Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Renata Paixão Coutinho

Uma aplicação da resolução de problemas no ensino das equações do 2º grau

Rio de Janeiro
2016

Renata Paixão Coutinho

Uma aplicação da resolução de problemas no ensino das equações do 2º grau

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Augusto César de Castro Barbosa

Coorientadora: Profª. Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido

Rio de Janeiro

2016

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

C871 Coutinho, Renata Paixão.
Uma aplicação da resolução de problemas no ensino das equações do 2º grau / Renata Paixão Coutinho. – 2016.
96f. : il.

Orientador: Augusto César de Castro Barbosa.
Coorientadora: Claudia Ferreira Reis Concordido
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Equações quadráticas - Teses. 2. Equações quadráticas - Problemas, exercícios, etc. I. Barbosa, Augusto César de Castro. II. Concordido, Claudia Ferreira Reis. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 511.342

Renata Paixão Coutinho

Uma aplicação da resolução de problemas no ensino das equações do 2º grau

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 16 de dezembro de 2016.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Augusto César de Castro Barbosa (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.ª Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido (Coorientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Jaime Velasco Câmara da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Alexandre Lopes de Oliveira
Instituto Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2016

DEDICATÓRIA

À minha família, aos amigos, aos alunos e a Deus
dedico este trabalho, pelo incentivo, credibilidade, carinho e paciência.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Luiz Carlos e Catia, por estarem sempre ao meu lado.

À minha irmã, Marcele, pelo apoio e incentivo em todos os momentos.

Aos meus orientadores pela ótima orientação e pela busca constante do aperfeiçoamento do trabalho.

A todos os alunos da turma PROFMAT 2014 pelos inesquecíveis momentos compartilhados.

Aos amigos Adolfo Vianna e Cintia Dias pelas palavras de incentivo ditas nos momentos certos e pelas incansáveis horas de estudo.

Aos amigos Antônio Andrade, Emanuel Jaconiano e Tiago Berto pela parceria formada através da escolha do tema comum e pelas reuniões de sexta-feira.

Às amigas Anita Martins e Clara Leles pelo carinho, incentivo e apoio psicológico.

Aos meus alunos pelo convívio e pela aprendizagem diária.

À UERJ, pela oportunidade oferecida, em especial aos meus professores pela partilha do saber e pela contribuição na nossa formação como mestres.

Só se pode alcançar um grande êxito quando nos mantemos fiéis a nós mesmos.

Friedrich Nietzsche

RESUMO

COUTINHO,R. P. *Uma aplicação da resolução de problemas no ensino das equações do 2º grau.* 2016. 96f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

Essa dissertação tem o objetivo de debater uma proposta alternativa para ensinar o conteúdo equações do 2º grau. Trabalhamos tais equações sob o ponto de vista da resolução de problemas. Já os métodos de resolução dessas equações são discutidos segundo quatro modelos: método de completar quadrados, fórmula de Bhaskara, relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau e método geométrico de Al-Khwarizmi. Também são apresentadas a aplicação e a análise de atividades que foram desenvolvidas com uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, bem como o encaminhamento das aulas durante o ensino desse conteúdo no ano de 2016.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Equação do 2º grau. Métodos de resolução.

ABSTRACT

COUTINHO,R. P. *An application of problem solving in the teaching of quadratic equations.* 2016. 96f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

This dissertation aims to discuss an alternative proposal to teach the contents of the quadratic equations. We work out such equations from the point of view of problem solving. Yet the methods of solving these equations are discussed according to four models: method of completing the squares, Bhaskara formula, relation between coefficients and roots of a quadratic equation and Al-Khwarizmi's geometric method. The application and analysis of activities that were developed with a class of a ninth grade of the elementary school, as well as the forwarding of the classes during the teaching of this content in the year of 2016 are presented.

Keywords: Problem solving. Quadratic equation. Solving methods.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma área do conhecimento que surgiu e tem se desenvolvido a partir dos problemas que a humanidade encontra. Dessa maneira, a resolução de problemas é a essência da Matemática. Em sua aprendizagem, os problemas são fundamentais, pois colocam o aluno em uma posição onde ele pode pensar por si próprio, criar questionamentos e até mesmo desenvolver o raciocínio lógico e não apenas usar padrões e regras. Por esses motivos, para o ensino da Matemática acontecer através da resolução de problemas, não basta que o professor tenha apenas o conhecimento do conteúdo. É necessário também criatividade para fazer com que os alunos participem das atividades propostas.

O ensino da Matemática utilizando a resolução de problemas pode ser feito segundo três óticas: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para resolução de problemas e ensinar por meio da resolução de problemas. Neste trabalho, optamos pelo uso da última forma como maneira de tratar a resolução de problemas e o tópico da Matemática escolhido foi equações do 2º grau. Dessa maneira, fica justificado que a motivação desse trabalho é o ensino das equações do 2º grau por meio da resolução de problemas.

Esse conteúdo é apresentado aos alunos quando esses estão no nono ano do Ensino Fundamental e, em grande parte das escolas, aprender sobre equações do 2º grau se resume a conhecer a fórmula de Bhaskara e aplicá-la. Com isso, fica evidente que outros métodos de resolução das equações do 2º grau são desprezados ou não são tratados como importantes. O objetivo desse trabalho é debater sobre o tema equações do 2º grau, porém utilizando métodos não usuais de resolução das equações, como o método de completar quadrados e o método geométrico de Al-Khwarizmi.

Durante o ano de 2016, lecionei a disciplina Matemática em uma turma do nono ano, de uma escola privada localizada no município de Niterói. Com esses alunos, foi possível desenvolver um trabalho diferenciado no ensino das equações do 2º grau, visto que tal conteúdo foi ensinado usando quatro métodos distintos de resolução das equações, nessa ordem: método de completar quadrados, fórmula de Bhaskara, relações de Girard (também conhecida como soma e produto) e método geométrico de Al-Khwarizmi.

Os tópicos presentes na unidade do livro didático que abordava as equações do 2º grau foram introduzidos por um problema motivacional, isto é, a cada assunto apresentado na unidade, uma situação foi elaborada de modo que a sua modelagem matemática pudesse satisfazer tal contexto. Além disso, três atividades foram aplicadas nessa turma, a saber, duas oficinas, sendo uma sobre o método de completar quadrados e a outra sobre o método geométrico de Al-Khwarizmi, e uma lista de problemas, e os resultados analisados seguem no final deste trabalho.

O primeiro capítulo desta dissertação trata da fundamentação teórica e nele foi possível, a partir da leitura de alguns dos principais estudiosos sobre o assunto, criar uma base sólida para justificar o trabalho. Esse capítulo foi iniciado citando a importância da Matemática no cotidiano das pessoas e, em seguida, foi feita uma breve abordagem histórica sobre o ensino da Matemática. A resolução de problemas na sala de aula também foi analisada nessa parte do trabalho, bem como as estratégias para a resolução desses problemas. Por fim, falamos sobre o problema no processo de ensino e aprendizagem e sobre o papel do aluno e do professor nesse contexto.

A parte matemática do trabalho aparece no segundo capítulo, que recebe o título de resolução de problemas envolvendo equações do 2º grau. Nele vamos definir uma equação do 2º grau, estudar os quatro métodos para resolvê-las (conforme citado acima) e, através de problemas envolvendo as equações do 2º grau, aprender um pouco mais sobre os métodos de completar quadrados e de Al-Khwarizmi. Para isso, dividimos as equações em seis casos, de acordo com os valores assumidos pelos coeficientes das mesmas.

O terceiro capítulo trata da aplicação e análise das atividades. Inicialmente, falamos sobre o público da pesquisa e algumas características relevantes para esse trabalho. Em seguida, citamos como as aulas foram conduzidas, ou seja, a ordem cronológica em que cada assunto pertinente às equações do 2º grau foi abordado e em qual época do ano. Também nesse capítulo foram apresentadas as atividades desenvolvidas com a turma, além de uma análise dos resultados dessas aplicações.

Para finalizar, temos as considerações finais, onde são discutidos os tópicos acima, com a finalidade de chegarmos a alguma conclusão sobre as ideias desenvolvidas até então e onde também fazemos projeções futuras para esse trabalho.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 A importância da Matemática no cotidiano

A Matemática, em geral, não é a disciplina preferida da maioria dos alunos, dado que os mesmos a consideram difícil, e isso se torna uma preocupação para professores, coordenadores e diretores das escolas. É preciso uma investigação para saber o motivo dessa dificuldade, e quando isso é feito, o que se encontra, muitas vezes, são alunos desmotivados, ou por não saberem em que situação prática irão aplicar o conteúdo que estão estudando, ou por terem professores que não incentivam uma relação positiva com a Matemática. Por vezes, alguns professores preferem reafirmar a dificuldade na disciplina a torná-la mais simples e agradável aos alunos.

Segundo Silva (2005, p. 9), “a presença da Matemática na escola é uma conseqüência de sua presença na sociedade e, portanto, as necessidades matemáticas que surgem na escola deveriam estar subordinadas às necessidades matemáticas da vida em sociedade”. Com o objetivo de refletir sobre alguns dos aspectos que normalmente dificultam a aprendizagem da Matemática, o autor pontua seis questões, que apresentamos a seguir.

1. *Pré-conceito de que a Matemática é difícil:* os alunos vêm para a escola com a ideia formada, a partir dos pais, da sociedade ou da mídia, de que a Matemática é uma disciplina difícil ou ainda a mais difícil dentre todas. Alguns alunos realmente acabam reconhecendo essa dificuldade na Matemática. Já outros se deparam com professores que fazem uso de uma linguagem inapropriada para a faixa etária que está lecionado, isto é, uma linguagem carregada em símbolos e que faz pouco ou nenhum sentido para os estudantes. Tais situações acabam reafirmando para esses que a Matemática é difícil.
2. *Formação inadequada dos professores:* os conteúdos estudados durante a graduação em Matemática diferem dos conteúdos lecionados pelo professor em sala de aula. Em consequência disso, determinados conteúdos podem não ser vistos pela turma, dado que o professor não

está preparado para ensiná-lo. Outra questão relevante é a carga horária do professor. Muitos trabalham por 8 ou 10 horas diariamente e, com isso, ficam sem tempo para o aprimoramento dos conceitos e para a preparação de uma aula interessante.

3. *Uso da metodologia tradicional:* em geral, o ensino da Matemática é feito através de três componentes: conceituação, manipulação e aplicação. De maneira sintetizada, o primeiro componente seria a explicação do conteúdo, o segundo a resolução de exercícios de fixação e o terceiro a resolução de problemas. No entanto, essa metodologia não vem apresentando resultados satisfatórios, dado que não se aproxima da realidade, nem de quem aprende e nem de quem ensina. Além disso, o ensino da Matemática está muito focado no cálculo, quando na verdade deveria dar atenção ao raciocínio.
4. *Busca inadequada a novos recursos pedagógicos:* para alcançar resultados satisfatórios em sala de aula, o professor opta por aplicar jogos ou fazer uso de materiais lúdicos em suas turmas. As justificativas para essa escolha são o caráter motivador, a ideia de partir do concreto ou tornar as aulas mais alegres e atraentes. Porém, muitas vezes, acaba sendo esquecido que o mais importante não é o material, mas sim a discussão e a resolução de uma situação problema ligada ao contexto do aluno.
5. *Falta de contextualização:* a Matemática separada da realidade se torna uma ciência sem sentido. É preciso tornar os conteúdos significativos para aqueles que aprendem. Portanto, é papel do professor tentar vincular a Matemática a outras áreas do conhecimento, como Biologia, Geografia ou Informática, assim como trazer para a sala de aula situações do cotidiano do aluno.
6. *Dificuldades no uso da linguagem matemática:* a familiarização com uma linguagem simbólica muito própria e específica da Matemática é mais um fator complicador para os alunos. Os professores, por sua vez, também insistem no uso de uma linguagem formal e acabam afastando cada vez mais os alunos, tornando a disciplina inacessível.

Desde o momento em que acordamos até as nossas últimas tarefas diárias, a Matemática está presente em nossas vidas, mas, infelizmente, ela acaba passando despercebida inúmeras vezes. O celular, com todos os aplicativos disponíveis para o nosso uso, é um exemplo de aplicação da Matemática no cotidiano. Quando vamos ao supermercado e temos diversas opções de tamanho de um mesmo produto, é a Matemática que usamos para saber qual é a embalagem mais vantajosa. Hoje, por exemplo, a maioria dos países escolhe seus governantes por eleições democráticas e, mais uma vez, a Matemática surge em nossas vidas. Inúmeras outras situações poderiam ser citadas para exemplificar a importância dessa disciplina em nossa rotina.

A Matemática do cotidiano não está apenas em um exemplo do livro didático. Ela também aparece nos fenômenos naturais, no avanço tecnológico, nas ciências exatas (Química e Física) e até mesmo nas artes. Em contrapartida ao que foi citado, existe a Matemática da escola, em que as ideias matemáticas acabam ficando dentro da sala de aula, sem estabelecer um vínculo com o mundo fora dela. Sob essa visão, a Matemática é uma disciplina para executar cálculos e resolver problemas. É válido ressaltar que muitas crianças que apresentam dificuldades com a disciplina em sala de aula, quando são colocadas em uma situação do dia a dia em que precisam da Matemática, conseguem se superar e se sair bem daquele conflito. Isso acontece porque fora da escola, não há a cobrança do cálculo formal, escrito e a criança pode fazer as operações mentalmente e se expressar verbalmente. Com isso, não estamos sugerindo que a aplicação de regras seja deixada de lado pelas escolas, mas que possa se dar mais ênfase na sua aplicabilidade em situações cotidianas.

Onuchic e Allevato (2004, p. 213) afirmam que “a Matemática tem desempenhado um papel importante no desenvolvimento da sociedade e que problemas de Matemática têm ocupado um lugar central no currículo escolar desde a Antiguidade”. Um dos documentos mais antigos que tratam de problemas matemáticos é o papiro de Rhind[1]. Ele data de 1650 a. C. e traz a solução de cerca de 80 problemas das mais diversas áreas da Matemática, como geometria, fração, proporção, trigonometria, dentre outras, conforme ilustra a figura 1. Assim sendo, pode-se garantir que a Matemática há muito está presente em nossas vidas e quem

---

[1] Papiro de Rhind é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria. É um dos mais famosos e antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje.

tiver domínio de seus conceitos e habilidade para resolver problemas se sobressairá e terá facilidades em relação aos demais.

