UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Resolubilidade de polinômios: da teoria ao ensino-aprendizagem

Edson Vander da Silva

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Edson Vander da Silva

Resolubilidade de polinômios: da teoria ao ensino-aprendizagem

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Alex Carlucci Rezende

USP – São Carlos
Março de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S586r

Silva, Edson Vander da
Resolubilidade de polinômios: da teoria ao ensino-aprendizagem / Edson Vander da Silva; orientador Alex Carlucci Rezende. -- São Carlos, 2018.
102 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Polinômios. 2. Equações polinomiais. 3. Raízes de polinômios. 4. Atividade de aplicação. I. Rezende, Alex Carlucci , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Edson Vander da Silva

Solvability of polynomials: from theory to teaching-learning process

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Alex Carlucci Rezende

USP – São Carlos
March 2018

AGRADECIMENTOS

“Meus agradecimentos.
Durante a nossa vida:
Conhecemos pessoas que vêm e que ficam,
Outras que vêm e passam.
Existem aquelas que,
Vêm, ficam e depois de algum tempo se vão.
Mas existem aquelas que vêm e se vão com uma enorme vontade de ficar...”

(Charles Chaplin)

Estar rodeado de pessoas com enorme vontade de ficar é essencial para fortalecer e fazer com que consigamos realizar nossos sonhos.

Agradeço a Deus, pelo presente maravilhoso que é a minha vida e por Ele sempre estar presente nela.

Meu eterno agradecimento a todas as pessoas que o Senhor colocou em meu caminho e que me inspiraram, me ajudaram, me desafiaram e me encorajaram a ser perseverante, acreditando que eu seria capaz.

"Deus não escolhe os capacitados,
Ele capacita os escolhidos.
Fazer ou não fazer algo
só depende de nossa vontade
e perseverança."
Albert Einstein

RESUMO

SILVA, E. V. **Resolubilidade de polinômios: da teoria ao ensino-aprendizagem**. 2018. 102 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

Neste trabalho, estudamos polinômios e equações polinomiais, apresentando orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e informações de como alguns livros didáticos abordam o tema quanto ao tratamento, à metodologia e à priorização no planejamento escolar. Considerando polinômios com coeficientes reais ou complexos, buscamos condições sobre os coeficientes para que tais polinômios tenham raízes. Refletimos sobre como os professores de Matemática podem tratar o tema em sala de aula para obter resultados positivos e tornar a aprendizagem mais atrativa. Abordamos diversos resultados, como o Teorema do Resto, o dispositivo prático de Briot-Ruffini, o Teorema da Decomposição, as relações de Girard, o Teorema das Raízes Racionais, o Teorema Fundamental da Álgebra e as fórmulas de resolução de equações polinomiais por radicais até o quarto grau. Apresentamos uma abordagem para sala de aula com a utilização de um recurso computacional didático e instrumento de avaliação diferenciado.

Palavras-chave: Polinômios, Equações polinomiais, Raízes de polinômios, Atividade de aplicação.

ABSTRACT

SILVA, E. V. **Solvability of polynomials: from theory to teaching-learning process**. 2018. 102 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

In this dissertation, we study polynomials and polynomial equations, presenting guidelines from the National Curricular Parameters and information on how some textbooks discuss the topic regarding the treatment, the methodology and the prioritization in school planning. Considering polynomials with real or complex coefficients, we seek conditions on these coefficients so that we ensure that these polynomials have roots. We reflect on how Math teachers can address the topic in the classroom in order to get positive results making the learning more attractive. We address several results such as the Polynomial Remainder Theorem, the Briot-Ruffini's practical rule, the Decomposition Theorem, the Girard's relations, the Rational Roots Theorem, the Fundamental Theorem of Algebra and the resolution formulas for polynomial equations by radicals up to the fourth degree. We present a lesson plan with the use of a teaching computational resource and differentiated evaluation tool.

Keywords: Polynomials, Polynomial equations, Roots of polynomials, Application lesson.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O período de 5.000.000 a.C. a 3.000 a.C., conhecido como Idade da Pedra, retratou um mundo de vastas pastagens e savanas que abrigavam animais selvagens e seres humanos nômades que caçavam, colhiam e viviam em permanente agitação para terem desenvolvido tradições científicas. No entanto, os progressos na matemática resumiam-se na necessidade de anotar a parte de cada família na caçada e também no comércio entre elas (EVES, 2008).

De 3.000 a.C. a 525 a.C., ocorreu a Revolução Agrícola, período no qual os povos passaram a ser sedentários e agricultores, precipitando profundas modificações culturais; uma delas foi a criação da escrita. Novas sociedades baseadas na economia agrícola emergiram nos vales dos rios Tigre e Eufrates (Oriente Médio), Nilo (África), Amarelo (China) e Indo (China, Índia e Paquistão) onde desenvolveram empiricamente a matemática básica da agrimensura, da engenharia e do comércio. Resolveram equações quadráticas pelo método de completar quadrados, como também discutiram algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro). Não existia sinal algum de formulação algébrica (EVES, 2008).

A revolução agrícola desencadeou um longo período de progresso intelectual e científico. Alcançou a Grécia, vinda do Egito e do Oriente Médio e despontou na ilha grega de Creta uma civilização chamada minóica que dominava a escrita e a leitura. Foi nesse período que se assistiu pela primeira vez ao emprego do raciocínio dedutivo em matemática, o que se deve a Tales de Mileto (640-564 a.C.) e Pitágoras (586-500 a.C.) e a lógica foi sistematizada num tratamento de Aristóteles (384-322 a.C). Os gregos idealizaram processos algébricos engenhosos para efetuar operações algébricas. Atribui-se aos partidários da escola fundada por Pitágoras a Álgebra Geométrica que pode ser encontrada nos livros dos Elementos de Euclides. No livro II são apresentadas as identidades geométricas e no VI, a resolução geométrica de equações quadráticas simples (EVES, 2008).

Entre 550 a.C. e 476 d.C. o mundo ocidental foi dominado por grandes impérios: o Império Persa (550-330 a.C.), a Grécia Helenística (323-31 a.C.), que era dividida entre três grandes impérios: o Egito Ptolomaico, o Reino Selêucida e a Macedônia, e o Império Romano (31 a.C. a 476 d.C.). Esses impérios evoluíram razoavelmente nas realizações científicas, cada um a seu modo. Embora os intelectuais atenienses continuassem a se concentrar em filosofia, história e literatura, os pensadores de Alexandria, Egito, enfatizavam a ciência e a matemática. O Império Romano liderado por Augusto em 31 a.C., produziu uma boa história, uma literatura fina e revelou-se um meio infecundo para a ciência, pois mantinha mais da metade dos habitantes como escravos e não se atinava com a necessidade de mecanismos para poupar trabalho, como as polias e as alavancas inventadas por Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.). Os filósofos gregos Aristóteles (384-322 a.C.) e Euclides (século III a.C.), considerando a falta de símbolos para indicar números desconhecidos, deram os primeiros passos ao emprego de letras e símbolos para indicar números e expressar a solução de um problema. Ao mesmo tempo em que gregos e romanos forjavam as instituições básicas da sociedade ocidental, as civilizações orientais, China, Índia e Arábia, também emergiam (EVES, 2008).

O poderoso Império Chinês liderado por reis que eram monarcas caracteristicamente absolutistas, como Li Yüan e Kublai Khan (1216-1294), forneciam amparo governamental às artes. A China Clássica (c. 600 a.C.-221 d.C.) e a Imperial (221 d.C.-1911) produziram uma cultura rica e uma base intelectual sólida. Os eruditos chineses interessavam por filosofia, arte e literatura. Na matemática e na ciência podemos destacar o método de Horner para soluções numéricas de equações algébricas, o emprego de métodos matriciais para resolver sistemas de equações lineares e a resolução de congruência pelo método hoje consubstanciado no Teorema Chinês dos Restos (EVES, 2008).

Os hindus contribuíram significativamente para o desenvolvimento da Álgebra. Eles aceitavam os números negativos e irracionais e sabiam que uma equação quadrática (com soluções reais) possuía duas raízes formais. Além disso, unificaram a resolução algébrica de equações quadráticas pelo método de completamento de quadrados. Os árabes introduziram o islamismo na Índia no século VIII d.C. Depois de 1206 a ciência e a matemática indianas se fundiram com a arábica (EVES, 2008).

No século IX, AL-Khowarizmi (c.780-c.850 d.C.), matemático árabe, desenvolveu um processo para a resolução de problemas que deu início à chamada álgebra geométrica. No século XII, baseado nos estudos feitos por AL-Khowarizmi, o matemático hindu Bháskara (1114-1185) apresentou um processo puramente algébrico que permitia resolver qualquer equação de segundo grau que ficou conhecida como a fórmula resolutiva de Bháskara para equações de segundo grau (ENS, 1988).

Na Europa Medieval (476-1492 d.C.) a única estrutura social era o feudalismo. A maior parte da população constituía-se de camponeses, ou servos, que legalmente tinham a obrigação de cultivar as terras dos senhores e pagar pelo seu uso com uma parte da colheita. Havia uma classe média urbana formada de mercadores e artesãos. A ascensão social era praticamente inexistente e a única porta de entrada para a aristocracia era o berço. O homem medieval revelou habilidade para a engenharia: projetaram e construíram catedrais imensas, repletas de vitrais. Ferreiros desenvolveram métodos de construção de relógios precisos. Moleiros aperfeiçoaram a roda-d'água. Engenheiros medievais abriram longos canais, construíram pontes sobre os mais longos rios e drenaram e represaram pântanos, mesmo não tendo uma formação universitária plantada na ciência pura. Eles eram artesãos e mecânicos de parcos conhecimentos teóricos, muitas vezes ignorados pela classe intelectual. Os intelectuais do Renascimento – séculos XIV e XV – temendo acusação de heresia por parte da Igreja Católica relutaram em publicar suas teorias sobre ciência, gerando uma grande perda para a época (EVES, 2008).

A expansão da Europa (1492-1700) foi favorecida pelas viagens comerciais que lideradas por mercadores espanhóis, ingleses e franceses, e pelo italiano Cristóvão Colombo, exploravam ouro e prata nas Américas do Sul e Central e importavam especiarias e sedas da Ásia. Quanto mais terras agricultáveis se encontravam nos novos continentes, mais os européus buscavam riquezas adicionais. Mais realistas, os comerciantes holandeses seguiam a trilha portuguesa em torno da África. Os russos infiltraram-se na Sibéria, perseguindo um caminho por terra para a China. Houve também a migração de europeus para outros continentes que concentravam na extração de matéria prima. A Era das Exportações despertou uma revolução cultural e científica na Europa, marcada pelo interesse por ideias novas e por novos lugares, por um florescimento das artes e por uma percepção da necessidade de tecnologias novas, especialmente na navegação. A Europa estava na alvorada da era moderna. O advogado e matemático francês, François Viète (1540-1603) em seu mais famoso trabalho *In artem* (VIèTE, 1591) realçou o simbolismo algébrico. Nele, Viète introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. A convenção de se usar as últimas letras do alfabeto para indicar as incógnitas e as primeiras para as constantes foi introduzida por Descartes (1637).

No século XVI, com o Renascimento italiano, ocorreu um progresso significativo: a resolução das equações de terceiro grau, como decorrência, as de quarto grau. A história da resolução dessas equações envolve segredos, batalhas, desafios e traições, culminando, em 1545, na publicação de *Ars Magna* (CARDANO, 1545). Essa obra contém o processo de resolução e a devida demonstração da fórmula de resolução de uma equação de terceiro grau, além da explicação de como resolver uma equação de quarto grau, transformando-a em outra de terceiro grau. Segundo o professor Eloy Ferraz Machado Neto em (DANTE, 2008), o método de resolução das cúbicas foi revelado a Girolamo Cardano por Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557), sob juramento de segredo total. Cardano justificou a traição com desculpas de que, ao tomar conhecimento do trabalho de Scipione Del Ferro (1465-1526), Tartaglia não havia sido o único nem o primeiro a descobrir a fórmula para resolver as cúbicas.

Girard (1629), em seu livro *L'invention nouvelle en l'Algèbre*, afirmou que uma equação polinomial de grau n, tem n soluções, mas não disse que tais soluções eram necessariamente números complexos. Além disso, ele disse que a sua afirmação era válida "a menos que a equação fosse incompleta", querendo dizer com isto que nenhum coeficiente é igual a zero. No entanto, quando ele explicava em detalhes o que queria dizer, tornava-se claro que, de fato, ele acreditava que sua afirmação era válida em todos os casos. Por exemplo, ele mostrava que a equação: $x^4 = 4x - 3$, embora incompleta, apresentava quatro soluções: $-1+\sqrt{2}i$, $-1-\sqrt{2}i$, 1 e 1 (contadas as multiplicidades).

Em 1637, Descartes escreveu em *La géométrie* o que anos antes Thomas Harriot (1560-1621) havia descoberto: se a fosse raiz de um polinômio, então $x-a$ dividiria o polinômio. Descartes afirmou também que para todas as equações de grau n, podia-se imaginar n raízes, mas estas podiam não corresponder a quantidades reais (DESCARTES, 1637).

No século XVIII uma nova classe média, a burguesia, emergiu derrubando a antiga ordem aristocrática na Inglaterra. A burguesia, os camponeses e a população urbana pobre foram responsáveis por muitas revoluções e consequentemente promoveram a "Revolução Industrial" no século XIX que mudou o mundo. Ela marcou uma reorganização radical na civilização humana. Os agricultores deixaram de constituir a maioria da população e os operários industriais tornaram-se o segmento maior da força de trabalho dando início à sociedade moderna. A partir daí veio o progresso tecnológico trazendo uma era de investigações científicas sem precedentes, especialmente na mecânica e na química, exigindo a participação de matemáticos e cientistas com grau universitário (EVES, 2008).

Durante dois séculos e meio tentou-se encontrar uma fórmula resolutiva para a equação de quinto grau. Somente em 1824 o norueguês Niels Abel (1802-1829) provou, de maneira consistente, a impossibilidade de resolução dessa equação por meio das quatro operações aritméticas e de radiciações. Poucos anos depois, o francês Évariste Galois (1811-1832) – cujos trabalhos deram início à chamada Álgebra Moderna – inspirado na demonstração de Niels Abel, mostrou a impossibilidade de uma fórmula geral de resolução por radicais de equações polinomiais de grau maior ou igual a cinco.

O século XX foi marcado pela energia atômica e pelas grandes potências imperiais do século XIX se enfrentando em sangrentas guerras. Houve a Primeira Guerra Mundial (1914-1918), a Revolução Russa (1917), a Grande Depressão da década de 1930 e a Segunda Grande Guerra Mundial (1939-1945). Mahatma Gandhi (1869-1948) propôs como símbolo da filosofia organicista a roda de fiar. Máquina simples, a roda de fiar é acionada pelas mãos humanas e não pela eletricidade, e para Gandhi isso representava a harmonia entre a humanidade e a natureza. Pode-se notar também o esfacelamento dos impérios coloniais do século XIX, os movimentos pela preservação do meio ambiente e pelos direitos das mulheres na Europa, América e Ásia, a cruzada antinuclear e a luta por uma tecnologia apropriada. Albert Einstein (1879-1955), grande cientista do século XX, embora se dedicasse à mecânica, foi um humanista compassivo; reconheceu a natureza mecânica do universo mas, também, em sua teoria da relatividade, subentendeu-o como um todo coeso esplêndido. Ele ajudou a aproveitar a potência do átomo, mas foi sábio o suficiente para advertir sobre os perigos de usá-lo de forma errada (EVES, 2008).

Diante de tanto assunto relevante sobre polinômios e equações polinomiais apresentado por grandes estudiosos ao longo do tempo faz-se necessário pesquisar, estudar, incluir no planejamento e utilizar nas aulas, para enriquecer os conhecimentos matemáticos dos alunos e atender a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEMs) (BRASIL, 2000). As aplicações dos conceitos sobre monômios, por exemplo, são inúmeras e vão desde a confecção de objetos, como uma bola de futebol, até o auxílio em representações de cálculos bem complexos. Encontramos funções polinomiais na Física, representando o espaço percorrido por um corpo e o intervalo de tempo gasto, por exemplo $e(t) = t^2 - 2t + 4$. Na economia, o custo de produção e as unidades produzidas podem ser relacionadas por uma função, como $c(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}03x^2 + 10x + 500$ (SANTOS; GENTIL; GRECO, 2003). Além de aplicações práticas, vale ressaltar que o conhecimento de ferramentas matemáticas não precisam necessariamente ter utilidade imediata ou utilidade cotidiana. “A função primordial da matemática é preparar a mente para pensar, raciocinar, decidir no solo do imaginário e fornecer subsídios quando estes forem necessários”.

Portanto, a presente pesquisa e seus resultados oferecerão oportunidade ao professor de revisar, sob novo ponto de vista, o conteúdo matemático relacionado aos polinômios e suas aplicações; tomar conhecimento de técnicas e metodologias empregadas atualmente no ensino-aprendizagem de polinômios; fortalecer o conhecimento matemático e motivar de maneira positiva para investigar novos temas e buscar metodologias adequadas aos alunos do Ensino Médio.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Analisar polinômios da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

cujos coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais ou complexos, buscando condições sobre esses coeficientes para que a equação $p(x) = 0$ tenha solução. Obter a expressão das raízes para equações polinomiais de grau até no máximo quatro.

1.1.2 Objetivos específicos

1. Localizar na história da humanidade os polinômios, sabendo que esses, *a priori*, formam um plano conceitual importante na Álgebra e na Geometria, quando se deseja calcular expressões que envolvem valores desconhecidos.

2. Verificar como os polinômios são abordados nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e como os autores de livros didáticos modernos apresentam o assunto para os estudantes do Ensino Médio.

3. Analisar a estrutura dos polinômios, ou seja, definir e exemplificar: grupo, subgrupo, anéis, subanéis, ideais e anéis de polinômios.

4. Apresentar a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra de duas formas diferentes: analítica e algébrica.

5. Estudar o conteúdo matemático relacionado aos polinômios e suas aplicações sob o ponto de vista de que este deverá contemplar os estudantes do Ensino Médio.

6. Demonstrar as fórmulas resolutivas para as equações polinomiais até o quarto grau.

7. Criar metodologia de ensino-aprendizagem adequada ao aluno do Ensino Médio e aplicá-la em sala de aula.

8. Apresentar uma análise pessoal, antes, durante e após a aplicação da técnica em sala de aula, relativa ao desempenho e ao aproveitamento dos alunos e realizar uma comparação dessa prática com as aulas realizadas antes do estudo proposto.

1.1.3 Organização do trabalho

No Capítulo 2 apresentamos como os PCNEMs destacam a importância do ensino de polinômios no Ensino Médio; fazemos também uma análise do conteúdo referente aos polinômios em quatro livros didáticos atuais.

Concentramos toda a teoria envolvendo polinômios nos Capítulos 3, 4 e 5. No Capítulo 3 definimos as seguintes estruturas algébricas: grupos, anéis e anéis de polinômios, incluindo vários exemplos para ilustrar a teoria, e ao final do capítulo, enunciamos e demonstramos analítica e algebricamente o Teorema Fundamental da Álgebra. O Capítulo 4 é dedicado à discussão de como os polinômios são abordados nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. No Capítulo 5 demonstramos as fórmulas que definem as raízes de polinômios de graus de um a quatro.

No Capítulo 6 descrevemos a atividade de aplicação que empregamos aos alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual e apresentamos os resultados e impressões obtidos. E no Capítulo 7 fazemos algumas considerações finais em relação a esse trabalho como um todo e em relação à atividade aplicada aos alunos, refletindo sobre a importância de adotar metodologias de ensino diferentes.

CAPÍTULO 2

DESENVOLVIMENTO

2.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEMs) e a abordagem de polinômios no Ensino Médio

“A matemética é uma das mais importantes ferramentas da sociedade moderna. Apropriar-se dos conceitos e procedimentos matemáticos básicos contribui para a formação do futuro cidadão que se engajará no mundo do trabalho, nas relações sociais, culturais e políticas. Para exercer plenamente a cidadania é preciso saber contar, comparar, medir, calcular, resolver problemas, argumentar logicamente, conhecer formas geométricas e organizar, analisar e interpretar criticamente as informações” (DANTE, 2008).

Na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) (BRASIL, 1996), aspectos como a “revolução informática”, a “revolução do conhecimento” e um “Ensino Médio vinculado ao mundo do trabalho e à prática social” estão evidenciados para fortalecer o papel da escola na sociedade atual. Ao estudante, deve ser oferecida a formação geral, em oposição à formação específica; o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, a busca por informações e a capacidade de analisá-las e selecioná-las e a capacidade de aprender, de criar, de formular, ao invés do simples exercício de memorização. A lei também propõe a formação da pessoa, de maneira a desenvolver valores, o pensamento crítico e competências para se viver plenamente em sociedade.

De acordo com a LDB (BRASIL, 1996), o texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais procurou atender a reconhecida necessidade de atualização da educação brasileira, tanto para impulsionar uma democratização social e cultural mais efetiva pela ampliação da parcela da juventude brasileira que completa a educação básica, como para responder a desafios impostos por processos globais, que têm excluído da vida econômica os trabalhadores não-qualificados, por conta da formação exigida de todos os partícipes do sistema de produção e de serviços. Assim, a educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurando-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos superiores.

A tendência curricular que essas diretrizes propõem é o Ensino Médio, como parte da educação básica, desenvolvido de forma contextualizada e interdisciplinar. Na interdisciplinaridade propõe-se que a organização e o tratamento dos conteúdos do Ensino Médio e as situações de aprendizagem sejam feitos de modo a destacar as múltiplas interações entre as várias disciplinas do currículo, superando sempre que possível a fragmentação entre elas. É sabido que algumas disciplinas se identificam, se aproximam, têm muitas afinidades (como a Matemática, a Física, a Química e a Biologia), enquanto outras se diferenciam em vários aspectos: pelos métodos e procedimentos que envolvem, pelo objeto que pretendem conhecer ou ainda pelo tipo de habilidade que mobilizam naquele que as investiga, conhece, ensina ou aprende. Portanto, é possível dar relevância a vários modelos matemáticos que favorecem a interdisciplinaridade, tais como: a função linear e as situações de proporcionalidade direta; a função quadrática e o movimento uniformemente variado; a função exponencial e vários fenômenos naturais; a probabilidade e a Genética; as grandezas e medidas e as práticas científicas, tecnológicas e sociais; as funções trigonométricas e os fenômenos periódicos, etc (DANTE, 2008).

Tratar os conteúdos de ensino de forma contextualizada significa aproveitar ao máximo as relações existentes entre esses conteúdos e o contexto pessoal ou social do aluno, de modo a dar significado ao que está sendo aprendido, levando-se em conta que todo conhecimento envolve uma relação ativa entre o sujeito e o objeto do conhecimento. Assim, a contextualização ajuda a desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o apreendido com o observado e a teoria com suas consequências e aplicações práticas. Ajuda também a articular a Matemática com os temas atuais da ciência e da tecnologia, bem como fazer conexões dentro da própria Matemática. Assim, a LDB (BRASIL, 1996) recomenda uma ponte entre teoria e prática.

A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, ou seja, a contribuição para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes. Cabe a ela apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. Saber aprender é a condição básica para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida.

Há também a necessidade de valorizar uma construção abstrata mais elaborada com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento.

Com relação à Álgebra, o estudo de equações polinomiais deve receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas também podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola. Resumidamente, em relação às competências a serem desenvolvidas pela Matemática, a abordagem proposta para esse tema permite ao aluno usar e interpretar modelos, perceber o sentido de transformações, buscar regularidades, conhecer o desenvolvimento histórico e tecnológico de parte de nossa cultura e adquirir uma visão sistematizada de parte do conhecimento matemático.

Os PCNEMs (BRASIL, 1999) nas considerações sobre fins e meios da educação, acrescentam alguns ingredientes frequentemente esquecidos, quando se fala do ensino das Ciências, da Matemática e suas Tecnologias, que são o apreço pela cultura e a alegria do aprendizado. Quando a escola promove uma condição de aprendizado em que há entusiasmo nos fazeres, paixão nos desafios, cooperação entre os partícipes, ética nos procedimentos, está construindo a cidadania em sua prática, dando as condições para a formação dos valores humanos fundamentais, que são centrais entre os objetivos da educação.

2.2 O livro didático de Matemática do Ensino Médio e a abordagem de polinômios

Ao analisar os livros didáticos contemporâneos: Matemática Dante (DANTE, 2008), Matemática de Edwaldo Bianchini e Herval Pacola (BIANCHINI; PACCOLA, 1989), Matemática do Novo Ensino Médio de Marcondes Gentil e Sérgio (SANTOS; GENTIL; GRECO, 2003) e Matemática Ciências e Aplicações de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida (IEZZI *et al.*, 2013), destinados ao ensino de Matemática no Ensino Médio, percebemos que nos capítulos de polinômios e equações polinomiais, eles atingem seus propósitos, pois estabelecem uma forte parceria com o professor ao oferecer pré-requisitos aos alunos para prosseguirem no ensino superior. Além disso, houve a intenção de adequá-los à LDBEN/1996 e aos PCNEMs, embora os assuntos estabeleçam, por natureza, poucas conexões com o cotidiano e com outras disciplinas. Com relação à "*contextualização*", é possível encontrar algumas questões que vinculam os polinômios e as equações polinomiais ao mundo real, enquanto que na "*interdisciplinaridade*" os autores procuraram escrever textos e questões envolvendo temas da Física e da Economia. Portanto, o que prevalece nos textos e nas atividades é uma abordagem mais teórica e abstrata.

Neles, há uma retomada e um aprofundamento referente ao que o aluno estudou em Álgebra no Ensino Fundamental: polinômios, operações com polinômios, equações, etc.

Nos objetivos específicos da Álgebra podem-se destacar:

Polinômios

- Iniciar o estudo dos polinômios utilizando-os, por exemplo, para descrever relações entre duas grandezas em situações cotidianas, e representar áreas de figuras planas e volumes de sólidos;
- Reconhecer polinômios a uma única variável;
- Relacionar um polinômio a uma função polinomial e identificar o seu grau;
- Reconhecer polinômio nulo;
- Estabelecer a condição de igualdade entre polinômios;
- Efetuar as operações de adição, subtração e multiplicação de polinômios;
- Relacionar a divisão de números inteiros à divisão de polinômios;
- Determinar os polinômios quociente $q(x)$ e resto $r(x)$ obtidos na divisão de um polinômio $f(x)$ por $g(x)$, com $g(x) \neq 0$ e estabelecer as relações entre eles.

Equações polinomiais

- Ampliar o conjunto universo de uma equação algébrica para o universo $\mathbb{C}$ dos números complexos;
- Resolver algumas equações de grau superior a dois por meio de fatoração e saber que apenas algumas equações podem ser resolvidas;
- Usar os números complexos na resolução de equações;
- Efetuar a fatoração (decomposição) de um polinômio em função de suas raízes; comparar com a decomposição de um número natural em fatores primos;
- Usar a divisão de polinômios para a obtenção de outras raízes de um polinômio a partir de alguma raiz conhecida;
- A partir de alguma informação dada sobre um polinômio, aplicar as relações entre coeficientes e raízes para determinação de uma ou mais raízes;
- Aplicar o Teorema das Raízes Complexas não-reais de uma equação com coeficientes reais;
- Pesquisar raízes racionais em uma equação com coeficientes inteiros;
- Resolver problemas sobre equações polinomiais a partir da análise do gráfico, em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, das funções correspondentes.

