Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

Uma proposta de uso da História da Matemática como recurso didático no ensino de áreas

DÉBORA SOUZA PARREIRA

Uberaba - Minas Gerais

Dezembro de 2017

Uma proposta de uso da História da Matemática como recurso didático no ensino de áreas

Débora Souza Parreira

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines

Uberaba - Minas Gerais

Dezembro de 2017

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

P273p

Parreira, Débora Souza
Uma proposta de uso da História da Matemática como recurso didático no ensino de áreas / Débora Souza Parreira. -- 2017.
79 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2017
Orientadora: Profa. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines

1. Geometria - Estudo e ensino. 2. Matemática - Estudo e ensino. I. Martines, Mônica de Cássia Siqueira. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 514(07)

Uma proposta de uso da História da Matemática como recurso didático no ensino de áreas

Débora Souza Parreira

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

15 de dezembro de 2017.

Banca Examinadora

Profa. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines
Orientadora
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Cristiane Coppe de Oliveira

Profa. Dra. Cristiane Coppe de Oliveira
Universidade Federal de Uberlândia

Profa. Dra. Marcela Luciano Vilela de Souza
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dedico este trabalho aos meus alunos. Aos do passado: meu irmão, Dilmar Júnior, que foi meu primeiro aluno, meus primos e amigos, que me fizeram enxergar a minha vocação para a docência e experimentar desde cedo a alegria e a satisfação de ensinar; aos do presente, que participaram de todo o processo de desenvolvimento deste curso, sendo inspiração para as minhas aulas, na tentativa de torná-las cada vez melhores; e aos do futuro, que ainda conhecerei e poderei compartilhar com eles tudo o que aprendi no PROFMAT.

AGRADECIMENTOS

Na Bíblia, em Efésios 3 - 20 e 21 diz: "Ora, àquele que é poderoso para fazer infinitamente mais do que tudo quanto pedimos ou pensamos [...], a ele seja a glória [...] para todo o sempre. Amém!" .

Agradeço a Deus pela oportunidade de fazer este curso, pelas vitórias conquistadas nele, pela força e sabedoria necessárias, principalmente nos momentos mais difíceis. Agradeço a Ele pela paciência e por tudo o que aconteceu, pois sem Ele nada teria sido possível.

Agradeço à minha orientadora Mônica pela dedicação, compromisso, organização e também pela muita paciência que teve comigo ao longo deste trabalho, nas minhas dúvidas e mudanças de ideia.

Agradeço pelo muito que aprendi nesse tempo em que estivemos trabalhando juntas, pois foi de grande crescimento para mim.

Agradeço aos meus pais, Dilmar Satil Parreira e Itamiram Betânia de Souza Parreira, por me apoiarem em minhas decisões, entenderem a minha ausência em vários momentos, e por cumprirem tantas tarefas que eram minhas, para que eu pudesse me dedicar ao curso.

Agradeço ao meu irmão, Dilmar Satil Parreira Júnior, à minha cunhada Lara Danilla do Carmo Parreira e aos meus sobrinhos: Dilmar Satil Parreira Neto, Júlia do Carmo Parreira e Felipe do Carmo Satil Parreira, por serem uma família tão compreensiva e dedicada e por me apoiarem em todos os momentos em que eu precisei.

Ralph Waldo Emerson disse que: "A glória da amizade não é a mão estendida, nem o sorriso carinhoso, nem mesmo a delícia da companhia. É a inspiração espiritual que vem quando você descobre que alguém acredita e confia em você."

Agradeço aos meus amigos, que continuaram sendo meus amigos apesar da minha falta de tempo para me dedicar a eles e agradeço também aos novos amigos que fiz neste período, em que, apesar das dificuldades, as alegrias e as boas surpresas prevaleceram.

Agradeço aos colegas de sala, companheiros que compartilharam comigo: as alegrias, as dificuldades, as angústias, as risadas, o conhecimento, o almoço, enfim, a vida.

Agradeço aos professores do PROFMAT por tudo o que aprendi nesse tempo.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo apoio financeiro.

“Para entender o coração e a mente de uma pessoa, não olhe para o que ela já conseguiu, mas para o que ela aspira.”

Khalil Gibran

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo explorar a História da Matemática como recurso pedagógico no ensino de geometria na educação básica, principalmente no ensino de áreas de figuras planas, conteúdo esse ministrado a turmas de nono ano do ensino fundamental. Desejamos que o aluno compreenda a importância do conhecimento da História da Matemática, e que através desse conhecimento ele ressignifique a sua própria concepção e prática em Matemática. O trabalho foi desenvolvido em forma de pesquisa bibliográfica, onde foram analisados livros e trabalhos de pesquisa sobre o tema. Trabalhamos também com o livro "O Teorema do Papagaio", de Denis Guedj, que serviu de motivação para a investigação matemática que propomos. Relacionamos a História da Matemática e a geometria, propondo atividades práticas que podem ser utilizadas em sala de aula.

Palavras-chave: História da Matemática; Geometria; Áreas.

ABSTRACT

This work aims to explore the History of Mathematics as a pedagogical resource in the teaching of geometry in basic education, especially in the teaching of areas of flat figures, content that is taught to ninth grade classes of elementary school. We hope that the student will understand the importance of knowledge of the History of Mathematics, and that through this knowledge he will re-signify his own conception and practice in Mathematics. The work was developed in the form of a bibliographical research, where books and research works on the theme were analyzed. We also work with the book "The Theorem of the Parrot"by Denis Guedj, which served as motivation for the mathematical investigation that we propose. We relate the History of Mathematics and geometry, proposing practical activities that can be used in the classroom.

Keywords: Mathematics History ; Geometry; Areas.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

Como cidadãos inseridos na sociedade nos vemos integrantes da história atual, com participação direta e responsabilidades inerentes à nossa condição de cidadãos. E é necessário que nos façamos historiadores, buscando conhecer a história do nosso mundo e o que o levou a se tornar o que é hoje, as dificuldades encontradas pelos nossos antepassados, as relações estabelecidas, os motivos e as circunstâncias dos fatos que aconteceram. Isso pode nos ajudar a compreender melhor a nossa própria história e as dificuldades que enfrentamos hoje em dia. Petta (2005, p.9) salienta que o trabalho do historiador é localizar e compreender historicamente cada acontecimento. Ele também destaca que o conhecimento histórico é uma reconstrução dos fatos a partir das fontes históricas, ou seja, é o nosso pensamento de hoje tentando alcançar o modo de pensar e de viver de outros tempos e de outros povos.

Pretendemos através deste trabalho, com o nosso pensamento de hoje, mostrar aos alunos da educação básica o modo de pensar e de viver de outros tempos e de outros povos e, que dessa forma, a Matemática possa ser compreendida com maior clareza no sentido de mostrar as etapas e desafios que permearam o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos. Segundo Farago (2003, p.64), a fundamentação dos conteúdos através da história da matemática é essencial para uma aprendizagem significativa, pois a construção do conhecimento matemático a partir de uma situação-problema que os antigos matemáticos enfrentaram para resolver situações da época, servirá de conhecimento prévio para as situações que os alunos ainda enfrentarão durante a aprendizagem em sala de aula e na vida.

Buscaremos essa fundamentação na História da Matemática, pois, concordamos com Miguel e Miorim (2004, p.45), quando afirmam que a história pode ser uma fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino-aprendizagem da Matemática escolar na atualidade. Ela deve ser o fio condutor que direciona para a promoção de ensino e da aprendizagem escolar baseado na compreensão e na significação.

A História da Matemática possibilita ao aluno que está ouvindo determinado conteúdo pela primeira vez participar da construção do conhecimento e refazer os passos dos estudiosos do passado, tendo assim uma experiência muito mais significativa do que apenas aplicar fórmulas e resultados sem entender de onde e como vieram. Santos (2009, p.20) afirma que:

> A história da matemática dá a este aluno a noção exata dessa ciência, como uma ciência em construção, com erros e acertos e sem verdades universais. Contrariando a ideia positivista de uma ciência universal e com verdades absolutas, a História da Matemática tem este grande valor de poder também contextualizar este saber, mostrar que seus conceitos são frutos de uma época histórica, dentro de um contexto social e político. (SANTOS, 2009, p.20).

Sobre esse assunto Fossa (2006, p.138) diz que:

> A matemática é construída, incessantemente, sobre as bases já construídas. Em consequência, o aluno precisa, no processo de aprendizagem, repensar o que já foi pensado por outros, ou seja, é necessário que o aluno se aproprie do que já foi elaborado por matemáticos anteriores.(FOSSA, 2006, p.138).

Acreditamos que as colocações desses autores reforçam a ideia de que a Matemática não é feita apenas de fórmulas e resultados prontos, como parece a muitos alunos, principalmente aos que apresentam dificudades nesse conteúdo, mas que ela veio de um longo processo histórico onde cada um deu a sua contribuição, com base no que já havia sido desenvolvido, para a partir daí, chegar a novos resultados. D'Ambrosio (2012) afirma que a história está se consolidando como um elemento diferenciado para o ensino de matemática, desfazendo a ideia de uma ciência cristalizada. Além disso, ele destaca que: conhecer, historicamente, pontos altos da Matemática de ontem poderá, na melhor das hipóteses e, de fato faz isso, orientar no aprendizado e no desenvolvimento da Matemática de hoje.

Segundo Miguel (1997), a História é um instrumento que possibilita a desmistificação da Matemática e a desalienação de seu ensino. Mendes (2013) afirma que há a necessidade de se tomar a história como uma possibilidade de dar aos estudantes uma oportunidade de se desafiarem a estabelecer um processo de criatividade matemática na sua aprendizagem diária durante o processo educativo mediado pelo professor. Essa prática pode ajudar a sanar várias dificuldades apresentadas pelos alunos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) trazem que:

> A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática (BRASIL, 1998, p. 40).

Dassie (2002, p.28) defende o ensino de uma Matemática mais intuitiva e, pode-se até dizer, mais experimental, até que seja atingida a maturidade necessária ao desenvolvimento do método dedutivo. “Afinal de contas, foi esse o percurso percorrido pelas civilizações, até se chegar à forma pela qual a Matemática ganhou ‘status’ de uma ciência independente.” (DASSIE, 2002, p.28).

Micotti (1999) diz que a aplicação dos aprendizados em contextos diferentes daqueles em que foram adquiridos exige muito mais que a simples decoração ou a solução mecânica de exercícios: domínio de conceitos, flexibilidade de raciocínio, capacidade de análise e abstração. Essas capacidades são necessárias em todas as áreas de estudo, mas a falta delas, em Matemática, chama a atenção.

Da nossa experiência na docência no ensino básico percebemos muitas dificuldades sobre o conteúdo de geometria, o que motivou a escolha em trabalhar sobre áreas.

Moreira e David (2005, p.56) afirmam que no trabalho escolar é importante que o professor seja capaz de envolver os alunos em um leque de situações didáticas adequadas, isto é, situações que se colocam como problema e que, de algum modo, desafiam seus saberes anteriores, conduzindo a reflexão sobre novos significados e novos domínios de uso desses saberes.

Essas situações didáticas adequadas são situações-problema que evidenciam a necessidade do conhecimento matemático para resolvê-las. Sobre isso Fonseca (2002, p.22) destaca que: “Não é mais possível apresentar a Matemática aos alunos de forma descontextualizada, sem levar em conta que a origem e o fim da Matemática é responder às demandas de situações-problema da vida diária.”

Devemos então, dar voz aos alunos e buscar neles essas demandas até que cheguemos à verdadeira contextualização. Neste processo, iremos nos deparar com as investigações matemáticas, que nos levarão a buscar aspectos da História da Matemática para responder a vários questionamentos que surgirem. Ponte, Brocardo, Oliveira (2005) trazem:

> As investigações geométricas contribuem para perceber aspectos essenciais da atividade matemática, tais como a formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstrações de generalizações. A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidade, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p. 71).

Lorenzato (1995) afirma que para se justificar a importância da geometria, bastaria o contexto de que tem função essencial na formação dos indivíduos, pois permite uma interpretação mais completa do mundo, uma comunicação mais abrangente de ideias e uma visão mais equilibrada da matemática. Fainguelernt (1999, p.53) diz que o estudo da geometria é de fundamental importância para desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para leitura do mundo e para que a visão da matemática não fique distorcida.

A Base Nacional Comum (BNCC) (BRASIL, 2016) traz que a Geometria é capaz de promover a curiosidade, imaginação e investigação ao apresentar características diferentes em diferentes etapas ainda que, sempre que possível, os conhecimentos sejam contextualizados, antes de se promover a generalização e a abstração.

Fainguelernt (1995, p.45) ressalta que a Geometria oferece um vasto campo de ideias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de absorção e generalização. A Geometria também ativa a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas. É, portanto, tema integrador entre as diversas partes da Matemática, bem como campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar. Ela desempenha papel primordial no ensino, porque a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem a sua essência.

E por que estudar Geometria nos vários níveis de ensino? Gaspar (2003, p.10-11) justifica que a Geometria faz parte de um patrimônio cultural que é determinante na organização de nossa sociedade, além de fazer parte da vida prática do aluno desde o seu nascimento e possuir muitas aplicações no mundo real. Destaca também que a Geometria pode perder sua dependência direta de problemas práticos e tornar-se um assunto de interesse próprio, além de auxiliar no desenvolvimento do pensamento crítico e autônomo do aluno.

Fonseca (2001) elenca algumas possíveis causas para as dificuldades encontradas pelos alunos em Geometria, tais como o isolamento da geometria em um momento específico do ano letivo, geralmente no final do curso; a abordagem analítica e mecânica; dissociação da realidade imediata; redução à atividade de nomenclatura. Além desses problemas, ou até aliado a eles, temos o problema dos cursos de formação de professores, que nem sempre dão o suporte necessário para que o futuro professor desenvolva sua prática pedagógica nessa área.

Apesar de haverem muitos obstáculos ao ensino de Geometria na Educação Básica, ainda existe uma vontade por parte de muitos professores e pesquisadores de melhorar o ensino dessa disciplina. Fonseca (2001, p.91) nos traz que a preocupação em resgatar o ensino da geometria como uma das áreas fundamentais da matemática tem levado muitos professores e pesquisadores a se dedicarem à reflexão e à elaboração, implementação e avaliação de alternativas, que busquem superar as dificuldades não raro encontradas na abordagem desse tema, na escola básica ou em níveis superiores de ensino.

Pensando nessas alternativas que poderiam auxiliar na melhoria das aulas de Geometria, chegamos à História da Matemática e resolvemos utilizá-la como um recurso pedagógico para o ensino de áreas, de acordo com Pereira (2001), que diz que o estudo da Geometria nas aulas de Matemática tem sido um desafio, constituído como um campo que pode ser mais bem desenvolvido pelos professores à medida que novas metodologias e recursos são utilizados em sala de aula, como a História da Matemática.

De acordo com Bastos (2003, p.2), são inúmeros os exemplos, ao longo da história do pensamento matemático, de ideias matemáticas que surgiram de tentativas de resolução de problemas geométricos e de problemas não geométricos que se resolveram por métodos geométricos. Devemos estimular, sempre que possível o método de tentativa e erro, aproximação, enfim, levar o aluno a fazer investigações e descobertas em sala de aula.

Decidimos então, juntar esses elementos: a História da Matemática e a Geometria, para elaborar um material que utilize a História da Matemática como recurso pedagógico no ensino de Geometria no 9º ano do ensino fundamental . Para isso, nos propusemos a buscar formas de utilizar a História da Matemática nessas aulas, procurando encontrar um modo de melhor contribuir ao processo de construção do conhecimento matemático, em especial nas aulas de geometria que tratam de áreas de figuras planas.

Primeiro buscamos conhecer a dimensão do trabalho com a História da Matemática nos livros didáticos e também em livros paradidáticos[1]. Miguel e Miorim (2004, p. 15) afirmam que temos presenciado nos últimos anos ampliações da presença do discurso histórico em produções brasileiras destinadas à Matemática escolar, dentre as quais encontram-se os livros didáticos, os livros paradidáticos e as propostas elaboradas por professores individuais, por grupos de professores, por escolas ou órgãos governamentais responsáveis pela elaboração de diretrizes para os ensinos fundamental, médio e superior.

Nesse sentido, classificamos o livro “O Teorema do Papagaio”como paradidático e o utilizaremos como motivação para as atividades que queremos propor para serem utilizadas em sala de aula, pelo fato de que este livro traz aspectos importantes da História da Matemática, e reforça sempre a investigação matemática para a resolução dos problemas do cotidiano.

Este trabalho está dividido em 3 capítulos. No primeiro capítulo discorremos sobre a escolha da História da Matemática como recurso didático no ensino e também sobre a História da Matemática nos livros didáticos e no livro “O Teorema do Papagaio”.

No capítulo 2 falaremos sobre a História da Matemática em algumas civilizações

[1]Livros paradidáticos, segundo Menezes e Santos (2001), “são livros e materiais que, sem serem propriamente didáticos, são utilizados para este fim”. É nesse sentido que iremos adotar o termo livro paradidático.

não europeias, quais sejam: Mesopotâmia, Egito, China e Índia, para mostrar um pouco da contribuição de cada uma delas para o desenvolvimento da Matemática.