Figura 1 – Uma parte do papiro de Rhind

Fonte:http://www.matematica.br/historia/prhind.html (Acesso em 25/11/2016)

1.2 **Abordagem histórica sobre o ensino da Matemática**

Os estudos sobre o ensino da Matemática passaram a ficar mais frequentes a partir do início do século XX, quando se iniciou, nos Estados Unidos e em diversos países da Europa, uma reforma no ensino da Matemática. O matemático alemão Felix Klein (1849 – 1925), nascido na cidade de Düsseldorf, pode ser considerado um pioneiro no movimento de modernização do ensino da Matemática. Ele não apenas influenciou os programas, como também os métodos de ensino da Matemática. Klein foi um professor influente, pois além de dar aulas que contagiavam seus alunos, ele se preocupava com as questões pedagógicas relacionadas ao ensino.

No Brasil, pode-se perceber uma ênfase na repetição, na memorização e no treinamento. Os alunos resolviam exercícios repetitivos para fixar conceitos e não havia a prática da resolução de problemas. Já em meados do século XX, o ensino da Matemática passou a ser feito com compreensão e começou-se a falar em resolução de problemas como metodologia. O nome de George Polya surge como referência nesse assunto, porém, a aplicação dessas novas ideias dependeria dos professores, que em geral, no momento, não estavam preparados para tal tarefa.

Na década de 1960, surge o movimento da Matemática Moderna, que se baseava na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra para o ensino de Matemática. Nesse momento, não houve avanços nos trabalhos e pesquisas em resolução de problemas. Ainda durante o período do movimento da Matemática Moderna, alguns estudos começaram a ser feitos sobre a resolução de problemas e suas implicações curriculares, mas uma falta de concordância sobre três tipos de concepção surgiu. Seria ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para a resolução de problemas ou ensinar por meio da resolução de problemas?

Os autores Schroeder e Lester (1989 apud ONUCHIC, 1999 p.206-7) apresentaram essas três formas de utilizar a resolução de problemas. As diferenças entre elas serão tratadas a seguir. Primeiramente, ensinar sobre resolução de problemas tem como objetivo resolver problemas. Para ajudar os alunos na tarefa de resolver problemas, pode-se utilizar o método de quatro fases sugerido por Polya, que explanaremos adiante. Por outro lado, ensinar para resolução de problemas ressalta a valorização do desempenho e das estratégias dos alunos. Aqui, a resolução de problemas é tida como um processo e há a preocupação em desenvolver no aluno a capacidade de transpor o que aprende de um contexto para outro. Por fim, ao ensinar por meio da resolução de problemas, tem-se a resolução de problemas como um ponto de partida, onde o problema desencadeia o processo de construção do conhecimento. O professor deve saber quais são os conhecimentos anteriores nos quais os alunos têm deficiência, para que essas lacunas possam ser preenchidas, mas a falta de conhecimento prévio não pode limitar o aluno na aquisição de novos conhecimentos. Sem dúvida, este último constitui-se num caminho para se ensinar Matemática e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Nesse trabalho, basearemos nosso estudo nesse último modo de concepção.

No final do século XX e início do século XXI, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) surgem no Brasil, apresentando uma proposta sobre como trabalhar a resolução de problemas nas aulas de Matemática. De acordo com esse documento, a resolução de problemas pode ser vista como ponto de partida da atividade matemática em contrapartida à simples resolução de procedimentos e ao acúmulo de informações, uma vez que possibilita aos estudantes a mobilização dos conhecimentos e o gerenciamento das informações que estão ao seu alcance. Ainda segundo os PCN (BRASIL, 1998), a opção por organizar o trabalho pedagógico a partir da resolução de problemas “traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução”.

A abordagem da Matemática através da resolução de problemas pode influenciar na formação de cidadãos mais críticos e independentes, pois desenvolve no aluno a capacidade do pensar matematicamente. Dessa forma, o aluno se torna um ser participante na sua própria aprendizagem, isto é, ele cria métodos e estratégias de resolução de problemas, não se restringindo a metodologias mais tradicionais, em que há o predomínio de exercícios rotineiros e desinteressantes e que valorizam o aprendizado por treinamento e memorização.

Atualmente, a maioria dos alunos aprende a resolver problemas matemáticos. Em contrapartida, a resolução de problemas vem contribuindo para o fracasso escolar. Essas duas frases podem gerar certa confusão, mas o “fracasso escolar” citado acontece pois os alunos apresentam dificuldades consideráveis na interpretação dos enunciados. Quando um problema é proposto, eles fazem a leitura do texto, porém não conseguem transformar aquele enunciado em uma sentença matemática, ou seja, a maioria dos alunos não é capaz de modelar um problema. Uma outra questão pertinente é que os “problemas” discutidos em sala de aula não deixam de ser meros exercícios de repetição disfarçados de problemas, para fixar os conteúdos que acabaram de ser trabalhados. Para resolvê-los, basta usar uma sequência de procedimentos padronizados e que, se forem memorizados, poderão ser utilizados na resolução de outros problemas semelhantes. Esse tipo de atividade não faz com que o aluno desenvolva a capacidade de transpor o raciocínio utilizado para o estudo de outros assuntos.

1.3 **A resolução de problemas na sala de aula**

Sob o ponto de vista do professor, ensinar os alunos a resolver problemas não significa somente dotar o aluno de habilidades e estratégias eficazes para lidar com questões matemáticas. Na verdade, significa também criar nesses alunos hábitos e atitudes de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta.

Já sob o ponto de vista dos alunos, aprender a resolver problemas não é apenas uma questão de encontrar a sua solução. Além disso, é preciso também saber propor os problemas para si mesmo e fazer com que esse problema seja solucionado, ou seja, que se deseje encontrar a sua solução. Para isso, o problema tem que ser investigado, questionado, estudado e resolvido, pois o verdadeiro objetivo da aprendizagem da solução dos problemas é fazer com que os alunos sejam capazes de propor problemas e resolvê-los como forma de amadurecer a aprendizagem.

Alguns fatores podem dificultar a resolução dos problemas. Para exemplificar, podemos citar uma redação ruim, isto é, quando o texto não está claro o suficiente para o aluno ou quando as informações dão margem a dois ou mais tipos de interpretação; um ponto de partida obscuro, ou seja, quando o aluno não sabe por onde começar ou o que tem que fazer primeiro para solucionar o problema e uma dificuldade nas etapas da resolução, ou seja, quando as regras que estipulam os passos necessários para a resolução do problema não se encontram bem formuladas.

Presentes ou não estes fatores que dificultam a resolução, faz-se necessário que a resolução de qualquer problema acompanhe alguns requisitos básicos como prestar atenção em todos os dados fornecidos, recordar alguns conhecimentos já estudados e relacionar entre si certos conceitos. Na maioria dos problemas estes elementos fazem parte de habilidades necessárias que levarão ao resultado.

No contexto de Educação Matemática, professores e pesquisadores da área atribuem cada vez mais uma maior relevância a esta metodologia. De acordo com os argumentos citados até aqui, fica evidente a dificuldade em despertar no aluno o gosto pela resolução de problemas. Diversos obstáculos e momentos de dificuldade surgirão. Isto acontece porque professores e alunos, em geral, não conseguem diferenciar um problema matemático de um exercício matemático. Vamos distinguir um problema de um exercício, usando definições de alguns autores.

Segundo Dante (1991, p. 9-10), “problema é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la”, isto é, problema é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido. De acordo com Onuchic (1999, p. 215), “problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas se está interessado em resolver”. Já para Polya (1978), “ter um problema significa buscar conscientemente por alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido, mas não imediatamente atingível”.

Para Romanatto (2012, p. 301) “um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la”.

Em contrapartida, temos que exercício, segundo Silveira (2001 apud SOUSA 2005, p. 4), “é uma atividade de treinamento no uso de alguma habilidade/conhecimento matemático já conhecido pelo resolvedor, como a aplicação de um algoritmo conhecido, de uma fórmula conhecida”. Dessa maneira, podemos afirmar que os alunos estão diante de um exercício quando a única exigência é a aplicação de um procedimento, ou seja, não há a necessidade de criação de estratégias para solucioná-lo.

Ao longo de sua vida escolar, o aluno se depara com diversas atividades matemáticas, que podem ser classificadas como exercício ou problema. Conforme foi citado, a realização de um exercício está resumida à execução de habilidades e técnicas que foram aprendidas pelo aluno. Já para a realização de um problema que está sendo trabalhado pela primeira vez, busca-se por estratégias e procedimentos já conhecidos, isto é, faz-se uso de técnicas aprendidas anteriormente para a resolução de problemas desconhecidos.

Os professores, em suas respectivas salas de aula, devem mostrar aos alunos que exercícios e problemas são tarefas distintas. É preciso que, aos alunos, fique evidente que as atividades não devem se resumir a exercícios repetitivos, mas abranger a miscelânea dos vários tipos de conhecimentos que envolvem diferentes atitudes, motivações e conceitos.

Porém, ao resolver um mesmo problema por diversas vezes, este poderá se tornar um exercício para o aluno. Assim, fica difícil determinar se uma atividade dada pelo professor em aula pode ser considerada um exercício ou um problema para aquele aluno. Essa definição vai depender da experiência do aluno, dos conhecimentos anteriormente adquiridos por ele e dos objetivos que se definem durante a realização da tarefa.

Com isto, aprender Matemática se torna mais atrativo para o aluno quando problemas desafiadores e significativos são propostos nas aulas, ao invés de exercícios que trazem situações que se distanciam do contexto do aluno e que remetem à memorização de fórmulas. Acreditamos assim que, se o problema proporcionar ao aluno o gosto pela descoberta da resolução, ele terá interesse nas atividades matemáticas, pois a sua curiosidade, criatividade e agilidade de raciocínio estarão sendo estimuladas e, com isso, o aluno estará adquirindo conhecimento matemático.

1.4 **Estratégias para a resolução de problemas**

Será que um problema está resolvido quando se encontra a sua solução? Ou ainda, será que para resolver um problema é preciso chegar à resposta dele? A resposta para ambas as perguntas é não, ou seja, um problema não está necessariamente resolvido quando se encontra a solução. Para garantir que o problema esteja resolvido é preciso saber o que foi usado e como foi usado. Em outras palavras, é necessária a plena compreensão das etapas de resolução do problema.

Diante do objetivo de resolver problemas, George Polya, matemático e professor húngaro, publicou, em 1945, “How to solve it”, traduzido para português como “A arte de resolver problemas”, em que sugere um método de resolução de problemas dividido em quatro fases, a saber:

1ª) compreender o problema;

2ª) estabelecer um plano;

3ª) executar o plano;

4ª) fazer o retrospecto ou verificação.

Para cumprir a primeira fase, isto é, para compreender um problema, o aluno pode utilizar diversas estratégias, tais como, fazer perguntas para si mesmo, construir uma figura que esquematize a situação proposta ou ainda passar para a notação matemática aquilo que foi dado na linguagem usual. As perguntas citadas podem ser: O que está sendo perguntado? Quais são as informações dadas? Elas são suficientes para encontrar a solução? Quais estratégias posso usar para descobrir os dados desconhecidos? Quais são os cálculos que precisarei efetuar para resolver o problema?

Na segunda fase fica determinada a necessidade de estabelecer um plano, ou seja, o aluno terá que buscar conexões entre os dados fornecidos, os dados omitidos e o que é perguntado. Para isso, ele terá que pensar em fórmulas e/ou algoritmos que poderão ser aplicados, estabelecer prioridades e com tudo isso definido, o aluno poderá elaborar um plano.

A terceira fase consiste em realizar o plano. É nessa fase que o aluno executa o plano elaborado. Se as etapas anteriores foram bem desenvolvidas, esta, provavelmente, se tornará a etapa mais fácil do processo, mas nem por isso o aluno pode se descuidar. Cada procedimento deve ser realizado com muita cautela, para não haver erros simplórios e assim chegar a um resultado incorreto.

A última fase desse método é a verificação da resposta obtida na etapa anterior. Primeiramente, deve ser feita uma reflexão sobre a solução encontrada e nessa análise se o número e/ou a grandeza fazem sentido para aquela situação proposta. Em seguida, segundo Sousa (2005, p. 8), o aluno deve retomar o processo desenvolvido "procurando descobrir a essência do problema e do método empregado para resolvê-lo, de modo a favorecer uma transposição do aprendizado adquirido neste trabalho para a resolução de outras situações-problema."

O método de Polya é um método de resolução de problemas matemáticos, mas ele não descreve as etapas para resolvê-lo. Esse passo a passo seria uma técnica de resolução de problemas. Para exemplificar a diferença entre método e técnica vamos multiplicar dois números, em que o multiplicador tenha dois algarismos. Dessa maneira, vamos iniciar a multiplicação entre as unidades dos dois números, colocando o resultado embaixo do algarismo da unidade do multiplicador. Não devemos esquecer que se esse resultado for maior ou igual a uma dezena, temos que "subir" o algarismo da dezena para a próxima casa. Em seguida, multiplicamos a unidade do multiplicador pela dezena do multiplicando e se foi necessário "subir" um algarismo na etapa anterior, temos que somá-lo ao resultado da multiplicação. Quando todos os algarismos do multiplicando tiverem sido multiplicados pela unidade do multiplicador, passamos para a dezena do multiplicador. Assim, efetuamos a multiplicação entre a dezena do multiplicador e a unidade do multiplicando e colocamos o resultado embaixo do algarismo da dezena do multiplicador. Repetimos o processo até o último algarismo do multiplicando e, por fim, somamos as duas linhas obtendo, assim, o resultado.

Neste exemplo é possível perceber que técnica é a maneira de fazer algo, enquanto método é a maneira de pensar algo. Dessa forma, pode-se dizer que o método de Polya ensina a pensar o problema de modo a descobrir a solução, ou seja, a técnica que vai fazer com que o problema seja resolvido.

Com o objetivo de resolver problemas, os alunos se utilizam de diferentes estratégias para cumprir tal tarefa. Furlanetto, Dullius e Althaus (2012, p. 5) citam cinco exemplos desses artifícios, que são colocados a seguir.

- *Tentativa e erro:* é quando o aluno pensa em uma resposta e verifica se ela é válida. Isso acontece muitas vezes em questões objetivas.

- *Padrões:* é quando o aluno procura observar alguma regularidade na questão e, posteriormente, poderá tentar uma generalização.

- *Resolver um problema mais simples:* é quando o aluno desmembra o problema que tem em mãos em problemas mais simples, os quais seja capaz de resolver.