Os polinômios e as equações polinomiais são apresentados muito bem formalizados, com algumas sugestões de aplicações práticas e interdisciplinares. O desenvolvimento desses conhecimentos é mais abstrato e corresponde a uma cultura bem específica. Assim, é importante destacar os assuntos de maior relevância de cada um deles relacionando com o que o plano político pedagógico da escola estabelece de acordo com os PCNEMs. No trabalho com polinômios é importante que se faça, desde o início, a observação de que, muitas vezes, o polinômio é apresentado, mas fazendo referência à função polinomial e vice-versa. Desse modo, conceitos como raiz de uma equação polinomial podem ser facilmente relacionados com o que já foi estudado sobre as raízes das funções polinomiais de primeiro e segundo graus. A divisão de polinômios mantém uma interessante analogia com a divisão entre números inteiros, e este pode ser o ponto de partida para o início das discussões. Lembrando-se que o método da chave é o processo mais geral de divisões.

Nas equações polinomiais, não se apresentam fórmulas resolutivas para as equações de terceiro e quarto graus e que, em vários exercícios, conseguiremos determinar o conjunto solução a partir de algumas informações sobre polinômios, lembrando sempre que o conjunto universo é $\mathbb{C}$. Não podemos deixar de destacar o fato de que, se um polinômio $f(x)$ se escreve como produto de outros dois, isto é, $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, então $f(x)$ é divisível por $g(x)$ (ou $h(x)$) e o quociente dessa divisão é $h(x)$ (ou $g(x)$). Esse fato será muito usado para encontrar as raízes de um polinômio quando uma ou mais raízes forem conhecidas. É pertinente que, em alguns momentos, seja feita a análise do gráfico de uma função polinomial, especialmente no que diz respeito ao número de raízes reais do polinômio (IEZZI *et al.*, 2013).

Por fim, nas equações polinomiais, apresentam-se o Teorema Fundamental da Álgebra e suas consequências: decomposição de uma equação em fatores do primeiro grau, multiplicidade da raiz e as relações de Girard. Trabalham-se com a pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros e apresentam-se as raízes complexas não reais numa equação algébrica de coeficientes reais.

Os livros didáticos pesquisados podem tornar realidade os ideais da Educação traçados nas leis e atender aos professores e aos anseios dos estudantes por meio de adaptações adequadas. Então, o professor de acordo com a realidade da escola precisa priorizar a construção do conhecimento pelo fazer e pensar do aluno, procurando facilitar, orientar, estimular e incentivar a aprendizagem por meio de atividades interdisciplinares e contextualizadas. O professor deve preparar suas aulas pesquisando em vários livros, selecionando as atividades que mais atendem às necessidades dos alunos e reservando as atividades mais teóricas e abstratas para fixação e aprofundamento.

Considerando que um dos principais componentes para uma boa aprendizagem baseia-se no aspecto motivacional no qual os alunos são submetidos, adotaremos como atividade de aplicação dos assuntos pesquisados e estudados **“grupos de estudos inseridos em um jogo matemático”** que, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, promove um dos principais objetivos do ensino de Matemática, em qualquer nível, que é o de desenvolver habilidades para a solução de problemas e esse será aliado a uma atividade que visa construir e interpretar gráficos de funções polinomiais (de grau maior do que dois) com o auxílio de um programa computacional, disponibilizado em (IEZZI *et al.*, 2013).

CAPÍTULO

3

ESTRUTURA DOS POLINÔMIOS

Neste capítulo apresentamos os conceitos envolvendo algumas estruturas algébricas, como grupos e anéis, que dão base para a definição de *anel de polinômios* em uma variável, que é a estrutura algébrica em que se encontra o objeto de estudo desta dissertação: os polinômios.

Após a discussão de todos esses conceitos, apresentamos um histórico sobre o *Teorema Fundamental da Álgebra* que, em linhas gerais, garante que todo polinômio sobre o corpo dos números complexos possui raízes. Apresentamos também duas demonstrações para esse teorema, uma analítica e outra algébrica.

A referência básica para este capítulo é (GARCIA; LEQUAIN, 2001), que é um texto geralmente usado nos cursos de Álgebra para graduação.

3.1 Grupos e subgrupos

Definição 1. (GARCIA; LEQUAIN, 2001) Seja $G \neq \emptyset$, em que se define uma operação $*$. Diz-se que $*$ define em G uma estrutura de grupo, ou que $(G,*)$ é um grupo, se forem satisfeitas as três propriedades seguintes:

(i) associativa:
$$(a*b)*c = a*(b*c), \quad \forall a,b,c \in G;$$

(ii) elemento neutro:
$$\exists\, e \in G \text{ tal que } a*e = e*a = a, \quad \forall a \in G;$$

(iii) elemento simetrizável:
$$\exists\, a^{-1} \in G \text{ tal que } a*a^{-1} = a^{-1}*a = e, \quad \forall a \in G.$$

Se, além das condições acima, for satisfeita a propriedade comutativa $a*b = b*a$, $\forall a,b \in G$, o grupo é abeliano ou comutativo.

Exemplo 3.1.1. 1. Vamos verificar se o par $(\mathbb{R},+)$ forma um grupo.

(i) associativa:

$$(a+b)+c \stackrel{?}{=} a+(b+c), \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}.$$

$$a+b+c = a+b+c.$$

Portanto, vale a propriedade associativa.

(ii) elemento neutro:

$$\exists e \in \mathbb{R}, \text{ em que } a+e = e+a = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Temos:

$$a+0 = 0+a = a.$$

Portanto, existe o elemento neutro que é o zero.

(iii) elemento simetrizável:

Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe

$$a^{-1} = -a \in \mathbb{R} \text{ tal que } a+a^{-1} = a^{-1}+a = e, \text{ pois:}$$

$$a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

Portanto, existe elemento simetrizável.

As três propriedades (i), (ii), (iii) foram verificadas, logo $(\mathbb{R},+)$ é grupo.

Observação:

É válida a propriedade comutativa no par $(\mathbb{R},+)$?

Temos que:

$$a+b \stackrel{?}{=} b+a, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

Na soma sempre vale a comutatividade.

Portanto, $(\mathbb{R},+)$ é grupo abeliano.

2. Vamos verificar se o par $(\mathbb{N},-)$ é uma estrutura algébrica. Observe que:

$$\begin{aligned} 5+3 &= 3+5 = 8 \in \mathbb{N} \\ 5-3 &\neq 3-5 \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

Assim, a subtração não é uma operação interna em $\mathbb{N}$ (ou seja, a subtração de dois elementos de $\mathbb{N}$ não necessariamente pertence a $\mathbb{N}$). Logo, pode-se afirmar que $(\mathbb{N},-)$ não é uma estrutura algébrica.

3. Vamos verificar se o par $(\mathbb{Z},*)$, onde $a*b = a+b-5$, é uma estrutura algébrica.

Solução:

(i) $*$ é uma operação interna em $\mathbb{Z}$, pois $a*b = a+b-5$.

(ii) $(a*b)*c \stackrel{?}{=} a*(b*c), \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$.

Temos que:

$$\begin{aligned}
(a*b)*c &= (a+b-5)*c \\
&= (a+b-5)+c-5 \\
&= a+b+c-5-5 \\
&= a+(b+c-5)-5 \\
&= a+(b*c)-5 \\
&= a*(b*c).
\end{aligned}$$

Portanto, vale a propriedade associativa .

(iii) A operação $*$ admite elemento neutro?

Vamos verificar se existe elemento $e \in \mathbb{Z}$, tal que $a*e = a = e*a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. Temos:

$$\begin{aligned}
a*e &= a \\
\Leftrightarrow a+e-5 &= a \\
\Leftrightarrow e &= a-a+5 \\
\Leftrightarrow e &= 5.
\end{aligned}$$

Verificação:

$$\begin{aligned}
a*5 &= a & \qquad\qquad 5*a &= a \\
\Leftrightarrow a+5-5 &= a & \Leftrightarrow 5+a-5 &= a \\
\Leftrightarrow a &= a \quad \text{(verdade)} & \Leftrightarrow a &= a \quad \text{(verdade).}
\end{aligned}$$

Portanto, existe o elemento neutro, que é $e = 5$.

(iv) A operação "$*$" admite elemento simétrico?

Vamos verificar se para cada $a \in \mathbb{Z}$, existe elemento $a^{-1} \in \mathbb{Z}$, tal que $a*a^{-1} = a^{-1}*a = 5$:

$$\begin{aligned}
a*a^{-1} &= 5 \\
\Leftrightarrow a+a^{-1}-5 &= 5 \\
\Leftrightarrow a^{-1} &= 5+5-a \\
\Leftrightarrow a^{-1} &= 10-a.
\end{aligned}$$

Verificação:

$$\begin{aligned}
a*a^{-1} &= a+a^{-1}-5 & \qquad\qquad a^{-1}*a &= a^{-1}+a-5 \\
&= a+(10-a)-5 & &= (10-a)+a-5 \\
&= a-a+10-5 & &= 10-a+a-5 \\
&= 5 & &= 5.
\end{aligned}$$

Portanto, cada elemento $a \in \mathbb{Z}$ admite simétrico $a^{-1} = 10 - a$, logo temos um grupo.

(v) A operação "$*$" é comutativa?

$$\begin{aligned} a * b &= a + b - 5, \\ b * a &= b + a - 5. \end{aligned}$$

Então, $a * b = b * a$, logo vale a propriedade comutativa.

Portanto, podemos afirmar que $(\mathbb{Z}, *)$, onde $a * b = a + b - 5$ é um grupo abeliano.

4. Consideremos o conjunto $H = \{a + b\sqrt{5} \in \mathbb{R}^*, \forall a, b \in \mathbb{Q}\}$.

a) Dê exemplos de elementos desse conjunto atribuindo valores racionais para a e b, temos:

$$\begin{aligned} a = 1,\ b = 0 &\quad\Rightarrow\quad 1 + 0\sqrt{5} = 1 \in H, \\ a = -1,\ b = 0 &\quad\Rightarrow\quad -1 + 0\sqrt{5} = -1 \in H, \\ a = \frac{1}{2},\ b = 0 &\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2} + 0\sqrt{5} = \frac{1}{2} \in H, \\ a = -\frac{3}{5},\ b = 0 &\quad\Rightarrow\quad -\frac{3}{5} + 0\sqrt{5} = -\frac{3}{5} \in H. \end{aligned}$$

Logo, todo número racional não nulo, como 1, -1, $1/2$, $-3/5$, pertence ao conjunto H.

Além deles, temos:

$$\begin{aligned} a = 1,\ b = 2 &\quad\Rightarrow\quad 1 + 2\sqrt{5} \in H, \\ a = 0,\ b = -2 &\quad\Rightarrow\quad 0 + (-2)\sqrt{5} = -2\sqrt{5} \in H, \\ a = 0,\ b = 3 &\quad\Rightarrow\quad 0 + 3\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \in H, \\ a = -3,\ b = -6 &\quad\Rightarrow\quad -3 + (-6)\sqrt{5} = -3 - 6\sqrt{5} \in H, \\ a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{7}{3} &\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2} + \frac{7}{3}\sqrt{5} \in H. \end{aligned}$$

Logo, qualquer combinação do tipo $a + b\sqrt{5} \neq 0$, com $a, b \in \mathbb{Q}$ também pertence a H.

b) Verificar se o par $(H, \cdot)$ é grupo.

(i) Sejam $x = a + b\sqrt{5}$ e $y = c + d\sqrt{5}$ dois elementos de H. Vamos verificar se o produto $xy \in H$.

Observe que:

$$\begin{aligned} xy &= (a + b\sqrt{5}) \cdot (c + d\sqrt{5}) \\ &= ac + ad\sqrt{5} + bc\sqrt{5} + bd\sqrt{5^2} \\ &= (ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5} \in H, \end{aligned}$$

pois $(ac + 5bd) \in \mathbb{Q}$ e $(ad + bc) \in \mathbb{Q}$.

Logo, H é fechado com relação à multiplicação.

(ii) Vale a propriedade associativa com os elementos de H?

A multiplicação é associativa em $\mathbb{R}$, ou seja, $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$, para quaisquer $x,y,z\in\mathbb{R}$, assim, temos que, em particular, a multiplicação é associativa em $H\subset\mathbb{R}$, ou seja, $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$, para quaisquer $x,y,z\in H$.

(iii) O elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{R}$ é o número 1. Como $H\subset\mathbb{R}$, temos que 1 é o elemento neutro de H e $1\in H$, quando $a=1$ e $b=0$ $(1+0\sqrt{5}=1)$.

(iv) Dado $x=a+b\sqrt{5}\in H$, vamos verificar se existe $y\in H$ tal que $x\cdot y=y\cdot x=1$. Isto significa verificar se x é simetrizável, ou seja, se

$$y=\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b\sqrt{5}}\in H.$$

Racionalizando, temos:

$$\begin{aligned} y&=\frac{1\cdot(a-b\sqrt{5})}{(a+b\sqrt{5})(a-b\sqrt{5})}=\frac{a-b\sqrt{5}}{a^2-(b\sqrt{5})^2}\\ &=\frac{a-b\sqrt{5}}{a^2-5b^2}=\frac{a}{a^2-5b^2}+\frac{-b\sqrt{5}}{a^2-5b^2}. \end{aligned}$$

Como $a/(a^2-5b^2), -b/(a^2-5b^2)\in\mathbb{Q}$, temos

$$\frac{a}{a^2-5b^2}+\frac{-b}{a^2-5b^2}\sqrt{5}\in H.$$

Verificação:

$$\begin{aligned} x\cdot y&=(a+b\sqrt{5})\cdot\left(\frac{a}{a^2-5b^2}+\frac{-b\sqrt{5}}{a^2-5b^2}\right)=\frac{a^2+ab\sqrt{5}-ab\sqrt{5}-b^2\sqrt{5^2}}{a^2-5b^2}\\ &=\frac{a^2-b^2\sqrt{5^2}}{a^2-5b^2}=\frac{a^2-5b^2}{a^2-5b^2}=1. \end{aligned}$$

Analogamente, podemos obter que $y\cdot x=1$. Portanto, para cada elemento de H, $a+b\sqrt{5}$ há o elemento simetrizável, que é $(a-b\sqrt{5})/(a^2-5b^2)$.

(v) A multiplicação é comutativa em $\mathbb{R}$, ou seja, $x\cdot y=y\cdot x$, para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}$. Assim, temos que, em particular, a multiplicação é comutativa em $H\subset\mathbb{R}$, ou seja, $x\cdot y=y\cdot x$, para quaisquer $x,y\in H$.

Como H é fechado com relação à multiplicação, são válidas as propriedades comutativa e associativa e existem os elementos neutro e simétrico, podemos concluir que $(H,\cdot)$ é grupo abeliano.

Definição 2. (GARCIA; LEQUAIN, 2001) Seja $(G,\cdot)$ um grupo. Um subconjunto não-vazio H de G é um subconjunto de G quando, com a operação de G, o conjunto H é um grupo, isto é, quando as propriedades seguintes são satisfeitas:

(i) fechamento:

$$h_1\cdot h_2\in H,\quad \forall h_1,h_2\in H.$$

(ii) associativa:

$$h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3) = (h_1 \cdot h_2) \cdot h_3, \quad \forall h_1, h_2, h_3 \in H.$$

(iii) elemento neutro:

$$\exists e_h \in H \text{ tal que } e_h \cdot h = h \cdot e_h = h, \quad \forall \in H.$$

(iv) elemento simétrico:

para cada $h \in H$, existe

$$h^{-1} \in H \text{ tal que } h \cdot h^{-1} = h^{-1} \cdot h = e_h.$$

Observações

1. A condição (ii) é sempre satisfeita, pois a igualdade $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ é válida para todos os elementos de G.

2. O elemento neutro e_h de H é necessariamente igual ao elemento neutro e de G. De fato, tomando $a \in H \subseteq G$, temos $e_h \cdot a = a$; multiplicando os dois lados por a^{-1} à direita, obtemos $e_h = e$:
$$\begin{aligned} & e_h \cdot a = a \\ \Leftrightarrow\ & e_h \cdot a \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & e_h = e. \end{aligned}$$

3. Dado $h \in H$, o inverso de h em H é necessariamente igual ao inverso de h em G. De fato, se k é o inverso de h em H, então $h \cdot k = k \cdot h = e_h$. Logo, $h \cdot k = k \cdot h = e$, pois $e_h = e$, e portanto k é o inverso de h em G.

Proposição 3.1.2. Seja H um subconjunto não-vazio do grupo G. Então, H é um subgrupo de G se, e somente se, as duas condições seguintes são satisfeitas:

1. $h_1 \cdot h_2 \in H, \quad \forall h_1, h_2 \in H.$

2. $h^{-1} \in H, \quad \forall h \in H.$

Demonstração. Suponhamos que H seja um subgrupo de G ($H < G$). A propriedade 1 acima é então claramente satisfeita. Agora, seja $h \in H$; sendo H um grupo, h possui um inverso em H; mas, sabemos que $h \cdot h^{-1} = e_h = e_g$, logo $h^{-1} \in H$.
Reciprocamente, suponhamos que H satisfaça as duas propriedades.
A propriedade 1 é o fechamento. Como H é não-vazio, existe $h \in H$. Pela propriedade 2, $h^{-1} \in H$. Pela propriedade 1, $e = h.h^{-1} \in H$. Logo, H tem elemento neutro que é o mesmo de G.

Seja $h \in H$. Como $H \subset G$ e G é grupo, existe $h^{-1} \in G$ tal que $h.h^{-1} = h^{-1}.h = e$.
Pela propriedade 2, $h^{-1} \in H$. Sejam $h_1, h_2, h_3 \in H$. Como $H \subset G$ e G é grupo, temos $h_1.(h_2.h_3) = (h_1.h_2).h_3$.
Logo, H é subgrupo de G. □

Exemplo 3.1.3. 1. $(\mathbb{Z}, +)$ é um subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$?

Solução:

(i) $0 \in \mathbb{Z}$; 0 é elemento neutro de $(\mathbb{R}, +)$.

(ii) $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, temos $(a+b) \in \mathbb{Z}$ (fechamento)

(iii) $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a^{-1} = -a \in \mathbb{Z}$.

Logo, $(\mathbb{Z}, +)$ é subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

2. $(2\mathbb{Z}, +)$ é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$?

Solução:

(i) $2\mathbb{Z} = \{\ldots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$. Logo, $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

(ii) $\forall a, b, c \in 2\mathbb{Z}$, temos: $a + (b + c) = (a + b) + c$, isto é, vale a propriedade associativa.

(iii) $e_{\mathbb{Z}} = 0 \Rightarrow 2k = 0$. Assim, $k = 0 \in \mathbb{Z}$.
Logo, $e_{2\mathbb{Z}} = e_{\mathbb{Z}} = 0$ (elemento neutro).

(iv) Elemento simétrico de $2\mathbb{Z}$: se $h_1 = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$, $h_1 \in 2\mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned} h_1 + h^{-1} &= e_{2\mathbb{Z}} \\ \Leftrightarrow 2k + h^{-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow h^{-1} &= -2k = -h_1. \end{aligned}$$

(v) Sejam $h_1 = 2k_1, h_2 = 2k_2 \in 2\mathbb{Z}$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$h_1 + h_2 = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2).$$

Como $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, temos $h_1 + h_2 \in 2\mathbb{Z}$.

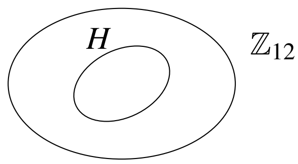
Portanto, $2\mathbb{Z}$ é subgrupo de $\mathbb{Z}$.

Observação: Se n é um inteiro qualquer, $(n\mathbb{Z}, +)$ é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

3. Vamos verificar se $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$ é subgrupo de $\mathbb{Z}_{12}$ com relação à adição.
Seja $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{1}1\}$ um conjunto. Definimos a seguinte operação $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$, onde c é o resto da divisão de $a + b$ por 12. É possível verificar que $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ é um grupo.
Observe:

Temos $H \leq \mathbb{Z}_{12}$?

(i) Vale a associatividade.



(ii) Elemento neutro é $\bar{0}$, e $\bar{0} \in H$.

(iii) Elemento simétrico: $a + a^{-1} = \bar{0}$, logo:

$$\bar{0}^{-1} = \bar{0} \in H, \qquad \bar{6}^{-1} = \bar{6} \in H,$$
$$\bar{2}^{-1} = \overline{10} \in H, \qquad \bar{8}^{-1} = \bar{4} \in H,$$
$$\bar{4}^{-1} = \bar{8} \in H, \qquad \overline{10}^{-1} = \bar{2} \in H.$$

(iv) H é fechado?

Como $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$ e $\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$, temos:

Tabela 1 – Tabela da adição do grupo H

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{\mathbf{6}}$	$\bar{\mathbf{8}}$	$\overline{\mathbf{10}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{6}}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{8}}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\overline{\mathbf{10}}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$

Todos os elementos que são os resultados das adições apresentados na Tabela 1 pertencem a H. Assim, o conjunto H é fechado para a operação de adição. Logo, $H \leq \mathbb{Z}_{12}$.

4. Dados $H = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$ e $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, verifique se H é subgrupo de G.

   Solução:

   Pela Proposição 3.1.2, para que H seja subgrupo de G, basta que $H \neq \emptyset$, $h_1 \cdot h_2 \in H$, $\forall h_1, h_2 \in H$, e que $h^{-1} \in H$, $\forall h \in H$.

   Temos $H \neq \emptyset$, pois $1 \in H$.

   Além disso, sejam $h_1 = p/q$ e $h_2 = r/s$ dois elementos genéricos de H, com $p, q, r, s \in \mathbb{Z}^*$. É fácil ver que $h_2^{-1} = \dfrac{r}{s} \in H$, e

$$h_1 \cdot h_2^{-1} = \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{-1} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr} \in H.$$

   Logo, H é subgrupo de G.

5. Considere o grupo $(\mathbb{Z}_6,+)$. Vamos verificar se $(A,+)$ é um subgrupo de $(\mathbb{Z}_6,+)$, em que:

   a) $A=\{\bar{0},\bar{4}\}$. Para A temos o elemento neutro $\bar{0}$.

      O simétrico de $\bar{4}$ é $\bar{2}\notin A$.

      Logo, A não é subgrupo de $(\mathbb{Z}_6,+)$.

   b) $A=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$

      (i) Tem o elemento neutro $\bar{0}$.

      (ii) $\bar{0}^{-1}=\bar{0}$, $\bar{2}^{-1}=\bar{4}$ e $\bar{4}^{-1}=\bar{2}$

      (iii) E a soma $\bar{a}+\bar{b}\in A$, pois:

$$\begin{array}{lll}\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}\in A, & \bar{2}+\bar{0}=\bar{2}\in A, & \bar{4}+\bar{0}=\bar{4}\in A,\\ \bar{0}+\bar{2}=\bar{2}\in A, & \bar{2}+\bar{2}=\bar{4}\in A, & \bar{4}+\bar{2}=\bar{0}\in A,\\ \bar{0}+\bar{4}=\bar{4}\in A, & \bar{2}+\bar{4}=\bar{0}\in A, & \bar{4}+\bar{4}=\bar{2}\in A.\end{array}$$

      Portanto, $(A,+)$ é subgrupo de $(\mathbb{Z}_6,+)$.

3.2 Anéis e subanéis

Definição 3. (GARCIA; LEQUAIN, 2001) Um anel comutativo $(A,+,\cdot)$ é um conjunto A com pelo menos dois elementos, munido de uma operação denotada por $+$ (chamada adição) e de uma operação denotada por $\cdot$ (chamada multiplicação) que satisfazem as condições seguintes:

- A_1 (associativa):

$$(x+y)+z=x+(y+z),\quad \forall x,y,z\in A.$$

- A_2 (comutativa):

$$x+y=y+x,\quad \forall x,y\in A.$$

- A_3 (existência de um elemento neutro com respeito à adição):

$$\exists 0\in A \text{ tal que, } \forall x\in A,\ 0+x=x+0=x.$$

- A_4 (existência do elemento simétrico com respeito à adição):

$$\forall x\in A,\ \exists z\in A \text{ tal que, } x+z=z+x=0.$$

- M_1 (associativa):

$$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z),\quad \forall x,y,z\in A.$$

- M_2 (comutativa):

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad \forall x, y \in A.$$

- M_3 (existência de um elemento neutro com respeito à multiplicação):

$$\exists 1 \in A \text{ tal que, } \forall x \in A, \ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$$

- M_4 (distributividade da multiplicação em relação à adição):

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad \forall x, y, z \in A.$$

Observações:

(i) Se todas as condições são satisfeitas, com exceção da propriedade comutativa em relação à multiplicação, então $(A, +, \cdot)$ é chamado de anel não-comutativo.

(ii) $(A, +)$ é um grupo comutativo e se a condição M_5 (existência do elemento simétrico com relação à multiplicação) for satisfeita teremos o corpo $(A, +, \cdot)$.

(iii) O elemento neutro da adição em um anel A é único.

De fato, se 0 e $0'$ são dois elementos neutros para a adição, temos: $0 = 0 + 0'$, pois $0'$ é um elemento neutro. Assim, $0 = 0'$, pois 0 é um elemento neutro. Portanto $0 = 0'$.

(iv) O elemento neutro da multiplicação em um anel comutativo A é único.

De fato, se 1 e $1'$ são dois elementos neutros para a multiplicação, temos: $1 = 1 \cdot 1'$, pois $1'$ é um elemento neutro. Assim, $1 = 1'$, pois 1 é um elemento neutro. Portanto $1 = 1'$.

(v) O elemento simétrico de $a \in A$, A anel, é único.

De fato, se y e y' são dois elementos simétricos de x com respeito à adição, temos: $y = y + 0$, pois 0 é elemento neutro. Assim, $y = y + (x + y')$, pois y' é simétrico de x. Pela propriedade associativa, temos: $y = (y + x) + y'$ e, assim, $y = 0 + y'$, pois y é simétrico de x, implicando $y = y'$, pois 0 é elemento neutro.

Portanto, $y = y'$, ou seja, o elemento simétrico de $a \in A$ é único.

(vi) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são anéis comutativos, onde "$+$" e "$\cdot$" são a adição e a multiplicação usuais. Em cada caso, a operação "$\cdot$" é comutativa e 1 é o elemento neutro para esta operação.

Exemplo 3.2.1. Sejam $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, munido das operações $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Mostre que $(A, \oplus, \otimes)$ é um anel e verifique se é comutativo e se há o elemento neutro em relação à multiplicação, ou seja, a unidade.

Solução:

Sejam $(a, b), (c, d), (e, f)$ três elementos genéricos de A. Temos:

- A_1 (associativa com relação à operação $\oplus$):

$$\begin{aligned}[(a,b)\oplus(c,d)]\oplus(e,f) &= (a+c,b+d)\oplus(e,f)\\ &= ((a+c)+e,(b+d)+f)\\ &= (a+(c+e),b+(d+f))\\ &= (a,b)\oplus[(c,d)\oplus(e,f)],\end{aligned}$$

logo $\oplus$ é associativa.

