline{CH} \equiv \overline{FE}, \text{ temos:}$$

$$\frac{CA}{FD} = \frac{CB}{FE}. \text{ Analogamente mostramos que: } \frac{CB}{FE} = \frac{AB}{DE}$$

Então:  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ .

É interessante observar que esse caso de semelhança também pode ser representado como **caso de semelhança A.A.(ângulo, ângulo)**: Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro, os dois triângulos são semelhantes.

Uma vez que a soma dos ângulos internos do triângulo é sempre a mesma, se dois ângulos são congruentes a dois ângulos do outro triângulo o terceiro ângulo também será.

**Caso de semelhança L.A.L:** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se os ângulos  $A$  e  $D$  são congruentes e  $\frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE}$ , então  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ .

Uma demonstração se encontra em [REZENDE] [26] p.75.

**Caso de semelhança L.L.L:** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ , se seus lados satisfazem a relação  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ , então  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ .

**Demonstração:** Consideremos  $G$  e  $H$  pontos de  $\overline{CA}$  e  $\overline{CB}$ , respectivamente, tais que  $\overline{CG} \equiv \overline{FD}$  e  $\overline{CH} \equiv \overline{FE}$ .

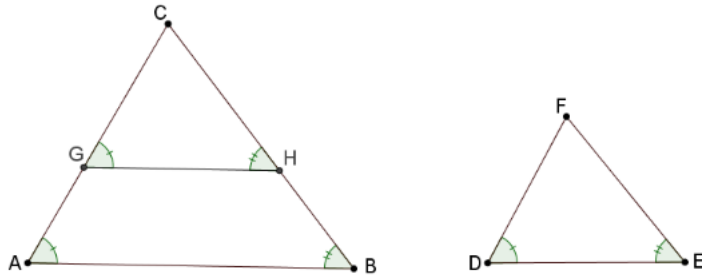


Figura 1.25 – Demonstração do caso de semelhança L.L.L.

Como  $\frac{CA}{CG} = \frac{CB}{CH}$  obtemos que  $\overline{GH}$  e  $\overline{AB}$  são paralelas ( recíproca do Teorema de Tales). Como duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam pares de ângulos correspondentes congruentes, temos:

$$\begin{aligned}\angle A &\equiv \angle CGH \\ \angle B &\equiv \angle CHG\end{aligned}\tag{1.3}$$

Como  $C$  é ângulo comum os triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta CGH$  são semelhantes pelo caso de semelhança L.A.L. Portanto,  $\frac{GH}{AB} = \frac{CG}{CA}$ , daí:

$$GH = AB \frac{CG}{CA} = AB \frac{FD}{CA}\tag{1.4}$$

Por hipótese, temos:  $\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{FD}$ , logo:

$$DE = AB \frac{FD}{CA}\tag{1.5}$$

De 1.4 e 1.5:  $\overline{GH} \equiv \overline{DE}$ ; então pelo caso L.L.L. de congruência de triângulos, temos que  $\Delta CGH \equiv \Delta FDE$  e portanto os ângulos:

$$\begin{aligned}\angle G &\equiv \angle D \\ \angle H &\equiv \angle E\end{aligned}\tag{1.6}$$

Por 1.3 e 1.6:  $\angle A \equiv \angle D$ ,  $\angle B \equiv \angle E$  logo  $\angle C \equiv \angle F$ , então pelo Caso de Semelhança A.A.A.temos:  $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ .

Um caso particular de semelhança de triângulos é a semelhança nos triângulos retângulos, que nos promove a alguns resultados importantes, como veremos a seguir.

### 1.4.2 Semelhança nos triângulos retângulos.

**Teorema 1.4.2.** *Dado um triângulo retângulo qualquer, a altura relativa à hipotenusa divide o triângulo retângulo em dois triângulos que são semelhantes um ao outro e também semelhantes ao triângulo original.*

**Demonstração:** Seja o triângulo  $ABC$ , retângulo em  $C$ , e seja  $\overline{CH}$  a altura desse triângulo desde o vértice  $C$  à hipotenusa  $\overline{AB}$ .

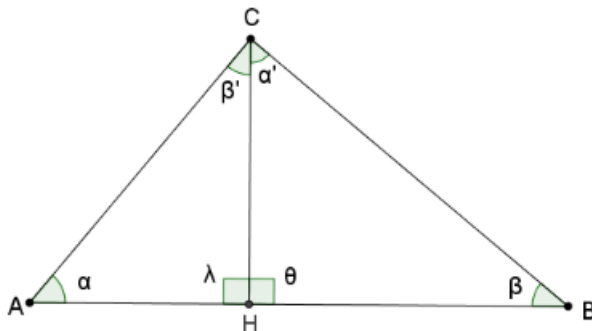


Figura 1.26 – Demonstração do Teorema da semelhança nos triângulos retângulos.

Consideremos os ângulos  $\angle\alpha$ ,  $\angle\beta$ ,  $\angle\lambda$ ,  $\angle\theta$ ,  $\angle\alpha'$  e  $\angle\beta'$ .

Temos que  $\angle ACB$  é reto e  $\angle\alpha + \angle\beta = 90^\circ$ .

Como  $\lambda$  é um ângulo reto, temos  $\angle\alpha + \angle\beta' = 90^\circ$ .

Portanto:  $\angle\beta = \angle\beta'$ .

Assim nos triângulos  $ABC$  e  $ACH$  o ângulo  $\alpha$  é comum,  $\angle\beta \equiv \angle\beta'$  e o terceiro par de ângulos é reto. Logo, pelo caso de semelhança A.A.A temos  $\Delta ABC \sim \Delta ACH$ .

Analogamente, os triângulos  $ABC$  e  $BHC$  o ângulo  $\beta$  é comum e  $\alpha' + \beta = \theta = 90^\circ$ , logo  $\Delta ABC \sim \Delta BHC$ .

### 1.4.3 O Teorema de Pitágoras.

*Num triângulo qualquer a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.*

Existem muitas demonstrações diferentes deste teorema, aqui usaremos as relações métricas em um triângulo retângulo, na atividade com dobraduras usaremos uma demonstração usando comparação de áreas.

**Demonstração:** Consideremos  $ABC$  um triângulo retângulo em  $A$  e  $h$  a altura  $\overline{AH}$  referente ao ângulo  $A$  com pé  $H$  sobre  $\overline{BC}$ . Seja  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $m = BH$ ,  $n = HC$ . Já sabemos que  $\Delta ABC \sim \Delta AHB \sim \Delta AHC$ .

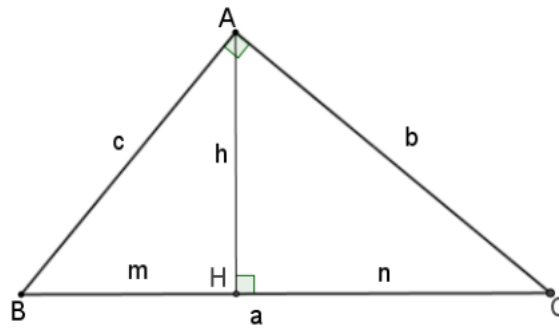


Figura 1.27 – Demonstração do Teorema de Pitágoras.

Como  $\triangle AHB \sim \triangle ABC$ , temos:

$$\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{m}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = am \quad (1.7)$$

E  $\triangle AHC \sim \triangle ABC$ , temos:

$$\frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = an \quad (1.8)$$

De 1.7 e 1.8 temos:  $c^2 + b^2 = am + an \Rightarrow c^2 + b^2 = a(m + n)$ , como  $m + n = a$ , segue  $a^2 = b^2 + c^2$ .

## 1.5 Aplicações.

**Aplicação 1.5.1:** Seja  $\overline{AB}$  uma corda de uma circunferência de centro  $O$ . Uma reta  $r$ , contendo o ponto  $O$  é perpendicular à corda  $\overline{AB}$  se, e somente se, intersecciona a corda  $\overline{AB}$  em seu ponto médio.

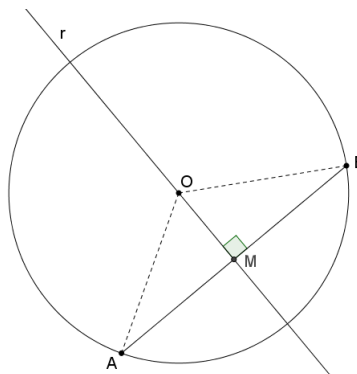


Figura 1.28 – Aplicação 1.5.1.

Suponhamos que a reta  $r$  intersecta a corda  $AB$  em seu ponto médio  $M$ . Observando os triângulos  $AMO$  e  $BMO$ ,  $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$ ,  $\overline{MO}$  é lado comum e  $\overline{AO} \equiv \overline{BO}$

que é raio da circunferência, então pelo caso L.L.L de congruências de triângulos, temos  $\triangle AMO \equiv \triangle BMO$ .

Logo,  $\angle AMO$  e  $\angle BMO$  são retos e portanto,  $r$  é perpendicular a  $\overline{AB}$ .

Consideremos agora a reta  $r$  perpendicular a  $\overline{AB}$ .

Observando o triângulo  $ABO$ , temos que  $\overline{AO} \equiv \overline{BO}$ , logo  $ABO$  é triângulo isósceles e então  $\angle A \equiv \angle B$ , pelo Teorema do Triângulo Isósceles.

Se  $r$  é perpendicular a  $\overline{AB}$ , observando novamente os triângulos  $AMO$  e  $BMO$ , temos  $\angle AMO \equiv \angle BMO = 90^\circ$  e  $\angle A \equiv \angle B$ ,  $\overline{MO}$  é lado comum. Pelo caso de congruência de triângulos L.A.Ao.,  $\triangle AMO \equiv \triangle BMO$  e  $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$ , e então  $M$  é ponto médio de  $\overline{AB}$ .

**Aplicação 1.5.2:** Entre todos os triângulos de mesma base e mesma altura relativa e conseqüentemente a mesma área, o triângulo isósceles é o que tem menor perímetro.

Seja um triângulo isósceles  $ABC$  de base  $\overline{BC}$ . Traçamos por  $A$  uma reta  $r$  paralela a essa base. Refletimos o vértice  $B$  em relação à reta  $r$ , obtendo um ponto  $B'$  e traçamos os segmentos  $\overline{BB'}$  e  $\overline{B'A}$  obtendo o triângulo  $AB'B$ , isósceles com base  $\overline{B'B}$ .

Seja o ponto  $D$  interseção da reta  $r$  com  $\overline{B'B}$ . Vamos observar os triângulos  $B'AD$  e  $BAD$ .

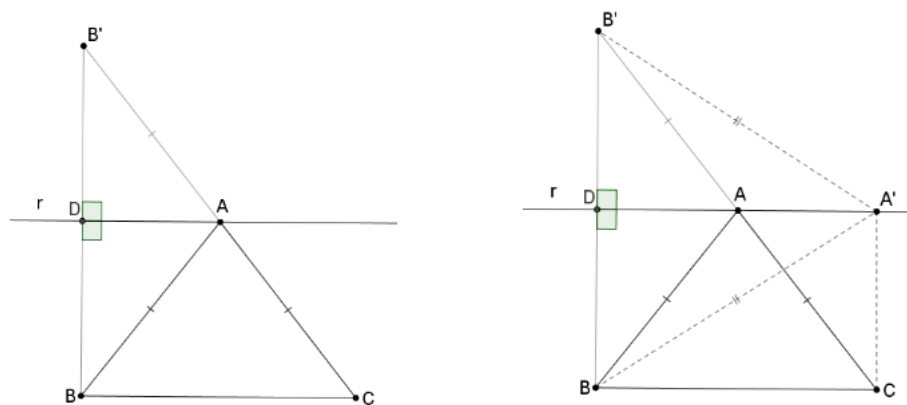


Figura 1.29 – Aplicação 1.5.2.

Como  $B'$  é reflexão de  $B$  em relação a  $r$ ,  $r$  é mediatriz de  $\overline{B'B}$ , logo  $\angle BDA \equiv \angle B'DA = 90^\circ$  e o ponto  $D$  é ponto médio de  $\overline{B'B}$ , logo  $\overline{B'D} \equiv \overline{BD}$  e  $\overline{DA}$  é lado comum, então  $\triangle B'AD \equiv \triangle BAD$  e  $\overline{AB} \equiv \overline{AB'}$  e por transitividade  $\overline{AC} \equiv \overline{AB'}$ . Podemos dizer que perímetro  $ABC = AC + AB' + BC = B'C + BC$ .

Supondo agora, um outro triângulo qualquer de base  $\overline{BC}$  com vértice  $A'$  sobre  $r$ , onde  $A'B \neq A'C$ , analogamente temos  $\triangle B'A'D \equiv \triangle BA'D$  e  $A'B = A'B'$ . Podemos dizer que perímetro de  $A'BC = A'C + A'B' + BC$ .

Analisando o triângulo  $B'A'C$ , pela desigualdade triangular temos que  $B'C < A'B' + A'C$ . Então, o triângulo de menor perímetro é o isósceles.

**Aplicação 1.5.3:** Os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

Seja  $ABCD$  um quadrilátero. Traçando a diagonal  $\overline{AC}$ , temos os triângulos  $ACD$  e  $ABC$ .

Consideremos os pontos médios  $M$  e  $N$  de  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , respectivamente, no triângulo  $ABC$ . Pelo Teorema da Base Média do triângulo temos  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ .

Consideremos os pontos médios  $O$  e  $P$  de  $\overline{CD}$  e  $\overline{AD}$ , respectivamente, no triângulo  $ACD$ . Pelo Teorema da Base Média de um Triângulo temos  $\overline{PO} \parallel \overline{AC}$ . Por transitividade  $\overline{MN} \parallel \overline{PO}$ .

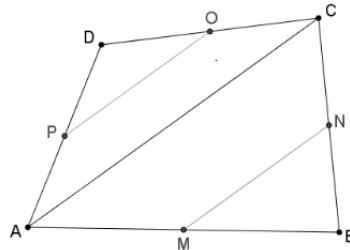


Figura 1.30 – Aplicação 1.5.3.

Analogamente, traçando a diagonal  $\overline{BD}$ , temos os triângulos  $BCD$  e  $ABD$ .

No triângulo  $ABD$ , pelo Teorema da Base Média de um Triângulo temos  $\overline{MP} \parallel \overline{BD}$ .

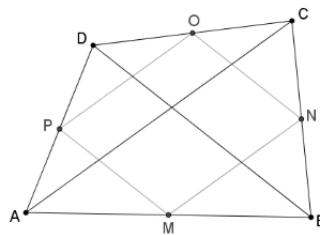


Figura 1.31 – Aplicação 1.5.3.

No triângulo  $BCD$ , pelo Teorema da Base Média de um Triângulo  $\overline{NO} \parallel \overline{BD}$ . Por transitividade  $\overline{MP} \parallel \overline{NO}$ . Logo,  $MNOP$  é um paralelogramo pois, tem dois pares de lados opostos paralelos.

A mesma aplicação será realizada utilizando dobraduras no capítulo 5.

**Aplicação 1.5.4** O ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo equidista dos três vértices do triângulo.

Sejam  $ABC$  um triângulo retângulo em  $A$  e  $M$  o ponto médio da hipotenusa  $\overline{BC}$ . Temos que:  $BM = MC$ .

Tracemos por  $M$  uma reta paralela à  $\overline{AB}$  que intersecciona o lado  $\overline{AC}$  em  $P$ .

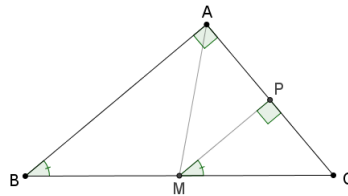


Figura 1.32 – Aplicação 1.5.4.

Observando os triângulos  $AMP$  e  $CMP$  temos:  $AP = PC$  e  $\angle APM = \angle CPM = 90^\circ$ , pelo Teorema de Tales, e  $\overline{MP}$  é lado comum. Então, pelo caso de congruência L.A.L. temos:  $\triangle AMP \equiv \triangle CMP$ .

Daí,  $AM = MC = BM$ . Logo, o ponto médio  $M$  da hipotenusa é equidistante dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

**Aplicação 1.5.5** Se dois triângulos  $ABC$  e  $ADE$  possuem o ângulo  $A$  em comum, então:

$$\frac{\text{Área}(ADE)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC}.$$

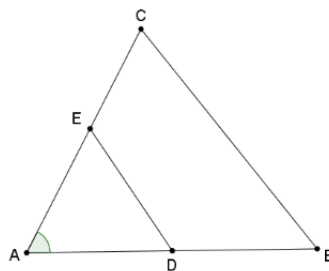


Figura 1.33 – Aplicação 1.5.5.

Considerando o ângulo  $A$  que é comum aos dois triângulos e calculando a área do triângulo  $ADE$  temos:  $\text{Área}(ADE) = \frac{AD \cdot AE \cdot \text{sen}A}{2}$ .

$$\text{Área do triângulo } ABC: \text{Área}(ABC) = \frac{AB \cdot AC \cdot \text{sen}A}{2}.$$

A razão entre as áreas é:

$$\frac{\text{Área}(ADE)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{\frac{AD \cdot AE \cdot \text{sen}A}{2}}{\frac{AB \cdot AC \cdot \text{sen}A}{2}} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC}.$$

Os conceitos aqui abordados como, por exemplo, semelhança de triângulos e isometrias, são utilizados com frequência nas atividades com dobraduras, seja para justificar as construções ou mesmo para realizá-las. No capítulo 6, por exemplo, temos a atividade, 6.4.3 na p. 178 que valida a demonstração do Teorema de Pitágoras com auxílio de dobraduras.



## 2 Sobre os Pontos Notáveis de um Triângulo

Vimos no capítulo anterior alguns teoremas e aplicações de assuntos em Geometria, constantes no Ensino Fundamental e Médio, presentes no Currículo de Matemática.

Nesse capítulo abordaremos um assunto que não é tema no Currículo de Matemática, apostilas e livros didáticos nas escolas de Ensino Básico, porém é assunto muito rico em aplicações e nos proporciona alguns resultados importantes na Geometria Plana e, simplifica algumas demonstrações envolvendo concorrência, o Teorema de Ceva.

Este teorema foi provado pelo matemático italiano Giovanni Ceva (1647–1734) em 1678, em seu trabalho intitulado *De lineisrectis*.

### 2.1 Teorema de Ceva

**Definição 2.1.1.** Dados pontos colineares  $A$ ,  $B$  e  $C$ , denotamos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{AB}{BC}, \text{ se } \overline{AB} \text{ e } \overline{BC} \text{ têm orientações iguais;}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = -\frac{AB}{BC}, \text{ se } \overline{AB} \text{ e } \overline{BC} \text{ têm orientações distintas.}$$

**Definição 2.1.2.** Em um triângulo qualquer, qualquer segmento que une um vértice a qualquer ponto da reta suporte do lado oposto do triângulo, é chamado de ceviana.

**Teorema 2.1.3. Teorema de Ceva** Sejam  $L$ ,  $M$  e  $N$  pontos, respectivamente, sobre as retas suportes dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , do triângulo  $ABC$ , temos que:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1$$

se, e somente se, as retas  $AL$ ,  $BM$  e  $CN$  forem concorrentes ou paralelas.

#### Demonstração:

Vamos considerar três casos: onde as cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  incidem sobre pontos pertencentes aos lados do triângulo e concorrem em um ponto  $P$  internamente ao triângulo; onde duas cevianas não incidem sobre os lados do triângulo e concorrem em um ponto  $P$  e um terceiro caso onde as cevianas são paralelas.

Vamos ao primeiro caso:

Sejam  $L$ ,  $M$  e  $N$  pontos, respectivamente, sobre os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , do triângulo  $ABC$ . As cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  interseccionam-se em um ponto  $P$ , se, e somente se,  $\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1$ .

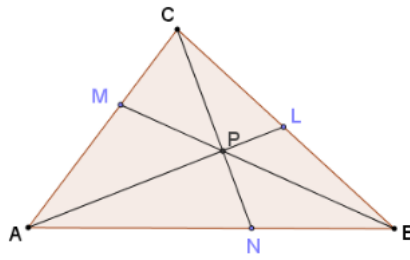


Figura 2.1 – Demonstração do Teorema de Ceva.

Vamos supor inicialmente que as cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  em um triângulo  $ABC$  se interseccionam em um ponto  $P$ .

Seja  $r$  a reta paralela à base  $\overline{AB}$  passando pelo vértice  $C$ . Prologando as cevianas  $\overline{BM}$  e  $\overline{AL}$  obteremos os pontos  $D$  e  $E$  respectivamente, na intersecção com a reta  $r$ .

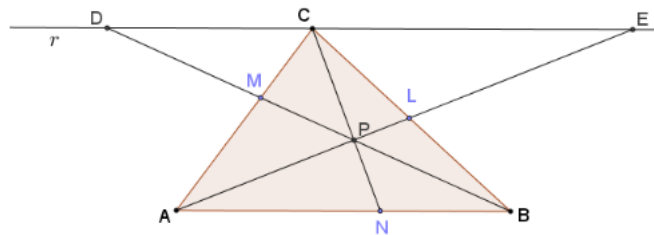


Figura 2.2 – Demonstração do Teorema de Ceva.

Temos  $\triangle DMC \sim \triangle BMA$ , pois,  $\angle DMC \equiv \angle AMB$  (opostos pelo vértice),  $\angle D \equiv \angle MBA$  (alternos internos) e então  $\angle DCM \equiv \angle BAM$ . Logo:

$$\frac{CM}{MA} = \frac{CD}{AB} \tag{2.1}$$

$\triangle CLE \sim \triangle BLA$ , pois,  $\angle CLE \equiv \angle BLA$  (opostos pelo vértice),  $\angle E \equiv \angle LAB$  (alternos internos). Logo:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CE} \tag{2.2}$$

$\triangle CPE \sim \triangle NPA$ , pois,  $\angle CPE \equiv \angle APN$  (opostos pelo vértice),  $\angle ECP \equiv \angle PNA$  (alternos internos). Logo:

$$\frac{CP}{PN} = \frac{CE}{NA} \tag{2.3}$$

$\triangle CPD \sim \triangle NPB$ , pois,  $\angle CPD \equiv \angle BPN$  (opostos pelo vértice),  $\angle DCP \equiv \angle BNP$  (alternos internos). Logo:

$$\frac{CP}{PN} = \frac{DC}{NB} \tag{2.4}$$

De 2.3 e 2.4, temos:

$$\frac{CE}{NA} = \frac{DC}{NB} \quad (2.5)$$

$$\frac{NA}{NB} = \frac{CE}{DC} \quad (2.6)$$

De 2.1, 2.2 e 2.6 temos:

$$\frac{CM}{MA} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{NA}{NB} = \frac{DC}{AB} \cdot \frac{AB}{CE} \cdot \frac{CE}{DC}$$

Assim,

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{DC}{AB} \cdot \frac{AB}{CE} \cdot \frac{CE}{DC} = 1$$

Ou seja,

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

Agora, vamos mostrar a recíproca:

Seja  $P$  o ponto de interseção das cevianas  $\overline{AL}$  e  $\overline{BM}$ .

Consideremos, agora, a ceviana partindo do vértice  $C$  e interseccionando o lado  $\overline{AB}$  do triângulo  $ABC$  no ponto  $N$ , tal que:  $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ .

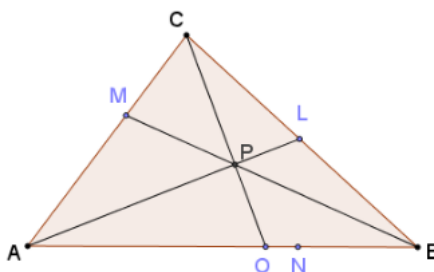


Figura 2.3 – Recíproca da demonstração do Teorema de Ceva.

Seja  $O$  o ponto onde a semirreta  $CP$  encontra o lado  $\overline{AB}$ .

Pela primeira parte do Teorema temos:  $\frac{AO}{OB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$

Dessas duas relações temos que:  $\frac{AN}{NB} = \frac{AO}{OB}$  e, conseqüentemente,  $N$  coincide com  $O$ .

Temos então, que as três cevianas são concorrentes em um mesmo ponto.

Consideremos o segundo caso, em que  $L$  e  $N$  não pertencem aos lados do triângulo.

Sejam  $P$  o ponto de intersecção das retas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  e,  $\overline{CO}$  e  $\overline{AR}$  segmentos paralelos a  $\overline{BP}$ , onde  $O \in \overline{AL}$  e  $R \in \overline{CN}$ .

Então,  $\Delta BPL \sim \Delta COL$  e  $\Delta ARN \sim \Delta BPN$  pelo Caso de Semelhança A.A.

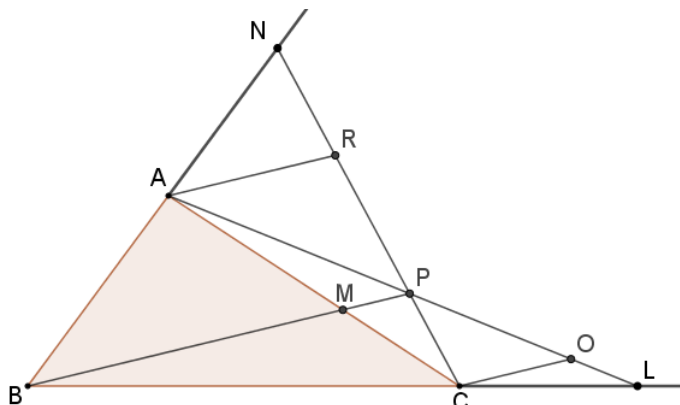


Figura 2.4 – Demonstração do Teorema de Ceva.

Da primeira semelhança  $\Delta BPL \sim \Delta COL$ :

$$\frac{BP}{CO} = \frac{LB}{LC}.$$

Da semelhança  $\Delta ARN \sim \Delta BPN$ , temos:

$$\frac{AR}{BP} = \frac{NA}{NB}.$$

Pela semelhança dos triângulos  $CAO$  e  $MAP$ , obtemos:

$$\frac{CA}{MA} = \frac{CO}{MP}.$$

$$\text{Temos então: } \frac{CM}{MA} = \frac{CA - MA}{MA} = \frac{CA}{MA} - 1 = \frac{CO}{MP} - 1.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} &= -\frac{AR}{PB} \cdot \left(-\frac{BP}{CO}\right) \cdot \left(\frac{CO}{MP} - 1\right) \\ &= AR \cdot \left(\frac{1}{MP} - \frac{1}{CO}\right). \end{aligned}$$

Da semelhança dos triângulos  $ACO$  e  $AMP$  e pela semelhança dos triângulos  $CRA$  e  $CPM$ , vem:

$$\frac{1}{MP} = \frac{1}{AR} + \frac{1}{CO}$$

Logo,

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = AR \cdot \left(\frac{1}{AR} + \frac{1}{CO} - \frac{1}{CO}\right) = 1.$$

E assim,

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1.$$

Consideremos agora o último caso, em que as cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  são paralelas.

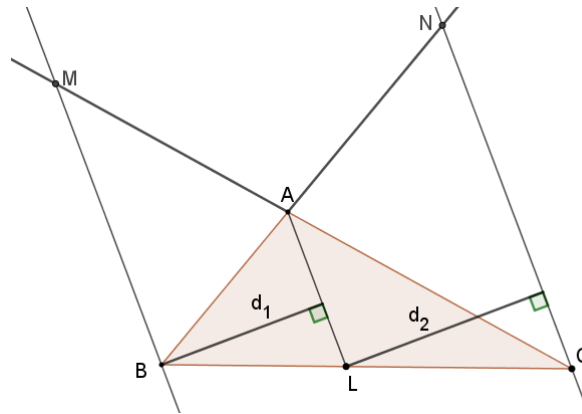


Figura 2.5 – Demonstração do Teorema de Ceva.

Sejam  $d_1$  e  $d_2$  as distâncias entre as retas  $AL$  e  $BM$  e  $AL$  e  $CN$ , respectivamente.

Pelo Teorema de Tales temos:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{d_1}{d_2}, \quad \frac{MC}{MA} = \frac{d_2 + d_1}{d_1} \quad \text{e} \quad \frac{NA}{NB} = \frac{d_2}{d_1 + d_2}.$$

Portanto:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \left( -\frac{AN}{NB} \right) \cdot \left( \frac{BL}{LC} \right) \cdot \left( -\frac{CM}{MA} \right) = \left( -\frac{d_2}{d_1 + d_2} \right) \cdot \left( \frac{d_1}{d_2} \right) \cdot \left( -\frac{d_1 + d_2}{d_1} \right) = \frac{d_1 \cdot d_2}{d_2 \cdot d_1} = 1.$$

Agora, veremos a recíproca para o segundo e o terceiro casos.

Da primeira parte acima:  $\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1.$

Seja  $N'$  pertencente a reta  $AB$  tal que as retas  $AL$ ,  $BM$  e  $CN'$  são concorrentes ou paralelas.

Suponhamos que:  $\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN'}}{\overline{N'B}} = 1.$

Daí:  $\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{AN'}}{\overline{N'B}}$ ; portanto,  $\frac{AN}{NB} = \frac{AN'}{N'B}$  e temos:

$$\frac{AN}{AB + AN} = \frac{AN'}{AB + AN'}.$$

Daí temos  $NA = N'A$  então os pontos  $N$  e  $N'$  coincidem. Portanto, as cevianas são concorrentes ou paralelas.

Vejamos agora os pontos notáveis de um triângulo e algumas aplicações.

## 2.2 Os pontos notáveis de um triângulo

Os triângulos possuem alguns elementos com propriedades importantes, como: medianas, bissetrizes e alturas, esses elementos são conhecidos como cevianas notáveis de um triângulo.

**Teorema 2.2.1.** *As medianas de um triângulo se encontram em um único ponto.*

**Demonstração:** Consideremos o triângulo  $ABC$  e os pontos  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$  pontos médios dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente.

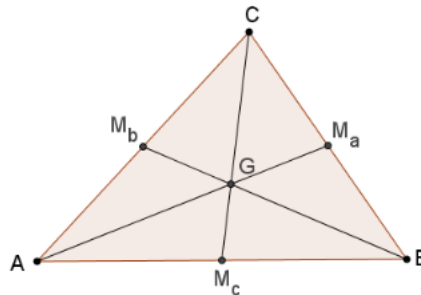


Figura 2.6 – Baricentro.

Sabemos que as medianas de um triângulo interseccionam seus lados nos pontos médios, daí:  $\overline{AM_c} \equiv \overline{BM_c}$ ,  $\overline{BM_a} \equiv \overline{CM_a}$  e  $\overline{AM_b} \equiv \overline{CM_b}$ . Temos então que:

$$\frac{M_a B}{M_a C} \cdot \frac{M_b C}{M_b A} \cdot \frac{M_c A}{M_c B} = 1$$

Logo, pelo Teorema de Ceva, as medianas de um triângulo se encontram em um único ponto. Este ponto  $G$  chamamos de **baricentro** do triângulo.

**Teorema 2.2.2.** *As medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que dista de cada vértice dois terços da distância deste vértice ao ponto médio do lado oposto.*

**Demonstração:** Seja  $P$  o ponto de intersecção das medianas  $\overline{BM_b}$  e  $\overline{CM_c}$  do triângulo  $ABC$ .

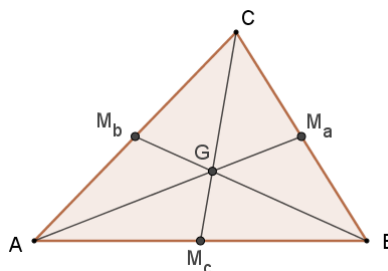


Figura 2.7 – Demonstração do Teorema 2.3.

Sejam  $D$  e  $E$  os pontos médios de  $\overline{BP}$  e  $\overline{CP}$  respectivamente. Temos:  $AM_c = M_c B$  e  $AM_b = M_b C$ .

Logo, pelo Teorema da Base Média do Triângulo aplicado no triângulo  $ABC$ , temos:  $\overline{M_b M_c} \parallel \overline{BC}$  e  $M_b M_c = \frac{BC}{2}$ .

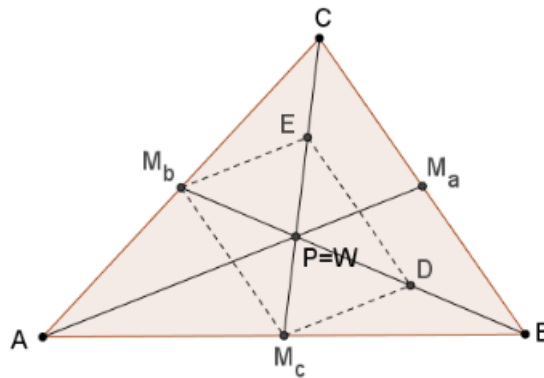


Figura 2.8 – Demonstração do teorema 2.3.

No triângulo  $BPC$  temos:

$$\overline{BD} \equiv \overline{DP} \text{ e } \overline{CE} \equiv \overline{EP}, \text{ logo } \overline{DE} \parallel \overline{BC} \text{ e } DE = \frac{BC}{2}.$$

Podemos concluir que  $\overline{M_cM_b} \equiv \overline{DE}$  e  $\overline{M_bM_c} \parallel \overline{DE}$ , logo  $M_bM_cDE$  é um paralelogramo.

Daí:

$DP = PM_b$  e então:

$$BP = 2PM_b \tag{2.7}$$

$EP = PM_c$  e então:

$$CP = 2PM_c \tag{2.8}$$

Seja  $W$  o ponto de intersecção das medianas  $AM_a$  e  $CM_c$ .

Analogamente, temos que:

$$CW = 2WM_c \tag{2.9}$$

$$AW = 2WM_a \tag{2.10}$$

De 2.8 e 2.9 temos  $P = W$ .

Seja  $G = P = W$  a intersecção de  $\overline{AM_a}$ ,  $\overline{BM_b}$  e  $\overline{CM_c}$ . De 2.7, 2.8 e 2.10 vem que:

$$AG = 2GM_a, \quad BG = 2GM_b, \quad CG = 2GM_c.$$

Então,

$$AG = \frac{2}{3} \cdot AM_a, \quad BG = \frac{2}{3} \cdot BM_b \text{ e } CG = \frac{2}{3} \cdot CM_c.$$

Logo, as medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que dista de cada vértice dois terços da distância deste vértice ao ponto médio do lado oposto.

**Teorema 2.2.3.** *As três retas suportes das alturas de um triângulo se encontram em um único ponto.*

**Demonstração:** Devemos considerar três casos: quando o triângulo é acutângulo, quando o triângulo é obtusângulo e quando o triângulo é retângulo.

Seja um triângulo acutângulo  $ABC$  de alturas  $\overline{AH_a}$ ,  $\overline{BH_b}$  e  $\overline{CH_c}$ .

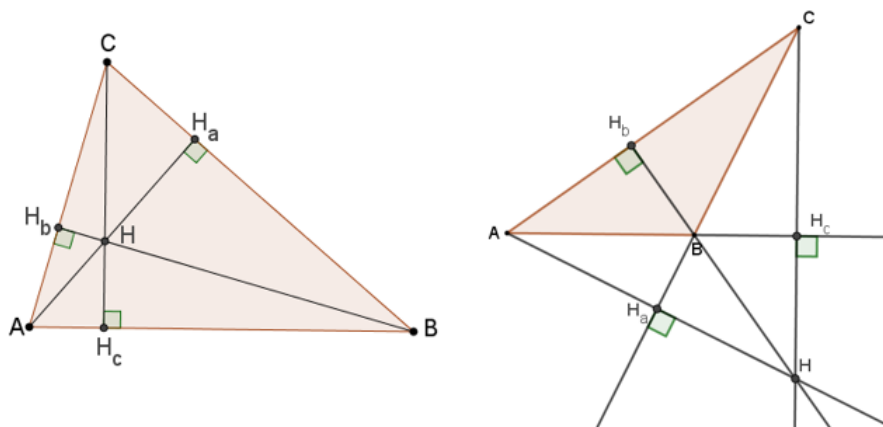


Figura 2.9 – Ortocentro.

Vejamos que, temos os pares de triângulos semelhantes:  $\Delta CH_cA \sim \Delta AH_bB$ ,  $\Delta BH_cC \sim \Delta BH_aA$  e  $\Delta CH_aA \sim \Delta CH_bB$ , todos semelhantes pelo caso A.A (ângulo, ângulo).

No primeiro par,  $\Delta AH_cC \sim \Delta AH_bB$ , pois  $\angle BAC$  é comum e  $\angle AH_cC \equiv \angle AH_bB = 90^\circ$ . Daí temos a relação:

$$\frac{AH_c}{AH_b} = \frac{AC}{AB} \quad (2.11)$$

No segundo par,  $\Delta BH_cC \sim \Delta BH_aA$ , pois  $\angle ABC$  é comum e  $\angle BH_cC \equiv \angle BH_aA = 90^\circ$ . Daí temos a relação:

$$\frac{BH_a}{BH_c} = \frac{AB}{BC} \quad (2.12)$$

No terceiro par,  $\Delta CH_aA \sim \Delta CH_bB$ , pois  $\angle ACB$  comum e  $\angle CH_aA \equiv \angle CH_bB = 90^\circ$ . Daí temos a relação:

$$\frac{CH_b}{CH_a} = \frac{BC}{AC} \quad (2.13)$$

Agora, multiplicando membro a membro os termos das relações 2.11, 2.12 e 2.13 temos:

$$\frac{AH_c}{AH_b} \cdot \frac{BH_a}{BH_c} \cdot \frac{CH_b}{CH_a} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = 1.$$



Portanto, temos:

$$\frac{\overline{AH_c}}{\overline{H_cB}} \cdot \frac{\overline{BH_a}}{\overline{H_aC}} \cdot \frac{\overline{CH_b}}{\overline{H_bA}} = \frac{AH_c}{H_cB} \cdot \frac{BH_a}{H_aC} \cdot \frac{CH_b}{H_bA} = \frac{AH_c}{AH_b} \cdot \frac{BH_a}{BH_c} \cdot \frac{CH_b}{CH_a} = 1.$$

Logo, pelo Teorema de Ceva, as alturas de um triângulo acutângulo se encontram em um único ponto. Este ponto  $H$  chamamos de **ortocentro** do triângulo.

Para o caso do triângulo obtusângulo, a prova é análoga ao caso anterior. Neste caso, o ortocentro se encontra fora do triângulo.

No triângulo retângulo o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto.

Uma demonstração se encontra em [NETO] [23] p. 100.

A seguir apresentamos o enunciado do Teorema da Bissetriz Interna, o qual será útil para demonstração do Teorema que se segue.

**Teorema 2.2.4 Teorema da bissetriz interna:** *Em um triângulo, a bissetriz de um ângulo interno divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.* Este Teorema se encontra em [REZENDE] [26].

**Teorema 2.2.5** *As bissetrizes de um triângulo se encontram em um único ponto.*

**Demonstração:** Considere o triângulo  $ABC$  e as bissetrizes dos ângulos internos  $\overline{AS_a}$ ,  $\overline{BS_b}$  e  $\overline{CS_c}$ . Pelo Teorema da Bissetriz Interna temos as relações:

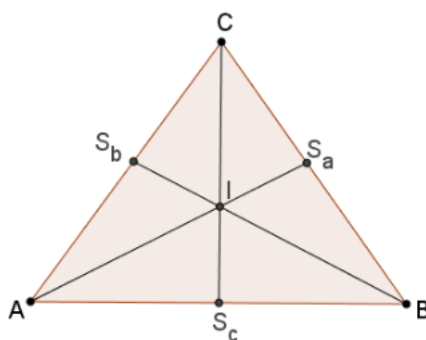


Figura 2.10 – Incentro.

$$\frac{BS_a}{S_aC} = \frac{AB}{AC} \tag{2.14}$$

$$\frac{CS_b}{S_bA} = \frac{BC}{AB} \tag{2.15}$$

$$\frac{AS_c}{S_cB} = \frac{AC}{BC} \tag{2.16}$$

Agora, multiplicando membro a membro os termos das relações 2.14, 2.15 e 2.16 temos:

$$\frac{BS_a}{S_aC} \cdot \frac{CS_b}{S_bA} \cdot \frac{AS_c}{S_cB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} = 1.$$

Logo, pelo Teorema de Ceva, as bissetrizes de um triângulo se encontram em um único ponto.

Este ponto  $I$  chamamos de **incentro** do triângulo o qual por propriedade das bissetrizes, é equidistante dos três lados do triângulo.

Assim, todo triângulo admite uma circunferência que é tangente aos seus lados a qual chamamos de *circunferência inscrita ao triângulo* e seu centro é o incentro, ponto  $I$  de intersecção das bissetrizes dos triângulos

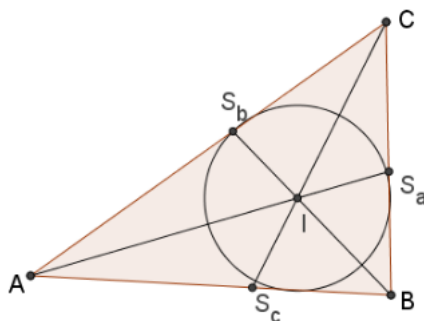


Figura 2.11 – Circunferência inscrita ao triângulo.

Há também um quarto ponto, o circuncentro ou centro da circunferência circunscrita ao triângulo que equidista dos três vértices do triângulo. O circuncentro de um triângulo é obtido pelo encontro das três mediatrizes dos lados do triângulo.

Estes quatro pontos: o baricentro, o incentro, o ortocentro e o circuncentro são mais conhecidos, no dia a dia, como **pontos notáveis do triângulo**.

## 2.3 Aplicações

Veremos aqui algumas aplicações a partir dos pontos notáveis de um triângulo.

**Aplicação 2.3.1** Vamos determinar a distância entre o incentro e o circuncentro de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 12 cm.

Como o triângulo é retângulo, através do Teorema de Pitágoras podemos encontrar a medida do outro cateto:

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ substituindo: } 13^2 = 12^2 + c^2, \text{ logo } c^2 = 169 - 144 \text{ então } c = 5 \text{ cm.}$$

Sabemos que o circuncentro é o encontro das mediatrizes dos lados do triângulo, no caso do triângulo retângulo, o circuncentro coincide com o ponto médio da hipotenusa.

Primeiramente, a mediatriz do lado  $\overline{BC}$ , que passa pelo ponto médio  $G$ , é paralela ao lado  $\overline{AC}$  e, pelo Teorema da Base Média do Triângulo, ela intersecciona a hipotenusa  $\overline{AB}$  no ponto médio  $E$ .

O ponto  $E$  pertence a mediatriz de  $\overline{BC}$  e também pertence a mediatriz de  $\overline{AB}$ . Logo  $E$  é o circuncentro do triângulo  $ABC$ .

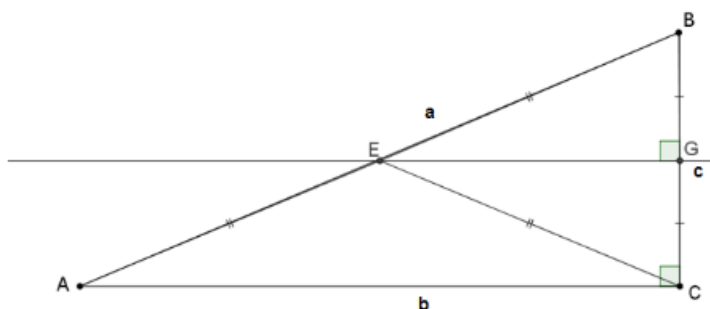


Figura 2.12 – Aplicação 2.3.1.

O incentro  $I$  é o encontro das bissetrizes e também o centro da circunferência inscrita.

Queremos descobrir a medida de  $\overline{EI}$ .

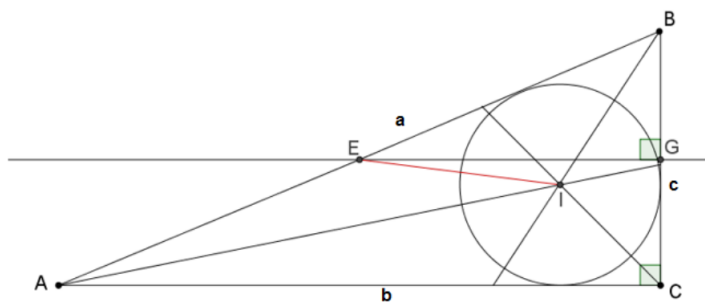


Figura 2.13 – Aplicação 2.3.1.

Pela relação entre o raio  $r$  da circunferência inscrita e as medidas dos lados de um triângulo retângulo, ver em [MANETTA] [19], temos:  $r = \frac{b + c - a}{2} = \frac{12 + 5 - 13}{2} = 2$  cm, logo o raio da circunferência inscrita mede 2 cm.

Sejam  $P$  e  $R$ , pontos de tangência da circunferência inscrita aos lados  $AC$  e  $AB$ , respectivamente. Traçando o segmento  $\overline{IR}$  raio da circunferência, obtemos o triângulo retângulo  $ERI$ .

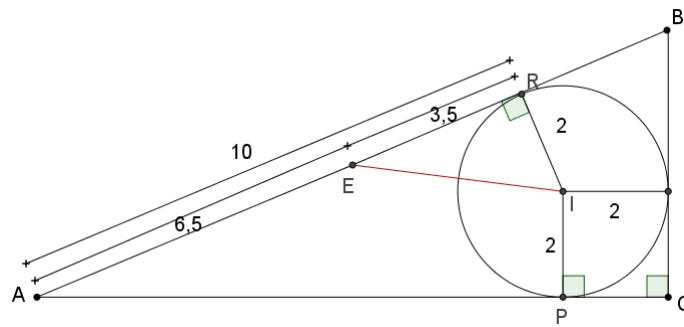


Figura 2.14 – Aplicação 2.3.1.

Pela propriedade do segmento tangente por um ponto exterior à circunferência temos:  $\overline{AP} = \overline{AR}$ . Como  $AP = AC - CP$  então  $AP = 12 - 2 = 10$  e,  $AP = AR = 10$  cm. No triângulo  $ERI$  temos:

$$RI = 2 \text{ e } ER = AR - AE; ER = 10 - 6,5 = 3,5 \text{ cm.}$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$(EI)^2 = (ER)^2 + (RI)^2$ , substituindo:  $(EI)^2 = 3,5^2 + 2^2$ , logo  $(EI)^2 = 16,25$ , então  $EI \cong 4,03$  cm.

Concluimos que a distância entre o incentro e o circuncentro é de aproximadamente 4,03.

**Aplicação 2.3.2.:** Se  $G$  é o baricentro de um triângulo  $ABC$ , os triângulos  $GAB$ ,  $GBC$  e  $GAC$  possuem a mesma área.

Sabemos que se dois triângulos ou mais tem bases e altura respectivamente com medidas iguais, eles têm áreas iguais. Observemos os triângulos  $AM_cC$  e  $BM_cC$ , eles têm bases congruentes pois,  $M_c$  é ponto médio da base, e mesma altura  $H$ , logo eles têm mesma área, ou seja:

$$\text{Área}(AM_cC) = \text{Área}(BM_cC) \tag{2.17}$$

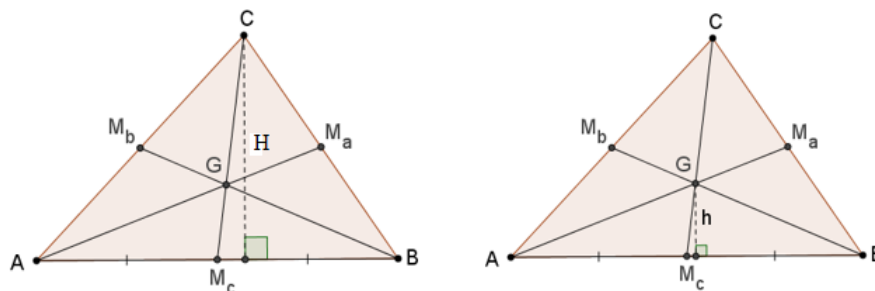


Figura 2.15 – Aplicação 2.3.2.

Da mesma forma, os triângulos  $AM_cG$  e  $BM_cG$  têm bases congruentes e mesma

altura relativa  $h$ , daí:

$$\text{Área}(AM_cG) = \text{Área}(BM_cG) \quad (2.18)$$

Temos ainda:

$$\begin{aligned} \text{Área}(AM_cC) - \text{Área}(AM_cG) &= \text{Área}(GAC) \\ \text{Área}(BM_cC) - \text{Área}(BM_cG) &= \text{Área}(GBC) \end{aligned} \quad (2.19)$$

De 2.17, 2.18 e 2.19 podemos concluir que:

$$\text{Área}(GAC) = \text{Área}(GBC) \quad (2.20)$$

Analogamente, analisando os triângulos  $AM_aB$  e  $AM_aC$ , obtemos  $\text{Área}(AM_aB) = \text{Área}(AM_aC)$  e também analisando os triângulos  $BM_aG$  e  $CM_aG$ , obtemos  $\text{Área}(BM_aG) = \text{Área}(CM_aG)$ .

Então concluímos que:

$$\text{Área}(GAB) = \text{Área}(GAC) \quad (2.21)$$

De 2.20 e 2.21 por transitividade concluímos:

$$\text{Área}(GAC) = \text{Área}(GBC) = \text{Área}(GAB).$$

**Aplicação 2.3.3:** Seja  $ABC$  um triângulo de ortocentro  $H$  e circuncentro  $O$ . Vamos mostrar que a bissetriz interna relativa ao lado  $BC$  também bissecta o ângulo  $HAO$ .

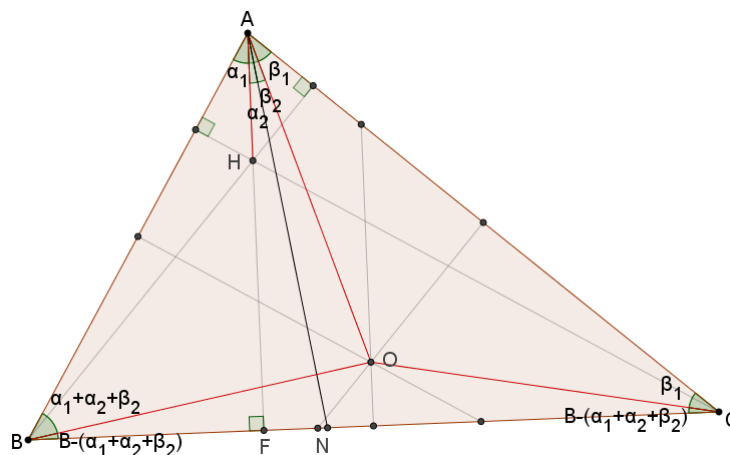


Figura 2.16 – Aplicação 2.3.3.