- *Trabalhar em sentido inverso:* é quando o aluno toma posse da resposta e realiza operações inversas com a finalidade de perceber o que deve fazer para solucionar tal problema.

- *Simulação:* é quando o aluno tem uma situação prática para resolver no problema e então ele decide fazer uma simulação daquela situação.

Podemos ainda acrescentar mais duas estratégias que também são usadas pelos alunos. Seriam elas o recurso do desenho e o cálculo formal. O uso do desenho pode ajudar o aluno na interpretação do problema, ou ainda pode ser uma estratégia no registro da solução. Vale ressaltar que o desenho pode fornecer ao professor pistas sobre como o aluno pensou e agiu para solucionar aquele problema. A utilização do cálculo formal é a principal estratégia de resolução de problemas para a maioria dos alunos. Acreditamos que isso aconteça, pois, desde a Educação Infantil, é exigida do aluno a apresentação do cálculo formal na resolução de problemas e, com o passar dos anos escolares, ele se acostuma com isso e passa a acreditar que essa estratégia de resolução de problemas é a mais adequada.

Como George Polya foi um matemático e também um professor, o método de resolução de problemas esquematizado por ele pode ser usado por alunos, mas principalmente por professores. O aluno utiliza o método das quatro fases para resolver os problemas matemáticos, enquanto o professor o usa para ensinar o aluno a pensar a resolução dos problemas. Em sua obra, ele registra diversos conselhos para o professor, o que deixa a impressão que está muito mais preocupado com o professor do que com o aluno. Pode-se afirmar que a sua preocupação com o aluno se expressa por meio de esforços em apresentar ao professor uma melhor maneira de ensinar seus alunos a resolver problemas.

Outra questão que se coloca é que, embora destinado a problemas matemáticos, o método de resolução de problemas elaborado por Polya (1978) não se resume a eles. Isso não fica evidente em nenhum momento da leitura do seu livro, mas é possível perceber que podemos aplicá-lo em diversas situações cotidianas. Quando estamos diante de um problema pessoal e desejamos solucioná-lo, podemos sim seguir as quatro fases sugeridas por Polya (1978). Dessa maneira, primeiramente, vamos procurar compreender o problema e tentar entender como ele surgiu. Em seguida, é prudente que se estabeleça um plano para tentar resolvê-lo, de modo que todos fiquem satisfeitos. O próximo passo é colocar o plano em prática, isto é, executar aquilo que foi planejado. Por fim, uma reflexão sobre toda a situação pode ser válida e isso seria equivalente a fazer o retrospecto ou a verificação.

1.5 **O problema no processo de ensino e aprendizagem**

A introdução de um novo conteúdo matemático pode ser feita através da resolução de problemas. Com esse objetivo, os professores escolhem uma situação em que o conceito que será trabalhado na aula seja tema central do problema selecionado. Assim, o problema é o ponto de partida da atividade matemática, e não o fim do processo. Na relação de ensinar e de aprender definições, propriedades e métodos matemáticos, a exploração de problemas se torna um caminho de abordagem, ou seja, se torna necessário que o aluno desenvolva algum tipo de estratégia para resolver a situação proposta.

Concordamos com Romanatto (2012, p. 302), quando ele diz que

> Se a sequência "definições, propriedades, exercícios e problemas" era habitual do ensino da Matemática e com o agravante dos exercícios e dos problemas terem ênfase nos aspectos envolvendo regras, fórmulas e algoritmos, a proposta metodológica da resolução de problemas faz uma inversão significativa, qual seja, "problemas, definições, propriedades, exercícios e novos problemas". Propomos o problema como o centro ou o início do processo de ensinar e de aprender Matemática e isso pode ser decisivo para essa disciplina adquirir um sentido para os estudantes.

Ainda de acordo com esse autor (2012, p. 302-3), é possível concluir que

> A resolução de problemas significa envolver-se em uma tarefa ou atividade cujo método de solução não é conhecido imediatamente. Para encontrar uma solução, os estudantes devem aplicar seus conhecimentos matemáticos. Solucionar problemas não é apenas buscar aprender Matemática e, sim, fazê-la. Os estudantes deveriam ter oportunidades frequentes para formular, tentar e solucionar problemas desafiadores que requerem uma quantidade significativa de esforço e deveriam, então, ser encorajados a refletir sobre seus conhecimentos. Assim, solucionar problemas não signfica apenas resolvê-los, mas aplicar sobre eles uma reflexão que estimule seu modo de pensar, sua curiosidade e seus conhecimentos.

O ato de ensinar, geralmente, começa onde os professores se encontram, mas na verdade deveria sempre começar onde os alunos se encontram. Dessa maneira, estariam sendo considerados os conhecimentos que cada aluno traz consigo, porém não é assim que acontece em muitas das salas de aula. Com isso, a aprendizagem seria uma consequência do processo de resolução de problemas. Nessa mesma direção, o problema deve ser o ponto de partida e, de acordo com Onuchic (1999, p. 215), "os professores, através da resolução de problemas, devem fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática gerando novos conceitos e novos conteúdos". Segundo Van de Walle (2001 apud FERNANDES e OLIVEIRA, 2015 p. 4), "ensinar Matemática através desta metodologia, não significa dar o problema, sentar-se e esperar que aconteça uma mágica. É necessária a criação de um espaço matemático em que todos se sintam motivados no transcorrer de cada aula".

Onuchic e Allevato (2004, p. 221) afirmam que para criar esse espaço ideal ao aprendizado, toda aula deve compreender três momentos importantes: antes, durante e depois. Cada uma dessas etapas está descrita a seguir.

- *Antes:* o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras.
- *Durante:* os alunos trabalham e o professor observa e avalia esse trabalho.
- *Depois:* o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-las e conduz a discussão enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos construídos.

Com o objetivo de tornar o trabalho de sala de aula mais dinâmico, Allevato e Onuchic (2014, p. 44-46) desenvolveram um roteiro composto por uma sequência de dez atividades, em que essa metodologia é usada para o ensino de Matemática, que elencamos a seguir.

1. *Proposição do problema* **–** seleciona ou elabora um problema e denomina-se problema gerador.
2. *Leitura individual* **–** distribui uma cópia impressa do problema para cada aluno e solicita a leitura do mesmo.
3. *Leitura em conjunto* **–** separa a turma em pequenos grupos e solicita uma nova leitura do problema.
4. *Resolução do problema* **–** a partir do momento em que o aluno entendeu o problema, ele tenta resolvê-lo, em grupo, permitindo assim a construção de conhecimento sobre o conteúdo que o professor planejou para aquela aula.
5. *Observar e incentivar* **–** nesse momento, o professor muda de comunicador do conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da aprendizagem.

6. *Registro das resoluções na lousa* **–** anota os resultados obtidos pelos grupos quer sejam certo ou errado e aqueles feitos por diferentes caminhos.
7. *Plenária* **–** assembleia com todos os alunos. Como todos trabalham sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados e, dessa forma, participam.
8. *Busca do consenso* **–** após discussões, e sanadas as dúvidas, o professor juntamente com os alunos tentam chegar a um consenso.
9. *Formalização do conteúdo* **–** faz-se uma síntese daquilo que se objetivava “aprender” a partir do problema gerador. São colocadas as devidas definições, identificando propriedades, fazendo demonstrações, etc.
10. *Proposição e resolução de novos problemas* **–** nesta etapa, após a formalização do conteúdo, propõem-se novos problemas para fixação dos conceitos.

O trabalho em sala de aula que faz uso da resolução de problemas estimula o aluno a encontrar um caminho para a solução, ao invés de esperar por uma resposta pronta dada pelo professor ou pelo livro didático. A resolução de problemas como método de ensino da Matemática, pode fazer com que as definições e as ideias matemáticas fiquem mais compreensíveis para o aluno, dado que são obtidas, criadas e investigadas de maneira ativa e significativa.

Segundo Dante (1991, p. 25), “é possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis”. Agindo assim, o estudante poderá propor soluções e interferir de maneira positiva nos problemas que surgirem na escola ou na sua vida fora dela.

Na maioria das salas de aula, a Matemática ainda não é trabalhada pela ótica da resolução de problemas. Com isso, o aluno tende a acreditar que para aprender Matemática, ele terá que memorizar fórmulas e algoritmos que serão utilizados para solucionar as questões propostas pelo professor, ou seja, basta aplicar a regra e o problema estará resolvido. Por outro lado, o aluno também acha que a Matemática é um conjunto de conceitos inquestionáveis, do qual não se duvida e nem mesmo é possível compreender porque funciona. Dessa forma, a Matemática passa a ser tratada como uma verdade absoluta e que foi criada por gênios. Assim, o aluno se distancia da Matemática e passa a se sentir incapaz de aprender tal conteúdo, pois acredita que nunca vai conseguir. Ele acaba perdendo também a sua intuição matemática para questões do cotidiano.

Os alunos também acreditam que os problemas matemáticos das aulas não se relacionam com os problemas matemáticos da vida real. Assim, a maneira como se resolve um problema “da escola” é diferente da que se resolve um problema fora dela. Outro fator importante é que a maioria dos alunos não são persistentes, ou seja, eles tendem a desistir de um problema, ou quando não sabem como solucioná-lo, ou quando o método que estão usando não funciona. Eles precisam aprender a buscar por soluções alternativas, diferentes daquelas propostas pelo professor. Um caminho para ajudar o aluno nessa busca é a modelagem matemática, pois através dela ele se torna mais consciente da utilidade da Matemática para resolver e analisar problemas do dia a dia.

1.6 **O papel do aluno e o papel do professor no processo de ensino e aprendizagem**

Em relação ao papel do aluno no processo de aprendizagem, isto é, quando o aluno é visto como construtor do seu próprio conhecimento, os PCN (BRASIL, 1998 p. 40), afirmam que

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Além disso, os PCN (BRASIL, 1998 p. 42) enfatizam que

> O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos — que admitem diferentes respostas em função de certas condições — evidencia uma concepção de

> ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos.

Quando se opta por trabalhar em uma sala de aula utilizando o método de resolução de problemas, uma mudança de atitude deve haver também por parte do professor. Agora não são mais os alunos que perguntam para o professor responder. Os questionamentos devem partir do professor para os alunos responderem e isso o torna um mediador de conteúdos.

De acordo com Romanatto (2012, p. 303),

> Cabe ressaltar que o papel do professor é essencial, pois deve propor bons problemas, deve acompanhar e orientar a busca de soluções, coordenar discussões entre soluções diferentes, valorizar caminhos distintos que chegaram à mesma solução, validando-os ou mostrando situações em que o raciocínio utilizado pode não funcionar. O professor precisa trabalhar as soluções individuais, grupais e coletivas, sendo as últimas aquelas aceitas pela comunidade dos matemáticos. Assim é tarefa prioritária do professor organizar, sintetizar, formalizar os conceitos, princípios e procedimentos matemáticos presentes nos problemas apresentados.

Um requisito fundamental para o professor trabalhar com o método de resolução de problemas é que ele deve ser uma pessoa que goste de resolver problemas. Assim, antes de aplicar esse método, o professor precisa vivenciar a resolução de problemas para experimentar as fases que compõem a resolução de um problema. Essa motivação, presente no professor, contagiará os alunos e talvez até toda a turma. Dessa maneira, para utilizar a resolução de problemas em uma sala de aula, não são necessárias grandes mudanças em um primeiro momento. Algumas transformações na postura do professor e na elaboração das atividades já são suficientes para esse início.

Algumas dificuldades podem surgir durante esse processo, como a questão da leitura do enunciado ou ainda a falta de familiaridade com o vocabulário e com o simbolismo matemático. O aluno precisa ser capaz de se apropriar de um conhecimento matemático utilizado em um problema, para transpor aquele mesmo raciocínio para outros problemas. Isso é fundamental na busca da solução de um problema. Ainda podemos ver em Romanatto (2012, p. 305) que “a comunicação matemática na exposição do raciocínio, que levou a resposta ao problema, precisa ser expressa para possibilitar a legitimação ou a refutação da resolução.” Assim, o professor que também resolve problemas se torna mais apto a identificar e solucionar as dificuldades dos seus alunos.

Para manter o papel de mediador de conteúdos, o professor não deve responder perguntas como:

- “Professor, para resolver esse problema preciso fazer uma conta de mais (adição) ou de menos (subtração)?”;
- “Professor, para resolver esse problema preciso fazer uma conta de vezes (multiplicação) ou uma conta de dividir (divisão)?”;
- “Professor, a resposta do problema é 10?”.

Caso perguntas como essas sejam respondidas, a etapa que corresponde à elaboração do plano, no método de Polya, já estaria concluída, faltando apenas execução do plano e a verificação da resposta, que são etapas mais simples. Ou seja, o problema já estaria praticamente resolvido, e o aluno não precisaria mais pensar nele. Algumas respostas possíveis a essas perguntas são:

- “Vamos pensar juntos!”;
- “Pense um pouco mais!”;
- “Quais são os dados que o problema fornece?”;
- “É realmente isso que o problema está pedindo para fazer?”;
- “Discuta suas ideias com um colega e peça para ele lhe mostrar as dele!”.

Respostas como essas fazem com que o aluno ainda permaneça motivado na resolução do problema e, com o passar do tempo, ele vai se tornando mais independente, pois sabe que não conseguirá obter do professor a solução ou respostas que levem diretamente à solução do problema.

Outro aspecto importante para o trabalho com a resolução de problemas é a constante reflexão sobre os trabalhos realizados em sala de aula. Um professor que não dispõe desses momentos de reflexão com seus alunos pode desanimar diante de alguma dificuldade e deixar de trabalhar com essa metodologia, o que seria, provavelmente, um prejuízo para os estudantes. Em prol disso, o professor pode dividir a aula em três etapas. No primeiro momento, com o problema em mãos, cada aluno deve refletir sobre ele e, enquanto isso, o professor percorre as mesas ajudando, incentivando e fornecendo pequenas dicas aos alunos. Em um segundo momento, o professor solicita que os alunos formem grupos e continuem a discussão até conseguirem formalizar a solução do problema. Após isso feito, um representante de cada grupo vai ao quadro para apresentar a solução pensada por eles ou o próprio professor pode fazer isso no lugar dos alunos. Por último, se estabelece o momento coletivo, em que o professor vai até o quadro para discutir com os alunos as soluções propostas pelos grupos. O professor deve apontar os possíveis erros cometidos e, por fim, formalizar uma resolução aceita pela comunidade matemática.