- A_2 (comutativa com relação à operação $\oplus$):

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=(c,d)\oplus(a,b),$$

logo $\oplus$ é comutativa.

- A_3 (elemento neutro com relação à operação $\oplus$):

$$(a,b)\oplus(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b),$$

logo $\oplus$ tem elemento neutro $(0,0)$.

- A_4 (elemento simétrico com relação à operação $\oplus$):

$$(a,b)\oplus(-a,-b)=(a+(-a),b+(-b))=(0,0),$$

logo todo elemento (a,b) possui inverso aditivo $(-a,-b)$.

- M_1 (associativa com relação à operação $\otimes$):

$$\begin{aligned}[(a,b)\otimes(c,d)]\otimes(e,f) &= (ac-bd,ad+bc)\otimes(e,f)\\ &= ((ac-bd)\cdot e-(ad+bc)\cdot f,(ac-bd)\cdot f+(ad+bc)\cdot e)\\ &= (ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(a,b)\otimes[(c,d)\otimes(e,f)] &= (a,b)\otimes(ce-df,cf+de)\\ &= (a(ce-df)-b\cdot(cf+de),a\cdot(cf+de)+b\cdot(ce-df))\\ &= (ace-adf-bcf-bde,acf+ade+bce-bdf),\end{aligned}$$

logo $[(a,b)\otimes(c,d)]\otimes(e,f)=(a,b)\otimes[(c,d)\otimes(e,f)]$, o que significa que $\otimes$ é associativa.

- M_2 (a operação $\otimes$ é distributiva em relação à operação $\oplus$):

$$\begin{aligned}(a,b)\otimes[(c,d)\oplus(e,f)] &= (a,b)\otimes(c+e,d+f)\\ &= (ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[(a,b)\otimes(c,d)]\oplus[(a,b)\otimes(e,f)] &= (ac-bd,ad+bc)\oplus(ae-bf,af+be)\\
&= (ac-bd+ae-bf,ad+bc+af+be)\\
&= (ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be).
\end{aligned}$$

Logo, $(a,b)\otimes[(c,d)\oplus(e,f)] = [(a,b)\otimes(c,d)]\oplus[(a,b)\otimes(e,f)]$. Como $\otimes$ é comutativa, também temos que $[(c,d)\oplus(e,f)]\otimes(a,b)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
(a,b)\otimes[(c,d)\oplus(e,f)] &= [(a,b)\otimes(c,d)]\oplus[(a,b)\otimes(e,f)]\\
&= [(c,d)\otimes(a,b)]\oplus[(e,f)\otimes(a,b)].
\end{aligned}$$

Portanto, $\otimes$ é distributiva com relação a $\oplus$.

- M_3 (elemento neutro na operação $\otimes$):

$$(a,b)\otimes(1,0) = (a\cdot 1-b\cdot 0,a\cdot 0+b\cdot 1) = (a-0,0+b) = (a,b).$$

Logo, $\otimes$ tem elemento neutro (unidade) que é o $(1,0)$.

- M_4 (comutativa com relação à operação $\otimes$):

$$\begin{aligned}
(a,b)\otimes(c,d) &= (ac-bd,ad+bc) = (ca-db,da+cb)\\
&= (ca-db,cb+da) = (c,d)\otimes(a,b),
\end{aligned}$$

logo $\otimes$ é comutativa.

Todos os itens anteriores, juntos, mostram que $(A,\oplus,\otimes)$ é um anel comutativo com unidade.

Definição 4. Sejam $(A,+,\cdot)$ um anel e B um subconjunto não-vazio de A. Dizemos que B é um subanel de A se B é também um anel.

O próximo resultado apresenta uma caracterização para que um subconjunto não-vazio B de um anel A seja um subanel.

Proposição 3.2.2. Sejam $(A,+,\cdot)$ um anel e B um subconjunto não-vazio de A. Então, B é um subanel de A se, e somente se, para todo $x,y\in B$ forem satisfeitas as condições:

(i) $x-y\in B$;

(ii) $x\cdot y\in B$.

Exemplo 3.2.3. (AMANDA, 2011)

1. Verifique se o conjunto $B = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$ é um subanel do anel $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.

   Solução:
   Temos que $B \neq \emptyset$ e $B \subset \mathbb{Z}_{12}$.

   Lembrando-se que $\overline{-6} = \bar{6}$, então:

   $$\bar{3} - \bar{6} = \bar{3} + \bar{6} = \bar{9} \notin B.$$

   Logo, pela Proposição 3.2.2, B não é subanel de $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.

2. Verifique se o conjunto $B = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$ é um subanel do anel $(\mathbb{Z}_{15}, +, \cdot)$.

   Solução:
   Temos $B \neq \emptyset$ e $B \subset \mathbb{Z}_{15}$.

   (i) Proposição 3.2.2: $x + (-y) \in B$, $\forall x, y \in B$, é válida?

   $$\begin{array}{ll} 0 - 0 = 0 + 0 = 0 \in B, & 5 - 10 = 5 + 5 = 10 \in B, \\ 0 - 5 = 0 + 10 = 10 \in B, & 10 - 0 = 10 + 0 = 10 \in B, \\ 0 - 10 = 0 + 5 = 5 \in B, & 10 - 5 = 10 + 10 = 5 \in B, \\ 5 - 0 = 5 + 0 = 5 \in B, & 10 - 10 = 10 + 5 = 5 \in B. \\ 5 - 5 = 5 + 10 = 0 \in B, & \end{array}$$

   (ii) Proposição 3.2.2: $x \cdot y \in B$, $\forall x, y \in B$, é válida?

   $$\begin{array}{lll} 0 \cdot 0 = 0 \in B, & 5 \cdot 0 = 0 \in B, & 10 \cdot 0 = 0 \in B, \\ 0 \cdot 5 = 0 \in B, & 5 \cdot 5 = 10 \in B, & 10 \cdot 5 = 5 \in B, \\ 0 \cdot 10 = 0 \in B, & 5 \cdot 10 = 5 \in B, & 10 \cdot 10 = 10 \in B. \end{array}$$

   Logo, podemos concluir pela Proposição 3.2.2 que B é subanel de $(\mathbb{Z}_{15}, +, \cdot)$.

3. Verifique se o conjunto $B = \mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ é um subanel do anel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

   Solução:

   $B \neq \emptyset$ e $B \subseteq (\mathbb{R}, +, \cdot)$. Como B é um conjunto infinito, é inviável verificar elemento por elemento. Então, pela Proposição 3.2.2, e considerando $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ e $y \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, tais que $x = a + b\sqrt{7}$ e $y = c + d\sqrt{7}$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, temos:

   (i)

   $$\begin{aligned} x - y &= (a + b\sqrt{7}) - (c + d\sqrt{7}) \\ &= a + b\sqrt{7} - c - d\sqrt{7} \\ &= (a - c) + (b - d)\sqrt{7}. \end{aligned}$$

   Portanto, como $a - c, b - d \in \mathbb{Z}$, temos $x - y \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

(ii)

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (a+b\sqrt{7}) \cdot (c+d\sqrt{7}) \\ &= a(c+d\sqrt{7}) + b\sqrt{7} \cdot (c+d\sqrt{7}) \\ &= ac + ad\sqrt{7} + bc\sqrt{7} + bd\sqrt{7^2} \\ &= (ac+7bd) + (ad+bc)\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Portanto, como $ac+7bd, ad+bc \in \mathbb{Z}$, temos $x \cdot y \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

Logo, pela Proposição 3.2.2, $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ é subanel de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

3.3 Ideais

Definição 5. Sejam $(A, +, \cdot)$ um anel e I um subconjunto não-vazio de A. Dizemos que I é um ideal à esquerda de A se:

(i) $x + y \in I$, $\forall x, y \in I$.

(ii) $ax \in I$, $\forall x \in I$, $\forall a \in A$.
Dizemos que I é um ideal à direita de A se a propriedade (ii) acima é válida juntamente com: $xa \in I$, $\forall x \in I$, $\forall a \in A$.
Além disso, se I é um ideal à esquerda e à direita de A simultaneamente, dizemos que I é um ideal bilateral ou apenas ideal.

Observação:

Todo anel tem sempre pelo menos dois ideais: ele próprio e o ideal formado pelo zero do anel, que é o elemento neutro da operação adição.

Exemplo 3.3.1. 1. O subanel $I = \{0, 3\} \subset (\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ é um ideal?

Verifiquemos se: $x + y \in I$, $\forall x, y \in I$ e $x \cdot a = a \cdot x \in I$, $\forall x \in I$, $\forall a \in \mathbb{Z}_6$.

$$\begin{array}{ll} 0+0=0 \in I, & 3+0=3 \in I, \\ 0+3=3 \in I, & 3+3=6=0 \in I. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x=0 \Rightarrow 0 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0 \in I, & x=3 \Rightarrow 3 \cdot 0 = 0 \cdot 3 = 0 \in I, \\ x=0 \Rightarrow 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \in I, & x=3 \Rightarrow 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 = 3 \in I, \\ x=0 \Rightarrow 0 \cdot 2 = 2 \cdot 0 = 0 \in I, & x=3 \Rightarrow 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 0 \in I, \\ x=0 \Rightarrow 0 \cdot 3 = 3 \cdot 0 = 0 \in I, & x=3 \Rightarrow 3 \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 3 \in I, \\ x=0 \Rightarrow 0 \cdot 4 = 4 \cdot 0 = 0 \in I, & x=3 \Rightarrow 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 0 \in I, \\ x=0 \Rightarrow 0 \cdot 5 = 5 \cdot 0 = 0 \in I, & x=3 \Rightarrow 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 3 \in I. \end{array}$$

Logo, $I = \{0, 3\}$ é ideal de $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.

2. Justifique a seguinte afirmação: O conjunto $\mathbb{Q}$ é um subanel de $\mathbb{R}$, mas não é um ideal de $\mathbb{R}$.

   Solução:

   Como $\mathbb{Q}$ é anel e $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, então $\mathbb{Q}$ é subanel de $\mathbb{R}$.

   Agora, temos:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \in \mathbb{Q} \\ a = -10 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \cdot a \stackrel{?}{=} a \cdot x \\ 2 \cdot (-10) = (-10) \cdot 2 = -20 \in \mathbb{Q}, \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \in \mathbb{Q} \\ a = \sqrt{3} \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \cdot a \stackrel{?}{=} a \cdot x \\ 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}. \end{array}$$

   Logo, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ não é ideal de $\mathbb{R}$.

3. Prove que o conjunto $(3) = 3\mathbb{Z} = \{3n, n \in \mathbb{Z}\}$ é um ideal do anel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

   Solução:

   Temos: $3\mathbb{Z} = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\} \subset (\mathbb{Z}, +, \cdot)$. De fato, sejam $x, y \in 3\mathbb{Z}$, tais que $x = 3n$ e $y = 3m$ com $m, n \in \mathbb{Z}$.
   Então,

   (i) $x - y = 3m - 3n = 3.(m - n) \in 3\mathbb{Z}$.

   (ii) $x.y = 3m.3n = 3.(n.3m) \in 3\mathbb{Z}$.

   Portanto, (3) é ideal de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

4. Em geral, se $n \geq 0$ é um inteiro, o subconjunto $n\mathbb{Z} := \{nz | z \in \mathbb{Z}\}$ é um ideal do anel dos inteiros.

5. Sendo $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ o conjunto das matrizes 2×2 de números reais, $A = (M_2, +, \cdot)$ é um anel não comutativo e com unidade.

   O conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um subanel de A. Mostremos que B não é um ideal de A.

   Solução:

   Sejam $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad N = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B \quad$ e $\quad X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in A$, segue

   (i) $M - N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B$.

   (ii) $M \cdot X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B$.

Logo, B é ideal à direita de A. Mas B não é ideal à esquerda de A.

De fato, tome $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in A$ e $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B$, segue,

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \notin B.$$

Portanto, B não é ideal de $A = (M_2, +, \cdot)$.

3.4 Anéis de polinômios

Definição 6. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um polinômio numa variável sobre A é uma sequência $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, onde $a_i \in A$ para todo índice i, e onde $a_i \neq 0$ somente para um número finito de índices.

Notação: Denotamos o anel de polinômios na variável x por:

$$A[x] = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in A,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Sejam A um anel comutativo e

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0,$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_0$$

polinômios pertencentes a $A[x]$. Assim,

$$f(x) \oplus g(x) = (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0),$$
$$f(x) \otimes g(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \ldots + c_0,$$

onde

$$\begin{cases} c_0 = a_0 b_0, \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \\ c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\ \ldots \\ c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + a_3 b_{n-3} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0. \end{cases}$$

O conjunto $A[x]$, munido das operações $\oplus$ e $\otimes$ é o anel $(A[x], \oplus, \otimes)$, onde:

- o elemento neutro de $\oplus$ é o elemento $(0, 0, 0, \ldots)$, que é o polinômio identicamente nulo $f(x) \equiv 0$;
- o elemento neutro de $\otimes$ é o elemento $(1, 0, 0, \ldots)$, que é o polinômio constante $f(x) = 1$;
- o inverso de $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, com respeito à operação $\oplus$, é o elemento $(-a_0, -a_1, \ldots, -a_n, \ldots)$.

3.4.1 Teorema da divisão

Proposição 3.4.1. (GARCIA; LEQUAIN, 2001) Sejam $(R,+,\cdot)$ um anel e $R[x]$ o anel de polinômios em uma variável sobre R. Sejam $f(x) \in R[x]$ um polinômio e $g(x) \in R[x]$ um polinômio cujo coeficiente líder é invertível em R. Então,

(i) existem $t(x), r(x) \in R[x]$ tais que $f(x) = g(x) \cdot t(x) + r(x)$, com $\text{grau}\, r(x) < \text{grau}\, g(x)$ ou $r(x) = 0$;

(ii) tais polinômios $t(x)$ e $r(x)$ podem ser efetivamente calculados;

(iii) tais polinômios $t(x)$ e $r(x)$ podem ser unicamente determinados.

Exemplo 3.4.2. Sejam $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2x + 1$ e $g(x) = -x^2 - 5$ polinômios em $\mathbb{Z}[x]$. Calcule $t(x)$ e $r(x)$ realizando a divisão de $f(x)$ por $g(x)$, temos:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +3x^3 & +0x^2 & +2x & +1 & -x^2+0x-5 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & -0x^3 & -10x^2 & & & -2x^2-3x+10 \\ \cline{1-5}
 & 3x^3 & -10x^2 & +2x & +1 & \\
 & -3x^3 & +0x^2 & -15x & & \\ \cline{2-5}
 & & -10x^2 & -13x & +1 & \\
 & & +10x^2 & +0x & +50 & \\ \cline{3-5}
 & & & -13x & +51 &
\end{array}$$

Assim, obtemos que:

$$f(x) = g(x) \cdot t(x) + r(x),$$

onde

$$t(x) = -2x^2 - 3x + 10 \qquad \text{e} \qquad r(x) = -13x + 51,$$

ou seja,

$$2x^4 + 3x^3 + 2x + 1 = (-x^2 - 5) \cdot (-2x^2 - 3x + 10) + (-13x + 51),$$

tal que $\text{grau}[-13x + 51] = 1 < 2 = \text{grau}[-x^2 - 5]$.

Demonstração. (GARCIA; LEQUAIN, 2001) As afirmações (i) e (ii) implicam na existência de $t(x)$ e $r(x)$: se $f(x) = 0$ ou $\text{grau}(f) < \text{grau}(g)$, encontramos $t(x) = 0$ e $r(x) = f(x)$.

Vamos supor que $n = \text{grau}(f) \geq \text{grau}(g) = m$. Sejam $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, com $a_n \neq 0$, e $g(x) = b_m x^m + bm - 1x^{m-1} + \ldots + b_0$, com $b_m \neq 0$. Pela hipótese, o coeficiente líder b_m de g é invertível em R. Logo, $1/b_m \in R$ e, portanto, $a_n x^{n-m}/b_m \in R[x]$.

Temos então:

$$f(x) = \frac{1}{b_m} \cdot a_n x^{n-m} \cdot g(x) + f_1(x),$$

onde
$$f_1(x) = \left(a_{n-1} - \frac{a_n b_{m-1}}{b_m}\right) \cdot x^{n-1} + \ldots + \left(a_{n-m} - \frac{a_n b_0}{b_m}\right) \cdot x^{n-m} + \cdots.$$

Observe que a_n/b_m e $f_1(x)$ foram efetivamente calculados. Se $f_1 = 0$ ou se $\mathrm{grau}(f_1) < \mathrm{grau}(g) = m$, a demonstração terminou.

Tome $t(x) = a_n x^{n-m}/b_m$ e $r(x) = f_1(x)$. Se $p = \mathrm{grau}(g \cdot f_1) \geq m$, repita o processo com $f_1(x)$ e $g(x)$ no lugar de $f(x)$ e $g(x)$, isto é,

$$f_1(x) = c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \ldots + c_0,$$

com $n-1 \geq p \geq m$ e $c_p \neq 0$. Assim, $f_2 = f_1 - c_p x^{p-m} g(x)/b_m$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot \frac{1}{b_m} a_n x^{n-m} + g(x) \cdot \frac{1}{b_m} c_p x^{p-m} + f_2 \\ &= g(x) \cdot \left[\frac{1}{b_m} a_n x^{n-m} + \frac{1}{b_m} c_p x^{p-m}\right] + f_2, \end{aligned}$$

com a_n/b_m, c_p/b_m e f_2 efetivamente calculáveis.

Se $f_2 = 0$ ou se $\mathrm{grau}(f_2) < m$, a demonstração acabou.

Agora, tome $t(x) = a_n x^{n-m}/b_m + c_p x^{p-m}/b_m$ e $r(x) = f_2$. Se $\mathrm{grau}(f_2) \geq m$, repita o processo.

Como $\mathrm{grau}(f) > \mathrm{grau}(f_1) > \mathrm{grau}(f_2) > \ldots$, obtemos, após de um número finito de passos, um polinômio $f_i(x)$ nulo ou de grau menor do que m. Tome $r(x) = f_i(x)$.

Para mostrar a unicidade dos polinômios $t(x)$ e $r(x)$ (isto é, a afirmação (iii)), suponhamos que

$$f(x) = g(x)t_0(x) + r_0(x) = g(x)t_1(x) + r_1(x),$$

onde $r_i = 0$ ou $\mathrm{grau}(r_i) < \mathrm{grau}(g)$, com $i = 1, 2$.

Subtraindo as duas equações, temos:

$$\begin{aligned} [g(x)t_0(x) + r_0(x)] - [g(x)t_1(x) + r_1(x)] = 0 \ &\Rightarrow \\ g(x)(t_0(x) - t_1(x)) + (r_0(x) - r_1(x)) = 0 \ &\Rightarrow \\ r_0(x) - r_1(x) = g(x)(t_1(x) - t_0(x)), & \end{aligned}$$

Como $\mathrm{grau}[r_0(x) - r_1(x)]$ é menor do que $\mathrm{grau}[g(x)]$, e $g(x)$ divide $r_0(x) - r_1(x)$, isto só é possível se $r_0(x) - r_1(x) = 0$. Assim, $r_1 = r_0$ e $t_1 = t_0$. □

3.5 Histórico: o Teorema Fundamental da Álgebra

Girard (1629), no livro "*L'invention nouvelle en l'Algèbre*", afirmou que uma equação polinomial de grau n tem n soluções (contadas as multiplicidades), sem mencionar e nem demonstrar que tais soluções eram necessariamente complexas.

Descartes (1637) escreveu em "*La géométrie*" que se β é raiz de um polinômio $P(x)$, então $x-\beta$ divide o polinômio. Além disso, afirmou que para todas as equações de grau n, há n raízes, mas sem necessariamente corresponder a quantidades reais.

Outras tentativas foram feitas por D'Alembert em (1746), Euler (1749), de Foncenex (1759), Lagrange (1772) e Laplace (1795). Estas últimas quatro tentativas recorreram à tese de Argand; mais precisamente, a existência de raízes era dada como certa e o que faltava provar era a forma $a+bi$ delas para números reais a e b.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), com apenas 20 anos de idade, em sua tese de doutorado, demonstrou satisfatoriamente o Teorema Fundamental da Álgebra. Após aperfeiçoar suas demonstrações, fez mais duas publicações em 1816 e uma versão da primeira demonstração em 1849.

Uma rigorosa demonstração foi publicada por Argand em 1806; foi nela que, pela primeira vez, o Teorema Fundamental da Álgebra foi enunciado para polinômios com coeficientes complexos e não apenas para polinômios com coeficientes reais.

3.6 Demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra

3.6.1 Demonstração analítica

Nesta seção apresentaremos uma demonstração analítica do Teorema Fundamental da Álgebra. Faremos uso de uma ferramenta muito importante da Análise Complexa de uma variável: o Teorema de Liouville, cuja demonstração será omitida aqui por não estar no escopo desta dissertação e pode ser encontrada em (CONWAY, 1978).

Teorema 3.6.1. Se f é uma função inteira e limitada, então f é constante.

Apresentamos, agora, a versão analítica da demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Para definição de um corpo, veja Observação (ii) da página 38.

Teorema 3.6.2. (FRALEIGH, 1982) Todo polinômio $p(z)$ não constante sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos possui pelo menos uma raiz $z_0 \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Suponha que o polinômio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ não tenha raízes em $\mathbb{C}$. Então, $1/p(z)$ não se anula em nenhum ponto. Além disso, como

$$\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = \infty,$$

então

$$\lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{1}{p(z)}\right| = 0.$$

Assim, $1/p(z)$ é uma fração limitada no plano. Pelo Teorema de Liouville, $1/p(z)$ é constante e, logo, p é constante. Portanto, um polinômio não constante em $\mathbb{C}[z]$ deve ter um zero. $\square$

3.6.2 Demonstração algébrica

Nesta seção apresentamos uma demonstração algébrica do Teorema Fundamental da Álgebra, baseada nos argumentos presentes em (MONTEIRO, 1969). Porém, antes de iniciarmos a demonstração definimos o conceito de polinômios simétricos nas indeterminadas $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Definição 7. Um polinômio em $\mathbb{R}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ é chamado de *polinômio simétrico nas indeterminadas* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se o polinômio continua o mesmo quando fazemos qualquer permutação das indeterminadas.

São exemplos de polinômios simétricos: $a(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$, $b(x,y,z) = x^2y + x^2z + x_2^2x + y^2z + z^2x + z^2y + 2xyz$, $c(x,y,z) = 2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 3xy - 3xz - 3yz$.

Teorema 3.6.3. Todo polinômio não constante com coeficientes complexos tem uma raiz complexa.

Demonstração. Em alguns casos particulares temos a garantia da existência de raízes.

1. Qualquer polinômio de grau ímpar com coeficientes reais tem pelo menos uma raiz real. De fato, a existência segue como uma aplicação do Teorema do Valor Intermediário, visto que todo polinômio $p(x)$ é uma função contínua e, se o grau de $p(x)$ é ímpar, o sinal de $p(x)$ troca quando $x \to \pm\infty$.

2. Todo polinômio de segundo grau com coeficientes complexos tem raízes. De fato, as raízes são dadas explicitamente pela fórmula de Bháskara, observando que todo número complexo $z = a + ib$, tem raízes

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{r}\left(\sqrt{\frac{r+a}{2r}} \pm i\sqrt{\frac{r-a}{2r}}\right),$$

onde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e o sinal dentro do parênteses será o mesmo de b, quando $b \neq 0$ e positivo, quando $b = 0$. Observamos que tais fórmulas vêm da forma polar do número complexo z, que é dada por $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, que implica que $\sqrt{z} = \pm r(\cos(\theta/2) + i\,\mathrm{sen}(\theta/2))$.

Para o caso geral, afirmamos que basta analisar o caso dos polinômios não constantes, mônicos, de coeficientes reais.

Com efeito, seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes complexos. Definimos o conjugado do polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ como o polinômio

$$\overline{p}(x) = \overline{a_0} + \overline{a_1}x + \cdots + \overline{a_n}x^n$$

e seja o polinômio $q(x) = p(x)\overline{p}(x)$. Observe que

$$\overline{q}(x) = \overline{p}(x)\overline{\overline{p}}(x) = \overline{p}(x)p(x) = q(x),$$

e como $\overline{q}(x) = q(x)$, $q(x)$ tem coeficientes reais. Se o número complexo z_0 for raiz de $q(x)$ então

$$0 = q(z_0) = p(z_0)\overline{p}(z_0).$$

Por $\mathbb{C}$ ser corpo, temos $p(z_0) = 0$ ou $\overline{p}(z_0) = 0$. Se $\overline{p}(z_0) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} p(\overline{z_0}) &= a_0 + a_1\overline{z_0} + a_2\overline{z_0}^2 + \cdots + a_n\overline{z_0}^n \\ &= \overline{\overline{a_0}} + \overline{\overline{a_1}}\,\overline{z_0} + \overline{\overline{a_2}}\,\overline{z_0}^2 + \cdots + \overline{\overline{a_n}}\,\overline{z_0}^n \\ &= \overline{\overline{a_0} + \overline{a_1}\,z_0 + \overline{a_2}\,z_0^2 + \cdots + \overline{a_n}\,z_0^n} \\ &= \overline{\overline{p}(z_0)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

Logo, z_0, ou seu conjugado, é raiz de $p(x)$, dessa forma podemos demonstrar o teorema para um polinômio de coeficientes reais.

Seja $q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Vamos demonstrar que $q(x)$ tem uma raiz complexa por indução ao maior inteiro não negativo k, tal que 2^k divide o grau n de $q(x)$.

Seja n o grau de q e seja k inteiro tal que $n = 2^k a_1$ para a_1 ímpar.

Se $k = 0$, $q(x)$ tem grau ímpar e portanto $q(x)$ tem uma raiz.

Suponhamos por indução que o resultado seja verdadeiro para todo polinômio com coeficientes reais, não constante, de grau $2^k a_1$, com k e a_1 inteiros não negativos e a_1 ímpar e seja q um polinômio com coeficientes reais, não constante, mônico, de grau $n = 2^{k+1}m$ com m ímpar.

Seja F um corpo que contém $\mathbb{C}$ e as raízes de $q(x)$, ou seja, existem elementos $z_1, z_2, \cdots, z_n$ de F tais que

$$q(x) = (x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n).$$

A demonstração da existência de tal corpo pode ser encontrada em Hungerford (1974), (Theorem $1 \cdot 10$, página 236).

Note que isto não implica que tais elementos são raízes complexas. Devemos justamente mostrar que alguma dessas raízes são números complexos.