No capítulos 3 traremos uma proposta de atividades utilizando a História da Matemática como recurso pedagógico no ensino de áreas de figuras planas.

1 POR QUE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA?

A evolução da Matemática na história se deu com o objetivo de responder às demandas do cotidiano das pessoas e resolver problemas que surgiam no decorrer do tempo. Brolezzi (1991, p.52) afirma que: "Compreender a evolução dos significados ao longo da História é fundamental para a elaboração de um ensino com significado, pois permite que se construam novamente os significados junto com os alunos."

Acreditamos que ao ensinarmos Matemática no ensino fundamental, devemos ter uma preocupação com a maturidade dos alunos em relação à matemática, pois os mesmos apresentam muitas dificuldades para aprender algo distante da sua própria realidade, por isso, tentaremos trabalhar com a História da Matemática, pois esta tem a possibilidade de aproximar os alunos e seu cotidiano dessa disciplina.

Silva (2014) afirma que o professor deve levar em conta os diversos mecanismos de aprendizagem possíveis, de modo a procurar superar os mitos que cercam o ensino de matemática. A construção de um conceito, segundo Cury e Motta (2008, p.79), pode exigir outros recursos metodológicos além do simples enunciado da definição formal – a qual é, em si, um objeto histórico variável, formalizado de acordo com o desejo de busca vivido pelo meio e conduzido pelo contexto ao qual se incorporará o objeto matemático definido – é algo que desestabiliza as concepções dos docentes e lhes faz refletir sobre sua prática.

O professor, enquanto mediador da aprendizagem dos alunos, deve sempre ter essa consciência de buscar novos recursos e metodologias com o objetivo de facilitar o entendimento de cada conceito matemático. Lorenzato (2008), defende que o sucesso ou o fracasso dos alunos diante da matemática depende de uma relação estabelecida desde os primeiros dias escolares entre a matemática e os alunos. Por isso, o papel que o professor desempenha é fundamental na aprendizagem dessa disciplina, e a metodologia de ensino por ele empregada é determinante para o comportamento dos alunos.

Diante disso, buscamos na História da Matemática um recurso pedagógico para o ensino. Para tanto, buscamos autores que acreditam que a História da Matemática contribui para a aprendizagem dos alunos. Entre eles: D'Ambrosio, Baroni e Nobre, Mendes, Miguel e Miorim.

1.1 A História da Matemática como recurso didático

Segundo Miguel e Miorim (2011), a forma lógica e emplumada através da qual o conteúdo matemático é normalmente exposto ao aluno não reflete o modo como esse conhecimento foi historicamente produzido. É necessário que chegue à escola, de acordo com Sebastiani (1999, p.22), a concepção de uma matemática construída pelo homem, imperfeita e sem verdades universais e que devemos mostrar aos alunos que a crença na verdade universal dos conceitos matemáticos é fruto de uma visão da ciência, uma visão evolucionista e eurocentrista desta ciência. Não existe uma matemática, mas cada sociedade constrói a sua Matemática. Como estamos mergulhados em uma sociedade que traz em sua bagagem uma ciência ocidental, com o dogma da verdade absoluta, somos levados a olhar a ciência do outro no máximo como uma fase da evolução para atingir o nosso saber. Tentaremos em alguns momentos, nesse trabalho, fugir um pouco dessa visão eurocentrista da Matemática, buscando atividades que levem em consideração a Matemática produzida em outros territórios e por outros povos, tais como os chineses, os árabes e os indianos.

Para D'Ambrosio (2012, p. 101-102), a disciplina denominada matemática é na verdade uma etnomatemática que se originou e desenvolveu na Europa, que chegou à forma atual nos séculos XVI e XVII e então foi levada e imposta a todo o mundo a partir do período colonial. Com esse destaque dado aos europeus, as contribuições matemáticas de outros povos foram deixadas de lado. Segundo Santomé (1995), as culturas de povos marginalizados e/ou minoritários costumam ser silenciadas e, muitas vezes, deformadas e estereotipadas, impossibilitando qualquer forma de reação.

Como sabemos, através das várias leituras realizadas, todos os povos fizeram e fazem Matemática, e esta deve ser considerada também, pois, segundo Miguel e Miorim (2011):

> É de extrema importância que em situações de ensino sejam consideradas as contribuições significativas de culturas que não tiveram hegemonia política e, também, que seja realizado um trabalho que busca explicar, entender e conviver com procedimentos, técnicas e habilidades matemáticas desenvolvidas no entorno sociocultural próprio a certos grupos culturais. (MIGUEL; MIORIM, 2011, p.54).

Um exemplo disso é trazido por Rooney (2012, p. 53) quando esta diz que os maias, civilização eliminada pelos invasores espanhóis no século XVI, possuem o mais antigo símbolo para o zero conhecido. O seu uso mais antigo é de uma inscrição datada do ano 36 a.E.C.[1] . Entretanto, a numeração maia não tinha nenhuma influência na matemática do Velho Mundo. Apesar de especulações e tentativas em resolver o problema do zero no sistema posicional, como deixar um espaço ou um ponto, o texto mais antigo conhecido referente ao zero é datado de 458 E.C., na Índia. Na Europa, o primeiro texto a usar o zero apropriadamente foi produzido pelo matemático veneziano Luca Pacioli (1445 – 1517).

Este exemplo mostra uma Matemática não europeia que se desenvolveu mais rápido do que a europeia, o que reforça a nossa crença na valorização da Matemática produzida por todas as culturas sem distinção ou preferências, pois segundo Lopes (2013), proporcionar que os estudantes conheçam diferentes matemáticas ou etnomatemáticas, de povos desfavorecidos economicamente e politicamente, constitui-se como um caminho para a valorização do conhecimento que o próprio aluno traz consigo. Afinal, conhecer as contribuições de diferentes povos, fugindo de uma visão única da etnomatemática eurocentrista, possibilita atribuir valor à própria cultura ao perceber-se inserido no contexto do conhecimento escolar.

Segundo Miguel e Miorim (2004, p.17) a apresentação de tópicos da História da Matemática em sala de aula, tem sido defendida por um número expressivo de matemáticos, historiadores da matemática e investigadores em Educação matemática, de diferentes épocas, os quais recorrem à categoria psicológica da motivação para justificar a importância de tal inclusão.

Já Baroni e Nobre (1999) defendem que a utilização da História da Matemática no contexto didático não deve se restringir como elemento de motivação ao desenvolvimento do conteúdo, pois sua amplitude extrapola esse campo. A História da Matemática ainda dá um novo sentido à própria Matemática, quando o aluno percebe todo o potencial desse recurso. Mendes (2009) corrobora com Baroni e Nobre quando afirma que:

> O apoio da história como um recurso pedagógico tem como principal finalidade promover um ensino-aprendizagem da Matemática que busque dar uma ressignificação ao conhecimento matemático produzido pela sociedade ao longo dos tempos. Com essa prática, considero ser possível imprimir maior motivação e criatividade cognitiva às atividades de sala de aula durante nossa ação docente, pois esse modo de conceber o ensino da Matemática pode constituir-se em um dos agentes provocadores de ruptura na prática tradicional educativa vivida até hoje nas aulas de Matemática. (MENDES, 2009, p. 76).

Consideramos este recurso, a História da Matemática, como uma tentativa de melhorar nossa prática em sala de aula, o que é significativo também para Brolezzi (2003,

[1]De acordo com Roque (2012, p.23), "tem -se usado 'antes da Era Comum' no lugar de 'antes de Cristo' com o fim de neutralizar conotações religiosas."

p.1) quando este afirma que o uso da História da Matemática tem sido apontado como instrumento importante para o ensino de Matemática em todos os níveis. O valor desse recurso está reconhecido em textos e programas oficiais que afetam o ensino nacional (PCN, PNLD, entre outros) e está presente em diretrizes dos cursos superiores de Matemática.

1.2 A História da Matemática como recurso na formação docente

Nos PCN encontramos várias alusões ao trabalho com a História da Matemática:

> O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a Matemática como uma ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. Além disso, conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos é de grande utilidade para que o professor compreenda melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos (BRASIL, 1998, p. 26).

Os PCN afirmam também que em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns porquês e, desse modo, contribuir para um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. (BRASIL, 1997). Esse olhar crítico deve ser trabalhado e incentivado pelo professor desde muito cedo. Acreditamos que a Matemática deve ser trabalhada de forma coesa, com todos os conceitos e técnicas envolvidas desde as mais tenras séries, e que este trabalho deve ser acompanhado por um profissional da área da Matemática, pois este profissional tem o conhecimento específico dos conteúdos matemáticos que, aliados às práticas pedagógicas do professor da turma (pedagogo), traria a construção efetiva do raciocínio matemático que o aluno necessita, o que contribuiria para um desenvolvimento e acompanhamento da Matemática nas séries finais do ensino fundamental, ensino médio e outras esferas escolares.

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (BRASIL, 1997, p.19-20).

Uma ferramenta que auxilia o estabelecimento dessas conexões é a História da Matemática, pois, segundo Schmidt, Leivas e Pretto (2016), a História da Matemática usada pedagogicamente pode inserir elementos que contribuam para a compreensão dessa matéria enquanto conhecimento significativo e não distante da realidade.

Os PCN também trazem que ao verificar o alto nível de abstração matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas. Desse modo, será possível entender as razões que levam alguns povos a respeitar e conviver com práticas antigas de calcular, como o uso do ábaco, ao lado dos computadores de última geração.

Devemos, no entanto, ter cuidado com a forma de trabalhar essa História da Matemática, porque corremos o risco de trazermos aos alunos a ideia de que fazer Matemática é algo restrito a poucos personagens do passado e inacessível a eles. Vianna (1995) diz não concordar com a didática empregada para abordar a origem de conhecimentos matemáticos como descobertas do indivíduo A ou B, pois são histórias fantasiosas que acabam, erroneamente, salientando que o saber matemático está destinado a poucos escolhidos. De fato, é um erro creditar certas descobertas matemáticas a um determinado personagem da história. Sobre isso Boyer (1994) diz que afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever.

Gaspar(2003, apud NOBRE, 2002, p.31) traz que, possivelmente, o único texto sobre história da matemática escrito antes da era comum que chegou até nós foi escrito por Vitruvius (85 a.E.C. - 20 a.E.C.). Além disso, nos diz que os primeiros livros específicos sobre história da matemática foram escritos no século XVII, sendo o mais famoso o *Histoire des mathématiques* de Jean Étienne Montucla (1725 - 1799).

De acordo com Arboleda (1983, p.3), quando se examinam as atividades dos grandes centros matemáticos do final do século XIX e do começo do século XX, o que hoje se diferencia como especificamente História da Matemática, naquela época fazia parte do trabalho matemático comum, pois havia um interesse na história dos objetos a serem estudados e a pesquisa científica em História da Matemática estabeleceu-se institucionalmente.

Segundo Miguel (1996, p.43), quando nos propomos à tarefa de consultar a literatura especializada sobre a participação da história no ensino aprendizagem da Matemática é bastante frequente encontrarmos argumentos reforçadores dessa participação entre matemáticos, historiadores da matemática e educadores matemáticos.

1.3 A História da Matemática e as outras tendências em Educação Matemática

De acordo com Gaspar (2003, p.19), a História da matemática propicia uma forte conexão entre ela e as demais tendências em Educação Matemática, por exemplo a Resolução de Problemas. A autora justifica a afirmação dizendo que a utilização de problemas encontrados em textos históricos nas aulas de matemática permite que professores e alunos apliquem as técnicas que conhecem para resolvê-los, comparem suas estratégias para solucioná-los com aquelas encontradas na história levando-os, por exemplo, a perceberem as vantagens e desvantagens da notação atual, que é possível a utilização dos métodos mais antigos associados aos novos recursos tecnológicos e que isto é bastante enriquecedor.

Para Grugnetti (2000, p.78), a atividade de reconhecer e comparar estratégias é um dos aspectos mais importantes para desenvolver a aprendizagem matemática. Somente quando os estudantes se tornam capazes de comparar diferentes estratégias (não somente para resolver problemas, mas também para provar teoremas) o processo de generalização pode evoluir.

Segundo Gaspar (2003, p.21), estudar e entender os métodos que outros grupos desenvolveram em resposta às suas necessidades pode ajudar os estudantes a identificar as características particulares dos métodos que estão sendo ensinados a eles e melhorar o entendimento de um determinado conceito. Grugnetti e Rogers (2000, p.46) consideram que uma apreciação da contribuição que o multiculturalismo tem feito para nosso pensamento e atitudes oferece aos professores uma boa experiência para perceberem como eles podem estender as ideias formadas sobre a matemática além dos parâmetros previamente colocados pela cultura e sociedade europeias, e valorizar outros modos de ver as coisas. E para Barbin (2000, p.65), conhecer o desenvolvimento histórico da matemática afeta nossa opinião acerca do tempo que nossos alunos gastam no desenvolvimento e entendimento matemático.

Barbin (1996) afirma que:

> O desafio de uma perspectiva histórica é muito mais de fazer os alunos melhor compreenderem a atividade matemática que de os interessar por ela. Hoje, a vontade de interessar parece um pouco abandonada, em benefício de uma simples necessidade de motivar. A motivação é passageira, o interesse é durável. Um ensino que leva em conta o tempo deve considerar o tempo da história.(BARBIN, 1996, p.6-7)

Segundo Poincaré (1998, p.13), é impossível estudar os trabalhos de matemáticos sem perceber e sem distinguir duas tendências opostas, dois tipos de pensamento igualmente necessários ao progresso da ciência e inteiramente diferentes: um tipo preocupado, antes de tudo, com a lógica e outro que se deixa guiar pela intuição. Tais tipos de pensamento são percebidos nos trabalhos matemáticos desde aqueles feitos na Antiguidade até os dias de hoje.

Sebastiani (1994, p.81) afirma que para alcançarmos o conhecimento rigoroso, existe um processo:

1. Intuição,
2. Levantamento de hipóteses,
3. Descoberta e,
4. Validação.

Para o autor, a intuição é tão relevante quanto a lógica, e portanto, é tarefa do educador compreender como elas desempenham papéis diferentes na construção do conhecimento.

De acordo com Gaspar (2003, p.27), uma abordagem proposta por Miguel (1996, p.43) por meio de um estudo histórico pedagógico temático que é, antes de mais nada, um estudo que tende a mostrar como a história pode operar em um nível temático específico da Matemática na tentativa de revelar todo o seu potencial sócio-cultural, humano e educativo mais amplo. É uma reconstituição histórica de um tema ou tópico específico da Matemática que se faz pensando no aluno e no educador matemático, isto é, uma reconstituição histórica com fins estritamente pedagógicos e que tenta ilustrar detalhadamente um modo da história participar organicamente do ensino aprendizagem da Matemática.

Devemos incentivar o uso da criatividade dos alunos na resolução de problemas, pois, segundo Perez (1999, p.267-268), é mais valorizado um trabalhador que tem ideias originais, inovadoras e que pode auxiliar a resolver situações-problema, em oposição a quem nunca demonstrou criatividade em sua atividade. São “mentes criativas” que ajudarão a manter a situação estável e, se possível, a melhorar ainda mais. O autor afirma ainda que o professor para conseguir trabalhar dessa maneira deve ter características próprias, ser ele mesmo criativo e ter uma formação que lhe dê meios para trabalhar desta maneira e assumir estes alunos.

A sala de aula deve ser um ambiente de investigação, onde a motivação e o desafio tem espaço e onde os alunos expressam a sua curiosidade e iniciativa.

Segundo Arboleda (1983, p.20),“a História é um meio para tomar consciência do funcionamento da investigação em Matemática”. Gaspar (2003, p.38) afirma que uma jornada através da História da Matemática capacitaria os estudantes a construírem significados matemáticos e a apoiarem suas novas concepções sobre a Matemática mudando suas crenças e atitudes com relação à Matemática e seu ensino.

1.4 Falando sobre o livro “O Teorema do Papagaio”

No sentido da investigação matemática, nos deparamos com muitos elementos de pesquisa em todo o seu desenvolvimento. Segundo D’Ambrosio (1996), “o fato é que pesquisa é inerente à própria vida”. Em vários momentos, os personagens se lançaram na História da Matemática em busca de respostas aos questionamentos que surgiram no seu dia a dia e nós acreditamos que esta deve ser a atitude dos alunos ao estudarem Matemática, e também do professor ao ensinar.

Também concordamos com Freire (1996, p.14) quando este diz que não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino. Fala-se hoje, com insistência, no professor pesquisador, o que há de pesquisador no professor não é uma qualidade ou uma forma de ser ou de atuar que se acrescente à de ensinar, faz parte da natureza da prática docente a indagação, a busca, a pesquisa. O de que se precisa é que, em sua formação permanente, o professor se perceba e se assuma, porque professor, como pesquisador.

Sobre a investigação no ensino, Mendes (2013, p.185-186) diz que em consequência desse movimento investigatório e didático, se evidenciam cada vez mais os modelos pedagógicos de ensino de Matemática nos quais há fortes tendências à complementaridade entre os estudos referentes à História da Matemática e suas conexões com a aprendizagem dos alunos.