O professor também pode e deve fazer uso das mais diversas tecnologias educacionais disponíveis como facilitadores da aprendizagem. Alguns recursos disponíveis são livros didáticos e paradidáticos, materiais didáticos, calculadoras, jogos, computadores, *softwares* e vídeos.

Torna-se evidente que desenvolver o ensino e a aprendizagem da Matemática por meio da resolução de problemas não é uma tarefa fácil. Para essa metodologia acontecer, é preciso que os professores estejam dispostos e preparados para esse tipo de trabalho, pois os problemas precisam ser escolhidos de maneira cuidadosa. Além disso, é necessário também observar, motivar, incentivar e ouvir os alunos na busca de soluções para esses problemas, mantendo-os sempre confiantes na própria capacidade de resolvê-los. Assim, acreditamos que a Matemática faz mais sentido para os alunos nessas salas de aula onde tal metodologia é adotada.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Neste capítulo, a equação do 2º grau é a personagem principal. Iniciamente, vamos defini-la e, em seguida, vamos conhecer alguns métodos de resolução, a saber: método de completar quadrados, fórmula de Bhaskara, relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau e método geométrico de Al-Khwarizmi. Por fim, vamos estudar os casos de equação do 2º grau, quando estipulamos diferentes valores reais (positivos, negativos ou nulos) para seus coeficientes.

2.1 Definição de equação do 2º grau

Equação do 2º grau com incógnita x é toda equação que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais, sendo $a \neq 0$. Os números a, b e c são chamados coeficientes da equação do 2º grau. Equações desse tipo são chamadas de equações do 2º grau, pois o maior grau do termo x é 2.

Uma equação do 2º grau escrita da maneira acima se encontra na forma reduzida. Ao escrevê-la assim, se torna possível identificar os coeficientes da equação. Se uma equação do 2º grau na forma reduzida tem todos os coeficientes diferentes de zero, então é denominada de equação completa. Caso contrário, isto é, quando $b = 0$ e/ou $c = 0$, é chamada de equação incompleta.

Ao resolver uma equação do 2º grau considerando um determinado conjunto numérico, que também pode ser chamado de conjunto universo da equação, existe a possibilidade de encontrar, no máximo, duas soluções, ou seja, podemos ter duas soluções, uma solução ou nenhuma solução no conjunto numérico dado.

2.2 **Métodos de resolução de uma equação do 2º grau**

Resolver uma equação de um determinado grau consiste em encontrar suas raízes dentro de um dado conjunto universo. Para resolver uma equação do 2º grau, a maioria dos professores recorre a uma fórmula resolutiva também conhecida como fórmula de Bhaskara. Nesse trabalho, além dessa, vamos apresentar outras três maneiras de resolver uma equação do 2º grau, são elas: método de completar quadrados, relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau e método de Al-Khwarizmi.

2.2.1 Método de completar quadrados

Para compreendermos o método de completar quadrados, precisamos, inicialmente, entender como tornamos um trinômio qualquer em um trinômio quadrado perfeito. No Ensino Fundamental, aprendemos sobre produtos notáveis. Nesse contexto, estudamos o quadrado da soma de dois termos e o quadrado da diferença de dois termos:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

A expressão da direita é um trinômio quadrado perfeito. Dada uma equação do 2º grau escrita na forma reduzida, $ax^2 + bx + c = 0$, podemos transformar o trinômio $ax^2 + bx + c$ em um trinômio quadrado perfeito. Para isso, utilizaremos os passos que seguem.

1º passo: Dividir a equação por a. Lembrando que podemos fazer isso, pois, na equação do 2º grau, $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Agora, o coeficiente do termo x^2 é 1, o coeficiente do termo x é $\frac{b}{a}$ e o termo independente de x é $\frac{c}{a}$.

2º passo: Isolar o termo independente de x.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

3º passo: Dividir o coeficiente do termo x por dois, elevá-lo ao quadrado e somar o resultado nos dois membros da equação.

- Coeficiente do termo x → $\frac{b}{a}$
- Dividir por dois → $\frac{b}{2a}$
- Elevar ao quadrado → $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

4º passo: Observar que o primeiro membro da equação é um trinômio quadrado perfeito e escrevê-lo como um quadrado.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Para exemplificar essa situação, vamos aplicar o passo a passo descrito acima na equação $2x^2 + 16x - 18 = 0$.

$$2x^2 + 16x - 18 = 0$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x^2 + 8x = 9$$

$$x^2 + 8x + 16 = 9 + 16$$

$$x^2 + 8x + 16 = 25$$

$$(x + 4)^2 = 25$$

$$x + 4 = \pm\sqrt{25}$$

$x + 4 = \pm 5$

$x_1 = -5 - 4 = \mathbf{-9}$ ou $x_2 = +5 - 4 = \mathbf{+1}$

2.2.2 Fórmula de Bhaskara

O processo de ensino e aprendizagem de equação do 2º grau, na maioria das escolas e nas propostas trazidas pelos livros didáticos, enfatiza a fórmula de Bhaskara como principal método de resolução dessas equações. O nome da fórmula é uma homenagem ao matemático Bhaskara Akaria, considerado o mais importante matemático indiano do século XII.

A ideia da demonstração da fórmula de Bhaskara utiliza o método de completar quadrados e iniciar o trabalho desse conceito, articulando representações, é importante. Considera-se a proposta muito válida e significativa, pois permite que o aluno atribua significado ao encontrar a raiz de uma equação, e não somente mecanize um processo algébrico dado pela fórmula (potencializa o desenvolvimento do pensamento algébrico).

Para deduzir a fórmula de Bhaskara, vamos tomar uma equação do 2º grau na sua forma reduzida, isto é,

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Procedendo como ao se completar quadrados, temos que

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Transformando o primeiro membro da equação em um quadrado e igualando os denominadores no segundo membro, segue que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada, temos que

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ,$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dependendo do sinal do discriminante Δ, temos:

- Se $\Delta > 0$, segue que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \\[2ex] x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

Portanto, a equação possui duas raízes reais e diferentes.

- Se $\Delta = 0$, segue que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}.$$

Portanto, a equação possui duas raízes reais e iguais.

- Se $\Delta < 0$, segue que

$\sqrt{\Delta}$ não é um número real, pois qualquer número real elevado ao quadrado resulta em um número positivo.

Portanto, a equação não possui raízes reais.

Para exemplificar essa situação, vamos aplicar o passo a passo descrito acima na equação $3x^2 + 5x - 2 = 0$. Primeiramente, vamos identificar os coeficientes da equação do 2º grau, ou seja, $a = 3$, $b = 5$ e $c = -2$. Agora, vamos determinar o discriminante.

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.3.(-2) = 25 + 24 = 49$.

Como $\Delta = 49 > 0$, é correto afirmar que a equação possui duas raízes reais e diferentes. Para determiná-las, vamos terminar de aplicar a fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2.3} = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = \frac{-5 - 7}{6} = -\frac{12}{6} = -2$$

ou

$$x_2 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Logo, a equação possui -2 e $\frac{1}{3}$ como raízes.

2.2.3 Relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau

As relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau, também conhecidas como relações de Girard, foram desenvolvidas pelo matemático belga Albert Girard (1595 – 1632), que estabeleceu relações de soma e produto entre as raízes de uma equação do 2º grau. Vamos observar as demonstrações a seguir, responsáveis pelas expressões da soma e do produto das raízes de uma equação do 2º grau.

Nos casos em que a equação possui raízes reais, algumas relações são observadas. Considerando a fórmula de Bhaskara, temos que:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Com base nessas informações podemos determinar as expressões matemáticas responsáveis pela soma e produto das raízes.

Soma:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b\ +\ \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b\ -\ \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Produto:

$$x_1\ .\ x_2 = \frac{-b\ +\ \sqrt{\Delta}}{2a} . \frac{-b\ -\ \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 + b\sqrt{\Delta} - b\sqrt{\Delta} - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} =$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Para exemplificar essa situação, vamos aplicar o passo a passo descrito acima na equação $x^2 - 8x + 15 = 0$. Primeiramente, vamos identificar os coeficientes da equação do 2º grau, ou seja, $a = 1$, $b = -8$ e $c = 15$.

A soma das raízes da equação acima é dada por

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{(-8)}{1} = 8$$

e o produto das raízes da equação acima é dada por

$$P = \frac{c}{a} = \frac{15}{1} = 15.$$

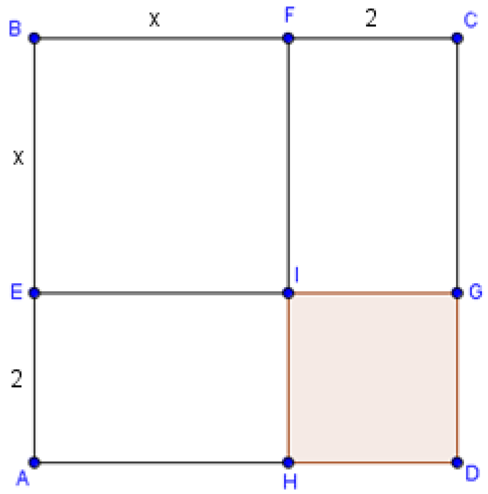
Assim, as raízes da equação que estamos procurando são dois números reais tais que sua soma é igual a 8 e o produto igual a 15. Logo as raízes da equação são 3 e 5.

2.2.4 Método geométrico de Al-Khwarizmi

O matemático Al-Khwarizmi viveu na Pérsia, entre os séculos VIII e IX, e realizou grandes descobertas nas áreas de Aritmética, Álgebra, Astronomia, Geografia e na elaboração do calendário. Devido às suas grandes contribuições, a palavra “algarismo” deriva de seu nome. Al-Khwarizmi recorria a construções geométricas para justificar suas regras na resolução de equações do 2º grau e, neste trabalho, utilizaremos o *software* GeoGebra[2] para tornar tais construções possíveis. De acordo com os valores assumidos pelos coeficientes b e c nas equações do 2º grau, teremos que separar as equações em seis casos diferentes, que trataremos adiante. Como esse método utiliza a Geometria, só é possível encontrar as soluções positivas das equações.

Para exemplificar essa situação, vamos resolver a equação $x^2 + 4x - 12 = 0$. Seja o quadrado $ABCD$, figura 2, cujo lado mede $x + 2$. Assim, temos que o quadrado $BFIE$ possui área de x^2 e os retângulos $FCGI$ e $EIHA$ possuem, cada um, área de $2x$. Dessa forma, o polígono $ABCGIH$ tem área $x^2 + 4x$. Por outro lado, o polígono $IGDH$ também é um quadrado com lado medindo 2 e área medindo 4. Com isso, temos que a expressão $x^2 + 4x + 4$ representa a área do quadrado $ABCD$, mas pela equação inicial, temos que $x^2 + 4x = 12$. Assim, segue que a área do quadrado $ABCD$ é $12 + 4 = 16$. Como $\sqrt{16} = 4$, temos que o lado do quadrado $ABCD$ mede 4, e, portanto, $x = 2$.

Figura 2 – Quadrado *ABCD* referente ao Método de Al-Khwarizmi



Fonte: Autora, 2016

[2] O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica gratuito para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema.

2.3 **Problemas envolvendo as equações do 2º grau**

Nesta seção, apresentaremos seis problemas que serão resolvidos utilizando as equações do 2º grau. Quando modelado, cada problema se transforma em uma equação do 2º grau em que o valor do coeficiente a pode ser positivo ou negativo e os valores dos coeficientes b e c podem ser positivos, negativos ou nulos. Cada problema será resolvido utilizando dois métodos de resolução de equações do 2º grau: o método de completar quadrados e o método de Al-Khwarizmi.

Alguns desses problemas foram aplicados em uma turma do 9º ano de uma escola particular do município de Niterói/RJ. Os resultados foram analisados e serão relatados adiante. O *software* de matemática dinâmica GeoGebra foi usado para criar as figuras que auxiliarão nas demonstrações de alguns dos seis casos em que o método de Al-Khwarizmi foi dividido.

2.3.1 Caso 1: $ax^2 - bx = 0$

- Problema 1

Eu e meu irmão colecionamos figurinhas. Eu tenho uma quantidade de figurinhas e ele tem o quádruplo dessa quantidade. Sabendo que se eu elevar ao quadrado o número de figurinhas que eu tenho ficaremos com a mesma quantidade de figurinhas, quantas figurinhas o meu irmão tem?

- Solução através do método de completar quadrados

Seja x a quantidade de figurinhas que eu possuo e $4x$ a quantidade de figurinhas que o meu irmão possui. Temos que a equação que representa essa situação é

$$x^2 = 4x\,.$$

Daí, segue que

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 + 4$$

$(x-2)^2 = 4$

$x - 2 = \pm\sqrt{4}$

$x - 2 = \pm 2$

$x_1 = -2 + 2 = 0$ ou $x_2 = +2 + 2 = 4$.

Logo, o meu irmão possui 16 figurinhas.

- Solução através do método de Al-Khwarizmi

A equação do 2º grau deve ser reduzida a uma equação do 1º grau. Para isso, devemos dividir ambos os lados da equação por x,

$x^2 = 4x$

$\frac{x^2}{x} = \frac{4x}{x}$

$x = 4$.

Logo, o meu irmão possui 16 figurinhas.

2.3.2 Caso 2: $ax^2 - c = 0$

- Problema 2

Para construir uma piscina, uma superfície quadrada de 121 metros quadrados foi ocupada. Qual é a medida do lado da superfície?

- Solução através do método de completar quadrados

Seja x a medida do lado da superfície da piscina. Temos que a equação que representa essa situação é

$x^2 = 121$.

Segue então que

$x^2 + 0x + 0 = 121 + 0$

$(x+0)^2 = 121$

$x + 0 = \pm\sqrt{121}$

$x + 0 = \pm 11$

$x_1 = -11 - 0 = -11$ ou $x_2 = +11 - 0 = 11$.

Logo, a medida do lado da superfície da piscina é igual a 11 metros.

- Solução através do método de Al-Khwarizmi

$x^2 = 121$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{121}$

$x = 11$.

Logo, a medida do lado da superfície da piscina é igual a 11 metros.

2.3.3 Caso 3: $ax^2 + bx - c = 0$

- Problema 3

O quadrado de um número positivo adicionado a doze vezes esse número resulta em 189. Que número é esse?

- Solução através do método de completar quadrados

Seja x esse número positivo. A equação que representa essa situação é

$x^2 + 12x = 189$.