Denotaremos $z = (z_1, \cdots, z_n)$. Note que

$$\begin{aligned}
q(x) &= (x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n) \\
&= x^n - (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)x^{n-1} + \\
&\quad (z_1z_2 + z_1z_3 + \cdots + z_1z_n + z_2z_3 + \cdots + z_{n-1}z_n)x^{n-2} + \\
&\quad \cdots + (-1)^n z_1z_2\cdots z_n \\
&= x^n - e_1(z)x^{n-1} + e_2(z)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n e_n(z).
\end{aligned}$$

onde polinômios $e_1, e_2, \cdots, e_l \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, dados por

$$\begin{aligned}
e_1(x_1, x_2, \cdots, x_l) &= x_1 + \cdots + x_n, \\
e_2(x_1, x_2, \cdots, x_l) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\
&\vdots \\
e_n(x_1, x_2, \cdots, x_l) &= x_1x_2\cdots x_n,
\end{aligned}$$

são chamados *polinômios simétricos elementares nas indeterminadas* $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Como $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, temos $e_i(z) \in \mathbb{R}$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Para um número real t, seja

$$\begin{aligned}
h_t(x) &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x - z_i - z_j - tz_iz_j) \\
&= (x - z_1 - z_2 - tz_1z_2)(x - z_1 - z_3 - tz_1z_3)(x - z_1 - z_4 - tz_1z_4)\cdots \\
&\quad (x - z_1 - z_n - tz_1z_n)(x - z_2 - z_3 - tz_2z_3)(x - z_2 - z_4 - tz_2z_4)\cdots \\
&\quad (x - z_2 - z_n - tz_2z_n)\cdots(x - z_{n-1} - z_n - tz_{n-1}z_n).
\end{aligned}$$

Considere os polinômios $g_{ijt}(x_1, \cdots, x_n) = x_i + x_j + tx_ix_j \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ com $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Para simplificar notações, vamos reindexá-los:

$$(g_{1,2,t}, g_{1,3,t}, \cdots, g_{n-1,n,t}) = (g_{1t}, g_{2t}, \cdots, g_{lt}),$$

com $l = n(n-1)/2$. Então, vamos reescrever $h_t(x)$:

$$\begin{aligned}
h_t(x) &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x - g_{ijt}(z)) = \prod_{i=1}^{l} (x - g_{it}(z)) \\
&= x^l - (g_{1t}(z) + g_{2t}(z) + \cdots + g_{lt}(z))x^{l-1} + \cdots + (-1)^l g_{1t}(z)g_{2t}(z)\cdots g_{lt}(z). \\
&= x^l - s_1(g_t)x^{l-1} + \cdots + (-1)^l s_l(g_t).
\end{aligned}$$

onde s_i são os polinômios simétricos elementares em l variáveis e $g_t = (g_{1t}(z), g_{2t}(z), \ldots, g_{lt}(z))$.

Observe que os polinômios $s_i(g_{1t}(z), g_{2t}(z), \cdots, g_{lt}(z))$ são simétricos em $(z_1, \ldots, z_n)$. Neste caso, existe $f_{it} \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ tal que

$$s_i(g_{1t}(z), g_{2t}(z), \cdots, g_{lt}(z)) = f_{it}(e_1(z), e_2(z), \cdots, e_n(z)).$$

Como $e_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$ são reais, segue que $s_i(g_t)$ são reais, e portanto $h_t(x)$ tem coeficientes reais.

O grau de h_t é

$$l = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^{k+1}m(n-1)}{2} = 2^k m(n-1),$$

em que $m(n-1)$ é ímpar.

Então, pela hipótese de indução, para cada t, h_t tem alguma raiz complexa, ou seja, $z_i + z_j + tz_iz_j$ é complexa para dois elementos distintos i, j de $\{1, 2, \cdots, n\}$.

Note que para cada número real t obtemos um par (i, j) tal que $z_i + z_j + tz_iz_j \in \mathbb{C}$. Vemos que ao menos um par (i, j) se repete para valores distintos de t. Com efeito, havendo l pares e tomando $l+1$ valores distintos para t, pelo princípio da casa dos pombos, haverá um par (i, j) para o qual $c = z_i + z_j + tz_iz_j$ e $d = z_i + z_j + sz_iz_j$ sejam complexos, para valores t e s reais distintos. Agora,

$$A = z_i + z_j, \qquad B = z_iz_j \tag{3.1}$$

são os números complexos dados pela solução do sistema linear determinado

$$\begin{cases} A + tB = c \\ A + sB = d \end{cases}$$

nas incógnitas A e B. Finalmente, por (3.1), z_i e z_j são as raízes da equação do polinômio de segundo grau $x^2 - Ax + B$ e portanto são números complexos. $\square$

CAPÍTULO

4

ENSINO DE POLINÔMIO NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo apresentamos a teoria de polinômios tal como é apresentada nos livros didáticos de Matemática elaborados para o Ensino Médio. Tomamos como base os quatro livros analisados no Capítulo 2.

Ao longo do Ensino Médio há uma retomada da ampliação dos conjuntos numéricos de $\mathbb{N}$ até $\mathbb{R}$. Isso ocorre à medida que em alguns conteúdos faz-se necessário refletir se determinadas operações podem ser realizadas em cada conjunto numérico ou não. Tal retomada, revisa e reforça o que foi ensinado no Ensino Fundamental, e garante a compreensão da necessidade de ampliar o conjunto dos números reais.

Em (PAIVA, 1999) encontramos uma introdução histórica muito interessante sobre os estudos de equações do tipo $x^3+px+q=0$ de Gerônimo Cardano e publicada em sua obra *Ars Magna* (CARDANO, 1545).

Os estudos de Cardano tiveram como referência o método apresentado por Tartáglia que consiste em substituir a variável x por $u-v$ tal que o produto uv seja um terço do coeficiente de x da equação.

De fato, seja $x=u-v$, para quaisquer valores reais de u e v. Logo,

$$(u-v)^3 = u^3-3u^2v+3v^2u-v^3.$$

Agora, vamos buscar uma maneira de zerar, em função de $u-v$, a equação acima. Uma maneira é fazer:

$$(u-v)^3+3uv(u-v)+(v^3-u^3)=0.$$

Mas, como $u-v=x$, temos:

$$x^3+3uvx+(v^3-u^3)=0.$$

Daí, tiramos que:

$$p = 3uv \quad \text{e} \quad q = v^3 - u^3,$$

implicando em

$$uv = \frac{p}{3} \quad \text{e} \quad v^3 - u^3 = q.$$

Cardano seguiu o método de Tartáglia para resolver a equação

$$x^3 - 6x + 4 = 0.$$

Substituindo x por $u - v$ e admitindo que uv seja -2, um terço de -6, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} (u-v)^3 - 6(u-v) + 4 = 0, \\ uv = -2, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 - 6u + 6v + 4 = 0, \\ uv = -2. \end{cases}$$

Fazendo $uv = -2$ na primeira equação e isolando v na segunda, obtém-se:

$$u^3 - v^3 + 4 = 0, \tag{4.1}$$

$$v = -\frac{2}{u}, \tag{4.2}$$

Substituindo (4.2) em (4.1), chega-se à equação $u^6 + 4u^3 + 8 = 0$, cuja resolução pode ser feita pela mudança da variável u^3 por t, ou seja:

$$t^2 + 4t + 8 = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2}.$$

Portanto, Cardano encontrou:

$$u^3 = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2},$$

e concluiu que, como não existe raiz quadrada de número negativo, não existem também u e v, e sendo assim, não existe x, pois $x = u - v$. Porém, espantosamente Cardano verificou que o número real 2 é raiz da equação $x^3 - 6x + 4 = 0$, pois $2^3 - 6 \cdot 2 + 4 = 0$, obrigando-o a reconhecer a existência do x e a considerar a existência de novos números, como, por exemplo, $\sqrt{-16}$.

Em sala de aula essa introdução pode ser usada para contextualizar o assunto e explicar a necessidade de expandir o conjunto dos números reais. E realçar o conjunto dos números complexos como um importante pré-requisito para os estudos de polinômios e equações algébricas.

4.1 Polinômios no Ensino Médio

Definição 8. (IEZZI *et al.*, 2013) Um **polinômio** na variável complexa x é uma expressão dada por:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0,$$

em que:

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ são números complexos chamados coeficientes do polinômio; a_0 é o coeficiente independente do polinômio;
- todos os expoentes de x: $n, n-1, \ldots, 2, 1, 0$ são números naturais;
- cada uma das parcelas: $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, a_{n-2}x^{n-2}, \ldots, a_1 x, a_0$ corresponde a um termo do polinômio;
- o grau do polinômio é o número correspondente ao maior expoente de x, cujo termo apresenta coeficientes não nulos;
- x pode assumir qualquer valor complexo.

Definição 9. (IEZZI *et al.*, 2013) Seja $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$, um polinômio de grau n. O coeficiente a_n é chamado **coeficiente dominante** do polinômio.

Definição 10. (IEZZI *et al.*, 2013) Vamos considerar uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que a cada $x \in \mathbb{C}$ associa o polinômio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, isto é, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. A função f recebe o nome de **função polinomial**.

Como a cada polinômio está associada uma única função e, reciprocamente, a cada função está associado um único polinômio, podemos usar indistintamente os termos polinômios ou função polinomial.

Definição 11. (IEZZI *et al.*, 2013) **Polinômio nulo (ou polinômio identicamente nulo)** é aquele que possui todos os coeficientes iguais a zero. Assim, o polinômio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ é nulo quando $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$.

Pelo fato de possuir todos os coeficientes iguais a zero, não se define o grau de um polinômio nulo.

Definição 12. (IEZZI *et al.*, 2013) Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ e p o polinômio definido por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. O **valor numérico** de p em α é igual ao número complexo obtido quando substituímos x por α e efetuamos as operações, isto é:

$$p(\alpha) = a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + a_{n-2} \cdot \alpha^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot \alpha^2 + a_1 \cdot \alpha + a_0.$$

Definição 13. (IEZZI *et al.*, 2013) Seja $\alpha \in \mathbb{C}$. Dizemos que α é **raiz do polinômio** $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ quando $p(\alpha) = 0$, isto é: $a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + \ldots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0$.

Exemplo 4.1.1. A medida da aresta de um cubo é x, e seu volume é representado pela expressão x^3. Aumentando em uma unidade a medida de sua aresta, o volume do novo cubo obtido é dado por:

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

A expressão obtida é chamada de expressão polinomial ou polinômio de grau 3 e coeficiente dominante igual a 1. Se atribuirmos um valor para x, por exemplo o número 5, teremos $p(5) = 5^3 + 3\cdot 5^2 + 3\cdot 5 + 1 = 125 + 75 + 15 + 1 = 216$, que é um valor numérico.

Se atribuirmos o número -1, teremos $p(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 1 = (-1) + (+3) + (-3) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$, que é um valor numérico. Neste caso, dizemos que -1 é raiz do polinômio.

Definição 14. (IEZZI *et al.*, 2013) Sejam f e g dois polinômios respectivamente definidos por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Dizemos que f **e** g **são iguais (ou idênticos)** quando assumem o mesmo valor numérico para qualquer valor de x, isto é:

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{C}.$$

Agora, vamos mostrar que dois polinômios f e g são iguais se, e somente se, os coeficientes de f e g são ordenadamente iguais, isto é, os coeficientes dos termos de mesmo expoente são iguais:

$$a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ \ldots,\ a_1 = b_1,\ a_0 = b_0.$$

- Quando os coeficientes dos termos de mesmo expoente são iguais, temos, para todo $x \in \mathbb{C}$:

  $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = g(x)$$

  e, deste modo, f e g são iguais.

- Quando $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{C}$, temos $f(x) - g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{C}$, isto é:

  $$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) - (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) = 0 \Rightarrow$$
  $$(a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0.$$

Assim,

$$\begin{cases} a_n - b_n = 0 \ \Rightarrow\ a_n = b_n, \\ a_{n-1} - b_{n-1} = 0 \ \Rightarrow\ a_{n-1} = b_{n-1}, \\ \ldots \\ a_1 - b_1 = 0 \ \Rightarrow\ a_1 = b_1, \\ a_0 - b_0 = 0 \ \Rightarrow\ a_0 = b_0. \end{cases}$$

Isso mostra que os coeficientes de f e g são ordenadamente iguais.

Exemplo 4.1.2. O polinômio $mx^3 + nx^2 + px + q$ é idêntico ao polinômio $-5x^2 - 3x + 10$ quando $m = 0$, $n = -5$, $p = -3$ e $q = 10$.

4.2 Divisão de polinômios

Ao realizar a divisão de polinômios podemos utilizar o método da chave, semelhante ao utilizado na divisão de números inteiros.

Definição 15. (IEZZI *et al.*, 2013) Considerando os polinômios $p(x)$ e $h(x)$, com $h(x)$ não nulo, dividir $p(x)$ por $h(x)$ é determinar os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que:

- $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$;
- $\text{grau}(r) < \text{grau}(h)$ ou $r(x) \equiv 0$.

A diferença entre o grau do dividendo e o do divisor, ou seja, $\text{grau}(q) = \text{grau}(p) - \text{grau}(h)$ determina o grau do quociente na divisão de polinômios. Quando é obtido $r(x) \equiv 0$ dizemos que $p(x)$ é divisível por $h(x)$. A divisão não exata estará finalizada quando $\text{grau}(r) < \text{grau}(h)$.

4.3 Teorema do Resto

Teorema 4.3.1. (IEZZI *et al.*, 2013) O resto da divisão de um polinômio $f(x)$ por $x - a$ é igual a $f(a)$.

Demonstração. Da divisão de $f(x)$ por $x - a$, podemos escrever: $f(x) = (x-a) \cdot q(x) + r(x)$, com $q(x)$ e $r(x)$ unicamente determinados e tais que $r(x)$ tem grau menor do que o grau de $(x-a) = 1$. Assim, $r(x)$ é um polinômio constante, isto é, $r(x) = c$.

Calculando os valores desses polinômios para $x = a$, vem:

$$f(a) = (a-a) \cdot q(a) + r(a),$$

isto é, $r(a) = f(a)$. Como $r(x) = r(a) = c$ e $r(a) = f(a)$ segue que $r(x) = f(a)$. □

4.4 Teorema de D'Alembert

Uma consequência importante do Teorema do Resto é o Teorema de D'Alembert, que enunciamos e demonstramos a seguir:

Teorema 4.4.1. (IEZZI *et al.*, 2013) Um polinômio $f(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, a for raiz de f.

Demonstração. Há duas implicações a provar:

(i) f é divisível por $x - a$ implica que a é raiz de f. De fato, se f é divisível por $x - a$, temos $r = 0$ e, pelo Teorema 4.3.1 (Teorema do Resto), $r = f(a) = 0$, do que concluímos que a é raiz de f.

(ii) a é raiz de f implica que f é divisível por $x-a$. Com efeito, como a é raiz de f, temos $f(a)=0$; pelo Teorema 4.3.1 (Teorema do Resto), o resto r da divisão de f por $x-a$ é igual a $f(a)$. Assim, $r=f(a)=0$, mostrando que f é divisível por $x-a$.

□

4.5 Dispositivo prático de Briot-Ruffini

O dispositivo prático de Briot-Ruffini é muito utilizado para fazer a divisão de um polinômio $f(x)$ por $x \pm a$. A seguir, explicitamos os passos do método. (IEZZI *et al.*, 2013).

Sejam $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, com $a_0 \neq 0$, um polinômio de grau n e $g(x) = x-a$.

Quando dividimos $f(x)$ por $g(x)$, obtemos, como quociente, um polinômio $q(x)$ de grau $n-1$, dado por

$$q(x) = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1}.$$

Vamos determinar os coeficientes $q_0, q_1, \ldots, q_{n-2}, q_{n-1}$ de $q(x)$, bem como o resto dessa divisão. Como $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r$, podemos escrever, para todo $x \in \mathbb{C}$:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = (x-a)(q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \ldots + q_{n-2}x + q_{n-1}) + r.$$

Multiplicando os polinômios e agrupando os termos semelhantes, vem:

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =& q_0x^n + (q_1 - aq_0)x^{n-1} + (q_2 - aq_1)x^{n-2} \\ &+ \ldots + (q_{n-1} - aq_{n-2})x + r - aq_{n-1}. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau, obtemos:

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0, \\ q_1 - aq_0 &= a_1 \Rightarrow q_1 = a_1 + aq_0, \\ q_2 - aq_1 &= a_2 \Rightarrow q_2 = a_2 + aq_1, \\ &\ldots \\ q_{n-1} - aq_{n-2} &= a_{n-1} \Rightarrow q_{n-1} = a_{n-1} + aq_{n-2}, \\ r - aq_{n-1} &= a_n \Rightarrow r = aq_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

4.6 Teorema da Decomposição

Uma consequência do Teorema Fundamental da Álgebra é o Teorema da Decomposição em Fatores, que enunciamos a seguir.

Teorema 4.6.1. (IEZZI *et al.*, 2013) Todo polinômio de grau $n \geq 1$ pode ser decomposto em fatores de grau 1.

Demonstração. Consideremos o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $n \geq 1$. Pelo Teorema 3.6.2 (Teorema Fundamental da Álgebra), $p(x)$ admite pelo menos uma raiz complexa, que representaremos por r_1. Assim, temos $p(r_1) = 0$ e, pelo Teorema 4.4.1 (Teorema de D'Alembert), $p(x)$ é divisível por $x - r_1$, podendo escrever

$$p(x) = (x - r_1) \cdot q_1(x), \tag{4.3}$$

em que $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n-1$.

Supondo que $n - 1 \geq 1$, em concordância com o Teorema Fundamental da Álgebra, $q_1(x)$ admite pelo menos uma raiz complexa, a saber r_2. Pelo Teorema de D'Alembert, podemos escrever:

$$q_1(x) = (x - r_2) \cdot q_2(x), \tag{4.4}$$

em que $q_2(x)$ é um polinômio de grau $n-2$.

Substituindo (4.4) em (4.3), vem que $p(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdot q_2(x)$, e realizando esse procedimento n vezes, chegamos em:

$$p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdots (x - r_{n-2})(x - r_{n-1})(x - r_n) \cdot q_n(x),$$

em que q_n é um polinômio de grau $n - n = 0$, dado por $q_n(x) = a_n$ (identidade de polinômios). □

Pelo Teorema 4.6.1 (Teorema da Decomposição em Fatores), os polinômios de grau n, com $n \geq 1$, definidos por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

podem ser decompostos na forma:

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdots (x - r_{n-2})(x - r_{n-1})(x - r_n),$$

na qual $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-2}, r_{n-1}, r_n$ são as raízes do polinômio.

4.7 Relações de Girard

Algumas relações entre os coeficientes de uma equação algébrica e as raízes da mesma são conhecidas como Relações de Girard. Estas relações poderão nos ser úteis na resolução de equações algébricas quando temos mais alguma informação a respeito de suas raízes.

Vejamos estas relações na equação do segundo grau: $ax^2 + bx + c = 0$.

Sendo x_1 e x_2 suas raízes, temos:

$$ax^2+bx+c \equiv a(x-x_1)(x-x_2).$$

Dividindo ambos os membros por a, segue que:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} \equiv (x-x_1)(x-x_2) \equiv x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2.$$

Esta identidade nos permite escrever:

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \qquad \text{e} \qquad x_1x_2=\frac{c}{a},$$

que são as relações de Girard para uma equação do segundo grau.

Consideremos agora a equação do terceiro grau: $ax^3+bx^2+cx+d=0$, tendo por raízes x_1, x_2 e x_3.

Temos:

$$ax^3+bx^2+cx+d \equiv a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

que implica

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a} \equiv x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3.$$

Então:

$$x_1+x_2+x_3=\frac{-b}{a} \qquad \text{e} \qquad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a} \qquad , \qquad x_1x_2x_3=\frac{-d}{a},$$

que são as relações de Girard para uma equação do terceiro grau.

4.8 Teorema das Raízes Racionais

Teorema 4.8.1. (BIANCHINI; PACCOLA, 1989) Sejam p e q inteiros primos entre si. Se p/q é uma raiz racional da equação de coeficientes inteiros do polinômio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ ($a_n \neq 0$ e $a_0 \neq 0$), então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Demonstração. Se p/q é raiz da equação $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$, então devemos ter:

$$\begin{aligned}
a_n\left(\frac{p^n}{q^n}\right)+a_{n-1}\left(\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right)+\ldots+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0 \Rightarrow \\
a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\ldots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0 \Rightarrow \\
p\left(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\ldots+a_1q^{n-1}\right)=-a_0q^n \Rightarrow \\
a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+\ldots+a_1q^{n-1}=\frac{-a_0q^n}{p}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Nota-se que o primeiro membro dessa igualdade representa um número inteiro (pois p, q, a_n, a_{n-1}, ..., a_1 e a_0 são números inteiros), assim $-a_0 q^n/p$ também é número inteiro. Logo, $a_0 q^n$ é divisível por p e, como p e q são primos entre si, segue-se que p é divisor de a_0.

De (4.5) tiramos:

$$a_0 q^{n-1} + a_1 p q^{n-2} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} = \frac{-a_n p^n}{q},$$

e, seguindo o raciocínio anterior, concluímos que q é divisor de a_n. $\square$

É importante observar que essa propriedade não garante a existência de raízes racionais nas equações algébricas com coeficientes inteiros, mas se estas existirem, a propriedade nos dá um critério para determiná-las.

CAPÍTULO

5

SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS POR RADICAIS

Neste capítulo descreveremos as soluções complexas das equações polinomiais de primeiro a quarto graus. Por soluções complexas, queremos dizer que elas são números complexos (não necessariamente reais).

Para a teoria desenvolvida aqui, estamos assumindo o Teorema 3.6.2 (Teorema Fundamental da Álgebra) que assegura que todo polinômio sobre o corpo dos números complexos possui pelo menos uma raiz.

A ideia que norteia o desenvolvimento deste capítulo na demonstração das fórmulas de resolução das equações de terceiro e quarto graus por radicais é a presente em (LIMA, 1987). Escolhemos esse artigo por ser interessante, de fácil entendimento e acessível a alunos do Ensino Médio.

5.1 Raízes da equação polinomial do 1° grau

Consideremos a equação

$$P(x) = ax + b = 0,$$

com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$. Resolvendo essa equação, temos:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

A equação admite uma única raiz complexa $x = -b/a$, isto é, $-b/a$ é o único número complexo com a propriedade

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.$$

5.2 Raízes da equação polinomial do 2° grau

Consideremos a equação

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0,$$

com $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$.

Dividindo todos os seus termos por a, obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Se somamos $-c/a$ aos dois membros da equação anterior, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \left(-\frac{c}{a}\right) = 0 + \left(-\frac{c}{a}\right) \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Somando, agora, $b^2/(4a^2)$ aos dois membros desta última equação, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}. \tag{5.1}$$

Notemos que

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

é um trinômio quadrado perfeito, que é igual a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

pois:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Voltando, então, à equação (5.1), temos:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} &\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
&\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \\
&\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \\
&\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
&\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},
\end{aligned}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da equação polinomial do segundo grau. A expressão

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

é conhecida como fórmula de Bháskara.

Logo, a equação admite no máximo duas raízes complexas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

isto é, x_1 e x_2 são os únicos números complexos com a propriedade

$$P\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \quad \text{e} \quad P\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0.$$

5.3 Raízes da equação polinomial do 3° grau

A técnica aplicada às equações do terceiro grau é o cálculo de expressões simétricas nas raízes de uma equação do segundo grau em função de seus coeficientes.

Considerando as raízes x_1 e x_2 da equação $ax^2 + bx + c = 0$ e estabelecendo as relações de Girard entre as raízes e os coeficientes a, b e c, temos:

- soma: $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\dfrac{b}{a}$;
- produto: $P = x_1 \cdot x_2 = \left(\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \dfrac{c}{a}$.

Dividindo os coeficientes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ por a, obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Das relações acima:

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -S \quad \text{e} \quad P = \frac{c}{a},$$

chegamos em

$$x^2 - Sx + P = 0$$

e, portanto, o coeficiente do termo em x é $x_1 + x_2 = -S$ e o termo independente é $x_1 x_2 = P$.

A partir daqui, de acordo com (MOREIRA, 1994), procuraremos o valor da expressão

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}, \tag{5.2}$$

que, relacionando aos fatos apresentados acima e elevando ambos os membros da equação (5.2) ao cubo, temos:

$$y^3 = x_1 + 3\sqrt[3]{x_1^2}\sqrt[3]{x_2} + 3\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2^2} + x_2 \Rightarrow$$
$$y^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1}\sqrt[3]{x_2}(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) \Rightarrow$$
$$y^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1 x_2}(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}),$$

implicando que

$$y^3 = S + 3\sqrt[3]{P}y \Rightarrow y^3 - 3\sqrt[3]{P}y - S = 0 \tag{5.3}$$

Assim, para determinar y em (5.3) precisamos resolver essa equação que é do terceiro grau. Logo, é possível escrever as raízes de uma equação do terceiro grau como soma de raízes cúbicas de raízes de uma equação do segundo grau. Vejamos como isso pode ser feito.

Considerando a equação

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

vamos substituir x por $y+t$:

$$\begin{aligned} &(y+t)^3 + a(y+t)^2 + b(y+t) + c = 0 \;\Rightarrow \\ &y^3 + (3t+a)y^2 + (3t^2 + 2at + b)y + (t^3 + at^2 + bt + c) = 0. \end{aligned}$$

Agora, vamos estabelecer uma expressão que anule o coeficiente de y^2, bastando para isso fazer $3t + a = 0$, ou seja, $t = -a/3$, e obtemos uma equação do tipo:

$$y^3 + py + q = 0,$$

na qual $p = 3t^2 + 2at + b$ e $q = t^3 + at^2 + bt + c$.

Da comparação de $y^3 + py + q = 0$ com a equação (5.3), obtemos

$$p = -3\sqrt[3]{P} \quad \text{e} \quad q = -S,$$

de forma que, se x_1 e x_2 são as raízes de $x^2 - Sx + P = 0$, então $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ satisfaz a equação $y^3 + py + q = 0$.

Procedendo assim, obtemos:

- $p = -3\sqrt[3]{P} \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{P} = -\dfrac{p}{3} \;\Rightarrow\; P = -\dfrac{p^3}{27};$
- $q = -S \;\Rightarrow\; S = -q,$

ou seja, x_1 e x_2 são as raízes de $x^2 - Sx + P = 0$ e

$$x^2 - (-q)x + (-\frac{p^3}{27}) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0,$$

isto é,

$$x_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Logo,

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2},$$

ou melhor,

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

que satisfaz $y^3+py+q=0$.

Sabemos que cada raiz cúbica pode assumir três valores complexos, mas a equação $\sqrt[3]{p}=-p/3$ impõe que o produto das raízes deve ser $-p/3$. Pela fórmula acima calculamos as três raízes de $y^3+py+q=0$, que somadas a $t=-a/3$, obtemos as três raízes de $x^3+ax^2+bx+c=0$.

Portanto, as raízes são dadas pelas expressões:

- $x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\left(-\frac{a}{3}\right),$
- $x_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\left(-\frac{a}{3}\right),$
- $x_3=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\left(-\frac{a}{3}\right).$

5.3.1 Discriminante da equação polinomial de 3° grau

Na fórmula resolutiva, a expressão que aparece no radicando:

$$\Omega=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$$

é chamada de discriminante da equação, que pode ser um número positivo, negativo ou nulo. Assim, indicará os tipos de raízes da equação, conforme mostrado nos exemplos abaixo.

Exemplo 5.3.1. Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^3+3x^2-3x-14=0$.