Sejam  $\overline{AN}$  a bissetriz relativa ao lado  $\overline{BC}$  e  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  as medidas dos ângulos  $\angle BAH$ ,  $\angle NAH$ ,  $\angle OAC$  e  $\angle NAO$ , respectivamente.

Queremos provar que  $\alpha_2 = \beta_2$ .

Como sabemos, o circuncentro é equidistante dos vértices do triângulo, logo  $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$  e os triângulos  $AOB$ ,  $BOC$  e  $AOC$  são isósceles. Temos então:

$$\angle ABO = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2$$

$$\angle ACO = \beta_1$$

$$\angle OBC = \angle ABC - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2) \text{ e}$$

$$\angle OCB = \angle ABC - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2) \quad (2.22)$$

Podemos também observar as relações:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = \frac{\angle BAC}{2} \quad (2.23)$$

No triângulo  $AFB$ :

$$\alpha_1 = 90^\circ - \angle ABC \quad (2.24)$$

No triângulo  $AFC$ :

$$\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 90^\circ - \angle ACB \quad (2.25)$$

De 2.22 e 2.23 temos:

$$\angle ABC - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_2 + \beta_1 = \angle ACB, \text{ de 2.23 temos:}$$

$$\angle ABC - \frac{\angle BAC}{2} - \beta_2 + \beta_1 = \angle ACB; \text{ novamente de 2.23:}$$

$$\angle ABC - \frac{\angle BAC}{2} - \frac{\angle BAC}{2} + \beta_1 + \beta_2 = \angle ACB;$$

$$2\beta_1 = \angle BAC + \angle ACB - \angle ABC;$$

$$2\beta_1 = 180^\circ - \angle ABC - \angle ABC;$$

$$\beta_1 = 90^\circ - \angle ABC.$$

Logo, de 2.23 e 2.24, podemos concluir que  $\alpha_1 = \beta_1$  e então  $\alpha_2 = \beta_2$ , sendo a bissetriz interna do ângulo  $\angle A$  também bissetriz do ângulo  $\angle HAO$ .

**Proposição 2.3.1.** *Sejam  $ABC$  um triângulo qualquer,  $I$  seu incentro,  $I_a$  seu ex - incentro relativo à  $\overline{BC}$  e  $M$  o ponto onde a circunferência circunscrita a  $ABC$  intersecta  $\overline{II_a}$ . Então  $M$  é o ponto médio do arco  $BC$  que não contém  $A$  e  $\overline{MB} \equiv \overline{MC} \equiv \overline{MI} \equiv \overline{MI_a}$ .*

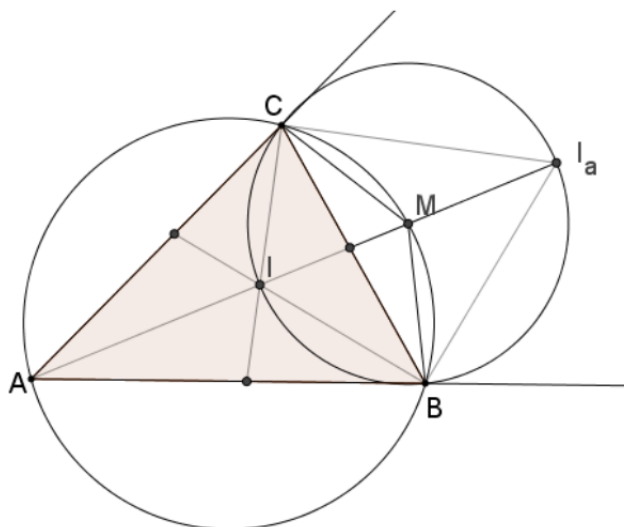


Figura 2.17 – Proposição 2.3.1.

**Demonstração:** Temos que  $\angle MAB = \angle MAC = \frac{\angle A}{2}$ , como os ângulos são iguais, pelo Teorema do ângulo Inscrito, as cordas  $MC$  e  $MB$  são congruentes, daí  $M$  é o ponto médio do arco  $BC$  que não contém  $A$  e  $\overline{MC} \equiv \overline{MB}$ .

Ainda pelo Teorema do Ângulo Inscrito, onde qualquer par de cordas com um extremo comum, que determine o mesmo arco na circunferência, determinará também o mesmo ângulo inscrito, temos:

$$\angle BMI = \angle BMA = \angle ACB.$$

$$\angle IBM = \angle IBC + \angle CBM = \frac{\angle ABC}{2} + \angle CAM = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BAC}{2}.$$

Então:

$$\begin{aligned} \angle BIM = 180^\circ - \angle IBM - \angle BMI &= 180^\circ - \frac{\angle ABC}{2} - \frac{\angle BAC}{2} - \angle ACB = \\ \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB - \frac{\angle ABC}{2} - \frac{\angle BAC}{2} - \angle ACB &= \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BAC}{2} = \angle IBM. \end{aligned}$$

Então, o triângulo  $IBM$  é isósceles de base  $\overline{IB}$ . Assim,  $\overline{IM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ .

Agora, vamos mostrar que  $\overline{BM} \equiv \overline{MI_a}$ .

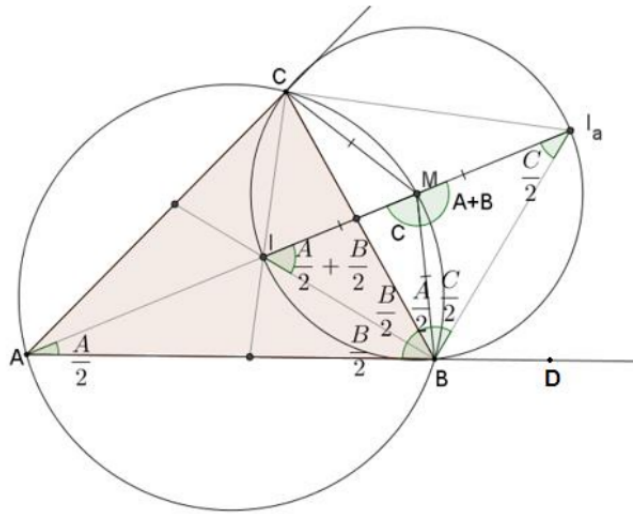


Figura 2.18 – Demonstração da proposição 2.3.1.

Sabemos que  $\overline{BI_a}$  e  $\overline{CI_a}$  são bissetrizes dos ângulos externos relativos ao lado  $\overline{BC}$ .

Colocando sobre o prolongamento do lado  $\overline{AB}$  um ponto  $D$ ,  $\angle CBD$  é externo ao triângulo  $ABC$  e  $\angle CBI_a = \angle I_aBD$ .

O ângulo  $\angle CBD$  tem medida igual à soma das medidas dos ângulos internos do triângulo não adjacentes a ele, então:

$$\begin{aligned} \angle CBD &= \angle BAC + \angle ACB \text{ e} \\ \angle CBI_a = \angle I_aBD &= \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ACB}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vimos anteriormente que, } \angle MBC = \frac{\angle BAC}{2}, \text{ logo } \angle MBI_a = \frac{\angle ACB}{2}.$$

Observando o triângulo  $AMB$ , temos que  $\angle I_aMB$  é ângulo externo e

$$\angle I_aMB = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle BAC}{2} + \angle ABC = \angle BAC + \angle ABC.$$

Observando o triângulo  $I_aMB$ , temos:  $\angle I_aMB = \angle BAC + \angle ABC$  e

$$\angle MBI_a = \frac{\angle ACB}{2}.$$

Então  $\angle MI_aB = \frac{\angle ACB}{2}$ , portanto o triângulo  $I_aMB$  é isósceles de base  $\overline{BI_a}$ . Concluimos que  $\overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MI} = \overline{MI_a}$ .

## 2.4 Ponto de Nagel<sup>1</sup>

Sejam  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  as circunferências que tangenciam exteriormente o triângulo  $ABC$  nos pontos  $X = \overline{BC} \cap c_3$ ,  $Y = \overline{AC} \cap c_2$ ,  $Z = \overline{AB} \cap c_1$ . As cevianas  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$

<sup>1</sup>Em homenagem ao matemático norte americano Ernest Nagel (1803 - 1832).



são concorrentes em um único ponto  $N$ .

**Demonstração:** Sejam  $\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA}$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$  e  $AB = c$  e seja  $p$  o semiperímetro do triângulo  $ABC$ .

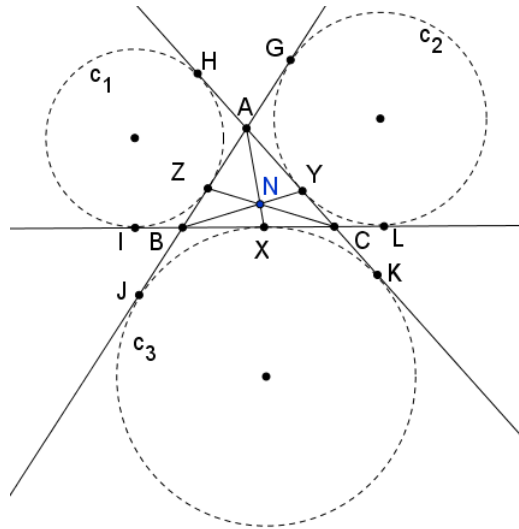


Figura 2.19 – Ponto de Nagel.

Pela propriedade da tangente por um ponto exterior à circunferência, temos que  $\overline{AK} \equiv \overline{AJ}$ ,  $\overline{BL} \equiv \overline{BG}$ , e  $\overline{CH} \equiv \overline{CI}$ .

Da primeira igualdade, temos também que:

$$AK + AJ = (AC + CK) + (BJ + AB)$$

Mas, sabemos que  $\overline{CK} \equiv \overline{CX}$  e  $\overline{BJ} \equiv \overline{BX}$ , daí:

$$AK + AJ = AC + CX + BX + AB = b + a + c = 2p.$$

Logo, cada segmento da tangente traçada por  $A$  à circunferência  $c_3$  têm medida  $p$ . Analogamente, temos que:

$$BL = BG = CH = CI = p.$$

Além disso:

$$CL = BL - BC = p - a. \text{ Daí:}$$

$$CY = CL = p - a; \quad BZ = BI = p - a$$

Analogamente:

$$AZ = AH = p - b; \quad CX = CK = p - b.$$

$$PX = PJ = p - c; \quad AY = AG = p - c.$$

De acordo com as igualdades acima, temos:

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{p-b}{p-a} \cdot \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} = 1.$$

Logo, pelo Teorema de Ceva, as cevianas  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$  são concorrentes em um único ponto.

Este ponto é chamado de Ponto de Nagel.

## 2.5 Ponto de Gergonne<sup>2</sup>

Seja  $ABC$  um triângulo e seja  $c$  a circunferência inscrita nesse triângulo. Sejam os pontos  $X = \overline{BC} \cap c$ ,  $Y = \overline{AC} \cap c$  e  $Z = \overline{AB} \cap c$ . Nestas condições as cevianas  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$  são concorrentes em um único ponto  $P$ .

**Demonstração:** Por propriedade das bissetrizes, sabemos que  $c$  tangencia os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  do triângulo, nos pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , respectivamente.

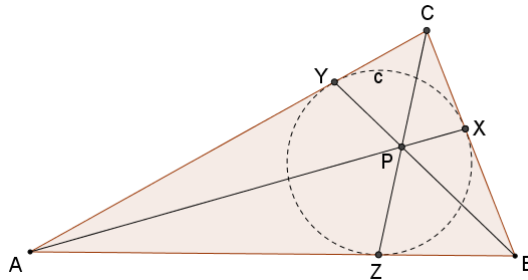


Figura 2.20 – Ponto de Gergonne.

Pela propriedade da tangente por um ponto exterior a circunferência, temos que  $\overline{AZ} \equiv \overline{AY}$ ,  $\overline{BZ} \equiv \overline{BX}$  e  $\overline{CX} \equiv \overline{CY}$ . Temos então:

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{AY}{ZB} \cdot \frac{BZ}{CY} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

Logo, pelo Teorema de Ceva, as cevianas  $\overline{AX}$ ,  $\overline{BY}$  e  $\overline{CZ}$  são concorrentes em um único ponto.

Este ponto é chamado de ponto de Gergonne.

## 2.6 A Reta de Euler e a circunferência de nove pontos.

De acordo com [SOUTO] [32], p. 1:

Os pontos notáveis de um triângulo, incentro, baricentro, ortocentro e circuncentro, há muito são conhecidos, porém, novas descobertas se deram somente no século XVII, com o Teorema de Ceva, em 1678, apresentado pelo matemático italiano Giovanni Ceva (1647-1734).

<sup>2</sup>Em homenagem ao matemático francês Joseph Dias Gergonne (1771 - 1859).

Leonhard Euler, no século XVIII, teve uma grande contribuição no estudo dos pontos notáveis de um triângulo. Ele descobriu, em 1765, que três destes pontos, baricentro, circuncentro e ortocentro, são sempre colineares independente do triângulo, sua demonstração foi analítica. A reta que contém estes três pontos recebeu o seu nome, **reta de Euler**.

A primeira demonstração sobre a reta de Euler ocorreu em 1803, pelo matemático e físico Lazare Micolás Marguerite Carnot (1753-1823), que demonstrou a existência da reta em seu trabalho **Géométrie de Position**.

Dois grandes geômetras franceses, Jean Victor Poncelet (1788-1867) e Charles Julien Brianchon (1785-1864) encontraram mais um ponto pertencente à reta de Euler, em um artigo intitulado *Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère* (1821), este ponto é o centro da circunferência a qual pertencem os três pontos médios dos lados de um triângulo, os pés da altura baixados sobre os lados deste triângulo e os três pontos médios dos segmentos formados por cada um dos vértices do triângulo e seu ortocentro. Esse resultado recebeu, então, o nome de Teorema da Circunferência de Nove Pontos. Pode-se também provar que esse ponto, centro da circunferência, pertence à reta de Euler e é o ponto médio do segmento com extremidades no ortocentro e circuncentro do triângulo. A circunferência de nove pontos também é erroneamente conhecida como *círculo de Euler*, devido sua descoberta da reta de Euler. Também é conhecido como *círculo de Feuerbach*, devido ao geômetra alemão Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) ter publicado um artigo provando que esta circunferência tangencia a circunferência inscrita e também as três circunferências tangentes externas do triângulo; os quatro pontos de tangência da circunferência de nove pontos com as circunferências inscrita e ex inscritas se denominam *pontos de Feuerbach* do triângulo.

Em finais do século XIX, foram publicados alguns trabalhos em geometria projetiva onde é apresentada a cônica de nove pontos, ela contém os pontos médios dos lados de um triângulo como a circunferência de nove pontos, mas utiliza outros pontos que são gerados a partir da escolha de um ponto qualquer da reta de Euler. Hipérbolas, elipses e parábolas são formadas através da variação do ponto da reta de Euler. Quando este ponto coincide com o ortocentro, temos a circunferência de nove pontos.

## 2.7 A Circunferência de Nove Pontos

De acordo com [REZENDE] [26], p. 96.

**Teorema 2.7.1.** *A circunferência que passa pelos pés das perpendiculares baixadas dos vértices de qualquer triângulo sobre os lados opostos a eles, passa também pelos pontos médios dos lados, assim como pelos pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ponto de intersecção das perpendiculares.*

**Demonstração:** Consideremos o triângulo  $ABC$ .

Sejam  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$  pontos médios dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Sejam  $H_a$ ,  $H_b$  e  $H_c$  os pés das alturas relativas aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente. Seja  $H$  o ortocentro do triângulo. Sejam  $D_a$ ,  $D_b$  e  $D_c$  pontos médios dos segmentos  $\overline{AH}$ ,  $\overline{BH}$  e  $\overline{CH}$ , respectivamente.

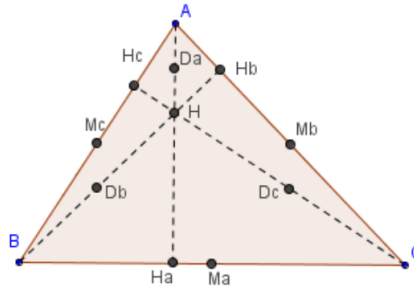


Figura 2.21 – Circunferência de nove pontos.

Observando que  $M_b$  e  $M_c$  são pontos médios dos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  respectivamente, temos que  $\overline{M_bM_c} \parallel \overline{BC}$  e  $M_bM_c = \frac{1}{2}BC$ .

Considerando o triângulo  $HBC$ , temos,  $D_b$  e  $D_c$  pontos médios de  $\overline{BH}$  e  $\overline{CH}$  respectivamente, então  $\overline{D_bD_c} \parallel \overline{BC}$  e  $D_bD_c = \frac{1}{2}BC$ .

Logo, temos  $M_bM_c = D_bD_c$  e  $\overline{M_bM_c} \parallel \overline{D_bD_c}$ , portanto  $M_cD_bD_cM_b$  é um paralelogramo.

Consideremos o triângulo  $ABH$ , temos  $\overline{M_cD_b} \parallel \overline{AH_a}$  e, então,  $\overline{M_cD_b} \perp \overline{D_bD_c}$  e o ângulo  $D_b$  do paralelogramo  $M_cD_bD_cM_b$  é reto, logo  $M_cD_bD_cM_b$  é um retângulo.

Com isso, os segmentos  $\overline{M_cD_c}$  e  $\overline{M_bD_b}$  são diagonais do retângulo  $M_cD_bD_cM_b$ , são congruentes e interseccionam-se em seu ponto médio  $M$ .

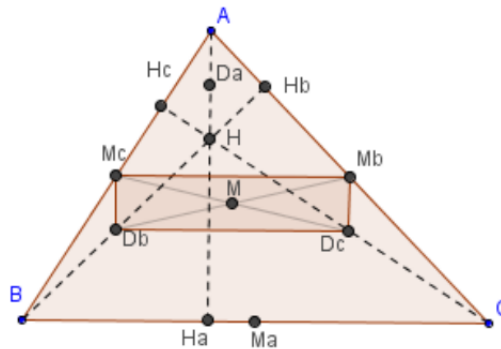


Figura 2.22 – Demonstração da circunferência de nove pontos.

Analogamente temos:  $\overline{M_cM_a} \parallel \overline{D_cD_a} \parallel \overline{AC}$ ,  $\overline{M_cM_a} \equiv \overline{D_cD_a}$ ,  $\overline{M_cD_a} \parallel \overline{BH_b}$  e,

$\overline{M_c D_a} \perp \overline{D_a D_c}$  logo o paralelogramo  $M_c M_a D_c D_a$  é um retângulo.

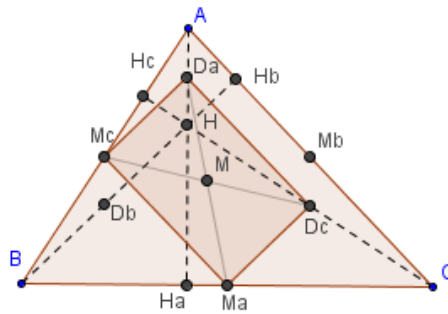


Figura 2.23 – Demonstração do Teorema da Circunferência de Nove Pontos.

E  $\overline{M_a M_b} \parallel \overline{D_a D_b} \parallel \overline{AB}$ ,  $\overline{M_b D_a} \parallel \overline{CH_c}$  e  $\overline{M_b D_a} \perp \overline{D_a D_b}$ . Logo  $M_a M_b D_a D_b$  é retângulo.

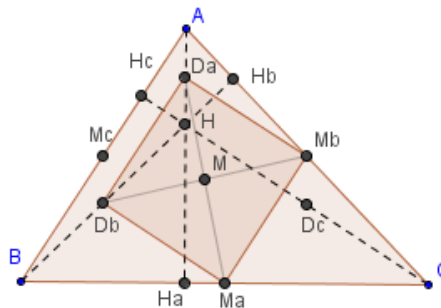


Figura 2.24 – Demonstração da circunferência de nove pontos.

Concluimos que as diagonais  $M_c D_c \equiv M_a D_b$  e interseccionam-se em  $M$  e então  $M_a, M_b, M_c, D_a, D_b$  e  $D_c$  pertencem à mesma circunferência de centro  $M$ .

Sabemos que um ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto e que todo triângulo é inscritível.

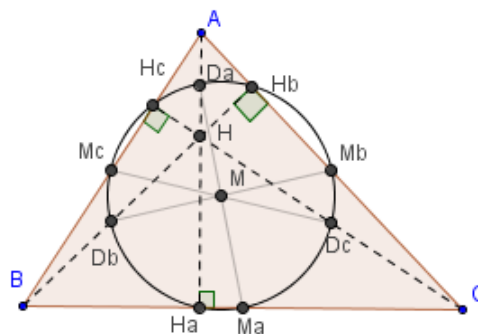


Figura 2.25 – Demonstração da circunferência de nove pontos.

Temos que:  $D_bH_bM_b$ ,  $D_cH_cM_c$  e  $D_aH_aM_a$  são triângulos retângulos e  $\overline{D_bM_b}$ ,  $\overline{D_cM_c}$  e  $\overline{D_aM_a}$  são as hipotenusas relativas a esses triângulos e diâmetros da circunferência determinada por esses pontos.

Concluimos então que os pontos  $M_a, M_b, M_c, D_a, D_b, D_c, H_a, H_b$  e  $H_c$  pertencem à mesma circunferência. A qual denominamos **circunferência de nove pontos**.

### 2.7.1 A reta de Euler

Ainda de acordo com [REZENDE] [26], p. 98.

**Teorema 2.7.2.** *O circuncentro, o baricentro e o ortocentro de um triângulo são colineares. Além disso, o baricentro divide o segmento cuja extremidades são o circuncentro e o ortocentro, na razão 1:2.*

Consideremos o triângulo  $ABC$ , os pontos médios  $M_a, M_b$  e  $M_c$  dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , as alturas  $AH_a$  e  $BH_b$  o ortocentro  $H$  e o baricentro  $G$ .

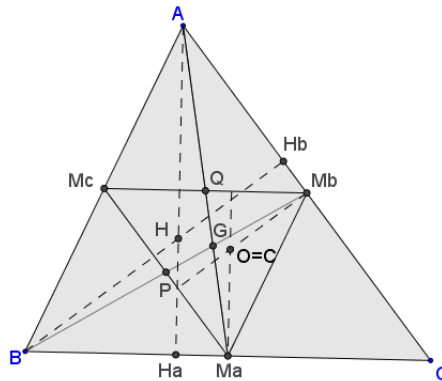


Figura 2.26 – Demonstração da reta de Euler.

Consideremos o triângulo medial  $M_aM_bM_c$  do triângulo  $ABC$  e o ortocentro  $O$  deste triângulo.

Consideremos o circuncentro do triângulo  $ABC$ . É fácil ver que  $O$  coincide com  $C$ .

Pelo caso de semelhança L.L.L., obtemos que  $\Delta ABC \sim \Delta M_aM_bM_c$ , com razão de semelhança  $\frac{1}{2}$ .

Já sabemos que  $\overline{M_aM_b} \parallel \overline{AB}$  e  $\overline{M_aM_c} \parallel \overline{AC}$ , logo  $AM_bM_aM_c$  é um paralelogramo e suas diagonais interseccionam-se no ponto  $Q$ . Podemos então observar que a mediana  $\overline{M_aQ}$  do triângulo  $M_aM_bM_c$  está contida na mediana  $\overline{AM_a}$  do triângulo  $ABC$ , de forma análoga as diagonais do paralelogramo  $BM_aMbMc$  interseccionam-se em um ponto  $P$  e a mediana  $\overline{M_bP}$  do triângulo  $M_aM_bM_c$  está contida na mediana  $\overline{BM_b}$  do triângulo

$ABC$  e o mesmo ocorre com a terceira mediana. Conclui-se então que os triângulos  $ABC$  e  $M_aM_bM_c$  possuem o mesmo baricentro  $G$ .

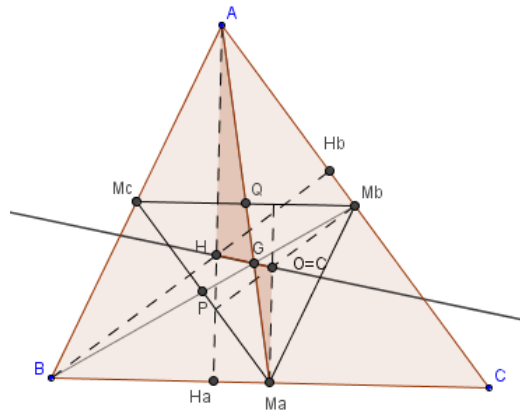


Figura 2.27 – Demonstração da reta de Euler.

Pela semelhança dos triângulos  $ABC$  e  $M_aM_bM_c$ , temos  $AH = 2M_aO$ .

As retas  $AH$  e  $M_aO$  são paralelas pois são perpendiculares ao lado  $\overline{BC}$ , logo o ângulo  $HAG$  é congruente ao ângulo  $GM_aO$ .

Vimos que as medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que dista de cada vértice dois terços da distância deste vértice ao ponto médio do lado oposto, logo  $AG = 2M_aG$ .

Portanto, pelo caso de semelhança L.A.L. temos:  $\triangle AGH \sim \triangle M_aGO$  com razão de semelhança 2 e, então, o ângulo  $AGH$  é congruente ao ângulo  $M_aGO$ . Concluímos que  $O$ ,  $G$  e  $H$  são colineares e  $OG = \frac{1}{2}GH$ , ou seja, o baricentro divide o segmento  $\overline{OH}$ , cujas extremidades são o circuncentro e o ortocentro, na razão 1:2.

**Definição 2.7.3** A reta que contém esses três pontos notáveis do triângulo, ortocentro, circuncentro e incentro, é chamada Reta de Euler.

No capítulo 6 realizamos as construções dos pontos notáveis dos triângulos com uso das dobraduras. Ver 6.5.1, p. 182.

## 3 A Geometria Euclidiana Plana e os Números Construtíveis

O assunto a ser abordado nesse capítulo é sobre alguns números construtíveis utilizando da régua sem escala e compasso, como é feito na Geometria Euclidiana Plana e as consequências dessas construções.

Serão apresentadas algumas construções clássicas que compõem o currículo de Matemática do Ensino Fundamental e Médio. No capítulo 6 mostraremos que estas construções são possíveis também com dobraduras.

### 3.1 A Geometria de Euclides

De acordo com [BOYER] [4] p. 74:

Pouco se sabe sobre a vida e história de Euclides, teria vivido entre 325 a.C. e 265 a.C. em Alexandria, Egito, sabe-se que possivelmente teve sua formação matemática na Escola Platônica de Atenas e que foi o provável criador e professor da Escola de Matemática de Alexandria.

Euclides escreveu cerca de dez tratados, cobrindo tópicos desde ótica, astronomia, música e mecânica, até um livro sobre seções cônicas; porém, mais da metade do que ele escreveu se perdeu. Entre as obras que sobreviveram até hoje temos: *Os Elementos*, *Os Dados*, *Divisão de Figuras*, *Os Fenômenos* e *Óptica*.

O mais importante, sem sombra de dúvidas, foi *Os Elementos*, este trabalho foi amplamente estudado e influente, desde sua criação até nos dias atuais. Existem mais de mil edições desta obra, desde a primeira que data de 1482. A obra compõe 465 proposições distribuídas em 13 livros. Euclides, tomou como base cinco axiomas e cinco postulados geométricos e tentou deduzir todas as suas quatrocentos e sessenta e cinco proposições dessas dez afirmações.

De acordo com [EVES] [11] p. 180.

Postulados:

I: Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos.

II: Pode-se continuar (de uma maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

III: Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.



IV: Todos os ângulos retos são iguais.

V: Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas irão encontrar-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Axiomas:

I: Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si;

II: Juntando iguais a iguais, os totais são iguais;

III: Subtraindo iguais de iguais, as diferenças são iguais;

IV: Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma à outra;

V: O todo é maior do que a parte.

De acordo com o autor [EVES] [11] p. 169:

O livro I começa com definições, axiomas e postulados. As quarenta e oito proposições se distribuem em três grupos: as primeiras vinte e seis tratam de propriedades do triângulo; as proposições de vinte e sete a trinta e dois estabelecem a teoria das paralelas e provam que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a cento e oitenta graus; as proposições de trinta e três a quarenta e seis tratam com paralelogramos, triângulos e quadrados; a proposição quarenta e sete é o Teorema de Pitágoras e a quarenta e oito sua recíproca.

O livro II apresenta quatorze proposições que tratam com transformações de áreas e com a álgebra geométrica da escola pitagórica.

O livro III consiste em trinta e nove proposições contendo teoremas sobre círculos, cordas, secantes, tangentes e medidas de ângulos.

No livro IV, encontramos dezesseis proposições que discutem a construção, com régua e compasso, de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e quinze lados, bem como inscrição desses polígonos num círculo dado.

O livro V é uma exposição da teoria das proporções de Eudoxo.

O livro VI aplica a teoria eudoxiana das proporções à geometria plana. Encontramos nele os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos; construções de terceira, quartas e médias proporcionais; a resolução geométrica de equações quadráticas; a demonstração que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados; uma generalização do Teorema de Pitágoras na qual, em vez de quadrados, traçam-se sobre os lados de um triângulo retângulo três figuras semelhantes descritas de maneira análoga.

O livro VII começa com o processo, conhecido como algoritmo euclidiano, para

determinar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros e o usa para verificar se dois inteiros são primos entre si.

O livro VIII trata das proporções contínuas e progressões geométricas relacionadas.

O livro IX contém muitos teoremas significativos: teorema fundamental da aritmética; fórmula da soma dos primeiros  $n$  termos de uma progressão geométrica; fórmula para números perfeitos.

O livro X focaliza os irracionais, isto é, segmentos de retas de comprimentos incomensuráveis com um segmento de reta dado.

Os três últimos livros, XI, XII, XIII tratam de geometria sólida. O livro XI trata as definições, os teoremas sobre retas e planos no espaço e os teoremas sobre paralelepípedos.

O método de exaustão desempenha um papel importante na abordagem de volumes do livro XII.

No livro XIII se desenvolvem construções visando a inscrição dos cinco poliedros regulares numa esfera.

Os postulados de Euclides nos permitem fazer construções com régua sem escala e compasso. Podemos obter retas, intersecção de retas que não sejam paralelas, retas perpendiculares, circunferências, mediatrizes, bissetrizes, entre outras.

Através de pontos obtidos pelas intersecções de retas, de circunferências, de retas com circunferências, podemos traçar outras retas e circunferências e assim por diante.

Construções com régua e compasso são práticas e podem ser abordadas desde o Ensino Fundamental, apresentam diferentes níveis de dificuldade, podemos encontrar algumas construções bem elaboradas.

## 3.2 Números construtíveis com régua e compasso e resolução de equações quadráticas

De acordo com [REZENDE] [26], P. 151.

**Definição 3.2.1.** Um número é algébrico de grau  $n$  se for raiz de uma equação polinomial de grau  $n$  com coeficientes inteiros e se não existir uma outra equação desse tipo, de menor grau, da qual ele seja raiz.

Se um número real é construtível com régua não graduada e compasso então ele é um número algébrico, de grau igual a uma potência de dois.

Números construtíveis utilizando régua não graduada e compasso nada mais são do que números que podem ser obtidos, com um número finito de construções, apenas com as quatro operações fundamentais e a extração da raiz quadrada. No caso, segmentos de medidas que possam ser somadas, subtraídas, multiplicadas, divididas ou de medida que seja raiz quadrada de um número também construtível.

Em linguagem simples, um número é construtível se é zero ou se, a partir de um número de construções finitas com régua e compasso, podemos construir um segmento com medida igual ao módulo do número dado, tomando como base um segmento unitário. O conceito de números construtíveis pode ser relacionado com a existência de certas extensões de corpos, as quais não são objeto do nosso estudo e, portanto, não as mostraremos aqui. Uma abordagem mais profunda sobre o assunto pode ser encontrada em [ALPERIN] [1], [2] e [MATTOS] [21].

Vejamos agora a demonstração de que, números construtíveis utilizando régua não graduada e compasso, podem ser obtidos apenas com as quatro operações fundamentais e a extração da raiz quadrada.

**Teorema 3.2.2** *Se  $a$  e  $b$  são números reais positivos construtíveis, então  $a + b$ ,  $a - b$  com  $a > b$ ,  $a \cdot b$ ,  $\frac{a}{b}$  e  $\sqrt{a}$  são construtíveis.*

**Demonstração:** Consideremos três segmentos de medidas: unitária,  $a$  e  $b$ , construtíveis.

Consideremos uma reta  $t$ .

Sobre a reta  $t$ , transportamos o segmento de medida  $a$ , obtendo o segmento  $\overline{AB}$ ;

Transportamos em  $t$  o segmento de medida  $b$ , obtendo o segmento  $\overline{CD}$  de modo que  $C$  coincida com  $B$  e que o ponto  $D$  não pertença a  $\overline{AB}$ ;

Traçamos uma circunferência de raio  $b$  e centro  $B$ ;

A reta  $t$  intersecciona a circunferência em  $D$  e em outro ponto que chamaremos de  $E$ .

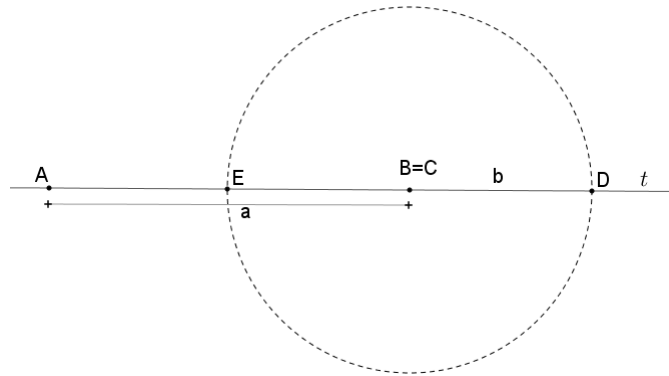


Figura 3.1 – Construção do segmento de medida  $a + b$ ,  $a$  e  $b$  construtíveis.

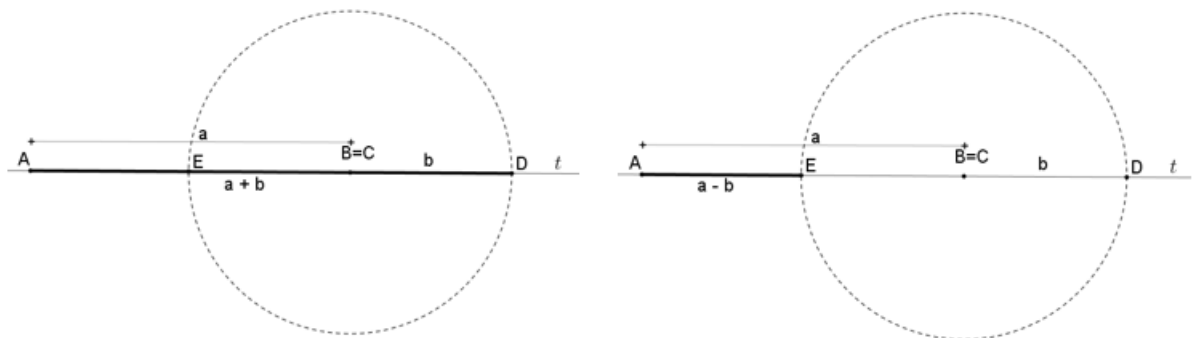


Figura 3.2 – Construção do segmento de medida  $a + b$  e  $a - b$ ,  $a$  e  $b$  construtíveis.

Temos que  $AD = a + b$  e  $AE = a - b$ , obtivemos então que  $a + b$  e  $a - b$  são números construtíveis.

Agora, demonstraremos que são construtíveis os resultados das operações de multiplicação e divisão:

Considerando uma reta  $r$ , trace por  $r$  um segmento  $AB$  de medida  $a$ ;

Considerando uma reta  $s$  concorrente com a reta  $r$  no ponto  $A$ ;

Sobre  $s$  traçamos o segmento unitário  $AC$  e o segmento  $AD$  de medida  $b$ .

Traçamos a reta  $t$  que passa por  $C$  e  $B$ , em seguida traçamos a reta  $u$  paralela à  $t$  que passa por  $D$  e intersecciona  $r$  no ponto  $E$ .

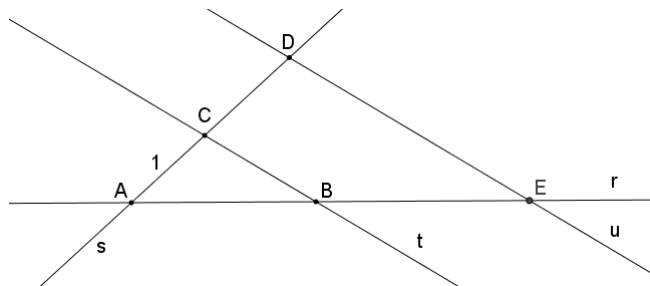


Figura 3.3 – Construção do segmento de medida  $a.b$ ,  $a$  e  $b$  construtíveis.

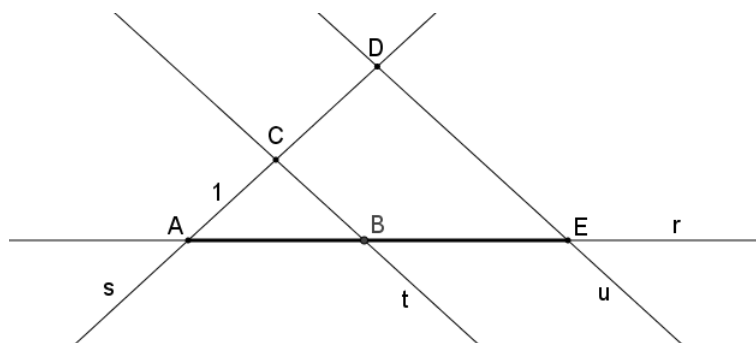


Figura 3.4 – Construção do segmento de medida  $a/b$ ,  $a$  e  $b$  construtíveis.

Pelo Teorema de Tales:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} \text{ então, } \frac{1}{b} = \frac{a}{AE}$$

Logo, concluímos que  $a/b$  é construtível.

No caso da divisão, a construção é semelhante à anterior.

Considerando uma reta  $r$ , trace por  $r$  um segmento  $AB$  de medida  $a$ ;

Considerando uma reta  $s$  concorrente a  $r$  passando pelo ponto  $A$ ;

Sobre  $s$ , traçamos o segmento unitário  $AC$  e o segmento  $AD$  de medida  $b$ .

Traçamos a reta  $t$  que passa por  $D$  e  $B$ ;

Traçamos a reta  $u$  paralela à reta  $t$  que passa por  $C$  e intersecciona  $r$  no ponto

$F$ .

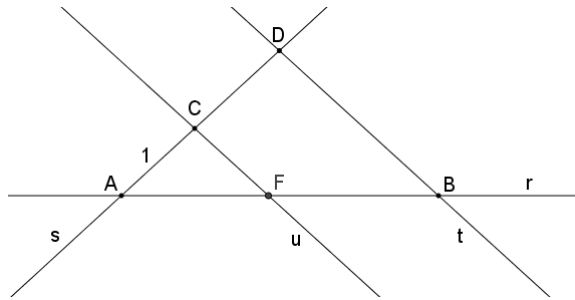


Figura 3.5 – Construção do segmento de medida  $\frac{a}{b}$ ,  $a$  e  $b$  construtíveis.

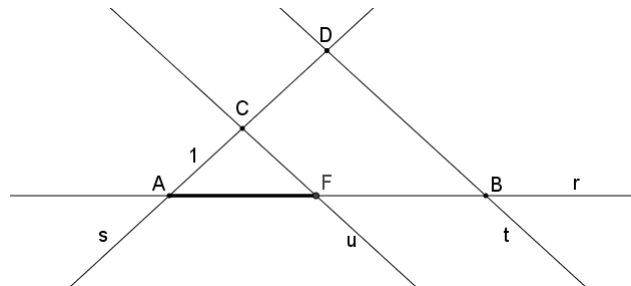


Figura 3.6 – Construção do segmento de medida  $\frac{a}{b}$ ,  $a$  e  $b$  construtíveis.

Pelo Teorema de Tales, temos que:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AF} \text{ daí } \frac{b}{1} = \frac{a}{AF} \text{ logo, } \frac{a}{b} = AF.$$

Concluimos que  $\frac{a}{b}$  é construtível.

Logo, todos os naturais são construtíveis, assim como todos os inteiros. Sendo  $a$  e  $b$  construtíveis então  $\frac{a}{b}$ , com  $b \neq 0$ , também é construtível. Portanto, se  $a \in \mathbb{Q}$ , então  $a$  é construtível.

Vamos mostrar agora que se  $a$  é um número real construtível então  $\sqrt{a}$  é construtível.

Consideremos uma reta  $r$ , nela segmentos de medida  $AB = a$  e  $BC = 1$ , tal que  $C$  não pertença a  $\overline{AB}$ .

Traçamos uma semicircunferência de centro  $M$ , ponto médio de  $\overline{AC}$ ;

Traçamos a perpendicular  $s$  à reta  $r$  passando por  $B$ , a qual intersecta a semicircunferência no ponto  $D$ .

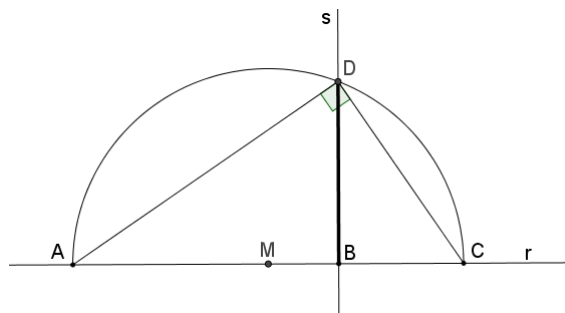


Figura 3.7 – Construção do segmento de medida  $\sqrt{a}$ ,  $a$  construtível.

Sabemos que o ângulo  $D$  mede  $90^\circ$  pois, é inscrito em uma semicircunferência, logo o triângulo  $ACD$  é retângulo. Utilizando a relação métrica:  $BD^2 = AB \cdot BC$  temos  $BD^2 = a \cdot 1$  e portanto,  $BD = \sqrt{a}$ . Concluímos que  $\sqrt{a}$  é construtível.

### 3.2.1 Outros exemplos de números reais construtíveis.

Vejamos alguns exemplos de números que não são racionais e são construtíveis:

**3.2.3.** *Se  $p$  é um número natural primo, então  $\sqrt[p]{p}$  é construtível.*

Está claro, pois como foi demonstrado,  $\sqrt{a}$  é construtível sempre que  $a$  for construtível.

Assim, os números irracionais como  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{a}$ , também são construtíveis.

### 3.2.2 Construção de $\sqrt[n]{a}$ , para $n$ par.

Se  $n$  é um número natural par então o número  $\sqrt[n]{a}$  é construtível para todo  $a$  construtível.

**Demonstração:** Se  $n$  é par, ele é da forma  $2m$ , com  $m \in \mathbb{N}$ . Temos então:  $\sqrt[n]{a} = \sqrt[2m]{a}$ .

A demonstração segue por indução sobre  $m$ .

Para  $m = 1$  temos:  $\sqrt[2 \cdot 1]{a} = \sqrt{a}$ , portanto construtível como já provamos.

Vamos supor que  $\sqrt[2m]{a}$  é construtível para qualquer  $m \in \mathbb{N}$  e vamos mostrar que  $\sqrt[2(m+1)]{a}$  é construtível.

Como já vimos,  $\sqrt{a}$  é construtível, e como  $\sqrt[2(m+1)]{a} = \sqrt{\sqrt[2m]{a}}$  segue que  $\sqrt[2(m+1)]{a}$  é construtível. Logo se  $n$  é um número natural par,  $\sqrt[n]{a}$  é construtível.

### 3.3 Construtibilidade de Números e Pontos no Plano.

**Definição 3.3.1** Dizemos que um ponto qualquer  $(a, b)$  do plano é construtível se  $a, b \in \mathbb{R}$  forem construtíveis.

**Definição 3.3.2** Dizemos que uma reta é construtível, se pelo menos dois de seus pontos são construtíveis.

**Definição 3.3.3** Dizemos que uma circunferência é construtível, se o seu centro e um de seus pontos são ambos construtíveis.

Colocando tais definições no plano cartesiano e representando de forma analítica, podemos afirmar:

**Proposição 3.3.4** *Toda reta construtível pode ser representada por uma equação do tipo  $ax + by + c = 0$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:** Considere os pontos construtíveis  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  do plano  $XY$ . A equação da reta determinada por esses pontos é dada por:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Temos,  $(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$  que é da forma  $ax + by + c = 0$ .

Os números  $a, b, c \in \mathbb{R}$  são construtíveis pois, são obtidos dos números construtíveis  $x_1, x_2, y_1$  e  $y_2$  através das operações de adição, subtração e multiplicação.

**Proposição 3.3.5** *Toda circunferência construtível pode ser representada por uma equação do tipo  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , construtível.*

Considere os pontos construtíveis  $(\alpha, \beta)$  e  $(x_1, y_1)$ , ambos com coordenadas em  $\mathbb{R}$ , onde o primeiro é o centro de uma circunferência e o segundo pertence a ela, e seja  $r$ , tal que  $r > 0$  a distância que os separa. Podemos representar a equação dessa circunferência por:  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ . Como  $(x_1, y_1)$  pertence à circunferência, temos:

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = r^2, \text{ com } r^2 \text{ construtível.}$$

Podemos escrever  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$  como  $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$ , que é da forma  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  construtíveis pois, são obtidos a partir de  $\alpha$  e  $\beta$ , através das operações de adição, subtração e multiplicação, onde  $a = -2\alpha$ ,  $b = -2\beta$  e  $c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$ .

Um ponto construtível qualquer pode ser determinado através de uma das seguintes operações elementares:

Intersecção de duas retas construtíveis; equivalente a resolução de uma equação do primeiro grau;



Intersecção de uma reta e uma circunferência, ambos construtíveis; equivalente a resolução de uma equação do segundo grau;

Intersecção de duas circunferências construtíveis; equivalente a resolução de uma equação do primeiro grau.

Essas operações são ideais para construções com régua e compasso.

### 3.4 Resolução de equações quadráticas.

A fórmula de resolução de equações de segundo grau,  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números construtíveis, coeficientes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , utiliza as quatro operações básicas e a raiz quadrada para encontrar as soluções. Logo, como foi demonstrado na seção 3.2, se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são construtíveis então é possível realizar as operações necessárias e resolver equações quadráticas utilizando régua e compasso.

Apresentamos a seguir uma outra maneira de construir, com régua e compasso, a solução dessa equação quadrática.

Obtendo graficamente  $r = \frac{b}{a}$  e  $s = \frac{c}{a}$ , vamos transformar a equação  $ax^2 + bx + c = 0$  na equação  $x^2 + rx + s = 0$ .

(i) Consideremos inicialmente as raízes  $x_1$  e  $x_2$  com mesmo sinal.

Temos então, a soma e o produto das raízes resultando no sistema:

$$\begin{cases} |x_1| + |x_2| = |r| \\ |x_1| \cdot |x_2| = s \end{cases}$$

Consideremos uma reta  $o$  e os segmentos de medidas  $AB = |r|$ ,  $CD = s$  e  $BC = 1$ :

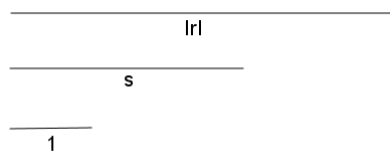


Figura 3.8 – Construção das soluções da equação quadrática de mesmo sinal.

Traçamos em  $o$  os segmentos de medida  $AB = |r|$ ,  $BC = 1$  e  $CD = s$ .

Traçamos as semicircunferências de diâmetros  $AB$  e  $BD$  e centros  $O$  e  $P$ , respectivamente. Traçamos a reta  $u$  perpendicular à reta  $o$  passando por  $C$  e chamemos de  $E$  a intersecção de  $u$  com o semicircunferência de diâmetro  $BD$ .

Como já vimos anteriormente, temos o triângulo  $BDE$  e o semicircunferência de diâmetro  $BD$  que é arco capaz do ângulo de  $90^\circ$  sobre segmento  $\overline{BD}$ , logo  $CE$  é a média geométrica das medidas  $BC$  e  $CD$ , ou seja  $CE = \sqrt{s}$ .

Seja  $v$  a reta paralela à reta  $o$ , passando pelo ponto  $E$ , e seja  $G$  um ponto de intersecção de  $v$  com a semicircunferência de diâmetro  $\overline{AB}$ .

Traçamos as retas  $w$  e  $y$  perpendiculares a  $o$  passando pelo centro  $O$  e por  $G$ , respectivamente.

Sejam  $H$  e  $I$ , respectivamente, os pontos de intersecção da reta  $y$  com a reta  $o$ , e da reta  $w$  com a semicircunferência de diâmetro  $AB$ .

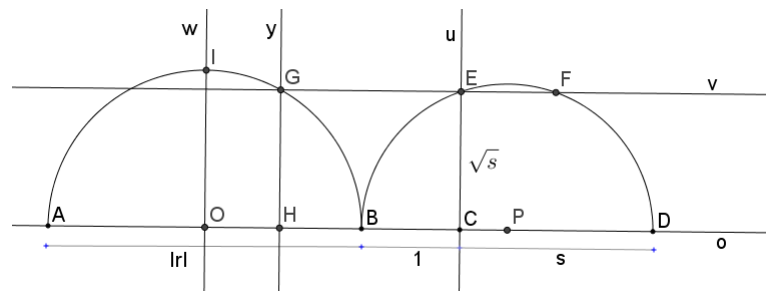


Figura 3.9 – Construção das soluções da equação quadrática de mesmo sinal.

O ponto  $H$  divide o segmento de medida  $|r|$  em dois segmentos de medidas  $|x_1|$  e  $|x_2|$  pedidos.

Temos: Se  $r < 0$ ,  $x_1 = AH$  e  $x_2 = HB$  são as raízes.

Se  $r > 0$ ,  $x_1 = -AH$  e  $x_2 = -HB$  são raízes.

Se  $OI = EC$ , então  $\sqrt{\frac{r^2}{4}} = \sqrt{s}$ , daí  $r^2 = 4s$ , logo  $\Delta = r^2 - 4s = 0$  e a equação admitirá solução única  $x = x_1 = x_2$ .

Se  $OI < EC$ , então  $\frac{r^2}{4} < s$ , daí  $r^2 < 4s$ , logo  $\Delta < 0$  e a equação não admitirá soluções reais.