Logo,

$x^2 + 12x + 36 = 189 + 36$

$(x + 6)^2 = 225$

$x + 6 = \pm\sqrt{225}$

$x + 6 = \pm 15$

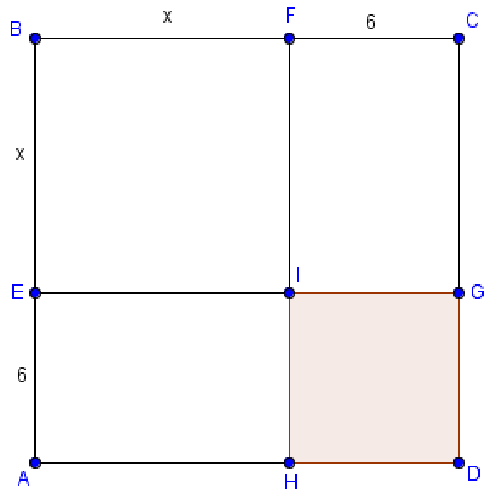
$x_1 = -15 - 6 = -21$ ou $x_2 = +15 - 6 = 9$.

Portanto esse número é 9.

- <u>Solução através do método de Al-Khwarizmi</u>

Seja o quadrado $ABCD$ (figura 3) cujo lado mede $x + 6$. Assim, temos que o quadrado $BFIE$ possui área x^2 e os retângulos $FCGI$ e $EIHA$ possuem, cada um, área $6x$. Dessa forma, o polígono $ABCGIH$ tem área $x^2 + 12x$. Por outro lado, o polígono $IGDH$ também é um quadrado com lado medindo 6 e área medindo 36. Com isso, temos que a expressão $x^2 + 12x + 36$ representa a área do quadrado $ABCD$, mas pela equação inicial, temos que $x^2 + 12x = 189$. Assim, segue que a área do quadrado $ABCD$ é $189 + 36 = 225$. Como $\sqrt{225} = 15$, temos que o lado do quadrado $ABCD$ mede 15, e, portanto, $x = 9$.

Figura 3 – Quadrado *ABCD* referente ao problema 3



Fonte: Autora, 2016

2.3.4 <u>Caso 4: $ax^2 - bx + c = 0$</u>

- <u>Problema 4</u>

Um quadrado tem lados medindo x cm e um retângulo tem lados medindo $\frac{x}{2}$ cm e 16 cm. A soma da área do quadrado com 12 cm² é igual à área do retângulo. Qual é a medida do lado do quadrado?

- <u>Solução através do método de completar quadrados</u>

Um quadrado com lado medindo x tem área medindo x^2. Um retângulo com lados medindo $\frac{x}{2}$ e 16 tem área medindo $8x$. A equação que representa essa situação é

$$x^2 + 12 = 8x\,.$$

Assim, tem-se que

$$x^2 - 8x = -12$$

$$x^2 - 8x + 16 = -12 + 16$$

$$(x - 4)^2 = 4$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{4}$$

$$x - 4 = \pm 2$$

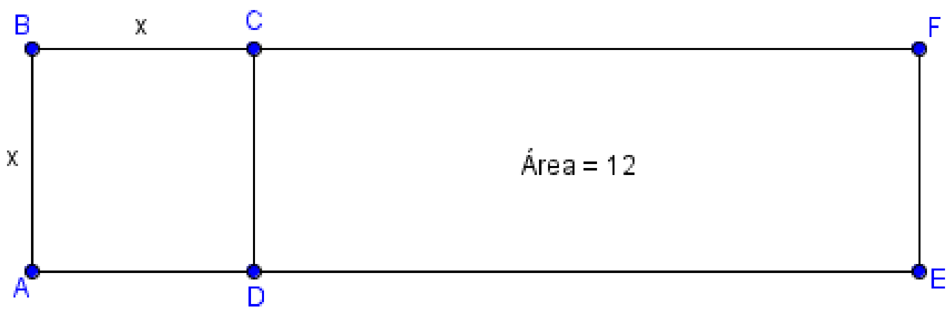
$$x_1 = -2 + 4 = 2 \quad \text{ou} \quad x_2 = +2 + 4 = 6\,.$$

Portanto, o lado do quadrado pode medir 2 ou 6.

- <u>Solução através do método de Al-Khwarizmi</u>

Considere a figura 4, em que o quadrado $ABCD$ possui área x^2 e o retângulo $CDEF$ possui área 12. Primeiramente, vamos analisar o caso em que a área do quadrado $ABCD$ é menor do que a área do retângulo $CDEF$. Dado que temos a equação $x^2 + 12 = 8x$, podemos garantir que $BF = 8$.

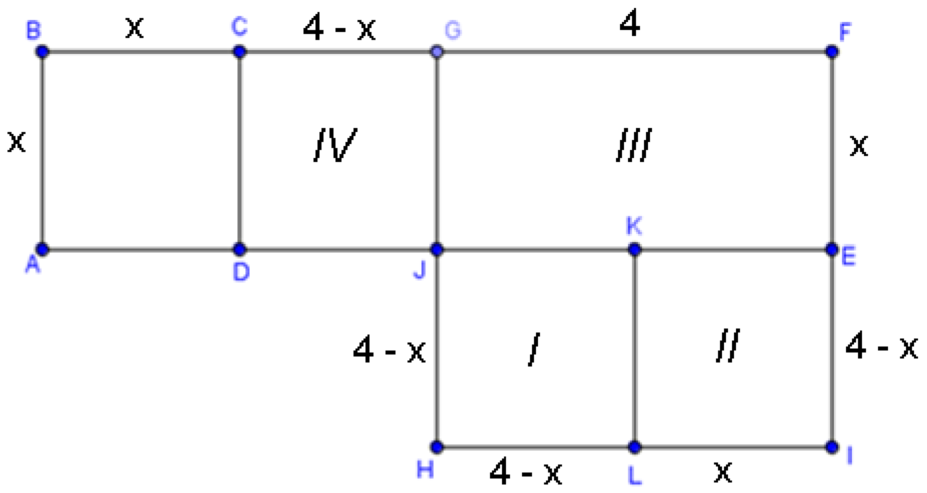
Figura 4 – Retângulo *ABFE* referente ao problema 4



Fonte: Autora, 2016

Agora, vamos traçar o quadrado $FGHI$, cujo lado mede 4, como mostra a figura 5. Dentro dele, vamos traçar o quadrado $JHLK$, cujo lado mede $4 - x$; o retângulo $KLIE$, cujos lados medem x e $4 - x$, e o retângulo $GJEF$, cujos lados medem 4 e x. O retângulo $CDEF$ ficou dividido em dois retângulos: $CDJG$, cujos lados medem x e $4 - x$, e $GJEF$, cujos lados medem 4 e x.

Figura 5 – Figura *ABFIHJ* referente ao problema 4



Fonte: Autora, 2016

O retângulo $CDEF$ possui área 12 e ficou dividido nas regiões *III* e *IV*. Porém as regiões *II* e *IV* possuem a mesma área, já que seus lados medem x e $4 - x$. Assim, as regiões *II* e *III* juntas também possuem área 12. Já o quadrado $GHIF$ possui área 16 e ficou dividido nas regiões *I*, *II* e *III*.

Seja S_i a área da região i, com $i = I, II, III$ ou IV. Temos que:

$S_{IV} + S_{III} = 12$ e como $S_{IV} = S_{II}$, segue que $S_{II} + S_{III} = 12$.

$S_{\mathrm{I}} + S_{II} + S_{III} = 16$

$S_I + 12 = 16$

$S_I = 4$

$(4 - x)^2 = 4$

$4 - x = \sqrt{4}$

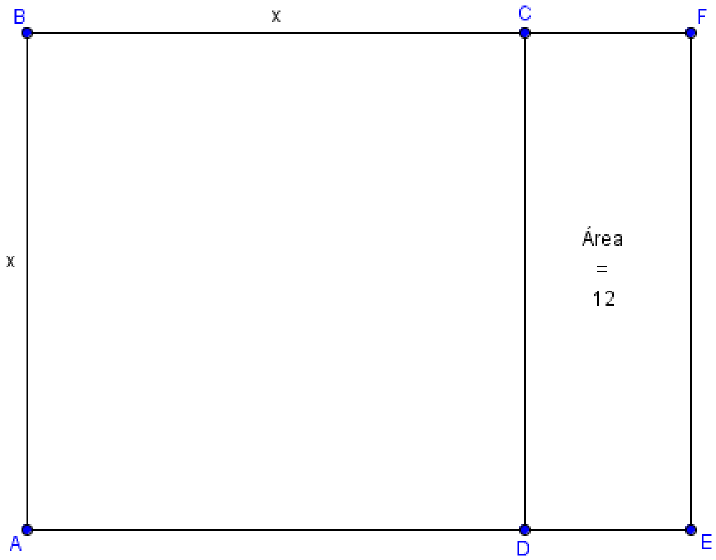
$4 - x = 2$

$x = 2$.

Logo, o quadrado possui lado 2.

Agora vamos analisar o caso em que a área do quadrado $ABCD$ é maior do que a área do retângulo $CDEF$, como mostra a figura 6. Dado que temos a equação $x^2 + 12 = 8x$, podemos garantir que $AE = 8$.

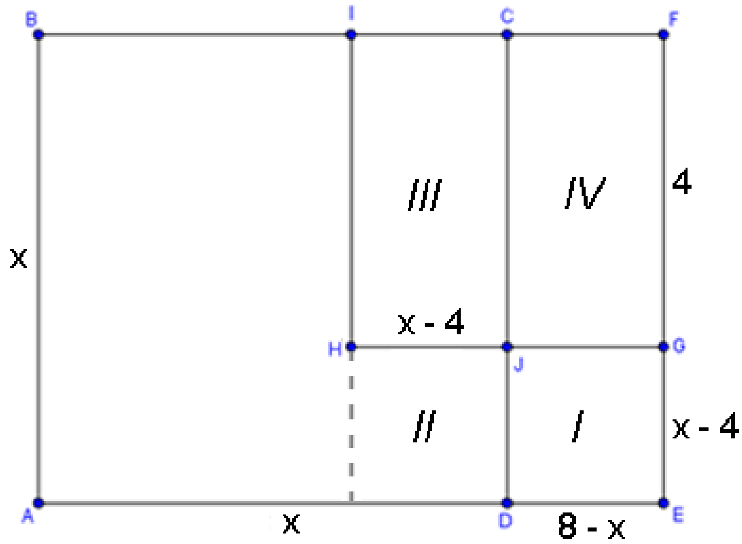
Figura 6 – Retângulo *ABFE* referente ao problema 4



Fonte: Autora, 2016

Agora, vamos traçar o quadrado $FGHI$, cujo lado mede 4, como indicado na figura 7. Dentro dele, vamos traçar os retângulos $IHJC$ e $CJGF$. Considere a região *I*, cujo lado $GE = FE - FG = x - 4$ e o lado $DE = AE - AD = 8 - x$ e a região *II*, cujo lado $JD = CD - CJ = x - 4$ e o lado $HJ = HG - JG = 4 - (8 - x) = 4 - 8 + x = x - 4$. Considere também a região *III*, cujos lados medem 4 e $x - 4$ e a região *IV*, cujos lados medem 4 e $8 - x$.

Figura 7 – Retângulo *ABFE* referente ao problema 4



Fonte: Autora, 2016

Temos que o retângulo formado pelas regiões *I* e *II* possui a mesma área de *III*, dado que um lado mede $x - 4$ e o outro mede 4. Temos também que o retângulo formado pelas regiões *I* e *IV* possui área 12. Assim, segue que:

$S_I + S_{II} = S_{III}$

$(12 - S_{IV}) + S_{II} = S_{III}$

$S_{II} = S_{III} + S_{IV} - 12$

$S_{II} = 16 - 12$

$S_{II} = 4$

$(x - 4)^2 = 4$

$x - 4 = \sqrt{4}$

$x - 4 = 2$

$x = 6\,.$

Logo, o quadrado possui lado 6.

2.3.5 Caso 5: $ax^2 - bx - c = 0$

- Problema 5

Um grupo de amigos resolveu marcar uma reunião e ficou combinado que eles dividiriam os gastos com comidas e bebidas em partes iguais. Como três pessoas faltaram, cada um teve que pagar R$2,00 a mais. Sabendo que os gastos ficaram em R$120,00, quantas pessoas foram convidadas para a reunião?

- Solução através do método de completar quadrados

Sejam:

- x o número de pessoas convidadas;
- $\frac{120}{x}$ a quantia que cada pessoa pagaria inicialmente;
- $\frac{120}{x-3}$ a quantia que cada pessoa pagou.

É pertinente observar que as frações algébricas não podem ter o denominador igual a zero. Dessa forma, em relação à fração algébrica $\frac{120}{x}$, o valor de x não pode ser 0 e, em relação à fração algébrica $\frac{120}{x-3}$, o valor de x não pode ser 3. Por outro lado, tais frações indicam quantias e não podem ser negativas. Agora, em relação à fração algébrica $\frac{120}{x}$, o valor de x tem que ser maior que 0 e, em relação à fração algébrica $\frac{120}{x-3}$, o valor de x tem que ser maior que 3. Das quatro condições citadas acima, concluímos que $x > 3$.

Essa situação pode ser representada pela equação

$$\frac{120}{x-3} - \frac{120}{x} = 2\,.$$

Daí, tem-se que

$$120x - 120(x-3) = 2x(x-3)$$

$$120x - 120x + 360 = 2x^2 - 6x$$

$$2x^2 - 6x = 360$$

$$x^2 - 3x = 180$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 180 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{729}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{729}{4}}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{27}{2}$$

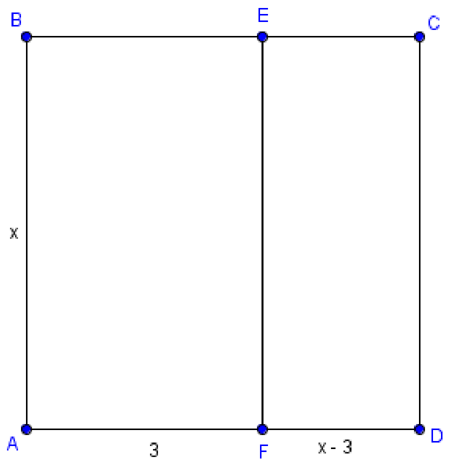
$$x_1 = -\frac{27}{2} + \frac{3}{2} = -12 \quad \text{ou} \quad x_2 = +\frac{27}{2} + \frac{3}{2} = 15\,.$$

Portanto, 15 pessoas foram convidadas para a reunião.