O autor afirma ainda que se faz necessário que o professor lance continuamente em sala de aula, uma prática desafiadora na qual seus alunos se aventurem na busca de sustentação ou revalidação de verdades estabelecidas ao longo da investigação histórica, tendo em vista o aumento de seu domínio conceitual e didático em Matemática. A inclusão de variadas informações literárias deve ser tomada como uma fonte suplementar de contextualização da história da Matemática e, consequentemente, um dispositivo capaz de oportunizar o desenvolvimento de atitude e prática criativa para inserirmos uma dimensão histórica na sala de aula de Matemática como, por exemplo, a inclusão dos trabalhos de Malba Tahan e Lewis Carroll.

Seguindo as orientações dadas por Mendes, buscamos referências nas obras de Malba Tahan e Lewis Carroll e verificamos que existem várias adaptações das obras desses dois autores utilizadas nas escolas, por exemplo, as histórias do livro “O homem que calculava” de Malba Tahan, que são lidas e encenadas pelos alunos, trazendo benefícios de aprendizagem aos alunos envolvidos no projeto, e também aos alunos que assistem às apresentações. Procuramos encontrar outros autores que pudessem trazer tais benefícios às nossas aulas de Matemática, que trabalhassem a História da Matemática de forma a incentivar a criatividade dos alunos.

Após uma breve pesquisa nesse tipo de literatura, encontramos a dissertação de

Rachel Mariotto “A imersão em um mundo mágico e maravilhoso : um estudo sobre a obra literário-educacional de Mario Tourasse Teixeira”e a dissertação de Cristiane Coppe de Oliveira “Do menino “Julinho”à “Malba Tahan”: uma viagem pelo oásis do ensino da matemática”, onde percebemos importantes colocações sobre o tema. Encontramos também o livro “O Teorema do Papagaio”, de Denis Guedj e optamos por utilizá-lo, por termos conseguido identificar que o mesmo traz vários episódios da História da Matemática em paralelo à história dos personagens. Decidimos, então, incluí-lo nas aulas de Matemática.

Neste livro temos o Sr. Ruche, um filósofo em uma cadeira de rodas, dono de uma livraria em Paris, que recebe uma carta de seu antigo amigo Grosrouvre. Este está morando em Manaus e que pretende enviar ao Sr. Ruche uma coleção de livros sobre Matemática, e pede a este último que a organize. Logo no início do livro temos uma carta com as palavras:

> Por que escrevo, passados tantos anos? Para avisar que você vai receber um carregamento de livros [...]. Vou lhe mandar minha biblioteca. Todos os meus livros: algumas centenas de quilos de obras matemáticas. Encontram-se nela todas as joias dessa literatura. Sem dúvida vai achar estranho que, falando de matemática, eu diga literatura. Garanto que há nessas obras histórias que nada ficam a dever às de nossos melhores romancistas. Histórias de matemáticos como, cito ao acaso, os persas Omar Khayyam e al-Tusi, o italiano Niccolò Fontana Tartaglia, o francês Pierre Fermat, o suíço Leonhard Euler. E tantos outros. Histórias de matemáticos, mas também histórias de matemáticas! (GUEDJ, 1999, p. 12).

Esse trecho nos mostra a preocupação do autor em ressaltar o aspecto literário da Matemática, aspecto este trabalhado em todo o livro. D’Ambrosio (1999, p.97) afirma que desvincular a matemática das outras atividades humanas é um dos maiores erros que se pratica particularmente na educação da matemática. Em toda a evolução da humanidade, as ideias matemáticas vêm definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumento para esse fim e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para própria existência.

Vemos no livro a Matemática surgindo para responder a diversos questionamentos da vida cotidiana das pessoas, não podendo realmente ser desvinculada das demais atividades do homem. D’Ambrosio (2011, p.11) diz que a História da Matemática, assim como a História da Ciência, insere-se na história geral. Quando nos referimos a uma época ou uma região, o leitor deve estar sempre atento ao que está se passando nessa época, na região e no mundo, embora haja insistência para que a Matemática e as Ciências sejam consideradas universais, a História da Matemática e das Ciências não pode se afastar dos contextos sociais, políticos, econômicos e culturais.

Temos também a fala de Lorenzato (2008) que diz que a História da Matemática mostra que a Matemática surgiu aos poucos, com aproximações, ensaios e erros, não de forma adivinhatória, nem completa ou inteira. Quase todo pensamento matemático se deu por necessidade do homem, diante do contexto da época. A Matemática é trabalhada dessa forma durante todo o livro, com aproximações, descobertas, sempre respondendo a questionamentos que foram surgindo ao longo da história dos personagens. Miguel (1993) salienta que:

> Somente uma história da matemática pedagogicamente orientada, isto é, uma história viva, humana, esclarecedora e dinâmica, vindo substituir as enfadonhas histórias evolutivas das ideias matemáticas, quase sempre desligadas das necessidades externas e/ou internas que estiveram na base de sua origem e transformação, poderia constituir-se em ponto de referência para uma prática pedagógica problematizadora em matemática que tivesse por meta uma problematização, entendida como simultaneamente lógica, epistemológica, metodológica, psicológica, sociológica, política, ética, estética e didática. (MIGUEL, 1993, p.103).

Temos outro trecho no livro “O Teorema do Papagaio”, o qual nos chamou a atenção:

> Como todos os alunos do mundo, Jonathan cruzara com Tales várias vezes. Todas as vezes, o professor tinha lhe falado do teorema, nunca do homem. Aliás, na aula de matemática, nunca se falava de ninguém. De vez em quando, aparecia um nome, Tales, Pitágoras, Pascal, Descartes, mas era só um nome. Como o de um queijo ou de uma estação de metrô. Também não se falava nem de onde nem de quando a coisa tinha acontecido. As fórmulas, as demonstrações, os teoremas aterrissavam no quadro negro. Como se ninguém os tivesse criado, como se houvessem estado ali desde sempre, como as montanhas e os rios [...]. Matemática não era nem história, nem geografia, nem geologia. Era o quê, exatamente? Essa questão não interessava a muita gente. (GUEDJ, 1999, p. 31).

Nessa parte vimos a percepção sobre as aulas de Matemática de um dos personagens do livro, de que a Matemática é feita de resultados prontos, desenvolvidos por alguém no passado, sem maiores explicações sobre as suas origens e motivações, e essa percepção é comum a muitos alunos. Segundo os PCN, conceitos abordados em conexão com sua história constituem-se veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural. (BRASIL, 1997, p.34). Mas, infelizmente o que mais vemos nas aulas de Matemática são resultados acabados, sem conexão com a história e com a realidade atual dos alunos, o que leva a difuculdades de aprendizagem, indisciplina, entre outros problemas relacionados.

No livro temos sequências de fatos da História de Tales, Pitágoras e Euclides, que podem incentivar a investigação matemática por parte dos personagens e é essa investigação que desejamos incluir nas aulas de Matemática. O livro destaca esta postura de Tales ao enfrentar um desafio, o que serve de incentivo para que os alunos tenham a mesma postura investigativa ao aprenderem geometria. A história de Pitágoras traz muitos benefícios quando é trabalhada em sala de aula. Entre outros motivos citamos o fato de que os alunos conseguem fazer uma aproximação com ele, por ele ter sido um esportista, gostar de viajar, se interessar por música e mecânica. Essa conexão facilita o aprendizado. Euclides tratou de uma geometria dedutiva, baseada em axiomas ou postulados e definições que são empregados para demonstrar a legitimidade de teoremas. A obra Os Elementos, de Euclides, se tornou uma referência de demonstração rigorosa. Segundo Barker (1969, p.28-29) ele sempre enuncia as suas leis de forma universal. Não examina as propriedades de uma determinada linha ou figura realmente existente; examina, ao contrário, as propriedades que todas as linhas ou figuras de tal ou qual espécie devem ter. Não apenas isso, formula as leis de modo a torná-las rigorosas e absolutas – nunca são dadas como simples aproximações.

Barker (1969) afirma que a geometria demonstrativa de Euclides não se trata de um mero agrupamento de dados desconexos, mas sim de um sistema lógico, chamado método axiomático. Este é um método de provar que resultados matemáticos estão corretos. Sant'Anna (2003, p.135) afirma que o método axiomático veio ao mundo para mostrar sua beleza para aqueles que desejam vê-la. Toda essa aventura faz parte do processo criativo da atividade científica que, assim como a vida, é repleta de facetas e surpresas . Esse método axiomático é citado até nos PCN quando trazem que o ensino de Geometria no Ensino Fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Toda vez que um campo do conhecimento se organiza a partir de algumas verdades eleitas, preferivelmente poucas, simples e evidentes, então se diz que esse campo está apresentado de forma axiomática. Esse é o caso, por exemplo, da geometria clássica. (BRASIL, 2002, p.125).

Temos portanto, no livro, a Matemática que surge como resposta aos problemas do cotidiano dos personagens, incentivando a investigação matemática, que é a postura que esperamos dos alunos, e também vemos a importância do método axiomático, utilizado até hoje, como já citado nos PCN.

1.5 Livros didáticos e a História da Matemática: Uma Reflexão

Segundo Costa e Allevato (2010, p.72) o livro didático é um dos instrumentos mais utilizados pelos professores para organização e desenvolvimento das atividades em sala de aula e, até mesmo, para aprimorar seu próprio conhecimento sobre o conteúdo e, para os alunos, trata-se de uma fonte muito valiosa de informação, que deveria despertar o interesse e o gosto pela leitura, além do avanço nos estudos. Portanto, o livro didático deve ser muito bem organizado tanto para o professor, que o tem como apoio pedagógico, quanto para os alunos, que poderão utilizá-lo para estudarem sozinhos.

Mendes (2001) afirma que a utilização da história da matemática em alguns livros didáticos adotados na rede de ensino reduz-se, na maioria das vezes, a meras biografias de alguns matemáticos famosos e a algumas informações sobre o desenvolvimento cronológico da matemática abordada. Em poucos livros são encontrados dados históricos diretamente envolvidos na organização do conteúdo dos mesmos.

De acordo com Fossa (2006) na maioria dos livros didáticos de Matemática, a História da Matemática é utilizada apenas como curiosidade, em textos complementares e, não como ferramenta didática, e complementa dizendo que "Seu verdadeiro uso como um instrumento pedagógico, porém, somente ocorre quando conceitos e problemas históricos são integrados na rotina diária da sala de aula e se tornam parte da experiência matemática do aluno." (Fossa, 2006, p.140).

Adotando as referências citadas a respeito da História da Matemática presente nos livros didáticos, fizemos uma breve análise dos livros didáticos apresentados à escola em que lecionamos no ano de 2016. Isso ocorreu pois no ano citado, houve mais um momento de escolha do livro didático através do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), o qual acontece a cada três anos. A dinâmica é a seguinte: os autores dos livros pré-aprovados pelo Ministério da Educação (MEC) enviam exemplares das coleções para as escolas e, nós os professores da rede de ensino público, fazemos a análise de cada coleção a fim de escolhermos os livros que serão utilizados nos próximos três anos. De acordo com o site : $< http://www.fnde.gov.br/pnld-2017/ >$, temos que: O processo de avaliação do PNLD 2017 teve início com a publicação do Edital de Convocação 02/2015 – CGPLI, no Diário Oficial da União (DOU) de 02/02/15, seção 3, página 38, documento orientador das editoras para a inscrição das coleções didáticas a serem submetidas à avaliação pedagógica. O processo de avaliação foi realizado por universidades públicas, sob a coordenação da Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC). Essas universidades foram selecionadas por meio de concorrência pública, conforme Portaria SEB/MEC nº 28, de 10/08/2015, publicada no DOU de 11/08/2015, que divulga o resultado dessa seleção.

As instituições parceiras responsáveis por planejar, organizar e executar todo o processo avaliativo pedagógico do PNLD 2017 foram as seguintes:

- Arte: Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS;
- Ciências: Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM;
- Geografia: Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS;
- História: Universidade Estadual de Londrina – UEL;
- Língua Estrangeira Moderna: Universidade Federal da Bahia – UFBA;
- Língua Portuguesa: Universidade Federal de Pernambuco – UFPE;
- Matemática: Universidade Federal de Pernambuco – UFPE.

O Guia de cada componente curricular apresenta as coleções didáticas aprovadas no processo avaliativo, por meio de resenhas que informam aos professores da rede pública de ensino as características pedagógicas de cada coleção, seus pontos fortes e suas limitações. Para subsidiar de forma eficiente o seu trabalho, a análise das obras foi realizada de acordo com os princípios e os critérios gerais que constam do edital acima referido, base para a elaboração dos critérios específicos dos componentes curriculares, bem como da elaboração das fichas de avaliação, que se encontram registradas nos respectivos Guias.

Nesta edição do PNLD tivemos onze coleções de Matemática como opções:

1. PRATICANDO MATEMÁTICA (EDIÇÃO RENOVADA), Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos;
2. DESCOBRINDO E APLICANDO A MATEMÁTICA, Alceu dos Santos Mazzieiro, Paulo Antônio Fonseca Machado;
3. MATEMÁTICA DO COTIDIANO, Antonio José Lopes Bigode;
4. MATEMÁTICA - COMPREENSÃO E PRÁTICA, Ênio Silveira;
5. PROJETO TELÁRIS - MATEMÁTICA, Luiz Roberto Dante;
6. PROJETO ARARIBÁ - MATEMÁTICA , Mara Regina Garcia Gay;
7. MATEMÁTICA - IDEIAS E DESAFIOS , Dulce Satiko Onaga, Iracema Mori;
8. MATEMÁTICA - BIANCHINI, Edwaldo Bianchini;
9. MATEMÁTICA NOS DIAS DE HOJE - NA MEDIDA CERTA, José Jakubovic, Marília Centurión;

10. CONVERGÊNCIAS - MATEMÁTICA, Eduardo Chavante;

11. VONTADE DE SABER - MATEMÁTICA, Joamir Souza, Patricia Moreno Pataro;

Ao analisarmos cada livro buscando a contribuição da História da Matemática, percebemos que esta se encontra apenas como curiosidade, no sentido em que Fossa(2006, p.140) se refere, no início ou final de alguns capítulos, ou em forma de exercícios. Mendes (2001) afirma que: "Em alguns livros didáticos a História aparece como um elemento descartável nas atividades de sala de aula". Zúniga (1988) traz que:

> A participação da história nos conteúdos matemáticos como recurso didático não só serve como elemento de motivação, mas também como fator de melhor esclarecimento do sentido dos conceitos e das teorias estudadas. Não se trata de fazer uma referência histórica de duas linhas ao iniciar um capítulo, mas de realmente usar a ordem histórica da construção matemática para facilitar uma melhor assimilação durante a reconstrução teórica. Isso é central. Os conceitos e noções de matemática tiveram uma ordem de construção histórica. Isso põe em evidência os obstáculos que surgiram em sua edificação e compreensão. Ao recriar teoricamente esse processo é possível revelar seus sentidos e seus limites. A história deveria servir, então, como instrumento mais adequado para estruturação do delineamento mesmo da exposição dos conceitos. (ZÚNIGA, 1988, p.34).

Quando o trabalho com a História da Matemática é feito dessa forma, mostrando o caminho histórico dos conteúdos, as limitações encontradas pelos matemáticos, as diferenças na forma de se fazer Matemática em cada civilização, ele é muito mais significativo para o aluno, pois este se faz participante de todo o processo que trouxe a nós essa Matemática que conhecemos atualmente. O aluno deixa de ser um mero expectador e participa ativamente da construção do seu próprio conhecimento.

Os PCN também nos informam que:

> Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos da ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol dos conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos. (BRASIL, 1997, p.23).

Miguel e Miorim (2004, p.52) trazem que os parâmetros consideram várias outras funções que a história poderia desempenhar em situações de ensino, tais como o desenvolvimento de atitudes e valores mais favoráveis diante do conhecimento matemático, o resgate da própria identidade cultural, a compreensão das relações entre tecnologia e herança cultural, a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos matemáticos, a sugestão de abordagens diferenciadas e a compreensão de obstáculos encontrados pelos alunos.

Percebe-se então a valorização da História da Matemática por parte do Ministério da Educação ao elaborarem os Parâmetros Curriculares Nacionais, porém é o mesmo Ministério que aprova os livros didáticos para serem utilizados nas escolas, sem que estes tragam em suas propostas os aspectos tão valorizados sobre a História da Matemática.

Percebemos uma lacuna entre as propostas governamentais e a efetivação dessas propostas no dia a dia escolar. Se os livros didáticos de Matemática contemplassem a História da Matemática na totalidade das palavras dos PCN, teríamos neles um material riquíssimo para a disciplina de Matemática nas escolas do país inteiro, e acreditamos que um trabalho assim poderia melhorar o desempenho dos alunos nessa disciplina.

A respeito da Base Nacional Curricular Comum (BNCC), mais especificamente em relação à área de Matemática, a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) nos trouxe alguns documentos que nos ajudaram a refletir sobre a terceira versão da proposta da BNCC, elaborada pelo Ministério da Educação.