Encontrando a equação auxiliar, na variável y, substituindo x por $y-a/3=y-1$, temos:

$$\begin{aligned}
&(y-1)^3+3(y-1)^2-3(y-1)-14=0 \Rightarrow\\
&(y^3-3y^2+3y-1)+3(y^2-2y+1)-3(y-1)-14=0 \Rightarrow\\
&y^3-3y^2+3y-1+3y^2-6y+3-3y+3-14=0 \Rightarrow\\
&y^3-6y-9=0.
\end{aligned}$$

Comparando com a equação $y^3+py+q=0$, temos:

- $p=-6$ e $q=-9$,
- $\Omega=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{(-9)^2}{4}+\frac{(-6)^3}{27}=\frac{49}{4}>0.$

Aplicando a fórmula resolutiva, encontramos uma raiz da equação:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\frac{b}{3} \Rightarrow$$
$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}}}-\frac{3}{3} \Rightarrow$$
$$x_1 = 2.$$

Assim, para tornar os cálculos mais simples, podemos dividir o polinômio $x^3+3x^2-3x-14$ por $x-2$, obtendo o polinômio x^2+5x+7. E quais são as raízes da equação $x^2+5x+7=0$?

Aplicando a fórmula de Bháskara encontramos:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot 7}}{2\cdot 1} = \frac{-5\pm\sqrt{25-28}}{2} = \frac{-5\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto,

$$2, \quad \frac{-5+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{-5-i\sqrt{3}}{2}$$

são as raízes procuradas. Levando em consideração que $\Omega > 0$, a equação apresentou três raízes distintas, sendo uma delas um número real e as outras duas dois números complexos conjugados, conforme mostra a Figura 1.

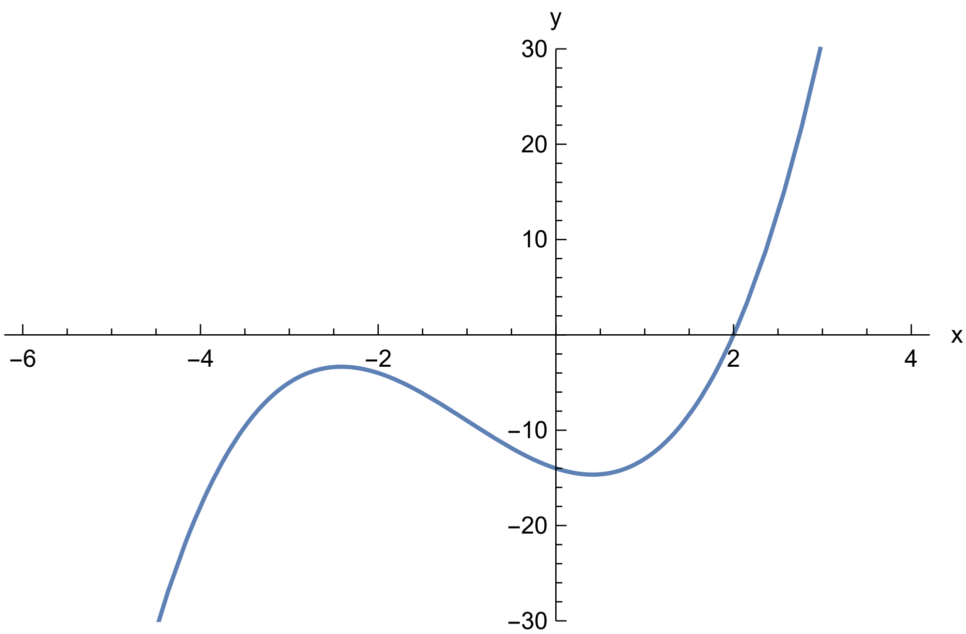


Figura 1 – Gráfico da função $f(x) = x^3+3x^2-3x-14$

Exemplo 5.3.2. Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^3-3x^2+x+5=0$.

Encontrando a equação auxiliar, na variável y, substituindo x por $y - a/3 = y + 1$, temos:

$$\begin{aligned}
&(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + (y+1) + 5 = 0 \ \Rightarrow \\
&(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - 3(y^2 + 2y + 1) + (y+1) + 5 = 0 \ \Rightarrow \\
&y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 + y + 1 + 5 = 0 \ \Rightarrow \\
&y^3 - 2y + 4 = 0.
\end{aligned}$$

Comparando com a equação $y^3 + py + q = 0$, temos:

- $p = -2$ e $q = 4$,
- $\Omega = \dfrac{4^2}{4} + \dfrac{(-2)^3}{27} = \dfrac{16}{4} + \dfrac{(-8)}{27} = \dfrac{100}{27} > 0.$

Aplicando a fórmula resolutiva, temos a seguinte raiz:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{b}{3} \ \Rightarrow \\
x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{100}{27}}} - \frac{(-3)}{3} \ \Rightarrow \\
x_1 &= \sqrt[3]{-2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{-2 - \frac{10}{3\sqrt{3}}} + 1.
\end{aligned}$$

Sabemos que há duas raízes complexas que são números complexos conjugados. Assim, a raiz calculada acima pela fórmula representa a raiz real que poderá ser obtida facilmente pesquisando raízes racionais pelos divisores de 5 (± 1 e ± 5). Logo, -1 é raiz e podemos concluir que:

$$x_1 = \sqrt[3]{-2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{-2 - \frac{10}{3\sqrt{3}}} + 1 = -1.$$

No entanto, para os cálculos das outras raízes, podemos dividir o polinômio $x^3 - 3x^2 + x + 5$ por $x + 1$, obtendo o polinômio $x^2 - 4x + 5$. E quais são as raízes da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$?

Aplicando a fórmula de Bháskara, encontramos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Portanto, -1, $2 + i$ e $2 - i$ são as raízes procuradas. Como $\Omega > 0$, a equação apresentou três raízes distintas, sendo uma delas um número real e as outras duas dois números complexos conjugados, conforme mostra a Figura 2.

Exemplo 5.3.3. Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0$.

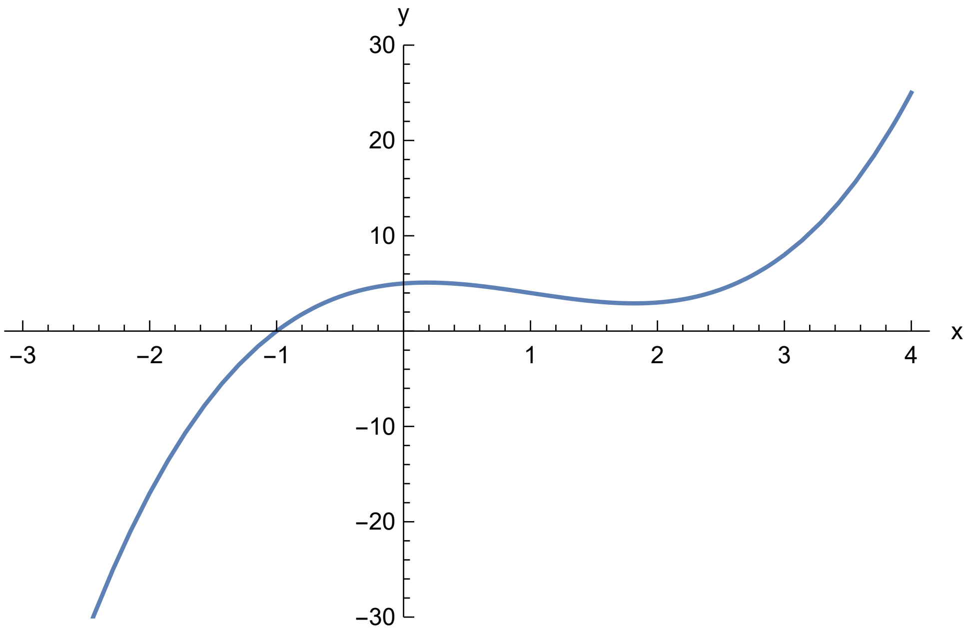


Figura 2 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$

Encontrando a equação auxiliar, na variável y, substituindo x por $y - a/3 = y + 8/3$, temos:

$$\left(y+\frac{8}{3}\right)^3 - 8\left(y+\frac{8}{3}\right)^2 + 21\left(y+\frac{8}{3}\right) - 18 = 0 \Rightarrow$$
$$y^3 - \frac{1}{3}y + \frac{2}{27} = 0.$$

Comparando com a equação $y^3 + py + q = 0$, temos:

- $p = -\frac{1}{3}$ e $q = \frac{2}{27}$,
- $\Omega = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{\left(\frac{2}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}{27} = 0.$

A fórmula resolutiva, nos fornece a seguinte raiz:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{b}{3} \Rightarrow$$
$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{\frac{2}{27}}{2} + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{-\frac{\frac{2}{27}}{2} - \sqrt{0}} - \frac{(-8)}{3} \Rightarrow$$
$$x_1 = 2.$$

Dividindo o polinômio $x^3 - 8x^2 + 21x - 18$ por $x - 2$, obtemos o polinômio $x^2 - 6x + 9$ que, pela fórmula de Bháskara, se anula para $x = 3$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3.$$

Portanto, 2 e 3 são as raízes procuradas. Como $\Omega = 0$, a equação apresentou três raízes reais, sendo $x = 3$ raiz dupla, conforme mostra a Figura 3.

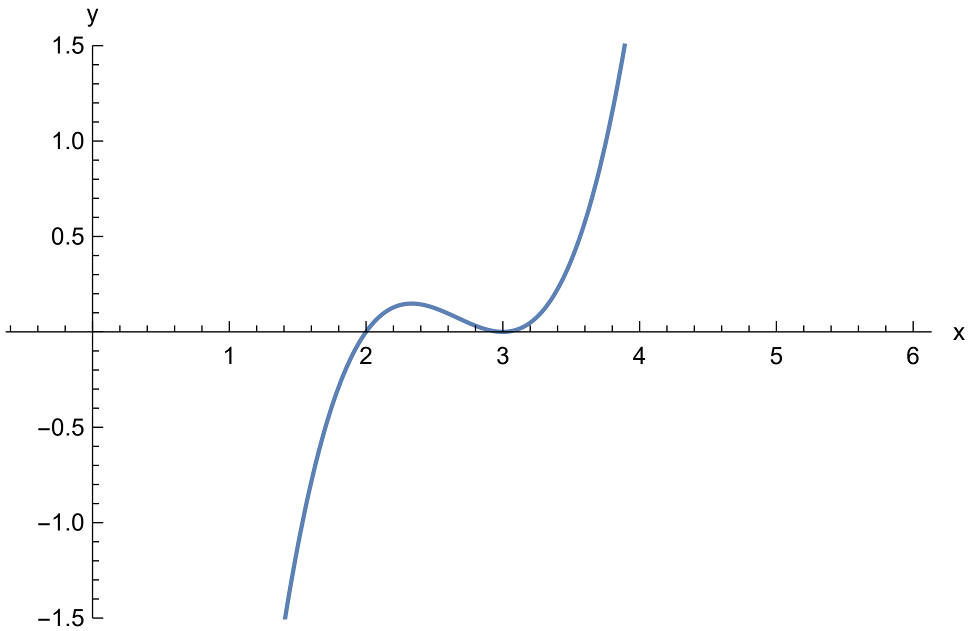


Figura 3 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$

Exemplo 5.3.4. Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^3 - 6x - 4 = 0$.

As variáveis auxiliares estão bem explícitas: $p = -6$ e $p = -4$, e

$$\Omega = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27} = -4 < 0.$$

A fórmula resolutiva traz a seguinte raiz:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{b}{3} \Rightarrow \\
x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{-4}} - \frac{0}{3} \Rightarrow \\
x_1 &= \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}.
\end{aligned}$$

A impressão que temos da raiz x_1 obtida acima é que ela seja um número complexo, mas pelo fato a seguir veremos que é um número real. Pesquisando raízes racionais pelos divisores de -4 (± 1, ± 2 e ± 4), podemos concluir que -2 torna $x^3 - 6x - 4 = 0$. E procedendo como nos exemplos anteriores na divisão do polinômio $x^3 - 6x - 4$ por $x + 2$, obtemos o polinômio $x^2 - 2x - 2$, que igualado a zero tem raízes $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$.

Portanto, -2, $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$ são as raízes procuradas. Observamos que $\Omega < 0$. Os polinômios com

$$\Omega = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

são chamados irredutíveis, pois a fórmula resolutiva apresenta um radical complexo, e na verdade há três raízes reais. Dessa forma, qual das três raízes -2, $1+\sqrt{3}$ e $1-\sqrt{3}$ é igual a $x=\sqrt[3]{2+2i}+\sqrt[3]{2-2i}$?

Podemos começar pelo seguinte raciocínio: quando z é um número complexo, o símbolo $\sqrt[3]{z}$ significa qualquer número cujo cubo seja igual a z. Com exceção de $z=0$, há sempre três números complexos cujo cubo é z. Por exemplo, as raízes cúbicas da unidade são: 1, $\alpha=(-1+i\sqrt{3})/2$ e $\alpha^2=(-1-i\sqrt{3})/2$. Dado w como uma das raízes cúbicas de z, as outras duas são $\alpha\cdot w$ e $\alpha^2\cdot w$, onde $\alpha=(-1+i\sqrt{3})/2$.

Portanto, na expressão $x=\sqrt[3]{2+2i}+\sqrt[3]{2-2i}$, que nos leva a uma raiz da equação $x^3-6x-4=0$, cada radical tem três valores. Temos: $x=u+v$, com $uv=p/3=-2$, e logo $v=-2/u$. Isso significa que, quando atribuímos um dos três valores para u, o valor correspondente de v é encontrado.

Como, então, calcular $\sqrt[3]{2+2i}$ e $\sqrt[3]{2-2i}$?

Usando a notação $e^{i\phi}=\cos\phi+i\,\mathrm{sen}\,\phi$, temos:

$$2+2i=\sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Substituindo em $\sqrt[3]{2+2i}$, temos:

$$u_1=\sqrt[3]{2+2i}=\sqrt[3]{\sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt[6]{8}\cdot e^{i\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}\left(\cos 15^\circ+i\,\mathrm{sen}\,15^\circ\right).$$

Calculando v_1, pela fórmula, temos:

$$v_1=u_1^2=\frac{2}{|u_1|^2}\cdot\overline{u_1}=\sqrt{2}\left(cos 15^\circ-i\,\mathrm{sen}\,15^\circ\right).$$

Logo, uma das raízes da equação é:

$$x_1=u_1+v_1=2\sqrt{2}\cdot\cos 15^\circ=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=1+\sqrt{3}.$$

Se trabalharmos com $e^{i\frac{3\pi}{4}}=\cos 135^\circ-i\,\mathrm{sen}\,135^\circ$, obteremos a raiz -2 e, ainda, se trabalharmos com $e^{i\frac{-7\pi}{12}}=\cos 105^\circ-i\,\mathrm{sen}\,105^\circ$ como raiz cúbica de $e^{i\frac{\pi}{4}}$, obteremos a terceira raiz, que é $1-\sqrt{3}$. Veja a Figura 4.

Após a discussão dos exemplos anteriores, concluímos que:

- se $\Omega=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}>0$, então a equação possuirá três raízes distintas, sendo uma delas um número real e as outras duas dois números complexos conjugados;
- se $\Omega=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}<0$, então a equação possuirá três raízes reais distintas;

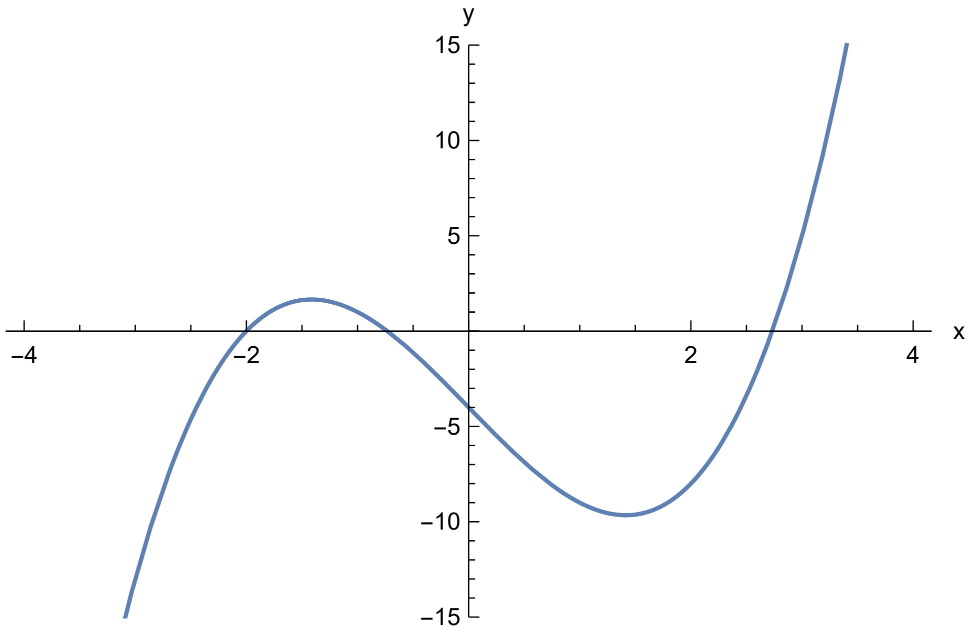


Figura 4 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x - 4$

- se $\Omega = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, então a equação possuirá três raízes reais, sendo uma delas raiz dupla.

5.4 Raízes da equação polinomial de 4° grau

Pensaremos de forma análoga à demonstração da fórmula da equação de terceiro grau de acordo com (MOREIRA, 1994) para demonstrarmos a fórmula da equação de quarto grau.

Considerando as raízes x_1, x_2 e x_3 da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e estabelecendo as relações de Girard entre essas raízes e os coeficientes a, b, c e d, temos:

- $S = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$;
- $S_d = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$;
- $P = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$.

Dividindo os coeficientes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ por a, obtemos

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Das relações acima: $S = -b/a$, $S_d = c/a$ e $P = -d/a$, chegamos em $x^3 - Sx^2 + S_dx - P = 0$.

A partir daqui, procuraremos o valor da expressão

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3},$$

relacionando os fatos apresentados acima:

$$\begin{aligned}
y^2 &= (\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3})^2 \;\Rightarrow \\
y^2 &= x_1+x_2+x_3+2\,(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_2x_3}) \;\Rightarrow \\
y^2 &= S+2\,(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_2x_3}) \;\Rightarrow \\
\frac{y^2-S}{2} &= (\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_2x_3}) \;\Rightarrow \\
\left(\frac{y^2-S}{2}\right)^2 &= (\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_2x_3})^2 \;\Rightarrow \\
\left(\frac{y^2-S}{2}\right)^2 &= x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+2\sqrt{x_1x_2x_3}\,(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{y^2-S}{2}\right)^2 = S_d+2\sqrt{P}\cdot y \;\Rightarrow \\
&\left(y^2-S\right)^2 = 4(S_d+2\sqrt{P}\cdot y) \;\Rightarrow \\
&y^4-2y^2S+S^2 = 4S_d+8\sqrt{P}\cdot y \;\Rightarrow \\
&y^4-2Sy^2-8\sqrt{P}\cdot y+S^2-4S_d = 0.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Considerando a equação $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, vamos substituir x por $y+t$:

$$\begin{aligned}
&(y+t)^4+a(y+t)^3+b(y+t)^2+c(y+t)+d=0 \;\Rightarrow \\
&(y^4+4y^3t+6y^2t^2+4yt^3+t^4)+a(y^3+3y^2t+3yt^2+t^3) \\
&\qquad\qquad +b(t^2+2yt+t^2)+c(y+t)+d=0 \;\Rightarrow \\
&y^4+(4t+a)y^3+(6t^2+3at)y^2+(4t^3+3at^2+2bt+c)y \\
&\qquad\qquad +(t^4+at^3+bt^2+bt^2+ct+d)=0.
\end{aligned}$$

Agora, vamos estabelecer uma expressão que anule o coeficiente de y^3, bastando para isso fazer $4t+a=0$, ou seja, $t=-a/4$, obtendo uma equação do tipo:

$$y^4+k_1y^2+k_2y+k_3=0,$$

na qual $k_1=6t^2+3at$, $k_2=4t^3+3at^2+2bt+c$ e $k_3=t^4+at^3+bt^2+bt^2+ct+d$.

Comparando com a última equação de (5.4), S, P e S_d são tais que

$$\begin{aligned}
&-2S=k_1, \qquad -8\sqrt{P}=k_2 \qquad \text{e} \qquad S^2-4S_d=k_3 \;\Rightarrow \\
&S=-\frac{k_1}{2}, \qquad P=\left(\frac{k_2}{8}\right)^2 \qquad \text{e} \qquad S_d=\frac{S^2-k_3}{4}=\frac{k_1^2-4k_3}{16}.
\end{aligned}$$

Substituindo-os na equação $x^3-Sx^2+S_dx-P=0$, temos:

$$x^3-\left(-\frac{k_1}{2}\right)x^2+\left(\frac{k_1^2-4k_3}{16}\right)x-\left(\frac{k_2}{8}\right)^2=0,$$

e obtemos x_1, x_2 e x_3, que são as raízes de $x^3 - Sx^2 + S_d x - P = 0$.

Logo, $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$ satisfaz

$$y^4 + k_1 y^2 + k_2 y + k_3 = 0.$$

Para solucionar a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, é suficiente diminuir $a/4$ das raízes de $y^4 + k_1 y^2 + k_2 y + k_3 = 0$.

Sabemos que cada raiz quadrada pode assumir dois valores complexos, mas a equação $\sqrt{P} = -k_2/8$ impõe que o produto das raízes deve ser $-k_2/8$. Pela fórmula acima calculamos as quatro raízes de $y^4 + k_1 y^2 + k_2 y + k_3 = 0$, que somadas a $t = -a/4$, obtemos as quatro raízes de $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Exemplo 5.4.1. Resolver em, $\mathbb{C}$, a equação $x^4 + 4x^3 - 24x^2 + 24x - 4 = 0$.

Primeiramente vamos substituir x por $y - a/4 = y - 4/4 = y - 1$ para, em seguida, anular o coeficiente de y^3 e obter uma equação do tipo: $y^4 + k_1 y^2 + k_2 y + k_3 = 0$.

Assim,

$$\begin{aligned}
&(y-1)^4 + 4(y-1)^3 - 24(y-1)^2 + 24(y-1) - 4 = 0 \Rightarrow \\
&(y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1) + 4(y^3 - 3y^2 + 3y - 1) \\
&\qquad - 24(y^2 - 2y + 1) + 24(y-1) - 4 = 0 \Rightarrow \\
&(y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1) + (4y^3 - 12y^2 + 12y - 4) \\
&\qquad - (24y^2 - 48y + 24) + (24y - 24) - 4 = 0 \Rightarrow \\
&y^4 - 30y^2 + 80y - 55 = 0.
\end{aligned}$$

De acordo com o método demonstrado, temos: $k_1 = -30$, $k_2 = 80$ e $k_3 = -55$, e calculando as raízes dessa equação do terceiro grau, segue que:

$$\begin{aligned}
&x^3 - \left(-\frac{k_1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{k_1^2 - 4k_3}{16}\right)x - \left(\frac{k_2}{8}\right)^2 = 0 \Rightarrow \\
&x^3 - \left(-\frac{-30}{2}\right)x^2 + \frac{(-30)^2 - 4.(-55)}{16}x - \left(\frac{80}{8}\right)^2 = 0 \Rightarrow \\
&x^3 - (15)x^2 + (70)x - (100) = 0 \Rightarrow \\
&x^3 - 15x^2 + 70x - 100 = 0.
\end{aligned}$$

Pesquisando raízes racionais pelos divisores de 100, encontramos 5 como raiz. A partir daí, dividindo o polinômio $x^3 - 15x^2 + 70x - 100$ por $x - 5$, obtemos o polinômio $x^2 - 10x + 20$, e pela fórmula de Bháskara:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 80}}{2} \\
&= \frac{10 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 5 \pm \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Como $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$, e subtraindo $a/4 = 4/4 = 1$ de cada raiz auxiliar, temos as quatro raízes da equação:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -1 + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} = -1 + \sqrt{5} + \sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}},\\
y_2 &= -1 + \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} = -1 + \sqrt{5} - \sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}},\\
y_3 &= -1 - \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} = -1 - \sqrt{5} + \sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}},\\
y_4 &= -1 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} = -1 - \sqrt{5} - \sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}.
\end{aligned}
$$

Observamos que o produto de sinais deve ser sempre $-k_2/8$, que neste caso é igual a -10. Veja o comportamento da curva na Figura 5.

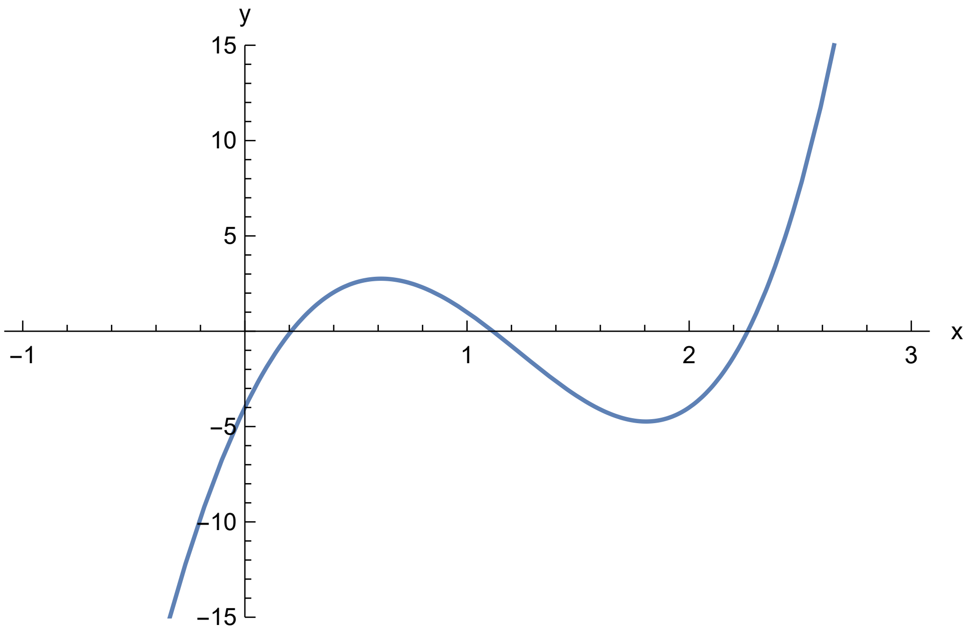


Figura 5 – Gráfico da função $f(x) = x^4 + 4x^3 - 24x^2 + 24x - 4$

Exemplo 5.4.2. Resolver em, $\mathbb{C}$, a equação $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 32x + 64 = 0$.