Considerando  $b = 0$ , temos  $ax^2 + c = 0$ , ou seja,  $x^2 + \frac{c}{a} = 0$  o que seria  $x^2 = -s$  com  $s > 0$ , e não teria solução real.

(ii) Considerando agora  $s < 0$ , ou seja, as raízes  $x_1$  e  $x_2$  têm sinais diferentes. Sendo  $x_1$  a raiz de maior valor absoluto, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} |x_1| - |x_2| = |r| \\ |x_1| \cdot |x_2| = |s| \end{cases}$$

Considere uma reta  $o$  e os segmentos de medidas  $|r|$ ,  $|s|$  e 1:

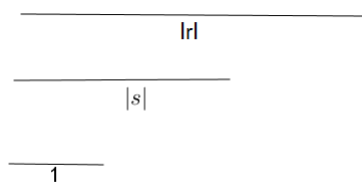


Figura 3.10 – Construção das soluções da equação quadrática de sinais diferentes.

Tracemos uma reta  $o$  e uma circunferência de diâmetro  $AB$  de medida  $|r|$  e centro  $O$ , com  $A, B$  e  $O$ , sendo pontos de  $o$ . Consecutivamente ao diâmetro  $AB$  da circunferência, transportamos  $BD = 1$  e  $DC = |s|$ .

Tracemos a semicircunferência de centro  $P$  e diâmetro  $BC$ .

Tracemos uma reta  $u$  perpendicular à reta  $o$  passando por  $D$ . Analogamente à construção anterior, obtemos  $ED = \sqrt{|s|}$ , sendo  $E$  o ponto de intersecção da semicircunferência com a reta  $u$ .

Seja  $v$  a reta paralela à  $o$  passando por  $E$ . Tracemos por  $B$  o segmento  $BG$ , perpendicular à reta  $o$ , com  $G$  pertencente à reta  $v$ .

Tracemos a semirreta  $GO$  que intersecciona a circunferência de centro  $O$  e diâmetro  $\overline{AB}$  nos pontos  $H$  e  $I$ .

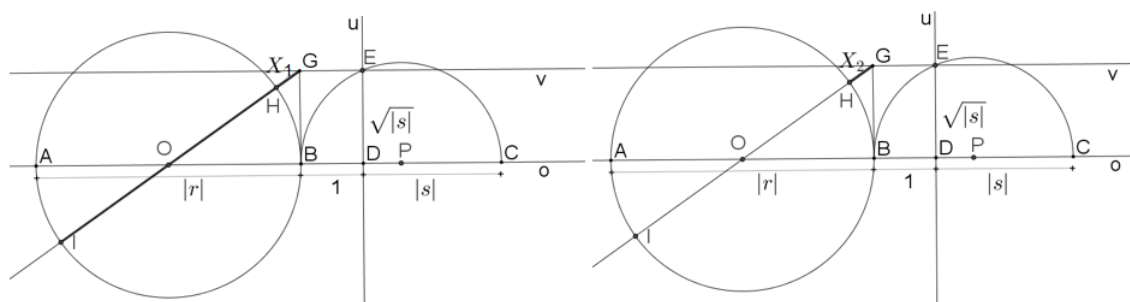


Figura 3.11 – Construção das soluções da equação quadrática de sinais diferentes.

Obtemos a representação das raízes  $GI = x_1$  e  $GH = x_2$ .

Observe que  $|x_1| - |x_2| = |r|$  pois,  $HI = |r|$ .

E  $(GB)^2$  é a potência do ponto  $G$  em relação à circunferência de centro  $O$  e diâmetro  $\overline{AB}$ , temos então a relação  $(GB)^2 = GH.GI$ . Logo  $|x_1|.|x_2| = |s|$ .

Neste caso a equação sempre admite solução.

Considerando  $b = 0$ , temos que  $r = \left| \frac{b}{a} \right| = 0$  então,  $|x_1| - |x_2| = |r| = 0$ .

Teríamos então as raízes  $GB$  e  $-GB$ , ou seja,  $\sqrt{\left| \frac{c}{a} \right|}$  e  $-\sqrt{\left| \frac{c}{a} \right|}$ .

Se  $c = 0$ , teríamos  $x^2 + rx = 0$  e as raízes  $x = 0$  e  $x = -r = -\frac{b}{a}$ .

## 3.5 Aplicação

Apresentamos nessa seção a construção de um número, o chamado número de ouro, que não pertence ao conjunto dos racionais, porém, devido à relevância deste, concedemos um espaço próprio.

### 3.5.1 Secção Áurea de um segmento de reta

Os Pitagóricos estudavam várias relações existentes na música e na natureza, entre elas estava a divina proporção.

A Razão Áurea representa a razão entre dois segmentos ou duas medidas, considerada a “divina proporção”, a qual é utilizada desde a Antiguidade por Matemáticos e arquitetos, como por exemplo, Euclides usou o número de ouro em seu livro *Elementos* para construir um pentágono regular; podemos encontrar a razão áurea em um texto do Papiro de Rhind que fala sobre uma “razão sagrada”; os Pitagóricos também utilizaram razão áurea na construção da estrela pentagonal; o número de ouro está na sequência de Fibonacci. Em arquitetura encontramos a proporção áurea na Pirâmide de Gizé e também no Parthenon; podemos encontrar o número de ouro em toda a natureza.

O número áureo ou número de ouro é o número irracional  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,618$ , simbolizado com a letra grega  $\phi$  (*fi*), considerado símbolo da harmonia. O nome Fi é a pronuncia da letra f grega, inicial do nome Fídeas, escultor e arquiteto grego responsável pela construção do Parthenon, em Atenas. Objeto de muito estudo, mistério e curiosidade, o número de ouro tem uma história rica e muito antiga. Vamos apresentar algumas construções envolvendo essa proporção.

Considere o segmento  $AB$  de medida  $a$ , um ponto  $E \in \overline{AB}$  de forma que  $AE = \sqrt{AB \cdot BE}$ , ou seja,  $AE$  é média geométrica entre  $AB$  e  $BE$ . O segmento  $\overline{AE}$  é chamado de segmento áureo interno de  $\overline{AB}$ .



Figura 3.12 – Segmento áureo interno.

Considerando  $AE = x$  temos  $EB = a - x$ , e:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} \quad (3.1)$$

Dessa igualdade podemos obter a equação quadrática  $x^2 + ax - a^2 = 0$ , com  $a > 0$ .

Analisando algebricamente, encontrar o valor de  $x$  é resolver a equação quadrática, com soluções  $x = \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ , da qual vamos considerar somente a raiz positiva.

Construção do segmento áureo:

Dado um segmento  $AB$  de medida  $a$ , encontramos o ponto médio de  $\overline{AB}$  e obtemos dois segmentos de medida  $\frac{a}{2}$ .

Transportamos o segmento de medida  $\frac{a}{2}$  perpendicularmente ao segmento  $AB$ , a partir de  $B$ , obtendo assim um triângulo  $ABC$  de catetos  $a$  e  $\frac{a}{2}$ .

Transportamos o segmento  $\overline{BC}$ , a partir de  $C$  sobre a semirreta  $CA$ , obtendo o ponto  $D$ .

Transportamos  $\overline{AD}$  sobre  $\overline{AB}$ , a partir de  $A$  encontrando o ponto  $E$ . Obtemos assim  $x = \overline{AE}$ , que é *segmento áureo* do segmento  $AB$ , dado.

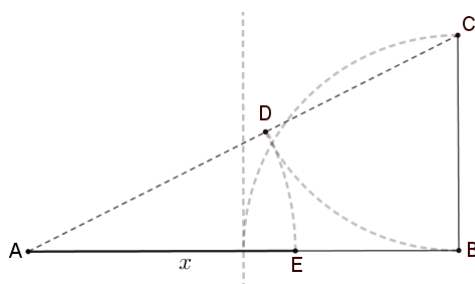


Figura 3.13 – Construção do segmento áureo.

**Justificativa:** No triângulo  $ABC$ , pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$  substituindo,  $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$  ou seja,  $x^2 + ax - a^2 = 0$ , que é a equação obtida da relação 3.1.

A partir da construção anterior, do segmento áureo, podemos construir um *retângulo áureo*. A razão  $\frac{a}{x}$  é conhecida como razão áurea.

Para construir o retângulo áureo a partir do segmento áureo encontrado, basta transportar o segmento  $AE$  de medida  $x$  perpendicularmente a  $\overline{AB}$ .

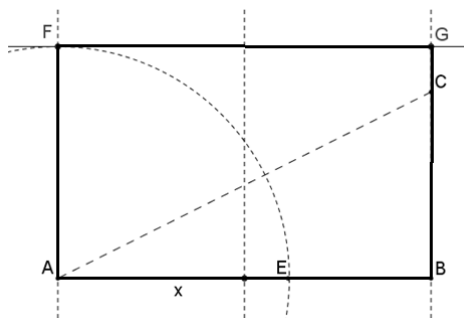


Figura 3.14 – Construção retângulo áureo.

O retângulo áureo é o retângulo cuja razão entre suas dimensões resulta no número de ouro. Este retângulo é muito utilizado em arte, pinturas e arquitetura, podemos encontra-lo no *desing* de páginas da internet, uma vez que é comprovado que o retângulo de ouro é mais agradável de se observar, pois a sua proporção é perfeita.

Já vimos nesse capítulo a construção de alguns números reais: sendo  $a$  e  $b$  números construtíveis, construímos os números  $a + b$ ,  $a - b$  e  $a \cdot b$ ; os racionais  $\frac{a}{b}$ ; os irracionais  $\sqrt{a}$  se  $a$  não é um quadrado perfeito,  $\sqrt[n]{a}$  com  $n$  pertencente a  $\mathbb{N}$ , e podemos construir o número de ouro  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Veremos na próxima seção que nem todos os números reais são construtíveis com régua sem escala e compasso e o impacto dessa descoberta na matemática grega.

### 3.6 Números reais não construtíveis com régua sem escala e compasso.

**Definição 3.6.1.** Número transcendente é um número que não é algébrico e pertence ao conjunto dos números Reais ou Complexos. Não existe nenhum polinômio de coeficientes inteiros não nulos do qual este número seja raiz.

Com a descrição algébrica dos números construtíveis, conseguimos exemplos de números reais não construtíveis, como as raízes cúbicas de números naturais que não são cubos perfeitos como  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[3]{4}$  e  $\sqrt[3]{5}$ . Então temos aqui exemplos de números algébricos que não são construtíveis com compasso e régua sem escala. Ainda, números transcendententes como  $\pi$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$ , ...,  $n\pi$ ... e  $e$ ,  $2e$ , ...,  $ne$ ., que também não são construtíveis.

As várias tentativas de construir números, que hoje já sabemos não serem construtíveis com compasso e régua sem escala, além de produzirem muitas descobertas na matemática, deram origem aos três famosos problemas da matemática grega que veremos a seguir.

### 3.6.1 Os três problemas clássicos da matemática grega

Os axiomas de construção, relativos a régua sem escala e compasso, não são capazes de resolver todos os problemas geométricos, como por exemplo a trisseção de ângulos e a construção de raízes cúbicas. Assim surgiram os três problemas clássicos da geometria:

**Duplicação do cubo** ou o problema de construir a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado.

**Trisseção do ângulo** ou o problema de dividir um ângulo de medida arbitrária dado em três partes de medidas iguais.

**Quadratura do círculo** ou o problema de construir um quadrado com área igual à de um círculo dado.

Esses problemas tornaram-se importantes devido a impossibilidade de resolvê-los utilizando régua sem escala e compasso, como eram resolvidos os problemas na geometria grega e por Euclides em *Os Elementos*. As diversas tentativas de resolvê-los, por matemáticos e amadores, nos trouxeram muitas descobertas na geometria, como por exemplo as secções cônicas, curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentais. Como em outros grandes problemas não resolvidos, nota-se o grande estímulo e todo o desenvolvimento produzido acerca da tentativa e estudo para solucioná-los. O problema da quadratura do círculo é o mais famoso da matemática moderna, o problema da duplicação do cubo foi o mais famoso da matemática grega.

Somente em 1837, foi finalmente demonstrado por Pierre Wantzell que era impossível resolvê-los usando somente régua sem escala e compasso.

Vamos investigar o problema da trisseção do ângulo. Esse problema já foi resolvido de várias formas alternativas, como por exemplo, com uso de deslizamento da régua, logo sem as operações lícitas com compasso e régua sem escala.

Vamos apresentar uma resolução feita por Arquimedes com uso de deslizamento da régua. Consideremos o ângulo  $AOB$ , dado.

Traçamos uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$  dado de modo que o ângulo  $\alpha = AOB$  é ângulo central dessa circunferência. Em uma régua, marcamos os pontos  $C$  e  $D$  de forma que  $CD = r$ . Mantendo  $C$  sobre a reta  $AO$  e o ponto  $D$  sobre a circunferência, deslizamos a régua até que ela passe por  $B$ . Obtemos o ângulo  $\beta = BCA$  de medida igual a terça parte da medida do ângulo  $\alpha$ .

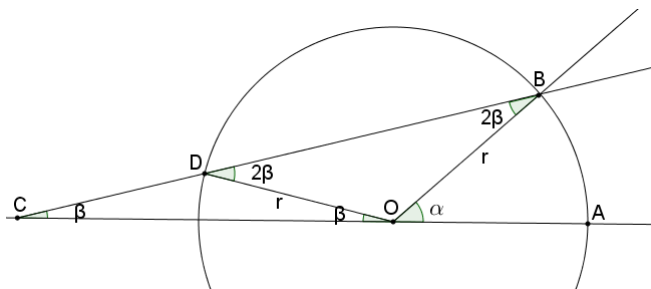


Figura 3.15 – Trisseção do ângulo com uso do deslizamento de régua.

Justificativa:

Temos:  $\angle BDO = 2\angle DCO$  pois,  $\angle BDO$  é ângulo externo no triângulo isósceles  $DCO$ , logo  $\angle BDO = 2\beta$ .

Temos também o triângulo  $ODB$  isósceles, logo  $\angle DBO = \angle BDO = 2\beta$ .

O ângulo  $\alpha$  é ângulo externo do triângulo  $COB$ , logo  $\alpha = \beta + 2\beta = 3\beta$ .  
Concluimos então que  $\beta = \frac{1}{3}\alpha$ .

Muitos ângulos podem ser trisseccionados com régua sem escala e compasso, como por exemplo o ângulo reto. Vejamos um contra - exemplo de que, com régua sem escala e compasso, não é qualquer ângulo que pode ser trisseccionado.

Consideremos o ângulo  $\alpha = 60^\circ$ , se podemos trisseccionar  $\alpha$  então podemos construir um ângulo  $\beta = 20^\circ$  e, de forma equivalente,  $\cos 20^\circ$  seria construtível.

Teríamos:  $\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos 3\beta = 4\cos^3 \beta - 3\cos \beta$ , ou seja,  $8\cos^3 \beta - 6\cos \beta - 1 = 0$ , equação da qual  $\cos \beta$  é raiz.

Mas, o polinômio  $8x^3 - 6x - 1 = 0$  é irredutível e de grau 3. Então,  $\cos 20^\circ$  não é construtível.

No capítulo de atividades, abordaremos, entre outros, a construção desse problema e também da duplicação do cubo, possíveis de maneira alternativa através de dobraduras, atividades 6.3.1 e 6.3.2, páginas 165 e 170, respectivamente.

Ainda nesse capítulo, o leitor encontrará atividades relacionadas a construção de números reais com auxílio de dobraduras como, por exemplo, as atividades 6.2.1, p. 150 e 6.2.2, p. 158.



## 4 Secções Cônicas

Neste capítulo vamos abordar um assunto que geralmente é pouco explorado no Ensino Médio, as secções cônicas. As cônicas: parábola, elipse e hipérbole têm importantes aplicações no cotidiano, muitas delas que podem ser exploradas de maneira interdisciplinar com Física e Biologia por exemplo.

Apresentaremos inicialmente uma pequena nota histórica seguida pela indicação de como elas são formadas ao interseccionarmos um plano com uma superfície cônica. Em seguida, temos a definição analítica, e suas equações e gráficos na forma reduzida. Uma definição de retas tangentes às cônicas é abordada, uma vez que será de grande importância nesse trabalho nos capítulos posteriores, onde usaremos dobraduras para construir cônicas, através da envoltória de suas retas tangentes.

Para finalizar, mostraremos algumas aplicações.

### 4.1 História

De acordo com [DELGADO] [9], p.98 e 146. O matemático Menêmo, Menaecmus em latim (380–320 a.C), foi discípulo de Eudócio na Academia de Platão e descobriu as secções cônicas: elipse, parábola e hipérbole enquanto pesquisava e procurava a solução para o problema da duplicação do cubo. Foi ele o primeiro a mostrar que as cônicas são obtidas como secções de cones circulares retos com planos.

Foi creditada a Aristeu (370–300 a.C.) a publicação do primeiro tratado sobre cônicas, nos escritos de Pappus de Alexandria (290–350 aproximadamente) em sua obra *Tesouro da Análise*.

Posteriormente, o matemático grego Apolônio de Perga (262–190 a.C.) reorganizou e aperfeiçoou todo o assunto já existente em sua obra *Secções Cônicas*, que consiste em um tratado com 8 livros, o mais importante e completo existente.

Foi Apolônio quem considerou o outro ramo da hipérbole, como conhecemos hoje, considerando as curvas de cones duplos, foi ele também quem primeiramente mostrou que a partir de um único cone é possível obter três secções cônicas distintas apenas com a variação da inclinação do plano de secção.

As obras *Os Elementos* de Euclides e *Secções Cônicas* de Apolônio são as mais importantes da matemática grega. Euclides escreveu um tratado sobre cônicas, mas o trabalho se perdeu e, logo depois surgiu o trabalho de Apolônio que foi considerado uma obra prima e agregou muito valor ao desenvolvimento da matemática. Em consequência

deste estudo sobre Cônicas Apolônio ficou conhecido como o *Geômetra Magno*.

Ao restaurar uma obra perdida de Apolônio, Plane Loci, Pierre de Fermat teve inspiração para desenvolver sua obra *Ad locos planos et sólidos isagoge* (1636), obra em que ele estabelece um sistema de coordenadas na Geometria Euclidiana (equivalente ao de Descartes). Unindo o estudo sobre a teoria de equações de François Viète, teoremas enunciados por Pappus e as obras *Plane Loci* e *Secções Cônicas* de Apolônio, Fermat, através das propriedades que definem as secções cônicas, obteve suas equações.

Ptolomeu fez uso de um Teorema de Apolônio para introduzir o sistema de latitude e longitude tal como é usado hoje em cartografia.

Kepler utilizou o estudo sobre cônicas para as aplicações à ótica e à construção de espelhos parabólicos. Em 1609, Kepler edita a *Astronomia Nova*, onde apresenta a principal lei da astronomia: "os planetas descrevem trajetórias elípticas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos".

Na obra de Galileu (1632), temos mais uma aplicação das cônicas, onde ele afirma que "desprezando a resistência do ar, a trajetória de um projétil é uma parábola".

A lei da gravitação de Isaac Newton foi importante para as descobertas de Kepler e, a partir do estudo analítico das cônicas e das suas aplicações aos movimentos no espaço, possibilitou aos cientistas de hoje condições para a viagem de ida e volta à Lua.

## 4.2 Secções planas numa superfície cônica de revolução.

**Definição 4.2.1. Superfície cônica de revolução** é toda superfície gerada por uma reta  $r$ , que se move rotacionando no espaço ao redor de um eixo  $e$ , e passando sempre por um ponto  $S$  pertencente a  $e$ .

Consideremos um cone circular de vértice  $S$  e eixo  $e$  tal que suas geratrizes formam um ângulo  $\theta$  com o eixo desse cone.

Seja  $r$  uma reta rotacionando em torno do eixo  $e$ , de rotação, sendo que  $r$  e o eixo  $e$  se intersectam em um ponto  $S$ . Temos formada uma superfície cônica de revolução. O ponto  $S$  é o vértice do cone, a reta  $e$  é o eixo do cone e  $r$  é a geratriz.

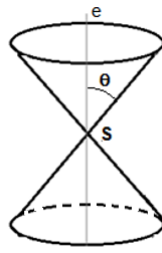
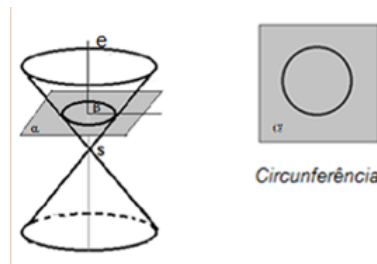


Figura 4.1 – Superfície cônica de revolução.

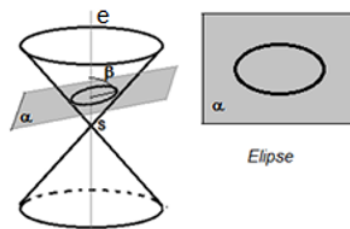
Seja  $\alpha$  um plano que secciona a superfície cônica e seja  $\beta$  o ângulo formado entre  $\alpha$  e o eixo  $e$ .

Temos algumas possibilidades para as secções desse plano com a superfície cônica, de acordo com sua posição em relação ao eixo.

(i) O plano  $\alpha$  é perpendicular ao eixo e não contém o vértice  $S$ . Neste caso a secção é uma *circunferência* com centro pertencente ao eixo.

Figura 4.2 – Secção cônica obtendo uma circunferência,  $\beta = 90^\circ$ 

(ii) O ângulo formado entre o plano  $\alpha$  e o eixo é maior que o ângulo  $\theta$ , formado pela geratriz e o eixo. E o plano  $\alpha$  não contém  $S$ . Neste caso a secção é uma *elipse*.

Figura 4.3 – Secção cônica obtendo uma elipse,  $\theta < \beta < 90^\circ$ 

(iii) O ângulo entre o plano  $\alpha$  e o eixo é menor que o ângulo  $\theta$ , entre a geratriz e o eixo e o plano  $\alpha$  não contém  $S$ . Neste caso, a secção é uma *hipérbole* a qual contém pontos das duas folhas da superfície cônica.

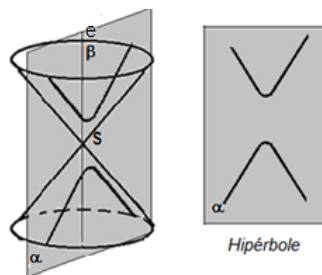


Figura 4.4 – Secção cônica obtendo uma hipérbole,  $0 \leq \beta < \theta$

(iv) O plano  $\alpha$  é paralelo a uma geratriz do cone e não contém o vértice  $S$ . Neste caso a secção é uma *parábola*.

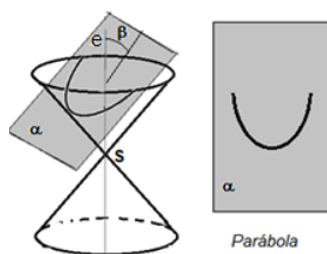


Figura 4.5 – Secção cônica obtendo uma parábola,  $\beta = \theta$

Existem outras figuras obtidas por intersecções de um plano com uma superfície cônica, como por exemplo, um ponto, se o plano for perpendicular ao eixo, passando pelo vértice; duas retas secantes no vértice e outros. Porém, abordaremos somente a elipse, a hipérbole e a parábola que são assuntos deste capítulo.

### 4.3 Secções cônicas definidas como um conjunto de pontos num plano.

**Definição 4.3.1.** Uma elipse  $\varepsilon$  é o conjunto dos pontos  $P$  no plano tais que a soma das distâncias de  $P$  a dois pontos fixos é constante. Estes pontos são chamados focos da elipse. Se a distância entre os focos é  $2c$ ,  $c \geq 0$ , a elipse é o conjunto dos pontos de forma que

$$\varepsilon = \{P/d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}, 0 \leq c < a$$

Apresentamos agora os elementos da elipse:

A reta que contém os focos  $F_1$  e  $F_2$  é chamada de **reta focal**.

Chamamos de **vértices da elipse** os pontos  $A_1$  e  $A_2$  intersecções da elipse com a reta focal e de **eixo focal** o segmento  $A_1A_2$  de comprimento  $2a$ .

O centro  $C$  da elipse é o ponto médio do eixo focal  $\overline{A_1A_2}$ , logo é equidistante dos vértices  $A_1$  e  $A_2$  e também dos focos  $F_1$  e  $F_2$ . Portanto  $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$  e  $d(C, F_1) = d(C, F_2) = c$ .

A reta que passa pelo centro  $C$  e é perpendicular à reta focal é chamada de **reta não focal**.

Chamamos de **vértices da elipse sobre a reta não focal** os pontos  $B_1$  e  $B_2$  intersecções da elipse com a reta não focal e de eixo não focal o segmento  $B_1B_2$  de comprimento  $2b$ . Assim:  $d(C, B_1) = d(C, B_2) = b$  e  $b^2 = a^2 - c^2$ .

Chamamos de  $e$  a excentricidade da elipse, dada por  $e = \frac{c}{a}$ , com  $0 \leq e < 1$ .

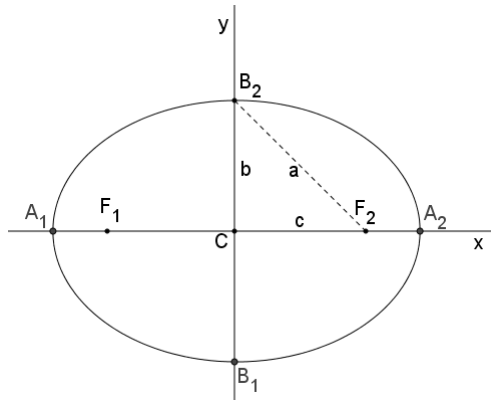


Figura 4.6 – Elipse com focos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$

Forma canônica da elipse:

(i) Elipse com centro na origem e reta focal sendo o eixo  $OX$ . Neste caso, com os focos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ , vértices  $A_1 = (-a, 0)$ ,  $A_2 = (a, 0)$ ,  $B_1 = (0, -b)$  e  $B_2 = (0, b)$  temos a equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ .

**Demonstração:** Sabemos que  $\varepsilon = \{P/d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$ ,  $0 \leq c < a$ .

Logo:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a;$$

$$\text{ou seja } \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Ou seja,  $4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ .

Simplificando:

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$(a^2 - cx)^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2].$$

Daí,

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2).$$

E então,  $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$  com  $a > c$ ,

Logo  $a^2 - c^2 > 0$  e  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ , substituindo  $b^2 = a^2 - c^2$ :  
 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ .

Simplificando ambos os membros por  $a^2b^2$ , temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(ii) Elipse com centro na origem e reta focal sendo o eixo  $OY$ .

Neste caso, temos os focos  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ , vértices  $A_1 = (0, -a)$ ,  $A_2 = (0, a)$ ,  $B_1 = (-b, 0)$  e  $B_2 = (b, 0)$ .

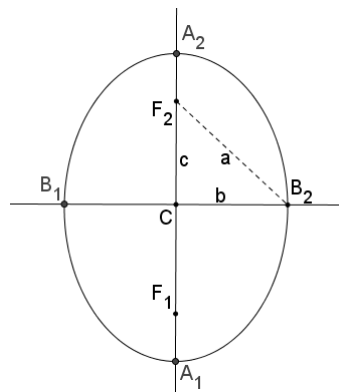


Figura 4.7 – Elipse com focos  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ .

Neste caso a equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

com  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ .

A demonstração é análoga à anterior.

### 4.3.1 Hipérbole

A hipérbole  $H$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  é o conjunto de pontos  $P$  no plano tais que o módulo da diferença de sua distância aos focos  $F_1$  e  $F_2$  é constante e menor que a distância entre os focos:

$$H = \{P / |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \} \quad 0 < a < c, \quad d(F_1, F_2) = 2c.$$

Elementos da hipérbole:

Chamamos de **reta focal** a reta que contém os focos  $F_1$  e  $F_2$ .

Chamamos de **vértices da hipérbole** os pontos  $A_1$  e  $A_2$  intersecções da hipérbole com a reta focal e de **eixo focal** o segmento  $A_1A_2$  de comprimento  $2a$ , onde:  $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$ .

O **centro**  $C$  da hipérbole é o ponto equidistante dos vértices  $A_1$  e  $A_2$  e também dos focos  $F_1$  e  $F_2$ , onde  $d(C, F_1) = d(C, F_2) = c$ .

A reta que passa pelo centro  $C$  e é perpendicular à reta focal e mediatriz de  $\overline{F_1F_2}$  é chamada de **reta não focal**. A hipérbole não intersecta a reta não focal.

Chamamos de **vértices imaginários da hipérbole** os pontos  $B_1$  e  $B_2$  que são equidistantes do centro  $C$  e pertencem a reta não focal e de **eixo não focal** o segmento  $B_1B_2$  de comprimento  $2b$ , onde:  $d(C, B_1) = d(C, B_2) = b$  e  $b^2 = c^2 - a^2$ .

Chamamos de  $e$  a **excentricidade da hipérbole**, dada por  $e = \frac{c}{a}$ , com  $e > 1$ , pois  $c > a$ .

Forma canônica da hipérbole, equação reduzida:

(i) Hipérbole com centro na origem e reta focal sobre o eixo  $OX$ .

Consideremos a hipérbole com focos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ , vértices  $A_1 = (-a, 0)$ ,  $A_2 = (a, 0)$ ,  $B_1 = (0, -b)$  e  $B_2 = (0, b)$ . Sua equação é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

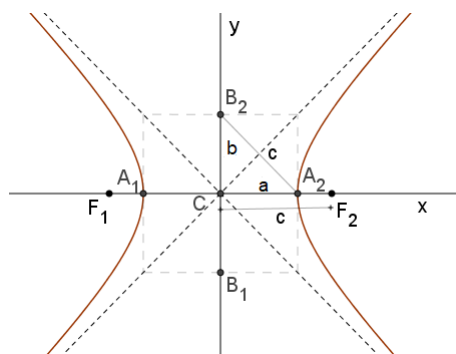


Figura 4.8 – Hipérbole com focos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ .

**Demonstração:** Sabemos que  $H = \{P/|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$ . A hipérbole é uma curva com dois ramos, quando o ponto  $P$  está no ramo da direita a diferença é positiva, quando  $P$  está no ramo da esquerda a diferença é negativa, ou seja:

$$\begin{cases} d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a \\ \text{ou} \\ d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a \end{cases}$$

Por definição temos que:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \text{ então:}$$

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a;$$

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| + 2a;$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2;$$

$$\text{ou seja, } x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2;$$

$$\text{daí obtemos: } 4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

Simplificando e elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$(cx - a^2)^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2];$$

$$\text{e então, } c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2;$$

$$\text{ou seja: } (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Substituindo  $b^2 = c^2 - a^2$ , temos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Logo,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

E as equações das assíntotas, retas para onde a curva se aproxima quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , passam pela origem e têm inclinação  $\pm \frac{b}{a}$  em relação à reta focal, são:

$$y = \pm \frac{b}{a}x \text{ ou } bx - ay = 0 \text{ e } bx + ay = 0.$$

(ii) Hipérbole com centro na origem e reta focal sobre o eixo  $OY$ .

Neste caso, temos os focos  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ , vértices  $A_1 = (0, -a)$ ,  $A_2 = (0, a)$ ,  $B_1 = (-b, 0)$  e  $B_2 = (b, 0)$ .



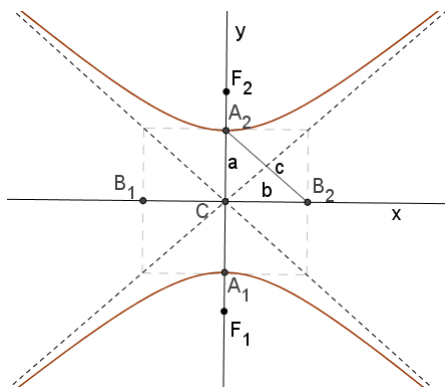


Figura 4.9 – Hipérbole com focos  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ .

Sua equação é:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

As equações das assíntotas são:  $x = \pm \frac{b}{a}y$  ou  $ax - by = 0$  e  $ax + by = 0$ .

A demonstração é análoga à anterior.

### 4.3.2 Parábola.

A parábola  $\mathcal{P}$  de foco  $F$ , é o conjunto dos pontos  $P$  no plano tais que a distância de  $P$  a  $F$  é igual à sua distância à uma reta  $L$ , chamada diretriz da parábola, ou seja:

$$\mathcal{P} = \{P/d(P, F) = d(P, L)\}.$$

Assim, a reta diretriz não contém o foco  $F$  da parábola.

Elementos da parábola:

Chamamos de **reta focal** a reta que contém o foco e é perpendicular à reta diretriz. Chamamos de **vértice da parábola** o ponto  $V$ , pertencente à reta focal tal que,  $A$  o ponto de intersecção entre a reta diretriz  $L$  e a reta focal,  $V$  é o ponto médio de  $\overline{AF}$ .

Chamamos de **parâmetro** da parábola a distância do foco  $F$  à reta diretriz  $L$ . Temos então:  $d(F, L) = 2p$ . Logo  $d(V, F) = d(V, L) = p$ .

Forma canônica da parábola:

(i) Parábola com vértice na origem, reta focal e foco sobre o eixo  $OX$ .

Teremos dois casos: concavidade voltada para direita e concavidade voltada para esquerda.

(a) Parábola com concavidade voltada para o sentido positivo do eixo  $OX$ :

Neste caso, temos o foco  $F = (p, 0)$ , o vértice  $V = (0, 0)$ , origem do sistema

cartesiano, e a reta diretriz  $L$  de equação  $x = -p$ . A equação da parábola é:

$$y^2 = 4px$$

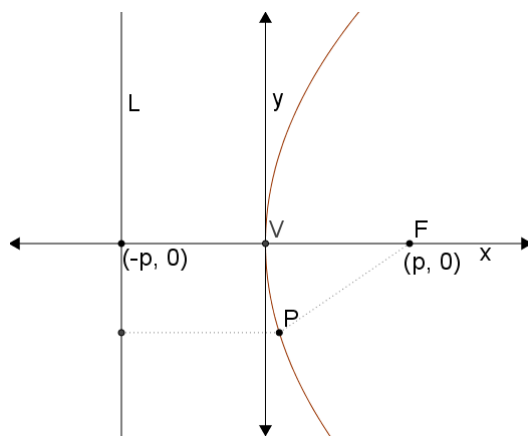


Figura 4.10 – Parábola com foco  $F = (p, 0)$ .

**Demonstração:** Sabemos que  $P = \{P | d(P, F) = d(P, L)\}$ ; ou seja:

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p|$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, temos:

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2;$$

$$\text{ou então: } x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2;$$

$$\text{Daí: } y^2 = 4px.$$

(b) Parábola com concavidade voltada para o sentido oposto ao positivo do eixo OX.

Temos o foco  $F = (-p, 0)$ , o vértice é a origem  $V = (0, 0)$  e a reta diretriz  $L$  tem equação  $x = p$ . Neste caso a equação da parábola é:

$$y^2 = -4px$$

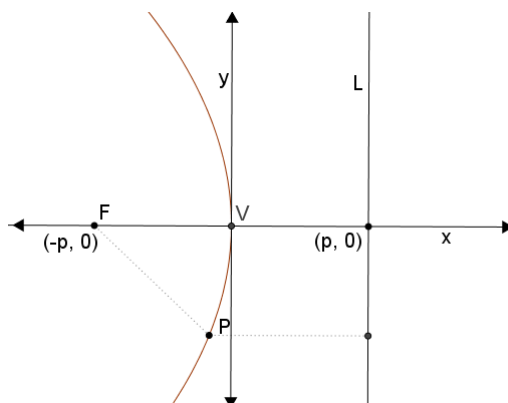


Figura 4.11 – Parábola com foco  $F = (-p, 0)$ .

A demonstração é análoga à anterior.

(ii) Parábola com vértice na origem, reta focal e foco sobre o eixo  $OY$ .

Teremos dois casos: concavidade da parábola voltada para cima ou concavidade voltada para baixo.

(a) Concavidade voltada para cima.

Neste caso, temos o foco  $F = (0, p)$ , o vértice é a origem  $V = (0, 0)$  e a reta diretriz  $L$  de equação  $y = -p$ . A equação da parábola é:

$$x^2 = 4py$$

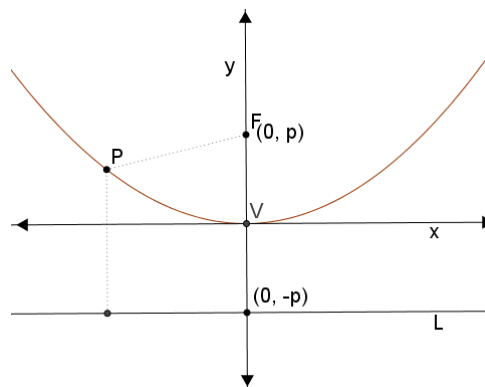


Figura 4.12 – Parábola com foco  $F = (0, p)$ .

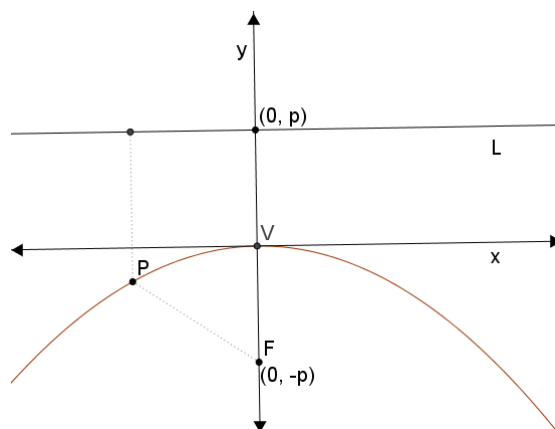
**Demonstração:** Sabemos que  $P = \{P | d(P, F) = d(P, L)\}$ , ou seja:

$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$  então, com procedimento similar ao caso anterior temos:  $x^2 = 4py$ .

(b) Concavidade voltada para baixo.

Neste caso, temos o foco  $F = (0, -p)$ , o vértice é a origem  $V = (0, 0)$  e a reta diretriz  $L$  tem equação  $y = p$ . Então a equação da parábola é:

$$x^2 = -4py$$

Figura 4.13 – Parábola com foco  $F = (0, -p)$ .

A demonstração é análoga à anterior.

## 4.4 Retas tangentes às cônicas

Neste trabalho, iremos apresentar com o uso de dobraduras, que é possível obter uma cônica, através da construção de retas tangentes a ela, e, neste caso, é necessário dobrar muitas tangentes para uma melhor observação da cônica em questão.

**Definição 4.4.1.** Uma elipse separa os pontos do plano em duas regiões: uma, onde cada ponto  $X$  satisfaz  $XF_1 + XF_2 < k$ , sendo  $k$  uma constante, cada ponto  $X$  pertence ao **interior da curva** ou seja é um ponto interior à curva e, outra onde cada ponto  $X$  satisfaz  $XF_1 + XF_2 > k$ , cada ponto  $X$  pertence ao **exterior da curva**. Neste caso, é um ponto exterior à curva.

**Definição 4.4.2.** Os dois ramos da hipérbole dividem os pontos do plano em três regiões: uma região compreendida entre os dois ramos, onde cada ponto  $X$  dessa região satisfaz,  $|XF_1 - XF_2| < k$ , sendo  $k$  uma constante, cada ponto  $X$  pertence ao **exterior da curva** e, outras duas que são internas a cada um dos ramos da hipérbole, consideremos a união dessas duas regiões de **interior da curva**. Os pontos  $X$  da região interna ao ramo que contém  $F_1$  satisfazem a desigualdade  $XF_1 - XF_2 < -k$  e os da região interna ao ramo que contém  $F_2$  satisfazem a desigualdade  $XF_1 - XF_2 > k$ .

**Definição 4.4.3.** Uma parábola separa os pontos do plano em duas regiões: uma, onde cada ponto  $X$  tem distância ao foco  $F$  menor que sua distância à reta diretriz  $L$ ,  $XF < XL$ , cada ponto  $X$  pertence ao **interior da curva** e, outra onde a distância de cada ponto  $X$  ao foco  $F$  é maior que a distância à reta diretriz  $L$ ,  $XF > XL$ , cada ponto  $X$  pertence ao **exterior da curva**.

**Definição 4.4.4** As retas que têm somente um ponto de intersecção com uma cônica e não contém pontos interiores da cônica pertencentes a elas, são retas tangentes à cônica.

**Teorema 4.4.5. *Reta tangente à elipse*** A bissetriz do ângulo formado pelo segmento com extremidades em um dos focos e um ponto  $P$  da elipse e o prolongamento do outro segmento com extremidades no outro foco e no ponto  $P$ , é tangente à cônica no ponto  $P$ .

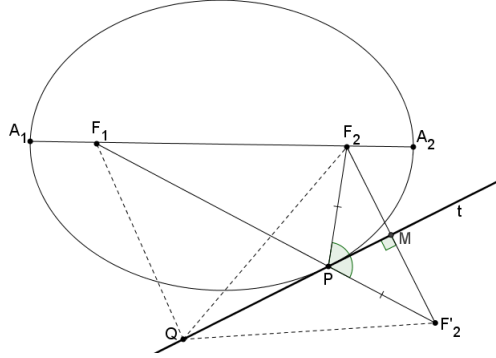


Figura 4.14 – Demonstração: reta tangente a cônica no ponto  $P$ .

**Demonstração:** Seja  $t$  a reta bissetriz de  $\angle F_2PF'_2$  com  $\overline{PF'_2} \equiv \overline{PF_2}$ . Da definição de elipse temos:

$$PF_1 + PF'_2 = PF_1 + PF_2 = 2a.$$

Ou seja,  $F_1F'_2 = 2a$ .

Considere  $Q$  um ponto de  $t$  distinto de  $P$ . Temos  $\triangle QPF_2 \equiv \triangle QPF'_2$  pelo caso L.A.L. de congruência pois,  $\overline{QP}$  é lado comum,  $\angle QPF_2 \equiv \angle QPF'_2$  uma vez que  $t$  é bissetriz e  $\overline{PF_2} \equiv \overline{PF'_2}$ . Obtemos que:

$$\overline{QF_2} \equiv \overline{QF'_2} \tag{4.1}$$

De acordo com a desigualdade triangular, a medida do comprimento de um lado do triângulo é sempre inferior à soma das medidas dos outros dois lados. Logo, no  $\triangle QF_1F'_2$  temos:

$$QF_1 + QF'_2 > F_1F'_2 = 2a.$$

Logo, de acordo com 4.1,  $QF_1 + QF_2 > 2a$ .

Isto prova que o ponto  $Q$  não é ponto interior à elipse e também não pertence a ela. Logo, a reta  $t$  é tangente à elipse em  $P$ .

**Teorema 4.4.6. *Reta tangente à hipérbole*** A bissetriz do ângulo formado pelo segmento com extremidades em um dos focos e um ponto  $P$  da hipérbole e o outro segmento com extremidades no outro foco e no ponto  $P$ , é tangente à cônica no ponto  $P$ .

**Demonstração** Procedendo de maneira análoga ao caso da elipse, pela desigualdade triangular, no  $\triangle QF_1F'_2$ , temos:  $|QF_1 - QF'_2| < F_1F'_2 = 2a$ .

Portanto, devido a 4.1,  $|QF_1 - QF_2| < 2a$ .

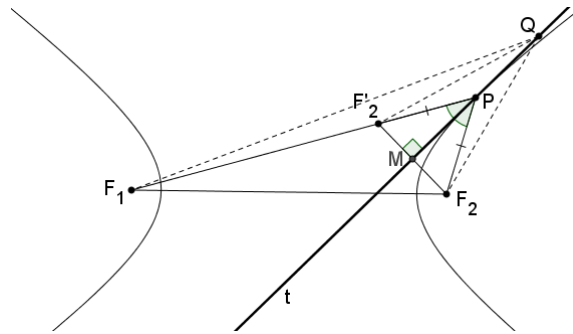


Figura 4.15 – Reta tangente à hipérbole em um ponto  $P$ .

Logo,  $Q$  não é ponto interior à hipérbole e não pertence a ela. Assim, a reta  $t$  é tangente à hipérbole.

**Teorema 4.4.7. Reta tangente à parábola** *Seja um ponto  $P$  pertencente à parábola de foco  $F$  e reta diretriz  $L$ . A bissetriz do ângulo formado  $FPF'$ , com  $F'$ , sendo a intersecção da reta diretriz  $L$  com a perpendicular a ela passando por  $P$ , é tangente à cônica nesse ponto.*

**Demonstração:** Seja  $t$  a reta bissetriz do ângulo  $\angle FPF'$ .

Seja  $Q$  um ponto pertencente à  $t$ , distinto de  $P$ . Pelo caso L.A.L., temos que  $\triangle FPQ \cong \triangle F'PQ$ . Assim:

$$\overline{QF} \equiv \overline{QF'} \tag{4.2}$$

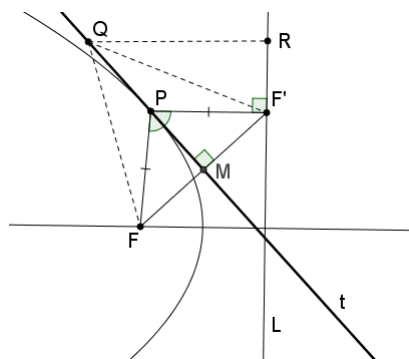


Figura 4.16 – Reta tangente à parábola em um ponto  $P$ .

Considere a perpendicular do ponto  $Q$  à diretriz  $L$ , obtendo sobre a diretriz um ponto  $R$ . No  $\triangle QF'R$ , retângulo em  $R$ , tem-se que  $QF' > QR$  pois,  $QF'$  é hipotenusa do triângulo retângulo.

Mas, por 4.2, temos que,  $QF > QR$ , provando que  $Q$  não pertence à parábola e não é ponto interior a ela. Assim,  $P$  será o único ponto pertencente à parábola e à reta  $t$ . Portanto,  $t$  é a tangente à parábola no ponto  $P$ .

## 4.5 Aplicações

### 4.5.1 Elipses: propriedade da reflexão.

A propriedade de reflexão da elipse, permite que seu formato seja utilizado em vários objetos do dia a dia. Essa propriedade nos diz que, traçando um segmento de reta a partir de um dos focos e esse segmento intersecciona a elipse num ponto  $P$ , se traçarmos outro segmento passando pelo outro foco e interseccionando a elipse no mesmo ponto  $P$ , o ângulo formado entre o primeiro segmento e a curva é igual ao ângulo entre o segundo segmento e a curva.

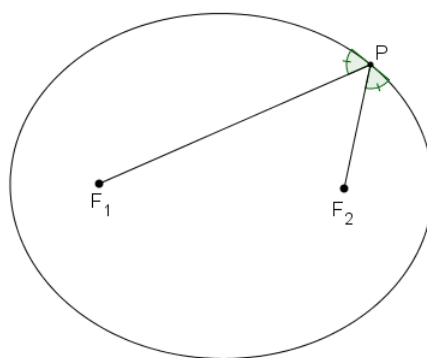


Figura 4.17 – Aplicação 4.5.1.

Um exemplo de aplicação desta propriedade da elipse, são algumas fontes de iluminação, como as utilizadas por dentistas e na medicina em alguns aparelhos para emissão de raios, como por exemplo, o de radioterapia. Além disso, em Astronomia as órbitas de satélites e planetas são elipses. Elas também são usadas para fazer engrenagem de máquinas e pontes.

A iluminação utilizada por dentistas, consiste em uma região de rotação de um arco da elipse, com a parte interior espelhada, onde a lâmpada é o foco mais próximo. Quando a luz da lâmpada reflete no espelho, ela é direcionada para o outro foco, ou seja, para um único ponto.

Esta técnica permite que a luz ou raio se concentre no objeto de trabalho. No caso do de dentista, também impede que a luz incomode o paciente. Em radioterapia, permite que a luz concentre-se somente no local de tratamento, sem afetar partes sadias próximas ao local de tratamento.

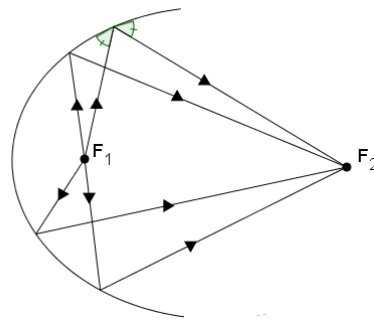


Figura 4.18 – Propriedade de reflexão da elipse: fontes de iluminação.

Uma outra curiosa aplicação aparece em museus americanos de ciências, em edifícios públicos Europeus e em castelos de monarcas europeus. Conhecida como sala dos murmúrios ou sussurros, são construções que têm a forma de meia rotação da elipse sobre seu eixo, nesta sala são marcados dois pontos, duas pessoas podem se comunicar através de sussurros estando cada uma delas nestes pontos, sem que nenhuma outra pessoa na sala consiga ouvir.

Os pontos onde as pessoas devem ficar são os focos da elipse, pela propriedade da reflexão, quando a pessoa sussurra, o som reflete na parede da sala diretamente para o outro foco e, como já visto, a soma da distância entre um ponto qualquer da elipse aos focos é sempre a mesma, então o tempo que a onda sonora leva ir de um foco a outro é o mesmo sempre.

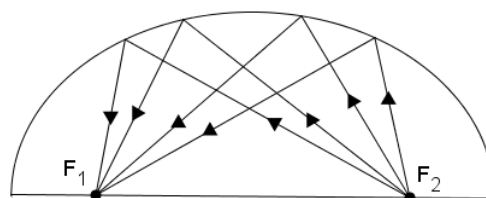


Figura 4.19 – Propriedade de reflexão da elipse: sala dos sussurros.



Figura 4.20 – Galeria dos sussurros.



### 4.5.2 Parábolas.

No Ensino Médio, associamos parábola com o gráfico da função quadrática. Mais tarde, ela é associada às cônicas. Em meio ao processo de aprendizagem, podemos relacionar a parábola com vários objetos de grande utilidade que fazem parte de nosso cotidiano.

Alguns exemplos são: antenas parabólicas, faróis de automóveis e lentes de telescópios.

No caso das antenas parabólicas e das lentes de telescópio, eles possuem o formato parabólico para captar melhor as ondas de rádios, TV e a luz. Isso acontece porque estas ondas são fracas, é necessária uma área grande que tenha função de captar essas ondas e direcionar para um único ponto. A superfície das antenas e dos espelhos tem essa função, onde seu formato, através da reflexão, direciona as ondas a um único ponto.