Em relação à História da Matemática, este documento nos revela que "A História da Matemática recebe pouca ênfase." Ripoll et al (2016, p.9) nos informam que a História da Matemática é citada apenas três vezes em todo o texto e "nenhuma dessas passagens aponta satisfatoriamente, além de serem bastante vagas, para o potencial da História da Matemática para o ensino e a aprendizagem da disciplina. Recomenda-se que a História da Matemática receba maior atenção no documento." Observamos que o documento sobre a BNCC foi homologado pelo ministro da Educação, Mendonça Filho, quarta-feira, 20 de dezembro de 2017, e nesse documento observamos que a História da Matemática fora citada apenas duas vezes. É possível notar que há um incentivo à leitura e interpretação de textos pelos alunos, porém de forma muito superficial, sem indicar como isso será feito.

2 ALGUMAS CIVILIZAÇÕES

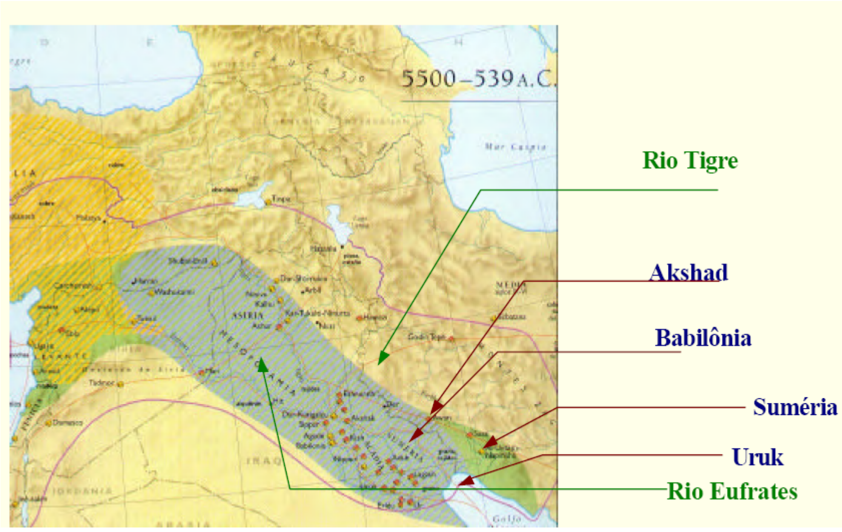
Trataremos, neste capítulo, da história de algumas civilizações da antiguidade, destacando a contribuição não europeia para a Matemática. As informações históricas têm base no trabalho "Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores", de Maria Terezinha Jesus Gaspar. Segundo Gaspar (2003, p.46), as primeiras civilizações surgiram entre 3500 e 500 a.E.C. e entre elas estão a do Egito, da Mesopotâmia, da China e da Índia. Um dos fatores favoráveis ao surgimento de civilizações nestas regiões é o ambiente geográfico, já que todas surgem em vales de rios onde as terras eram facilmente cultiváveis. Portanto, todas estas sociedades são exemplos de sociedades altamente dependentes da agricultura, de sistemas de irrigação e da astronomia para os quais a matemática foi desenvolvida (Gaspar, 2003, p.43).

2.1 Mesopotâmia

A civilização mesopotâmica começou por volta de 3500 a.E.C. nos vales dos rios Tigre e Eufrates. No passado foi chamada de babilônica ou babilônico-assíria, embora não tenha sido fundada nem pelos babilônios nem pelos assírios e sim com o surgimento das cidades-estado sumérias.

A Mesopotâmia, antigo nome grego do atual Iraque, é uma faixa de terra de cerca de 1100 km de comprimento formada pelos vales dos rios Tigre e Eufrates como pode ser visto na figura aqui representada como Figura 2.1. Séculos de drenagem dos dois grandes rios, que se originam na parte mais elevada do país, bem como as inundações anuais, criaram um solo de grande riqueza nas áreas em torno dos deltas.

Figura 2.1: Mapa da região da Mesopotâmia



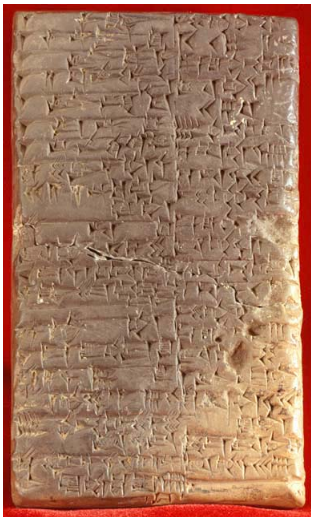
FONTE: HAYOOD, J. p. 23

As repentinas e violentas mudanças de curso do Tigre e Eufrates tornaram necessária a construção de canais para desviar a água, e de barreiras, o que propiciou o desenvolvimento de técnicas para a construção de plataformas de junco e barro sobre as quais foram construídas as primeiras casas. Além disso, as cidades-estado eram cercadas por muros de argila para afastar as inundações e os inimigos.

Eles escreviam em argilas usando uma ferramenta denominada cunha[1]. A cunha foi criada pelos Sumérios, principalmente para utilizar na escrita cuneiforme (utilizando objetos em forma de cunha) por volta de 3.500 a.E.C. Como pode ser vista na Figura 2.2.

[1]Cunha é uma ferramenta de metal ou madeira dura, em forma de prisma agudo em um dos lados, e que se insere no vértice de um corte para melhor fender algum material (como madeira ou pedras), bem como para calçar, nivelar, ajustar uma peça qualquer.

Figura 2.2: Escrita Cuneiforme em uma Tábula



FONTE: https://pt.wikipedia.org/wiki/Escrita_cuneiforme

Uma grande porcentagem de textos matemáticos da Mesopotâmia encontrada nas tábulas[2] estão relacionados a questões hidráulicas como a construção de canais e diques, a medição de campos, etc. Isto é razoável devido ao fato da Mesopotâmia possuir um amplo sistema de irrigação artificial. Além disso, é possível identificar no conhecimento matemático deste povo o alto nível das técnicas de cálculo provavelmente desenvolvidas para servirem de apoio a ampla atividade comercial.

Com relação ao conhecimento geométrico este revela sua origem prática: juntamente com o cálculo de áreas de campos aparecem cálculos dos rendimentos totais dos terrenos, dependentes de um rendimento específico, que é função da qualidade do solo. No cálculo de taludes com perfil trapezoidal está também calculado o número de trabalhadores necessários por jornada média de trabalho. Aparecem também cálculos relativos à construção de tabiques com forma de anel, de alicerces de templos, poços e canais. Existe evidência de que os babilônios estavam familiarizados com regras para calcular áreas de retângulos, triângulos retângulos, triângulos isósceles e trapézios com um lado perpendicular às bases.

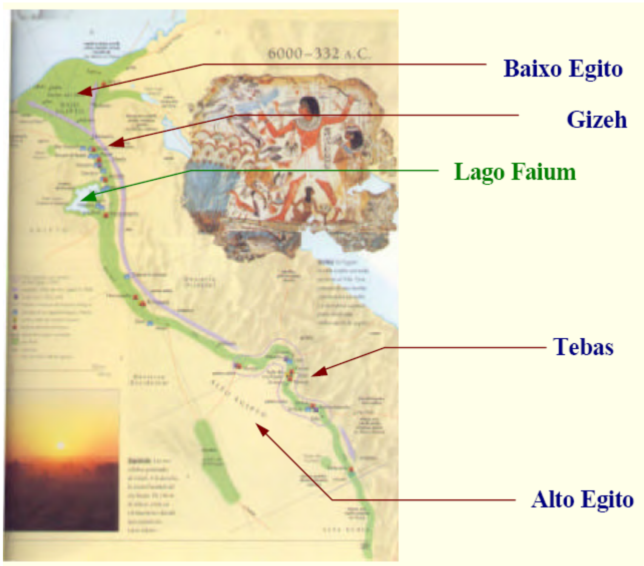
De acordo com alguns estudiosos, além das aplicações em problemas práticos, há um início de um trabalho teórico na matemática babilônica, apesar de não terem sido encontradas provas de teoremas. Há trabalhos babilônicos que envolvem o teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos que se anteciparam aos trabalhos gregos em mais de 1000 anos.

[2]Tábulas são placas de madeira, pedra ou outros materiais, utilizadas para os registros.

2.2 Egito

O Egito está situado no nordeste da África, entre os desertos do Saara e da Núbia. É cortado pelo rio Nilo no sentido sul-norte, formando duas regiões distintas: o vale, estreita faixa de terra cultivável, apertada entre desertos, denominada Alto Egito e o delta, em forma de leque, com maior extensão de terras aráveis, pastos e pântanos, denominada Baixo Egito, como pode ser visto na Figura 2.3.

Figura 2.3: Mapa da Região do Egito



FONTE: HAYOOD, J. p. 27

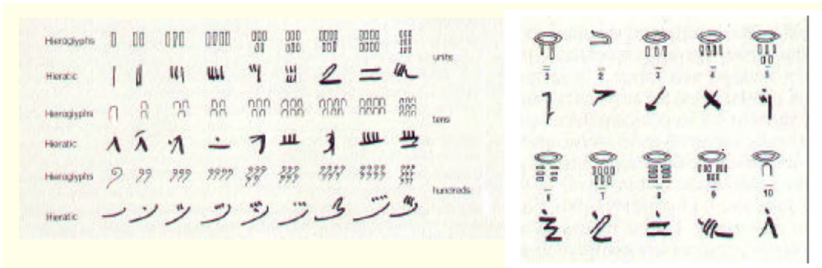
Como as enchentes do Nilo, ao contrário do que ocorria com o Tigre e o Eufrates, eram regulares e previsíveis, os egípcios não precisavam de trabalhos de recuperação de terras. Além disso, a proteção natural dos desertos e das montanhas mantinha este povo em isolamento, livre de invasões estrangeiras e vivendo pacificamente. A agricultura surgiu no vale do Nilo a partir de 6000 a.E.C. e por volta de 4000 a.E.C. os primeiros egípcios se fixaram às margens do Nilo, iniciaram o cultivo de plantas (trigo, cevada, linho) e a domesticação de animais (bois, porcos e carneiros).

A escrita egípcia foi gradualmente desenvolvida pelos escribas[3], com a qual marcavam as sepulturas e templos. Eles se encarregavam de arrecadar os impostos, dirigiam gigantescos exércitos de trabalhadores e desempenhavam trabalhos judiciais. Os escribas utilizavam a matemática para resolver questões relativas à medição de terras, especialmente depois das contínuas e periódicas inundações do Nilo, ao cálculo de impostos e contribuições, ao cálculo da capacidade dos depósitos de provisões, à projeção de obras

[3]Escribas eram as pessoas que faziam os registros (escrita), arrecadavam impostos, faziam cálculos e desempenhavam trabalhos judiciais.

arquitetônicas, etc. Estes assuntos aparecem nos principais papiros[4] matemáticos encontrados. Na Figura 2.4 aparecem números e frações em hieróglifos[5].

Figura 2.4: Números e Frações



FONTE: ROBINS, G.; SHUTE C. p. 12-13

O papiro Ahmes foi descoberto por volta de 1850, provavelmente nas ruínas de uma pequena construção próxima ao templo mortuário de Ramssés II em Tebas. Foi trazido para Luxor junto com outras antiguidades egípcias por Alexander Henry Rhind. Após a morte de Rhind o papiro foi comprado pelo Museu Britânico em 1865. Hoje ele é formado por um rolo contendo 14 folhas de papiros, com cerca de 40 cm de largura e 23 cm de altura, coladas em um de seus lados perfazendo 513 cm de comprimento, mas parece que o rolo original continha 20 folhas. Na figura aqui representada por Figura 2.5, podemos ver parte do papiro.

Figura 2.5: Papiro Ahmes

FONTE: http://antigoegito.org/enigmas-matematicos-em-antigos-papiros-egipcios/

Ele também é conhecido como papiro Ahmose em razão de ter sido copiado por

[4]Papiro era um tipo de papel usado pelos antigos egípcios para fazer os registros. Era obtido da planta de mesmo nome.

[5]Hieróglifo é cada um dos sinais da escrita de antigas civilizações, tais como os egípcios, os hititas, e os maias.

volta de 1650 a.E.C. pelo escriba Ahmose segundo o qual é uma cópia de trabalhos mais antigos. Provavelmente, trata-se de um registro dos conhecimentos de Imhotep, o lendário físico e arquiteto da época do faraó Djozer da Terceira Dinastia. Ele contém 87 problemas e suas soluções e, é considerado, a fonte da matemática egípcia mais completa.

Os egípcios foram os primeiros entre todos os homens a descobrirem o ciclo do ano e a dividir em doze períodos o curso das estações. Atribuíram trinta dias a cada um dos doze meses e acrescentaram cinco dias a cada ano de modo a fazerem coincidir o ciclo completo das estações com o calendário.

Durante o reinado de Sesôstris, foram construídos canais que cortaram o Egito em todos os sentidos. Além disso, esse rei dividiu o território do Egito entre todos os egípcios, dando a cada um deles um lote quadrado igual de terra e impondo-lhe o pagamento de um tributo anual. Qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra poderia ir a Sesôstris e expor-lhe a ocorrência; então o rei mandava homens seus observar e medir a extensão do decréscimo da terra para conceder ao detentor do lote uma redução do tributo proporcional a perda.

Os egípcios resolviam problemas sobre volumes de sólidos, calculavam áreas de retângulos, triângulos e trapézios isósceles, provavelmente pelo método de decomposição e recomposição de figuras, e obtiveram valores aproximados para π. Seus estudos eram voltados à Arquitetura. Construíram as Pirâmides (por volta de 3000 a.E.C.), construíram barcos, barragens e canais utilizando seu conhecimento geométrico. A Pirâmide de Quéops tem a base quadrada e sua altura é igual ao comprimento dos lados. Toda ela foi feita com blocos de pedra polida, cujo comprimento não é inferior a 30 pés, o que equivale a aproximadamente 9,14 metros.

2.3 China

A China foi fundada pelo imperador Huang Di no ano de 2689 a.E.C. porém, há evidências da existência de uma sociedade anterior no local, a Dinastia Shang. A Figura 2.6 mostra o mapa da China nesse período.

Figura 2.6: Mapa da China

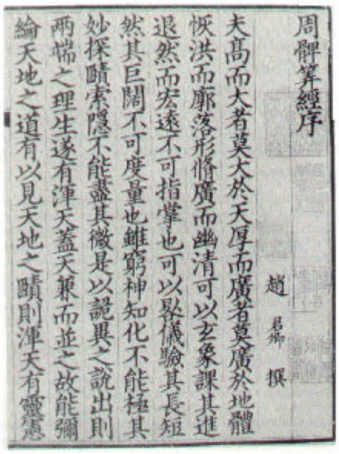
FONTE: HAYOOD, J. p.5

No governo Shang foram construídas fortificações e cidades, e ocorreu a unificação da moeda. Neste período, pode ter se iniciado o desenvolvimento de uma matemática básica. A corte Shang possuía escribas e arquivistas, e era uma monarquia culta produzindo provavelmente a primeira cultura letrada a leste da Mesopotâmia.

A dinastia Shang foi substituída, por volta do começo do primeiro milênio antes da Era Comum pela dinastia Zhou – uma tribo do oeste do vale – que se dissolveu devido a numerosas guerras com estados feudais. Esta dinastia foi a mais duradoura da Antiga China. O período feudal terminou com a absorção dos estados mais fracos pelos mais fortes, até que a China foi unificada na época do imperador Ch'in Shi Huangdi em 221 a.E.C. de quem o país herdou seu nome. Sob sua liderança a China foi transformada no mais alto estado burocrático centralizado. Ele adotou um código legal severo, proibiu os costumes locais, exigiu a padronização dos pesos, medidas e da escrita. Para defender-se dos invasores nômades Ch'in Shi Huangdi construiu uma muralha contínua, de terra batida, de mais de 1600 km de comprimento – a Grande Muralha da China - que foi terminada durante a Dinastia Qin.

Depois disso veio a dinastia Han, onde houve um crescimento da capacidade produtiva, e a partir deste, um crescimento no desenvolvimento da ciência e da tecnologia e, consequentemente, da Matemática. Por exemplo, a produção agrícola exigia previsões mais precisas das estações e isto levou à construção de calendários e ao estudo da astronomia. O mais antigo trabalho escrito em chinês sobre a Astronomia e a Matemática e que sobreviveu até nossos dias é o conhecido na literatura como ou *Chou-pei*, ou *Chou-pi*, ou *Chou-pei Suan King*, ou *Zhoubi suanjing*. Trata-se de um livro de astronomia, o qual está representado aqui como Figura 2.7.

Figura 2.7: Zhoubi suanjing



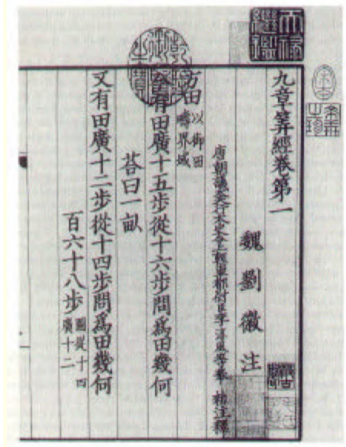
周髀算經序
趙君卿撰
夫高而大者莫大於天厚而廣者莫廣於地體
恢洪而廓落形脩廣而幽清可以玄象課其進
退然而宏遠不可指掌也可以晷儀驗其長短
然其巨闊不可度量也雖窮神知化不能極其
妙探賾索隱不能盡其微是以詭異之說出則
兩端之理生遂有渾天蓋天兼而並之故能彌
綸天地之道有以見天地之賾則渾天有靈憲

FONTE: YAN, L.; SHÍRÀN, D. p. 26.