- <u>Solução através do método de Al-Khwarizmi</u>

Considere um quadrado $ABCD$ com área x^2 e lado x. Marque um ponto F no segmento AD, de modo que $AF = 3$ e $FD = x - 3$. No segmento BC, marque o ponto E, de modo que $BE = 3$ e $EC = x - 3$, como mostra a figura 8.

Figura 8 – Quadrado *ABCD* referente ao problema 5

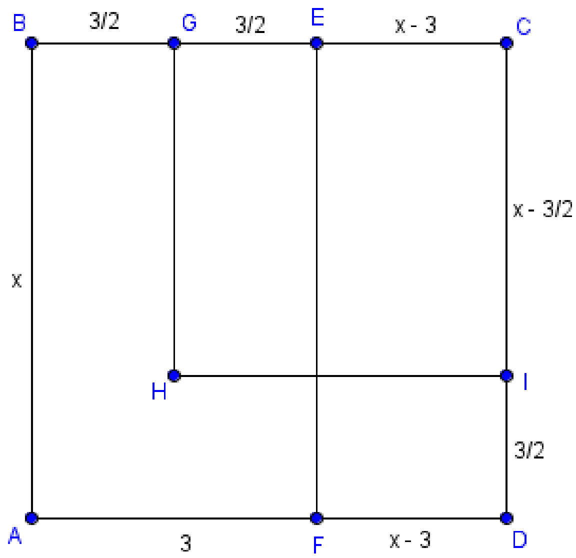


Fonte: Autora, 2016

Desta forma, obtemos o retângulo $ABEF$, cujos lados medem x e 3 e cuja área é $3x$. Pela equação inicial, $x^2 - 3x = 180$, podemos perceber que a área do retângulo $CDFE$ é igual a 180.

Considerando o ponto médio de BE como G, como indicado na figura 9, temos que $BG = GE = \frac{3}{2}$. Marcam-se dois pontos H e I de maneira que $GCIH$ forme um quadrado no interior de $ABCD$. Como $BG = \frac{3}{2}$, podemos concluir que $GC = x - \frac{3}{2}$.

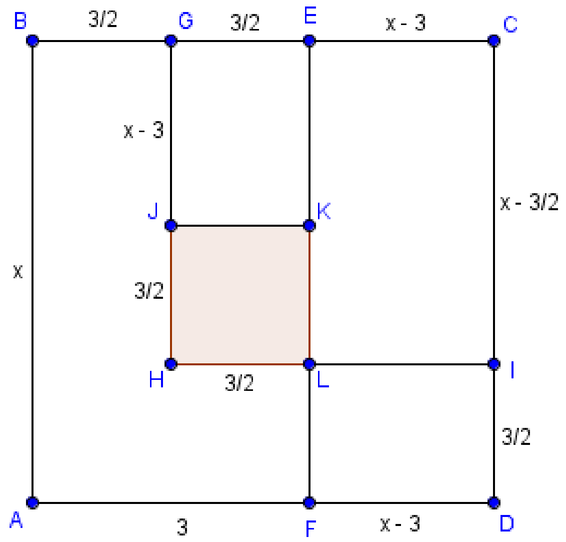
Figura 9 – Quadrado *ABCD* referente ao problema 5



Fonte: Autora, 2016

A partir do ponto H, marca-se o ponto J em GH, de modo que $HJ = \frac{3}{2}$; o ponto L em HI, de modo que $HL = \frac{3}{2}$ e o ponto K em EF, de maneira que $HJKL$ seja um quadrado com lado medindo $\frac{3}{2}$, como mostra a figura 10.

Figura 10– Quadrado *ABCD* referente ao problema 5



Fonte: Autora, 2016

Observando o retângulo $GEKJ$, podemos notar que o lado $GE = \frac{3}{2}$ e o lado $GJ = GH - JH = x - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = x - \frac{6}{2} = x - 3$. Agora, observando o retângulo $LIDF$, podemos notar que o lado $ID = \frac{3}{2}$ e o lado $LI = HI - HL = x - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = x - \frac{6}{2} = x - 3$.

Portanto, pode-se concluir que os retângulos $GEKJ$ e $LIDF$ são congruentes e possuem área igual a $\frac{3}{2}.(x-3) = \frac{3x-9}{2}$.

Como a área do retângulo $CDFE$ é igual a 180, podemos afirmar que o polígono $GCILKJ$ possui a mesma área do retângulo $CDFE$ e que a área do quadrado $GCIH$ equivale à área do polígono $GCILKJ$ somada à área do quadrado $HJKL$. Assim, $180 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 180 + \frac{9}{4} = \frac{720+9}{4} = \frac{729}{4}$. Portanto, a medida do lado do quadrado $GCIH$ será obtida extraindo a raiz quadrada da área, ou seja, $GC = \sqrt{\frac{729}{4}} = \frac{27}{2}$.

Finalmente, podemos concluir que x equivale à soma dos segmentos BG e GC, ou seja, $x = \frac{3}{2} + \frac{27}{2} = \frac{30}{2} = 15$.

Comentário: Vale ressaltar que não identificamos qualquer vantagem no uso do método de Al-Khwarizmi para esse caso.

2.4.6 Caso 6: $ax^2 + bx + c = 0$

- Problema 6

O quadrado de um número adicionado ao sêxtuplo do mesmo número é igual ao oposto de 5. Quais são esses números?

- Solução através do método de completar quadrados

Seja x o número desconhecido. A equação que representa essa situação é

$x^2 + 6x = -5$.

Portanto,

$x^2 + 6x + 9 = -5 + 9$

$(x + 3)^2 = 4$

$x + 3 = \pm\sqrt{4}$

$x + 3 = \pm 2$

$x_1 = -2 - 3 = -5$ ou $x_2 = +2 - 3 = -1$.

Logo, esses números são -5 ou -1.

- Solução através do método de Al-Khwarizmi

É possível perceber que esta equação não tem solução para o raciocínio usado naquela época, dado que os problemas eram resolvidos utilizando ideias geométricas e, portanto, não havia grandezas negativas. Assim sendo, não seria possível somar três grandezas diferentes de zero e obter como resultado o número zero.

3 **APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES**

Neste capítulo trataremos da aplicação das atividades, ou seja, explanaremos sobre os tipos de atividades que foram realizadas para trabalhar o tema equações do 2º grau, o público alvo e o objetivo de cada atividade. Ainda nesse capítulo, faremos uma análise das informações coletadas com tais aplicações e, por fim, poderemos tirar conclusões sobre as maneiras de ensinar a resolver as equações do 2º grau e o método preferido de resolução da maioria dos alunos.

3.1 **Público da pesquisa**

O conteúdo matemático tratado nesse trabalho, a saber, equações do 2º grau, ou especificando mais, os métodos de resolução de equações do 2º grau, é visto no último ano do Ensino Fundamental, o nono ano. O desenvolvimento desse assunto foi acompanhado em uma turma desse nível de escolaridade, em uma instituição de ensino particular, localizada no município de Niterói, no estado do Rio de Janeiro. Essa escola está localizada no bairro de Pendotiba e oferece Ensino Fundamental e Médio. Os alunos que a instituição recebe são de classe média alta e residem em bairros como Icaraí, Itaipu e Piratininga. A turma é composta por 27 alunos com idades entre 14 e 15 anos.

O livro didático adotado pela escola é o Araribá Plus Matemática 9, da editora Moderna, sendo uma obra coletiva, em sua 4ª edição, além do caderno de atividades da mesma coleção, esse último composto apenas por exercícios, que, inicialmente, são de fixação seguidos dos problemas. É comum nesse livro que um novo assunto seja apresentado através de um problema e, assim, foi feita a escolha de ensinar Matemática por meio da resolução de problemas.

3.2 **Como as aulas e as atividades foram conduzidas**

No final do mês de março, iniciamos a unidade que tratava das equações do 2º grau. Em um primeiro momento, o livro didático apresenta a definição de uma equação do 2º grau e, para isso, faz uso do seguinte problema, que segue na figura 11.

"Juliana fez um tapete para enfeitar seu quarto. Observe-o.

Figura 11 – Problema usado para iniciar o estudo das equações do 2º grau

Fonte: Araribá Plus Matemática, 2014, p. 54

Para fazer esse tapete, Juliana costurou, uns nos outros, retalhos de tecidos de formato quadrado, todos com as mesmas dimensões. Sabendo que o tapete ficou com 4.050 cm², como podemos calcular quanto mede o lado de cada quadrado de retalho?".

Na turma, essa situação foi proposta e, sem maiores dificuldades, os alunos compreenderam que o lado de cada quadrado seria a incógnita x. Dado que o comprimento do tapete tem 10 quadrados e a largura tem 5 quadrados, as medidas dos lados do tapete serão, respectivamente, $10x$ e $5x$. Como o tapete tem formato retangular, a sua área será dada pela área do retângulo, isto é, $S = 10x\ .\ 5x$. Porém, no enunciado, foi dito que essa área valia 4.050 cm². Assim, podemos elaborar a seguinte equação:

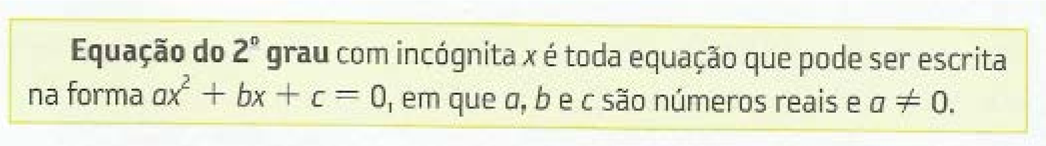
$10x\ .\ 5x = 4050$

$50x^2 = 4050$

$50x^2 - 4050 = 0$.

Então, a equação acima é apresentada como um exemplo de equação do 2º grau e, na figura 12, define-se:

Figura 12 – Definição de equação do 2º grau



Equação do 2º grau com incógnita x é toda equação que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Fonte: Araribá Plus Matemática, 2014, p. 54

O livro define os coeficientes da equação e a classificação em completa e incompleta. Em seguida, recorda que raiz de uma equação é o valor atribuído à incógnita que torna a sentença matemática verdadeira. Para finalizar essa seção, o livro traz uma série de exercícios e problemas que foram trabalhados com os alunos, além daqueles presentes no caderno de atividades.

A segunda seção dessa unidade aborda a resolução de equações do 2º grau incompletas. Como o livro não traz problemas para iniciar essa parte, algumas situações forem passadas no quadro e os alunos copiaram no caderno, como descrito a seguir.

- Quando $ax^2 + c = 0$

  "O triplo do quadrado da minha idade é igual a 432. Qual é a minha idade?"

  Sendo x a idade a ser descoberta, a equação que representa essa situação é $3x^2 = 432$.

  Segue que

  $x^2 = \dfrac{432}{3}$

  $x^2 = 144$

  $x = \pm\sqrt{144}$

  $\boldsymbol{x = \pm 12}$.

  Logo, a idade é 12.

- Quando $ax^2 = 0$

  "O quíntuplo do quadrado de um número é zero. Qual é esse número?"

  Sendo x o número desconhecido, a equação que representa essa situação é

  $5x^2 = 0$.

  Logo,

  $x^2 = \frac{0}{5}$

  $x^2 = 0$

  $\boldsymbol{x = 0}$.

  Logo, o número desconhecido é 0.

- Quando $ax^2 + bx = 0$

  "Um quadrado e um retângulo possuem a mesma área. Sabendo que cada lado do quadrado mede x e que os lados do retângulo medem x e 6, qual é o perímetro do quadrado?"

  Sendo x a medida do lado do quadrado, a equação que representa essa situação é

  $x^2 = 6x$.

  Tem-se que

  $x^2 - 6x = 0$

  $x(x - 6) = 0$

  $\boldsymbol{x = 0}$

  ou

  $x - 6 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 6}$.

  Logo, o lado do quadrado mede 6 e o seu perímetro é igual a 24.

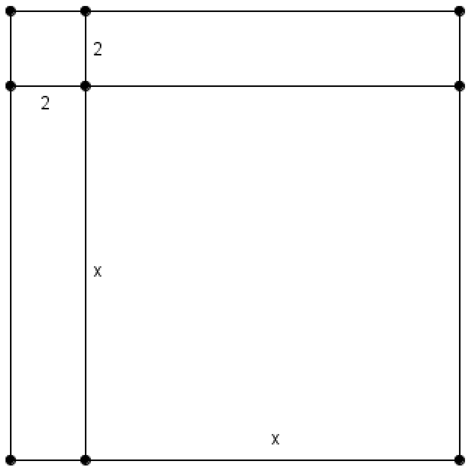
Essa seção foi encerrada com uma bateria de exercícios do livro e do caderno de atividades.

No início do mês de abril, a terceira seção do livro, que trata da resolução de uma equação do 2º grau completa, foi iniciada. O livro optou por dividir essa seção em duas partes, a saber: quando o primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito e quando não é um trinômio quadrado perfeito.

Para estudar o caso em que o primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito, a seguinte situação foi proposta, conforme a figura 13.

Figura 13 – Problema usado para iniciar o estudo de equações do 2º grau em que o primeiro membro da equação é um trinômio quadrado perfeito

“Sabendo que a área do quadrado maior é 144, calcule o valor de x.”



Fonte: Autora, 2016

Para resolver esse problema, os alunos perceberam que o quadrado maior estava dividido em quatro partes (dois quadrados e dois retângulos) e que a soma das áreas dessas partes seria igual a 144. Assim, eles elaboraram a equação

$x^2 + 2x + 2x + 4 = 144$

$x^2 + 4x + 4 = 144$.

Quando chegou nessa última equação, os alunos não souberam dar continuidade à resolução. Então, interferimos lembrando que o primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito e que poderíamos fatorá-lo. Com isso, avançamos para

$(x + 2)^2 = 144$.

Novamente, eles não perceberam o que poderia ser feito para encontrar o valor de x. Sugeri que eles pensassem em quais números resultam em 144 quando elevados ao quadrado. O número 12 rapidamente foi falado por quase toda a turma, mas o número -12 foi lembrado por poucos. Então, continuamos da seguinte forma:

$x + 2 = 12$	$x + 2 = -12$
$x = 12 - 2$	$x = -12 - 2$
$\boldsymbol{x = 10}$.	$\boldsymbol{x = -14}$.