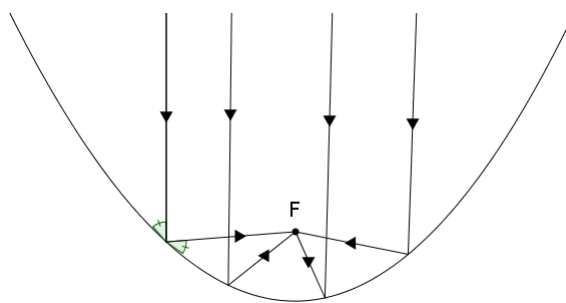


Figura 4.21 – Propriedade reflexiva da parábola.

Como já vimos, a parábola possui apenas um foco e, todo raio a partir de seu foco, ao incidir sobre a própria parábola, reflete raios paralelos ao eixo. No caso da antena parabólica, os raios que incidem paralelamente ao eixo refletem sobre o receptor. O ângulo de incidência é o mesmo de reflexão.

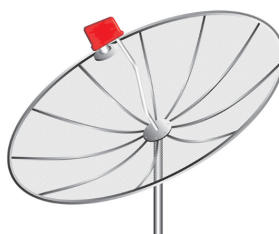


Figura 4.22 – Antena parabólica.

Observe que, a antena parabólica é uma superfície obtida através da rotação da parábola ao redor de seu eixo. O receptor funciona como foco, onde os raios e ondas são refletidos, ampliando assim sua força.

No caso dos faróis automotivos, o princípio é o mesmo das antenas parabólicas, porém de forma contrária. No centro do farol se encontra uma lâmpada que funciona como foco, emitindo luz que reflete na superfície do farol. Essa superfície é obtida através da rotação da parábola sobre seu eixo, emitindo mais raios de luz, ampliando a iluminação da lâmpada.

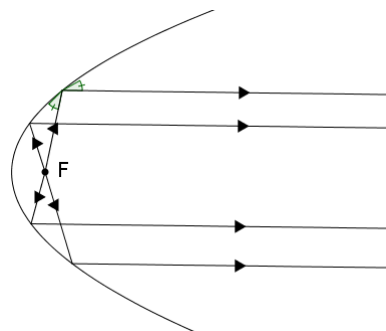


Figura 4.23 – Propriedade reflexiva da parábola: faróis automotivos.

### 4.5.3 Hipérboles.

As hipérboles são utilizadas para construção de telescópios, sistemas de navegação e alguns cometas movem-se em órbita hiperbólica.

A hipérbole também tem propriedade reflexiva: supondo uma reta que intersecciona um ramo da hipérbole em  $P$  passando pelo foco  $F_2$ , se traçarmos outra reta passando por  $P$  que faça com o ramo da hipérbole o mesmo ângulo que a reta anterior, esta reta passará pelo outro foco,  $F_1$ . Essa propriedade é utilizada em lentes de telescópios, como veremos a seguir.

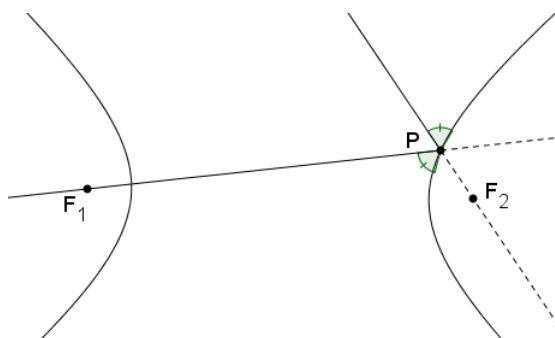


Figura 4.24 – Propriedade reflexiva da hipérbole.

Alguns telescópios utilizam de lentes hiperbólicas, eles funcionam da seguinte forma: existem dois espelhos, um parabólico e um hiperbólico que possuem o mesmo eixo e os focos são os mesmos, o espelho parabólico é maior e fica entre os ramos da hipérbole. Quando os raios de luz refletem no espelho parabólico eles são direcionados ao foco, pela propriedade já vista. Neste caso, como a hipérbole e a parábola têm os mesmos focos, pela

propriedade de reflexão da hipérbole, os raios refletem e seguem em direção ao outro foco da hipérbole.

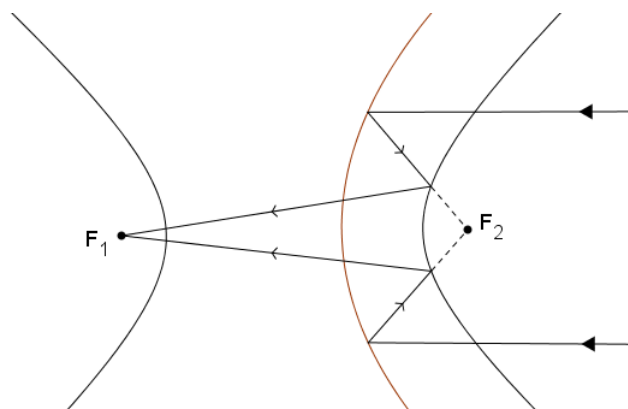


Figura 4.25 – Propriedade reflexiva da hipérbole: lentes hiperbólicas.

Os raios de luz ao chegar em outro foco, em uma superfície que consiste em um espelho com um orifício, passam por uma lente ocular que corrige a trajetória da luz e chega aos olhos do observador.

### Construção utilizando dobraduras

Esta construção está de acordo com [MARTIN] [20], p. 158.

Faremos aqui uma construção utilizando dobraduras. No próximo capítulo vamos falar sobre a Geometria do Origami e sua relação com a Geometria Euclidiana, porém a construção a seguir pode ser realizada sem a leitura do próximo capítulo.

#### Construção de pontos pertencentes a uma parábola.

Em uma folha de papel com pauta marque um ponto  $F$  no centro da folha.

Faça uma dobra levando a extremidade da linha da parte inferior da folha sobre o ponto  $F$ , desdobre. Marque a intersecção da linha com a dobra feita. Repita o procedimento várias vezes.

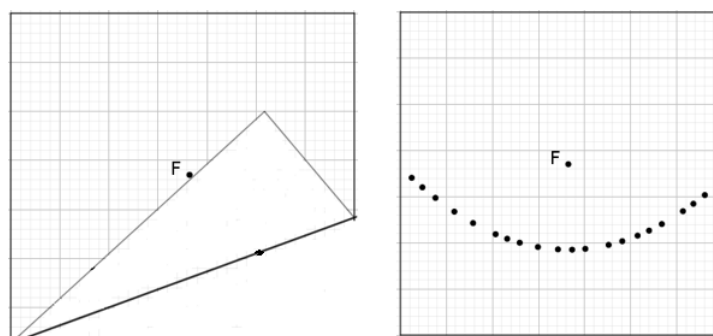


Figura 4.26 – Construção da envoltória de uma parábola.

Podemos observar que os pontos de intersecção são pontos de uma parábola de foco  $F$  e reta diretriz representada pelo lado inferior da folha. As dobras são retas tangentes à parábola nesses pontos.

Nos próximo capítulo vamos falar sobre o Origami, sua história, seus Axiomas, definições e algumas aplicações. No último Capítulo encontram-se várias atividades semelhantes a esta, atividades com Origami para sala de aula, encontra-se a atividade 6.5.6, p. 191 relacionadas às cônicas.

## 5 Origami e a Geometria

Neste capítulo vamos apresentar a relação entre o Origami e a Geometria. Começando com um pouco de história desta arte antiga e de sua chegada ao Brasil, assim como as primeiras relações feitas com a Geometria e alguns dos diversos modelos.

A relação entre Origami e Matemática quando analisada mais detalhadamente e comparada à Geometria Euclidiana observaremos que as construções com dobraduras irão um pouco além da Geometria Euclidiana.

### 5.1 Um pouco de história

Esta seção está de acordo com [HAYASAKA] [13], [14], [15], [KANEGAE] [17] e [SHENG] [30].

**ORIGAMI** é a arte de dobrar e produzir figuras e objetos com papel, não sendo permitido rabiscar, cortar e colar o mesmo. A palavra japonesa Origami, composta do verbo dobrar (ori) e do substantivo papel (kami), significa literalmente, "dobrar papel".

Pessoas que se dedicam a estudar e produzir origamis são conhecidas como origamistas. Os origamistas se inspiram em objetos e na natureza, transformando papel em arte.

Não se sabe ao certo sua origem, há indícios que sua origem tenha sido logo após a invenção do papel. *"O papel seria inventado na China 105 anos depois de Cristo (d.C.), por T'sai Lun. Ele fez uma mistura umedecida de casca de amoreira, cânhamo, restos de roupas, e outros produtos que contivessem fonte de fibras vegetais. Bateu a massa até formar uma pasta, peneirou-a e obteve uma fina camada que foi deixada para secar ao sol. Depois de seca, a folha de papel estava pronta! A técnica, no entanto, foi guardada a sete chaves, pois o comércio de papel era bastante lucrativo. Somente 500 anos depois de o papel ter sido inventado, os japoneses conheceram o papel graças aos monges budistas coreanos que lá estiveram."*<sup>1</sup>

O papel japonês era conhecido como washi. No início o papel era um artigo de luxo e poucas pessoas tinham acesso a ele, em geral só a realeza. Com o origami não foi diferente, inicialmente somente a realeza tinha acesso a esta arte.

Na prática do origami é permitido praticamente tudo com o papel, exceto recortar, colar e rabiscar.

---

<sup>1</sup>Enio Yoshinori Hayasaka e Silvia Mitiko Nishida. Fonte: <[http://www2.ibb.unesp.br/Museu\\_Escola/Ensino\\_Fundamental/Origami/Documentos/indice\\_origami\\_papel.htm](http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami_papel.htm)>

Por volta do século XIV, a prática do origami só era permitida em cerimônias religiosas e festivas; usavam, por exemplo, a figura de duas borboletas, uma macho e outra fêmea, em garrafas de saquê para representar os noivos. Quando uma pessoa falecia, eram feitos origamis em forma de objetos pessoais da pessoa. Havia o noshi que era colocado em presentes de grande valor, simbolizando fortuna.

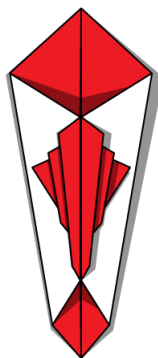


Figura 5.1 – Noshi

A cultura e prática do origami eram passadas de mãe para filho. Os primeiros escritos com instruções sobre a prática do origami datam de 1797 do livro “Senbazaru Oriката”(Como Dobrar Mil Garças), de Akisato Rito, no período Edo ou Tokugawa (1603 – 1867). Foi quando o origami se popularizou. O grande símbolo do origami é o tsuru ou grou, ave sagrada no Japão, que devido a sua longevidade é símbolo de boa sorte, prosperidade e saúde. Existem várias lendas em torno do tsuru, como exemplos: um tsuru pode viver até mil anos ou, que quem conseguir fazer mil tsurus de origami, com o pensamento centrado em um desejo, terá o desejo realizado ao fim do trabalho.



Figura 5.2 – Tsuru.

No século seguinte o origami passou a ser disciplina curricular no Japão.

A primeira coleção de figuras do origami foi publicada em 1845, conhecida como Kan no Mado ou Kayaragusa, de Adachi Kazuyuki, com cerca de 70 modelos de origami.

Originalmente, para construir origamis, usavam-se papel quadrado ou retangular, hoje o mais utilizado é o quadrado. Os mouros, população de origem do norte da

África, convertidos ao islamismo, também praticavam com excelência a arte de dobrar papel, chamando-a de papiroflexia, influenciando a cultura espanhola. No entanto, Koshiro Hatori, que formalizou o sétimo axioma de dobras do origami, achava que havia grande diferença entre as formas básicas de dobrar o origami dos japoneses e dos mouros.

Nas décadas de 50 e 60, o origami se popularizou em todo mundo, principalmente nos EUA, e lá surgiram dois tipos de origamistas: os que praticavam a forma oriental, voltada à cultura e arte e as ocidentais praticada por matemáticos, arquitetos e engenheiros, que utilizam a prática do origami não só como arte, mas também como base de seus trabalhos acadêmicos.

Entre os estudiosos atuais do origami está Robert J. Lang, físico e engenheiro, realizou vários estudos acerca do origami, estuda a arte há mais de quarenta anos, criou o programa computacional TreeMaker, para executar construções de origamis com precisão matemática, hoje usado também por engenheiros e arquitetos. Lang é um dos pioneiros a relacionar origami e matemática. É um dos raros colonistas ocidentais para *Origami Tanteidan Magazine*, a revista da *Sociedade Acadêmica de Origami do Japão*.

A arte do Origami no Brasil teve duas origens: através da Argentina que possui influência dos espanhóis e outra, através dos imigrantes japoneses e sua cultura. Como exemplo, temos a Professora Yachiyo Koda, que ensinou origami oficialmente pela Aliança Cultural Brasil-Japão e com apoio do Consulado Geral do Japão em SP, em várias cidades do Brasil.

### 5.1.1 Modelos de Origami

A arte do Origami foi se aperfeiçoando durante os séculos, e assim surgiram muitas técnicas a fim de embelezar e desafiar os praticantes desta arte, tornando-a mais atrativa e significativa, práticas onde podemos construir verdadeiras esculturas de papel. Veja algumas destas técnicas:

Tradicional: feito somente com uma folha de papel, sem recortes ou colagens.

Modular: feito da junção de vários origamis tradicionais, o origamista dobra alguns origamis e depois junta as partes chegando a forma desejada.

Kusudama: usa técnica do origami modular, em forma de uma bola com franjas ou fios com pingentes. É usado para enfeitar o ambiente ficando pendurado.

Block folding (bloco de dobraduras): também usa técnica do origami modular, mas são usados somente triângulos, com a junção desses triângulos são formadas figuras tridimensionais.

Tessellation: é como desenhar em um papel usando somente dobras, esses desenhos são figuras geométricas como quadrados, triângulos e hexágonos.

Wet folding (dobradura molhada): após o origami pronto, o papel é molhado para facilitar a sua modelagem ou curvatura, dando mais vida a peça. Para molhar o papel é usada uma esponja ou um borrifador.

Crease Pattern (padrão de dobras): é como um quebra-cabeças de origami. Consiste em um papel onde estão somente marcadas as dobras, (como se um origami fosse desfeito sobrando somente as dobras no papel) para que seja dobrado e forme um origami. Requer bastante habilidade, geralmente é acompanhado da foto do origami desejado.

Os modelos que se seguem são variações do origami, uma vez que envolvem ações proibidas no origami tradicional como recortes e colagem.

Kirigami (origami arquitetônico): usa técnica do origami tradicional, mas também aceita cortes. Esta junção de cortes e dobras pode gerar uma forma plana ou tridimensional. Foi criado por um professor da Universidade de Tecnologia de Tóquio e arquiteto, Masahiro Chatani (1891).

Paper Craft (trabalho de papel): usa técnica do origami modular, porém o papel além de dobrado é cortado e colado para a junção das partes.

Oribana: usa técnica do origami juntamente com a técnica do ikebana (arte de construir flores orientais), consiste em confeccionar flores e vasos com papel.

### 5.1.2 O Origami e a Matemática

Na Europa, em 1837, foi fundada a primeira escola de jardim de infância pelo pedagogo alemão Friedrich Froebel. Ele foi pioneiro em usar as dobraduras como ferramenta educacional, relacionando dobraduras e geometria.

Podemos perceber que, apesar de em todos os séculos sendo explorado somente como arte, é bem recente a combinação dobradura e matemática, sendo usada para trabalhos acadêmicos, uma vez que podemos usar o origami para descrever fenômenos da natureza, como por exemplo o batimento das asas de um pássaro. O origami passou então a ser explorado pelos padrões matemáticos que observavam em suas dobraduras.

Na Matemática, o origami é relacionado à Geometria Euclidiana, Geometria Combinatória e Topologia.

Um dos princípios matemáticos do origami é o Teorema de Kawasaki, ele diz que: a soma dos ângulos alternados, formados em torno de um único vértice de uma dobradura do origami desdobrado, formam sempre  $180^\circ$ .

Outra propriedade importante, aplicado ao origami tradicional de figuras planas, diz que desdobrado consegue-se pintar os polígonos formados pelas dobras, de duas cores diferentes, sem que polígonos adjacentes tenham a mesma cor, como na figura.



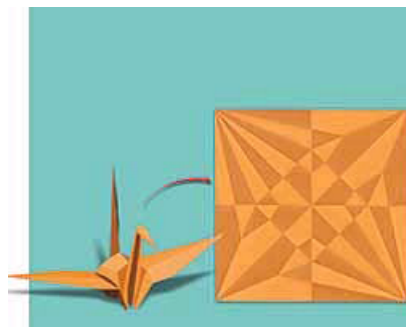


Figura 5.3 – Tsuru e sua forma desdobrada.

## 5.2 Construções elementares e Axiomas de Huzita-Hatori

Os primeiros estudos sobre as técnicas de dobras fundamentais do Origami relacionando-as à geometria, surgiram na década de 70. Humiaki Huzita, em 1989, matemático ítalo japonês, destacou seis operações básicas, que sobrepõem e refletem pontos e retas através de uma única dobra no papel. Neste mesmo ano, Jacques Justin publicou sete operações básicas feitas somente com uma dobra de papel, esta sétima operação foi formalizada somente no ano de 2002 pelo matemático japonês Koshiro Hatori.

Estas sete operações são hoje conhecidas como Axiomas de Huzita-Hatori. Mesmo depois de publicadas e consideradas completas, ainda havia dúvidas sobre a existência de mais axiomas para tornar a lista realmente completa. Somente em 2003, o físico e engenheiro americano Robert J. Lang, publica um artigo, “*Origami and Geometric Constructions*” (Origamis e construções geométricas) [18], provando então a completude da lista.

Todas as construções envolvem linhas retas (dobras) e reflexão de pontos de um plano a outro em relação às retas. Estas construções podem ser apresentadas em todas as séries no ciclo II do Ensino Fundamental ou no Ensino Médio, ou revisadas, quando se achar necessário.

É importante professor e alunos entenderem e praticarem estas construções, pois elas serão a base da maioria das atividades propostas nesse trabalho. Para fazer as construções com Origami utilizamos uma folha de papel, a qual, para descrever estas construções consideraremos como um plano.

A ferramenta básica do Origami é a reta, o ato de dobrar representa a construção de uma reta e com duas retas não paralelas ou dobras múltiplas obteremos os pontos.

### 5.2.1 Axiomas de Huzita-Hatori

A seguir apresentaremos os Axiomas de Huzita-Hatori, que são estruturados por sete combinações de alinhamentos representadas por dobras em um papel.

Toda dobra feita representa uma reta que divide o papel em dois semiplanos. Ao dobrarmos o papel os pontos de um semiplano são refletidos no outro semiplano, ou seja, um ponto  $P$  de um semiplano é refletido de forma simétrica ao outro semiplano. A distância do ponto  $P$  à reta é a mesma distância de seu simétrico  $P'$  à reta, logo a reta é mediatriz do segmento  $PP'$ .

Ao dobrarmos duas retas não paralelas, obtemos um ponto, que é intersecção destas retas.

Assim, combinando estas dobras, obtemos construções elementares do Origami: paralelas, perpendiculares, mediatrizes e bissetrizes.

**Axioma I.** Dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$  existe apenas uma dobra que passa por eles.

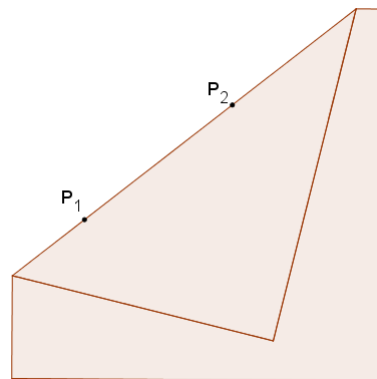


Figura 5.4 – Axioma I de Huzita-Hatori

**Axioma II.** Dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$ , existe apenas uma dobra que coloca  $P_1$  sobre  $P_2$ .

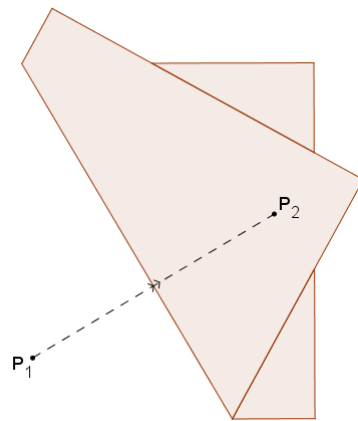


Figura 5.5 – Axioma II de Huzita-Hatori

**Axioma III.** Dadas as retas  $r_1$  e  $r_2$ , existe uma dobra que coloca  $r_1$  sobre  $r_2$ .

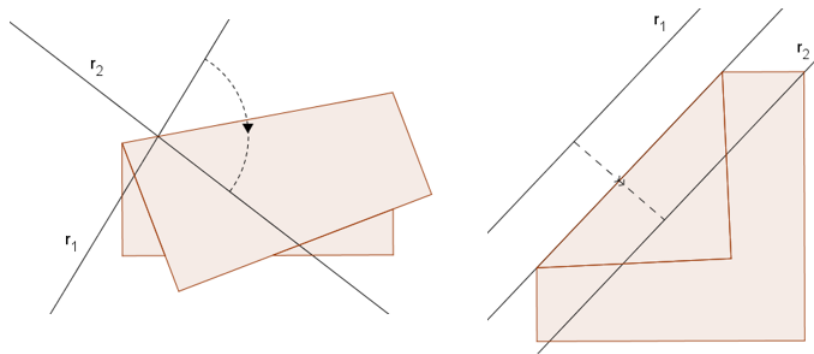


Figura 5.6 – Axioma III de Huzita-Hatori

**Axioma IV.** Dados um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , existe uma dobra única que é perpendicular à  $r$  e que passa por  $P$ .

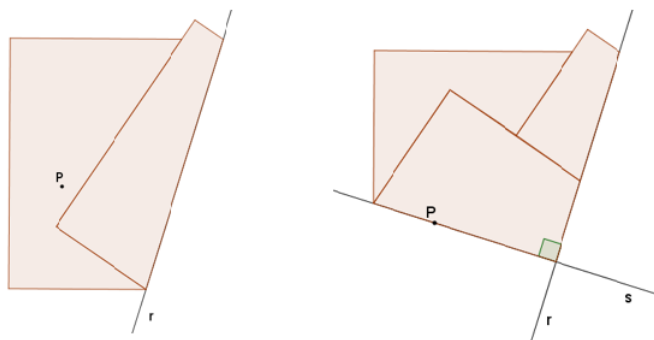


Figura 5.7 – Axioma IV de Huzita-Hatori

**Axioma V.** Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e uma reta  $r_1$ , se a distância de  $P_1$  a  $P_2$  for igual ou superior à distância de  $P_2$  a  $r_1$ , existe uma dobra que coloca  $P_1$  sobre  $r_1$  e que passa por  $P_2$ .

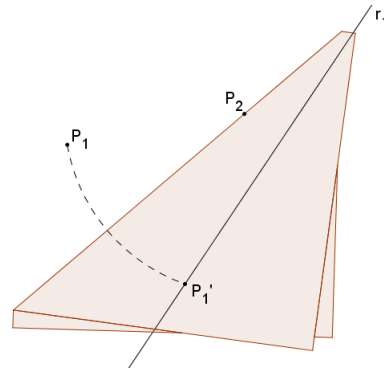


Figura 5.8 – Axioma V de Huzita-Hatori

**Axioma VI.** Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e duas retas  $r_1$  e  $r_2$ , se as retas forem concorrentes ou, se forem paralelas e a distância entre elas não for superior à distância entre os pontos, existe uma dobra que leva simultaneamente  $P_1$  sobre  $r_1$  e  $P_2$  sobre  $r_2$ .

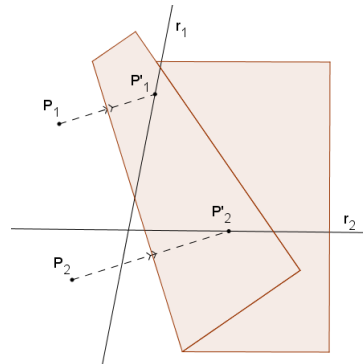


Figura 5.9 – Axioma VI de Huzita-Hatori

**Axioma VII.** Dados um ponto  $P_1$  e duas retas  $r_1$  e  $r_2$ , se as retas não forem paralelas, existe uma dobra que coloca  $P_1$  sobre  $r_1$  e que é perpendicular à  $r_2$ .

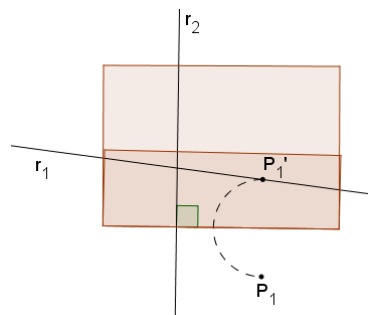


Figura 5.10 – Axioma VII de Huzita-Hatori

De acordo com [MATTOS] [21]:

**Definição 5.2.1.** Um número  $\alpha$  é dito construtível se, através de procedimentos baseados em uma geometria, podemos construir um segmento de reta de comprimento  $\alpha$ . Se temos

as construções Euclidianas tradicionais,  $\alpha$  será construtível apenas se o segmento pode ser obtido com uso de régua e compasso. Se temos a geometria Origami,  $\alpha$  será construtível apenas se o segmento puder ser obtido com uso de dobraduras no papel.

Cada construção é possível devido à estrutura desse conjunto de axiomas; cada novo axioma é a extensão do anterior. Partimos dos axiomas mais elementares que são construções possíveis também com régua não graduada e compasso e são acrescentados os axiomas que irão além dessas construções, como a construção de raízes cúbicas. Vejamos:

Axioma I: é a construção de uma reta que passa por dois pontos, o que é equivalente a resolução de equações do primeiro grau.

Axioma II: é a construção da mediatriz que é perpendicular a um segmento de reta definido por dois pontos; também sendo equivalente à resolução de equações do primeiro grau.

Axioma III:

i) a construção da bissetriz de duas retas concorrentes definidas.

ii) é a construção de uma reta paralela as duas retas paralelas definidas ou;

É equivalente a resolução de equações do primeiro grau.

Axioma IV: é a construção de uma perpendicular, através de uma reta e um ponto definidos.

Axioma V: é a construção da reta tangente à parábola de foco  $P_1$  e reta diretriz  $r_1$ , ver Capítulo 4, construção da parábola. Neste caso, é equivalente à resolução de equações quadráticas. Esse axioma junto com os anteriores torna possível as construções da Geometria Euclidiana usando dobras em um papel.

Axioma VI: é a construção de uma reta tangente a duas parábolas distintas. Utiliza a ideia de intersecção de cônicas. Permite a construção de raízes cúbicas, tornando possível a resolução do problema da duplicação do cubo, que veremos posteriormente de modo alternativo com dobraduras, e a resolução de equações cúbicas ou de quarto grau.

Axioma VII: é a construção de uma perpendicular, sendo definidos um ponto e duas retas não paralelas; é equivalente a resolução de equações do primeiro grau.

As demonstrações dessas equivalências encontram-se em [MONTEIRO] [22], p. 11.

O conjunto dos axiomas de I a VII permite construir o corpo dos números do Origami, caso o leitor queira se aprofundar no assunto, ver [MATTOS] [21]. As construções possíveis com esses axiomas vão além das construções da Geometria Euclidiana, uma vez que permitem a construção de raízes cúbicas e a resolução de equações de grau maior que dois.

### 5.2.2 Algumas construções decorrentes

Veremos aqui algumas construções elementares da Geometria Euclidiana e também da Geometria do Origami.

**Construção 1:** Dada uma reta  $r$  e um ponto não pertencente a ela, construir por esse ponto uma dobra paralela a  $r$ .

i) Com o uso do Axioma IV;

Sejam dados uma reta  $r$  e um ponto  $P$ , não pertencente a ela.

Pelo Axioma IV, podemos construir uma única dobra perpendicular à reta  $r$  passando por  $P$ . Por essa dobra, obtemos a reta  $s$ , que encontrará  $r$  no ponto  $S$ .

Novamente pelo Axioma IV, é possível obter uma única dobra perpendicular à reta  $s$ , passando por  $P$ . Denotemos essa dobra por  $t$ . Afirmamos que  $t$  é paralela a  $r$ .

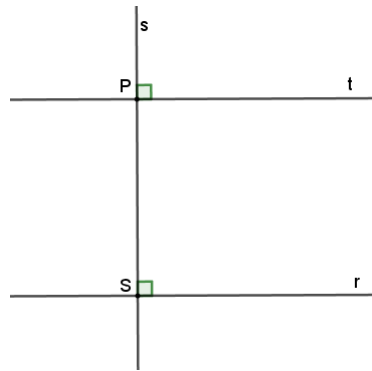


Figura 5.11 – Construção de uma dobra paralela a uma reta  $r$  dada passando por um ponto  $P$  não pertencente a  $r$ .

De fato, vamos mostrar que  $r \cap t$  é vazio.

Se as retas  $r$  e  $t$  não fossem paralelas, haveria um ponto  $Q$ , de intersecção das duas o qual formaria, com  $P$  e  $S$  um triângulo com dois ângulos retos, o que não pode ocorrer já que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ . Logo, não é possível obter o ponto  $Q$  nessas condições. Assim, as retas são paralelas.

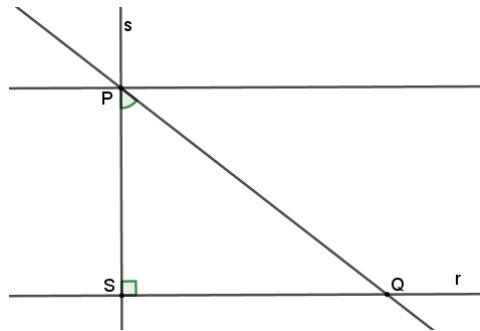


Figura 5.12 – Construção de uma dobra paralela a uma reta  $r$  dada passando por um ponto  $P$  não pertencente a  $r$ .

ii) sem o uso do Axioma IV.

Sejam dados a reta  $r$  e o ponto  $P$ , fora dela. Marque dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , na reta  $r$  e, com o ponto  $P$ , usando o Axioma I, construa o triângulo  $PAB$ .

Com a dobra que leva  $A$  em  $B$ , pelo Axioma II, obtenha o ponto  $C$ , ponto médio de  $\overline{AB}$ .

De modo análogo, obtenha os pontos  $D$  e  $E$ , respectivos pontos médios dos lados  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$ .

Temos, pelo Teorema da Base Média do Triângulo,  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$  e  $\overline{CE} \parallel \overline{AP}$ , p 39 seção 1.3.

Construa a reta  $CE$ .

Obtenha o ponto  $Q$ , ponto médio de  $\overline{PE}$ .

Obtenha a reta  $DQ$ .

As retas  $CE$  e  $DQ$  se intersectam no ponto  $F$ . Construa a reta  $PF$  e denote-a por  $t$ .

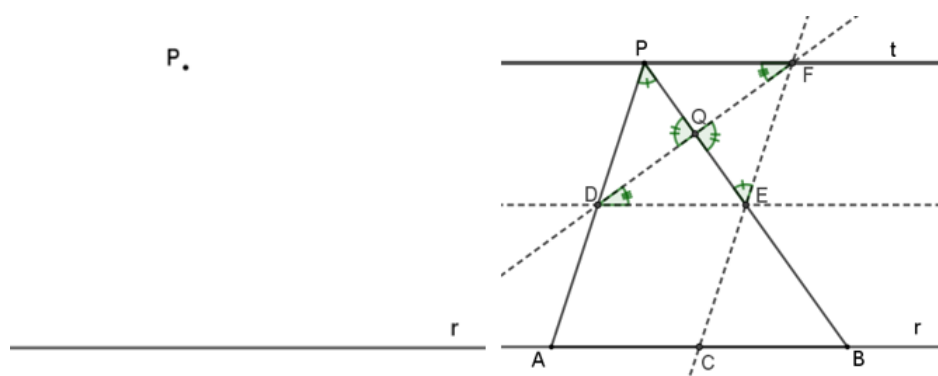


Figura 5.13 – Construção de uma dobra paralela a uma reta  $r$  dada passando por um ponto  $P$  não pertencente a  $r$ .

Temos:

$\triangle PQD \equiv \triangle EQF$ , pelo caso A.L.A., pois:

$\angle DPQ \equiv \angle FEQ$ , alternos internos pelas paralelas  $\overline{AP}$  e  $\overline{CE}$ , e a transversal  $\overline{PB}$ ;  $\overline{QP} \equiv \overline{QE}$  por construção e  $\angle PQD \equiv \angle EQF$ , pois são ângulos opostos pelo vértice.

Logo,  $\overline{QF} \equiv \overline{QD}$  e  $\overline{QP} \equiv \overline{QE}$ . Daí temos  $\triangle PQF \equiv \triangle EQD$ , pelo caso L.A.L.

Logo temos  $\angle PFQ \equiv \angle EDQ$  e então,  $\overline{PF} \parallel \overline{DE}$ .

Como tínhamos  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ , segue que a reta  $t$  é paralela à reta  $r$  e passa por  $P$ .

Podemos agora desenvolver a seguinte construção do segmento congruente e paralelo a um segmento dado, passando por um ponto dado.

**Construção 2:** Construção de segmentos paralelos e congruentes:

Sejam dados um segmento  $AB$ , e um ponto  $P$ . Se  $P$  não pertence à reta  $AB$ , podemos construir dois segmentos paralelos e congruentes a  $\overline{AB}$ , tendo  $P$  como uma de suas extremidades. Se  $P$  pertence à reta  $AB$ , podemos construir dois segmentos com uma das extremidades em  $P$  contidos na reta  $AB$  e congruentes ao segmento  $\overline{AB}$ .

Consideremos inicialmente  $P$  não pertencente à reta  $AB$ .

Vamos construir as retas determinadas por  $A$  e  $B$ , por  $A$  e  $P$  e por  $B$  e  $P$  usando o Axioma I.

Seja  $p$  a reta construída por  $P$ , e que é perpendicular à reta  $AB$  pelo Axioma IV; e por  $P$  construa também a reta  $q$ , perpendicular à reta  $p$ ; também pelo Axioma IV.

Obtemos a reta  $q$ , paralela à reta  $AB$  e que passa pelo ponto  $P$ .

Construa agora a reta  $r$ , paralela à reta  $AP$  e que passa por  $B$ , a qual intersecta a reta  $q$  no ponto  $Q$ ; através do Axioma III.

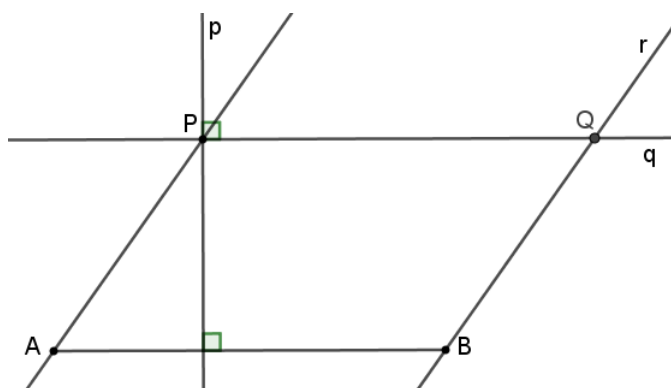


Figura 5.14 – Construção de um segmento paralelo e congruente a um segmento e um ponto dado.

Dessa maneira foi construído um paralelogramo  $ABQP$ . Logo o segmento  $PQ$



é paralelo ao segmento  $AB$  e congruente a ele, tendo uma de suas extremidades no ponto  $P$ .

De modo análogo, podemos construir o segmento  $PQ'$ , satisfazendo as condições impostas,  $PQ'$  paralelo e congruente a  $AB$ , e com uma das extremidades em  $P$ , como na figura a seguir.

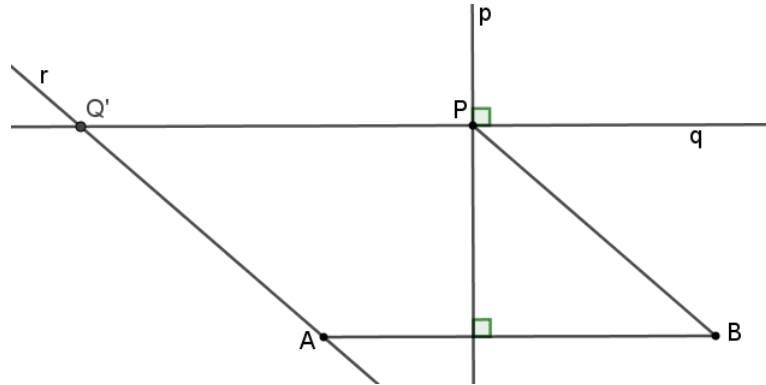


Figura 5.15 – Construção de um segmento paralelo e congruente a um segmento e um ponto dado.

Vamos supor agora que  $P$  pertence à reta  $AB$ . Pelo caso anterior, podemos escolher um ponto qualquer  $C$ , fora da reta  $AB$ , e construir um segmento  $CD$ , paralelo e congruente ao segmento  $AB$ , e com uma extremidade em  $C$ .

Da mesma forma, podemos construir segmentos paralelos e congruentes ao segmento  $CD$ , mas agora utilizando o ponto  $P$  como uma de suas extremidades.

Como consequência temos o resultado:

Dado um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , podemos obter o simétrico de  $P$  (reflexão de  $P$ ) em relação a  $r$ .

**Demonstração:** Seja  $p$  a reta perpendicular à reta  $r$  e passando por um ponto  $P$  dado, fora de  $r$ . Seja  $I$  a intersecção das retas  $r$  e  $p$ .

Considere, pelo resultado anterior, o segmento  $IQ$  contido em  $p$  e congruente ao segmento  $IP$ , com  $Q$  diferente de  $P$ .

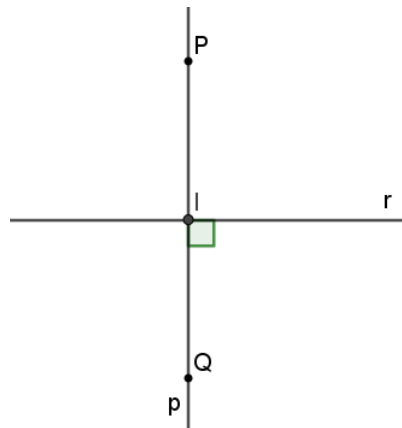


Figura 5.16 – Construção do ponto simétrico de um ponto em relação à uma reta dada.

Assim, temos o ponto  $Q$ , o simétrico de  $P$ , que é a imagem da reflexão de  $P$  em relação à reta  $r$ .

**Construção 3:** Transporte de segmento:

Sejam dados um segmento  $AB$  e uma semirreta  $CX$  podemos construir um segmento  $CD$  contido na semirreta  $CX$  congruente ao segmento  $AB$ .

Inicialmente construa o segmento  $CE$  paralelo e congruente ao segmento  $AB$ , conforme a Construção 2. A seguir, pelo Axioma V, construa uma dobra que leva  $E$  sobre  $D$  na reta  $CX$  passando por  $C$ . Assim, temos os segmentos  $CD$  e  $AB$  congruentes.

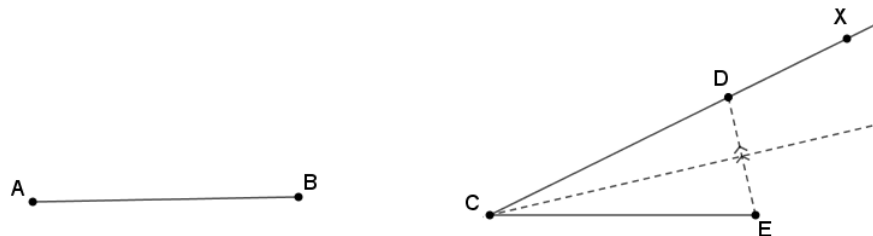


Figura 5.17 – Construção de um segmento congruente.

**Construção 4:** Transporte de ângulo:

Sejam dados um ângulo  $AOB$  e uma semirreta  $CX$ . Vamos construir um ângulo  $DCX$  tal que os triângulos  $AOB$  e  $DCX$  sejam congruentes.

Primeiro, obtenha um ponto  $E$  na semirreta  $OB$ .

A seguir, pela Construção 3, obtenha o ponto  $F$  sobre a semirreta  $CX$ , tal que  $\overline{CF} \equiv \overline{OE}$ .

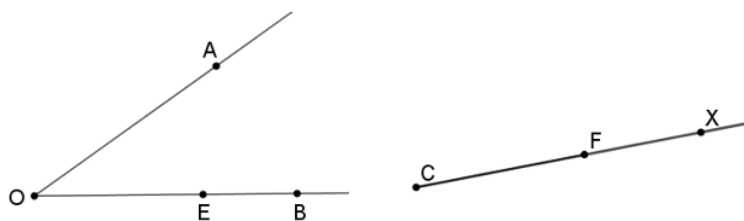


Figura 5.18 – Construção de um ângulo congruente.

Dobre uma perpendicular  $p$  à semirreta  $OB$  passando por  $E$ , pelo Axioma IV, obtenha o ponto  $G$  na semirreta  $OA$ . De modo análogo, pelo Axioma IV, dobre uma perpendicular  $q$  à semirreta  $CX$  passando por  $F$ .

Pela Construção 3, transporte  $\overline{EG}$  sobre  $q$  a partir de  $F$  obtendo um ponto  $H$ , trace a semirreta  $CH$ .

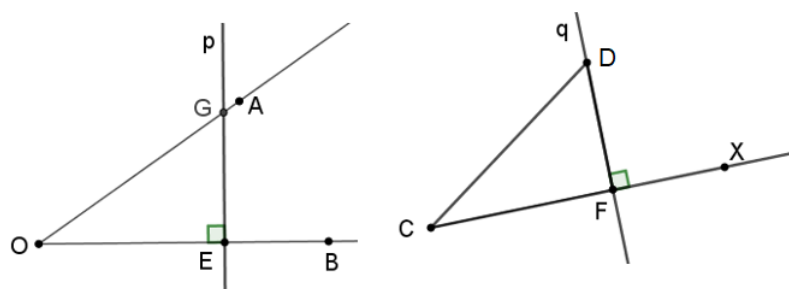


Figura 5.19 – Construção de um ângulo congruente.

Obtemos que os ângulos  $DCF$  e  $GOE$  são congruentes, isto é, os ângulos  $DCX$  e  $AOB$  são congruentes.

**Construção 5:** Construção de um triângulo retângulo dados as medidas de um dos catetos e da hipotenusa.

Vamos construir um triângulo retângulo  $ABC$  com ângulo  $B$  reto com um dos catetos de medida  $a$  e hipotenusa de medida  $b$ .

Seja dada uma reta  $r$ , marque sobre ela um ponto  $B$ . Peça Construção 3, transporte o segmento de medida  $a$  sobre  $r$  a partir de  $B$ , obtenha o vértice  $C$  do triângulo.

Dobre a perpendicular  $p$  a  $r$  passando por  $B$ , pelo axioma IV.

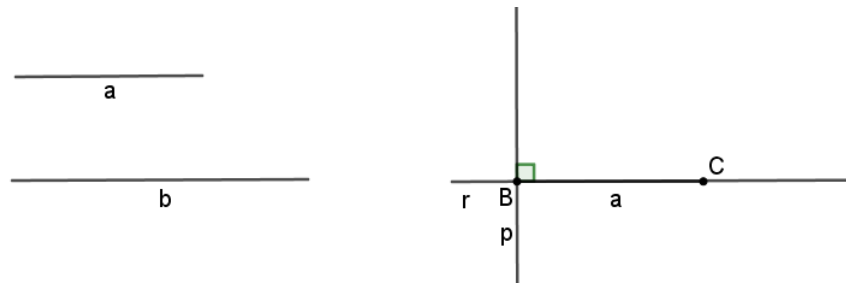


Figura 5.20 – Construção de um triângulo retângulo dadas as medidas de um cateto e da hipotenusa.

Pela Construção 3, transporte o segmento de medida  $b$  sobre  $r$  a partir de  $C$ , obtendo o ponto  $D$ .

Faça uma dobra, pelo Axioma V, que leva  $D$  em  $A$ , ponto de  $p$  e que passa por  $C$ .

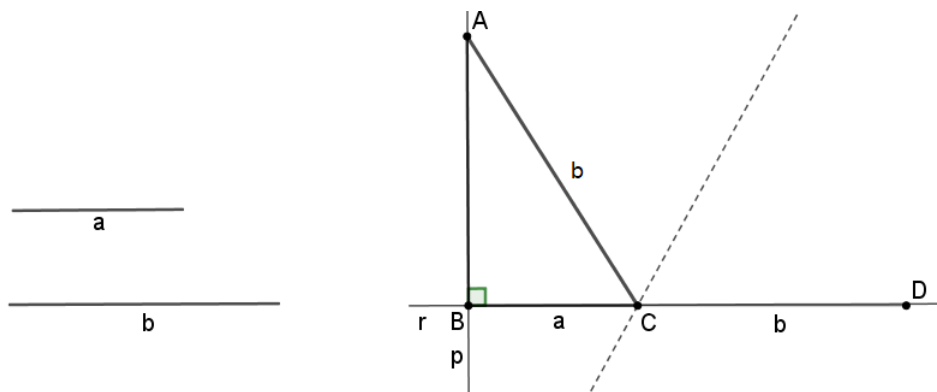


Figura 5.21 – Construção de um triângulo retângulo dadas as medidas de um cateto e da hipotenusa.

Obtemos assim o triângulo  $ABC$  com um cateto de medida  $a$  e hipotenusa de medida  $b$ .

**Construção 6:** Construção de um triângulo equilátero.

Esta construção está de acordo com [MONTEIRO] [22], p. 56.

Vamos utilizar um quadrado  $ABCD$  de papel considerando o lado com medida de uma unidade.

Dobre o quadrado ao meio, levando o vértice  $A$  sobre o vértice  $B$  e  $D$  sobre  $C$  simultaneamente, Axioma II. Desdobre.

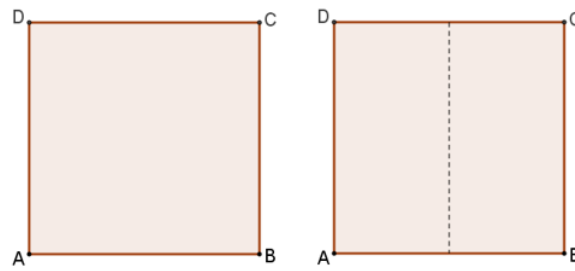


Figura 5.22 – Construção de um triângulo equilátero.

Faça uma dobra levando o vértice  $A$  no ponto  $P$  sobre a dobra anterior, passando pelo vértice  $B$ , Axioma V. Marque o ponto  $P$  fazendo um vinco. Desdobre.

Construa o segmento  $AP$  e  $BP$ . Temos o triângulo  $APB$ .

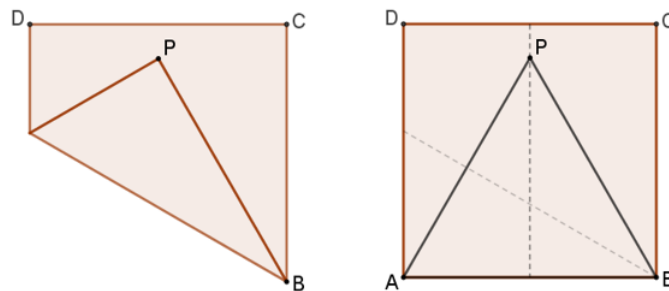


Figura 5.23 – Construção de um triângulo equilátero.

Como o lado do quadrado mede uma unidade e considerando  $E$  a intersecção da primeira dobra com o lado  $AB$ , temos  $AB = 1$  e  $AE = EB = \frac{1}{2}$ . Observe que  $\overline{BP}$  é imagem de  $\overline{AB}$  por reflexão na segunda construção, então  $BP = AB = 1$ .

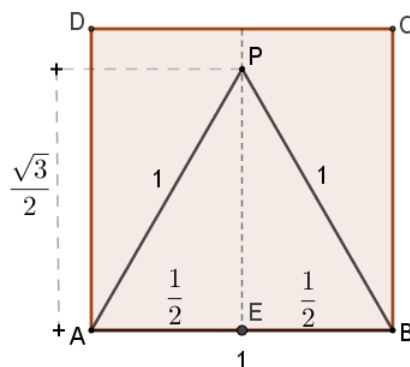


Figura 5.24 – Justificativa da construção de um triângulo equilátero.

Observando o triângulo retângulo  $BPE$ , pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$BP^2 = BE^2 + EP^2,$$

$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + EP^2,$$

$$EP^2 = 1 - \frac{1}{4},$$

$$\text{Logo: } EP = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Novamente pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$AP^2 = AE^2 + EP^2,$$

$$AP^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

$$AP^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4},$$

$$\text{Logo } AP = 1.$$

Então o triângulo  $APB$  é equilátero.

### 5.3 Relação entre Geometria Euclidiana e a Geometria do Origami

Foi R. C. Yates em 1949, na sua obra *Geometric Tools*, que fez pela primeira vez a comparação entre a Geometria do Origami e a Geometria Euclidiana; ele afirmou que a Geometria do Origami permite efetuar todas as construções Euclidianas a partir dos axiomas I, II e V de Huzita-Hatori.

Esta demonstração será feita a seguir, conforme [MATOS] [21] p. 121 e 133, fez em seu trabalho:

Primeiro serão apresentadas as cinco construções geométricas elementares que realizam as construções Euclidianas com régua sem escala e compasso; em seguida será demonstrado que com os Axiomas do Origami podemos realizar essas construções e, por último mostrar a equivalência entre os Axiomas do Origami.

Veremos em seguida, os procedimentos 1 a 5, que realizam as construções Euclidianas através de régua sem escala e compasso:

**Construção 1.** Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , podemos traçar uma única reta contendo ambos os pontos, usando uma régua.

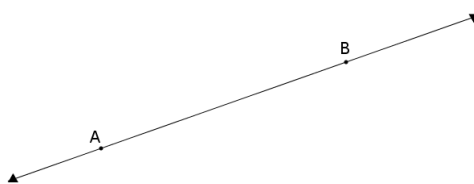


Figura 5.25 – Reta determinada pelos pontos  $A$  e  $B$ .

**Construção 2.** Dados um ponto  $M$  e um segmento de reta de comprimento  $r > 0$ , podemos traçar uma única circunferência  $c = \{M; r\}$ , tendo  $M$  como centro e  $r$  como raio, usando o compasso.

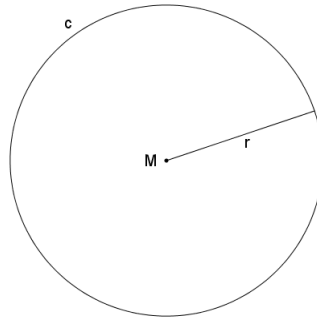


Figura 5.26 – Circunferência de centro  $M$  e raio  $r$ .