Apesar do *Zhoubi suajing* conter conhecimentos matemáticos bastante avançados, seu principal objetivo era apresentar o conhecimento adquirido no estudo da astronomia e, sendo assim, não é um trabalho especificamente matemático. Ele é, na realidade, um livro completo sobre cosmologia, com deduções dependentes mais dos cálculos do que do misticismo, embora, em alguns diálogos, perceba-se uma mistura de misticismo, astronomia e mensuração. Seu conteúdo está relacionado com calendários e com problemas de cálculos com sombras. Os autores já usavam um tipo de numeração decimal e conheciam como somar, subtrair, multiplicar e dividir frações e como extrair a raiz quadrada de qualquer número. Eles também conheciam o Teorema, dito de Pitágoras, para os triângulos de lados (3, 4, 5) e (6, 8, 10); usavam o valor 3 para a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo e sabiam como trabalhar com semelhança de triângulos retângulos.

O mais antigo trabalho escrito específico sobre matemática na China que sobrevive até hoje é o *Jiuzhang suanshu*, o qual representamos aqui como Figura 2.8.

Figura 2.8: Página do livro *Jiuzhang suanshu*



FONTE: YAN, L.; SHÍRÀN, D. p.36

Este trabalho também é conhecido na literatura pelos nomes *Chiu-chang suan shu*, *K'iu-ch'ang Suan Shu* e é considerado o trabalho representativo do desenvolvimento da antiga matemática chinesa das dinastias Zhou e Qin até a dinastia Han; foi uma influência extremamente importante nos desenvolvimentos posteriores da matemática chinesa e, de acordo com alguns estudiosos, foi, de fato, a base deste desenvolvimento. Ele é considerado um clássico da matemática da antiga China.

O *Jiuzhang suanshu* foi composto na forma de perguntas e respostas, contém 246 problemas divididos em nove capítulos e possui uma estrutura didática que basicamente envolve a apresentação de um ou mais problemas que são resolvidos usando algum método particular cuja abordagem é essencialmente indutiva. Em outros momentos, os problemas são usados como exemplos após o entendimento de um determinado assunto, e, em um terceiro momento, o método de solução é utilizado para resolver problemas práticos.

Esta forma "problema $\Rightarrow$ solução " exerceu uma forte influência nos trabalho matemáticos chineses posteriores.

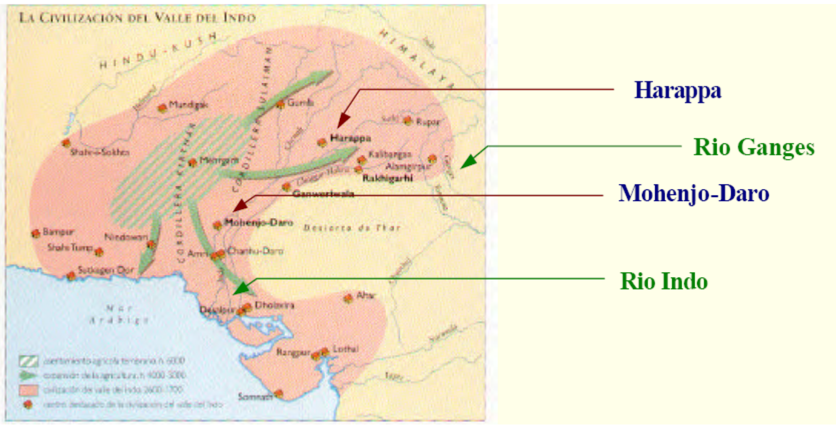
Do terceiro ao sexto século a matemática chinesa entrou em sua fase teórica. Pela primeira vez, parece, foi dada importância a provas e passaram a registrá-las por escrito. No final do terceiro século Liu Hui obteve valores mais precisos para π e, o volume da esfera usando o, que hoje conhecemos como princípio de Cavalieri, e o volume da pirâmide foi calculado usando quantidades infinitamente pequenas. Tudo isto é encontrado nos diversos comentários do *Jiuzhang suanshu*. Durante as dinastias Sui (518-617) e Tang (618-907) a matemática passou a ser ensinada oficialmente, baseada em um conjunto de livros antigos e contemporâneos. Estes livros incluíam o *Zhoubi suanjing* e o *Jiuzhang suanshu*.

Os conteúdos do *Jiuzhang suanshu* estão diretamente relacionados com problemas da vida real e refletem a sabedoria e as habilidades das pessoas da antiga China.

2.4 Índia

Por volta do quarto milênio a.E.C. se formou pela primeira vez no território indiano uma sociedade de classes, localizada exatamente no vale do Indo. A agricultura nesta região foi favorecida e o vale deu lugar ao nascimento de uma das primeiras civilizações, a antiga Índia há aproximadamente 2500 a.E.C. Na figura 2.9 ilustramos a região a qual iremos trabalhar neste tópico.

Figura 2.9: Mapa da Índia



FONTE: HAYOOD, J. p. 56

A Geometria na Índia teve três períodos distintos: o primeiro traz evidências de um conhecimento geométrico nas cerâmicas que contém uma série de círculos que se interceptam, quadrados, triângulos unidos pelo vértice, retângulos com os quatro lados encurvados, etc. No segundo período, o conhecimento geométrico está relacionado às exigências teóricas para a construção de altares de tijolos. No terceiro período, os indianos demonstram conhecer o teorema, que hoje denominamos de Pitágoras, desenhavam figuras de uma área dada e figuras de área igual a de outras (GASPAR, 2003, p.67-69).

Os Sulbasutras são manuscritos que foram escritos pelos habitantes do noroeste da Índia por volta de 1500 a.E.C. Eles são as fontes do conhecimento geométrico da Antiga Índia.

A geometria dos Sulbasutras é principalmente construtiva, embora, ocasionalmente, fosse observado e formulado algum resultado geométrico envolvido. As figuras geométricas, usadas para formar os altares, incluíam: triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, círculos, semicírculos, retângulos com um semi-círculo sobre um lado, e assim por diante, que deveriam ajustar-se a dimensões ou áreas específicas. A orientação, formas e áreas dos altares tinham que ser rigorosamente exatas, e esta exatidão era tão importante quanto a pronúncia correta dos cânticos e recitais védicos (os mantras). Portanto, métodos precisos de construção estavam envolvidos.

2.5 A geometria nessas civilizações

O círculo e o quadrado são duas formas geométricas que aparecem nas civilizações indiana, chinesa, babilônica e egípcia. Estas formas estão associadas a rituais religiosos, astronomia, arquitetura ou tecelagem e muito conhecimento geométrico pode ser identificado nestas civilizações a partir da análise de como essas formas foram incorporadas à cultura de cada um desses povos.

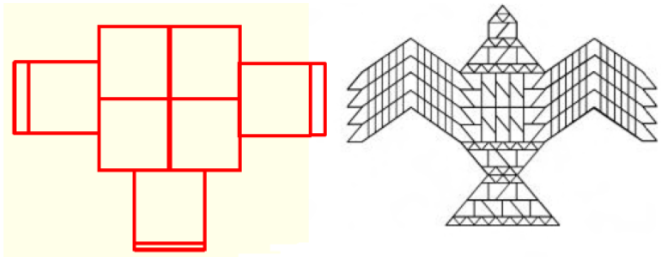
Soluções aproximadas para o problema da quadratura do círculo, um dos problemas clássicos da geometria grega, também aparecem no estudo de algumas dessas outras civilizações.

De acordo com Pennick (1999, p. 16), o círculo talvez seja o símbolo mais antigo desenhado pela raça humana e, desde o início, exerceu um papel mais importante do que o simplesmente decorativo: ele emerge como uma roda, usado no transporte, agricultura e cerâmica; é utilizado como símbolo do divino – nas culturas orientais o retângulo representa o mundo material enquanto o círculo representa a forma divina comprometida com a unidade. Simples de ser executado, é uma forma cotidiana encontrada na natureza, vista nos céus como os discos do sol e da lua, presente na forma das plantas, dos animais e nas estruturas geológicas naturais.

Quanto à discussão da época e de como o círculo e o quadrado surgiram, Seidenberg (1963, p.523) afirma que estas formas remontam à pré-história; surgiram de atividades rituais; são figuras sagradas e duais e foram estudadas pelos sacerdotes pela mesma razão que estudaram as estrelas: para conhecer melhor os deuses. Por outro lado, Gerdes (1985, p.35 e p.58) afirma que a primeira noção de retângulo pode ter surgido através da confecção de esteiras e a formação do conceito de círculo a partir da fabricação de formas cada vez mais adequadas a suas necessidades ou observadas na natureza.

Os antigos indianos associavam os deuses a quadrados e os humanos a retângulos. A associação de deuses gerava um novo deus e isso os levou a buscarem a solução para resolver vários problemas geométricos. Um dos mais famosos e complexos altares indianos da época védica é o Altar do Falcão. Sua estrutura básica é formada por 7 quadrados como pode ser visto na Figura 2.10.

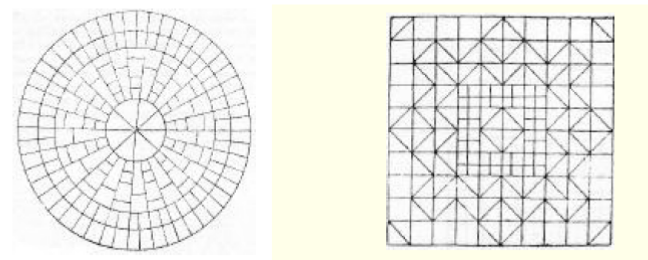
Figura 2.10: Altar do Falcão



FONTE: SEIDENBERG, A.p.491

De acordo com Sarasvati, (1987, p. 141 e 193) alguns altares indianos são circulares como o altar *Sararathacakracit* na forma de uma roda com raios e outros quadrados como os diversos níveis do altar *Samuhaya*, como pode ser visto na Figura 2.11.

Figura 2.11: Altares indianos



‘

FONTE: SARASVATI, S. S. P. p. 141 e p. 192

Segundo Pennick (1999, p.43) e Guedes (1985, p.129), a Pirâmide Escada, representada aqui como Figura 2.12, tinha uma planta baixa quadrada e era mais uma “montanha sagrada” em forma de escada do que uma pirâmide de lados nivelados.

Figura 2.12: Pirâmide Escada

FONTE: GASPAR, 2003, p.106

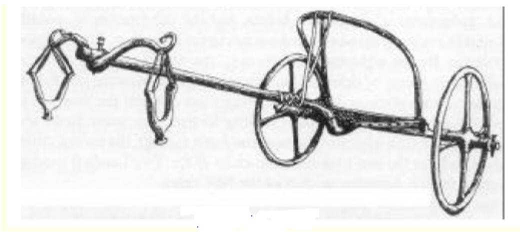
De acordo com Guerdes (1985, p.128) a maior pirâmide, a de Gizeh no Egito representada na Figura 2.13, que tinha 147 m de altura e foi considerada na Antiguidade uma das sete maravilhas do mundo, possuía a base quadrada.

Figura 2.13: Pirâmide de Gizeh

FONTE: GASPAR, 2003, p.106

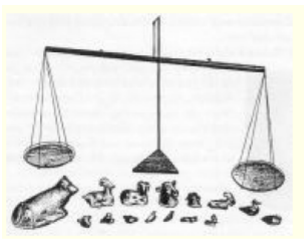
Childe (1958, p.128) e Skinner (1958, p.783) trazem os usos do círculo, que pode ser encontrado nas carruagens egípcias do século XV a.E.C., como a representada na Figura 2.14 e nos pratos das balanças de madeira egípcias de cerca de 1350 a.E.C., representada na Figura 2.15.

Figura 2.14: Carruagens egípcias



FONTE: SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. (Ed) p. 726

Figura 2.15: Pratos das balanças egípcias



FONTE: SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R.(Ed) p. 783

Percebemos que nessas civilizações era grande a preocupação com a observação, o estudo e o desenvolvimento da geometria. Através delas temos vários resultados importantes para a Matemática moderna. Esperamos utilizar algumas ideias dessas culturas, principalmente a dos indianos, para elaborar um material que contenha atividades onde a História da Matemática apareça como recurso pedagógico. No próximo capítulo veremos alguns problemas estudados na Antiguidade cuja relevância permanece até os dias de hoje.

3 ATIVIDADES

Neste capítulo, propomos atividades a serem desenvolvidas com os alunos do 9º ano do ensino fundamental. Relacionaremos a História da Matemática com a geometria, principalmente o conteúdo de áreas de figuras planas. Segundo o Conteúdo Básico Comum-CBC, ao concluir o Ensino Fundamental (1º ao 9º ano), o aluno deve em geometria:

1. Reconhecer as principais propriedades dos triângulos isósceles e equiláteros, e dos principais quadriláteros: quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio, losango.
2. Identificar segmento, ponto médio de um segmento, triângulo e seus elementos, polígonos e seus elementos, circunferência, disco, raio, diâmetro, corda, retas tangentes e secantes.
3. Identificar ângulo como mudança de direção.
4. Identificar retas concorrentes, perpendiculares e paralelas.
5. Reconhecer e descrever objetos do mundo físico utilizando termos geométricos.
6. Reconhecer a altura de um triângulo relativa a um de seus lados.
7. Utilizar os termos ângulo, paralelas, transversais e perpendiculares para descrever situações do mundo físico ou objetos.
8. Reconhecer as relações entre os ângulos formados por retas paralelas com uma transversal.
9. Utilizar as relações entre ângulos formados por retas paralelas com transversais para obter a soma dos ângulos internos de um triângulo.
10. Reconhecer triângulos congruentes a partir dos critérios de congruência.
11. Resolver problemas que envolvam critérios de congruência de triângulos.
12. Utilizar congruência de triângulos para descrever propriedades de quadriláteros: quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos.

13. Construir perpendiculares, paralelas e mediatriz de um segmento usando régua e compasso.
14. Construir um triângulo a partir de seus lados, com régua e compasso.
15. Resolver problemas que envolvam o teorema de Tales.
16. Reconhecer triângulos semelhantes a partir dos critérios de semelhança.
17. Resolver problemas que envolvam semelhança de triângulos.
18. Utilizar semelhança de triângulos para obter o teorema de Pitágoras.
19. Resolver problemas que envolvam o teorema de Pitágoras.
20. Reconhecer a necessidade de medidas padrão.
21. Relacionar o metro com seus múltiplos e submúltipos.
22. Escolher adequadamente múltiplos ou submúltiplos do metro para efetuar medidas.
23. Utilizar instrumentos para medir comprimentos.
24. Fazer estimativas de medidas lineares tais como comprimentos e alturas.
25. Resolver problemas que envolvam o perímetro de figuras planas.
26. Relacionar o metro quadrado com seus múltiplos e submúltipos.
27. Escolher adequadamente múltiplos ou submúltiplos do metro quadrado para efetuar medidas.
28. Fazer estimativas de áreas.
29. Resolver problemas que envolvam a área de figuras planas: triângulo, quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio, discos ou figuras compostas por algumas dessas.
30. Relacionar o metro cúbico com seus múltiplos e submúltipos.
31. Relacionar o decímetro cúbico com o litro e o mililitro.
32. Escolher adequadamente múltiplos ou submúltiplos do metro cúbico para efetuar medidas.
33. Fazer estimativas de volumes e capacidades.

34. Resolver problemas que envolvam cálculo de volume ou capacidade de blocos retangulares, expressos em unidade de medida de volume ou em unidades de medida de capacidade: litros ou mililitros.

35. Utilizar o grau como unidade de medida de ângulo.

36. Utilizar instrumentos para medir ângulos.

37. Resolver problemas que envolvam o cálculo de medida de ângulos internos ou externos de um polígono.

38. Calcular a área lateral ou total de figuras tridimensionais, bloco retangular, cilindro, pirâmide.

39. Reconhecer a planificação de figuras tridimensionais - cubo, bloco retangular, cilindro, cone e pirâmide.

40. Construir figuras tridimensionais a partir de planificações.

41. Calcular a área lateral ou total de uma figura tridimensional a partir de sua planificação.

Nosso objetivo é desenvolver nos alunos as habilidades constantes no item 29. Para tanto, usaremos a proposta feita por Maria Terezinha Jesus Gaspar em sua dissertação de doutorado intitulada ASPECTOS DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO EM ALGUMAS CIVILIZAÇÕES E POVOS E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES, defendida em 2003, como fonte para os problemas históricos que pretendemos utilizar em sala de aula.

3.1 Atividade 1: Leitura e Interpretação

O objetivo desta atividade é desenvolver a habilidade do aluno em ler, interpretar e expor sua opinião sobre o que se aprende-ensina.

Inicialmente, propomos aos alunos que leiam os trechos do livro *O Teorema do Papagaio* já citados neste trabalho, os quais reproduzimos aqui:

> Por que escrevo, passados tantos anos? Para avisar que você vai receber um carregamento de livros [...]. Vou lhe mandar minha biblioteca. Todos os meus livros: algumas centenas de quilos de obras matemáticas. Encontram-se nela todas as joias dessa literatura. Sem dúvida vai achar estranho que, falando de matemática, eu diga literatura. Garanto que há nessas obras histórias que nada ficam a dever às de nossos melhores romancistas. Histórias de matemáticos como, cito ao acaso, os persas Omar Khayyam e al-Tusi, o italiano Niccolò

> Fontana Tartaglia, o francês Pierre Fermat, o suíço Leonhard Euler. E tantos outros. Histórias de matemáticos, mas também histórias de matemáticas! (GUEDJ, 1999, p. 12).