Primeiramente vamos substituir x por $y - a/4 = y - 4/4 = y - 1$ para, em seguida, anular o coeficiente de y^3 e obter uma equação do tipo: $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
&(y-1)^4 + 4(y-1)^3 + 8(y-1)^2 + 32(y-1) + 64 = 0 \Rightarrow\\
&(y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1) + 4(y^3 - 3y^2 + 3y - 1)\\
&\qquad + 8(y^2 - 2y + 1) + 32(y-1) + 64 = 0 \Rightarrow\\
&(y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1) + (4y^3 - 12y^2 + 12y - 4)\\
&\qquad + (8y^2 - 16y + 8) + (32y - 32) + 64 = 0 \Rightarrow\\
&y^4 + 2y^2 + 24y + 37 = 0.
\end{aligned}
$$

De acordo com o método demonstrado, temos: $k_1 = 2$, $k_2 = 24$ e $k_3 = 37$, e calculando as raízes dessa equação do terceiro grau, segue que:

$$
\begin{aligned}
&x^3 - \left(-\frac{k_1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{k_1^2 - 4k_3}{16}\right)x - \left(\frac{k_2}{8}\right)^2 = 0 \Rightarrow \\
&x^3 - \left(-\frac{2}{2}\right)x^2 + \frac{(-2)^2 - 4(37)}{16}x - \left(\frac{24}{8}\right)^2 = 0 \Rightarrow \\
&x^3 - (-1)x^2 + (-9)x - (+9) = 0 \Rightarrow \\
&x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0.
\end{aligned}
$$

Pesquisando raízes racionais pelos divisores de -9 (± 1, ± 3, ± 9), encontramos -1 como raiz. A partir daí, dividindo o polinômio $x^3 + x^2 - 9x - 9$ por $x + 1$, obtemos o polinômio $x^2 - 9$, cujas raízes são ± 3.

Como $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$, e subtraindo $a/4 = 4/4 = 1$ de cada raiz auxiliar, temos as quatro raízes da equação:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -1 + \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} = -1 + \sqrt{-1} + \sqrt{-3} + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}), \\
y_2 &= -1 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} = -1 - \sqrt{-1} - \sqrt{-3} - \sqrt{3} = -1 - \sqrt{3} + i(-1 - \sqrt{3}), \\
y_3 &= -1 - \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} = -1 - \sqrt{-1} + \sqrt{-3} + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3}), \\
y_4 &= -1 - \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} = -1 - \sqrt{-1} - \sqrt{-3} + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3} + i(-1 - \sqrt{3}).
\end{aligned}
$$

Observamos que o produto de sinais deve sempre $-k_2/8 = -24/8$, no caso, igual a -3. Confira o comportamento da curva na Figura 6.

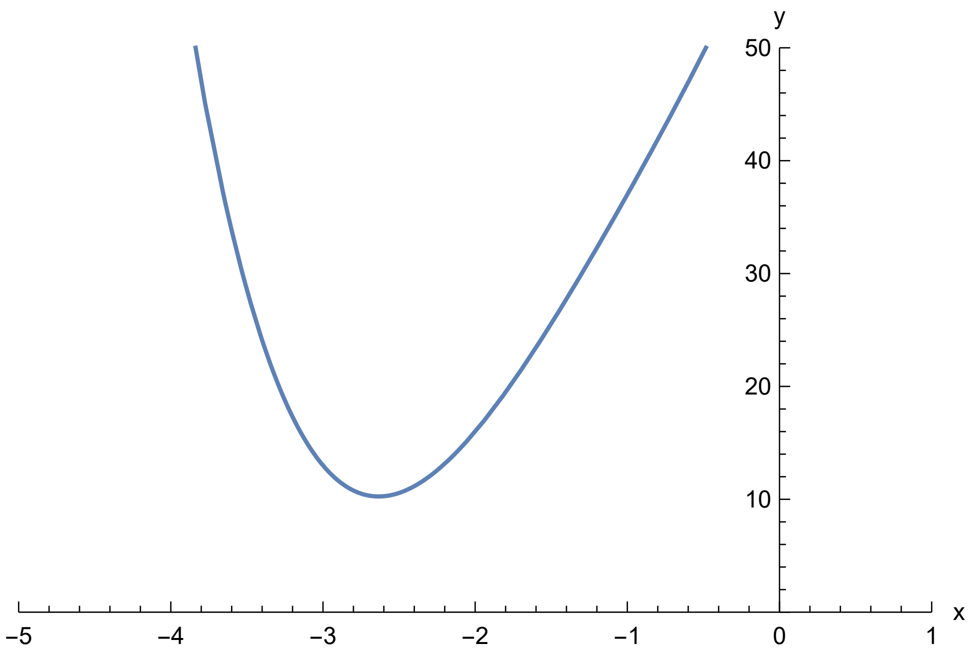


Figura 6 – Gráfico da função $f(x) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 32x + 64$

Vimos anteriormente, que as equações de 2°, 3° e 4° graus são solucionadas por radicais.

Em 1750, Euler tentou reduzir uma equação de 5° a uma de 4° grau, para resolvê-la, mas não teve sucesso.

Em 1770, Lagrange analisou todos os métodos de resolução para equações de 2°, 3° e 4° graus, numa tentativa de observar como os métodos foram desenvolvidos e como poderiam ser generalizados, mas também não obteve êxito em sua análise.

Em 1803, 1805 e 1813, Paolo Ruffini tentou pela primeira vez provar que uma equação de 5° grau não poderia ser resolvida por meios algébricos.

Em 1824, Niels Abel escreveu um artigo, mostrando que algumas equações de 5° grau eram solucionadas por radicais como $x^5 - 1 = 0$, pois tendo $x = 1$ como raiz, as outras poderiam ser encontradas por extração de raiz quadrada. Nessa mesma época, Abel levantou a questão: "Quais equações de grau maior que quatro poderiam ser resolvidas por radicais?"

Abel morreu em 1829, aos 26 anos de idade, sem solucionar o problema por ele levantado. Após Abel, um grande matemático chamado Evariste Galois, contribuiu com a importante Teoria dos Grupos, da qual deduziu a impossibilidade de resolução das equações de grau maior que quatro, por radicais (HERSTEIN, 1970).

CAPÍTULO 6

ATIVIDADES NA ESCOLA

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996) a Matemática, no seu papel formativo, contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e para a aquisição de atitudes, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas, proporcionando confiança e desprendimento para analisar, enfrentar situações novas e propiciar a formação de uma visão ampla e científica da realidade e o desenvolvimento da criatividade.

O trabalho do professor ganha uma nova exigência que é a de permitir que o aluno aprenda continuamente em um processo não mais solitário. O indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, juntas, complementar-se-ão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos (BRASIL, 1996).

A seleção das atividades a serem propostas de acordo com os PCNEMs (BRASIL, 1999) deve garantir espaço para a diversidade de opiniões, de ritmos de aprendizagem e outras diferenças pessoais. O aspecto desafiador das atividades deve estar presente todo o tempo, permitindo o engajamento e a continuidade desses alunos no processo de aprender. Um importante recurso para o desenvolvimento das competências é o trabalho em grupo. Essa modalidade de trabalho é valiosa para várias das competências que se deseja desenvolver, momento no qual, os alunos, além de aprenderem uns com os outros, precisam organizar o que sabem para se fazerem entender e, para isso, usam a linguagem que está sendo aprendida.

Se há uma unanimidade, pelo menos no plano dos conceitos entre educadores para as *Ciências* e a *Matemática*, é quanto à necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo. Os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para o qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão, aprender a respeitar e a fazer-se respeitar; dando ao aluno oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação de contradições; criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar; valorizando as atividades coletivas que propiciem a discussão e a elaboração conjunta de ideias e de práticas; desenvolvendo atividades lúdicas, nas quais o aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento e não somente pelos outros participantes (BRASIL, 1996).

Analisando as colocações da Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1996 e dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio de 2007 (PCN+) referentes ao processo de ensino-aprendizagem para elaborar a atividade de aplicação em sala de aula, pensamos em algo que atendesse a tais colocações. Além disso, a atividade teria como principal objetivo motivar o aluno a resgatar o hábito de estudar, de revisar conteúdos e de se preparar adequadamente para uma avaliação de forma descontraída e eficiente.

Então, definimos uma atividade de aplicação que envolve um recurso computacional inserida em um jogo matemático. A atividade propõe aos alunos estudarem juntos, motivando os que têm mais facilidade de aprendizagem apoiar e encorajar os demais. A atividade ainda promove um papel social bastante significativo entre os alunos, uma vez que estabelece uma relação bem próxima de parceria baseada na confiança, no respeito e na disponibilidade de compartilhar o conhecimento sobre polinômios e equações polinomiais uns com os outros.

O jogo matemático constitui uma forma interessante de propor problemas, pois permite que esse seja apresentado de modo atrativo, favorecendo a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e a busca de soluções. Ele propicia a simulação de situações-problema que exigem soluções autênticas e imediatas no planejamento das ações. O jogo também possibilita a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações e ações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas, fortalecendo o trabalho em equipe.

A atividade *"Construindo e interpretando gráficos de funções polinomiais com o auxílio do computador"* de (IEZZI *et al.*, 2013), vai além de encontrar as raízes de equações polinomiais, pois foi elaborada para oferecer ao aluno uma utilização adequada do recurso computacional. Além disso, a LDB (BRASIL, 1996) sugere métodos de aprendizado ativos, em que os alunos se tornem protagonistas do processo educacional, não pacientes deste, quer se ter a certeza de que o conhecimento foi de fato apropriado pelos alunos, ou mesmo elaborado por eles. Sugere, também, educar para se adquirir iniciativa, pois a cidadania que se quer construir implica participação e não se realiza na passividade. Portanto, isto poderá ser trabalhado na referida atividade, pois o grupo de alunos receberá uma equação polinomial e a inserirá no programa computacional que mostrará o seu comportamento no gráfico e, a partir daí, surgirão as primeiras iniciativas para resolução e conclusão dos problemas.

Baseados nesse contexto, o aluno exercitará a habilidade de compreender enunciados, selecionar e interpretar informações relativas ao problema que ao discutir ideias e produzir argumentos convincentes, selecionando estratégias de resolução do problema. Exercitará, também, a habilidade de realizar a crítica do resultado adequado numa situação de jogo na qual o propósito também é o de vencer. Além de considerar que o estudante aprende, por meio da interiorização do que percebe e faz, o que significa utilizar amplamente os sentidos.

6.1 Aplicação

6.1.1 Atividade de aplicação

Fixando polinômios e equações polinomiais: contextos, aplicações, interdisciplinaridade, construção e interpretação de gráficos de funções polinomiais (de graus 2, 3 e 4) com auxílio do computador.

- Objetivos
  - Desafiar o grupo de alunos e promover competição saudável.
  - Resolver situações-problema relacionadas ao conteúdo de função polinomial de segundo grau.
  - Resolver situações-problema relacionadas ao conteúdo de polinômios e equações polinomiais.
  - Usar recursos tecnológicos para visualização e análise de gráficos de funções polinomiais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ de grau maior do que ou igual a 2.
  - Resolver em $\mathbb{C}$ equações do tipo $f(x) = 0$ (f é uma função polinomial), a partir de alguma informação extraída de seu gráfico.
  - Auxiliar na compreensão do significado da intersecção do gráfico de uma função com os eixos coordenados.
- Material
  - Cartolina contendo a situação-problema.
  - Papel, caneta, canetinhas, pincel, lápis, borracha e régua.
  - Livro didático e caderno de atividades do aluno.
  - Computadores com o programa *Graphmatica* já instalado.
  - Retroprojetor.
- Número de aulas: 3 a 4
- Desenvolvimento
  - Dividir os 30 alunos da turma em 6 grupos de 5 e entregar a cada grupo uma tabela com o nome dos alunos. Diante do nome de cada aluno nessa tabela, relatar as descobertas, as observações e as sugestões que colaborarem e acrescentarem para a

resolução e conclusão de determinada parte da atividade para despertar a motivação e a satisfação em estudar matemática. Registrar também o procedimento de cada aluno durante a apresentação da atividade concluída para os alunos dos outros grupos. Os alunos mais citados e envolvidos na resolução serão os ganhadores do jogo.

– O recurso tecnológico utilizado é o *Graphmatica* (IEZZI *et al.*, 2013), aplicativo que permite construir representações gráficas de retas, circunferências e funções, entre outras. Para isto, a lei da função deve ser inserida no campo localizado abaixo da barra de ferramentas. Ao digitar a lei de uma função em que apareça uma potência, deve-se usar o símbolo "$\wedge$". Por exemplo, para inserir x^2, deve ser digitado $x \wedge 2$.

– Entregar para cada grupo a atividade proposta. Nesse momento, eles deverão construir e interpretar o gráfico das funções polinomiais recebidas, usando o aplicativo *Graphmatica*.

– A partir daí, com as informações obtidas no aplicativo, etapa que corresponde a compreensão do problema, os alunos deverão usá-las para a elaboração de um plano de solução das questões solicitadas, executar o plano, verificar se há coerência total e realizar os registros.

– Nesta etapa os grupos deverão se organizar para a emissão da solução. É importante não apressar os alunos, pois não é um jogo de velocidade e sim de cooperação, autoconfiança, resgate ao hábito de estudar e de instigar a curiosidade e a criatividade. As soluções deverão ser apresentadas aos alunos dos demais grupos, partindo das informações do aplicativo e em cartazes confeccionados e ao professor deverão ser entregues individualmente.

– Para finalizar, alunos e professor deverão dialogar sobre todas as etapas do jogo e apurar embasados nas anotações as colocações dos alunos que foram fundamentais para a solução da atividade e destacar esses alunos.

6.1.2 Situações-problema

Nesta seção são apresentadas as questões que compõem a atividade de aplicação.

1. (ENEM/2015) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. Abaixo está associado intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações:

   - ($T < 0$) Muito baixa,

- $(0 \leq T \leq 17)$ Baixa,
- $(17 < T < 30)$ Média,
- $(30 \leq T \leq 43)$ Alta e
- $(T > 43)$ Muito alta.

a) No *Graphmatica*, construir o gráfico da função $T(h) = -h^2 + 22h - 85$.

b) Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, como a temperatura no interior da estufa está classificada?

2. No *Graphmatica*, construir o gráfico da função $y = x^3 + 9x^2 + 28x + 30$. Em seguida, resolver os seguintes itens:

   a) Qual é o número de raízes reais dessa função?

   b) Quais são os pontos de interseção do gráfico com o eixo das abscissas? E com as ordenadas?

   c) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $f(x) = 0$, sendo $f(x) = x^3 + 9x^2 + 28x + 30$.

3. No *Graphmatica*, construir o gráfico da função $y = 6x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 9x - 2$. Em seguida, resolver os seguintes itens, baseados no gráfico:

   a) Qual é o número de raízes reais dessa função?

   b) Pesquise alguma raiz racional de f.

   c) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $f(x) = 0$, sendo $f(x) = 6x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

4. No *Graphmatica*, construir o gráfico da função $y = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$. Em seguida, resolver os seguintes itens, baseados no gráfico:

   a) Qual é o número de raízes reais dessa função?

   b) Qual é a multiplicidade da(s) raiz(es) real(is)?

   c) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $f(x) = 0$, sendo $f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$.

5. No *Graphmatica*, construir o gráfico da função $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$. Em seguida, resolver os seguintes itens, baseados no gráfico:

   a) Qual é o número de raízes reais de f?

   b) f é crescente para que valores de x?

   c) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $f(x) = 0$, sendo $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$, sabendo que uma de suas raízes é $2 - i$.

6. No *Graphmatica*, construir o gráfico da função $y = x^3 - 27x - 54$. Em seguida, resolver os seguintes itens, baseados no gráfico:

a) Qual é o número de raízes reais dessa função?

b) Qual é a multiplicidade da(s) raiz(es) real(is)?

c) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $f(x) = 0$, sendo $f(x) = x^3 - 27x - 54$.

6.2 Discussão dos resultados

A aplicação da atividade desse trabalho aconteceu no dia 07 de junho de 2017 e teve como público alvo os alunos do 3º ano do Ensino Médio, do período noturno, da ***E.E. Manoel Dias Correa***, na cidade de Itatiaiuçu/MG.

Ao longo dos meses de abril e maio, foram trabalhados em sala de aula os pré-requisitos para que os alunos tivessem condições de desenvolver o trabalho e fossem avaliados por critérios oferecidos como condição, tais como:

- Números Complexos (conjunto dos números complexos, forma algébrica de $\mathbb{Z}$, conjugado de número complexo, operações de adição, subtração e multiplicação de números complexos, quociente de dois números complexos na forma algébrica, módulo, argumento e representação gráfica);

- Polinômios (definição, coeficiente dominante, função polinomial, polinômio nulo, valor numérico, raiz, polinômios iguais ou idênticos, adição, subtração e multiplicação de polinômios, divisão de polinômios, divisões por $x - a$, Teorema do Resto, Teorema de *D'Alembert* e o dispositivo prático de *Briot-Ruffini*);

- Equações Algébricas (Teorema Fundamental da Álgebra, definição, raiz, decomposição de um polinômio em fatores do primeiro grau, raízes múltiplas, raízes complexas, pesquisa de raízes racionais e as relações entre coeficientes e raízes conhecidas como relações de *Girard* e noções da representação da função polinomial no gráfico).

Os alunos foram divididos em 6 grupos de 5 de acordo com a aptidão de cada um e observados seus níveis de aprendizagem: *avançado, intermediário e baixo rendimento*, de tal forma que os grupos se tornassem heterogêneos e alunos mais capacitados contribuíssem para a aprendizagem dos menos capacitados, num esquema de monitoria. Em seguida, receberam todo o material necessário, as questões elaboradas para compor o trabalho e foram encaminhados ao laboratório de informática para iniciarem.

O programa computacional *Graphmatica* já havia sido instalado, pois seria uma ferramenta auxiliar na resolução das atividades. Expliquei que, ao digitarem a lei de uma função em que deveria aparecer uma potência, deveriam usar o símbolo "$\wedge$". Por exemplo, para inserir x^2, deveriam digitar $x \wedge 2$. Outra instrução importante foi não deixar espaços entre números e quaisquer outros símbolos, senão o programa não geraria o gráfico, conforme podemos ver na Figura 7 do gráfico da função $f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$.

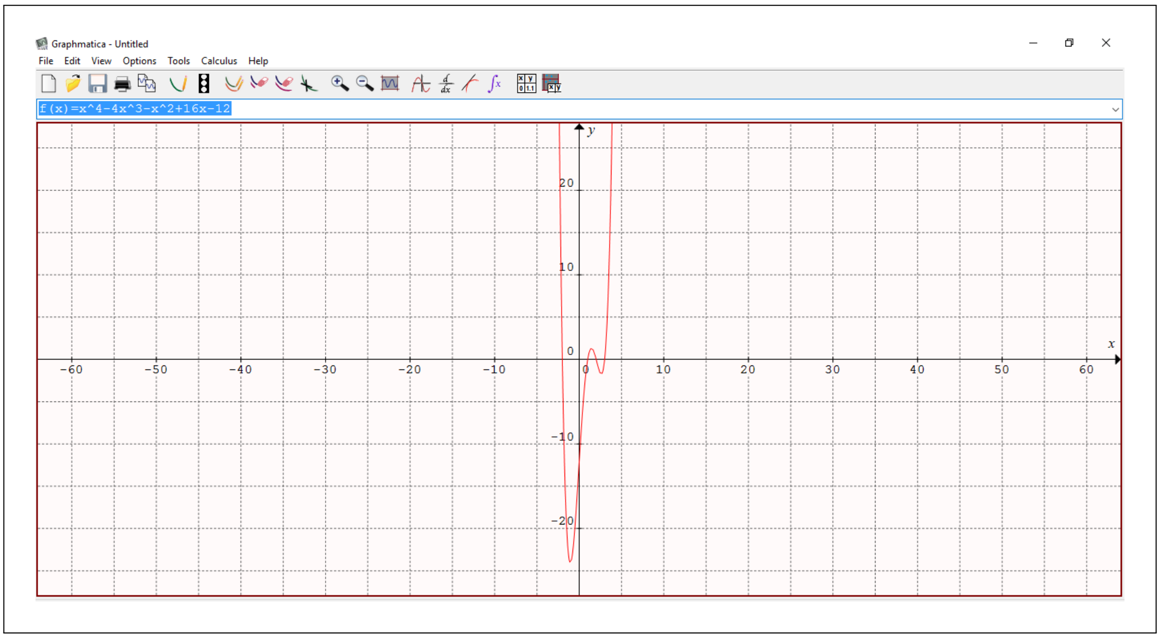


Figura 7 – Tela do *Graphmatica*

> 1) (ENEM, 2015) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. Abaixo está associado intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações:
>
> - $(T < 0)$ Muito baixa,
> - $(0 \leq T \leq 17)$ Baixa,
> - $(17 < T < 30)$ Média,
> - $(30 \leq T \leq 43)$ Alta e
> - $(T > 43)$ Muito alta.
>
> a. No *Graphmatica*, construir o gráfico da função $T(h) = -h^2 + 22h - 85$.
>
> b. Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, como a temperatura no interior da estufa está classificada?

Assim que a função polinomial $T(h) = -h^2 + 22h - 85$ da questão 1 foi digitada no programa *Graphmatica*, observamos que seu gráfico não era gerado e após algumas tentativas descobrimos que as letras T e h deveriam ser substituídas por y e x, respectivamente, pois o *Graphmatica* havia sido programado para executar com essas variáveis.

As primeiras observações do gráfico gerado foram feitas: concavidade voltada para baixo pelo fato do coeficiente dominante ser negativo, curva interceptando o eixo das abscissas em dois pontos distintos e as primeiras hipóteses para resolver o problema.

Três formas de resolução foram encontradas pelos grupos para a questão 1. Os alunos dos grupos 1, 2 e 6 usaram a forma mais simples e convencional possível: aplicaram diretamente a fórmula do y do vértice, percebendo que isto seria suficiente para calcular o deslocamento vertical que equivaleria à temperatura mais elevada pedida, como apresenta a Figura 8.

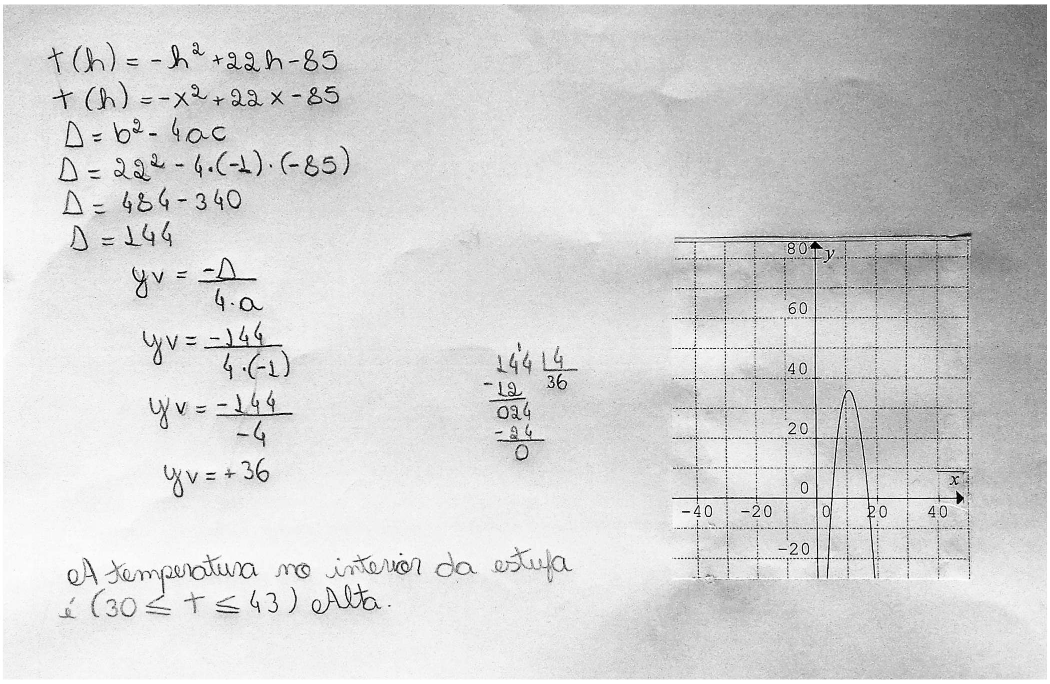


Figura 8 – Resolução de um dos alunos dos grupos 1, 2 e 6.

Dois grupos calcularam o x do vértice e, em seguida, substituíram o valor encontrado na função e a partir daí obtiveram a temperatura mais elevada, veja isto na Figura 9.

Os alunos de um dos grupos foram mais criativos ainda. Calcularam os pontos de intersecção com o eixo das abscissas, calcularam também o ponto médio entre eles, lembrando do eixo de simetria e, logo em seguida, substituíram o valor na função e encontraram o valor de T procurado, como mostra a Figura 10.

> 2) No *Graphmatica*, construir o gráfico da função $y = x^3 + 9x^2 + 28x + 30$. Em seguida, resolver os seguintes itens:
>
> a. Qual é o número de raízes reais dessa função?
>
> b. Quais são os pontos de interseção do gráfico com o eixo das abscissas? E com as ordenadas?
>
> c. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $f(x) = 0$, sendo $f(x) = x^3 + 9x^2 + 28x + 30$.

A questão 2 tratou-se de uma função polinomial de terceiro grau que, igualada a zero,

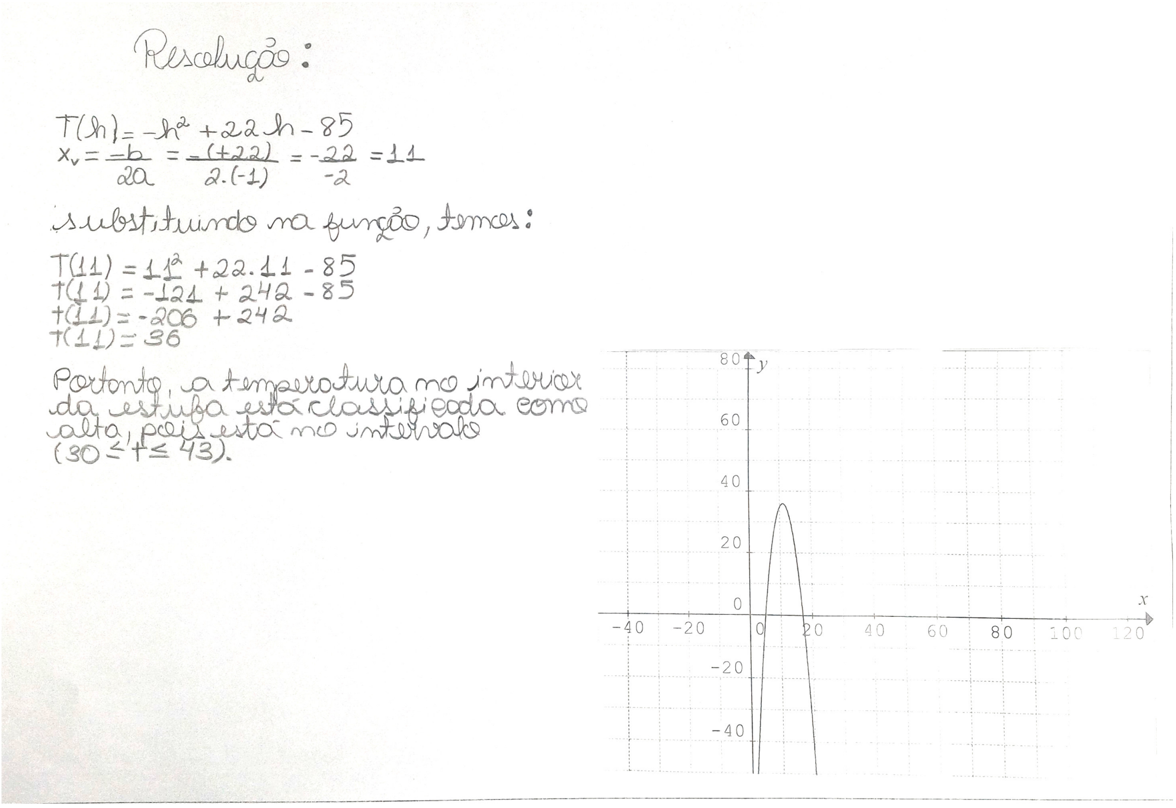


Figura 9 – Resolução de um dos alunos dos grupos 4 e 5.