**Construção 3.** Dadas duas retas não paralelas  $l_1$  e  $l_2$ , podemos determinar o único ponto de interseção entre elas, o qual denominaremos:  $P = l_1 \cap l_2$ .

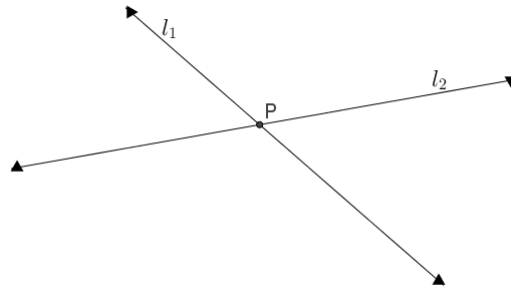


Figura 5.27 – Retas  $l_1$  e  $l_2$  concorrentes em um ponto  $P$ .

**Construção 4.** Se são dados uma circunferência  $c = \{M; r\}$  e uma reta  $l$ , tal que o segmento ortogonal à reta  $l$ , com extremidade no ponto  $M$ , possui medida menor que  $r$ , então podemos determinar os pontos de interseção entre  $c$  e  $l$ .

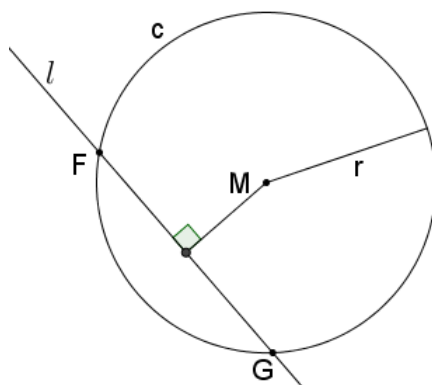


Figura 5.28 – Reta  $l$  que intersecciona a circunferência  $c = \{M; r\}$  nos pontos  $F$  e  $G$ .

**Construção 5.**

i) Dadas duas circunferências  $c_1 = \{M_1; r_1\}$  e  $c_2 = \{M_2; r_2\}$  tais que  $|r_1 - r_2| < M_1M_2 < r_1 + r_2$ , então é possível encontrar dois pontos de intersecção de  $c_1$  com  $c_2$ .

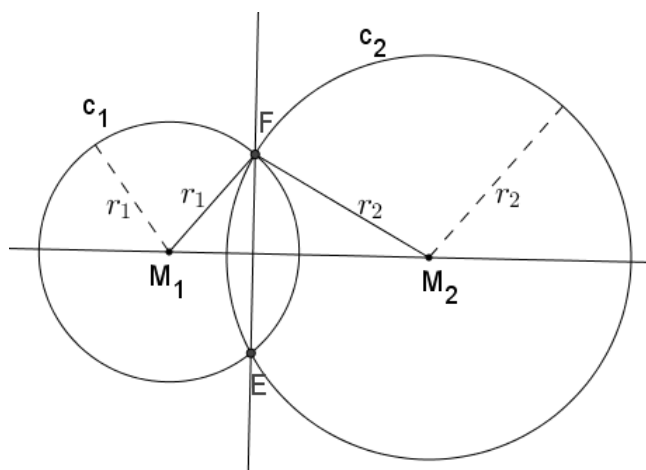


Figura 5.29 – Intersecção das circunferências  $c_1 = \{M_1; r_1\}$  e  $c_2 = \{M_2; r_2\}$ , tal que  $|r_1 - r_2| < M_1M_2 < r_1 + r_2$ .

ii) No caso em que  $M_1M_2 = |r_1 - r_2|$  ou  $M_1M_2 = r_1 + r_2$ , existe um único ponto de intersecção de  $c_1$  com  $c_2$  e as duas circunferências são tangentes neste ponto.



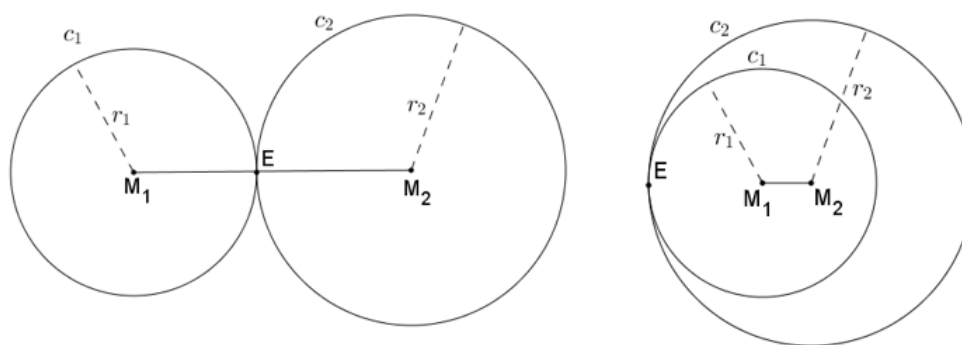


Figura 5.30 – Intersecção das circunferências  $c_1 = M_1; r_1$  e  $c_2 = M_2; r_2$ , tal que  $M_1M_2 = r_1 + r_2$  e  $M_1M_2 = |r_1 - r_2|$ .

Agora, veremos como podemos substituir, ou seja, fazer as mesmas construções com régua sem escala e compasso, os procedimentos 1 a 5, com dobraduras de papel. Para isso será feita uma combinação dos cinco primeiros axiomas do Origami.

Começando com a **Construção 1**, podemos facilmente observar que é a mesma construção do Axioma I, no caso da construção do Origami a dobra representa a reta traçada.

Na **Construção 2**, usando os Axiomas do Origami, podemos determinar alguns pontos e retas tangentes que definem bem uma circunferência, através da combinação dos Axiomas. Veja:

Passo 1: Conhecidos o centro  $M$  e o raio  $r = AB$ , dobrando  $A$  sobre  $M$  pelo Axioma II, dobramos a mediatriz de  $\overline{MA}$ , o que implica em levar  $B$  em  $B'$ . Assim temos  $r = MB'$ .

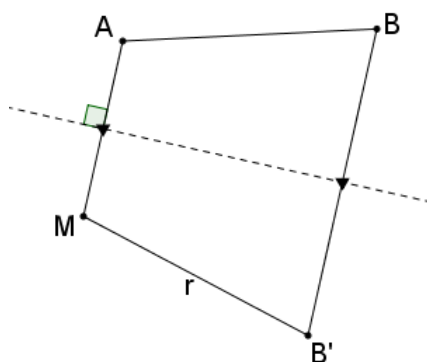


Figura 5.31 – Construção por dobradura do raio de uma circunferência  $c = \{M; r\}$ .

Passo 2: Seja uma reta  $l$  contendo  $M$ . Sobre esta reta dada podemos dobrar o raio  $MB'$ , pelo Axioma III, fazendo a reflexão de  $B'$  através da reta que determina a

bissetriz do ângulo de vértice  $M$ , formado entre  $\overline{MB'}$  e a reta  $l$ . Assim, determinamos o ponto  $P$ , da circunferência procurada, e o diâmetro está sobre a reta  $l$ .

Pelo Axioma II, através da dobradura de  $l$  sobre si mesma e passando por  $M$ , podemos determinar o ponto  $P'$ , pertencente à circunferência e diametralmente oposto ao ponto  $P$ .

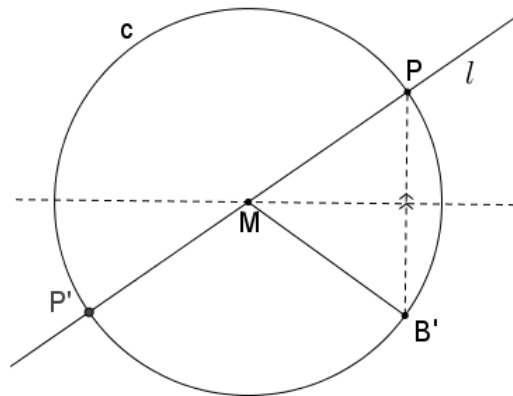


Figura 5.32 – Construção por dobradura dos pontos  $P$  e  $P'$  pertencentes a circunferência  $c = \{M; r\}$ .

Passo 3: Dobrar  $l$  sobre ela própria de modo a construir uma perpendicular por  $P$  que é possível pelo Axioma IV. Assim, encontraremos a única reta  $t$ , perpendicular a  $l$ , que contém  $P$ . Como  $l$  contém o raio  $\overline{MP}$ , a reta  $t$  será tangente à circunferência em  $P$ . A mesma construção pode ser feita analogamente em  $P'$ .

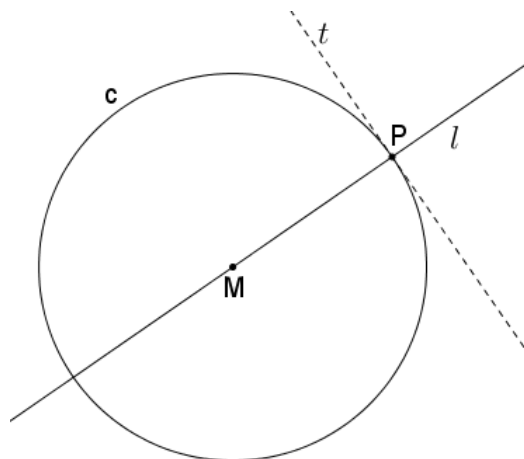


Figura 5.33 – Construção por dobradura da reta  $t$  tangente a circunferência  $c = \{M; r\}$  em  $P$ .

Continuando com procedimento análogo são obtidos mais pontos e tangentes à circunferência e, conseqüentemente, sua envoltória de tangentes.

Também existe uma identidade entre a **Construção 3** e o Axioma I. A primeira estabelece, a partir de duas retas não paralelas,  $l_1$  e  $l_2$ , a existência de um único ponto de interseção  $P = l_1 \cap l_2$ , enquanto para o segundo, ao dobrarmos duas retas não paralelas, as dobras que as formam também determinarão um único ponto de interseção  $P = l_1 \cap l_2$ , construído pelo encontro dos vincos.

Este ponto é único, pois, se existisse um segundo ponto de intersecção, pelo Axioma I eles determinariam uma única reta e então as retas  $l_1$  e  $l_2$  seriam a mesma dobra.

Então, é possível realizar a Construção 3 através de dobraduras pelo Axioma I.

Para a **Construção 4**:

Sejam dadas a circunferência  $c = \{M; r\}$  e a reta  $l$  tal que o segmento  $\overline{IM}$  ortogonal a  $l$ , onde  $I$  é o pé da perpendicular baixada de  $M$  a  $l$ , tenha medida menor que  $r$ . Seja  $P$  um ponto qualquer da circunferência  $c$ .

Pelo Axioma V, dados os pontos  $P$  e  $M$ , e a reta  $l$ , existe uma reta  $m$  que passa por  $M$  e leva  $P$  em  $P'$ , com  $P'$  pertencente a  $l$ .

Seja  $N$  o ponto de intersecção entre a reta  $m$  e o segmento  $PP'$ . Obtemos que os triângulos  $PNM$  e  $P'NM$  são congruentes, pelo caso L.A.L.

Logo  $P'M = PM$  e portanto  $P'$  pertence à circunferência  $c$ .

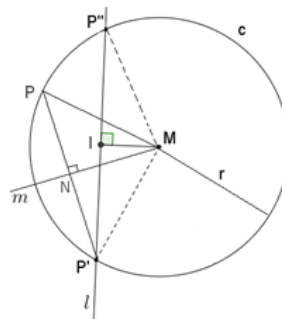


Figura 5.34 – Construção por dobradura da intersecção da circunferência  $c = \{M; r\}$  com a reta  $l$ .

Seja  $P''$  o simétrico de  $P'$  em relação à reta  $IM$ .

Para mostrar que  $P''$  está na circunferência, usamos novamente o caso L.A.L. de congruência nos triângulos  $MIP'$  e  $MIP''$ , do que resulta  $MP'' = MP'$ . Portanto obtemos que  $P''$  pertence à circunferência.

Assim temos que  $P'$  e  $P''$  são os pontos pertencentes à intersecção da reta  $l$  com a circunferência  $c$ .

Para **Construção 5**:

Vamos abordar o caso i:

Como  $|r_1 - r_2| < M_1M_2 < r_1 + r_2$ , o que equivale a dizer que cada um dos números  $r_1$ ,  $r_2$  e  $M_1M_2$  é menor que a soma dos outros dois, então podemos afirmar que existe um triângulo  $M_1M_2F$  tal que  $M_1F = r_1$  e  $M_2F = r_2$ . Ver, por exemplo, Lema 6.36 de [REZENDE] [26].

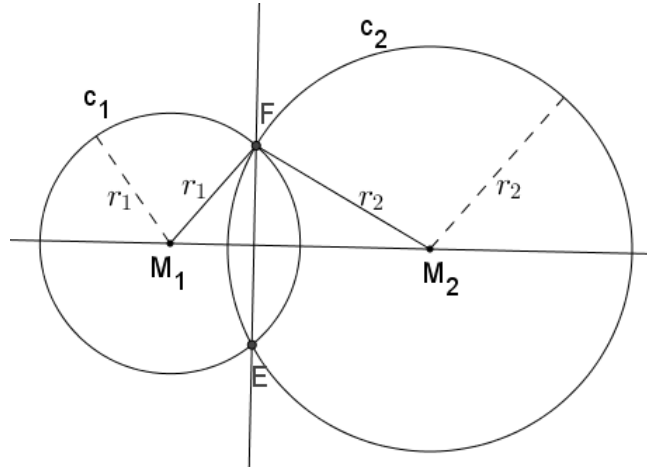


Figura 5.35 – Intersecção das circunferências  $c_1 = \{M_1; r_1\}$  e  $c_2 = \{M_2; r_2\}$ , tal que  $|r_1 - r_2| < M_1M_2 < r_1 + r_2$ .

Vejamos como construir tal triângulo usando os Axiomas do Origami.

Seja  $F'$  o pé da perpendicular a  $\overline{M_1M_2}$  passando por  $F$ .

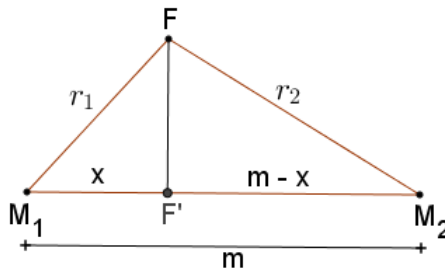


Figura 5.36 – Intersecção das circunferências  $c_1 = \{M_1; r_1\}$  e  $c_2 = \{M_2; r_2\}$ , tal que  $|r_1 - r_2| < M_1M_2 < r_1 + r_2$ .

Pelo Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos  $M_1F'F$  e  $M_2F'F$ , temos 
$$x = \frac{r_1^2 + m^2 - r_2^2}{2m} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{r_1^2 + m^2 - r_2^2}{m}\right).$$

Para obter  $F'$  a partir do pontos  $M_1$  e  $M_2$  com os Axiomas do Origami, vamos construir inicialmente um triângulo retângulo de catetos  $m$  e  $r_1$ , obtendo a hipotenusa que mede  $\sqrt{r_1^2 + m^2}$ .

Em seguida construímos um outro triângulo retângulo, mas desta vez com dos catetos medindo  $r_2$  e a hipotenusa medindo  $\sqrt{r_1^2 + m^2}$ .

Com esses dados obtemos o outro cateto com medida igual à  $\sqrt{r_1^2 + m^2 - r_2^2}$ . Para esta construção usamos também os Axiomas I a V do Origami.

Com esses dados, usando o Teorema de Tales p. 38 e os Axiomas I a V, construímos  $\frac{r_1^2 + m^2 - r_2^2}{m}$ .

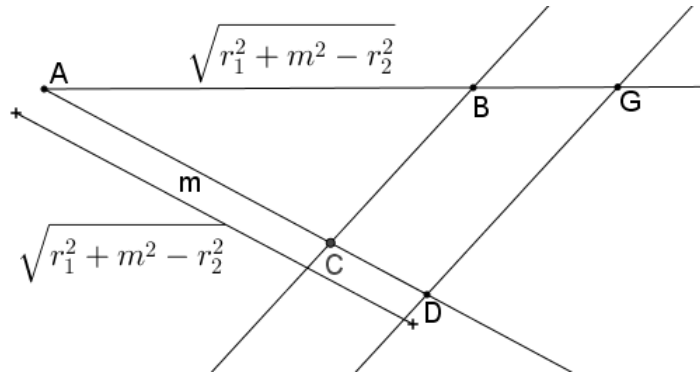


Figura 5.37 – Triângulos  $ABC$  e  $AGD$  com  $AB = \sqrt{r_1^2 + m^2 - r_2^2}$ ,  $AC = m$  e  $AD = \sqrt{r_1^2 + m^2 - r_2^2}$ .

Temos  $AG = \frac{r_1^2 + m^2 - r_2^2}{m}$ .

Para obter  $x$ , basta obter a metade de  $AG$ , ou seja,  $x = \frac{1}{2}AG$ .

Então é possível obter o ponto  $F'$  na dobra  $M_1M_2$ .

A seguir, obtemos a reta  $p$  perpendicular a  $M_1M_2$  por  $F'$  e, depois obtemos o ponto  $F$  em  $p$  tal que  $M_1F = r_1$ .

Como  $M_1F = r_1$  e  $M_2F = r_2$ , então  $F$  pertence à intersecção de  $c_1$  com  $c_2$ .

Seja  $E$  a reflexão de  $F$  em relação à reta  $M_1M_2$ . Obtemos que também  $E$  pertence à intersecção de  $c_1$  com  $c_2$ .

Assim,  $E$  e  $F$  são o dois pontos de intersecção de  $c_1$  com  $c_2$ .

Para o caso (ii) da construção 5, é fácil mostrar que existe um único ponto de intersecção de  $c_1$  com  $c_2$ , usando os Axiomas do Origami.

Acabamos de mostrar que com os Axiomas I a V, do Origami, podemos efetuar todas as construções euclidianas, ou seja, construir os números que podem ser construídos com régua não graduada e compasso.

Vamos mostrar agora que estas construções podem ser efetuadas apenas com os Axiomas I, II e V, como segue.

(I) Dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$  existe apenas uma dobra que passa por eles. A duplicidade desta construção, desde que as retas não sejam paralelas, gera um ponto de intersecção.

(II) Dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$ , existe apenas uma dobra que coloca  $P_1$  sobre  $P_2$ .

(V) Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e uma reta  $r_1$ , se a distância de  $P_1$  a  $P_2$  for igual ou superior a distância de  $P_2$  a  $r_1$ , existe uma dobra que coloca  $P_1$  sobre  $r_1$  e que passa por  $P_2$ .

Mostraremos que o conjunto de Axiomas I, II e V é equivalente ao conjunto formado pelos Axiomas I a V. Se retirarmos os Axiomas III e IV, continuamos com os mesmos números construtíveis.

(i) para retirar o Axioma III, no caso em que as duas retas não são paralelas, dadas as retas construídas  $r_1$  e  $r_2$ , não paralelas, podemos construir um ponto de interseção  $Q$  e escolher outro ponto construído  $P$  sobre  $r_1$ , realizando a dobra  $d$ . A reta  $b$ , construída pelo Axioma V, que passa por  $Q$  e reflete  $P$  sobre  $r_2$ , é a bissetriz do ângulo formado  $\angle PQP'$ , que possui  $Q$  como vértice.

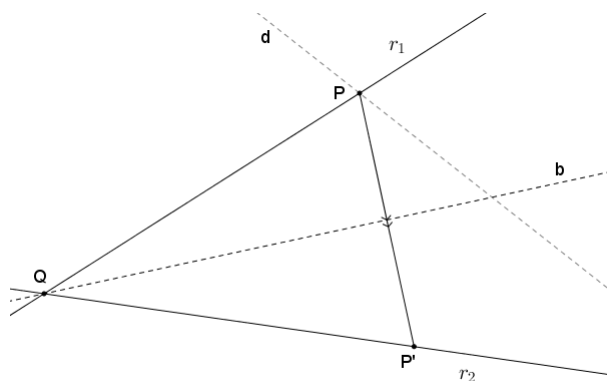


Figura 5.38 – Construção por dobradura da bissetriz  $b$  de  $\angle PQP'$ .

(ii) para retirar o Axioma IV, considere a reta  $d$  e o ponto  $P$  não pertencente a ela.

Queremos construir a reta perpendicular à reta  $d$  passando pelo ponto  $P$ .

Sejam  $P_1$  e  $P_2$  dois pontos distintos construídos sobre a reta  $d$ .

Pelo Axioma II, podemos construir a mediatriz  $m$ , de  $\overline{P_1P_2}$ .

Na subseção 5.2.2 em (ii), vimos que podemos construir a reta  $t$ , paralela à  $m$ , passando por  $P$ .

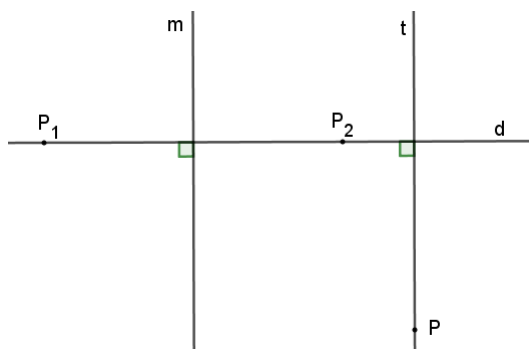


Figura 5.39 – Construção por dobradura da perpendicular a reta  $d$  passando por  $P$ .

A reta  $t$  é a reta procurada.

Já vimos no capítulo anterior que, a geometria da construção com régua sem escala e compasso resolve várias equações quadráticas.

Como observamos, a geometria do Origami faz todas as construções da geometria com régua sem escala e compasso. Podemos concluir que a geometria do Origami também resolve as equações quadráticas.

## 5.4 Resolução de equações cúbicas

Vamos mostrar de acordo com [ALPERIN] [1], que é possível resolver através da geometria do Origami qualquer equação cúbica com coeficientes construtíveis.

Consideremos a equação geral  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais construtíveis.

Para eliminar o termo de grau 2, vamos fazer a substituição da variável  $z = x - \frac{1}{3}a$ .

Ficaremos com a equação:  $z^3 + \frac{3b - a^2}{3}z - \frac{9ab - 27c - 2a^3}{27} = 0$  da forma genérica  $x^3 + ax + b = 0$  onde os coeficientes  $a$  e  $b$  são números construtíveis através do Origami.

Sendo assim, consideremos as equações das parábolas  $\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = 2bx$  com foco  $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$  e reta diretriz  $x = -\frac{b}{2}$  e  $y = \frac{1}{2}x^2$  com foco  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  e reta diretriz  $y = \frac{1}{2}$  respectivamente; os focos e as diretrizes das parábolas que representam os gráficos são construtíveis.

Pelo Axioma VI, podemos fazer uma dobra que leva o foco sobre a reta diretriz nas duas parábolas, essa dobra é uma tangente às duas parábolas. Seja  $m$  a inclinação da reta construída por essa dobra, e, sejam  $(x_o, y_o)$  o ponto de tangência com a primeira

parábola e  $(x_1, y_1)$  com a segunda.

Derivando a equação da primeira parábola em relação a variável  $x$ , temos:

$$2 \left( y - \frac{1}{2}a \right) \frac{dy}{dx} = 2b;$$

$$\left( y_0 - \frac{1}{2}a \right) m = b \text{ temos então:}$$

$$\begin{cases} m = \frac{b}{y_0 - \frac{a}{2}} \\ y_0 = \frac{b}{m} + \frac{a}{2} \end{cases}$$

Sabemos que  $(x_0, y_0)$  é um ponto da parábola, logo:

$$x_0 = \frac{\left( y_0 - \frac{a}{2} \right)^2}{2b}$$

Substituindo  $y_0$ :

$$x_0 = \frac{\left( \frac{b}{m} + \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \right)^2}{2b}$$

Simplificando:

$$x_0 = \frac{b}{2m^2}$$

Analogamente para segunda parábola, temos:

$$\frac{dy}{dx} = x \text{ então: } m = x_1, \text{ sendo } (x_1, y_1) \text{ ponto da parábola:}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}m^2.$$

Utilizando dois pontos, podemos calcular a inclinação  $m$ , veja:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0};$$

substituindo  $y_0, y_1, x_1$  e  $x_0$ :

$$m = \frac{\frac{m^2}{2} - \frac{b}{m} - \frac{a}{2}}{m - \frac{b}{2m^2}};$$

Simplificando:

$$m = \frac{\frac{m^3 - 2b - am}{2m}}{\frac{2m^3 - b}{2m^2}};$$

$$m = \frac{m^4 - 2bm - am^2}{2m^3 - b};$$

$$2m^4 - bm = m^4 - 2bm - am^2, \text{ daí: } m^4 + am^2 + bm = 0;$$

simplificando por  $m$ :  $m^3 + am + b = 0$ .

Logo,  $m$  é raiz da equação  $x^3 + ax + b = 0$ .



Apresentaremos duas aplicações que se encontram no Capítulo 1, utilizando dobraduras.

## 5.5 Aplicações

**Aplicação 5.5.1:** Os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

Resolução utilizando o método da dobradura:

Passo 1: Trace numa folha um quadrilátero qualquer  $ABCD$ . Recorte.

Passo 2: Faça um pequeno vinco na borda do papel, levando  $A$  sobre  $B$  e outro vinco levando  $B$  sobre  $C$ . Encontramos assim  $M$  e  $N$ , pontos médios dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ , respectivamente.

Passo 3: Faça uma dobra passando por  $M$  e  $N$ .

Passo 4: Faça um vinco na borda do papel, levando  $A$  sobre  $D$  e outro levando  $D$  sobre  $C$ . Encontramos  $P$  e  $O$ , pontos médios dos lados  $\overline{AD}$  e  $\overline{CD}$ , respectivamente.

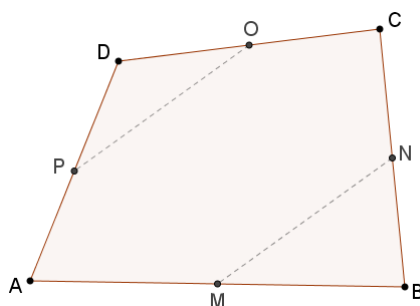


Figura 5.40 – Aplicação 5.5.1 utilizando o método da dobradura.

Passo 5: Faça dobras passando por  $P$  e  $O$ , por  $P$  e  $M$  e por  $O$  e  $N$ . Obtemos assim os segmentos dos lados do paralelogramo  $MNOP$ .

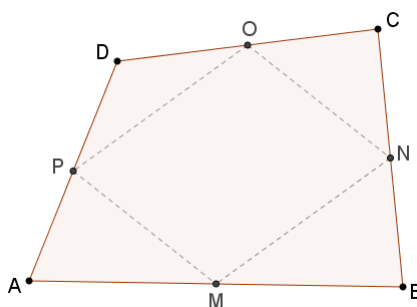


Figura 5.41 – Aplicação 5.5.1 utilizando o método da dobradura.

**Justificativa:** Uma justificativa pode ser feita utilizando o Teorema da Base Média do Triângulo como foi feito no Capítulo 1 p. 46.

Uma verificação prática pode ser feita através de dobraduras, usando a propriedade da Geometria Euclidiana: "Se as diagonais de um quadrilátero se interseccionam em seus pontos médios, então o quadrilátero é um paralelogramo". Ver, por exemplo, [REZENDE] [26], p. 71, exercício 4.12.

Para isso:

Passo 6: Faça um dobra passando por  $N$  e  $P$  e outra passando por  $M$  e  $O$ , obtendo as diagonais  $\overline{NP}$  e  $\overline{MO}$  do paralelogramo  $MNOP$ .

Passo 7: Leve  $N$  sobre  $P$ , faça um vinco, obtendo pelo Axioma II o ponto médio da diagonal  $\overline{NP}$ , leve  $M$  sobre  $O$ , faça um vinco, obtendo o ponto médio da diagonal  $\overline{MO}$ . Observe que o ponto comum aos vincos coincidem com o ponto de encontro das diagonais.

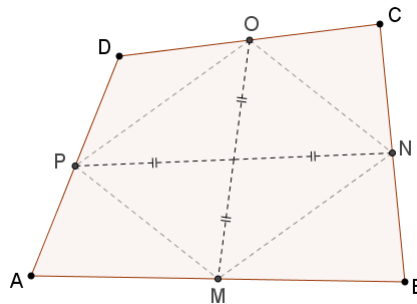


Figura 5.42 – Verificação do resultado da Aplicação 5.5.1 utilizando o método da dobradura.

Logo,  $MNOP$  é um paralelogramo pois suas diagonais se encontram no ponto médio.

**Aplicação 5.5.2.** O ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo equidista dos três vértices do triângulo.

Resolução através de dobraduras:

Passo 1: Em uma folha trace o triângulo  $ABC$  retângulo em  $A$  de hipotenusa  $\overline{BC}$ . Para facilitar podemos usar o canto da folha, que já tem o ângulo reto. Recorte o triângulo.

Passo 2: Faça a dobra sobrepondo  $B$  sobre  $C$ , Axioma II. Encontramos assim o ponto médio  $M$  da hipotenusa, que é equidistante dos três vértices.

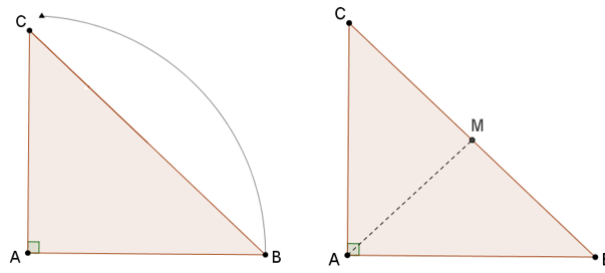


Figura 5.43 – Aplicação 5.5.2 utilizando o método da dobradura.

**Justificativa:** A justificativa pode ser dada como foi feito no Capítulo 1 p. 47.

O resultado pode ser observado através de dobraduras do seguinte modo:

Passo 3: Obtenha a dobra que coloca  $B$  sobre  $A$ , Axioma II. Observe que a dobra assim obtida, mediatriz do segmento  $AB$ , passa por  $M$  e, portanto,  $MA = MB$ .

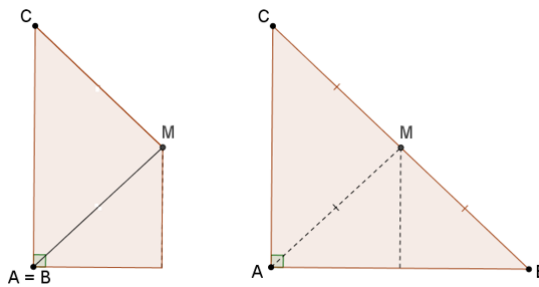


Figura 5.44 – Justificativa da aplicação 5.5.2 utilizando o método da dobradura.

Assim, temos  $MA = MB = MC$  ou seja,  $M$  equidista de  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

## 6 Atividades para Sala de Aula Envolvendo Dobraduras

Vamos apresentar neste capítulo, algumas atividades envolvendo dobraduras, como material de apoio ao ensino de geometria.

Existem inúmeros livros e conteúdos com atividades de Origami e dobraduras, muitos deles paradidáticos com os quais podemos ampliar nossos conhecimentos desta arte, podemos encontrar atividades interdisciplinares com artes, ciências entre outras disciplinas; além de sites na internet, com conteúdos enriquecedores de fácil entendimento, com ótimas ilustrações e vídeos explicativos. Algumas outras atividades podem ser encontradas em [BURATO] [5], [CAVACAMI] [8], [IMENES] [16] e [REGO] [25].

Além de trabalhar a Geometria, o ensino com dobraduras nos fornece subsídios para realização de um trabalho mais sistemático e efetivo em sala de aula, colabora com a melhoria do ensino e aprendizagem de Geometria, e na formação cognitiva do aluno. Entre as competências e habilidades cognitivas, espera-se que os alunos desenvolvam: a criatividade; habilidade de concentração, memorização e precisão; cooperação; várias formas de trabalho em equipe; controle motor e senso estético; conhecimento do todo e de partes; a função mnemônica - memória breve, de longo prazo, associativa e a própria rapidez para a memória; o esforço pessoal ao esperar pelo resultado construído; o refinamento de sistemas estéticos - estimula a atenção entre a matéria e a forma do objeto; senso de proporção e da harmonia da forma; o pensamento na medida que como experiência direta e às vezes repetitiva, pode levar a criança ou aprendiz a transferir a outros âmbitos, levando a refletir sobre descobertas e estabelecer ligações análogas; o comportamento positivo, pois promove um procedimento gradual para um projeto, à correção automática de eventuais erros cometidos até acertar positivamente, enfrentando sempre dificuldades maiores.

Além de conteúdos específicos, a dobradura trabalha basicamente as isometrias, considerando o papel como plano. Ao dobrar o papel estamos realizando a reflexão em reta de um ponto sobre outro ponto ou uma reta sobre outra reta. A translação, quando manipulamos o papel, mudando sua posição, para fazer outra dobragem. A rotação é observada ao construirmos uma figura e fazermos a rotação da mesma em torno dela, para realizar outra dobra.

Considerando os quatro pilares da Educação e os saberes que os compõem: aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a viver juntos e aprender a ser; e os três conteúdos:

Conceituais, referem-se a capacidade intelectual, a construção do pensamento,

discernindo o real do irreal, estimulando o conhecimento.

Procedimentais, referem-se a construção de instrumentos para análise e exploração em busca de um resultado.

Atitudinais, referem-se à formação de atitudes e valores e a vivência do ser em sociedade.

Os pilares veiculados com os conteúdos formam uma base sólida para uma avaliação democrática e formativa.

As atividades com dobraduras são um importante meio de avaliação através dos conteúdos procedimentais, nos quais, o aluno coloca em prática o que aprendeu com os conteúdos conceituais por intermédio de estratégias e avanço do saber reproduzidos através da experiência do fazer. Ao desenvolver as dobraduras o aluno é levado a praticar, potencializar e questionar os conteúdos conceituais que recebeu. O professor pode refletir sua prática e verificar o resultado do processo de ensino-aprendizagem daquele conteúdo.

É importante, ao introduzirmos qualquer conteúdo, explorar o conhecimento dos alunos sobre o assunto, despertar a curiosidade e interesse para realização das atividades. No caso do trabalho com dobraduras isso pode ser feito através da apresentação da história do Origami em conjunto com alguns Origamis já prontos.

## 6.1 Atividades de introdução

Quando os alunos, em sua maioria, ainda não tiveram contato ou tiveram muito pouco com a dobradura é importante introduzi-la apresentando atividades onde o objetivo principal é conhecer os procedimentos básicos do Origami e ter mais intimidade com essa arte, para posteriormente trabalhar conteúdo específico ou atividades que necessitam de mais habilidades para seu desenvolvimento. Com estas finalidades a atividade de introdução deve ser interessante e ter um nível fácil de procedimentos.

Há várias formas de apresentar atividades de introdução, o importante é que o aluno seja levado a criar, seja através de um jogo, quebra-cabeça ou montagem artística, despertando sua curiosidade. Muitos alunos já tiveram contato com a dobradura, o professor também pode propor para este aluno que traga alguma dobradura que ele goste de fazer, apresentando aos colegas e também auxiliando o professor em sala.

Apresentar a história do Origami e a grande variedade de modelos que existem, antes de iniciar uma atividade de dobradura, é um estímulo para despertar o interesse dos alunos.

Vamos apresentar aqui duas atividades de introdução:

### 6.1.1 Quebra cabeças geométricos

Aplicação foi feita após apresentação da história do Origami, uma vez que a maioria dos alunos não conhecia a prática.

Levei para sala os desafios já montados e colados.

O professor deve ao fim dos desafios desdobrar as folhas e fazer uma observação com os alunos sobre as construções obtidas e a geometria envolvida.

Esta atividade será apresentada de acordo com [REGO] [25], p. 122:

#### **OBJETIVOS:**

Trabalho com senso de observação.

Construção de perpendiculares e paralelas.

Raciocínio lógico e passo a passo.

#### **PÚBLICO ALVO:**

Esta atividade pode ser aplicada a partir do 6º ano do Ensino Fundamental.

#### **MATERIAL NECESSÁRIO:**

Quadrado de papel com uma face colorida e outra branca.

**Desafio 1:** Como obter um quadrado com o padrão final como indicado na figura, realizando apenas duas dobras?



Figura 6.1 – Quadrado padrão e final do primeiro desafio.

#### **Solução:**

Passo 1: Dobre na linha pontilhada paralelamente à borda inferior da folha, virando a parte branca para frente.

Passo 2: Dobre a lateral direita paralelamente à borda lateral, desta vez para trás, obtendo assim a figura pedida.

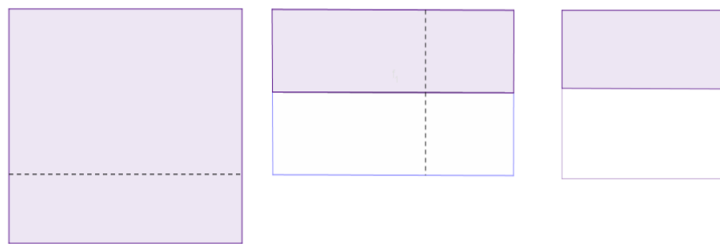


Figura 6.2 – Resolução do primeiro desafio.

**Desafio 2:**

Como obter um quadrado com o padrão final como indicado na figura, realizando apenas três dobras?



Figura 6.3 – Quadrado padrão para segundo desafio.

**Solução:**

Passo 1: Dobre na linha pontilhada paralelamente à borda inferior, virando a parte branca para frente.

Passo 2: Dobre as duas laterais para frente paralelamente às bordas laterais, obtendo assim a figura pedida.

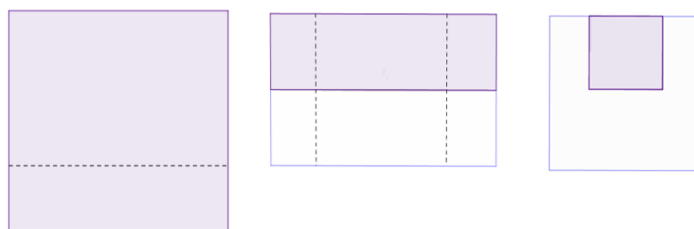


Figura 6.4 – Resolução do segundo desafio.

**Desafio 3:**

Como obter um quadrado com o padrão final como indicado na figura, realizando apenas quatro dobras?



Figura 6.5 – Quadrado padrão terceiro desafio.

**Solução:**

Passo 1: Dobre a parte superior e inferior da folha na linha pontilhada paralelamente às bordas, virando a parte branca da folha para frente.

Passo 2: Dobre as laterais direita e esquerda na linha pontilhada paralelamente às bordas laterais, virando a parte branca para frente, obtendo a figura pedida.

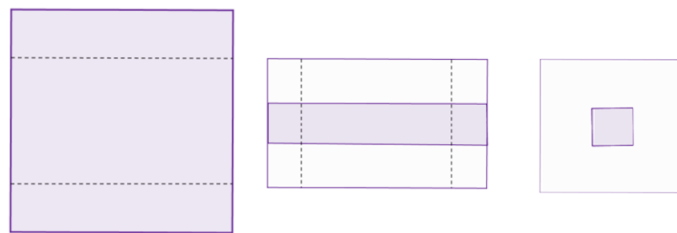


Figura 6.6 – Resolução do terceiro desafio.

**Desafio 4:**

Como obter um quadrado com o padrão final como indicado na figura, realizando apenas duas dobras?

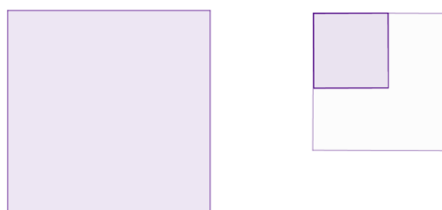


Figura 6.7 – Quadrado padrão para quarto desafio.

**Solução:**

Passo 1: Dobre a parte inferior da folha na linha pontilhada paralelamente à borda inferior, virando a parte branca da folha para frente.

Passo 2: Dobre a lateral direita para frente paralelamente à borda lateral, obtendo assim a figura pedida.



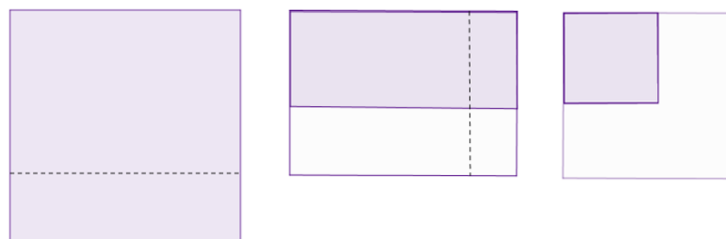


Figura 6.8 – Resolução do quarto desafio.

### Desafio 5:

Como obter um quadrado com o padrão final como indicado na figura, realizando quatro dobras?

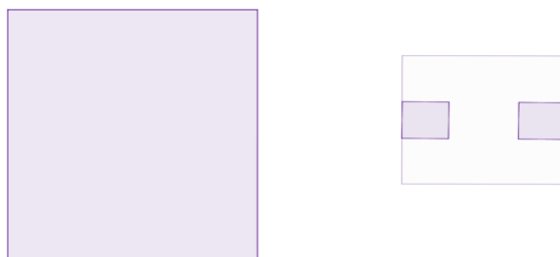


Figura 6.9 – Quadrado padrão para quinto desafio.

### Solução:

Passo 1: Dobre a parte superior e inferior da folha na linha pontilhada paralelamente às bordas superior e inferior, virando a parte branca da folha para frente.

Passo 2: Dobre as duas laterais para trás paralelamente às bordas laterais, vire a figura, obtendo assim a figura pedida.

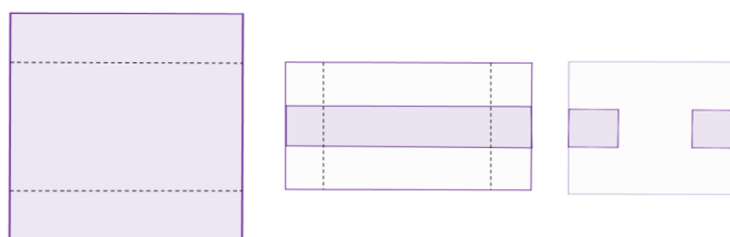


Figura 6.10 – Resolução do quinto desafio.

### AVALIAÇÃO:

A avaliação foi realizada através da análise da participação dos alunos nas atividades.

Os resultados esperados durante a atividade eram que os alunos dobrassem paralelas e perpendiculares, chegando assim ao resultado dos desafios e o mais próximo possível de um quadrado.

### **ANÁLISE DOS RESULTADOS:**

Unidade: EMEB Humberto Brasi - Mogi Mirim

Ano: 6ºB - 28 alunos.

Tempo de aplicação: 2 aulas de 50 minutos.

No 6º ano, os desafios de 1 a 3 foram solucionados com certa facilidade por todos os alunos, alguns alunos encontram um pouco de dificuldade em dobrar e manipular a folha formando uma perpendicular ou paralela com os lados, essa dobra acaba saindo inclinada, formando então transversais, e foi preciso chamar a atenção para este detalhe.

O objetivo principal, além de cumprir o desafio, era que os alunos conseguissem trabalhar com perpendiculares e paralelas realizadas a cada dobra. As construções de perpendiculares e paralelas são muito usadas em qualquer dobradura.

O desafio 4 gerou um nível maior de dificuldade, foi preciso a ajuda da professora para alguns alunos a concluírem o trabalho.

O desafio 5 foi o mais trabalhoso e que demandou mais tempo. Somente alguns alunos conseguiram chegar ao resultado final e durante a resolução foram necessárias dicas. Os outros alunos só chegaram à solução com minha ajuda ou de um colega. A parte que dificulta o exercício é a questão da dobra para trás, uma vez que, todas as dobras nas atividades anteriores necessitavam de dobras para frente.

### **RESULTADOS OBSERVÁVEIS:**

O resultado foi muito satisfatório, os desafios despertaram o interesse dos alunos, que sempre estão pedindo para fazer atividades com dobraduras novamente. Estas atividades ajudaram a melhorar a habilidade na manipulação do papel e na realização de dobras. Houve bastante concentração por parte dos alunos que se empenharam em resolver os problemas e cooperação dos alunos que resolviam primeiro e acabavam ensinando os colegas.

Após terminar os desafios, desdobramos as folhas com os resultados finais, onde foi feita a observação da construção de paralelas e perpendiculares.

## **6.1.2 Estrela de quatro pontas**

Essa atividade foi proposta por um aluno, que ensinou os colegas e auxiliou durante a aula. Existem inúmeras atividades como essa, os alunos gostam e muitos sabem construir um avião, sapo, barcos etc. Deixar os alunos proporem atividades é uma forma

de incentivar sua participação plena em sala.

O aluno trouxe várias estrelas prontas.

O professor deve ao fim dos desafios desdobrar as folhas e fazer uma observação com os alunos sobre as construções obtidas e a Geometria envolvida.

### OBJETIVOS:

Trabalho com senso de observação.

Construção de triângulos, trapézio e retângulos.

Raciocínio lógico e passo a passo.

### PÚBLICO ALVO:

Esta atividade pode ser aplicada a partir do 6º ano do Ensino Fundamental.

### MATERIAL NECESSÁRIO:

Quadrado de papel e tesoura.

### DESENVOLVIMENTO:

Passo 1: Dobre a folha ao meio levando os vértices  $A$  e  $B$  sobre os vértices  $D$  e  $C$  respectivamente. Desdobre. Encontramos o segmento  $\overline{EF}$  paralelo aos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ . Recorte o quadrado por esse segmento.

Passo 2: Dobre as duas partes ao meio obtendo os segmentos  $\overline{GH}$  e  $\overline{IJ}$ , não desdobre.

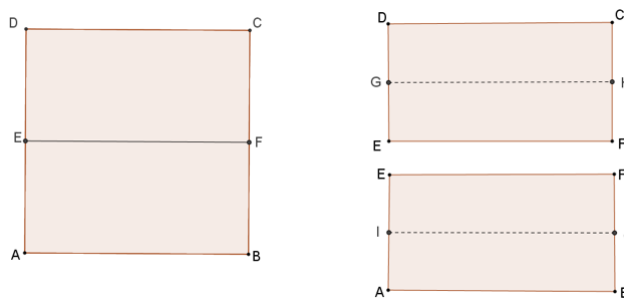


Figura 6.11 – Construção estrela de quatro pontas.

Passo 3: Dobre as duas partes ao meio novamente, mas agora levando os pontos  $A$  sobre  $B$ ,  $I$  sobre  $J$ ,  $D$  sobre  $C$  e  $G$  sobre  $H$ . Desdobre. Obtemos os segmentos  $\overline{QR}$  e  $\overline{OP}$ .

Passo 4: Vamos dobrar nas duas partes uma ponta para cima e outra para baixo, ou seja, vamos levar  $\overline{GP}$  sobre  $\overline{PO}$  e  $\overline{OC}$  sobre  $\overline{OP}$ . De modo análogo, na outra parte, dobre  $\overline{QJ}$  sobre  $\overline{QR}$  e  $\overline{AR}$  sobre  $\overline{RQ}$ .

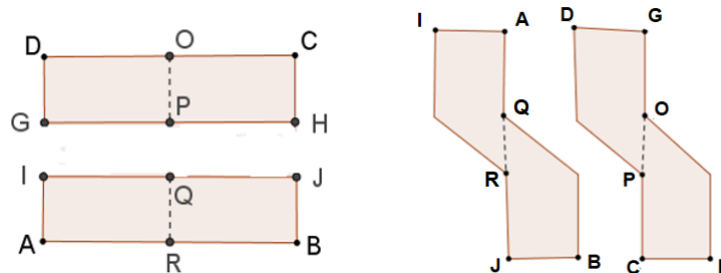


Figura 6.12 – Construção estrela de quatro pontas.

Passo 5: Vire as duas figuras de modo que a abertura sobre  $\overline{OP}$  e  $\overline{QR}$  fique para baixo, leve o vértice  $D$  em  $O$  e o vértice  $H$  em  $P$ ; analogamente na outra parte da figura leve  $I$  em  $Q$  e  $B$  em  $R$ .

Passo 6: Dobre  $\overline{OG}$  sobre  $\overline{OP}$  e  $\overline{PC}$  sobre  $\overline{PO}$ , desdobre, analogamente, dobre  $\overline{QA}$  sobre  $\overline{QR}$  e  $\overline{RJ}$  sobre  $\overline{RQ}$ , desdobre.

Passo 7: Coloque uma parte sobre a outra deixando as aberturas voltadas para baixo, os segmentos  $\overline{OP}$  e  $\overline{QR}$  devem ser posicionados de forma perpendicular, dobre o vértice  $J$  sobre  $Q$ , depois o vértice  $C$  sobre  $J$ , encaixe o vértice  $G$  dentro da abertura que restou de  $\overline{QJ}$ , encaixe o vértice  $A$  dentro da abertura que restou de  $\overline{OG}$ .

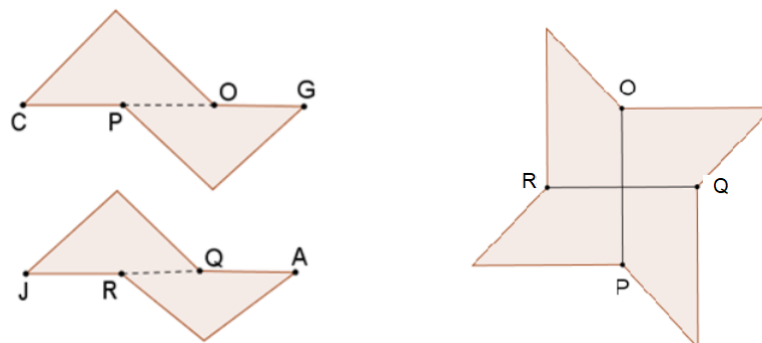


Figura 6.13 – Construção estrela de quatro pontas.

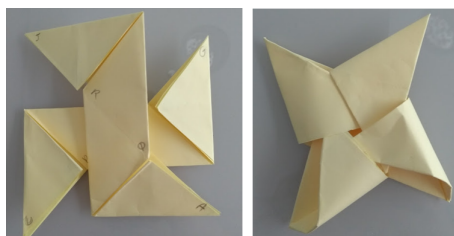


Figura 6.14 – Construção estrela de quatro pontas.

**AVALIAÇÃO:**

A avaliação foi realizada através da participação dos alunos nas atividades.

O resultado esperado dos alunos consiste em que eles dobrem paralelas e perpendiculares formando triângulos, construindo a estrela.