> Como todos os alunos do mundo, Jonathan cruzara com Tales várias vezes. Todas as vezes, o professor tinha lhe falado do teorema, nunca do homem. Aliás, na aula de matemática, nunca se falava de ninguém. De vez em quando, aparecia um nome, Tales, Pitágoras, Pascal, Descartes, mas era só um nome. Como o de um queijo ou de uma estação de metrô. Também não se falava nem de onde nem de quando a coisa tinha acontecido. As fórmulas, as demonstrações, os teoremas aterrissavam no quadro negro. Como se ninguém os tivesse criado, como se houvessem estado ali desde sempre, como as montanhas e os rios [...]. Matemática não era nem história, nem geografia, nem geologia. Era o quê, exatamente? Essa questão não interessava a muita gente. (GUEDJ, 1999, p. 31).

Após a leitura, propomos que os alunos respondam às questões:

1. Você acha que a Matemática tem alguma relação com a Literatura, como citado no primeiro trecho do livro?

2. Já aconteceu com você o fato de o professor citar o nome de algum matemático do passado somente para enunciar uma fórmula ou teorema, sem explicar a história por trás daquele resultado?

3. Você teve curiosidade em conhecer essa história?

4. Você considera importante conhecer a História da Matemática?

5. Faça um breve resumo sobre o que você já aprendeu sobre História da Matemática.

Ao final da atividade os alunos serão convidados a fazer um debate sobre as respostas dadas. Alguns temas polêmicos destacados no livro serão abordados nesse debate, como por exemplo, a questão sobre o Teorema ser dito de Tales. Também será sugerido que façam a leitura do livro que pode ser tomado emprestado na Biblioteca da Escola ou na Biblioteca Municipal.

Os personagens do livro *O Teorema do Papagaio*, na tentativa de resolver algum problema prático, se lançam na História da Matemática em busca de respostas e orientações. Nas atividades seguintes usaremos essa mesma proposta.

3.2 Atividade 2: Área de Quadrados

Os objetivos da atividade são:

1. Revisar conceitos geométricos aprendidos em anos anteriores, formas das figuras geométricas;

2. Desenvolver habilidade de transformar figuras geométricas em outras;

3. Apresentar ao aluno um problema geométrico atual;

4. Associar o mesmo a uma problema semelhante do passado;

5. Comparar a forma atual de resolução com a forma antiga;

6. Mostrar que a Matemática foi desenvolvida por culturas antigas e que estas culturas a valorizavam;

7. Perceber a importância da história da Matemática e o seu desenvolvimento até os dias atuais.

De acordo com Baron e Bos (1985, p.11) as formas geométricas sempre foram utilizadas nas diversas civilizações, sejam nos trabalhos de decoração de cerâmicas, em ferramentas, em joias, etc. "[...] a familiaridade dos antigos com quadrados, retângulos, paralelogramos, triângulos, hexágonos, círculos, espirais, ziguezagues e configurações do tipo dente de serra pode ser verificada quando visitamos museus."

Ainda segundo esses autores,

> Métodos empíricos de topografia certamente exerceram um papel fundamental no desenvolvimento dos conceitos antigos de área e nas regras rudimentares para calcular áreas de regiões limitadas por linhas retas. Estas são noções comuns das matemáticas babilônicas, egípcias, hindus e chinesas. Embora pouco saibamos de como estas regras foram estabelecidas, elas parecem ter sido, em sua maioria, corretas e foram provavelmente obtidas por transformações geométricas elementares, isto é, cortando formas e reagrupando as partes para formar uma figura simples. (BARON E BOS, 1985, p.11)

Para calcular a área de um polígono, o processo consistia em decompor a figura de modo a construir um retângulo de mesma área da figura dada.

Problema 1: Faça uma série de desenhos indicando como é possível (cortando, rasgando ou dobrando) transformar cada uma das seguintes formas geométricas em um retângulo:

1. Um paralelogramo;

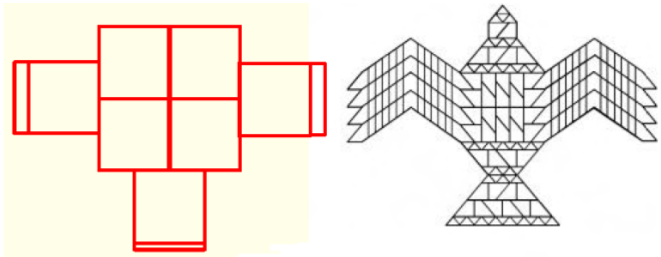
2. Um triângulo isósceles;

3. Um triângulo escaleno;

4. Um hexágono regular.

Na Índia verificamos que os mesmos associavam os deuses a quadrados e os humanos a retângulos. A associação de deuses gerava um novo deus e isso os levou a buscarem a solução para resolver vários problemas geométricos. Um dos mais famosos e complexos altares indianos é o Altar do Falcão. Sua estrutura básica é formada por 7 quadrados, como pode ser visto na imagem aqui representada por figura 3.1.

Figura 3.1: Altar do Falcão



FONTE: Seidenberg, A., p.491

Um fato característico dos rituais indianos era a combinação de deuses em um único deus. Como na religião indiana um deus era representado por um quadrado, a combinação de deuses conduz ao problema de achar um quadrado, igual em área, à soma de dois quadrados ou mais quadrados dados.

Problema 2: Construir um quadrado de área igual à soma das áreas de dois quadrados dados.

Ao estudarmos a História da Matemática, encontramos no *Satapatha Brahma*(VI, 1, 1, 1-3)[1], uma referência sobre a solução deste problema:

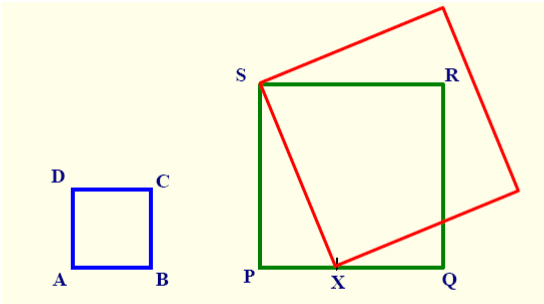
No começo o Rishis [deus hindu, considerado o ar vital] criou sete pessoas separadas, que eram semelhantes a quadrados. .... Permita-nos fazer essas sete pessoas em uma Pessoa!, em seguida essas sete pessoas são compostas no altar do falcão como pode ser visto na figura representada aqui por figura 3.1.

Um método para resolver o problema de construir um quadrado, igual em área, a dois quadrados desiguais aparece em muitos dos diferentes *Sulbasutras*:

[1]Trata-se de um texto religioso hindu em prosa, em *sânscrito*, que descreve os rituais e a mitologia associados ao *Shukla Yajurveda*. Contém textos religiosos com foco na liturgia, rituais e sacrifícios, e como executar os mesmos. O *Yajurveda* foi escrito durante o período Védico entre 1500 a.E.C. e 500 a.E.C., junto dos outros Vedas. Os Vedas formam a base do extenso sistema de escrituras sagradas do hinduísmo, que representam a mais antiga literatura de qualquer língua indo-europeia. *Shukla Yajurveda* é um dos quatro *Vedas* hindus.

Demonstração. Sejam $ABCD$ e $PQRS$ dois quadrados dados, como na Figura 3.2 .

Figura 3.2: Construção do quadrado - Atividade 2



FONTE: GASPAR, 2003, p.113

Marcar um ponto X sobre PQ tal que PX seja igual a AB.

Então o quadrado de lado SX tem área igual à soma das áreas dos quadrados $ABCD$ e $PQRS$.

O fato de SX ser o lado do quadrado procurado é uma consequência imediata do Teorema, dito de Pitágoras.

De fato, pelo teorema de Pitágoras:

$$PX^2 + PS^2 = SX^2$$

Mas, $AB^2 = PX^2$

Logo, a área (quadrado de lado SX) $= SX^2 = AB^2 + PS^2 =$ área $(ABCD)+$ área $(PQRS)$.

$\square$

a) Explique a solução encontrada pelos indianos, replicada aqui nesta atividade.

b) Escreva a sua solução na linguagem matemática de hoje.

c) Qual das soluções você achou mais simples? A solução do item a), ou a solução do item b)? Por que você acha que aconteceu isso?

Ainda tratando de áreas de quadrados, propomos um exercício da nossa civilização.

Problema 3: Em uma sala de aula foram colocados azulejos em formato de quadrados em uma das paredes. Quando Felipe, o diretor da escola, foi comprar os azulejos para outra parede, a loja não possuía mais azulejos daquele mesmo tamanho dos anteriores, pois tinham saído de linha. Então ele comprou azulejos também em formato de quadrados, porém um pouco maiores do que os outros. Quando o trabalho de colocação dos azulejos ficou pronto, Felipe não gostou do resultado e resolveu trocar os azulejos das duas paredes por azulejos que fôssem do mesmo tamanho e em formato de quadrados, sendo que a área de cada novo azulejo deve ser igual à soma das áreas dos dois modelos antigos. Qual será a medida do lado de cada um desses novos azulejos?

Responda:

a) Cada azulejo tem o formato de que figura geométrica?

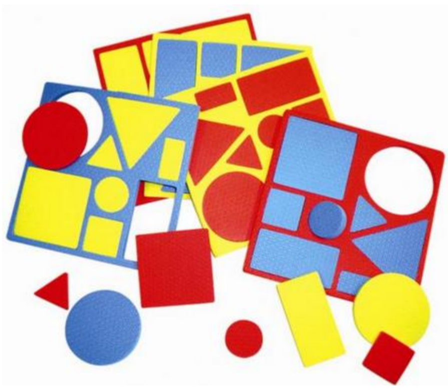
b) Faça um desenho representando a situação apresentada no problema.

c) Descreva passo a passo a forma com que você resolveria esse problema.

d) Escreva a solução numérica para os valores das áreas dos azulejos antigos sendo: 9 cm^2 e 16 cm^2 .

Problema 4: Júlia estava brincando de encaixar peças de formas geométricas em seus lugares, como na figura a seguir:

Figura 3.3: Jogo de formas geométricas



FONTE: $http://proflualves.blogspot.com.br/2016/06/jogos-de-encaixe-de-figuras-geometricas_35.html$

Quando chegou na última forma, que era um quadrado, ela percebeu que a peça tinha sumido. Nas peças sobressalentes havia dois quadrados de cartolina, onde a área de cada um deles era igual à metade da área do quadrado que ela precisava para preencher o jogo. Ela deve transformar esses dois quadrados em um só, formando a peça quadrada que ela precisa. Como ela fará isso?

a) Em uma cartolina, corte dois quadrados de mesma área. Agora tente juntar os dois formando um só quadrado. Para isso você pode usar tesoura, régua e cola.

b) Explique o procedimento que você usou para resolver esse problema.

c) Faça um desenho representando essa situação.

3.3 Atividade 3: A raiz quadrada de dois

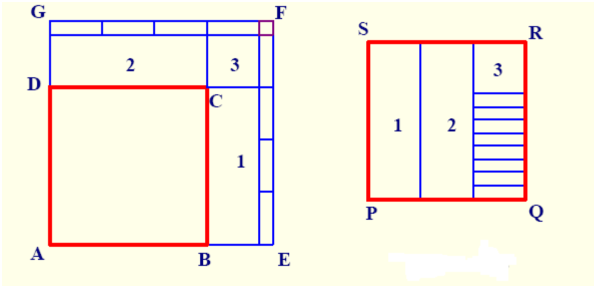
Os objetivos desta atividade são:

1. Interpretar os problemas;
2. Planejar a forma de resolver os problemas;
3. Executar a forma de resolver os problemas;
4. Perceber que apesar de estarmos usando a figura geométrica quadrado, o problema se trata de constriur o número raiz quadrada de dois.

De acordo com Gaspar (2003, p.115) um sucesso notável da matemática na Índia foi o descobrimento de um procedimento para calcular raízes quadradas com alto grau de aproximação. O problema pode ter surgido originalmente da tentativa de construir um altar quadrado cuja área fosse o dobro da área de um altar quadrado dado (união de dois deuses em um deus).

Problema 1: Construir um quadrado com a área igual ao dobro da área de um quadrado dado.

Figura 3.4: Quadrado



FONTE: GASPAR, 2003, p.115

Demonstração. Tomar dois quadrados equivalentes.

Cortar o segundo quadrado em três tiras iguais.

Colocar as tiras 1 e 2 em torno do primeiro quadrado como indicado na [Figura 3.4].

Cortar um quadrado no topo da terceira tira e colocar na posição 3.

Cortar as partes restantes (dois terços de uma tira) em 8 tiras iguais e amarrar em torno do quadrado que estamos construindo na Figura 3.4. □

Na dissertação de Gaspar, ela observa que fica faltando um quadradinho para completar o quadrado que desejamos, ou seja, temos uma aproximação. É interessante fazer os cálculos com os alunos para perceberem que essa aproximação é muito boa. De fato, as civilizações antigas utilizavam métodos de aproximação para resolver os problemas.

a) Explique usando a geometria plana a solução encontrada pelos indianos.

b) Escreva a sua solução na linguagem matemática de hoje.

c) Faça o cálculo da medida do lado de um quadrado cuja área é igual ao dobro da área de um quadrado de lado 1 cm.

obs.: A resposta esperada é exatamente igual a raiz quadrada de dois.

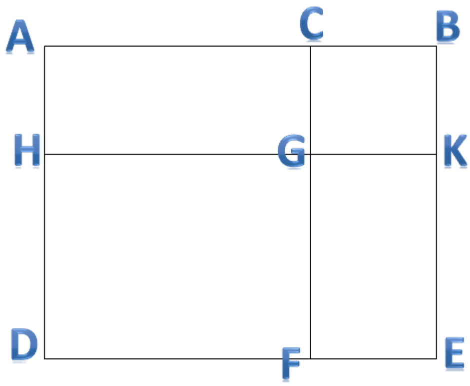
d) Qual deve ser a medida do lado de um quadrado cuja área é igual ao dobro da área de um quadrado de lado 8 cm.

A raiz quadrada de dois também aparece na civilização babilônica. Segundo Roque (2012, p.19-20) além das operações de soma, subtração, multiplicação e divisão, os babilônios também resolviam potências e raízes quadradas. O método usado nesse último caso era bastante interessante, uma vez que permitia obter valores aproximados para raízes que hoje sabemos serem irracionais. O cálculo da raiz de um número k se baseava, provavelmente, em um procedimento geométrico.

A demonstração a seguir está presente na obra de Roque (2012, p,19-20).

Considere a Figura 3.5:

Figura 3.5: Quadrado - Babilônios



FONTE: Autoria Própria

Se o segmento AB é cortado em um ponto C, o quadrado $ABED$ é igual ao quadrado $HGFD$, mais o quadrado $CBKG$, mais duas vezes o retângulo $ACGH$. Fazendo AC medir a e CB medir b , trata-se da versão geométrica da igualdade, que escrevemos hoje como $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Calcular a raiz de K é achar o lado de um quadrado de área K Logo, podemos tentar colocar, nesse quadrado, um outro quadrado com lado conhecido e, em seguida, usar o resultado geométrico da Figura 3.5 para encontrar o resto. Ou seja, se a é o lado conhecido do quadrado, obtemos que a raiz de K é $a+b$. Para achar uma raiz melhor do que a, vamos procurar uma boa aproximação para b, o que pode ser feito observando a área da região poligonal $ABEFGH$.

A área de $ABEFGH$ é igual a $K - a^2$. Por outro lado, ela pode ser decomposta em dois retângulos de lados a e b e um quadrado de lado b. Logo, $K - a^2 = 2ab + b^2$. Se b for bem pequeno (próximo de zero), b^2 será ainda menor, de modo que podemos desprezá-lo e obter uma boa aproximação para b : $b' = \dfrac{K-a^2}{2a}$.

Sendo assim, $a' = a + b' = a + \dfrac{K-a^2}{2a} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{K}{2a}$ é uma aproximação para a raiz de K melhor do que a. Presume-se que esse tenha sido o procedimento para encontrar uma aproximação para a raiz do número 2.

e) Explique com suas palavras a solução encontrada pelos babilônios.

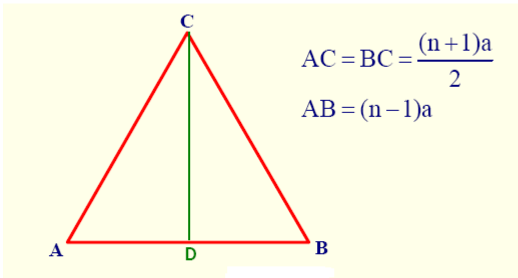
f) Utilizando a solução dos babilônios e fazendo K = 2 e $a = 1$, calcule uma aproximação para a raiz quadrada de 2.

g) Compare as soluções dos indianos e babilônios. Qual delas você achou mais simples? Por quê?