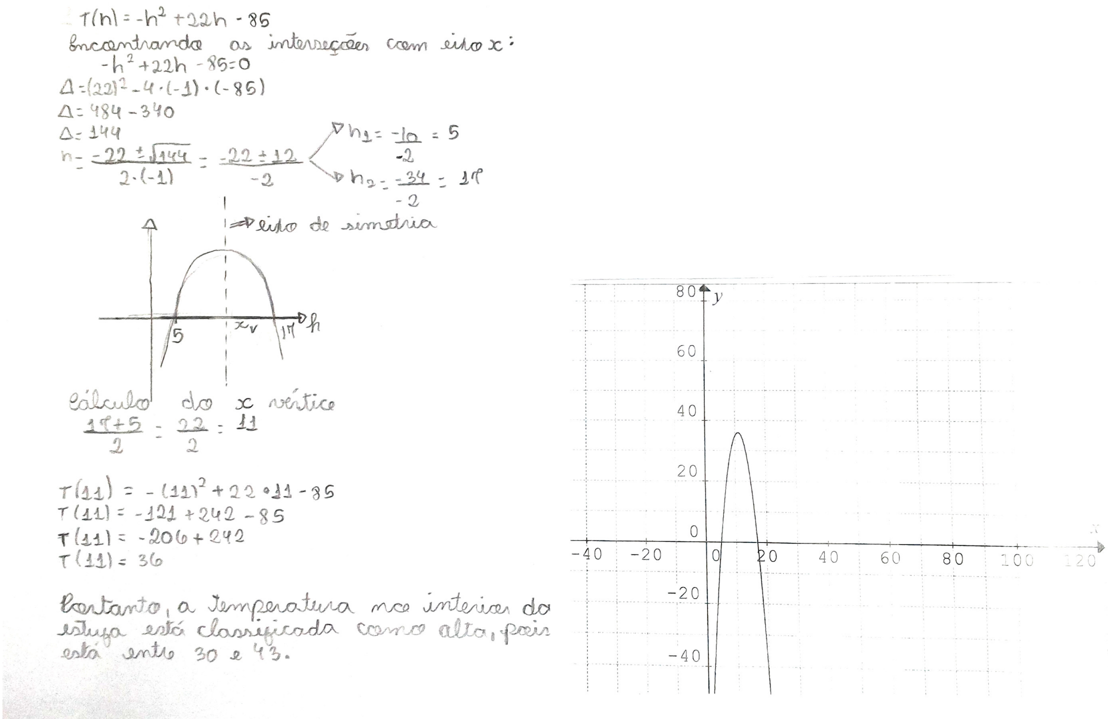


Figura 10 – Resolução de um aluno do grupo 3.

formava uma equação algébrica de grau três. Assim que eles inseriram a função no *Graphmatica* perceberam que a função possuía apenas uma raiz real, pois o gráfico de f interceptava o eixo x uma única vez e tendia para mais e para menos infinito. Ao responderem qual era o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das abscissas não apresentaram dúvida. Alguns alunos de cada grupo apresentaram dúvida com relação à intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas, mas compreenderam qual era no momento em que sugeri para eles zerarem o x da função e analisarem o resultado obtido. A partir daí, a maioria concluiu que o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas podia ser facilmente obtido observando o termo independente da função.

Encontraram as raízes da equação $f(x) = 0$ com facilidade ao perceberem que o gráfico de f interceptava o eixo x em $x = -3$. Cinco grupos utilizaram o dispositivo prático de *Briot-Ruffini* para a resolução da equação, conforme mostra a Figura 11.

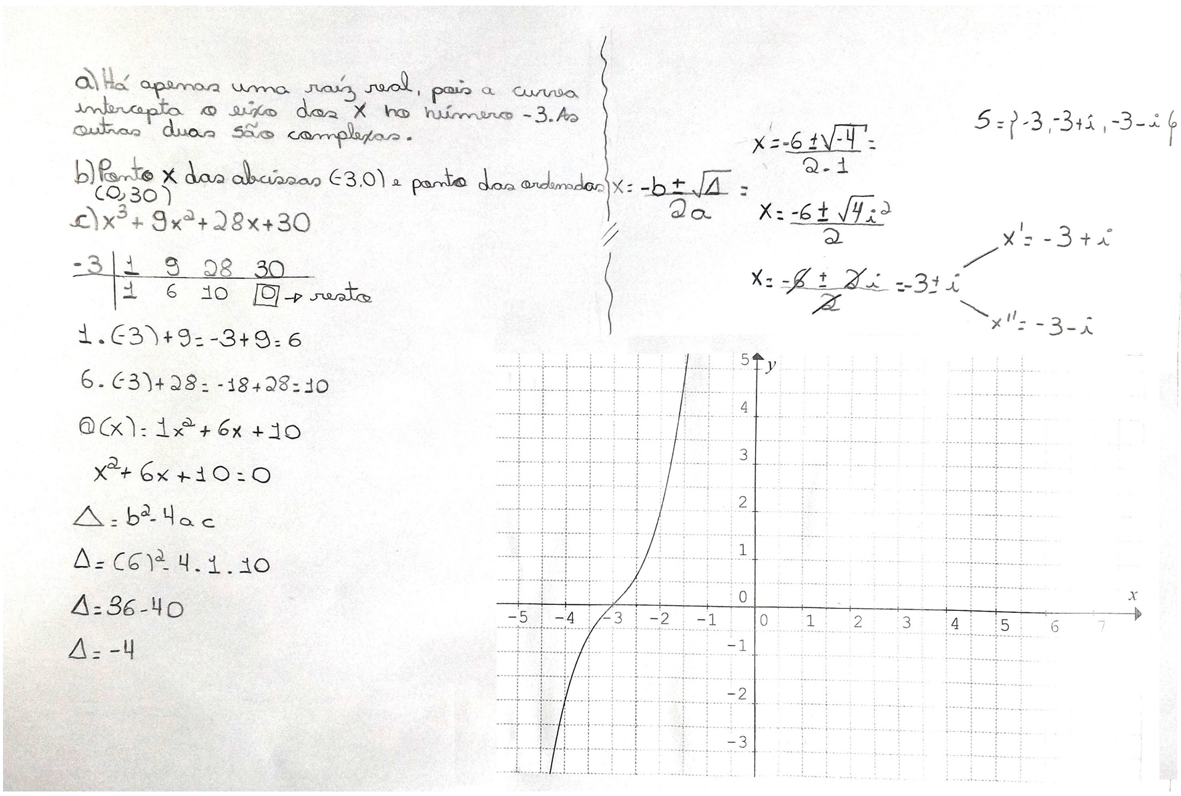


Figura 11 – Resolução de um dos alunos de cinco grupos.

Já os integrantes do sexto grupo dividiram o polinômio $x^3 + 9x^2 + 28x + 30$ por $x + 3$ para obter o polinômio quociente de grau dois. E ambos finalizaram a questão, utilizando o cálculo do discriminante (Δ) e a fórmula de *Bháskara*, como mostra a Figura 12.

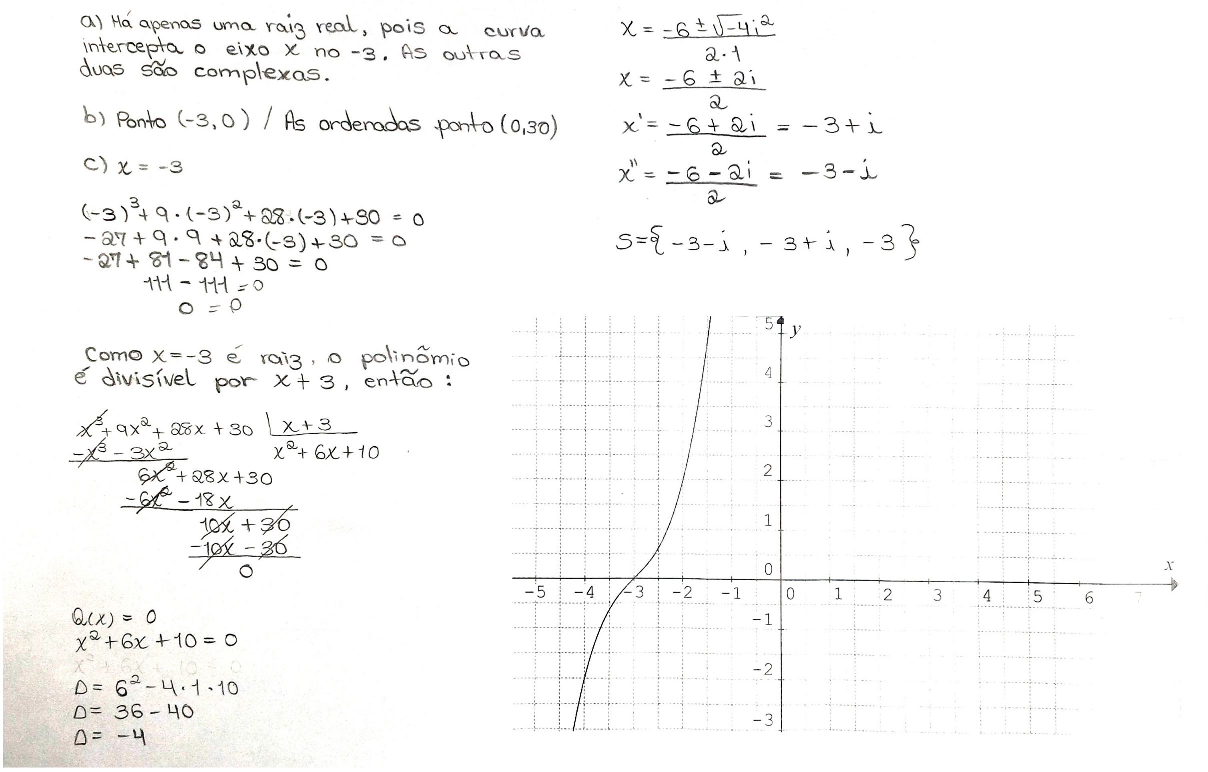


Figura 12 – Resolução de um aluno de um grupo.

3) No *Graphmatica*, construir o gráfico da função $y = 6x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 9x - 2$. Em seguida, resolver os seguintes itens, baseados no gráfico:

a. Qual é o número de raízes reais dessa função?

b. Pesquise alguma raiz racional de f.

c. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $f(x) = 0$, sendo $f(x) = 6x^4 - 11x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

O mesmo processo ocorreu na resolução da questão 3. Inseriram a função no *Graphmatica* e ao visualizarem o gráfico gerado, todos foram unânimes ao perceberem que a função possuía quatro raízes essencialmente reais, pois o gráfico interceptava o eixo x quatro vezes. No momento da pesquisa de alguma raiz racional, os integrantes de dois grupos concluíram que existiam duas raízes na forma fracionária, pois o gráfico interceptava o eixo x duas vezes entre os números inteiros 0 e 1. Essas raízes foram encontradas resolvendo a equação $6x^2 - 5x + 1 = 0$, obtida após aplicar o dispositivo prático de *Briot-Ruffini* duas vezes utilizando as raízes $x = -1$ e $x = 2$, exibidas na representação gráfica da Figura 13.

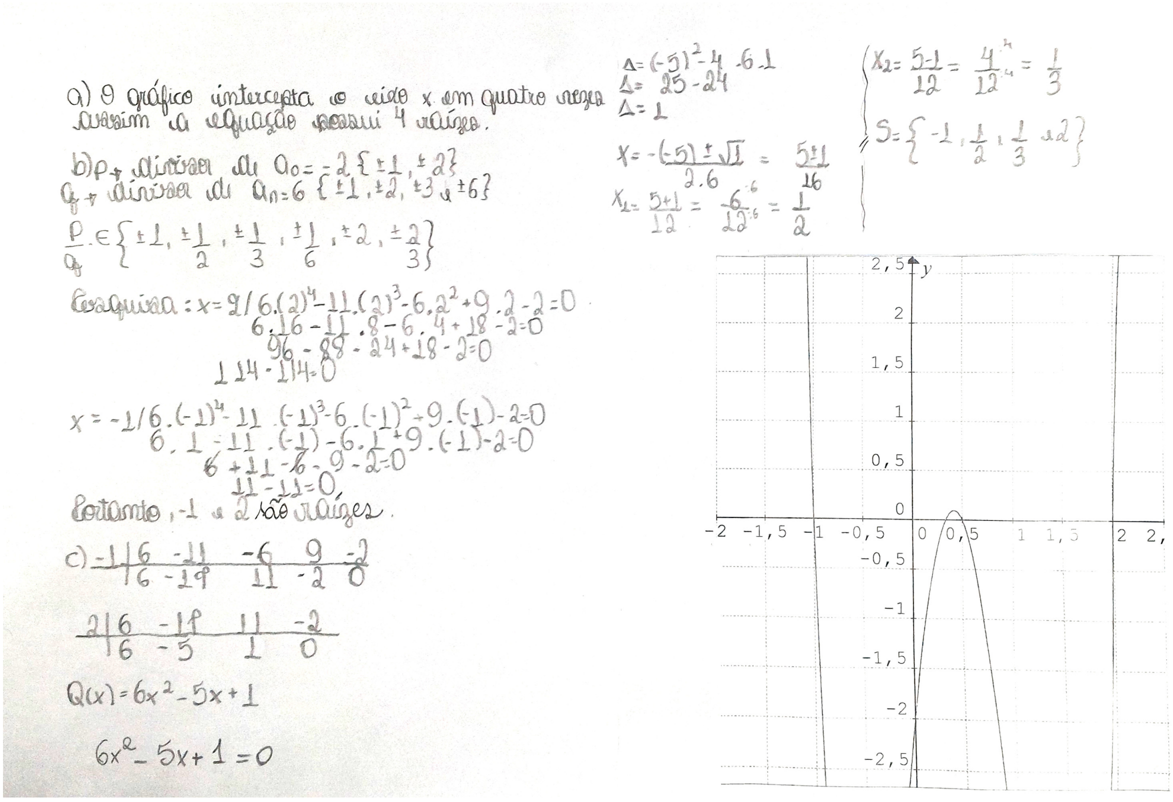


Figura 13 – Resolução de uma aluna envolvida no trabalho

> 4) No *Graphmatica*, construir o gráfico da função $y = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$. Em seguida, resolver os seguintes itens, baseados no gráfico:
>
> a. Qual é o número de raízes reais dessa função?
>
> b. Qual é a multiplicidade da(s) raiz(es) real(is)?
>
> c. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $f(x) = 0$, sendo $f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$.

Durante a resolução da questão 4, os alunos encontravam-se bastante familiarizados com o programa e resolveram a atividade sem grandes dificuldades. Analisando os registros feitos por eles, percebe-se que souberam concluir com bastante convicção que havia quatro raízes reais: sendo uma negativa pela interseção do gráfico com o eixo dos x à esquerda de zero e três positivas pela intersecção do gráfico com o eixo dos x à direita de zero. Realizaram a pesquisa das possíveis raízes racionais e iniciaram as substituições até encontrarem duas, pois sabiam que como a função possuía grau quatro, duas raízes seriam suficientes para reduzirem a um polinômio de grau dois para encontrarem as outras raízes pela fórmula de *Bháskara*, conforme mostra a Figura 14.

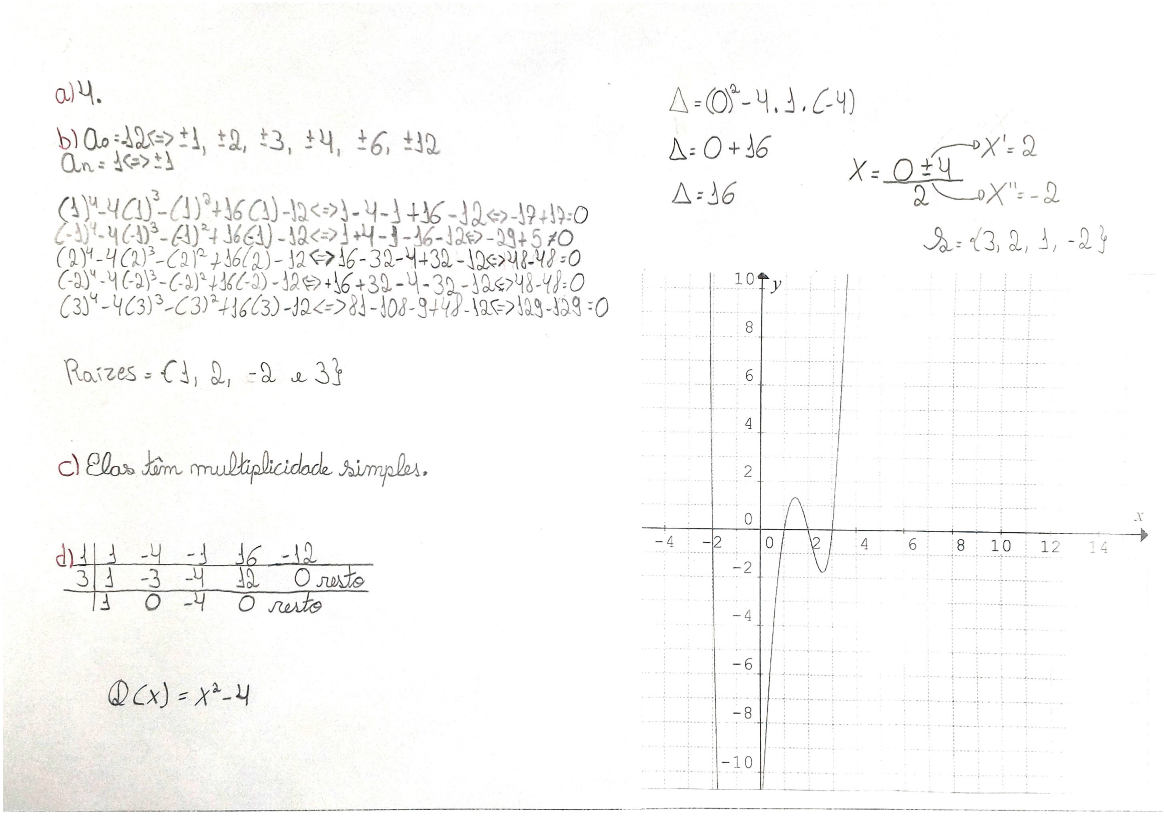


Figura 14 – Resolução de um dos 30 alunos

> 5) No *Graphmatica*, construir, o gráfico da função $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$. Em seguida, resolver os seguintes itens, baseados no gráfico:
>
> a. Qual é o número de raízes reais de f?
>
> b. f é crescente para que valores de x?
>
> c. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $f(x) = 0$, sendo $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$, sabendo que uma de suas raízes é $2 - i$.

Na questão 5, os alunos encontraram um grau de dificuldade maior com relação às atividades anteriores, pois de imediato perceberam que não havia interseção com o eixo x e como consequência não havia raízes reais, apenas raízes complexas. Foi cometido por alguns grupos um pequeno equívoco quanto ao intervalo de números que tornava a função crescente ao considerarem que isto seria para $x \geq 1$, o que não é correto, pois quando $x = 1$ a função muda de sentido deixando de ser decrescente para tornar-se crescente. Assim, a resposta apropriada seria para valores de $x > 1$. Para os integrantes desses grupos esse equívoco foi esclarecido após a correção do trabalho, pois durante o mesmo não houve nenhum questionamento.

Iniciaram o dispositivo prático de *Briot-Ruffini* utilizando a raiz $2 - i$ dada no enunciado da questão e, logo em seguida, utilizaram o conjugado dela: $2 + i$, pois sabiam que as raízes complexas aparecem aos pares. A Figura 15 mostra que ao trabalharem com o polinômio obtido no quociente da divisão puderam comprovar esse fato, pois encontraram os outros dois pares: i e $-i$.

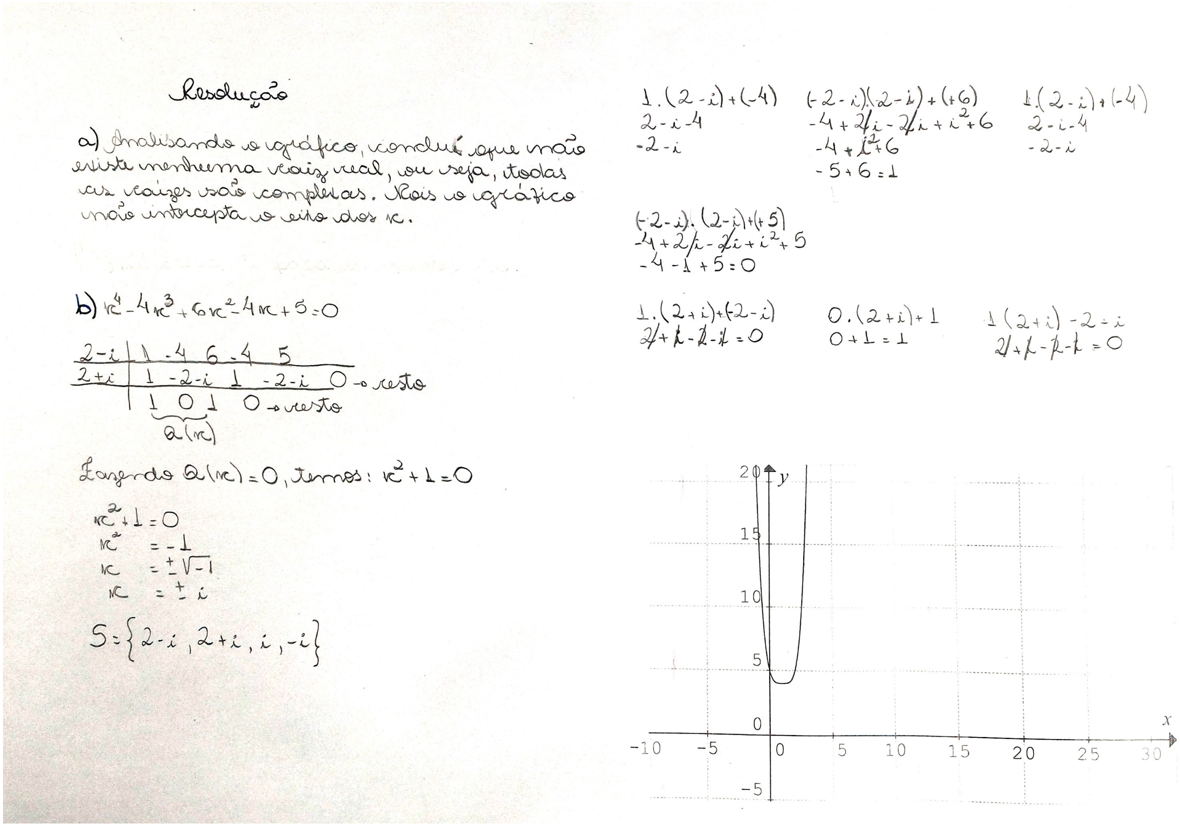


Figura 15 – Resolução de um dos 30 alunos

> 6) No *Graphmatica*, construir o gráfico da função $y = x^3 - 27x - 54$. Em seguida, resolver os seguintes itens, baseados no gráfico:
>
> a. Qual é o número de raízes reais dessa função?
>
> b. Qual é a multiplicidade da(s) raiz(es) real(is)?
>
> c. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $f(x) = 0$, sendo $f(x) = x^3 - 27x - 54$.

O processo de resolução da questão 6 foi assimilado pelos melhores dos grupos. Assim que o *Graphmatica* exibiu o gráfico da função e estes, empolgados, explicaram para os demais com certa facilidade e convicção o seguinte: a função polinomial em questão é de grau três e o gráfico apresenta apenas duas interseções com o eixo x, então não há como ocorrer duas raízes reais e uma complexa. A única possibilidade é uma das raízes ter multiplicidade dois, já que não se pode encontrar um par de complexos (não reais) conjugados. Todos, após tentarem definir qual era a raiz dupla e não terem sucesso, decidiram aplicar primeiro o dispositivo prático de *Briot-Ruffini* e depois utilizarem a fórmula de *Bháskara*. Assim feito, descobriram que $x = -3$ era a raiz dupla e $x = 6$ era raiz simples, como podemos ver na Figura 16.

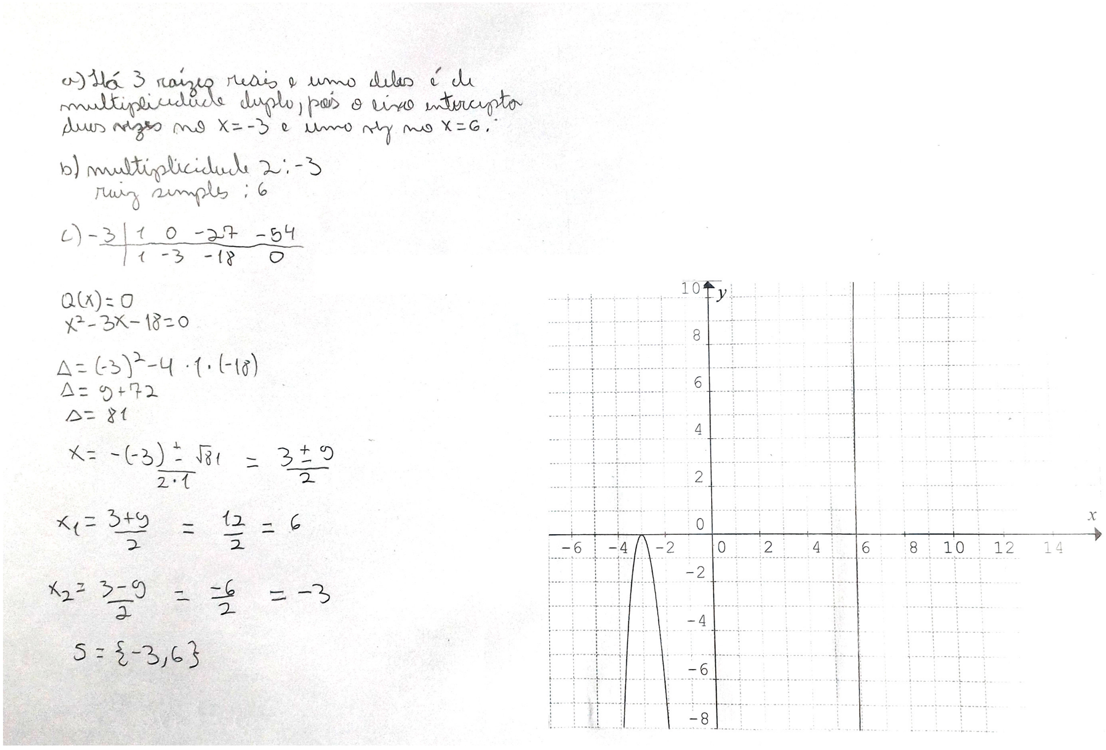


Figura 16 – Resolução de um dos 30 alunos

6.2.1 Situação da turma

As seis questões da atividade de aplicação foram avaliadas em 10 pontos; sendo 1,5 ponto para cada questão resolvida corretamente e 1 ponto destinado à participação e à integração ao grupo. As notas obtidas foram organizadas em quatro róis disjuntos e dispostas na Tabela 2, mostrada abaixo:

(i) **7,5 - 7,6 - 7,6 - 7,6 - 7,7**

(ii) **7,8 - 7,8 - 8,0 - 8,0 - 8,1 - 8,1 - 8,2 - 8,2 - 8,3 - 8,3**

(iii) **8,5 - 8,6 - 8,6 - 8,7 - 8,8 - 8,8 - 8,8 - 8,8 - 8,8 - 8,8 - 8,8 - 8,8**

(iv) **9,0 - 9,0 - 9,3**

Tabela 2 – Tabela de distribuição de frequências das notas obtidas na realização das questões

Classe (notas dos alunos)	F	F%
[7,5; 7,8[	5	17%
[7,8; 8,4[	10	33%
[8,4; 9,0[	12	40%
[9,0; 9,3]	3	10%

As notas foram analisadas, tabeladas e o desempenho dos alunos está apresentado no gráfico de colunas da Figura 17.