### **ANÁLISE DOS RESULTADOS:**

Unidade: EMEB Humberto Brasi - Mogi Mirim.

Ano: 8º C - 25 alunos.

Tempo de aplicação: 1 aula de 50 minutos.

No 8º ano, o aluno que trouxe a dobradura já havia ensinado alguns colegas a construir a estrela, assim houve cooperação dos que já sabiam ensinando os alunos que não sabiam.

O objetivo principal, além de construir a dobradura, era que os alunos conseguissem trabalhar com perpendiculares, paralelas e diagonais realizadas a cada dobra. Ao fim da construção, ao desdobrar uma das partes foi possível observar a forma de vários triângulos.

Após terminar os desafios, desdobrei as folhas com os resultados finais, onde foi feita a observação da obtenção de triângulos.

O professor que aplicar esta atividade, também pode trabalhar com outros polígonos como paralelogramos, retângulos e trapézios.

O resultado foi muito satisfatório. Apesar de algumas dificuldades, os alunos alcançaram o objetivo esperado. Houve cooperação dos alunos e bastante atenção à obtenção de polígonos e triângulos congruentes.

## **6.2 Atividades envolvendo números reais**

Os alunos, em sua maioria, já apresentam certo conhecimento sobre números naturais e muitas vezes também sobre os inteiros antes mesmo de cursar o Ensino Fundamental, uma vez que, esses números fazem parte de seu dia a dia, o que pode tornar o trabalho do professor mais satisfatório e produzir melhores resultados na aprendizagem dos alunos. Porém, quando é iniciado o trabalho com números racionais e irracionais no Ensino Fundamental, nem sempre os resultados são satisfatórios, mesmo os números racionais em sua forma decimal, fazendo parte do dia a dia dos alunos. É normal ouvirmos perguntas do tipo: estou dividindo, como o resultado pode ser maior que o dividendo?

De acordo com o autor [PIRES] [24] p. 1, apesar de aparentar simplicidade, a construção dos números racionais é complexa. Pode haver confusão se os alunos não souberem interpretar as diferentes representações que esses números apresentam e os diferentes significados: quociente, parte-todo, medida, razão e operador.

Um erro frequente é quando o professor trabalha apenas um modelo, o aluno

acaba assimilando de forma errada a formação do número. Por exemplo, quando o professor trabalha somente com parte-todo, que acontece quando ensinamos os alunos geometricamente, que em uma fração o denominador é o total de partes iguais de uma figura e o numerador é a quantidade de partes coloridas, o aluno pode entender que a fração são dois números inteiros distintos, sem relação entre si, não assimilando que uma fração é uma quantidade.

Em 2016, nas escolas estaduais do Estado de São Paulo, foi aplicada uma avaliação externa (Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP)<sup>1</sup>, nos 9º anos do Ensino Fundamental, 1º bimestre, na qual foram avaliadas as seguintes habilidades:

Reconhecer as diferentes representações de um número racional.

Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados.

Reconhecer o conceito de razão em diversos contextos: proporcionalidade, escala, velocidade, porcentagem etc.

Identificar relações entre conjuntos numéricos ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{I}$ ,  $\mathbb{R}$ ).

Identificar a fração geratriz de uma dízima periódica e vice-versa. Diferenciar número racional de número irracional.

Localizar números reais na reta, por meio de construções geométricas.

Analisando os resultados em nível de Diretoria de Ensino da Região de Mogi Mirim, podemos observar que os resultados foram insatisfatórios e percentualmente muito baixos em relação a outras duas AAPs que foram aplicadas e nas quais foram avaliadas outras habilidades.

Isso mostra que não houve um desenvolvimento completo dos alunos nessas habilidades, o que podemos relacionar com a dificuldade de compreensão do conteúdo.<sup>2</sup>

A seguir apresentaremos algumas atividades utilizando dobraduras e também régua e compasso, nas quais abordaremos estas habilidades relacionadas aos números reais.

Além das atividades apresentadas aqui, também pode-se aproveitar a atividade 6.3.2, a duplicação do cubo.

### 6.2.1 Localização do número $\frac{1}{n}$ na reta numérica

A necessidade de contar e medir, foi fundamental para descoberta dos números. Os números representam parte primordial em nossas vidas, nas ciências e em tudo que nos cerca.

---

<sup>1</sup>Estas avaliações acontecem bimestralmente no Ensino Fundamental e Médio. Os professores, gestores e funcionários das Diretorias de Ensino e Escolas Estaduais têm acesso livre as avaliações e resultados.

<sup>2</sup>Caso o leitor queira saber mais sobre o assunto, pode consultar o autor [PIRES] [24]

Os números naturais surgiram da necessidade de contar, os números inteiros para indicar medidas menores que zero, os racionais para medir quantidades que são parte de uma ou mais unidade e os irracionais da importância de encontrar valores incomensuráveis, como por exemplo,  $\sqrt{2}$ . Todos estes conjuntos são subconjuntos do conjunto dos números reais, que é representado pela letra  $\mathbb{R}$ , e definido como sendo a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

Para realizar uma contagem ou uma medição, utilizamos da operação de correspondência. Quando contamos, estabelecemos uma correspondência entre o objeto e a quantidade. O mesmo acontece quando medimos, para medir precisamos comparar e duas grandezas de mesma espécie, para isso é necessário definir uma unidade padrão, que servirá para comparação, como por exemplo, para medir distâncias usamos as unidades de cm, m, km etc.

A medição de segmentos geométricos, nos levou a noção de número real. Por esse motivo, podemos fazer uma correspondência biunívoca entre um número real e um comprimento de segmento de reta.

Essa relação é muito importante e por isso podemos associar e representar o conjunto dos números reais com a reta real. Para isso, associamos um número real a um ponto  $P$  da reta. Isso é feito da seguinte maneira:

Dada uma reta  $r$ , escolhamos um ponto  $O$  que será a origem, o qual associamos ao número real zero. Escolhemos um ponto  $A$  diferente de  $O$ , o segmento  $OA$  será a unidade de comprimento, e o ponto  $A$  associamos ao número real um. A reta  $r$  fica então dividida em duas semirretas de origem  $O$ , podemos escolher do lado direito de  $O$  os números positivos, do lado esquerdo os números negativos.

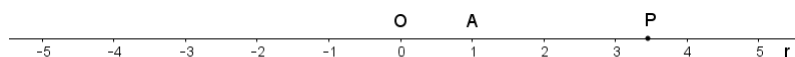


Figura 6.15 – Reta real.

Dado um ponto  $P$  pertencente à reta real, o segmento  $OP$  é comensurável em relação a  $OA$ , se existir um segmento  $OX$  que caiba  $n$  vezes em  $OP$  e  $m$  vezes em  $OA$ . A coordenada do ponto  $P$ , tem abscissa  $\frac{-n}{m}$  se estiver a esquerda de  $O$ , ou  $\frac{n}{m}$  se estiver a direita de  $O$ .

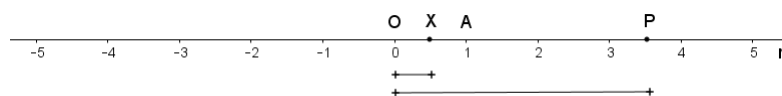


Figura 6.16 – Segmentos  $\overline{OP} = n\overline{OX}$  e  $\overline{OA} = m\overline{OX}$  na reta real.

Vamos obter a localização do ponto  $P$ , de coordenada  $\frac{1}{3}$  de duas maneiras: com construção com régua e compasso e depois através de dobradura.

Os alunos já haviam feito algumas construções utilizando régua e compasso, porém eles não têm prática no uso, precisando de várias intervenções.

Para justificativas das construções é necessário que os alunos já tenham conhecimento dos conteúdos Teorema de Tales ou semelhança de triângulos.

### **OBJETIVOS:**

Investigar a localização de números racionais na reta real por meio da utilização de régua sem escala e compasso e também por dobraduras.

Argumentar com base em proposições e raciocinar de forma indutiva e dedutiva para resolver problemas geométricos.

### **PÚBLICO ALVO:**

Esta atividade pode ser aplicada no 8º e 9º anos, ou em outras séries que o professor achar pertinente.

### **MATERIAL NECESSÁRIO:**

Régua, compasso, lápis, borracha e papel sulfite.

### **CONSTRUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO:**

Esta atividade, realizada com régua e compasso, foi retirada do caderno do professor do 9º ano volume 1, [28] p. 44, material distribuído pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo com domínio público.

Essa construção é interessante pois, serve de exemplo para generalizar a construção de qualquer número racional  $\frac{1}{n}$ , com  $n \in \mathbb{Z}$  e  $n \neq 0$ , como também de números do tipo  $\frac{m}{n}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ; por exemplo,  $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}, \dots$  etc.

Passo 1: Trace uma reta  $t$ ;

Passo 2: Marque na reta os pontos correspondentes a 0 e 1; chame os pontos de  $A$  e  $B$ , respectivamente.

Passo 3: Trace outra reta  $r$ , passando por  $A$ .

Passo 4: Na reta  $r$ , usando o compasso marque a partir de  $A$ , três segmentos de mesmo comprimento,  $AC$ ,  $CD$  e  $DE$ , nesta ordem a partir de  $A$ .

Passo 5: Trace a reta determinada por  $B$  e  $E$ .



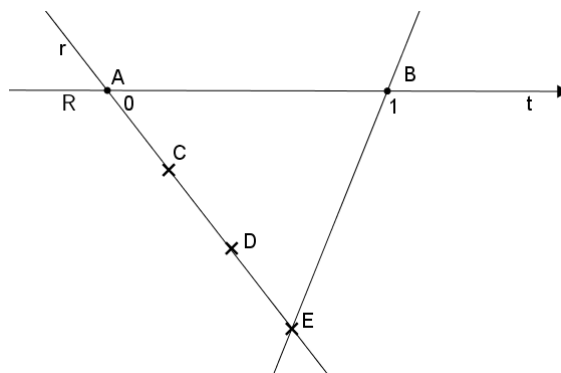


Figura 6.17 – Construção do segmento de medida  $\frac{1}{3}$  com régua e compasso.

O objetivo agora é traçar retas paralelas a reta  $BE$ , passando por  $C$  e  $D$ . A interseção dessas retas com  $\overline{AB}$  são os pontos correspondentes a  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$ .

Para traçar as paralelas:

Passo 6: Marque um ponto  $P$  no segmento  $\overline{BE}$ .

Passo 7: Com a ponta seca em  $P$  abra o compasso até  $D$ , traçando uma semicircunferência de diâmetro  $\overline{FE'}$ .

Passo 8: Transfira a medida  $E'D$  para  $F$ , obtendo o ponto  $H$  na circunferência.

Passo 9: Trace uma reta  $s$  passando por  $D$  e  $H$ ,  $s$  é paralela à  $\overline{BE}$ . A interseção da reta  $s$  com a reta  $t$  é o ponto  $I$ , correspondente ao número  $\frac{2}{3}$ .

Para determinar o ponto  $J$ , correspondente ao número  $\frac{1}{3}$  é só transferir a medida entre  $I$  e  $B$  com o compasso, na reta real, a partir de  $A$ .

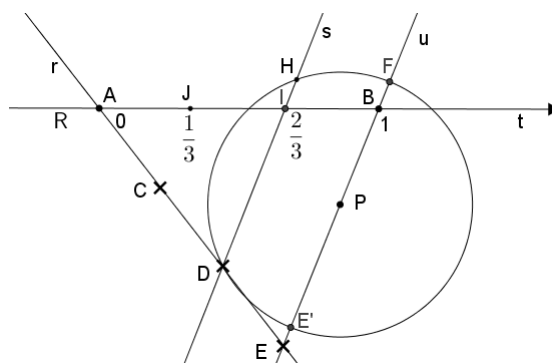


Figura 6.18 – Construção do segmento de medida  $\frac{1}{3}$  com régua e compasso.

**Demonstração:** Temos  $AB = 1$  unidade e vamos considerar  $AE$  com medida  $x$  unidades. Por construção  $AC = \frac{1}{3}x$  e  $AD = \frac{2}{3}x$ .

Usando o Teorema de Tales no triângulo  $ABE$ , sendo  $\overline{ID} \parallel \overline{BE}$  temos a relação:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AI};$$

$$\text{ou seja, } \frac{x}{1} = \frac{\frac{2}{3}x}{AI};$$

$$\text{logo, } AI = \frac{2}{3}AB.$$

É muito simples dividir um segmento de reta em duas, quatro, ou  $2^n$ , com  $n$  natural, partes iguais e isso pode ser feito com auxílio da mediatriz. Mas, para encontrarmos a terça ou a quinta parte, por exemplo, como vimos foi preciso fazer uso de resultados diversificados, como por exemplo, o Teorema de Tales ou o Teorema Fundamental da Proporcionalidade. No caso das dobraduras a dificuldade segue caminho similar. Encontrar a metade ou a quarta parte ou  $\frac{1}{2}$ , torna-se simples, porém, vamos mostrar que a obtenção do ponto correspondente a  $\frac{1}{3}$ , já se torna um pouco mais elaborada.

### CONSTRUÇÃO ATRAVÉS DE DOBRADURAS:

Vamos proceder por recursão para o caso de encontrar  $\frac{1}{3}$  a partir de  $\frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$ .

Uma vez encontrado  $\frac{1}{3}$ , considerando que  $\frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$ , vamos encontrar  $\frac{1}{4}$ .

Primeiramente vamos encontrar o segmento de medida  $\frac{1}{2}$  do lado do quadrado.

Passo 1: Dado um quadrado  $ABCD$ , cujo lado mede uma unidade, levando  $A$  sobre  $B$  e  $D$  sobre  $C$ , temos os pontos médios dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{DC}$ ,  $F$  e  $E$  respectivamente. Desdobre. Temos que  $AF$  é  $\frac{1}{2}$  do lado do quadrado.

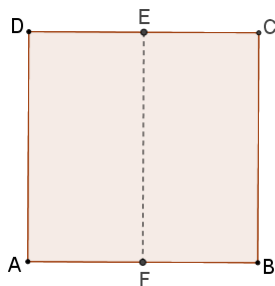


Figura 6.19 – Construção do segmento de medida  $\frac{1}{2}$  com dobradura.

Vamos encontrar um segmento de medida  $\frac{1}{3}$  do lado do quadrado.

Passo 2: Dobre a diagonal  $\overline{AC}$  levando  $D$  sobre  $B$ . Desdobre.

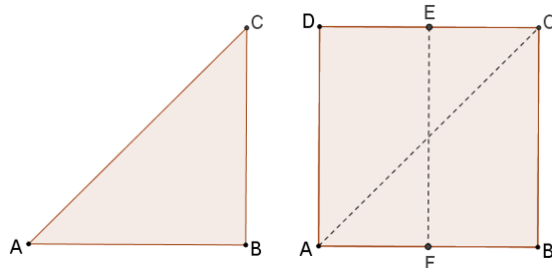


Figura 6.20 – Construção do segmento de medida  $\frac{1}{3}$  com dobradura.

Passo 3: Faça uma dobra passando por  $D$  e  $F$ . Desdobre. Denote por  $G$  a intersecção de  $\overline{AC}$  e  $\overline{DF}$ .

Passo 4: Dobre  $A$  sobre  $\overline{AB}$  de forma que a dobra passe por  $G$ . Desdobre. Denote por  $H$  a intersecção dessa dobra com  $\overline{AB}$ . Note que  $AH$  é  $\frac{1}{3}$  do lado do quadrado.

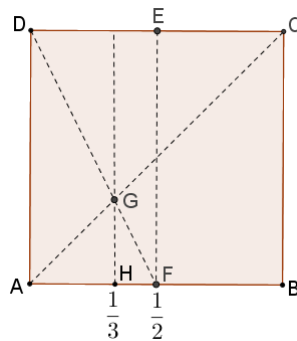


Figura 6.21 – Construção do segmento de medida  $\frac{1}{3}$  com dobradura.

Vamos encontrar um segmento de medida  $\frac{1}{4}$  do lado do quadrado.

Passo 5: Faça uma dobra passando por  $D$  e  $H$ . Desdobre. Denote por  $I$  a intersecção de  $\overline{AC}$  e  $\overline{DH}$ .

Passo 6: Dobre  $A$  sobre  $\overline{AB}$  de forma que a dobra passe por  $I$ . Desdobre. Denote por  $J$  a intersecção dessa dobra com  $\overline{AB}$ . Note que  $AJ$  é  $\frac{1}{4}$  do lado do quadrado. A justificativa se encontra mais adiante.

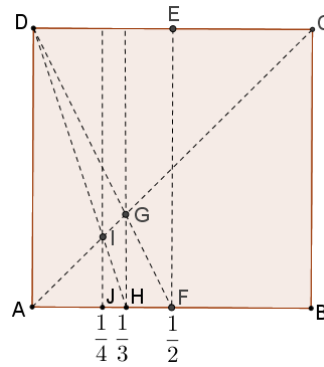


Figura 6.22 – Construção do segmento de medida  $\frac{1}{4}$  com dobradura.

A partir de  $\frac{1}{5-1} = \frac{1}{4}$ , procedendo da mesma maneira, encontramos  $\frac{1}{5}$ . Continuando o processo podemos encontrar qualquer número racional  $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

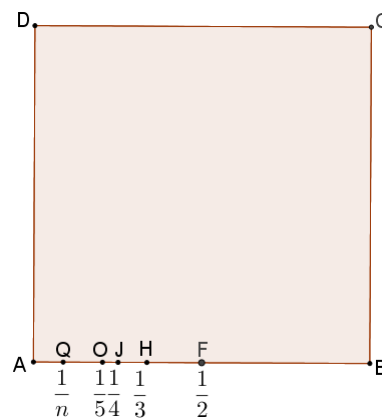


Figura 6.23 – Construção do segmento de medida  $\frac{1}{n}$  com dobradura.

**Demonstração:** Para  $AH = \frac{1}{3}$ :

Consideremos os triângulos  $DAF$  e  $GHF$ , temos por construção que  $\angle DAF = \angle GHF = 90^\circ$  e  $\angle AFD$  é ângulo comum, então pelo caso A.A. de semelhança de triângulos:  $\triangle DAF \sim \triangle GHF$ . Também por construção  $\overline{AH} \equiv \overline{GH}$ . Consideremos  $GH = a$  daí:

$$\frac{DA}{AF} = \frac{GH}{HF} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\frac{1}{2} - a};$$

então,  $\frac{a}{2} = \frac{1}{2} - a$ , ou ainda  $a = 1 - 2a$ ;

logo,  $a = AH = \frac{1}{3}$ .

Para  $AJ = \frac{1}{4}$ :

De forma análoga a anterior, Consideremos os triângulos  $DAH$  e  $IJH$ , por construção  $\angle DAH = \angle IJH = 90^\circ$  e  $\angle AHD$  é ângulo comum, então pelo caso A.A. de semelhança de triângulos:  $\triangle DAH \sim \triangle IJH$ . Também por construção  $\overline{AJ} \equiv \overline{IJ}$ . Consideremos  $IJ = h$  daí:

$$\frac{DA}{AH} = \frac{IJ}{JH} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{h}{\frac{1}{3} - h};$$

$$\text{então, } \frac{h}{3} = \frac{1}{3} - h, \text{ ou ainda, } h = 1 - 3h;$$

$$\text{logo, } h = AJ = \frac{1}{4}.$$

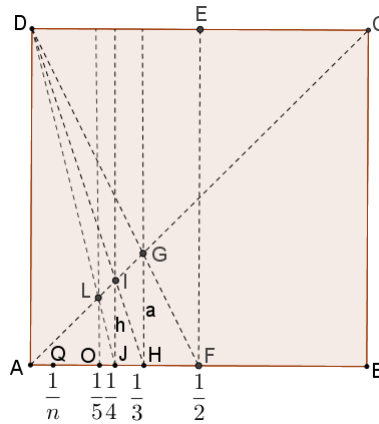


Figura 6.24 – Construção do segmento de medida  $\frac{1}{n}$  com dobradura.

$$\text{Para } AQ = \frac{1}{n}:$$

Vamos supor já localizado o ponto  $P$ , correspondente ao número racional  $\frac{1}{n-1}$ .

A partir dele vamos considerar como  $R$  a intersecção de  $\overline{DP}$  com  $\overline{AP}$  e  $Q$  a perpendicular baixada de  $R$  em  $\overline{AB}$ .

Consideremos os triângulos  $DAP$  e  $RQP$ , por construção  $\angle DAP = \angle RQP = 90^\circ$  e  $\angle APD$  é ângulo comum, então pelo caso A.A. de semelhança de triângulos:  $\triangle DAP \sim \triangle RQP$ . Também por construção  $\overline{AQ} \equiv \overline{RQ}$ . Consideremos  $RQ = x$  daí:

$$\frac{DA}{AP} = \frac{RQ}{QP} = \frac{1}{\frac{1}{n-1}} = \frac{x}{\frac{1}{n-1} - x};$$

$$\text{então, } \frac{x}{n-1} = \frac{1}{n-1} - x, \text{ ou ainda, } x = 1 - (n-1)x;$$

$$x + (n-1)x = 1;$$

$$\text{logo, } x = AQ = \frac{1}{n}.$$

**AVALIAÇÃO:**

A avaliação foi realizada através da análise da participação dos alunos nas atividades.

Os resultados esperados durante a atividade eram que os alunos construíssem com régua e compasso o segmento com medida da unidade e que construíssem com uma folha de papel uma dobra com medida de  $\frac{1}{3}$  da lateral do papel.

Após as construções esperava-se que os alunos juntamente com o professor fizessem as demonstrações através do Teorema de Tales ou da Semelhança de Triângulos.

### **ANÁLISE DOS RESULTADOS:**

Unidade: E. E. Prof. Anália de Almeida Bueno - Mogi Guaçu.

Ano: 9º A - 30 alunos.

Tempo de aplicação: 3 aulas de 50 minutos.

No 9º ano, ocorreu que quase metade dos alunos não levou compasso, tiveram que emprestar para os colegas e buscar em outras salas.

Muitos alunos ainda encontravam dificuldades em manipular o compasso. Alguns não conseguiam transportar a unidade de uma reta para outra, obtendo unidades de diferentes tamanhos. Foi preciso a minha intervenção para que não houvesse muitos erros.

Com a dobradura os alunos não tiveram problemas, uma vez que essa turma já havia trabalhado com dobraduras nos anos anteriores.

O resultado foi satisfatório, a construção com régua e compasso apesar de trabalhosa foi desenvolvida por todos. Após a construção os alunos participaram do desenvolvimento da justificativa.

A dobradura despertou o interesse dos alunos. Após terminada a construção muitos mediram o comprimento da folha e depois o comprimento relativo para verificar a veracidade da construção. Os alunos participaram também do desenvolvimento da justificativa.

### **6.2.2 O número de ouro e o retângulo áureo**

Como visto no capítulo 3, o número de ouro e o retângulo áureo são temas de grande abrangência e podem resultar em diferentes e produtivos trabalhos com os alunos, uma vez que a amplitude de lugares onde se encontra o número de ouro é grande. Aqui veremos somente um, entre tantos recursos pedagógicos para abordar esse conteúdo.

Pode ser facilmente relacionado e pode ser feito um trabalho interdisciplinar com outras disciplinas como Artes e Ciências.

Os alunos já haviam trabalhado com razão e proporção áurea no ano anterior,

logo não foi necessária uma introdução longa, somente recordar o assunto.

Para justificativa é necessário que os alunos já tenham trabalhado com os conteúdos de semelhança de triângulos, proporcionalidade e o Teorema de Pitágoras.

### Construção do retângulo áureo e obtenção do número de ouro:

Esta atividade será feita de forma semelhante a [CAVACAMI] [8] p. 39.

### OBJETIVOS:

Construção de um retângulo com razão áurea entre suas medidas.

Exploração dos números irracionais.

Argumentar a validade do resultado de uma dobradura.

### PÚBLICO ALVO:

Esta atividade pode ser aplicada do 8º ao 9º ano, ou em outras séries que o professor achar pertinente.

### MATERIAL NECESSÁRIO:

Papel sulfite.

### DESENVOLVIMENTO:

Passo 1: Dobre um quadrado de papel, levando os vértices  $A$  sobre  $B$  e  $D$  sobre  $C$ , paralelamente às laterais, obtendo os pontos  $E$  e  $F$ , pontos médios de  $\overline{DC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente.

Passo 2: Dobre o retângulo resultante ao meio pela diagonal  $\overline{AE}$ . Desdobre toda a folha.

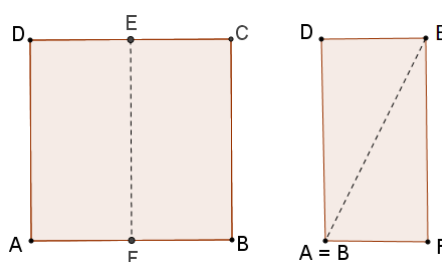


Figura 6.25 – Construção do retângulo áureo.

Passo 3: Leve o segmento  $\overline{AB}$  sobre a última dobra feita  $\overline{BE}$ , temos assim a bissetriz do ângulo  $ABE$ , não desdobre, vire a folha.

Passo 4: Dobre na parte da frente de forma que o início do vinco à direita seja a interseção entre o lado direito do quadrado a última dobra realizada, ou seja, faça uma dobra perpendicular aos lados  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  passando por  $H$ . Desdobre.

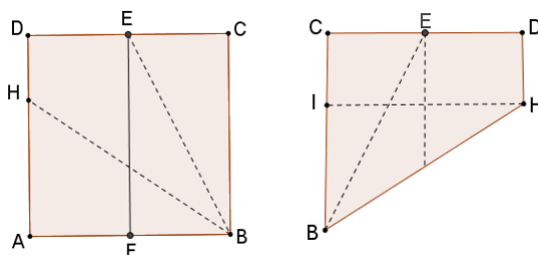


Figura 6.26 – Construção do retângulo áureo.

Ao desdobrarmos temos um retângulo com dimensões de um retângulo áureo.

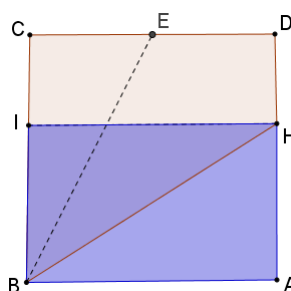


Figura 6.27 – Construção do retângulo áureo.

Vamos mostrar que o quociente entre as dimensões do retângulo resulta no número de ouro.

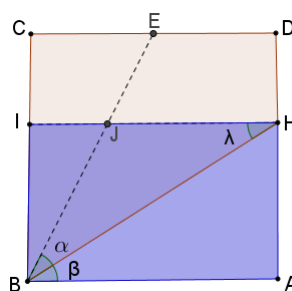


Figura 6.28 – Demonstração da construção do retângulo áureo.

Os triângulos  $BCE$  e  $BIJ$  são semelhantes pelo critério A.A. Temos a razão:

$$\frac{CB}{IB} = \frac{CE}{IJ} = \frac{BE}{BJ} \text{ e, por propriedade de proporção, temos:}$$

$$\frac{CB}{IB} = \frac{CE + BE}{IJ + BJ}.$$

Vamos supor que o lado do quadrado  $ABCD$  tenha medida  $l$ :

Então:  $AD = CD = l$  e  $ED = \frac{l}{2}$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $BCE$  temos:



$$BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4l^2 + l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{5}}{2}.$$

Por construção,  $\alpha = \beta$  e  $\lambda = \beta$  porque são alternos internos, então  $\alpha = \lambda$ .

Disso obtemos que o triângulo  $BHJ$  é isósceles com base  $\overline{BH}$  então,  $IJ + BJ = IJ + JH = l$ . Ao calcularmos o quociente entre as dimensões do retângulo, temos:

$$x = \frac{CB}{IB} = \frac{CE + BE}{IJ + BJ} = \frac{\frac{l}{2} + l\sqrt{5}}{l} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Assim, obtivemos a razão áurea no quociente das dimensões do retângulo, com valor aproximado de 1,618.

### **AVALIAÇÃO:**

A avaliação foi realizada através da análise da participação dos alunos nas atividades.

Os resultados esperados eram que os alunos construíssem um retângulo com proporção áurea e validassem a veracidade dessa proporção no retângulo, explorando assim os números irracionais e suas características.

Entender a utilidade e conhecimento de conceitos geométricos como semelhança de triângulos, proporcionalidade e Teorema de Pitágoras para chegar ao objetivo final.

### **ANÁLISE DOS RESULTADOS:**

Unidade: E. E. Prof. Anália de Almeida Bueno - Mogi Guaçu.

Ano: 9º A - 30 alunos e B - 29 alunos.

Tempo de aplicação: 1 aula de 50 minutos em cada ano.

Nos dois 9º anos, os alunos desenvolveram bem a dobradura, uma vez que essa turma já havia trabalhado com dobraduras nos anos anteriores.

Para validar a proporção áurea, alguns alunos não lembravam a passagem em que usamos proporcionalidade, sendo necessário uma breve retomada de conteúdo.

Os alunos também tiveram um pouco de dificuldade para compreender a congruência dos ângulos, sendo necessário uma nova explicação.

O resultado foi satisfatório, os alunos participaram e desenvolveram corretamente a atividade.

### **6.2.3 Construção de um retângulo com um lado de medida $\sqrt{5} + 2$ e diagonal $\sqrt{5} + 3$ .**

Esta atividade está de acordo com [CAVACAMI] [8] p. 71.

Além desse retângulo ter medidas especiais, sua diagonal divide o ângulo reto

em dois ângulos: um de  $54^\circ$  e outro de  $36^\circ$ , o que será mostrado mais adiante.

Este retângulo será usado na seção 6.5.10 para construção do módulo pentagonal utilizado na montagem dos poliedros de Platão.

### OBJETIVOS:

Construção de um retângulo com medidas especiais.

Exploração dos números irracionais.

Transportar segmentos usando dobraduras.

### PÚBLICO ALVO:

Esta atividade pode ser aplicada do 8º ao 9º ano, ou em outras séries que o professor achar pertinente.

### MATERIAL NECESSÁRIO:

Papel sulfite e lápis.

### DESENVOLVIMENTO:

Passo 1: Comece com um retângulo de dimensões  $6 \times 4$ . Dobre em um quadrado  $2 \times 2$ .

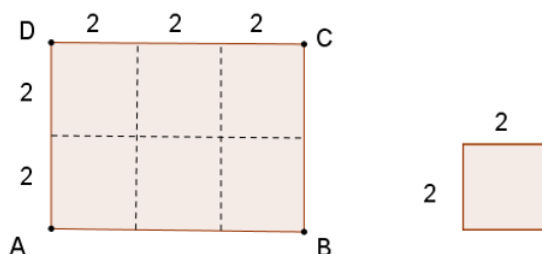


Figura 6.29 – Construção de um retângulo com um lado de medida  $\sqrt{5} + 2$  e diagonal de medida  $\sqrt{5} + 3$ .

Passo 2: Dobre o quadrado  $2 \times 2$  ao meio, obtendo um retângulo  $2 \times 1$  e depois dobre a diagonal do retângulo, essa diagonal terá medida  $\sqrt{5}$ . Desdobre. Desta forma é obtida uma malha triangular com triângulos de medidas especiais, catetos medindo 1 e 2, logo, hipotenusa de medida  $\sqrt{5}$ .

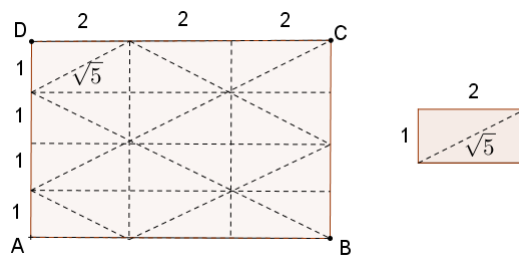


Figura 6.30 – Construção de um retângulo com um lado de medida  $\sqrt{5} + 2$  e diagonal de medida  $\sqrt{5} + 3$ .

Passo 3: Na parte inferior do retângulo inicial, no retângulo central, dobre a diagonal  $\sqrt{5}$  sobre  $\overline{AB}$ , obtendo o ponto  $F$ .

Passo 4: Dobre o primeiro retângulo ao meio e transfira acrescentando a medida 1 após o ponto  $F$  no segmento  $\overline{AB}$ , marque o ponto  $G$ . Temos as duas medidas procuradas,  $\sqrt{5} + 2$  e  $\sqrt{5} + 3$ .

Passo 5: Dobre uma perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$  passando por  $F$ , obtendo o segmento  $\overline{FI}$ .

Passo 6: Dobre a medida  $\sqrt{5} + 3$  sobre o segmento  $\overline{FI}$  passando por  $A$ , obtendo o retângulo procurado.

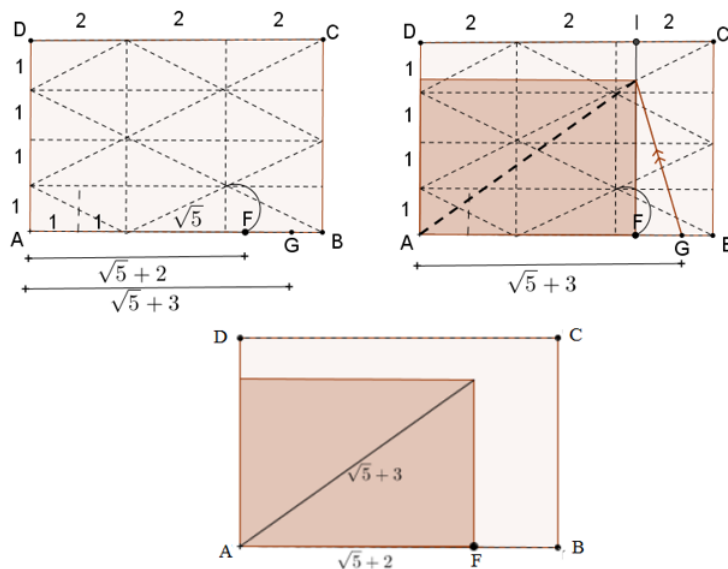


Figura 6.31 – Construção de um retângulo com um lado de medida  $\sqrt{5} + 2$  e diagonal de medida  $\sqrt{5} + 3$ .

**AVALIAÇÃO:**

Esta atividade não foi aplicada em sala de aula.

Como resultado espera-se que os alunos construam um retângulo com as dimensões esperadas e façam os transportes dos segmentos de forma correta.

Espera-se também que observem e discutam sobre a obtenção de outros números irracionais.

### 6.3 Os três problemas clássicos da matemática grega

Como já vimos no capítulo 3, esses problemas foram muito populares na matemática da antiga Grécia.

Hoje podemos encontrar várias soluções alternativas destes problemas, utilizando técnicas variadas e outros instrumentos, exceto régua não graduada e o compasso, com as operações aceitas.

Neste trabalho vamos abordar a resolução de maneira alternativa de dois destes problemas, a trisseção do ângulo e a duplicação do cubo, possíveis com o uso da técnica de dobradura.

Antes de apresentar a atividade, os alunos fizeram uma pesquisa sobre o assunto, tendo como objetivo conhecer os principais matemáticos da época, que estudaram e colaboraram para as diferentes resoluções dos problemas.

Para a justificativa é necessário que os alunos já tenham conhecimento do conteúdo de congruência de triângulos.

#### 6.3.1 Trisseção do ângulo<sup>3</sup>

##### **OBJETIVOS:**

Dividir um ângulo de qualquer medida em três ângulos congruentes.

Estudo da divisão de ângulos em partes iguais.

Uso do transferidor.

##### **PÚBLICO ALVO:**

Esta atividade pode ser aplicada do 7º ao 9º ano, ou em outras séries que o professor achar pertinente.

##### **MATERIAL NECESSÁRIO:**

Papel sulfite, lápis, régua, compasso e transferidor.

##### **DESENVOLVIMENTO:**

**Trisseção do ângulo com a técnica da régua e compasso.**

---

<sup>3</sup>Esta construção foi feita por Hisashi Abe, por volta de 1970.

Esta atividade está de acordo com [REZENDE] [26] p. 130.

Como visto no capítulo 3, não é possível trisseccionar todos os ângulos com uso de régua e compasso, vimos como exemplo que o ângulo de  $60^\circ$  não pode ser trisseccionado pois,  $\cos 60^\circ$  não é construtível.

Veremos agora, um exemplo de trisseção de ângulo com régua e compasso, vamos dividir o ângulo de  $90^\circ$  em três ângulos de mesma medida.

Vamos primeiro construir o ângulo de  $90^\circ$ :

Passo 1: Trace uma reta  $t$  horizontal, marque em  $t$  um ponto  $O$ .

Passo 2: Com a ponta seca do compasso no ponto  $O$ , trace dois pontos  $A$  e  $B$  em  $t$ , de forma que  $O$  seja ponto médio do segmento  $AB$ .

Passo 3: Trace a mediatriz de  $\overline{AB}$ . Para isso, trace duas circunferências, ambas com raio um pouco maior que  $AO$ , uma com centro em  $A$  e outra com centro em  $B$ . Os pontos  $C$  e  $D$ , de intersecção dessas duas circunferências, são equidistantes dos pontos  $A$  e  $B$ . Logo, pertencem à mediatriz do segmento auxiliar  $AB$ .

Passo 4: Trace a mediatriz de  $\overline{AB}$ . É claro que a reta  $u$  é perpendicular à reta  $t$ , e com isso construímos quatro ângulos de  $90^\circ$ .

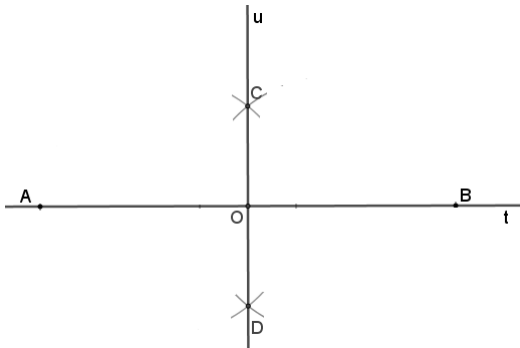


Figura 6.32 – Construção trisseção do ângulo reto.

Agora, vamos trisseccionar o ângulo  $COB$ :

Passo 5: Uma vez construído o ângulo de  $90^\circ$ , trace uma circunferência de raio conveniente e centro no vértice  $O$ ; com esse mesmo raio trace mais duas circunferências com centros respectivamente nos pontos de intersecção  $E$  e  $F$  da primeira circunferência com os lados do ângulo reto.

Passo 6: Marque os pontos  $G$  e  $H$  de intersecção da primeira circunferência com as outras duas circunferências, as intersecções que ocorrem dentro do ângulo  $COB$ . Trace as semirretas  $OG$  e  $OH$ .

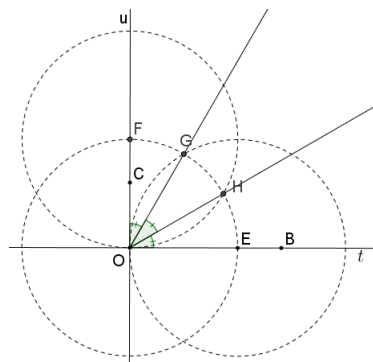


Figura 6.33 – Construção trisseccção do ângulo reto.

Assim trisseccionamos o ângulo reto e então  $\angle COG = \angle GOH = \angle HOB = 30^\circ$ .

**Demonstração:** Vejamos que os pontos  $O$ ,  $E$  e  $G$  são vértices de um triângulo equilátero com ângulos internos de medida  $60^\circ$ , uma vez que as circunferências de centros  $O$  e  $E$  são iguais pois têm raios de mesma medida.

Temos que  $\angle FOG = 30^\circ$  é complemento de  $\angle GOE$ .

De modo análogo, temos o triângulo equilátero  $OHF$  e  $\angle HOE = 30^\circ$  é complemento de  $\angle FOH$ .

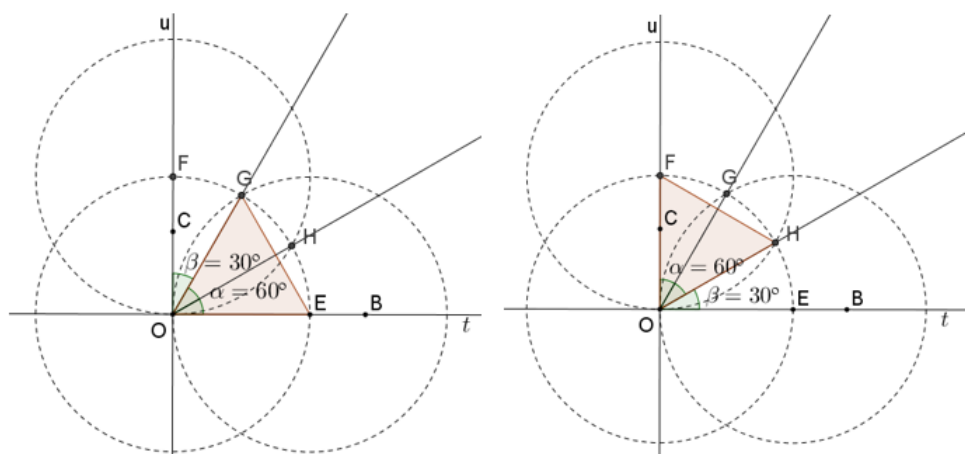


Figura 6.34 – Construção trisseccção do ângulo reto.

Portanto, trisseccionou o ângulo reto, com o complemento de  $60^\circ$ .

**Trisseccção ângulo agudo com técnica da dobradura.**

Esta atividade está de acordo com [CAVACAMI] [8] p. 16.

Passo 1: Em uma folha de papel, com vértices  $ABCD$ , construa com lápis um ângulo agudo a partir do vértice inferior esquerdo  $A$ , marque a intersecção com o lado

$\overline{CD}$ , com o ponto  $E$ .

Passo 2: Dobre uma paralela  $\overline{FG}$  ao lado  $\overline{CD}$ . Esta construção deve ser feita próxima ao lado  $\overline{CD}$ , para que a construção seguinte seja possível.

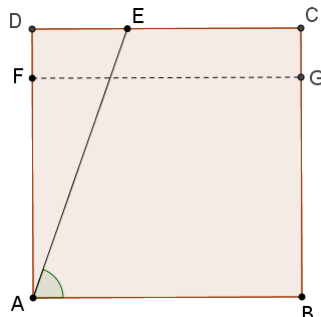


Figura 6.35 – Construção trissecção do ângulo agudo  $EAB$ .

Passo 3: Dobre uma paralela à  $\overline{AB}$ , obtendo o segmento  $HI$ , de forma que  $H$  seja ponto médio de  $\overline{FA}$  e  $I$  ponto médio de  $\overline{BG}$ .

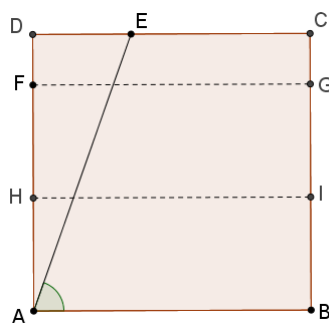


Figura 6.36 – Construção trissecção do ângulo agudo.

Passo 4: Dobre, sobrepondo  $F$  sobre  $\overline{AE}$  e  $A$  sobre  $\overline{HI}$  obtendo os pontos  $J$  e  $L$ , respectivamente, essa construção é possível pelo Axioma VI. Assinale a imagem do ponto  $L$ , por esse procedimento, e denote com a letra  $K$  a imagem do ponto  $H$ . Essa é parte da construção que não é possível com régua e compasso. Desdobre.

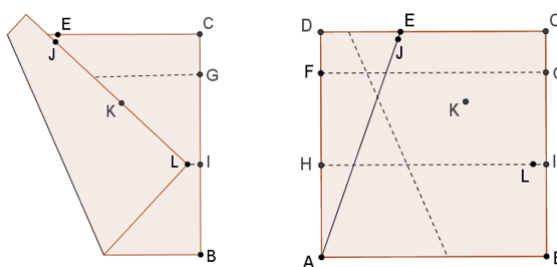


Figura 6.37 – Construção trissecção do ângulo agudo.

Passo 5: Trace os segmentos  $\overline{AK}$  e  $\overline{AL}$ , obtendo assim os três ângulos congruentes cada um medindo  $\frac{1}{3}$  de  $\angle EAB$ . Reforce os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AJ}$ .

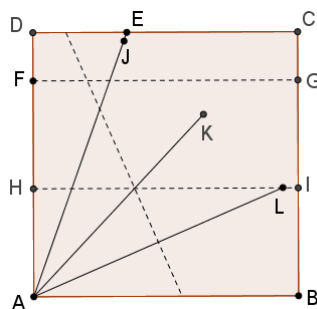


Figura 6.38 – Construção trisseção do ângulo agudo.

Nesta atividade, pode-se pedir aos alunos que utilizem o transferidor para aferir as medidas dos ângulos.

**Demonstração:** Seja  $M$  a intersecção do lado  $AB$  com a reta perpendicular à  $\overline{AB}$  por  $L$ .

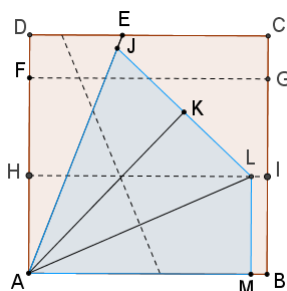


Figura 6.39 – Demonstração da trisseção do ângulo agudo.

Temos  $\triangle ALM \cong \triangle ALK$  pelo Teorema da Hipotenusa e do Cateto, pois,  $\angle AKL = \angle M = 90^\circ$ ,  $\overline{AL}$  é lado comum e  $\overline{ML} \cong \overline{LK} \cong \overline{AH}$  por construção.

Temos  $\triangle AKJ \cong \triangle AKL$ , pelo caso L.A.L., pois,  $\angle JKA = \angle AKL = 90^\circ$ ,  $\overline{AK}$  é lado comum e  $\overline{JK} \cong \overline{LK} \cong \overline{AH} \cong \overline{HF}$  por construção. Logo,  $\triangle ALM \cong \triangle ALK \cong \triangle AKJ$  e então os ângulos do vértice  $A$  são congruentes.

### Trisseção do ângulo obtuso.

Passo 1: Faça a trisseção do ângulo excedente a  $90^\circ$ ,  $\angle GEF$ .

Passo 2: Faça a trisseção do ângulo de  $90^\circ$ ,  $\angle BEG$ .

Passo 3: Some usando dobradura a trisseção do ângulo excedente com a trisseção do ângulo de  $90^\circ$ .



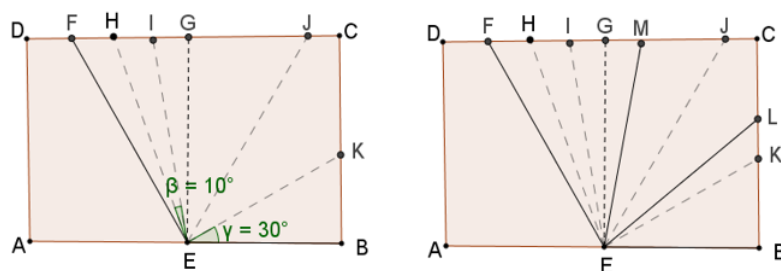


Figura 6.40 – Trisseção do ângulo obtuso.

**AVALIAÇÃO:**

A avaliação foi realizada através da participação dos alunos na atividade.

Como resultado esperado era que os alunos trisseccionassem o ângulo agudo usando a dobradura e validassem a congruência dos ângulos através do transferidor e também em conjunto com o professor através do conceito de congruência de triângulos.

**ANÁLISE DOS RESULTADOS:**

Unidade: E.E. Prof. Anália de Almeida Bueno – Mogi Guaçu.

Ano: 9º A - 30 alunos e B - 29 alunos.

Tempo de aplicação: 1 aula de 50 minutos em cada ano.

Nos dois 9º anos, os alunos desenvolveram bem a dobradura, uma vez que essa turma já havia trabalhado com dobraduras nos anos anteriores.

Alguns alunos não lembravam como aferir com o transferidor.

O resultado foi satisfatório, os alunos participaram e desenvolveram corretamente a atividade.

**6.3.2 Duplicação do cubo**

Esta atividade está de acordo com [MONTEIRO] [22] p. 32.

Para justificativa desta atividade é necessário que o aluno tenha conhecimento dos conteúdos de Semelhança de Triângulos e Teorema de Pitágoras.

**OBJETIVOS:**

Dado um cubo de aresta  $a_1$ , encontrar aresta  $a_2$  do cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo inicial.

Estudo dos números irracionais.

Argumentar a validade do resultado de uma dobradura realizada.

Planejamento e estratégia.

**PÚBLICO ALVO:**

Esta atividade pode ser aplicada do 7º ao 9º ano, ou em outras séries que o professor achar pertinente.

**MATERIAL NECESSÁRIO:**

Papel sulfite e lápis.

**DESENVOLVIMENTO:** <sup>4</sup>

Vamos encontrar a aresta de um cubo com o dobro do volume do cubo inicial, o que é equivalente a construir o número irracional  $\sqrt[3]{2}$ .

Dado um cubo de aresta com medida  $a_1$ , temos:

Volume do cubo inicial =  $a_1^3$ .

Volume do cubo final =  $2a_1^3$ . Então,

Medida da aresta final =  $a_2 = \sqrt[3]{2a_1^3} = a_1\sqrt[3]{2}$ .

**Construção através da dobradura:**

Passo 1: Divida uma folha de papel quadrada em 3 partes iguais, seguindo os passos da atividade em 6.2.1.

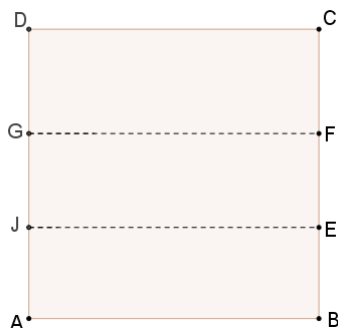


Figura 6.41 – Construção da aresta de um cubo de medida  $\sqrt[3]{2}$ .

Passo 2: Faça uma dobra levando simultaneamente  $B$  sobre  $\overline{AD}$  e  $E$  sobre  $\overline{FG}$ ; marque com a letra  $H$  a intersecção de  $B$  com  $\overline{AD}$ . Esse procedimento é possível pelo Axioma VI. Desdobre. Essa é a parte da construção que é impossível com régua sem escala e compasso.

<sup>4</sup>Técnica desenvolvida por Peter Messer.