Como a incógnita x representa a medida do lado do quadrado, temos que $x = 10$.

Após esse problema, algumas equações foram escritas no quadro, com o objetivo de fixar o método aprendido anteriormente. São elas:

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$

b) $x^2 + 2x + 1 = 9$

c) $3x^2 - 6x + 3 = 0$

As resoluções foram encaminhadas da seguinte forma:

a)
$$x^2 - 10x + 25 = 0$$
$$(x-5)^2 = 0$$
$$x - 5 = 0$$
$$\boldsymbol{x = 5}$$

b)
$$x^2 + 2x + 1 = 9$$
$$(x+1)^2 = 9$$
$$x + 1 = 3 \rightarrow \boldsymbol{x = 2}$$
$$x + 1 = -3 \rightarrow \boldsymbol{x = -4}$$

c)
$$3x^2 - 6x + 3 = 0 \ (\div 3)$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x-1)^2 = 0$$
$$x - 1 = 0$$
$$\boldsymbol{x = 1}$$

Já para estudar o caso em que o primeiro membro não é um trinômio quadrado perfeito, o problema que segue foi proposto.

"Alice decidiu construir um jardim retangular cuja área será 32 m². Quantos metros de tela ela terá de comprar para cercar o jardim, considerando que um dos lados terá 4 metros a mais que o outro?"

Dada a questão, alguns alunos sugeriram que uma figura fosse desenhada para auxilar na elaboração da equação. Então um retângulo foi traçado no quadro e as suas medidas foram indicadas: x e $x + 4$. Com o objetivo de resolver a questão, os alunos obtiveram a seguinte equação

$x.(x + 4) = 32$

$x^2 + 4x = 32$

$x^2 + 4x - 32 = 0$.

Os alunos perceberam que o trinômio obtido no primeiro membro da equação não era um trinômio quadrado perfeito, mas não sabiam como dar continuidade a resolução. Novamente interferi, dizendo que teríamos que transformar o primeiro membro da equação em um trinômio quadrado perfeito. Para isso, a primeiro etapa a ser feita seria colocar o coeficiente c no segundo membro da equação. Assim, ficaríamos com a equação

$x^2 + 4x = 32$.

Feito isso, poderíamos transformar o primeiro membro da equação em um trinômio quadrado perfeito. Para encontrar o termo que faltava, tínhamos que analisar o binômio existente,

$$x^2 + \underbrace{4x}_{2\,.\,x\,.\,2} \,.$$

Sabemos que, dado o trinômio quadrado perfeito $a^2 + 2ab + b^2$, a sua forma fatorada é $(a + b)^2$. Assim, no exemplo, temos que o "x" faz o papel do "a" e o "2" faz o papel do “b”. Logo, o trinômio quadrado perfeito seria $x^2 + 4x + 4$. Como ele está inserido em uma equação, o fato de adicionarmos um termo no primeiro membro da mesma, nos obriga a fazer o mesmo no outro membro, para que a equação continue equilibrada. Esse processo recebe o nome de método de completar quadrados. Assim, temos

$x^2 + 4x + 4 = 32 + 4$.

Logo,

$x^2 + 4x + 4 = 36$

$(x + 2)^2 = 36$

$x + 2 = \pm\sqrt{36}$

$x + 2 = \pm 6$

$x + 2 = 6 \rightarrow x = 6 - 2 \rightarrow \boldsymbol{x = 4}$

ou

$x + 2 = -6 \rightarrow x = -6 - 2 \rightarrow \boldsymbol{x = -8}$.

Dado que a incógnita x indica a medida de um lado do jardim, segue que $x = 4$. Dessa maneira, o jardim teria 4 metros por 8 metros. Como o problema perguntava quantos metros de tela Alice teria que comprar para cercar o galinheiro, concluímos que são 24 metros.

Após essa questão, outras equações foram passadas no quadro para os alunos fixarem o método aprendido anteriormente. São elas:

a) $x^2 + 18x + 80 = 0$

b) $x^2 - 6x + 5 = 0$

As resoluções foram encaminhadas da seguinte forma:

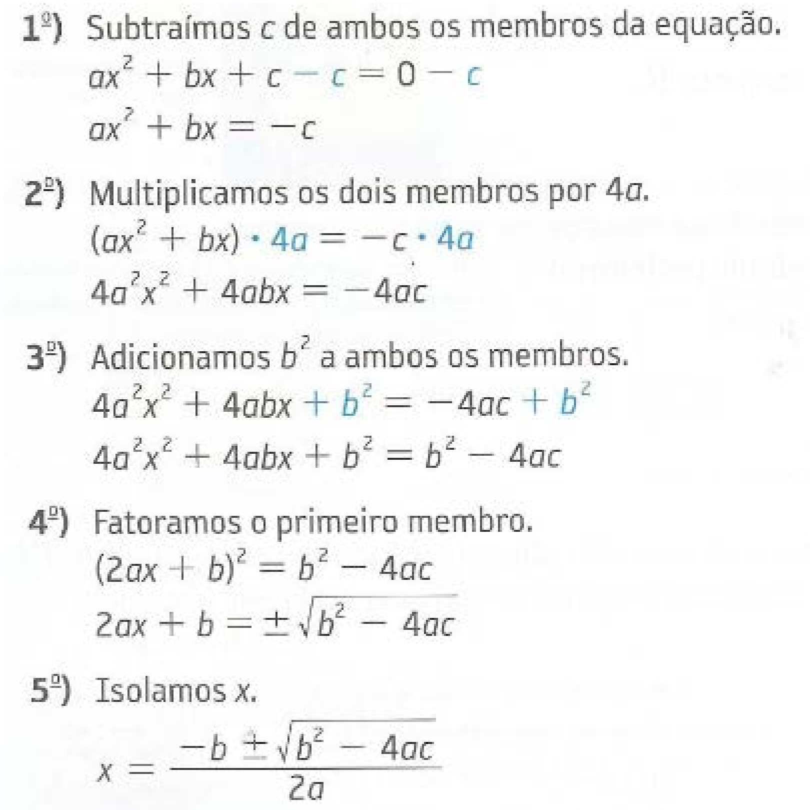
a)
$$x^2 + 18x + 80 = 0$$
$$x^2 + 18x = -80$$
$$x^2 + 18x + 81 = -80 + 81$$
$$(x + 9)^2 = 1$$
$$x + 9 = \pm\sqrt{1}$$
$$x + 9 = \pm 1$$
$$x + 9 = 1 \rightarrow \boldsymbol{x = -8}$$
ou
$$x + 9 = -1 \rightarrow \boldsymbol{x = -10}$$

b)
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$x^2 - 6x = -5$$
$$x^2 - 6x + 9 = -5 + 9$$
$$(x - 3)^2 = 4$$
$$x - 3 = \pm\sqrt{4}$$
$$x - 3 = \pm 2$$
$$x - 3 = 2 \rightarrow \boldsymbol{x = 5}$$
ou
$$x - 3 = -2 \rightarrow \boldsymbol{x = 1}$$

Essa seção foi finalizada com a realização de exercícios no livro didático e no caderno de atividades.

A quarta seção, que aborda a fórmula de resolução de equação do 2º grau, foi iniciada em meados de abril. Essa fórmula permite calcular o valor de x com base nos coeficientes a, b e c da equação. Para chegarmos a tal fórmula, o livro parte da forma geral da equação do 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$, e aplica nela o método de completar quadrados (Figura 14).

Figura 14 – Dedução da fórmula de Bhaskara



1º) Subtraímos c de ambos os membros da equação.

$$ax^2 + bx + c - c = 0 - c$$
$$ax^2 + bx = -c$$

2º) Multiplicamos os dois membros por $4a$.

$$(ax^2 + bx) \cdot 4a = -c \cdot 4a$$
$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

3º) Adicionamos b^2 a ambos os membros.

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$
$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

4º) Fatoramos o primeiro membro.

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$
$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

5º) Isolamos x.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fonte: Araribá Plus Matemática, 2014, p. 64

A expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de discriminante e comumente representada pela letra grega delta (Δ). A fórmula resolutiva de equações do 2º grau também é conhecida como fórmula de Bhaskara.

Os alunos acharam a dedução da fórmula muito complicada, mas assimilaram bem como deveriam proceder para resolver a equação utilizando-a. Os exercícios, tanto do livro quanto do caderno de atividades, foram resolvidos pelos alunos sem maiores dificuldades.

No final do mês de abril, a primeira atividade foi aplicada aos alunos e os resultados analisados. Essa atividade consistia em uma oficina, como consta nas figuras 15, 16, 17 e 18, e tinha como objetivo rever o método de completar quadrados. A oficina foi aplicada em dois dias consecutivos de aula e tudo foi feito na própria sala. Cada aluno recebeu uma folha da oficina (como a que segue) e realizou a atividade individualmente.

Em um primeiro momento, foi feita a leitura da capa da oficina (proposta, objetivo geral e objetivos específicos). Em seguida, um vídeo do Telecurso 2000 (https://www.youtube.com/watch?v=4LvnEGtrqVg) sobre o método de completar quadrados foi apresentado gradativamente e os alunos foram respondendo as perguntas da oficina. O vídeo traz uma situação problema como motivação para a compreensão do método de completar quadrados. Outra questão que também foi debatida nessa atividade é a diferença entre a solução da equação e a solução do problema.

Quando os alunos terminaram de responder as questões propostas no vídeo, eles foram desafiados a resolver duas equações utilizando, obrigatoriamente, o método de completar quadrados e a responder duas perguntas. A primeira pergunta era: “No final do vídeo, o engenheiro cita uma fórmula que facilita a resolução de uma equação do 2º grau. Que fórmula é essa?” e tinha a resposta fechada, isto é, a fórmula de Bhaskara. Já a segunda pergunta era: “Agora que você já conhece duas maneiras de resolver uma equação do 2º grau, qual método você prefere? Por quê?”. Apenas três alunos escolheram o método de completar quadrado como o preferido, o que representa aproximadamente 11% da turma. Eles alegaram que se sentem mais seguros em relação ao resultado utilizando o método de completar quadrados. Os demais preferem a fórmula de Bhaskara e a justificativa da maioria é que é mais rápido.

Figura 15 – Oficina sobre o método de completar quadrados (página 1)

Aluno (a):____

Turma: **Fórum IX** ________________ Data:_____ / _____ / ______

Oficina de Matemática
1º Trimestre

Proposta

Através de um vídeo, compreender o método de completar quadrados na resolução de equações do 2º grau.

Objetivo geral

- Compreender e explorar, em diferentes contextos, os processos de cálculo para resolução de equações de 2º grau e enfrentamento de situações envolvendo essas equações.

Objetivos específicos

- Estudar as equações do 2º grau com uma incógnita, incluindo os procedimentos de resolução e as propriedades que envolvem as raízes dessas equações e a resolução de problemas que utilizam equações desse tipo.

I - Conteúdos Conceituais	Pontuação	Nota
1 - Competência do grupo/aluno para agregar conhecimentos em termos de:		
Interpretação de proposta e consulta a diferentes redes de informação.	10	
Estabelecimento de metas de investigação a partir dos dados coletados.	10	
Elaboração de hipóteses para possíveis soluções aos desafios propostos.	10	
Realização dos trabalhos.	15	
II - Conteúdos Procedimentais/ Atitudinais		
Nível de concentração/produtividade.	10	
Pró-atividade/ liderança.	10	
Empenho, determinação e capricho.	15	
Observância ao tempo de execução e às etapas de trabalho.	10	
Valorização do trabalho como espaço de exercício da criatividade	10	
TOTAL	100	

Fonte: Autora, 2016

Figura 16 – Oficina sobre o método de completar quadrados (página 2)

Espaço

Nessa oficina, aprenderemos mais um pouco sobre as equações do 2º grau. Para auxiliar esse aprendizado, vamos assistir a um vídeo, que nos ajudará na resolução dos desafios.

Qual é a forma reduzida da equação do 2º grau? ______________________.

Desenhe, no espaço abaixo, o terreno de esquina e a calçada. Não se esqueça de colocar as dimensões desse terreno!

Qual é a área da calçada? ______________.

Escreva uma equação do 2º grau que represente a situação descrita acima.

____.

A sua equação é equivalente à equação apresentada no vídeo? __________.

Escreva a equação apresentada no vídeo. ___________________________.

Resolva a equação acima. (Pode utilizar calculadora!)

Qual é a solução da equação? ____________________________________.

Qual é a solução do problema? Justifique a sua escolha. _______________

____.

Fonte: Autora, 2016

Figura 17 – Oficina sobre o método de completar quadrados (página 3)

de criação

FÓRUM CULTURAL

Uma equação do 2º grau pode apresentar duas soluções, uma solução ou nenhuma solução. A equação tem duas soluções quando ______________________, uma solução quando ____________________ e nenhuma solução quando ______________________.

No vídeo, o engenheiro cita a equação ________________________________
Resolva-a no espaço abaixo.

Qual é a solução da equação? ____________________________________

Qual foi a solução encontrada pelo Gil ao resolver essa equação? __________

A sua resposta está igual à do Gil? __________________________________

O Gil cometeu um erro na resolução da equação. Qual foi esse erro?

____

Então, qual é a solução da equação $x^2 - 9 = 0$? _______________________

O desenvolvimento do quadrado $(x + a)^2$ = ___________________________

Que conclusão pode-se tirar ao compararmos as duas equações?

____

A equação do problema da calçada foi resolvida pelo engenheiro. Ele usou o mesmo método que você usou? _______________________________________

Qual foi o método utilizado por ele? ________________________________

Ele encontrou a mesma solução que você para a equação? ______________

Ele encontrou a mesma solução que você para o problema? ______________

Fonte: Autora, 2016

Figura 18 – Oficina sobre o método de completar quadrados (página 4)

Agora, vamos reproduzir a resolução desenvolvida pelo engenheiro, ou seja, vamos resolver a equação $x^2 + 50x = 72$ pelo método de completar quadrados.

Qual é a solução da equação? ____.

Qual é a solução do problema? ____.

Resolva as equações a seguir pelo método de completar quadrados.

a. $x^2 - 8x = -15$

b. $x^2 + 2x - 24 = 0$

No final do vídeo, o engenheiro cita uma fórmula que facilita a resolução de uma equação do 2º grau. Que fórmula é essa? ________________________________.

Agora que você já conhece duas maneiras de resolver uma equação do 2º grau, qual método você prefere? Por quê? ____________________________________.