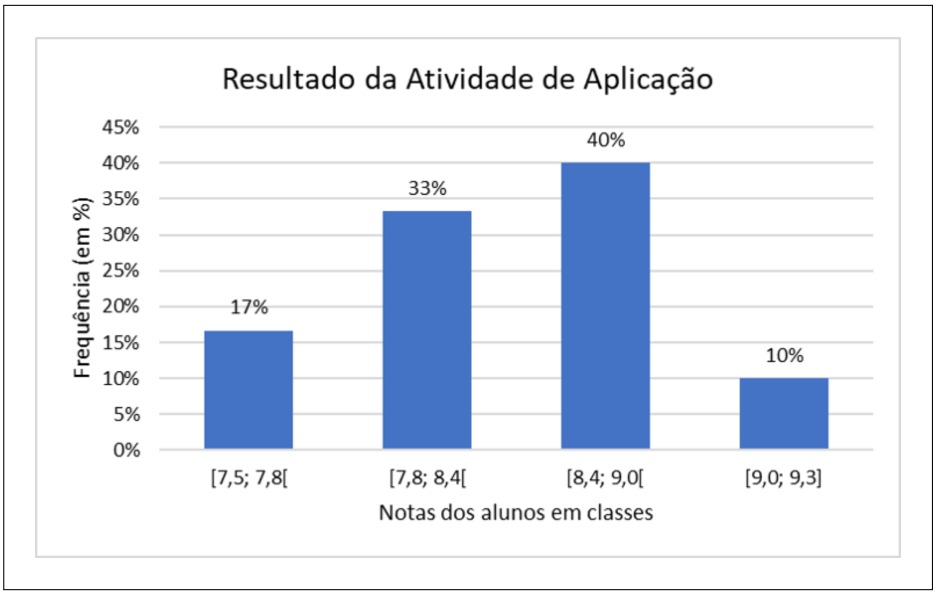


Figura 17 – Gráfico apresentando o resultado da atividade de aplicação

6.2.2 Análise da avaliação aplicada

Após o trabalho, que teve como principal objetivo revisar conteúdo e esclarecer possíveis dúvidas, no dia 28 de junho de 2017, os mesmos alunos foram avaliados por prova somativa no valor de 10 pontos. As habilidades avaliadas foram:

- Realizar operações com números complexos.
- Somar, multiplicar, subtrair e dividir polinômios.
- Identificar as raízes de uma equação dada por um produto de fatores do primeiro e do segundo graus.
- Cálculo do valor numérico.
- Realizar divisões por $x-a$.
- Aplicar o Teorema do Resto.
- Aplicar o Teorema de *D'Alembert* e o dispositivo prático de *Briot-Ruffini*.
- Resolver equações algébricas aplicando: *Teorema Fundamental da Álgebra*, decomposição de um polinômio em fatores do primeiro grau, raízes múltiplas, raízes complexas, pesquisa de raízes racionais e as relações entre coeficientes e raízes, conhecidas como relações de *Girard*, e noções da representação da função polinomial no gráfico.

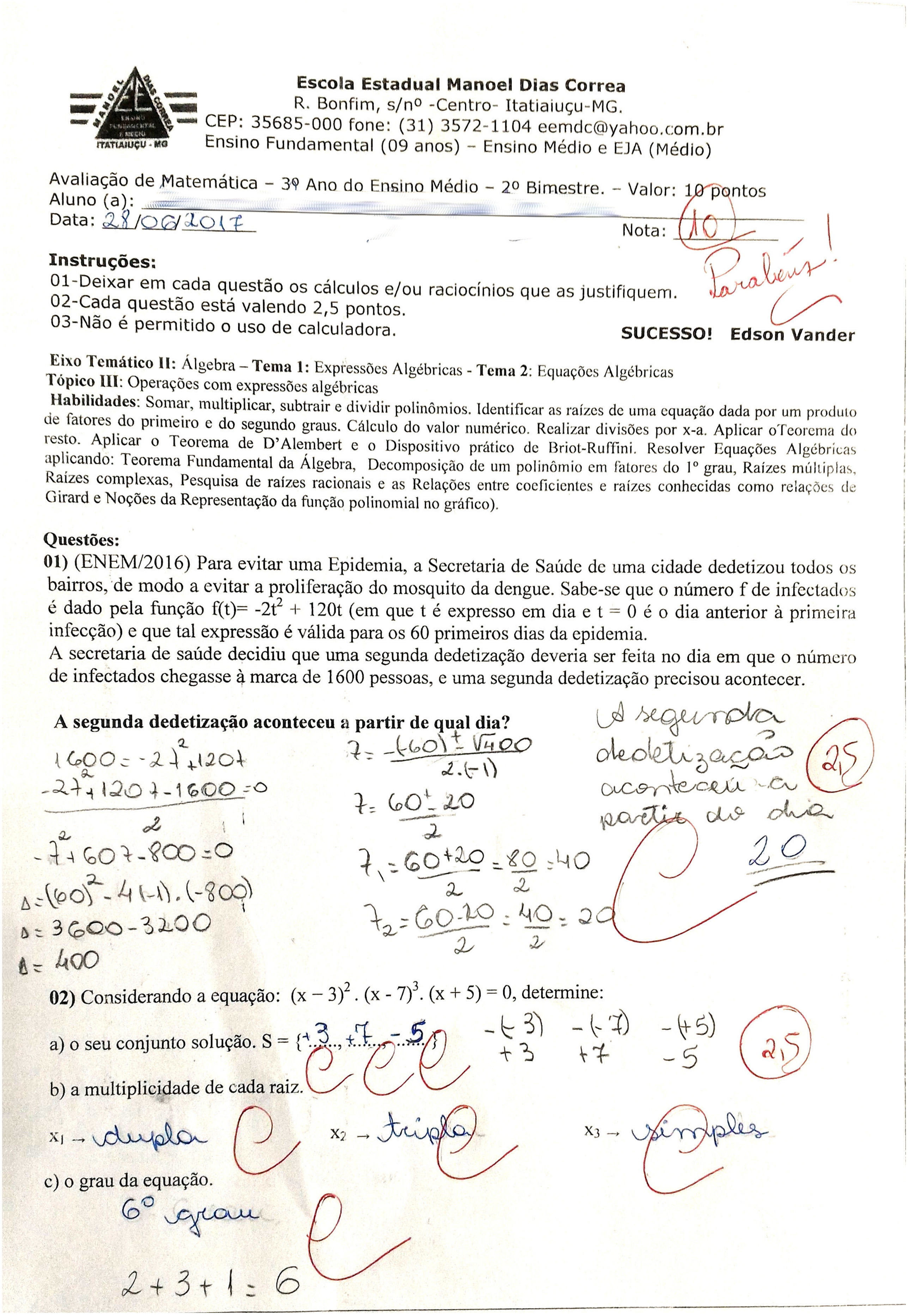
A questão 01, da prova, foi retirada do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM, 2016, 2ª Aplicação) por causa da forma contextualizada que foi elaborada; foi muito acertada, pois assimilaram todos os dados do problema, resolveram, e utilizaram o resultado encontrado para definir quando o maior número de bactérias foi atingido. Houve dúvida quanto a resposta correta porque as duas raízes encontradas eram positivas e os alunos mais atentos ou que leram a pergunta novamente conseguiram solucionar.

A questão 02, considerada pelos alunos fácil, avaliou a capacidade de encontrar as raízes da equação algébrica na forma fatorada e ao mesmo tempo indicar a multiplicidade de cada uma, e em seguida, calcular o grau da equação.

As questões 03 e 04 com funções polinomiais mais complexas, exigiam aplicação das ferramentas estudadas para elaborarem os processos de resolução e podiam contar com o auxílio dos gráficos construídos no *Graphmatica*. Como esse procedimento foi muito cobrado no trabalho de aplicação, conseguiram fazer com bastante segurança.

Quatro avaliações chamaram a atenção por apresentarem erros nas operações básicas com números reais e complexos, o que ocasionaram erros no resultado final. Esses erros foram cometidos por alunos que apresentavam deficiências na aprendizagem, classificados no *baixo rendimento*. Eles foram encaminhados para os estudos de recuperação paralela, onde tiveram a matéria explicada de forma diferenciada e realizaram atividades complementares extraclasse. As Figuras 18 e 19 mostram a prova de uma aluna que soube resolvê-la sem dificuldade.

No geral o resultado foi satisfatório, pois os alunos souberam aplicar os conhecimentos sobre polinômios e equações algébricas adquiridos ao longo das aulas, demonstrando entender das habilidades cobradas. Dos 30 alunos avaliados, 4 deles acertaram 50% da prova, 6 acertaram 60%, 6 acertaram 70% da prova, 5 alunos acertaram 80%, 5 acertaram 90% da prova e 4 alunos acertaram 100%, conforme podemos conferir na Figura 20.


Escola Estadual Manoel Dias Correa
R. Bonfim, s/nº -Centro- Itatiaiuçu-MG.
CEP: 35685-000 fone: (31) 3572-1104 eemdc@yahoo.com.br
Ensino Fundamental (09 anos) – Ensino Médio e EJA (Médio)

Avaliação de Matemática – 3º Ano do Ensino Médio – 2º Bimestre. – Valor: 10 pontos
Aluno (a):
Data: 28/06/2017 Nota: 10

Parabéns!

Instruções:
01-Deixar em cada questão os cálculos e/ou raciocínios que as justifiquem.
02-Cada questão está valendo 2,5 pontos.
03-Não é permitido o uso de calculadora.

SUCESSO! Edson Vander

Eixo Temático II: Álgebra – **Tema 1:** Expressões Algébricas - **Tema 2:** Equações Algébricas
Tópico III: Operações com expressões algébricas
Habilidades: Somar, multiplicar, subtrair e dividir polinômios. Identificar as raízes de uma equação dada por um produto de fatores do primeiro e do segundo graus. Cálculo do valor numérico. Realizar divisões por x-a. Aplicar o Teorema do resto. Aplicar o Teorema de D'Alembert e o Dispositivo prático de Briot-Ruffini. Resolver Equações Algébricas aplicando: Teorema Fundamental da Álgebra, Decomposição de um polinômio em fatores do 1º grau, Raízes múltiplas, Raízes complexas, Pesquisa de raízes racionais e as Relações entre coeficientes e raízes conhecidas como relações de Girard e Noções da Representação da função polinomial no gráfico).

Questões:
01) (ENEM/2016) Para evitar uma Epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que t é expresso em dia e t = 0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.
A secretaria de saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer.

A segunda dedetização aconteceu a partir de qual dia?

$1600 = -2t^2 + 120t$
$-2t^2 + 120t - 1600 = 0$
$-t^2 + 60t - 800 = 0$
$\Delta = (60)^2 - 4(-1).(-800)$
$\Delta = 3600 - 3200$
$\Delta = 400$

$t = \frac{-(60) \pm \sqrt{400}}{2.(-1)}$
$t = \frac{60 \pm 20}{2}$
$t_1 = \frac{60+20}{2} = \frac{80}{2} = 40$
$t_2 = \frac{60-20}{2} = \frac{40}{2} = 20$

A segunda dedetização aconteceu a partir do dia 20

2,5

02) Considerando a equação: $(x-3)^2 . (x-7)^3 . (x+5) = 0$, determine:

a) o seu conjunto solução. S = {+3, +7, -5}

$-(-3)$ $-(-7)$ $-(+5)$
$+3$ $+7$ -5

2,5

b) a multiplicidade de cada raiz.

x_1 → dupla x_2 → tripla x_3 → simples

c) o grau da equação.

6º grau

$2 + 3 + 1 = 6$

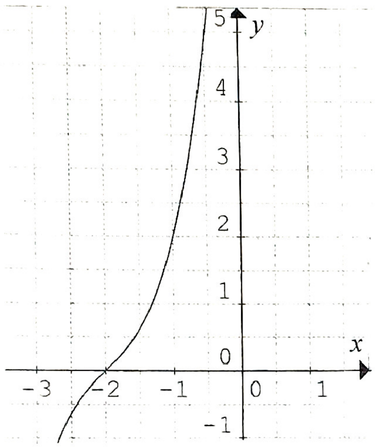
Figura 18 – Prova de uma aluna envolvida no trabalho - 1ª parte

03) O gráfico da função $y = x^3 + 6x^2 + 13x + 10$, dado abaixo, foi construído no Graphmatica, baseado nele responda:

a) Qual é o número de raízes reais dessa função? Essa função contém 1 (uma) raiz real, pois a curva intercepta o eixo do x uma vez

b) Qual é o número de raízes complexas?
Essa função contém 2 (duas) raízes complexas

c) Quais são as raízes da equação $x^3 + 6x^2 + 13x + 10 = 0$.



$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 6 & 13 & 10 \\ \hline & \underbrace{1 \quad 4 \quad 5}_{Q(x)} & & & 0 \end{array} \rightarrow \text{resto}$$

2,5

Fazendo $Q(x) = 0$ temos $x^2 + 4x + 5 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4.1.5$ $\quad x = \dfrac{-(4) \pm \sqrt{-4}}{2}$

$\Delta = 16 - 20$

$\Delta = -4$ $\quad x = \dfrac{-4 \pm 2i}{2}$ $\begin{cases} \rightarrow x_1 = \dfrac{-\cancel{4} + \cancel{2}i}{\cancel{2}} = -2 + i \\ \rightarrow x_2 = \dfrac{-\cancel{4} - \cancel{2}i}{\cancel{2}} = -2 - i \end{cases}$

$S = \{-2, -2 - i, -2 + i\}$

04) Resolva em C a equação, pesquisando as raízes racionais: $x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$

$\dfrac{-8}{1}$ $\quad \dfrac{\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}}{\pm 1}$

$\dfrac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

$x = 1 \rightarrow 1^4 + 1^3 + 2(1)^2 + 4.1 - 8 = 0$

$1 + 1 + 2 + 4 - 8 = 0$

$\cancel{8} - \cancel{8} = 0$ (V)

$x = -2 \rightarrow (-2)^4 + (-2)^3 + 2(-2)^2 + 4(-2) - 8 = 0$

$16 - 8 + 2.4 - 8 - 8 = 0$

$16 - \cancel{8} + \cancel{8} - 8 - 8 = 0$

$16 - 16 = 0$ (V)

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & -8 \\ \hline -2 & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \rightarrow \text{resto} \\ \hline & \underbrace{1 \quad 0 \quad 4}_{Q(x)} & & & 0 & \rightarrow \text{resto} \end{array}$$

Fazendo $Q(x) = 0$, temos $x^2 + 4 = 0$

$x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4$

$x = \pm\sqrt{-4}$

$x = \pm 2i$

2,5

C

$S = \{-2, 1, 2i, -2i\}$

"Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes".
(Marthin Luther King)

Figura 19 – Prova de uma aluna envolvida no trabalho - 2ª parte

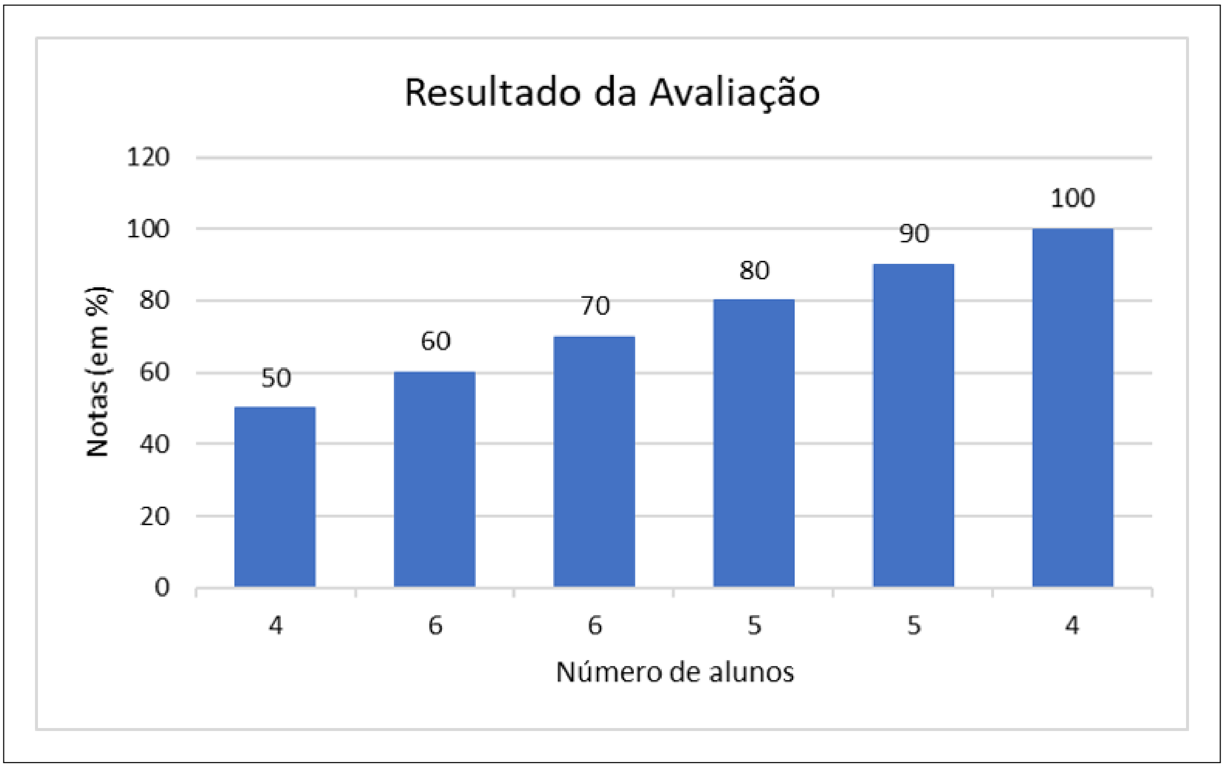


Figura 20 – Gráfico apresentando o resultado da Avaliação

CAPÍTULO

7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste estudo possibilitou uma análise de como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEMs) e alguns livros didáticos destinados ao 3º ano do Ensino Médio abordam o conteúdo de polinômios e de equações algébricas. Por meio dele, foi possível realizar um estudo aprofundado e coerente com a resolubilidade de polinômios, indo da teoria ao ensino-aprendizagem. Utilizamos, no computador, um *software* chamado *Graphmatica*, como recurso didático e instrumento de avaliação diversificado que deu oportunidade para diagnosticar as dificuldades encontradas ao trabalhar o conteúdo e realizar as intervenções pedagógicas necessárias para a efetiva aprendizagem.

De modo geral, os livros didáticos apresentam os assuntos relacionados aos polinômios e às equações algébricas com poucas relações com o cotidiano e com as aplicações práticas. No entanto, eles apresentam os conteúdos de maior relevância para enriquecer a aprendizagem dos alunos, dando suporte à elaboração do projeto de aplicação e contribuindo para que os objetivos sejam alcançados de forma satisfatória. A partir dos estudos realizados nos livros, nos artigos, nas teses e nos *sites* consultados e pesquisados, houve um grande enriquecimento dos conhecimentos prévios, o que fortaleceu as aulas expositivas e a aplicação da atividade em sala de aula.

Durante o desenvolvimento da atividade de aplicação, os alunos demonstraram muito entusiasmo por estarem participando do projeto. Ficou claro que os professores devem buscar meios para estimular e facilitar a aprendizagem e aumentar o interesse, o gosto e o hábito de estudar conteúdos matemáticos mais distantes do cotidiano dos alunos. A busca por informações e aprofundamentos em livros, na *internet*, no *Graphmatica* e, principalmente, durante as aulas expositivas e dialogadas com o professor e o interesse pelo tema foram estimulados, deixando evidente que os objetivos foram alcançados diante das notas obtidas pelos alunos na atividade de aplicação, na avaliação somativa e na satisfação que eles demonstraram ao participar do projeto.

Os livros pesquisados forneceram fatos importantes sobre os primeiros estudos da Álgebra, sua evolução e o que se tem dela hoje. Além do aprofundamento de conteúdos que estruturaram a pesquisa, eles foram essenciais para dar suporte ao professor no que diz respeito ao que deve ser ensinado aos alunos do Ensino Médio. O *software Graphmatica* tornou as aulas destinadas ao trabalho de aplicação mais atrativas e mais próximas do que é sugerido aos professores pelos PCNEMs, além de esclarecer dúvidas, revisar e reforçar o que viram dentro da sala de aula.

O trabalho de aplicação em formato de *Jogo Didático* também foi muito positivo, pois, forneceu aos estudantes um ambiente enriquecedor e motivador que além de divertir, promoveu a aprendizagem, permitindo entendimento de alguns conceitos como o de número de raízes reais e complexas da equação algébrica por meio da análise do gráfico da função polinomial.

Os estudos de polinômios e de equações algébricas são muito importantes para o currículo escolar e devem ser estudados para aperfeiçoar a formação adquirida na graduação. Nesse estudo, encontra-se uma rica fonte de pesquisa para a formação continuada de professores, fortalecendo competências e habilidades a fim de garantir um ensino de boa qualidade, atendendo às diferentes necessidades dos alunos e, assim, efetivar uma prática pedagógica em concordância com as propostas atuais para o ensino da Matemática.

Nesse sentido, a utilização de todos os recursos didáticos utilizados na pesquisa e nas aulas permitiram ao professor conduzir o processo ensino-aprendizagem de forma clara, objetiva e coerente com a filosofia educacional atual, motivando os alunos a terem mais vontade de aprender sobre os polinômios da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ reais e complexos, buscando condições sobre estes para que equações do tipo $p(x) = 0$ tenham solução.

REFERÊNCIAS

AMANDA, O. **Álgebra II - Licenciatura em Matemática - ead, UNEB**. 2011. Citado na página 40.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Matemática**. 1ª. ed. São Paulo - SP: [s.n.], 1989. v. 3. ISBN 85-16-00016-8. Citado nas páginas 25 e 60.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, 9.394**. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Citado nas páginas 23, 24, 79 e 80.

____. Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio. **Ministério da Educação (MEC)**, 1999. Citado nas páginas 25 e 79.

____. **Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza e suas Tecnologias.** Brasília: Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Citado na página 21.

CARDANO, G. **Ars Magna Or The Rules of Algebra Dover Books on Advanced Mathematics**. ilustrada, reimpressão, reedição. [S.l.]: Dover, reempressão: 1968, 1545. (Dover Books on Advanced Mathematics). Https://books.google.com.br/books?id=ZOUfAQAAIAAJ. ISBN 0486678113, 9780486678115. Citado nas páginas 19 e 53.

CONWAY, J. B. **Functions of one complex variable**. [S.l.: s.n.], 1978. Citado na página 47.

DANTE, L. R. **Matemática**. 1ª. ed. São Paulo: [s.n.], 2008. Único. ISBN 978-85-08-09802-6. Citado nas páginas 19, 23, 24 e 25.

DESCARTES, R. **Descartes, la "Géométrie"**. [S.l.]: A Hermann, 1637. Citado nas páginas 19, 20 e 47.

ENEM. Matemática, 2º dia de aplicação, caderno 6, cinza, página 31. Brasília, 2015. Citado na página 85.

____. Matemática, 2º dia de aplicação, caderno 7, azul, página 24. Brasília, 2016, 2ª Aplicação. Citado na página 94.

ENS, D. L. **Matemática Moderna**. São Paulo - Brasil: [s.n.], 1988. (8ª). Citado na página 18.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 3ª. ed. Campinas-SP: Hygino H. Domingues, 2008. ISBN 85-268-0657-2. Citado nas páginas 17, 18, 19 e 20.

FRALEIGH, J. **A first course in abstract algebra**. [S.l.]: Addison-Wesley Longman, Incorporated, 1982. Citado na página 47.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro - RJ: [s.n.], 2001. Único. Citado nas páginas 29, 33, 37 e 45.

GIRARD, A. **Invention nouvelle En L'Algebre**. [S.l.]: Blauew, 1629. Citado nas páginas 19 e 46.

HERSTEIN. **Tópicos de Álgebra**. [S.l.]: Editora Polígono/EDUSP, 1970. Citado na página 78.

HUNGERFORD, T. W. **Graduate Texts in Mathematics - Algebra**. New York, Inc., 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA): Springer-Verlag, 1974. ISBN 0-387-90518-9 3-540-90518-9. Citado na página 49.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PéRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. **Matemática: ciência e aplicações**. 7ª. ed. São Paulo - SP: [s.n.], 2013. v. 3. ISBN 978-85-02-19429-8. Citado nas páginas 25, 27, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 80 e 82.

LIMA, E. L. A equação do terceiro grau. **Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq**, n. 5, p. 9–23, Junho 1987. Citado na página 63.

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., IMPA, 1969. Único. Citado na página 48.

MOREIRA, C. G. T. de A. Uma solução das equações do 3º e do 4º graus. **Revista do Professor de Matemática**, v. 25, 1994. Citado nas páginas 65 e 73.

PAIVA, M. **Matemática (Ensino Médio)**. 1ª. ed. São Paulo - SP: [s.n.], 1999. Único. ISBN 85-16-02569-1. Citado na página 53.

SANTOS, C. A. M. dos; GENTIL, N.; GRECO, S. E. **Matemática - Novo Ensino Médio**. 7ª. ed. São Paulo - SP: [s.n.], 2003. Único. ISBN 85-08–08624-5. Citado nas páginas 21 e 25.

VIèTE, F. **Francisci Vietae In artem analyticem isagoge seorsim excussa ab Opere restitutae mathematicae analyseos, seu Algebra noua**. 1591, 1591. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=BWTyywN39KEC>. Citado na página 19.

ICMC USP
SÃO CARLOS