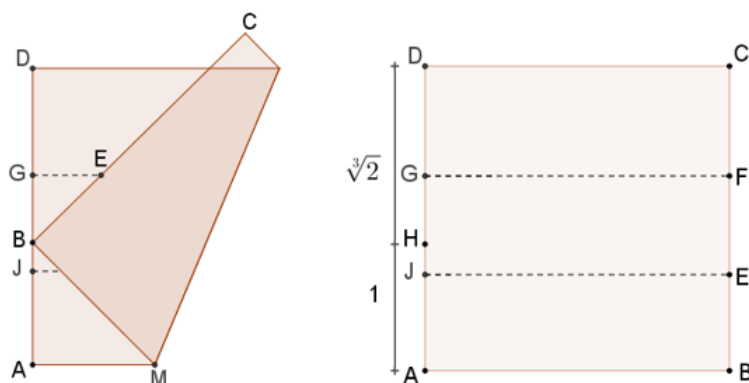


Figura 6.42 – Construção da aresta de um cubo de medida  $\sqrt[3]{2}$ .

O ponto  $H$  divide o lado  $AD$  em dois segmentos cuja razão entre seus comprimentos é  $\sqrt[3]{2}$ .

**Demonstração:**

Devemos mostrar que  $\frac{DH}{AH} = \sqrt[3]{2}$ . Para isso vamos tomar  $AH$  como unidade,  $AH = 1$ , e seja  $DH = x$

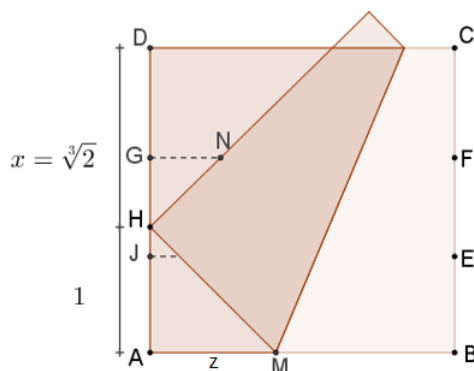


Figura 6.43 – Demonstração da construção da aresta de um cubo de medida  $\sqrt[3]{2}$ .

Temos:  $\triangle AMH \sim \triangle GHN$  pelo caso A.A.

$$\angle G = \angle A = 90^\circ \text{ e}$$

$$\angle GHN + \angle AHM = 90^\circ \text{ e}$$

$$\angle GHN + \angle GNH = 90^\circ.$$

Logo,  $\angle AHM = \angle GNH$ .

Então:

$$\frac{AM}{GH} = \frac{HM}{HN} \tag{6.1}$$

Seja  $AM = z$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $AMH$ , temos:

$HM^2 = AH^2 + AM^2$ ; substituindo

$(x + 1 - z)^2 = 1^2 + z^2$ ; desenvolvendo os produtos

$$x^2 + 2x - 2zx - 2z + 1 + z^2 = 1 + z^2;$$

$$x^2 + 2x - z(2x + 2) = 0;$$

Logo:

$$z = \frac{x^2 + 2x}{2x + 2} \quad (6.2)$$

Podemos também observar que:

$$GH = x - \frac{x + 1}{3} = \frac{2x - 1}{3} \quad (6.3)$$

De 6.1, 6.2 e 6.3 temos:

$$\frac{AM}{GH} = \frac{HM}{HN}; \text{ substituindo}$$

$$\frac{z}{\frac{2x-1}{3}} = \frac{x+1-z}{\frac{x+1}{3}}; \text{ substituindo } z$$

$$\frac{\frac{x^2+2x}{2x+2}}{\frac{2x-1}{3}} = \frac{x+1 - \left(\frac{x^2+2x}{2x+2}\right)}{\frac{x+1}{3}};$$

$$\frac{(x^2 + 2x)(x + 1)}{3(2x + 2)} = \frac{(x^2 + 2x + 2)(2x - 1)}{3(2x + 2)} \text{ temos então:}$$

$$x^3 = 2x^3 - 2;$$

$$x^3 - 2 = 0; \text{ daí: } x = \sqrt[3]{2}.$$

Logo, temos  $DH = x = \sqrt[3]{2}$ , tomando como unidade a medida  $AH$ , isto é, temos  $DH = \sqrt[3]{2}AH$ , ou ainda,  $\frac{DH}{AH} = \sqrt[3]{2}$ .

Para construir a aresta  $a_2$  do cubo com o dobro do volume do cubo inicial, com aresta  $a_1$ , basta usar o Teorema de Tales para obter a relação  $\frac{DH}{AH} = \frac{a_2}{a_1}$ . Daí no caso em que  $a_1 = 1$ , obtemos  $a_2 = \sqrt[3]{2}$ .

### AVALIAÇÃO:

A avaliação foi realizada através da participação dos alunos nas atividades.

Nesta atividade esperamos que os alunos construam com a dobradura um segmento com medida  $\sqrt[3]{2}$  e validem a veracidade dessa medida em conjunto com o professor utilizando os conteúdos de semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras.

Se o professor desejar construir os cubos, espera-se que os alunos construam dois cubos, inicial e final, utilizando os procedimentos da atividade 6.5.12. Para isso, deve ser usado um quadrado de papel com o dobro do comprimento desejado, uma vez que ao dobrar a folha para obter os encaixes resta um quadrado de medida  $\frac{a}{2}$ . Ver atividade da seção 6.5.10.

**ANÁLISE DOS RESULTADOS:**

Unidade: E. E. Prof. Anália de Almeida Bueno – Mogi Guaçu.

Ano: 9º A - 30 alunos e B - 29 alunos.

Tempo de aplicação: 2 aulas de 50 minutos.

Nos dois 9º anos, os alunos desenvolveram bem a dobradura, uma vez que essa turma já havia trabalhado com dobraduras anteriormente.

Os alunos tiveram muita dificuldade em desenvolver os polinômios e relacionar as medidas, foi necessário explicar várias vezes, refazer os cálculos e ajudar alguns alunos individualmente, o que ocasionou no atraso da aplicação sendo necessário uma aula adicional.

Nesta sala não foram construídos os cubos.

O resultado foi satisfatório apesar da dificuldade encontrada.

## 6.4 Validando alguns resultados da Geometria Euclidiana através de construções com dobraduras

Outro tópico importante no ensino de matemática, é a abordagem de demonstrações no Ensino Fundamental e Médio. Validar e demonstrar algum conceito ou fórmula é fundamental para que os alunos aprendam a questionar a veracidade de ideias; tenham contato e se habituem com a linguagem das demonstrações, que diferem do ensino que estão habituados, em que basicamente consiste na resolução de problemas e exercícios.

As demonstrações, devido a sua forma de trabalhar com hipóteses e resultados que vão se desenvolvendo através de estratégias e propriedades até obtermos os resultados desejados, são importantes para o desenvolvimento do raciocínio.

Nessa seção usaremos a dobradura como uma ferramenta para desenvolver algumas demonstrações.

### 6.4.1 Soma dos ângulos internos de um triângulo

Esta atividade está de acordo com [MONTEIRO] [22] p. 45.

**OBJETIVOS:**

Constatar que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é  $180^\circ$ .

Desenvolvimento e estratégia.

Exploração do triângulo e seus ângulos internos.

**PÚBLICO ALVO:**

Esta atividade pode ser aplicada do 7º ao 9º ano, ou em outras séries que o professor achar pertinente.

**MATERIAL NECESSÁRIO:**

Papel sulfite, tesoura e lápis ou caneta de colorir.

**DESENVOLVIMENTO:**

Passo 1: Desenhe em uma folha um triângulo qualquer. Recorte o triângulo.

Passo 2: Pinte os três ângulos internos do triângulo de cores diferentes e em ambos os lados do papel.

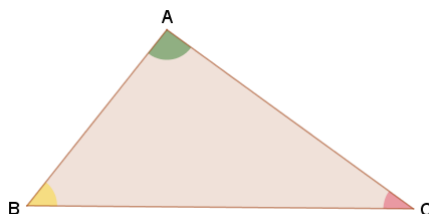


Figura 6.44 – Construção soma dos ângulos internos de um triângulo.

Passo 3: Dobre a altura relativa à  $\overline{BC}$ .

Passo 4: Leve o vértice  $A$  até o pé da altura relativa à  $\overline{BC}$  do triângulo, marque o ponto onde o vértice coincide com o lado.

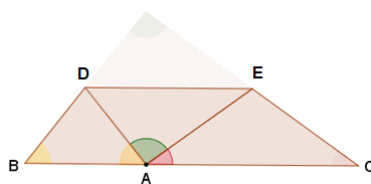


Figura 6.45 – Construção soma dos ângulos internos de um triângulo.

O Teorema de Tales garante que os triângulos  $DBA$  e  $EAC$  são isósceles.

Passo 5: Dobre pela altura relativa à base no triângulo  $DBA$  o que leva o vértice  $B$  a coincidir com o vértice  $A$ , em  $\overline{BC}$ ; de modo análogo, o vértice  $C$  é levado a coincidir com o vértice  $A$  e  $B$  em  $\overline{BC}$ .

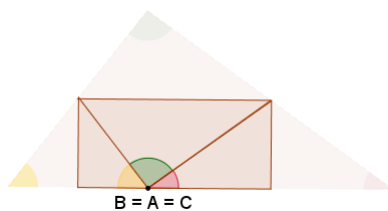


Figura 6.46 – Construção soma dos ângulos internos de um triângulo.

Observe que os três ângulos juntos somam  $180^\circ$ , isso ocorre para qualquer triângulo que for construído.

#### **AVALIAÇÃO:**

A avaliação foi realizada através da análise da participação dos alunos nas atividades.

O resultado esperado consiste na formação de um ângulo de  $180^\circ$  com os três ângulos dos triângulos.

#### **ANÁLISE DOS RESULTADOS:**

Unidade: E.M.E.B Humberto Brasi – Mogi Mirim.

Ano: 8º C - 25 alunos.

Tempo de aplicação: 1 aula de 50 minutos.

Os alunos desenvolveram facilmente a atividade uma vez que eles já haviam trabalhado com as dobraduras nas atividades de introdução e a atividade é bem simples.

Como os alunos fizeram triângulos distintos mostrou – se que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é  $180^\circ$  comparando os diversos triângulos.

O resultado foi satisfatório, todos participaram das atividades e desenvolveram corretamente.

### **6.4.2 Construções com dobraduras para demonstração do Teorema de Tales**

Nesta atividade, vamos utilizar as dobraduras para auxiliar na demonstração do Teorema de Tales, ver Teorema 1.3.6., através de comparação entre áreas.

#### **OBJETIVOS:**

Desenvolver usando dobraduras a demonstração do Teorema de Tales usando a comparação entre áreas.

Cálculo da área de um triângulo.

Exploração de triângulos.

**PÚBLICO ALVO:**

Esta atividade pode ser aplicada do 8º ao 9º ano, ou em outras séries que o professor achar pertinente.

**MATERIAL NECESSÁRIO:**

Papel sulfite e tesoura.

**DESENVOLVIMENTO:**

Passo 1: Construa um triângulo  $ABC$  qualquer no papel e recorte-o.

Passo 2: Marque um ponto qualquer  $D$ , do lado  $AC$ , diferente de  $A$  e de  $C$ . Dobre, por  $D$  a paralela à  $\overline{AB}$ , que encontrará o lado  $BC$  no ponto  $E$ . Desdobre.

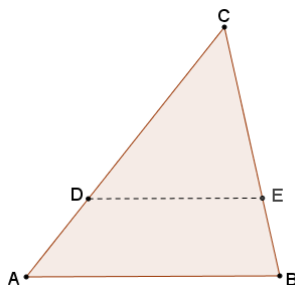


Figura 6.47 – Construção para demonstração do Teorema de Tales.

Passo 3: Vamos dobrar duas alturas do triângulo  $CDE$ , uma relativa ao lado  $CD$  e a outra, relativa ao lado  $CE$ . Leve o ponto  $C$  perpendicularmente sobre  $\overline{AC}$  de forma que a dobra passe por  $E$ , formando a altura  $\overline{EF}$ . De forma análoga, dobre  $C$  sobre  $\overline{BC}$  de forma que a dobra passe por  $D$ , obtendo a altura  $\overline{DG}$ .

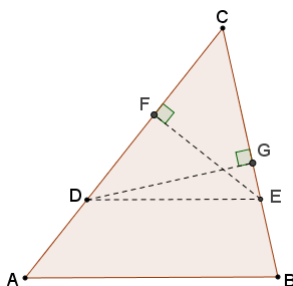


Figura 6.48 – Construção para demonstração do Teorema de Tales.

Passo 4: Agora, dobre as diagonais  $\overline{BD}$  e  $\overline{AE}$  do trapézio  $ABED$ .



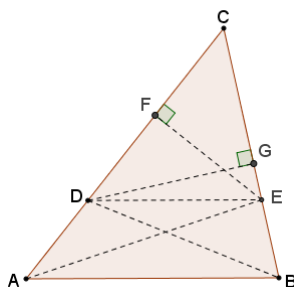


Figura 6.49 – Construção para demonstração do Teorema de Tales.

Podemos calcular a área do triângulo  $CDE$  de dois modos:  $\frac{CD.EF}{2}$  ou  $\frac{CE.DG}{2}$ .

Fazendo a igualdade das áreas temos:

$$\frac{CD.EF}{2} = \frac{CE.DG}{2};$$

de onde  $CD.EF = CE.DG$ ; temos a relação:

$$\frac{CD}{CE} = \frac{DG}{EF} \quad (6.4)$$

Observando os triângulos  $ADE$  e  $BED$ , podemos notar que eles tem áreas iguais, mesma base  $\overline{DE}$  e mesma altura relativa, a distância entre as paralelas  $\overline{DE}$  e  $\overline{AB}$ .

Considerando agora, o triângulo  $ADE$  com base  $\overline{AD}$  e altura  $\overline{EF}$  e o triângulo  $BED$  com base  $\overline{BE}$  e altura  $\overline{DG}$ , temos a relação entre áreas:

$$\frac{AD.EF}{2} = \frac{BE.DG}{2};$$

ou seja  $AD.EF = BE.DG$ ; temos a relação:

$$\frac{AD}{BE} = \frac{DG}{EF} \quad (6.5)$$

De 6.4 e 6.5 temos:  $\frac{CD}{CE} = \frac{AD}{BE}$  ou  $\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$ .

Demonstrando assim o Teorema de Tales.

### AVALIAÇÃO:

Essa atividade não foi aplicada em sala de aula.

O resultado esperado consiste que os alunos construam o triângulo e através da comparação de áreas de triângulos eles cheguem na relação que demonstra ser verdadeiro o Teorema de Tales.

### 6.4.3 Teorema de Pitágoras

Esta atividade está de acordo com [MONTEIRO] [22] p. 46.

#### OBJETIVOS:

Desenvolver, usando dobraduras, algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, usando a comparação entre áreas.

Calcular as áreas do triângulo, do quadrado e do trapézio.

Explorar as formas triângulo, quadrado e trapézio.

#### PÚBLICO ALVO:

Esta atividade pode ser aplicada do 8º ao 9º ano, ou em outras séries que o professor achar pertinente.

#### MATERIAL NECESSÁRIO:

Papel sulfite.

#### DESENVOLVIMENTO:

Vamos dividir um quadrado de papel  $ABCD$ , em nove quadrados iguais, ou seja, em nove quadrados que têm como medida de lado um terço do quadrado original. Para isso, pode ser usado o mesmo procedimento da atividade da seção 6.2.1. ou o procedimento a seguir:

Passo 1: Dobre um quadrado  $ABCD$  dado, levando  $A$  sobre  $D$  e  $B$  sobre  $C$ , encontrando os pontos médios dos segmentos  $AD$  e  $BC$ ,  $E$  e  $F$  respectivamente.

Passo 2: Leve o vértice  $C$  sobre  $E$ ; a intersecção de  $\overline{BC}$  sobre  $\overline{AB}$  é denotada por  $P$ .

Passo 3: Desdobre o quadrado. Obtemos que  $\overline{PB}$  é  $\frac{1}{3}$  do lado do quadrado.

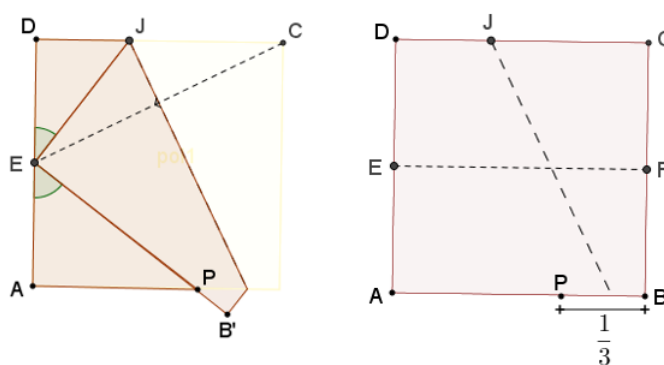


Figura 6.50 – Construção para demonstração do Teorema de Pitágoras.

Passo 4: Leve  $B$  sobre  $\overline{AB}$  de forma que a dobra passe por  $P$ . Denote por  $Q$

a intersecção do ponto  $B$  com  $\overline{AB}$ . A medida  $AP$ , corresponde a dois terços do lado do quadrado.

Passo 5: Analogamente, leve  $A$  sobre  $\overline{AB}$  de forma que a dobra passe por  $Q$ .

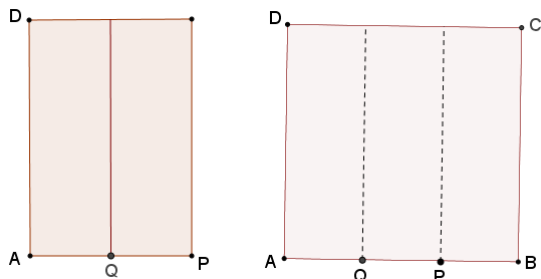


Figura 6.51 – Construção para demonstração do Teorema de Pitágoras.

Passo 6: Usando o mesmo procedimento para fazer as dobras horizontais, obtemos então o quadrado desejado.

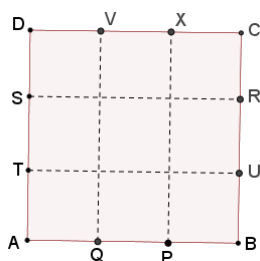


Figura 6.52 – Construção para demonstração do Teorema de Pitágoras.

Passo 7: Faça as dobras  $\overline{TV}$ ,  $\overline{VR}$ ,  $\overline{RP}$  e  $\overline{PT}$ , obtendo o quadrado  $TPRV$ , inscrito no quadrado inicial.

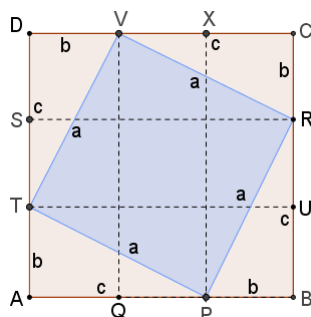


Figura 6.53 – Construção para demonstração do Teorema de Pitágoras.

Sendo  $a$  a medida dos lados do quadrado  $TPRV$ ,  $c$  a medida dos segmentos  $AP$ ,  $BR$ ,  $CV$  e  $DT$  e  $b$  a medida dos segmentos  $PB$ ,  $RC$ ,  $VD$  e  $TA$ , temos:

$$\text{Área}(ABCD) = (b + c)^2.$$

$$\text{Área}(TPRV) = a^2.$$

$$\text{Área}(TAP) = \text{área}(PBR) = \text{área}(RCV) = \text{área}(VDT) = \frac{b \cdot c}{2}.$$

$$\text{Área}(ABCD) = \text{área}(TPRV) + 4 \cdot \text{área}(TAP), \text{ então:}$$

$$(b + c)^2 = a^2 + 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2}; \text{ desenvolvendo o produto;}$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc;$$

$$\text{logo, } a^2 = b^2 + c^2.$$

### Demonstração através da área de um trapézio.<sup>5</sup>

Passo 1: Utilize a mesma figura, recorte ou dobre a mesma pela diagonal  $\overline{VP}$  (também pode ser feito pela outra diagonal) do quadrado  $TPRV$ , obtemos um trapézio de bases  $b$  e  $c$ , e altura  $b + c$ .

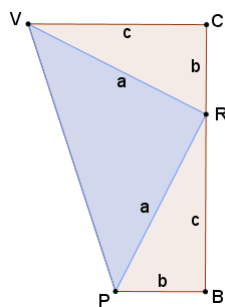


Figura 6.54 – Construção para demonstração do Teorema de Pitágoras.

A área do trapézio é calculada pelo produto da semissoma das bases pela altura, ou neste caso, pela soma das áreas dos três triângulos:

$$\frac{(b + c)^2}{2} = \frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot c}{2}; \text{ desenvolvendo:}$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc, \text{ temos então: } b^2 + c^2 = a^2.$$

#### NOTA:

Essas atividades também podem ser desenvolvidas a partir de um quadrado qualquer,  $ABCD$  e pontos  $P$ ,  $R$ ,  $T$  e  $U$ , com  $PB = RC = DV = AT$ , construído através de dobraduras. Com essa construção temos o Teorema de Pitágoras para caso mais geral e não só para  $AP = 2PB$ . Veja:

Passo 1: Dobre um ponto  $P$  qualquer sobre o  $\overline{AB}$ ; dobre o quadrado levando  $A$  a  $D$  e  $B$  a  $C$ .

<sup>5</sup>Esta demonstração foi realizada, em 1876, pelo vigésimo presidente dos Estados Unidos, James Abrahan Garfield (1831 – 1881), que era um estudioso de matemática. Esta demonstração foi publicada no *New England Journal of Education*.

Passo 2: Leve o ponto  $P$  sobre  $X$  em  $\overline{CD}$  tal que  $CX = PB$ .

Passo 3: Leve  $X$  sobre  $\overline{CB}$  através da reflexão de  $X$  em relação à diagonal  $AC$ , encontrando o ponto  $R$  tal que  $CR = CX$ .

Com procedimento análogo, encontre os pontos  $V$  e  $T$  tais que  $PB = RC = VD = TA$ .

### AVALIAÇÃO

A atividade desenvolveu-se utilizando o quadrado dividido em nove partes iguais.

A avaliação foi realizada através da análise da participação dos alunos na atividade.

O resultado esperado nos dois casos, consistia em que os alunos desenvolvessem corretamente a dobradura e juntamente com o professor, através da soma das áreas encontrassem a relação algébrica correspondente ao Teorema de Pitágoras.

### ANÁLISE DOS RESULTADOS:

Unidade: E.E. Prof. Anália de Almeida Bueno – Mogi Guaçu.

Ano: 9º A e B.

Tempo de aplicação: 2 aulas de 50 minutos.

Nos dois 9º anos os alunos tiveram um pouco de dificuldade para dividir o lado do quadrado em três partes iguais no segundo lado, passo 6. O papel já estava com algumas outras dobraduras o que acabou confundindo os alunos. As instruções para passar do passo 6 para o 7 foram repetidas algumas vezes e foi necessário ajudar individualmente alguns alunos.

Os alunos compreenderam facilmente a relação entre áreas, tendo um pouco de dificuldade nas substituições. O Teorema de Pitágoras eles já conheciam e já havíamos feito outra demonstração, então quando os triângulos retângulos apareceram eles perceberam que chegariam ao Teorema de Pitágoras.

O resultado foi satisfatório, os alunos participaram e desenvolveram corretamente a atividade e os resultados.

## 6.5 Atividades envolvendo outros tópicos de geometria

Nesta seção vamos abordar algumas atividades que envolvem tópicos de geometria plana, espacial e analítica. São conceitos e aplicações de importantes conteúdos que fazem parte do currículo de Matemática do Ensino Fundamental e Médio.

### 6.5.1 Pontos Notáveis dos triângulos

#### OBJETIVOS:

Investigar a localização dos pontos notáveis de um triângulo em qualquer triângulo.

Explorar o triângulo, seus vértices, ângulos e lados.

Construção das bissetrizes dos ângulos internos.

Obtenção dos pontos médios e mediatrizes dos lados de um triângulo.

Construção das alturas de um triângulo.

Construção das medianas de um triângulo.

Obteção dos pontos notáveis dos triângulos.

Observar e fazer analogias entre os diferentes pontos notáveis.

Construir segmentos no papel com auxílio de dobraduras.

#### PÚBLICO ALVO:

Esta atividade pode ser aplicada do 7º ao 9º ano, ou em outras séries que o professor achar pertinente.

#### MATERIAL NECESSÁRIO:

Papel sulfite e lápis.

### 6.5.2 O circuncentro

Passo 1: Desenhe um triângulo qualquer na folha.

Vamos inicialmente construir as mediatrizes dos lados do triângulo.

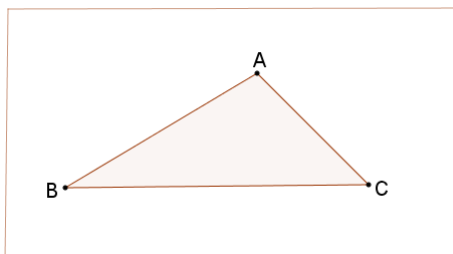


Figura 6.55 – Obtenção do circuncentro de um triângulo.

Passo 2: Para construir a dobra da mediatriz do lado  $\overline{AB}$  do triângulo, leve o vértice  $B$  sobre o vértice  $A$ . Desdobre.

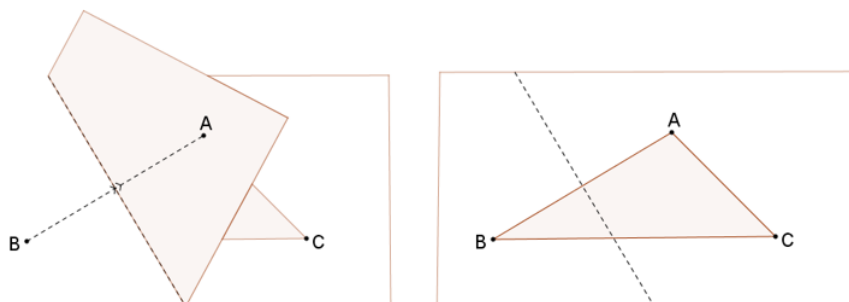


Figura 6.56 – Obtenção do circuncentro de um triângulo.

Foi obtida a mediatriz do lado  $AB$ .

Passo 3: Use o mesmo procedimento análogo para dobrar a mediatriz do lado  $\overline{BC}$  do triângulo, levando o vértice  $B$  sobre  $C$ .

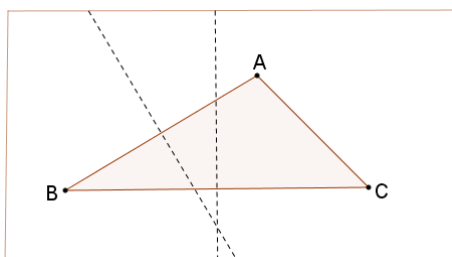


Figura 6.57 – Obtenção do circuncentro de um triângulo.

Passo 4: E a dobra da mediatriz de  $\overline{AC}$ , levando o vértice  $C$  sobre  $A$ . Encontramos assim o circuncentro do triângulo.

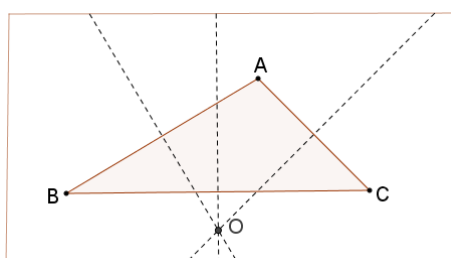


Figura 6.58 – Construção do circuncentro de um triângulo.

O ponto  $O$  é o circuncentro do triângulo  $ABC$ , concluímos pelo procedimento feito através das mediatrizes dos lados do triângulo, que ele equidista dos três vértices do triângulo. Assim sendo ele é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$ .

### 6.5.3 O incentro

Passo 1: Desenhe um triângulo  $ABC$  qualquer na folha de papel.

Para obtermos o incentro, vamos construir as bissetrizes do triângulo.

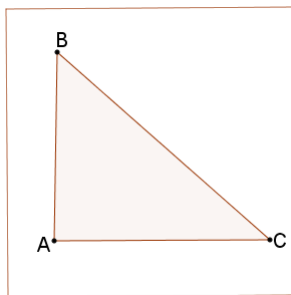


Figura 6.59 – Obtenção do incentro de um triângulo.

Passo 2: Para dobrar a bissetriz ao ângulo  $A$ , dobre o lado  $\overline{AB}$  sobre o lado  $\overline{AC}$  do triângulo, podendo ser o contrário. Desdobre.

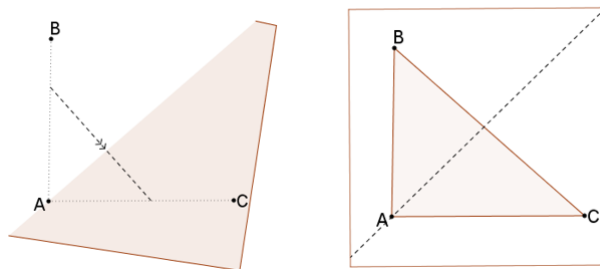


Figura 6.60 – Obtenção do incentro de um triângulo.

Passo 3: Analogamente, utilize o mesmo tipo de procedimento para dobrar a bissetriz do ângulo  $B$ .

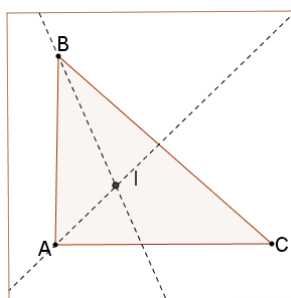


Figura 6.61 – Obtenção do incentro de um triângulo.

Passo 4: E a dobra da bissetriz do ângulo  $C$ . Encontramos assim o incentro do triângulo.



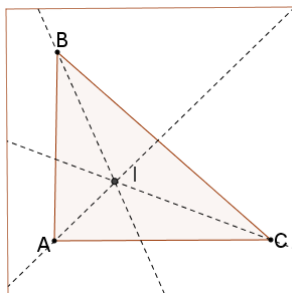


Figura 6.62 – Construção do incentro de um triângulo.

O ponto  $I$  é o incentro do triângulo  $ABC$ , concluímos pelo procedimento feito através das bissetrizes dos ângulos do triângulo, que ele equidista dos três lados do triângulo. Assim sendo ele é o centro da circunferência inscrita no triângulo  $ABC$ .

#### 6.5.4 O ortocentro

Passo 1: Desenhe um triângulo  $ABC$  acutângulo qualquer na folha de papel.

Neste caso é preciso que sejam construídas as alturas do triângulo.

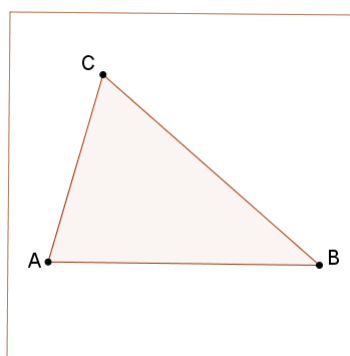


Figura 6.63 – Obtenção do ortocentro de um triângulo.

Passo 2: Para fazer a dobra referente à altura do vértice  $A$  perpendicular ao lado  $\overline{BC}$ , faça uma dobra que passa por  $A$  levando o segmento  $\overline{BC}$  sobre ele mesmo. Desdobre.

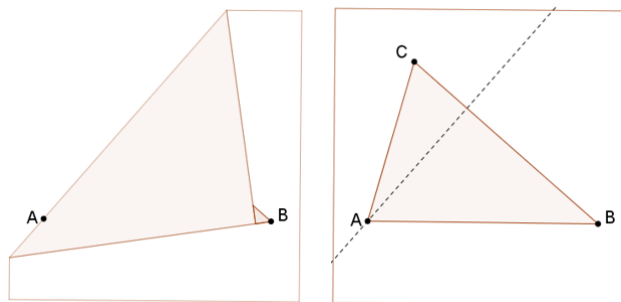


Figura 6.64 – Obtenção do ortocentro de um triângulo.

Passo 3: Use o mesmo procedimento análogo para dobrar a perpendicular à  $\overline{AC}$  passando por  $B$  e, também para dobrar a perpendicular à  $\overline{AB}$  passando por  $C$ . Encontramos assim o ortocentro do triângulo.

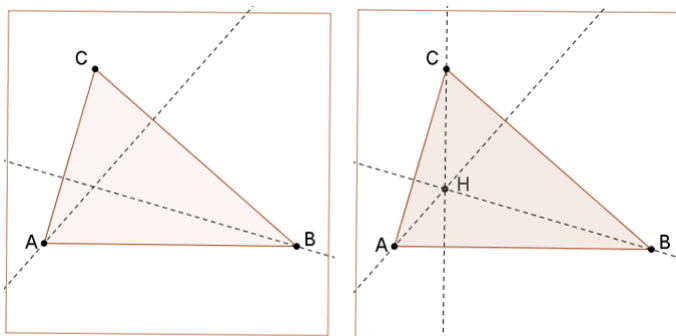


Figura 6.65 – Obtenção do ortocentro de um triângulo.

Para triângulos obtusângulos é necessário fazer o prolongamento dos lados do triângulo, fazemos isso usando dobras. Veja:

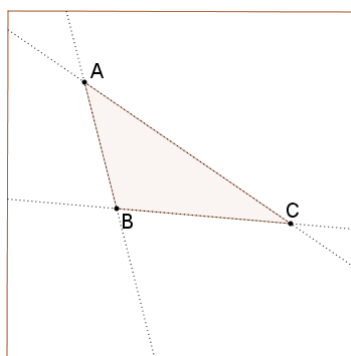


Figura 6.66 – Construção do ortocentro de um triângulo obtusângulo.

Passo 1: Use o mesmo procedimento feito no triângulo acutângulo para dobrar as alturas perpendiculares as retas suportes dos lados.

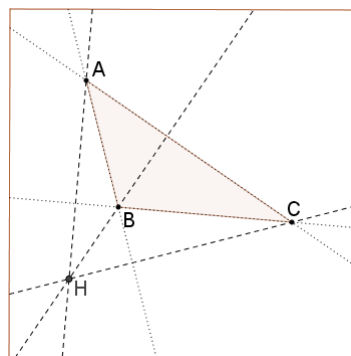


Figura 6.67 – Obtenção do ortocentro de um triângulo obtusângulo.

### 6.5.5 O baricentro

Passo 1: Desenhe um triângulo  $ABC$  qualquer no papel.

Para obter o baricentro é preciso dobrar as medianas do triângulo

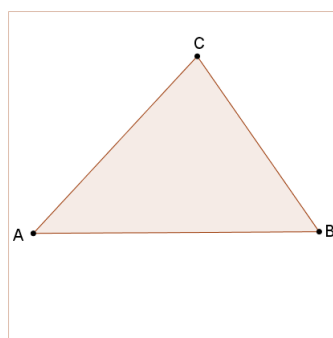


Figura 6.68 – Obtenção do baricentro de um triângulo.

Para dobrar a mediana do lado  $\overline{AB}$  do triângulo, faremos dois procedimentos:

Passo 2: Leve o vértice  $A$  sobre o vértice  $B$ , encontrando a mediatriz e o ponto médio  $M_1$  de  $\overline{AB}$ . Desdobre.

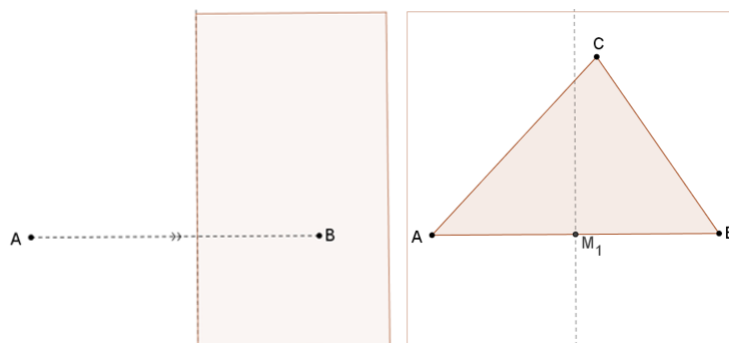


Figura 6.69 – Obtenção do baricentro de um triângulo.

Passo 3: Faça uma dobra que passa por  $C$  e  $M_1$ , essa dobra é a mediana  $\overline{CM_1}$ , relativa ao lado  $\overline{AB}$ . Desdobre.

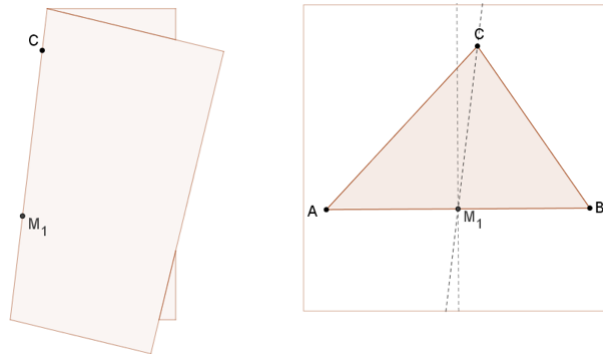


Figura 6.70 – Obtenção do baricentro de um triângulo.

Passo 4: Analogamente, construa a mediana  $\overline{BM_2}$ , relativa ao lado  $\overline{AC}$ .

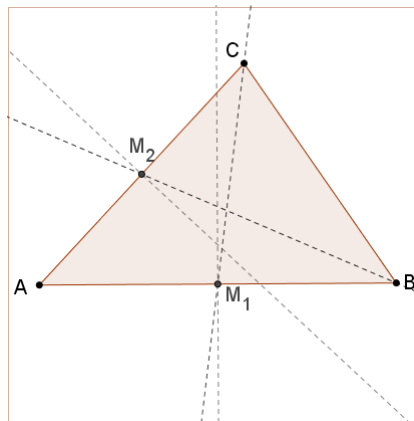


Figura 6.71 – Obtenção do baricentro de um triângulo.

Passo 5: E construa a mediana  $\overline{AM_3}$  do triângulo, relativa ao lado  $\overline{BC}$ . Encontramos assim o baricentro do triângulo.

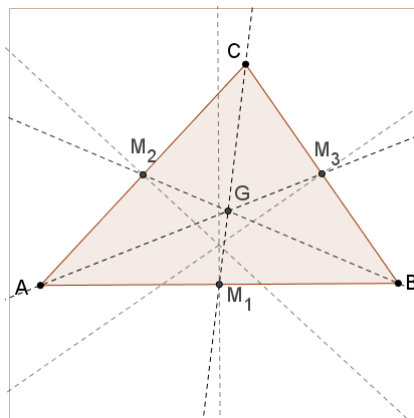


Figura 6.72 – Construção do baricentro de um triângulo.

Vamos agora, também através de dobraduras, verificar que:  $GA = 2GM_3$ ;  $GB = 2GM_2$  e  $GC = 2GM_1$ , de acordo com o Teorema 2.2.2.

Para melhor visualização recorte o triângulo da folha.

Passo 1: Dobre  $A$  sobre  $G$  e desdobre, denote por  $D$  a intersecção da dobra com  $\overline{GA}$ . Temos que  $D$  é o ponto médio de  $GA$  então,  $\overline{AD} \equiv \overline{DG}$ .

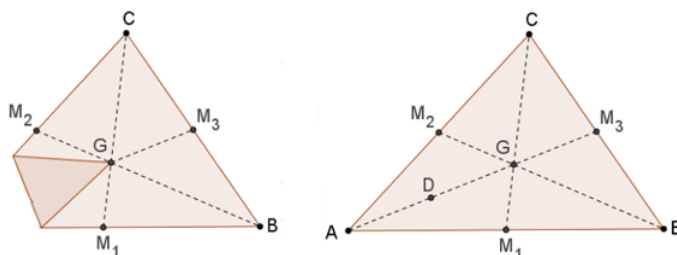


Figura 6.73 – Verificação da relação  $GA = 2GM_3$ .

Passo 2: Dobre  $M_3$  sobre  $\overline{GA}$  com a dobra passando por  $G$ .

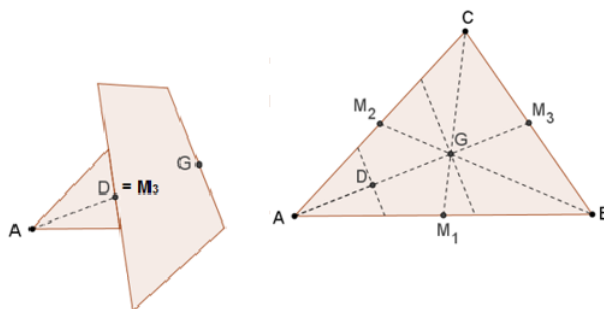


Figura 6.74 – Verificação da relação  $GA = 2GM_3$ .

Podemos ver que  $M_3$  coincide com  $D$ , logo  $GA = 2GM_3$ .

Passo 3: De forma análoga, dobre  $B$  sobre  $G$  e desdobre, denote por  $E$  a intersecção da dobra com  $\overline{GB}$ . Temos que  $\overline{BE} \equiv \overline{EG}$ .

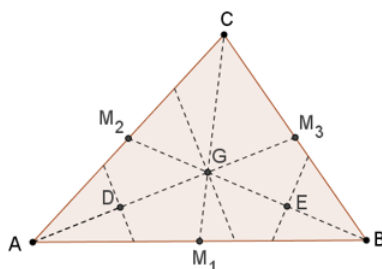


Figura 6.75 – Verificação da relação  $GB = 2GM_2$ .

Passo 4: Dobre  $M_2$  sobre  $\overline{GB}$  com a dobra passando por  $G$ .

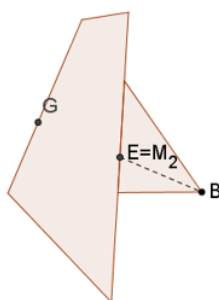


Figura 6.76 – Verificação da relação  $GB = 2GM_2$ .

Podemos ver que  $M_2$  coincide com  $E$ , logo  $GB = 2GM_2$ .

Passo 5: dobre  $C$  sobre  $G$  e desdobre, denote por  $F$  a intersecção da dobra com  $\overline{GC}$ . Temos que  $\overline{CF} \equiv \overline{FG}$ .

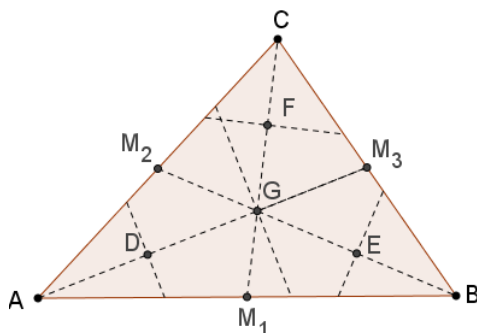


Figura 6.77 – Verificação da relação  $GC = 2GM_1$ .

Passo 6: Dobre  $M_1$  sobre  $\overline{GC}$  com a dobra passando por  $G$ .

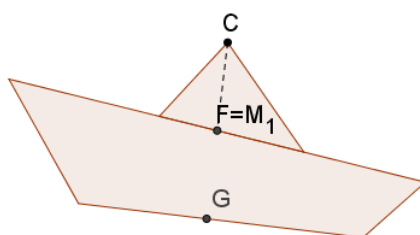


Figura 6.78 – Verificação da relação  $GC = 2GM_1$ .

Podemos ver que  $M_1$  coincide com  $F$ , logo  $GC = 2GM_1$ .

**AValiação:**

A avaliação foi realizada através da análise da participação dos alunos nas atividades.

O resultado esperado nesta atividade implica que os alunos façam e analisem as construções corretamente e saibam distinguir as diferenças entre os pontos notáveis de um triângulo e suas propriedades.

### **ANÁLISE DOS RESULTADOS:**

Unidade: E.M.E.B Humberto Brasi – Mogi Mirim.

Ano: 8º C - 25 alunos.

Tempo de Aplicação: 3 aulas de 50 minutos.

Antes de aplicar esta atividade no 8º ano os alunos desenvolveram várias atividades envolvendo mediatriz, medianas, bissetrizes e alturas de triângulos.

O resultado foi satisfatório. Todos os alunos participaram e desenvolveram as atividades. Conseguiram observar e distinguir as diferenças entre os pontos notáveis e suas propriedades, assim como a validade para qualquer triângulo. Antes eles já haviam trabalhado com dobraduras, tiveram então facilidade em dobrar as perpendiculares, mesmo no caso das alturas em que, as perpendiculares passavam pelo vértice do triângulo. No caso do ortocentro, como o ponto de alguns ficou exterior ao triângulo, houve bastante questionamento se a construção que haviam feito estava correta.

Os alunos continuaram fazendo confusão para distinguir mediatrizes, medianas e alturas.

### **6.5.6 Parábola, elipse e hipérbole**

Como vimos no capítulo 4, as secções cônicas são conteúdo curricular do terceiro ano do Ensino Médio. Através da Geometria do Origami podemos construir suas envoltórias, que são obtidas pelas retas tangentes à cada curva.

Esta atividade está de acordo com [MONTEIRO] [22] p. 62.

Esta atividade será apresentada como uma atividade de introdução.

### **OBJETIVOS:**

Investigar a construção e os principais elementos das cônicas através das retas tangentes a elas.

Observar e fazer analogias às diferentes cônicas.

### **PÚBLICO ALVO:**

3º ano do ensino médio.

### **MATERIAL NECESSÁRIO:**

Papel manteiga ou papel vegetal, régua, lápis e tesoura.

### 6.5.7 Parábola

Neste caso a construção será a envoltória de retas tangentes à uma parábola, não informe ao aluno que a dobradura que ele fará é uma parábola, deixemos que eles observem primeiro a dobradura para depois concluirmos com o nome e os elementos.

Para esta construção utilizamos o Axioma V da Geometria do Origami. Ele nos diz que dados dois pontos  $P$  e  $Q$  e uma reta  $r$ , existe uma dobra que leva  $P$  sobre  $r$  e passa por  $Q$ , sendo que a distância de  $P$  a  $Q$  deve ser maior ou igual a distância de  $Q$  a  $r$ .

Consideremos inicialmente dados uma reta e um ponto não pertencente a ela. Estes serão respectivamente a diretriz e o foco de uma parábola.

Passo 1: Em uma folha, construa a reta  $r$ , dobrando a folha paralelamente à borda inferior do papel e o ponto  $P_1$  qualquer acima da reta  $r$ .

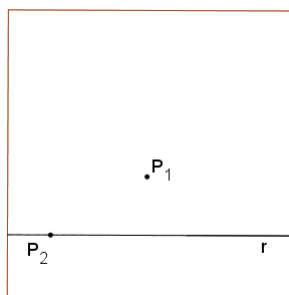


Figura 6.79 – Construção de retas tangentes a uma Parábola.

Passo 2: Faça uma dobra que leve  $P_1$  sobre um ponto  $P_2$  qualquer de  $r$ .

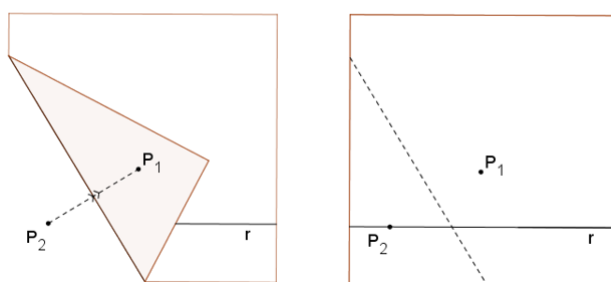


Figura 6.80 – Construção de retas tangentes a uma Parábola.

Passo 3: Repita o procedimento muitas vezes, levando sempre  $P_1$  sobre diferentes pontos de  $r$ .



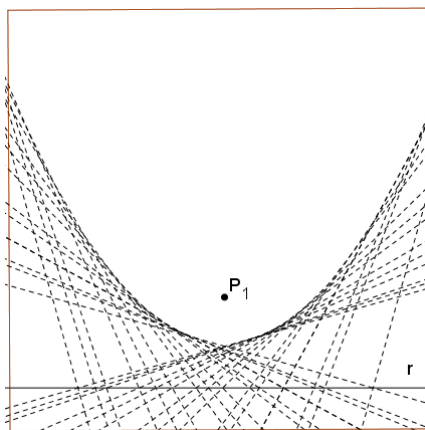


Figura 6.81 – Construção de retas tangentes a uma Parábola.

Após finalizar a dobradura, o professor pode fazer as seguintes perguntas aos alunos:

O que vocês veem?

Com o que se parece?

Lembra o gráfico de alguma função?

Então, o professor pode apresentar aos alunos a figura da superfície cônica de duas folhas e mostrar o corte, apresentando então a parábola e seus elementos, foco, reta diretriz, vértice e reta focal. No Ensino Fundamental, pode-se falar sobre o gráfico da equação quadrática.

É interessante também relacionar com exemplos de parábolas que aparecem no cotidiano, como vimos no capítulo 4.

#### Demonstração:

Quando levamos  $P_1$ , foco da diretriz, sobre um ponto  $P_2$  da reta diretriz  $r$ , obtemos uma reta  $s$ , mediatriz de  $\overline{P_1P_2}$  que intersecciona  $r$ .

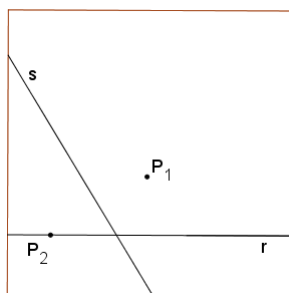


Figura 6.82 – Construção de retas tangentes a uma Parábola.

Seja  $t$  uma perpendicular à reta  $r$  no ponto  $P_2$ , que intersecta a reta  $s$  em um

ponto  $P$ . Quando levamos  $P_2$  sobre  $P_1$ , levamos o segmento  $PP_2$  sobre  $PP_1$  por reflexão, logo  $PP_2 = PP_1$ .

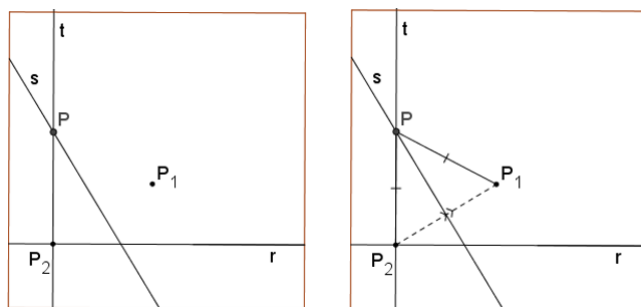


Figura 6.83 – Construção de retas tangentes a uma Parábola.

Logo, podemos concluir que distância de  $P$  a  $P_2$  é igual à distância de  $P$  a  $r$ . Como, por definição, uma parábola é o conjunto de pontos equidistantes do foco e da reta diretriz, temos que  $P$  pertence a parábola de foco  $P_1$  e reta diretriz  $r$ , e a reta  $s$  é tangente a esta parábola. Ver o Teorema 4.4.7.