O *Katyayana Sulbasutra* fornece um método para combinar qualquer número de quadrados de mesma área em um único quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos quadrados combinados.

Problema 2: Combinar qualquer número de quadrados da mesma área em um único quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos quadrados dados.

Figura 3.6: Triângulo - Atividade 3



FONTE: GASPAR, 2003, p.117

Demonstração. Seja n o número de quadrados iguais que devem ser combinados para formar o único quadrado e a o comprimento dos lados de cada quadrado a ser combinado.

Construir um triângulo ABC isósceles de lados $\frac{(n+1)\cdot a}{2}$ e base $(n-1)\cdot a$.

Construir a altura CD do triângulo ABC.

Construir o quadrado de lados CD. Este é o quadrado. $\square$

Faça os desenhos (usando régua e compasso) correspondentes a cada situação a seguir:

a) Construir um quadrado de área igual à soma de 3 quadrados de lado 5 cm.

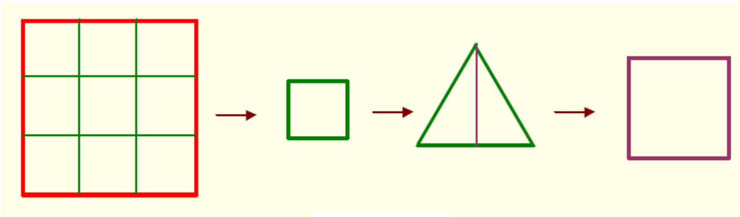
b) Construir um quadrado de área igual à soma de 4 quadrados de lado 3 cm.

c) Construir um quadrado de área igual à soma de 5 quadrados de lado 4 cm.

Métodos para construir quadrados cujas áreas são frações da área de um quadrado dado, também são encontrados nos *Sulbasutras*. Por exemplo, como o altar *Sautramani* é $\dfrac{1}{3}$ do *Saumiki*, os *Sulbasutras* fornecem um método para construir quadrados cuja área é $\dfrac{1}{3}$ daquela de um quadrado dado. O método utilizado pode ser generalizado para uma fração qualquer da área do quadrado, de acordo com a dissertação de Gaspar.

Problema 3: Construir um quadrado de área igual a $\frac{1}{3}$ da área de um quadrado dado.

Figura 3.7: Quadrado - Atividade 3



FONTE: GASPAR, 2003, p.118

Demonstração. Dividir o quadrado dado em 9 partes iguais, dividindo cada um dos seus lados em 3 partes iguais.

Cada um dos quadrados da divisão tem área igual a $\frac{1}{9}$ daquela do quadrado dado.

Combinar 3 destes quadrados para formar um quadrado de área $\frac{1}{3}$ daquela do quadrado dado. □

a) Explique a solução encontrada pelos indianos, replicada aqui nesta atividade.

b) Apresente a solução verificada com a geometria de hoje.

Problema 4: Neto possuía um terreno em forma de um quadrado e resolveu dividí-lo igualmente entre seus três filhos, de forma que cada um recebesse um terreno de mesma área em forma de quadrado também. Como ele pode fazer isso?

a) Faça um desenho representando essa situação.

b) Explique o procedimento que você usaria para resolver esse problema.

c) Se o terreno original tinha 144 cm^2 de área, qual é a medida do lado do terreno de cada filho?

d) Na prática, é possível separar os terrenos como foi proposto no enunciado? Por quê?

3.4 Atividade 4: A quadratura do círculo

Os objetivos desta atividade são:

1. Revisar o conceito de círculo e circunferência;
2. Investigar o problema;
3. Usar régua e compasso para resolver o problema;
4. Usar a geometria atual;
5. Compreender a matemática presente na solução dada por culturas antigas.

Até aqui trabalhamos apenas com a área de quadrados, vamos agora trabalhar com área de figuras limitadas por curvas.

A quadratura do círculo constitui um dos *três problemas clássicos da antiguidade*, os quais são:

- Quadratura do círculo, consiste em construir, com régua não graduada e compasso, um quadrado de área igual ao quadrado dado;
- Duplicação do Cubo, consiste em construir, com régua não graduada e compasso, um cubo de volume duas vezes maior que o cubo dado, e;
- Trisecção do ângulo, consiste em dividir um ângulo dado em três partes iguais usando régua não graduada e compasso.

Segundo Baron e Bos (1985, p.12), para o caso do círculo a primeira aproximação pôde ser facilmente encontrada em diversas civilizações, apenas inscrevendo-se e circunscrevendo-se quadrados e tomando-se a média.

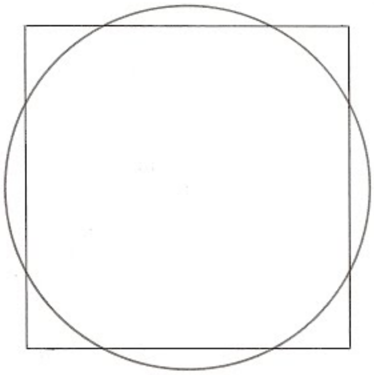
Problema 1: Usando uma régua não graduada e compasso, construa um quadrado cuja área, seja a área de um círculo de raio 4cm. (Dica: use a informação dada acima.)

Obs: No antigo Egito foi usado um valor equivalente à fórmula: área $= 4\left(\dfrac{8}{9}r\right)^2$, onde r é o raio da circunferência.

Gaspar(2003, p.126) nos informa que na antiga civilização indiana existiam sepulturas quadradas e circulares e, por um motivo que não se conhece, as duas sepulturas teriam que ter a mesma área. Isso conduziu ao seguinte problema:

Problema 2: Construir um quadrado de área igual a de um círculo dado.

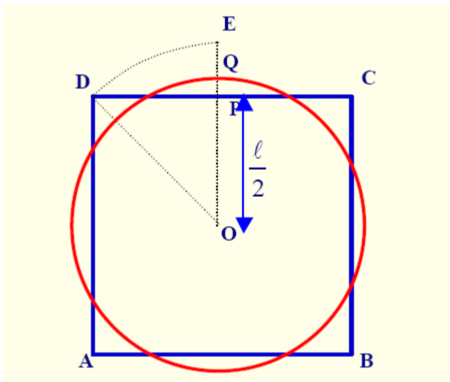
Figura 3.8: Quadrado e círculo - Atividade 4



FONTE: https://sites.google.com/site/espiritualidadeuniversal/quadratura-do-circulo

A seguir apresentamos a solução dos indianos, que aparece nos *Sulbasutras*:

Figura 3.9: Quadrado e círculo- Demonstração



FONTE:GASPAR, 2003, p.127

Demonstração. "Se você deseja transformar um círculo em um quadrado, divida o diâmetro em oito partes e novamente uma dessas 8 partes em 29 partes; dessas 29 partes remova 28 e, além disso, a sexta parte (da parte deixada) menos a oitava parte (da sexta parte)."

Ou seja,

$$l = d - \left[\frac{d}{8} + \frac{d}{8.29} + \frac{d}{6.8.29} + \frac{d}{8.6.8.29}\right]$$

onde d é o diâmetro do círculo.

Isso equivale a tomar como aproximação para π o valor:

$$\pi = 3,02802501491486656097238736953362$$

□

a) Explique a solução encontrada pelos indianos.

b) Observe que o valor encontrado para π corresponde a uma aproximação muito boa.

Este problema da quadratura do círculo foi estudado por várias pessoas ao longo dos séculos. De acordo com Baron e Bos (1985, p.32) é possível, através de uma sequência de transformações geométricas, reduzir qualquer figura poligonal a um triângulo com igual área; o triângulo torna-se então um paralelogramo, o paralelogramo torna-se um retângulo e finalmente o retângulo torna-se um quadrado. Segue-se que para toda figura poligonal plana podemos encontrar um quadrado com a mesma área.

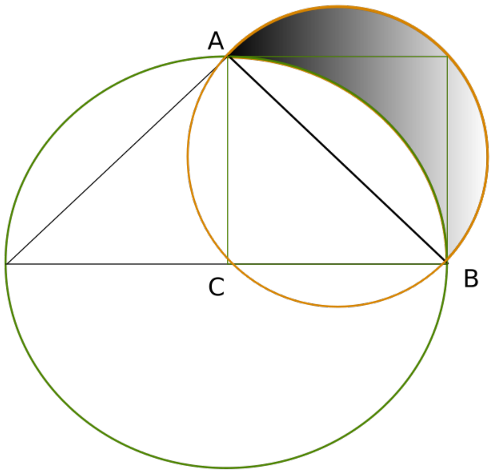
O problema de redução de figuras curvas a quadrados equivalentes foi muito difícil. Hipócrates demonstrou um teorema importante para a quadratura de círculos e caiu em outros problemas: encontrar áreas das Lúnulas.

Problema 3: Pesquise o que são Lúnulas e qual a sua relação com o problema da quadratura do círculo.

Resposta esperada: Lúnulas são figuras geométricas limitadas por dois arcos circulares de raios distintos. Também é conhecida como "lua" ou "meia-lua".

Formalmente, uma lúnula é um complemento de um círculo em outro, situados de forma que ambos se intersectem, e nenhum seja subconjunto do outro. Um exemplo pode ser visto na Figura 3.10.

Figura 3.10: Lúnulas



FONTE: www.wikiwand.com/es/Cuadratura_del_círculo

De acordo com Baron e Bos (1985, p.33), Hipócrates demonstrou o seguinte teorema: Segmentos semelhantes de círculos estão na mesma razão que os quadrados de suas bases, ou seja, as áreas de círculos estão para si assim como os quadrados de seus diâmetros. Ele mostrou que algumas lúnulas eram quadráveis e outras não.

Segundo Gaspar(2003, p.129), os chineses estavam familiarizados com a relação entre a área (A), o comprimento da circunferência (C) e o diâmetro do círculo (d), e propuseram quatro fórmulas para calcular a área do círculo:

Figura 3.11: Fórmulas

$$A = \frac{C}{2} \cdot \frac{d}{2}$$

$$A = \frac{C \cdot d}{4}$$

$$A = \frac{3}{4} d^2$$

$$A = \frac{1}{12} C^2$$

FONTE: GASPAR, 2003, p.129

As duas últimas fórmulas usam $\pi = 3$ e as duas primeiras são equivalentes a que utilizamos hoje.

Na dissertação de Gaspar, ela observa que no problema 31 do capítulo 1 do *Jiuzhang suanshu* (documento histórico chinês) encontramos a seguinte pergunta:

Problema 4: Temos um campo redondo; a circunferência é 30 Bu (Bu = unidade de medida), o diâmetro 10 Bu. Qual é o tamanho do campo? A resposta diz: 75 Bu.

a) Resolva o problema usando a notação atual e compare com a resposta dos chineses.

b) Qual foi a aproximação que o chineses utilizaram para o valor de π?

No problema 32 do capítulo 1 é feita a seguinte pergunta:

Problema 5: Um campo circular tem perímetro de 181 medidas, um diâmetro de 60 e um terço. Qual é sua área? A reposta é a seguinte: A área é igual à metade do perímetro vezes metade do diâmetro.

a) Faça o cálculo utilizando a notação atual.

b) Explique o resultado encontrado pelos chineses.

Os babilônios estavam familiarizados com a relação entre a área, a circunferência e o diâmetro do círculo. Encontramos na tábula YBC7302, representada aqui como figura 3.12, uma aproximação para π igual a 3, segundo a dissertação de Gaspar.

Figura 3.12: Área do círculo - Babilônia

FONTE: http://it.stlawu.edu/ dmelvill/mesomath/tablets/YBC7302u.jpg

Segundo Roque e Pitombeira (2012, p.45) a maneira como os babilônios consideravam o círculo era fundamentalmente diferente da nossa. Conceitualmente, para nós, o círculo é obtido traçando-se uma circunferência com um compasso, para os babilônios, ele era concebido como a figura limitada por uma circunferência. Mesmo quando conheciam o diâmetro do círculo, eles calculavam sua área usando o comprimento da circunferência.

Se A é a área do círculo de circunferência S e raio r, então, $A = \pi r^2$, $S = 2\ \pi r$. Assim,

$$r = \frac{S}{2\pi}$$

$$A = \pi \cdot \frac{S^2}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot S^2$$

.

Se fizermos $\pi = 3$, teremos:

$$A = \frac{1}{12} \cdot S^2$$

.

Para nós, π é uma constante de proporcionalidade, que relaciona a área e o quadrado do raio de um círculo qualquer, ao passo que os babilônios tinham um processo para calcular a área de círculos no qual dividiam o quadrado da circunferência do círculo por 12.

c) Resolva o problema 6 utilizando a fórmula acima.

Em 1837, Pierre L. Wantzel, aos 23 anos, professor da Ècole Polytechnique, de Paris, demonstrou que o problema da quadratura do círculo não pode ser resolvido utilizando-se apenas a régua e o compasso. Em particular, com origem nos trabalhos de F. von Lindemann em 1882, pôde estabelecer-se que a quadratura do círculo era impossível. Mas até chegar a essa demonstração, o estudo de todos os pesquisadores a respeito deste assunto resultou em desenvolvimento para a matemática.

3.5 Atividade 5: Área de Trapézios

Os objetivos desta atividade são:

1. Revisar o conceito de trapézio;

2. Calcular área de trapézios;

3. Usar a geometria atual;

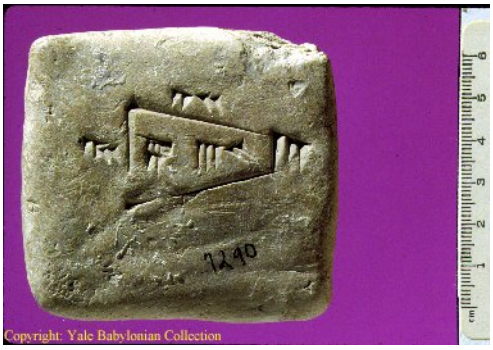
4. Compreender a matemática presente na solução dada por culturas antigas;

5. Comparar a matemática antiga e a atual.

Nas tablitas babilônicas também foram encontrados cálculos de áres de trapézios, como pode ser visto na figura 3.13: Segundo Roque e Pitombeira (2012, p.48) a figura mostra um trapézio. Vemos que sua base maior e um dos lados são iguais a 2,20 (no sistema sexagesimal), e que a base menor é igual a 2. O escriba supõe que o trapézio é reto e, então, sua área é calculada fazendo (sem os símbolos):

$$A = 2,20 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (2,20 + 2)\right]$$

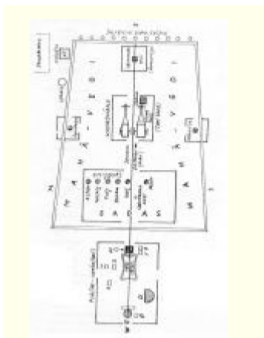
Figura 3.13: Tablita mostrando o cálculo de trapézios da civilização da Babilônia



FONTE: http://it.stlawu.edu/ dmelvill/mesomath/tablets/YBC7290.jpg

De acordo com Gaspar, os indianos também desenvolveram estudos sobre o trapézio isósceles. Essa figura geométrica estava presente em seus monumentos e altares, como pode ser visto na Figura 3.14.

Figura 3.14: Monumentos e altares



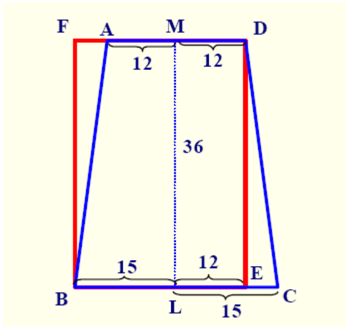
FONTE: GASPAR, 2003, p.162

Eles desenvolveram métodos geométricos para construir um trapézio, calcular sua área e transformá-lo em um retângulo ou quadrado da mesma área.

Os *Sulbasutras* reconhecem que a área de um trapézio isósceles é igual à metade da soma da base e do topo multiplicada pela altura, que é exatamente a fórmula atual. No *Apastamba Sulbasutra* encontramos a seguinte situação:

Problema 1: Um trapézio isósceles com 36 unidades de altura e lados paralelos de 30 e 24, é dito ter área de 972 unidades quadradas.

Figura 3.15: Trapézio - Atividade 5



FONTE: GASPAR, 2003, p.167

Demonstração. Construir uma perpendicular a BC passando pelo ponto D.

Essa perpendicular intercepta BC em E e, a distância de E a L é igual a 12 unidades.

Girar DEC e levar para o outro lado fazendo coincidir os pontos D com B e C com A de modo que o ponto A fique entre F (nova posição do ponto C) e D.

$FDEB$ é um retângulo que tem a mesma área do trapézio $ADEB$.

Logo, área($ADEB$) = área($FDEB$) = 36x27=972 □

a) Explique com suas palavras a solução do problema encontrada pelos indianos.

b) Utilize o método acima para calcular a área de um trapézio isósceles com bases medindo 6 m e 4 m e altura 3 m.

c) Calcule a área do item b) usando a fórmula atual.

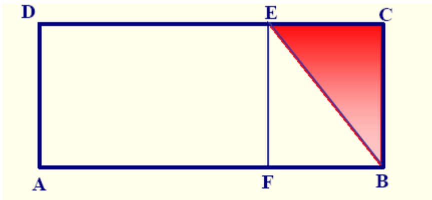
Observe que este problema traz dois assuntos importantes da geometria: Construção de um retângulo de mesma área que a de um trapézio dado e a congruência cateto-hipotenusa para triângulos retângulos.

d) Explique a congruência citada na solução do problema.