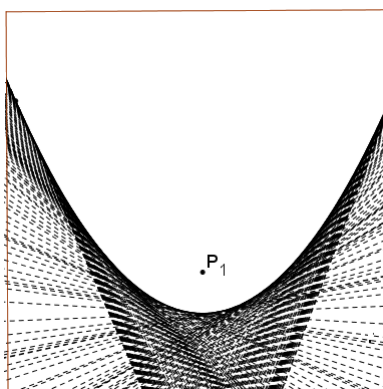


Figura 6.84 – Família de retas tangentes formando a envoltória de uma Parábola.

### 6.5.8 Elipse

Para construção da elipse, usaremos o Axioma II da Geometria do Origami.

Como foi feito na atividade com a parábola, é interessante não dizer imediatamente aos alunos que se trata de uma elipse, deixemos que eles observem primeiro.

Passo 1: Em uma folha de papel trace uma circunferência, recorte-a obtendo um círculo.

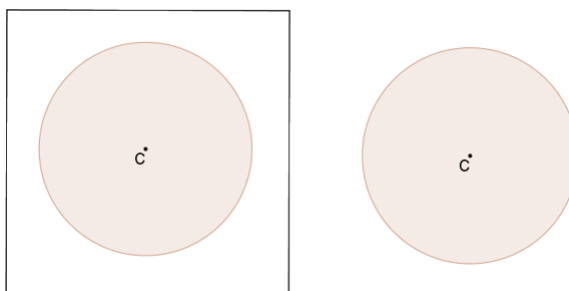


Figura 6.85 – Construção de retas tangentes a uma Elipse.

Caso o método utilizado para construção da circunferência, não determine a localização de seu centro, será necessário fazer essa localização. Para isso, dobre o círculo ao meio duas vezes, sobrepondo as bordas, a intersecção das dobras será o centro  $C$  do círculo e também um dos focos da elipse.

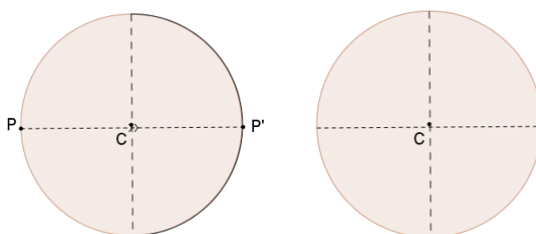


Figura 6.86 – Construção de retas tangentes a uma Elipse.

Passo 2: Marque um outro ponto  $F$ , diferente de  $C$  no interior do círculo.

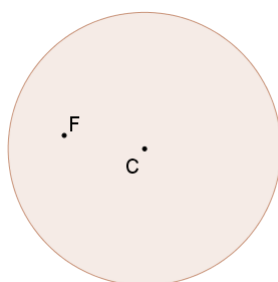


Figura 6.87 – Construção de retas tangentes a uma Elipse.

Passo 3: Agora, escolhamos um ponto  $P$  qualquer da circunferência. Dobre sobrepondo este ponto  $P$  sobre  $F$ .

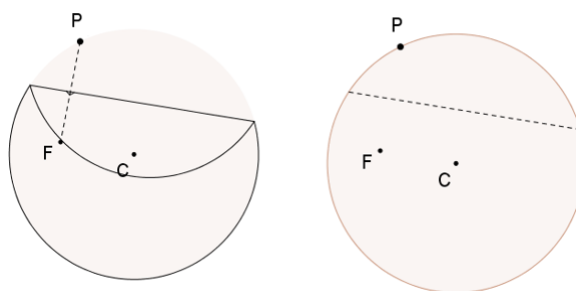


Figura 6.88 – Construção de retas tangentes a uma Elipse.

Passo 4: Repetindo o procedimento várias vezes, dobrando e sobrepondo um ponto qualquer da circunferência sobre o foco  $F$ , obteremos diversas retas tangentes à elipse de focos  $C$  e  $F$ .

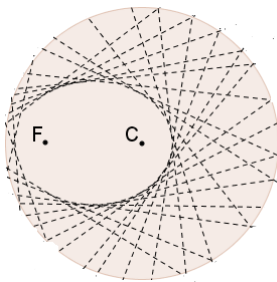


Figura 6.89 – Construção da envoltória de retas tangentes a uma Elipse.

Após finalizar a dobradura, o professor pode fazer as seguintes perguntas aos alunos:

O que vocês veem?

Com o que se parece?

Parece uma circunferência?

Que posição estão os pontos  $F$  e  $C$  em relação ao resultado encontrado?

Então, o professor pode apresentar aos alunos a figura da superfície cônica de duas folhas e mostrar o corte, apresentando então a elipse e seus elementos, focos, eixo focal, vértices, reta focal e reta não focal.

É interessante também relacionar com exemplos de elipses que aparecem no cotidiano, como vimos no capítulo 4.

#### **Demonstração:**

Quando levamos o ponto  $P$  sobre o foco  $F$  obtemos a reta  $t$  que, por construção, é mediatriz do segmento  $\overline{FP}$ , Axioma II da Geometria do Origami. Chamaremos de  $Q$  o

ponto de intersecção entre a dobra e o segmento  $\overline{CP}$ . Temos então, pela propriedade da mediatriz, que  $QP = QF$ .

Seja  $r = CP$ , raio do círculo. Temos que  $r = CP = CQ + QP = CQ + QF$ .

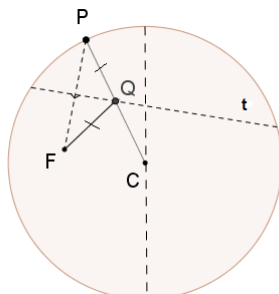


Figura 6.90 – Construção da envoltória de retas tangentes a uma Elipse.

Sabemos que uma elipse é o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias de um ponto aos focos é sempre constante; e essa distância é igual ao raio do círculo que tem como centro um dos focos da elipse.

Portanto  $Q$  pertence à elipse  $\varepsilon = \{P/d(P, F) + d(P, C) = r\}$ . E a reta  $t$  é a reta tangente a essa elipse em  $Q$ . Ver Teorema 4.4.5.

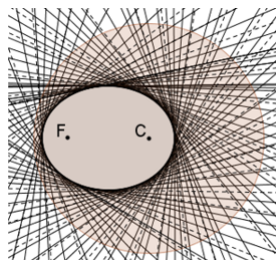


Figura 6.91 – Construção da envoltória de retas tangentes a uma Elipse.

### 6.5.9 Hipérbole

Para construção das tangentes da hipérbole usaremos também o Axioma II.

A construção da hipérbole segue um procedimento próximo ao da elipse. De modo análogo as outras construções. Não dizer imediatamente aos alunos que se trata de uma hipérbole, deixemos que eles observem primeiro.

Passo 1: Em uma folha, trace uma circunferência, desta vez sem recortar.

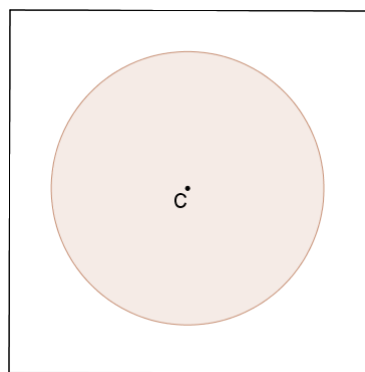


Figura 6.92 – Construção de retas tangentes a uma Hipérbole.

Passo 2: Marque um ponto exterior à circunferência.

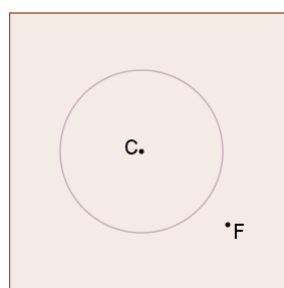


Figura 6.93 – Construção de retas tangentes a uma Hipérbole.

Passo 3: Escolhemos um ponto  $P$  qualquer sobre a circunferência e sobrepomos sobre  $F$ .

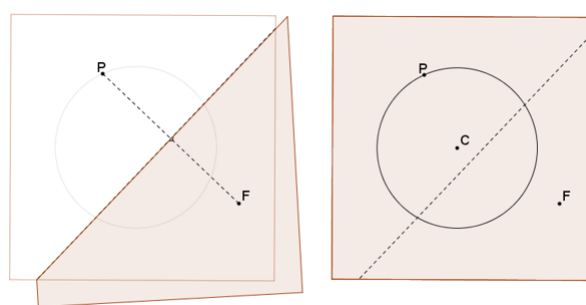


Figura 6.94 – Construção de retas tangentes a uma Hipérbole.

Passo 4: Repita o passo várias vezes.

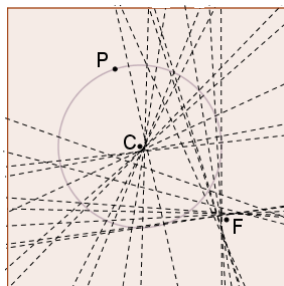


Figura 6.95 – Construção da envoltória de retas tangentes a uma hipérbole.

Após finalizar a dobradura, o professor pode fazer as seguintes perguntas aos alunos:

O que vocês veem?

Com o que se parece?

Quantas curvas vocês veem?

O que podemos observar sobre a posição de  $F$  e  $C$ ?

Como sugestão o professor pode apresentar aos alunos a figura da superfície cônica de duas folhas e mostrar o corte, apresentando então a hipérbole e seus elementos, focos, eixo focal, centro, vértices, reta focal e reta não focal, como vimos no capítulo 4.

Nos três casos, em sala de aula, pode-se levar cones congruentes feitos com massa para modelar, e uma faca. E então cortar (seccionar) de maneira conveniente e mostrar a curva que se forma após a secção.

### Demonstração:

A demonstração é análoga a da elipse. Só que nesse caso, o módulo da diferença das distâncias do ponto aos focos é igual ao raio do círculo com centro sendo um dos focos da hipérbole.

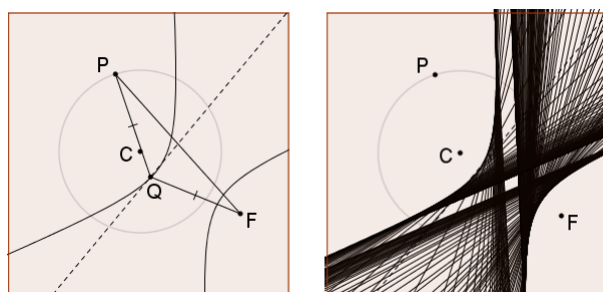


Figura 6.96 – Construção da envoltória de retas tangentes a uma Hipérbole.

### AVALIAÇÃO:

Essa atividade não foi aplicada em sala de aula.

Como resultado é esperado que, os alunos façam as construções corretamente e saibam diferenciar as cônicas, analisando e verificando as principais propriedades de cada uma delas.

É importante que antes de aplicar a atividade o professor desenvolva com os alunos o conteúdo relacionado a reta tangente uma vez que ela é argumento principal das atividades.

### 6.5.10 Poliedros regulares de Platão

Este conteúdo é rico em aplicações e pode ser abordado em todas as séries do Ensino Fundamental e Médio.

Existem vários livros didáticos e paradidáticos onde podemos encontrar outras construções, incluindo vários prismas e pirâmides, por exemplo, [IMENES] [16] e [REGO] [25].

O professor pode, além dos temas abordados nessa atividade, trabalhar área e volume, relações da geometria espacial entre outros temas.

Esta atividade está de acordo com [IMENES] [16] p. 46 e [CAVACAMI] [8] p.63.

#### **OBJETIVOS:**

Construir e analisar as principais características de diversos polígonos.

Construir segmentos com papel com auxílio de dobraduras. Estudo do Teorema de Euler em poliedros convexos.

Planejamento e estratégia para montagem dos poliedros.

#### **PÚBLICO ALVO:**

Séries finais do Ensino fundamental e Ensino médio.

#### **MATERIAL NECESSÁRIO:**

Papel sulfite, lápis, tesoura e fita adesiva.

#### **DESENVOLVIMENTO:**

Para o desenvolvimento e construção dos poliedros é necessário a construção de módulos que serão as faces destes, que conectados formarão os poliedros.

### Módulo triangular

Passo 1: Tome um papel quadrado  $ABCD$ , dobre ao meio formando o segmento  $EF$ .



Passo 2: Faça uma dobra levando o vértice  $A$  sobre  $\overline{EF}$  passando por  $B$ , formando o segmento  $GB$ . Desdobre. Seja  $H$  a intersecção de  $\overline{EF}$  e  $\overline{GB}$ .

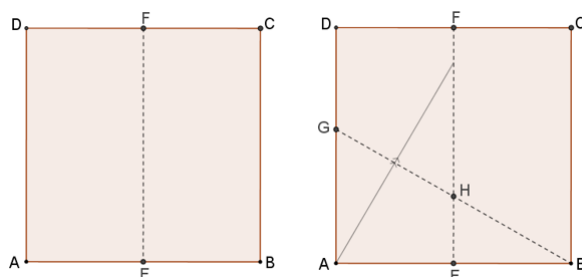


Figura 6.97 – Construção do módulo triangular.

Passo 3: Leve o segmento  $BC$  sobre  $GB$ , não desdobre.

Passo 4: Leve o ponto  $G$  sobre  $H$  com a dobra passando por  $A$ , não desdobre.

Seja  $I$  a intersecção dessa dobra com a dobra  $\overline{EF}$ .

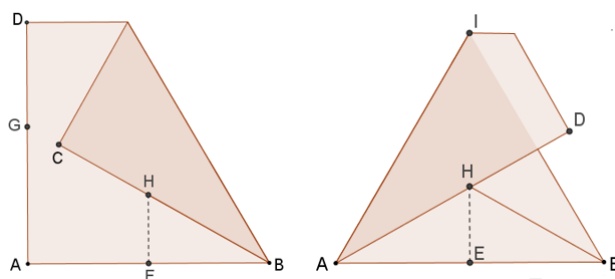


Figura 6.98 – Construção do módulo triangular.

Passo 5: Faça uma dobra levando  $I$  sobre  $E$ , obtendo os pontos  $S$  em  $\overline{AI}$  e  $R$  em  $\overline{BI}$ . Vire a folha.

Passo 6: Faça uma dobra levando  $A$  sobre  $R$ , obtendo o ponto  $Q$  em  $\overline{AB}$ .

Passo 7: Encaixe a ponta do vértice  $B$  dentro da aba.

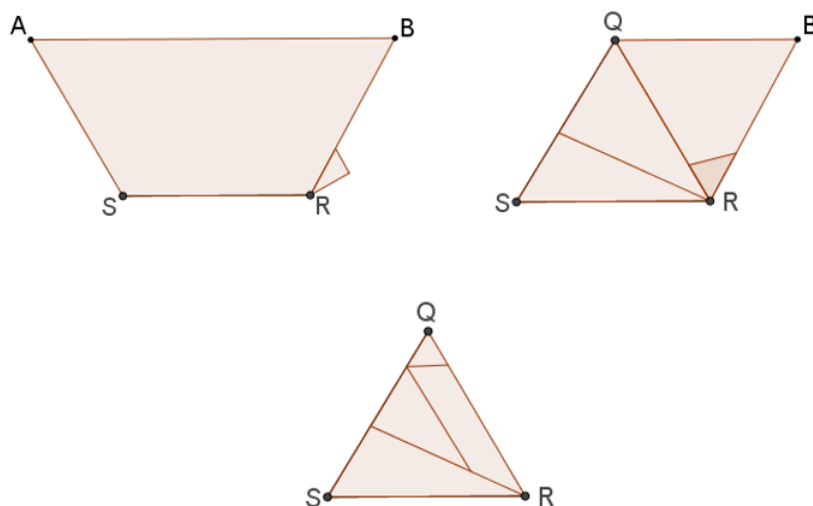


Figura 6.99 – Construção do módulo triangular.

Obtivemos um triângulo com um bolso de cada lado para encaixe das peças, o triângulo  $QSR$ .

### Módulo conexão

Para construir as conexões que serão usadas para ligar as faces, use um papel quadrado do mesmo tamanho usado para construção do módulo triangular, divida-o em quatro quadrados iguais, ou seja, usaremos um quarto do quadrado original. Este módulo será usado para conectar poliedros que possuem somente faces triangulares.

Passo 1: Dobre o quadrado levando  $A$  em  $D$  e  $B$  em  $C$ . Desdobre. E em seguida, dobre novamente, mas agora levando  $A$  em  $B$  e  $D$  em  $C$ . Desdobre. Marque o centro  $I$  do quadrado.

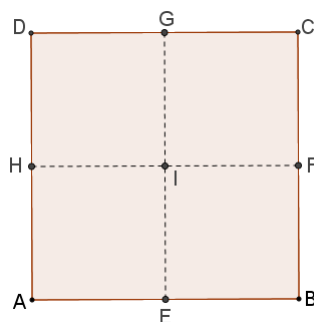


Figura 6.100 – Construção do módulo de conexão.

Passo 2: Faça quatro dobras, levando os quatro vértices ao centro  $I$  do quadrado.

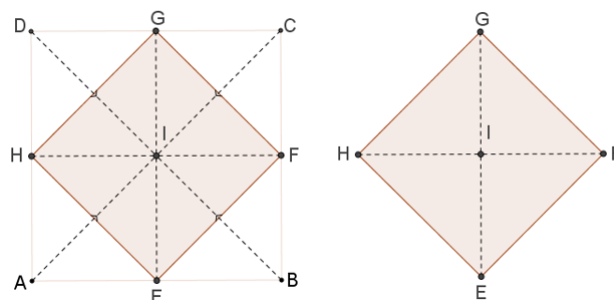


Figura 6.101 – Construção do módulo de conexão.

Obtemos um quadrado que servirá de conexão entre os módulos triangulares, para isso basta dobrar o quadrado em uma das diagonais.

### Módulo quadrado

Use um papel quadrado do mesmo tamanho que foi usado para fazer os demais módulos.

Siga os mesmos procedimentos usados no módulo de conexão, porém com o quadrado original, sem recortá-lo.

Com o quadrado resultante podemos construir dois módulos quadrados diferentes, que terão diferentes funções em diferentes poliedros. É necessário ficar atento para qual deles devemos usar.

#### Modelo 1:

Leve os vértices  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$  até o centro  $I$ , faça a dobra e desdobre.

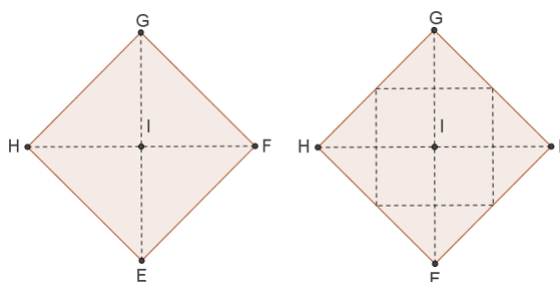


Figura 6.102 – Construção módulo quadrado.

Os triângulos formados nas pontas serão as conexões.

#### Modelo 2:

Passo 1: Siga os mesmos procedimentos do modelo anterior.

Passo 2: Abrindo levemente o segmento  $\overline{GI}$  leve o vértice  $G$  para dentro do quadrado, até o vértice  $I$ , fazendo a dobra sobre a do passo anterior. Faça o mesmo para o vértice  $E$ .

Os triângulos nas laterais serão as conexões.

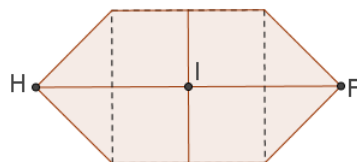


Figura 6.103 – Construção módulo quadrado.

**JUSTIFICATIVA:**

Vamos analisar porque as conexões e encaixes funcionam.

**Módulo triangular:**

É fácil ver que, partindo de um quadrado de lado medindo  $a$ , após as dobras realizadas, obtemos um triângulo de lado medindo  $\frac{a}{2}$ .

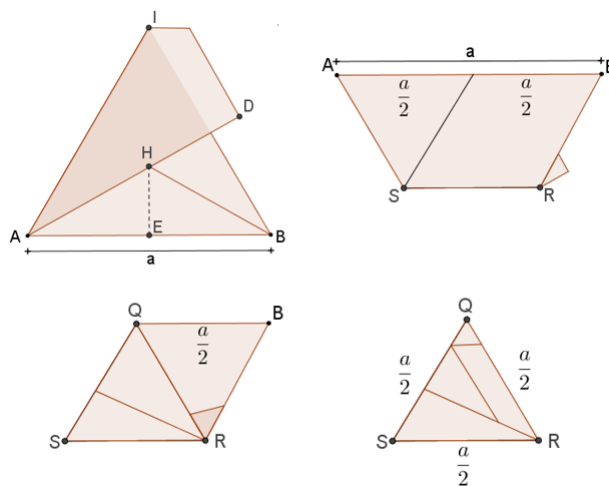


Figura 6.104 – Justificativa da construção módulo triangular.

**Módulo de conexão:**

Podemos facilmente observar que partindo de um quadrado de lado com medida  $a$ , feita a divisão deste em quatro quadrados de lado medindo  $\frac{a}{2}$ , após as construções feitas obtemos um quadrado que servirá de encaixe.

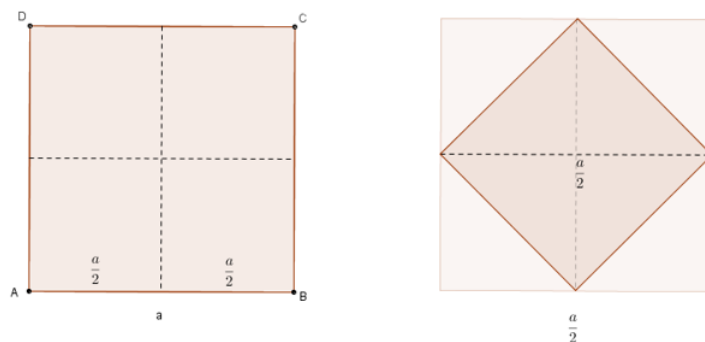


Figura 6.105 – Justificativa da construção módulo conexão.

**Módulo quadrado:**

Nos dois modelos, partindo de um quadrado de lado  $a$ , após a primeira construção temos um quadrado de diagonais medindo  $a$ .

Após a segunda construção, onde fazemos dobras nos pontos médios que ligam o centro do quadrado aos vértices, as diagonais são divididas em quatro partes. Desta maneira, temos o quadrado que será usado de face para os poliedros com medida de lado  $\frac{a}{2}$ .

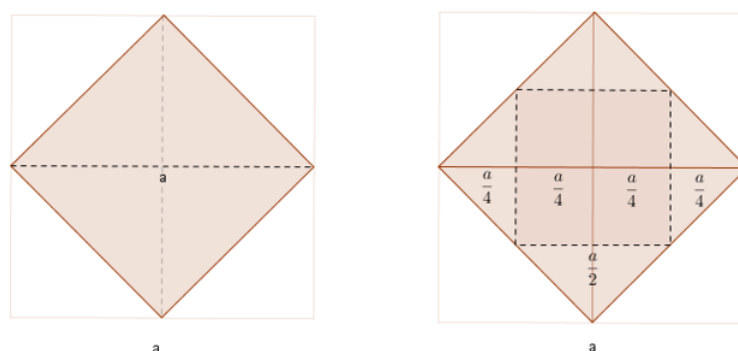


Figura 6.106 – Justificativa da construção módulo quadrado.

**Módulo pentagonal**

Queremos construir, com dobraduras, um módulo pentagonal regular como na figura:

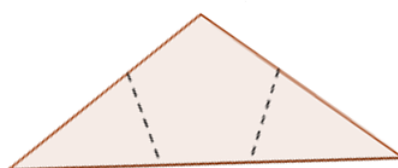


Figura 6.107 – Construção do módulo pentagonal.

O módulo pentagonal pode ser obtido a partir de dobras efetuadas em um triângulo isósceles com os ângulos da base medindo  $36^\circ$ .

Nessa construção, já serão formados, um pentágono regular unido a dois módulos de conexão triangulares.

Para dobrarmos um triângulo isósceles com as propriedades descritas acima, de forma que resulte em um pentágono regular, devemos seguir os seguintes passos:

Passo 1: : Dobre a bissetriz do ângulo  $A$ , Axioma III, obtendo o ponto  $F$  na intersecção com o lado  $\overline{EB}$ . Desdobre.

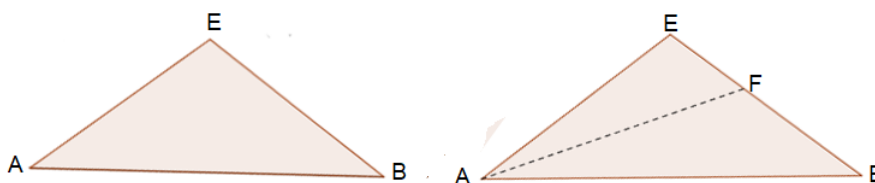


Figura 6.108 – Construção do módulo pentagonal.

Passo 2: Leve  $A$  sobre  $F$ , Axioma II, obtenha  $\overline{HI}$  mediatriz da bissetriz  $\overline{AF}$  do ângulo  $A$ .

Passo 3: Analogamente leve  $B$  sobre  $I$ , Axioma II, obtendo a mediatriz  $\overline{GF}$  de  $\overline{BI}$ . Desdobre.

Obtém-se o pentágono e os módulos triangulares.

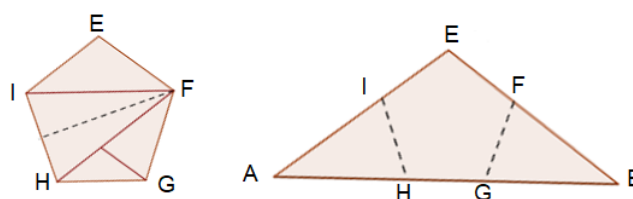


Figura 6.109 – Construção módulo pentagonal.

### JUSTIFICATIVA:

Afirmamos no início que os ângulos da base do triângulo isósceles inicial medem  $36^\circ$ . Para verificar, vamos destacar algumas características de um pentágono regular, especialmente quanto aos ângulos. Temos as propriedades:

Num pentágono regular, o ângulo central mede  $\frac{350^\circ}{5} = 72^\circ$ .

O ângulo externo mede  $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ .

E o ângulo formado por duas diagonais partindo de um mesmo vértice mede  $36^\circ$ , a metade da medida do ângulo central correspondente.

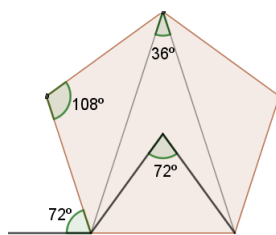


Figura 6.110 – Demonstração da construção do módulo pentagonal.

Consequentemente, o triângulo  $AHI$  é isósceles de base  $HI$ , com ângulos da base medindo  $72^\circ$ . Logo os ângulos  $A$  e  $B$  devem medir  $36^\circ$ . O mesmo acontece com o triângulo  $BGF$ , então os triângulos  $AHI$  e  $BGF$  são congruentes.

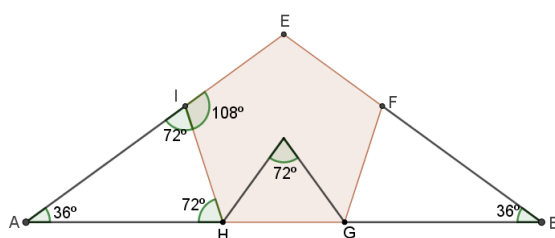


Figura 6.111 – Demonstração da construção do módulo pentagonal.

Para construir um ângulo de  $36^\circ$ , vamos inicialmente considerar o triângulo  $EBC$ , isósceles de base  $BC$ , com lados  $EB$  e  $EC$  medindo uma unidade, tal que existe um ponto  $P$ , no lado  $BC$  tal que  $AP = PB = BC$ .

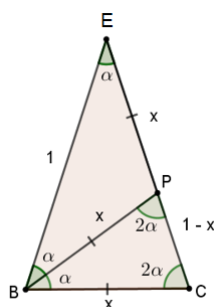


Figura 6.112 – Demonstração da construção do módulo pentagonal.

Pelo Teorema do Ângulo Externo aplicado ao triângulo isósceles  $PEB$  temos  $\angle CPB = 2\alpha$ . E como o triângulo  $BPC$  é isósceles de base  $CP$ , obtemos  $\angle BCP = 2\alpha$ .

Logo, no triângulo  $EBC$ , vale a relação  $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$ , ou seja  $\angle A = 36^\circ$ .

Agora, vamos calcular o valor de  $x$ :

Da semelhança dos triângulos  $ABC$  e  $BCP$ , obtem-se:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}, \text{ donde:}$$

$$1-x = x^2 \text{ ou seja:}$$

$$x^2 + x - 1 = 0, \text{ e portanto,}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $EBC$ , temos:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \alpha, \text{ donde:}$$

$$x^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 36^\circ,$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2 - 2 \cdot \cos 36^\circ, \text{ portanto:}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Então, construindo um triângulo retângulo com hipotenusa medindo uma unidade e um cateto medindo  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , obtemos que o ângulo formado entre a hipotenusa e o cateto medirá  $36^\circ$ .

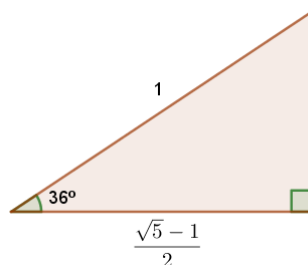


Figura 6.113 – Demonstração da construção do módulo pentagonal.

No capítulo anterior, na seção 5.2.2, p. 119, encontram-se as construções necessárias para a construção desse triângulo retângulo.

Para o triângulo  $EAB$  ou qualquer outro semelhante a ele, levando  $A$  até  $F$ , obtemos,  $\triangle AHI \equiv \triangle FHI$  pelo caso A.L.A., uma vez que são triângulos isósceles de mesma base  $\overline{HI}$ , e possuem ângulos da base com mesma medida  $\angle AIH \equiv \angle FIH$  e  $\angle A \equiv \angle IFH$ . Então  $\overline{AJ} \equiv \overline{JF}$ .



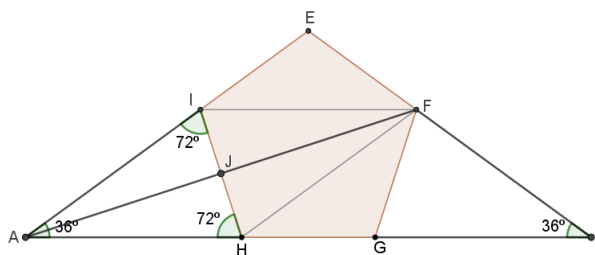


Figura 6.114 – Demonstração da construção do módulo pentagonal.

Vamos agora demonstrar que o pentágono obtido é regular. Para isso, vamos provar que os ângulos internos são congruentes e também os lados.

Iniciando pelos ângulos:

O triângulo inicial  $EAB$  tem ângulos da base medindo  $36^\circ$ . Logo, o terceiro ângulo, o ângulo  $E$ , mede  $108^\circ$ .

Já vimos que os ângulos  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $I$  são suplementos de ângulos de mesma medida,  $72^\circ$ . Logo são congruentes, com medida  $108^\circ$ .

Assim,  $\angle E \equiv \angle F \equiv \angle G \equiv \angle H \equiv \angle I = 108^\circ$ .

Vamos então, as medidas dos lados do pentágono:

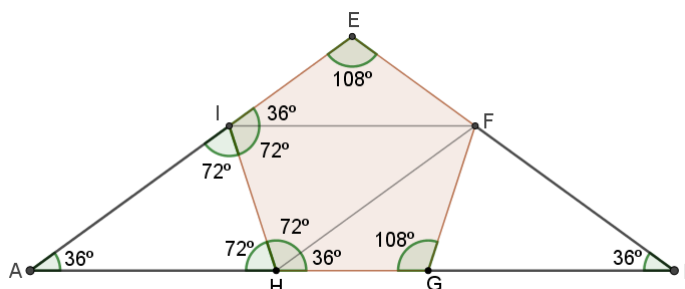


Figura 6.115 – Demonstração da construção do módulo pentagonal.

Podemos observar que os triângulos  $EIF$  e  $GHF$  são congruentes pelo caso de congruência de triângulos A.L.A., pois,  $\angle FEI = \angle FGH = 108^\circ$ .

$HF = IF$  por construção, são lados do triângulo isósceles  $FHI$  de base  $HI$ .

$\angle EIF = 108^\circ - \angle FHI = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ$ , bem como,  $\angle GHF = 108^\circ - \angle FHI = 108^\circ - 72^\circ = 36^\circ$ , portanto  $\angle EIF = \angle GHF$ .

Logo, os triângulos  $EIF$  e  $GHF$  são isósceles de bases  $IF$  e  $HF$  respectivamente e,  $IE = EF = FG = GH$ .

Dessa congruência e da congruência das bases  $IH$  e  $FG$  dos triângulos isósceles  $AIH$  e  $BFG$ , segue que  $EF = FG = GH = HI = IE$ , ou seja, os lados do pentágono

também são congruentes e então concluímos que o pentágono EFGHI é regular.

### 6.5.11 Tetraedro regular

Para montar o tetraedro são necessários 4 módulos triangulares e 6 módulos de conexões. Observe que o número de conexões é o mesmo do número de arestas.

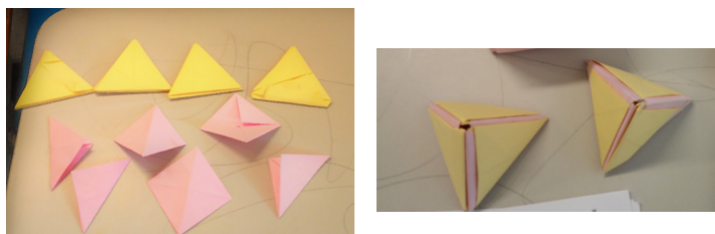


Figura 6.116 – Construção do tetraedro regular.

### 6.5.12 Cubo

Para montar o cubo são necessários 6 módulos quadrados modelo 2. Caso seja necessário prenda por dentro as peças com fita adesiva ou cola.

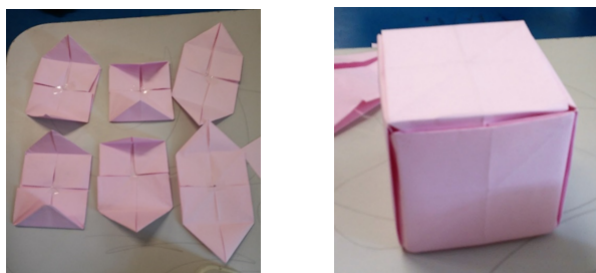


Figura 6.117 – Construção do cubo.

### 6.5.13 Octaedro regular

Para montar o octaedro são necessárias 8 módulos triangulares e 12 módulos de conexões.

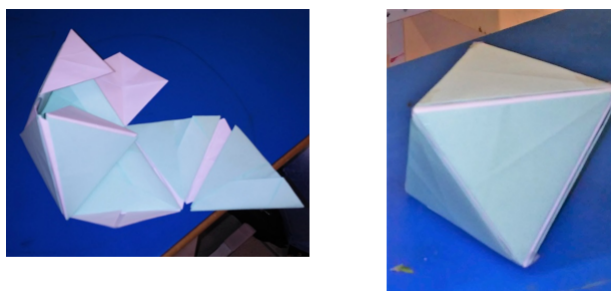


Figura 6.118 – Construção do octaedro regular.

### 6.5.14 Icosaedro regular

A montagem do icosaedro é trabalhosa, são necessárias 20 módulos triangulares e 30 módulos de conexões.

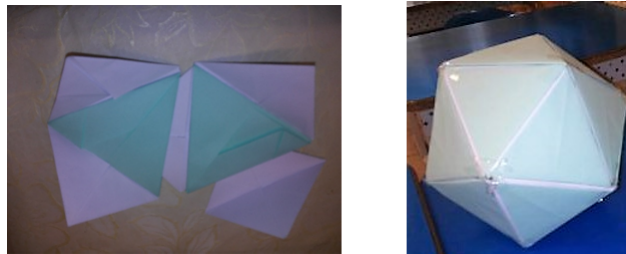


Figura 6.119 – Construção do icosaedro regular.

### 6.5.15 Dodecaedro regular

Para montar as faces pentagonais do dodecaedro, levei o retângulo com o tamanho correto para os alunos já recortado. Os procedimentos para encontrar o retângulo para essa construção são mais complexos, e desviariam do objetivo final.

Para montagem do dodecaedro são necessários 12 módulos pentagonais. Caso seja necessário utilize fita adesiva.

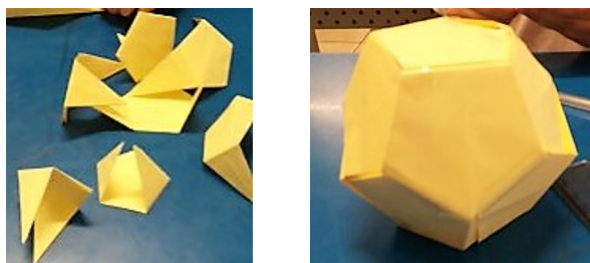


Figura 6.120 – Construção do dodecaedro regular.

#### **AVALIAÇÃO:**

A avaliação foi realizada através da análise da participação dos alunos nas atividades.

Os resultados esperados consistiam que os alunos construíssem os módulos corretamente; identificassem e explorassem os polígonos das faces; construíssem os poliedros corretamente; identificassem e explorassem os poliedros, assim como as faces, vértices e arestas e a relação de Euler; relacionassem o número de encaixes com o número de arestas.

A relação de Euler foi avaliada através do preenchimento da tabela abaixo.

POLIEDRO (REGULAR)	NÚMERO DE FACES	NÚMERO DE ARESTAS	NÚMERO DE VÉRTICES	RELAÇÃO DE EULER $V - A + F = 2$
TETRAEDRO				
CUBO				
OCTAEDRO				
ICOSAEDRO				
DODECAEDRO				

Figura 6.121 – Construção do dodecaedro regular.

**ANÁLISE DOS RESULTADOS:**

Unidade: E.M.E.B Humberto Brasil – Mogi Mirim.

Ano: 6º B.

Tempo de aplicação: 7 aulas de 50 minutos.

Os alunos tiveram dificuldades em construir o módulo triangular, foi necessária ajuda individual da professora com os alunos e que, os alunos que aprenderam ajudassem os outros na construção.

Os alunos também tiveram um pouco de dificuldade na construção do módulo de face quadrada 2, no passo 2, onde se encaixam os dois vértices opostos dentro de uma dobra, sendo necessário repetir a passagem várias vezes.

Na montagem dos icosaedros e dos dodecaedros foram necessárias a ajuda de vários alunos, e foi bem trabalhoso, foi necessário colar com fita adesiva os vértices para que o poliedro não desmontasse.

Nas demais construções e montagens os alunos não tiveram maiores dificuldades.

Os alunos analisaram os polígonos durante as construções, observaram e compreenderam que os polígonos das faces devem ser regulares para se obter um poliedro regular. Anteriormente as montagens, desdobramos as faces e encaixes e validamos as medidas para melhor entendimento do funcionamento dos encaixes, os alunos entenderam facilmente essa parte, alguns fizeram posteriormente poliedros de tamanhos variados. Após algumas perguntas de investigação, os alunos relacionaram o número de aresta com o número de encaixes. A utilização dos poliedros confeccionados por eles, foi de grande enriquecimento para concluir os resultados, em especial da relação de Euler, fixaram com maior facilidade os conceitos geométricos.

O resultado foi satisfatório, o prazo para concluir a atividade foi maior que o previsto, porém todos participaram e não tiveram dificuldades em preencher a tabela de atividade para conclusão e validando a relação de Euler para esses poliedros.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O propósito do trabalho é contribuir com o estudo e ensino de Geometria no Ensino Fundamental e Médio usando como recurso pedagógico a dobradura. A abordagem de tópicos de Geometria em livros didáticos e apostilas muitas vezes é sucinta, não explanando o assunto com a devida importância, outras vezes, devido ao tempo reduzido, o professor aborda o assunto em poucas aulas, sem incluir métodos alternativos, como a construção geométrica. Muitos assuntos, como por exemplo a congruência de triângulos, são de extrema importância, sendo base de muitos teoremas e definições de Geometria, são abordados brevemente.

O recurso pedagógico da dobradura, além de exigir poucos recursos sendo basicamente o papel, já é um atrativo por tomar muitas formas como aviões, barcos e animais, logo, muitos alunos já conhecem o método como recreação. Em Geometria nos fornece inúmeras possibilidades de trabalho, além de muitas fontes onde podemos aprimorar nosso conhecimento e diferenciar o trabalho com os alunos, desde ensino infantil até o ensino superior, tornando-o mais interessante e desenvolvendo várias habilidades. Os alunos no trabalho com dobraduras, devem formular estratégias, levantar hipóteses, observar e assimilar as construções e relacioná-las com o conteúdo, obtendo assim maior progresso na compreensão do mesmo.

Outro ponto importante, é a relação entre a Geometria Euclidiana e Analítica, a Álgebra algumas vezes é de difícil compreensão, porém importante para o desenvolvimento da Geometria, essa relação torna o estudo de Álgebra mais prazeroso. O método de dobraduras consegue fazer bem essa relação, uma vez que ao se desenvolver as dobraduras podemos fazer essa correspondência abrindo discussão para outros assuntos na Matemática.

Para maior enriquecimento do trabalho, além de alguns planos de aulas e atividades com dobraduras com relato de todo o desenvolvimento e conclusão, são levantados alguns tópicos importantes e algumas características pouco exploradas destes tópicos, trazendo assim um outro olhar para assuntos de base da Geometria do currículo de Matemática. A relação entre a Geometria de Euclides, que utiliza a construção com régua sem escala e compasso e a Geometria do Origami e seus axiomas, além de significativo, nos leva a relacionar axiomas do Origami e construções elementares da Geometria Euclidiana. As consequências dessa comparação nos propiciam algumas conclusões bem interessantes que podem ser apresentadas para os alunos, como por exemplo a construção de alguns números.

Na parte histórica tratamos do trabalho de Euclides, considerado o maior estudo de Geometria, Os Elementos e, também dos três problemas clássicos da Geometria antiga,

a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo, problemas que não tem solução na Geometria Euclidiana, porém utilizando a Geometria do Origami é possível solucionar dois desses problemas, a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo. Um pouco de história das Secções Cônicas e da arte do Origami é levantado, afim de relacionar a história, os matemáticos nelas envolvidos com os tópicos do trabalho. É importante que os alunos estudem os relatos históricos para entenderem suas origens, o desenvolvimento, o tempo e recursos que foram destinados para o conhecimento que temos nos dias atuais.

Tentamos fazer um trabalho de fácil entendimento para qualquer leitor, com demonstrações e atividades bem detalhadas e muitas figuras ilustrativas, enriquecendo com algumas aplicações. Lembrando que temos alguns exemplos de atividades, servindo de referência para o leitor se aprofundar e diversificar suas aulas, podendo encontrar muitas outras fontes ricas em atividades.

Apesar de já trabalhar com dobraduras antes de iniciar o trabalho, ao desenvolver as atividades deste em sala de aula surgiram novos aprendizados, novas questões e novas formas de aperfeiçoar as construções com dobraduras e a Geometria envolvida. Antes deste trabalho não tinha conhecimento das origens e de toda teoria por trás do Origami, investigar e aprofundar sobre toda essa interessante e perfeita relação foi muito gratificante, e tem contribuído muito para aprimorar minhas aulas. Os estudos sobre alguns tópicos específicos, têm acrescentado muito para meu conhecimento de Geometria, como por exemplo o Teorema de Ceva e algumas aplicações, trazendo vários benefícios para meu trabalho em sala de aula e para o aprendizado dos alunos.

O Profmat trouxe para minha vida como educadora muitos benefícios, transformando minha didática, meu conhecimento, minha perspectiva e minha relação com ensino e aprendizagem em Matemática, originando-se uma profissional melhor, com maior volume de conhecimento e conseqüentemente melhores condições de corrigir falhas e transpor obstáculos em seu trabalho.

## Referências

- [1] ALPERIN, R. C. *A Mathematical theory of origami constructions and numbers*. New York Journal of Mathematics - Vol. 6, 2000. 119-133 p. Disponível em: <<http://nyjm.albany.edu/j/2000/6-8.pdf>>. Acesso em: 20 de setembro de 2016. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 135.
- [2] ALPERIN, R. C. *Mathematical Origami: Another View of Alhazen's Optical Problem*. Department of Mathematics and Computer Sciences, San Jose State University, California, 2001. Disponível em: <<http://www.math.sjsu.edu/~alperin/Alhazen.pdf>>. Acesso em: 20 de setembro de 2016. Citado na página 75.
- [3] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática. 11 ed. SBM: Rio de Janeiro, 2012. Citado na página 28.
- [4] BOYER, Carl B., *História da Matemática*, Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1974. Citado na página 72.
- [5] BURATO, R. *Origami*. 2008. Disponível em: <<http://nipocultura.blogspot.com.br/2008/02/origami.html>>. Acesso em: 16 de março de 2016. Citado na página 140.
- [6] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. Citado na página 21.
- [7] CARVALHO, J. P. *Os três problemas clássicos da Matemática grega*. Disponível em: <<http://www.bienasbm.ufba.br/M20.pdf>>. Acesso em: 14 de novembro de 2016. Nenhuma citação no texto.
- [8] CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. *Explorando Geometria com o origami*. 2010. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf>>. Acesso em: 23 de janeiro de 2017. Citado 5 vezes nas páginas 140, 159, 161, 166 e 200.
- [9] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria Analítica*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 89.
- [10] DOLCE, O.; POMPEU, J. N. *Fundamentos da Matemática Elementar, 9: Geometria Plana*. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. Nenhuma citação no texto.
- [11] EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas - SP: Editora Unicamp, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 35, 72 e 73.

- [12] GEOGEBRA. *Dynamic mathematics e science for learning and teaching*. 2001. Disponível em: <<http://www.geogebra.org>>. Acesso em: 23 de janeiro de 2016. Nenhuma citação no texto.
- [13] HAYASAKA, E. Y.; NISHIDA, S. M. *Origami na educação*. Museu Escola do IB, Universidade Estadual Paulista - UNESP. Disponível em: <[http://www2.ibb.unesp.br/Museu\\_Escola/Ensino\\_Fundamental/Origami/Documentos/indice\\_origami\\_educacao.htm](http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami_educacao.htm)>. Acesso em: 23 de março de 2016. Citado na página 109.
- [14] HAYASAKA, E. Y.; NISHIDA, S. M. *Origem do papel*. Museu Escola do IB, Universidade Estadual Paulista - UNESP. Disponível em: <[http://www2.ibb.unesp.br/Museu\\_Escola/Ensino\\_Fundamental/Origami/Documentos/indice\\_origami\\_papel.htm](http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami_papel.htm)>. Acesso em: 25 de março de 2016. Citado na página 109.
- [15] HAYASAKA, E. Y.; NISHIDA, S. M. *Pequena história sobre o Origami*. Museu Escola do IB, Universidade Estadual Paulista - UNESP. Disponível em: <[http://www2.ibb.unesp.br/Museu\\_Escola/Ensino\\_Fundamental/Origami/Documentos/indice\\_origami.htm](http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm)>. Acesso em: 23 de março de 2016. Citado na página 109.
- [16] IMENES, L. M. *Geometria das dobraduras*. 6. ed. São Paulo: Editora Scipione Ltda, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 140 e 200.
- [17] KANEGAE, M. *Breve histórico do Origami no Brasil*. Disponível em: <<http://www.kamiarte.com.br/>>. Acesso em: 02 de abril de 2016. Citado na página 109.
- [18] LANG, Robert J. *Origami and Geometric Constructions*. Disponível em: <<http://whitemyth.com/sites/default/files/downloads/Origamihttp://whitemyth.com/sites/default/files/downloads/Origami/Origami>> Acesso em: 17 agosto 2017. Citado na página 113.
- [19] MANETTA, M. A. *Círculos inscritos no triângulo retângulo*. Disponível em: <<http://www.dinamica.com.br/2011/11/circulos-inscritos-no-triangulo.html>>. Acesso em: 17 de maio de 2017. Citado na página 59.
- [20] MARTIN, G.E. *Geometric Constructions*. New York: Springer-Verlag, 1998. Citado na página 107.
- [21] MATTOS, F. R. P. *Números Construtíveis por Dobraduras de Papel ou Reflexões*. 2001. 150 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2001. Citado 4 vezes nas páginas 75, 116, 117 e 126.
- [22] MONTEIRO, L. C. N. *Origami: História de uma geometria axiomática*. 2008. 60 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) - Faculdade de Ciências,



Departamento de Matemática, Faculdade de Lisboa, Lisboa. 2008. Citado 6 vezes nas páginas 117, 124, 169, 173, 178 e 191.

[23] MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana*. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 57.

[24] PIRES, C. M. C. *Números racionais: o que precisamos saber sobre eles*. Puc - S.P. Citado 2 vezes nas páginas 149 e 150.

[25] RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. do; JUNIOR, S. G. *A Geometria do Origami*. João Pessoa: Editora Universitária - UFPB, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 140, 142 e 200.

[26] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas*. 2. ed. Campinas –SP: Editora da Unicamp, 2008. Citado 12 vezes nas páginas 29, 30, 31, 36, 42, 57, 67, 70, 74, 132, 138 e 165.

[27] SANTOS, R. J. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2008. Nenhuma citação no texto.

[28] SÃO PAULO, Secretaria da Educação. *Caderno do professor: Matemática, Ensino Fundamental - anos finais; 9º ano, volume 1*. São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2014 - 2017. Citado na página 152.

[29] SATO, J. *Retas tangentes a uma cônica*. 2005. Disponível em: <<http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node15.html>>. Acesso em: 07 de outubro de 2017. Nenhuma citação no texto.

[30] SHENG, L. Y.; et al. *Utilização da arte do Origami no ensino de geometria*, In: Encontro Regional De Professores De Matemática, 18.,2005. Campinas S. P. Anais. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas - SP. Citado na página 109.

[31] SIQUEIRA, P. H.; COSTA, A. M. *Cônicas*. 2. ed. Universidade Federal do Paraná. Setor de Ciências Exatas. Departamento de Expressão Gráfica Pet - Matemática, 2012. Disponível em: <[http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs\\_degraf/conicas.pdf](http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/conicas.pdf)>. Acesso em: 03 de março de 2017. Nenhuma citação no texto.

[32] SOUTO, A. M. da S. *A Reta de Euler e a Circunferência de Nove Pontos: um olhar algébrico*. 2013. 37 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Departamento de Matemática, João Pessoa. 2013. Citado na página 66.

[33] SOUZA, L. D. de. *Cônicas e Suas Propriedades Notáveis*. 2014. 33 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) Universidade Federal de Santa

Catarina. Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática. Florianópolis. 2014.