De acordo com Gaspar, o seguinte problema sobre construção de trapézios é encontrado nos *Sulbasutras*:

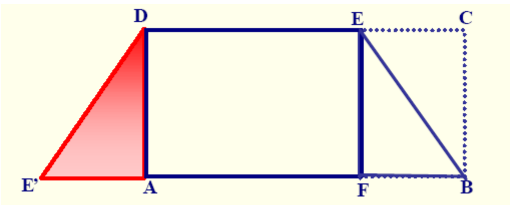
Problema 2: Transformar um retângulo ou quadrado em um trapézio de mesma área com a base menor dada.

Figura 3.16: Retângulo - Atividade 5



FONTE: GASPAR, 2003, p.173

Figura 3.17: Trapézio 2 - Atividade 5



FONTE: GASPAR, 2003, p.173

Demonstração. Considerar o retângulo $ABCD$.

Seja DE o tamanho do lado menor e EF uma perpendicular a AB;

Traçar a diagonal EB;

Os triângulos EFB e ECB têm a mesma área;

Inverter o triângulo EBC e transfira-o fazendo coincidir o lado BC com DA;

O trapézio $E'BED$ tem mesma área do retângulo $ABCD$. □

a) Explique com suas palavras a solução do problema encontrada pelos indianos.

b) Transforme um retângulo de dimensões 12 m e 5 m em um trapézio isósceles segundo o método dos indianos.

c) Calcule a área do retângulo do item b).

d) Calcule a área do trapézio encontrado no item b).

O problema a seguir mostra uma situação envolvendo trapézio e retângulo:

Problema 3: Lara estava pensando em construir um jardim em formato de um trapézio isósceles, e para isso ela queria aproveitar um espaço em forma de retângulo, onde já havia algumas plantas nascendo.

a) Faça um desenho representando essa situação.

b) Resolva o problema utilizando algum dos métodos vistos nos problemas acima, considerando o retângulo com dimensões 5 m e 3 m.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer deste trabalho tivemos a oportunidade de refletir sobre o ensino de geometria na educação básica e sobre a nossa própria postura em sala de aula e no planejamento das atividades a serem desenvolvidas.

Acreditamos que cabe ao professor a tarefa de sempre repensar a sua prática de modo crítico e buscar soluções para as demandas que se apresentam na sua caminhada enquanto educador e facilitador da aprendizagem.

Percebemos que a História da Matemática é um recurso importante a ser explorado pelos professores, pois ela aproxima o aluno desta disciplina, que às vezes se mostra inatingível e difícil para eles. E, para que o professor esteja preparado para trabalhar com este recurso, acreditamos que o mesmo deva ser mais explorado do que já tem sido nos cursos de graduação, extensão e outros.

As leituras que foram feitas para o desenvolvimento deste trabalho foram de grande valor para o nosso próprio crescimento profissional, além de servirem como base para tantos outros projetos que ainda podem ser feitos, como por exemplo, adaptar as atividades para o Ensino Médio. Acreditamos que as atividades propostas no último capítulo possam auxiliar na aprendizagem dos alunos e tornar o ensino da geometria cada vez mais significativo.

Esperamos que este trabalho possa contribuir de alguma forma para a melhoria da educação básica no Brasil, que é um dos objetivos do PROFMAT, não como um manual a ser seguido, mas como uma tentativa de se pensar em uma educação diferenciada, utilizando a História da Matemáica como recurso didático para o ensino.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARBOLEDA, L. C. *História e Enseñanza de las Matematicas.* Epistemologia, Historia y Didacta de la Matematica, Bogotá, 1983.

BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. *A Pesquisa em História da Matemática e Suas Relações com a Educação Matemática.* In: BICUDO, M. A.(org.).*Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* São Paulo: UNESP, 1999.

BARBIN, E. *Histoire et Enseignement des Mathematiques*: *Pourqoi? Comment?* Bulletin AMQ, Montreal, 1996.

BARBIN, E. *Integrating history: research perspectives* In: FAUVEL, J.; van MAANEN, J. *History in Mathematics Education.* The ICMI Study. 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000.

BARKER, S. F. *Filosofia da Matemática.* Tradução de L. Hegenberg e O. Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Zahar, 1969.

BARON, M. E. Curso de História da Matemática: Origens e desenvolvimento do cálculo. A Matemática Grega. Brasília, UNB, 1985.

BASTOS, R. *Geometria no currículo e pensamento matemático.* Disponível em: $< http://www.apm.pt/apm/revista/educ52/educ52_2.htm >$. Acesso em: 18 dez. 2017.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* Tradução de E. F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais:Matemática* – 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais:Matemática*

. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais:Matemática* . Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Proposta preliminar. Segunda versão revista. Brasília: MEC, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base*. Disponível em:< *http : basenacionalcomum.mec.gov.br/a − base* >. Acesso em: 13 jan. 2018.

BROLEZZI, A. C. *A arte de contar: uma introdução ao estudo do valor didático da história da matemática.* Dissertação (Mestrado em Educação)—Universidade de São Paulo, São Paulo. 1991.

BROLEZZI, A. C. *Conexões: História da Matemática através de Projetos de Pesquisa.* Coleção História da Matemática para Professores (Preprint). Sérgio Nobre (org.) Rio Claro. SP: SBHMAT. 2003.

CBC - Conteúdo Básico Comum de Matemática do Ensino Fundamental do 6º ao 9º ano. SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS. Disponível em: < *https : //www.educacao.mg.gov.br/images/stories/supletivo/*2013*/Fundamental /Progr.Matem.FUND.*2013*.pdf* >. Acesso em: 18 dez. 2017.

CHILDE, V. G. *Wheeled Vehicles* In: SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. *A History of Technology.* 1a. ed. Inglaterra: The Clarendon Press, 1958.

CÍRCULO. Disponível em: < *https : //sites.google.com/site/espiritualidadeuniver sal/quadratura − do − circulo* >. Acesso em: 18 dez. 2017.

COSTA, M. S., ALLEVATO, N. S. G. *Livro Didático de Matemática: análise de professoras polivalentes em relação ao ensino de geometria.* Vidya, jul./dez., 2010. Santa Maria, 2010.

CUADRATURA del círculo. Disponível em : http://www.wikiwand.com/es/Cuadratura_del_círculo. Acesso em: 04 jan. 2018.

CURY, H. N.; MOTTA, C. E. M. *Histórias e estórias da matemática.* In: CARVALHO, L. M. et al. (Ed.). *História e tecnologia no ensino da Matemática.* Rio de Janeiro:

Ciência Moderna, 2008.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática.* Campinas, SP: Papirus, 1996.

D'AMBROSIO. U. A *História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática.* In: BICUDO, M. A. V. (org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* São Paulo: UNESP, 1999.

D'AMBROSIO, U. *Uma história concisa da Matemática no Brasil.* 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2011.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática.* 8. ed. Campinas: Papirus, 2012.

DASSIE, B.A.; CARVALHO, J.B.P.; ROCHA, J.L. *Uma coleção revolucionária. História e Educação Matemática*: Revista da Sociedade Brasileira de História da matemática, Rio Claro: SBHMat, vol.2, n.2, jun/dez-2001 e jan/fev-2002.

ESCRITA Cuneiforme. Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Escrita_cuneiforme. Acesso em: 05 jan. 2018.

EQUIVALÊNCIA DE FIGURAS PLANAS. Disponível em: $< http://www.feliz emdesenho.com/wp-content/uploads/2011/12/Equivalencia-de-figuras.pdf >$. Acesso em: 18 dez. 2017.

FAINGUELERNT, E.K. *O Ensino de Geometria no 1º e 2º Graus.* A Educação Matemática em Revista. SBEM, nº 4, p.45. Blumenau. 1º semestre, 1995.

FAINGUELERNT, E. K. *Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria.* Porto Alegre: Artmed, 1999.

FARAGO, J. L. *Do ensino da História da Matemática à sua contextualização para uma aprendizagem significativa.* Dissertação de Mestrado. UFSC, Florianópolis, 2003.

FIGURA DE ENCAIXE. Disponível em: $< http://proflualves.blogspot.com.br /2016/06/jogos-de-encaixe-de-figuras-geometricas_35.html >$. Acesso em: 18 dez. 2017.

FONSECA, M. da C. F.R., LOPES, M. da P.a, BARBOSA, M. das G. G., GOMES,

M. L. M., DAYRELL, M. M. M. S. S. *O ensino da geometria na escola fundamental: Três questões para formação do professor de matemática dos ciclos iniciais.* Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

FONSECA, M. C. F. R. *Por que ensinar Matemática.* Presença Pedagógica. Belo Horizonte, 2002.

FOSSA, J. A. *Recursos Pedagógicos para o ensino da matemática da Antigüidade.* In: *A história como um agente de cognição na Educação Matemática.* Porto Alegre: Sulina, 2006.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.* São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GASPAR, M. T. J. *Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores.* UNESP, Rio Claro, 2003.

GERDES, P. *Three Alternative Methods of Obtainting the Ancient Egyptian Formula of the Area of a Circle.* Historia Mathematica, 1985.

GILLINGS, R J. *Mathematics in the time of the Pharaohs New York*: Dover Publications Inc., 1972.

GRUGNETTI, L.; ROGERS, L. *Philosophical, Multicultural and interdisciplinary Issues* In: FAUVEL, J.; van MAANEN, J. *History in Mathematics Education.* The ICMI Study. 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000.

GRUGNETTI, L. *Ancient Problems for the Development of Strategic Thinking.* In: FAUVEL, J.; van MAANEN, J. *History in Mathematics Education.* The ICMI Study. 1a. ed. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000.

GUEDJ, D. *O Teorema do Papagaio: um thriller da história da matemática.* (Traduzido por Eduardo Brandão). São Paulo: Companhia das letras. 1999.

HAYWOOD, J. *Atlas Histórico del Mundo*: Könemann240 p.

JOSEPH, G. G. *The Crest of The Peacock* 2a. ed. USA: Princeton University Press, 2000.

LOPES, L. S. *Um olhar sobre a história nas aulas de matemática.* PUC Minas, Belo Horizonte, 2013.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? A educação matemática em revista. SBEM, ano 3, n. 4, 1ºsemestre p.03-13. Blumenau, 1995.

LORENZATO, S. *Para aprender matemática.* 2. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2008.

MARYON, H.; PLENDERLEITH, H. J. *Fine Metal-Work* In: SINGER, C.; HOLMY ARD, E. J.; HALL, A. R. *A History of Technology. From Early Times to Fall of Ancient Empires.* Inglaterra: The Clarendon Press, 1958.

MENDES, I. A. *O uso da história da matemática: reflexões teóricas e experiências.* Belém - EDUEPA, 2001.

MENDES, I. A. *Investigação histórica no ensino da matemática.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna LTDA, 2009.

MENDES, I. A. *Cognição e Criatividade na Investigação em História da Matemática: contribuições para a Educação Matemática* . Departamento de Práticas Educacionais e Currículo, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 2013.

MENEZES, E. T. de; SANTOS, T. H. dos. Verbete paradidáticos. *Dicionário Interativo da Educação Brasileira* - Educabrasil. São Paulo, 2001. Disponível em: < *http://www.educabrasil.com.br/paradidaticos/* >. Acesso em: 10 de out. 2017.

MICOTTI, M.C. de O. *O ensino e as propostas pedagógica.* São Paulo: Editora UNESP, 1999.

MIGUEL, A. *Três estudos sobre história e educação matemática.* Campinas: Tese de doutorado, Faculdade de Educação - UNICAMP, 1993.

MIGUEL, A. *Estudos histórico-pedagógicos Temáticos e História-Problema.* In: *HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.* Campinas: UNICAMP, 1996.

MIGUEL, A. *As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores.* Zetetiké, Campinas, 1997.

MIGUEL, A.; MIORIM, M.A. *História na Educação Matemática: Propostas e desafios.* Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. *História da Matemática: propostas e desafios.* 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MIKAMI, Y. *The Development of Mathematics in China and Japan* 2a. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1910.

MOREIRA, P. C.; DAVID. M. M. M. S. *A Formação Matemática do Professor: Licenciatura e prática docente escolar.* Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PAPIRO AHMES. Disponível em: < *http : //antigoegito.org/enigmas−matematicos − em − antigos − papiros − egipcios/* >. Acesso em: 18 dez. 2017.

PENNICK, N. *Geometria sagrada. Simbolismo e intenção nas estruturas religiosas.* Tradução A. Feltre. 9a. ed. São Paulo: Pensamento, 1999.

PEREIRA, A. C. C. *Teorema de Thales: uma conexão entre os aspectos geométrico e algébrico em alguns livros didáticos de Matemática.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. UNESP - Rio Claro, 2001.

PEREZ, G. *Formação de Professores de Matemática sob a perspectiva do Desenvolvimento Profissional.* In: BICUDO, , M. A. V. *Pesquisa em Educação Matemática.* 1a. ed. São Paulo: UNESP, 1999.

PETTA, N. L. de; Ojeda, E. A. B.; Delfini, L.. *História: Uma Abordagem Integrada.* Volume Único, 1. Ed. São Paulo: Moderna, 2005.

PNLD - Guia Digital. Disponível em: < *http : //www.fnde.gov.br/pnld − 2017/* >. Acesso em: 18 dez. 2017.

POINCARÉ, H. *O Valor da Ciência.* Tradução: M. H. F. Martins.1a. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 1998.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

RIPOLL, Cydara Cavedon; ALENCAR, Hilário; RANGEL, Letícia; VIANA, Marcelo. *Base Nacional Comum Curricular: Leitura Crítica Matemática Ensino Fundamental..* Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pdf/Parecer_7_MA_

Cydara_Cavedon_Ripoll_Hilario_Alencar_da_Silva_Leticia_Guimaraes_Rangel_Marcelo_Viana.pdf. Acesso em: 13 jan.2018,

ROBINS, G.; SHUTE C. *The Rhind Mathematical Papyrus.* An Ancient Egyptian Text. 1a. ed. New York: Dover Publications Inc., 1987.

ROONEY, A. *A história da Matemática - desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito.* São Paulo: Makron Books do Brasil, 2012.

ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Rio de Janeiro: Zahar , 2012.

ROQUE, P.; PITOMBEIRA, J. B. *Tópicos de História da Matemática.* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANT'ANNA, A. S. *O que é um Axioma.* Barueri: Manole, 2003.

SANTOMÉ, J. T. *As culturas negadas e silenciadas no currículo.* In: SILVA, T. T. da (Ed.). Alienígenas na sala de aula: uma introdução aos estudos culturais em educação. Petrópolis: Vozes, 1995.

SANTOS, L. M dos. *Metodologia do ensino de Matemática e Física: Tópicos de história da física e da matemática.* Curitiba: Ibpex, 2009.

SARASVATI, S. S. P. *Geometry in Ancient India.* Índia: Govindram Hasanand, 1987.

SCHMIDT, G. M.; LEIVAS, J. C.; PRETTO, V. *História da Matemática como recurso disático-pedagógico para conceitos geométricos.* Revista Caderno Pedagógico, Lajeado, v. 13, n. 1, UNIVATES, 2016.

SEBASTIANI, E. *O Uso da História no Ensino da Matemática: uma abordagem transdiciplinar.* In: *Contribuições da Interdisciplinariedade para a Ciência, para a Educaçao, para o trabalho sindical.* 1a. ed. São Paulo: Vozes, 1994.

SEBASTIANI, E. *Como usar a história da matemática na construção de uma educação matemática com Significado* . In: Seminário nacional de história da matemática, Vitória, 1999.

SEIDENBERG, A. *The Ritual Origin of Geometry Archieve for History of Exact*

Sciences. 1963.

SILVA, F. L. *Mateatro: um método diferenciado de ensinar matemática.* In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI. Curitiba, 2013.

SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. (Ed.). *A History of Technology.* Vol. 1. From Early Times to Fall of Ancient Empires. Inglaterra: Oxford University Press, 1958.

SKINNER, F. G. *Measures and Weights* In: SINGER, C.; HOLMYARD, E. J.; HALL, A. R. *A History of Technology. From Early Times to Fall of Ancient Empires.* Inglaterra: The Clarendon Press, 1958.

TÁBULA YBC7290. Disponível em: < *http* : *//it.stlawu.edu/ dmelvill/mesomath/tablets/YBC*7290*.jpg* >. Acesso em: 18 dez. 2017.

TÁBULA YBC7302. Disponível em: < *http* : *//it.stlawu.edu/ dmelvill/mesomath/tablets/YBC*7302*u.jpg* >. Acesso em: 18 dez. 2017.

VIANNA, C. R. *Matemática e História: algumas relações e implicações pedagógicas.* São Paulo: Universidade de São Paulo, 1995.

YAN, L.; SHÍRÀN, D. *Chinese Mathematics. A Concise History.* Tradução: J. N. Crossley; A. W.-C Lun. New York: Oxford Science Publications, 1987.

ZÚNIGA, A. R. *La filosofia de las matemáticas – analisis de textos em secundaria.* Editorial de la Universidad de Costa Rica: 1988.