____

____.

Fonte: Autora, 2016

No início do mês de maio foi iniciada a quinta seção da unidade do livro e que tem como título “Análise das raízes de uma equação do 2º grau”. Usando a fórmula de Bhaskara, é possível verificar se uma equação tem ou não raízes reais fazendo uma análise do discriminante Δ, a saber:

- $\Delta = 0$, então a equação tem duas raízes reais iguais.
- $\Delta > 0$, então a equação tem duas raízes reais diferentes.
- $\Delta < 0$, então a equação não tem raízes reais.

Seguem três exercícios resolvidos do livro para exemplificar as aplicações.

<u>Exercício 1:</u> *Determine o valor de k na equação $x^2 + 5x - 3k = 0$ sabendo que ela* ***tem duas raízes reais e diferentes****.*

<u>Exercício 2:</u> *Sabendo que a equação do 2º grau $-4x^2 + mx - 10 = 0$* ***tem duas raízes reais e iguais****, determine o valor de m.*

<u>Exercício 3</u>: *Determine o valor de p na equação $-6px^2 - x - 2 = 0$ sabendo que ela* ***não tem raízes reais****.*

Em seguida, o livro aborda questões como as citadas acima para os alunos resolverem. Ainda nessa seção, as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau são trabalhadas. Tais relações também são conhecidas como relações de Girard. Com a turma, esse conteúdo foi abordado como segue abaixo.

Sejam as raízes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ da equação $ax^2 + bx + c = 0$ e seus coeficientes a, b e c. Vamos calcular a soma (S) e o produto (P) dessas raízes.

- Soma das raízes

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

- Produto das raízes

$$P = x_1 \,.\, x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right).\ \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 + b\sqrt{\Delta} - b\sqrt{\Delta} - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Assim como na demonstração da fórmula de Bhaskara, os alunos criaram um pouco de resistência no início, pois acharam que teriam que fazer toda a demonstração da soma e do produto das raízes a cada vez que fossem usá-la. Nesse momento, interferi dizendo que eles usariam apenas o resultado final obtido com a demostração, isto é, a soma das raízes é $S = -\frac{b}{a}$ e o produto das raízes é $P = \frac{c}{a}$. Os alunos se tranquilizaram e se sentiram mais confortáveis para usar tais relações nos exercícios propostos no livro e no caderno de atividades.

Ainda nessa quinta seção, foi estudada a determinação de uma equação do 2º grau quando suas raízes dão conhecidas. Para isso, o livro trouxe mais uma pequena demonstração de como relacionar raízes e equação do 2º grau. Essa explicação foi feita, passo a passo, no quadro para que os alunos pudessem compreendê-la, como segue abaixo.

Consideremos uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Dividindo toda a equação por a (e isso pode ser feito, pois $a \neq 0$), temos que:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0\,.$$

Sabemos que $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, ou ainda, que $-S = -(x_1 + x_2) = \frac{b}{a}$ e $P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$. Assim, segue que

$$x^2 - Sx + P = 0\,.$$

Essa seção tratou de assuntos que não abrangem uma forma variada de exercícios e problemas, isto é, percebe-se que o assunto foi praticado através de exercícios de fixação e repetição. Os alunos fizeram tais questões de maneira mecânica.

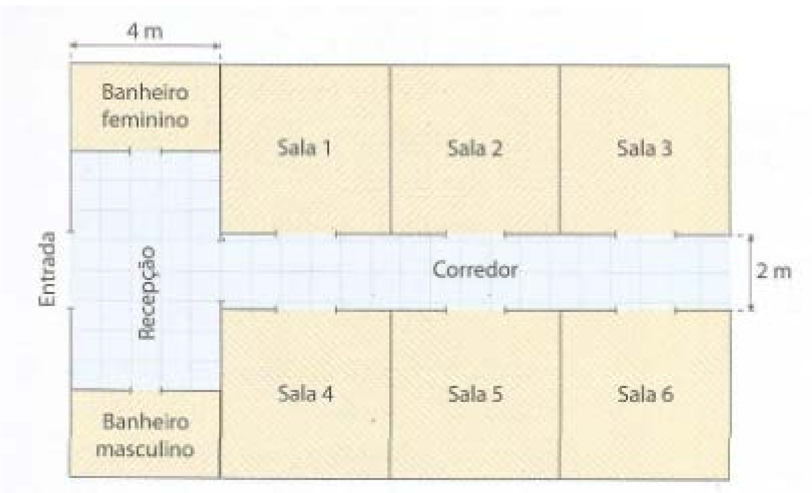
A sexta seção dessa unidade, a última, tem como título “Resolvendo problemas que envolvem equações do 2º grau”. Nela foram trabalhados diversos problemas e enriqueceram grandemente o conhecimento dos alunos, pois eles precisavam ler o problema, interpretá-lo, traduzir aquela situação para uma equação do 2º grau e resolvê-la. Em muitos casos, os alunos chegavam a duas soluções, sendo que uma não fazia sentido para a situação ali proposta. Então, eles ainda tinham que analisar as soluções encontradas para dar uma resposta correta.

Nessa seção também foi possível treinar com os alunos a escolha por um método para resolver cada equação do 2º grau, bem como os diversos métodos de resolução dessas equações. Eles passaram a identificar qual era o método mais eficaz para solucionar cada equação.

O livro traz duas situações para apresentar essa seção (figura 19 e quadro 1), que foram trabalhadas com os alunos.

<u>Situação 1:</u> *Na planta a seguir, o retângulo maior representa o andar de um prédio e os quadrados representam as salas ocupadas pelos departamentos de uma empresa.*

Figura 19 – Problema (situação 1)



Fonte: Araribá Plus Matemática, 2014, p. 72

Sabendo que o andar tem 228 m² de área e que as salas têm lados de mesma medida, qual é a área ocupada pelas 6 salas?

Após a leitura do enunciado do problema, os alunos perceberam que os lados de cada sala deveriam ser chamados de x. Assim, o retângulo que corresponde ao andar do prédio tem comprimento igual a $4 + x + x + x = 4 + 3x$ e largura igual a $x + 2 + x = 2x + 2$. Dado que a área do retângulo é calculada fazendo o produto da base pela altura, temos que

$A = (4 + 3x)(2x + 2)$

$A = 8x + 8 + 6x^2 + 6x$

$A = 6x^2 + 14x + 8$.

Mas, no enunciado, foi dito que a área do andar era 228 m². Assim,

$6x^2 + 14x + 8 = 228$

$6x^2 + 14x + 8 - 228 = 0$

$6x^2 + 14x - 220 = 0$.

Após encontrarmos a equação que modelava o problema, os alunos optaram por resolvê-la utilizando a fórmula de Bhaskara, dado que $a = 6, b = 14$ e $c = -220$. Então, $\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \,.\, 6 \,.\, (-220) = 196 + 5280 = 5476$.

Chegando nesse resultado para o delta, os alunos ficaram um pouco desestimulados, pois acharam o número grande. Então tive com eles o seguinte diálogo:

- Qual é o resultado de 50 elevado ao quadrado?

- 2500.

- Qual é o resultado de 60 elevado ao quadrado?

- 3600.

- Qual é o resultado de 70 elevado ao quadrado?

- 4900.

- Já estamos próximos do valor de delta. Qual é o resultado de 80 elevado ao quadrado?

- 6400.

- Agora, ultrapassamos o valor de delta. Isso significa que a raiz quadrada de 5476 é um número entre 70 e 80, certo?

- Certo!

- Mas o número 5476 termina em 6. Alguém sabe o que isso significa?

- Que a raiz quadrada dele (se for um número inteiro) termina em 4 ou 6.

- Muito bem! Pois 4 x 4 = 16, ou seja, termina em 6, assim como 6 x 6 = 36, também termina em 6. Então vamos calcular 74 ao quadrado e 76 ao quadrado.

Os alunos compreenderam a explicação e concluíram que $\sqrt{5476} = 74$. Assim sendo, demos continuidade a fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14 \pm \sqrt{5476}}{2\,.\,6} = \frac{-14 \pm 74}{12}$$

$$x_1 = \frac{-14 + 74}{12} = \frac{60}{12} = 5$$

ou

$$x_2 = \frac{-14 - 74}{12} = \frac{-88}{12} = -\frac{22}{3}.$$

Dado que o x indica a medida do lado de uma sala, temos que $x = 5$.

Mas o problema ainda não acabou, pois o que estava sendo perguntado era a área ocupada pelas 6 salas. É preciso então determinar a área ocupada por uma sala e, como as 6 salas são iguais, multiplicar esse resultado por 6.

Área ocupada por uma sala: $A = 5^2 = 25\ m^2$.

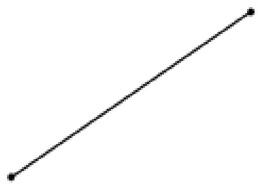
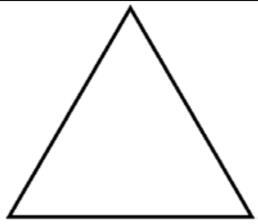
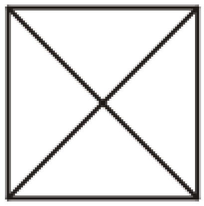
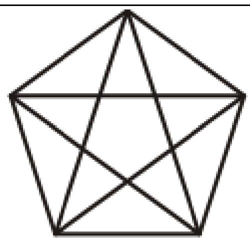
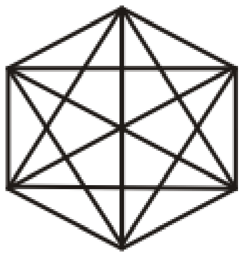
Área ocupada pelas seis salas: $A = 6\,.\,25 = 150\ m^2$.

Portanto, a área ocupada pelas seis salas é igual a 150 m^2.

Situação 2: *Em um evento escolar, os professores presentes se cumprimentaram com apertos de mão. Sabe-se que cada um dos professores cumprimentou todos os demais apenas um vez. Quantos professores havia nesse evento se, no total, foram trocados 1326 apertos de mão?*

Primeiramente foi feita a leitura do enunciado junto com a turma e nenhum aluno soube o que fazer para resolver a questão. Sugeri que iniciássemos uma investigação sobre o que iria acontecer para um grupo pequeno de professores. Para isso montei o quadro 1 e a turma foi analisando cada caso. Os alunos perceberam que o quadro começaria com 2 professores.

Quadro 1 – Problema (situação 2)

Quantidade de professores	**Ilustração**	**Quantidade de apertos de mão**
2 professores		1 aperto de mão
3 professores		3 apertos de mão
4 professores		6 apertos de mão
5 professores		10 apertos de mão
6 professores		15 apertos de mão

Fonte: Autora, 2016

Feito isso, alguns alunos perceberam que, a partir de 3 professores, a quantidade de apertos de mãos dados era a soma dos lados e das diagonais dos polígonos. Traduzindo isso matematicamente, temos que:

$p = n + d$, onde p: quantidade de apertos de mão,

n: lados do polígono,

d: diagonais do polígono.

Assim, $p = 1326$ e $d = \frac{n.(n-3)}{2}$,

$$n + \frac{n.(n-3)}{2} = 1326$$

$$n + \frac{n^2 - 3n}{2} = 1326$$

$$2n + n^2 - 3n = 2652$$

$$n^2 - n - 2652 = 0 \,.$$

Nessa equação, temos $a = 1, b = -1$ e $c = -2652$. Logo,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.(-2652) = 1 + 10608 = 10609$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio utilizada na situação anterior, descobrimos a raiz quadrada de 10609. Assim,

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{10609}}{2.1} = \frac{1 \pm 103}{2}$$

$$n_1 = \frac{1 + 103}{2} = \frac{104}{2} = 52$$

ou

$$n_2 = \frac{1 - 103}{2} = \frac{-102}{2} = -51 \,.$$

Como n indica o número de lados do polígono, temos que $n = 52$. Logo, havia 52 professores no evento.

Os alunos encerraram essa seção resolvendo diversos problemas no livro didático e no caderno de atividades que, quando modelados, caíam em uma equação do 2º grau.

Em meados do mês de junho foi aplicada a segunda atividade para a turma, na forma de uma outra oficina. O objetivo dessa atividade era aprender um novo método de resolução de equações do 2º grau, além de relembrar os três métodos já estudados, que são o método de completar quadrados, a fórmula de Bhaskara e soma e produto. Esse novo método foi denomidado método geométrico de Al-Khwarizmi, dado que utiliza a geometria para chegar a solução da equação do 2º grau. A oficina foi aplicada durante uma aula de 75 minutos. Cada aluno recebeu uma folha da oficina (figuras 20, 21, 22 e 23) e realizou a atividade individualmente.

Figura 20 – Oficina sobre o método geométrico de Al-Khwarizmi (página 1)

Aluno (a):____

Turma: **FIX** Data:_____ /_____ /______

FÓRUM CULTURAL

Oficina de Matemática
2º Trimestre

Métodos de Resolução
Equações do 2º grau

Proposta

Conhecer um novo método de resolução de equações do 2º grau, usando a Geometria e solucionar dois problemas utilizando tal método.

Objetivo geral

Relembrar os métodos de resolução de equações do 2º grau já estudados e aprender um novo método, sendo esse geométrico.

Objetivos específicos

- Relembrar a resolução de uma equação do 2º grau utilizando o método de completar quadrados;
- Relembrar a resolução de uma equação do 2º grau utilizando a fórmula de Bhaskara;
- Relembrar a resolução de uma equação do 2º grau utilizando soma e produto;
- Aprender uma nova maneira de solucionar uma equação do 2º grau, envolvendo a Geometria;
- Solucionar os problemas propostos utilizando o método de completar quadrados;
- Solucionar os problemas propostos utilizando o novo método.

I - Conteúdos Conceituais	Pontuação	Nota
1 - Competência do grupo/aluno para agregar conhecimentos em termos de:		
Interpretação de proposta e consulta a diferentes redes de informação.	10	
Estabelecimento de metas de investigação a partir dos dados coletados.	10	
Elaboração de hipóteses para possíveis soluções aos desafios propostos.	10	
Realização dos trabalhos.	15	
II - Conteúdos Procedimentais/ Atitudinais		
Nível de concentração/produtividade.	10	
Pró-atividade/ liderança.	10	
Empenho, determinação e capricho.	15	
Observância ao tempo de execução e às etapas de trabalho.	10	
Valorização do trabalho como espaço de exercício da criatividade.	10	
TOTAL	100	

Fonte: Autora, 2016

Figura 21 – Oficina sobre o método geométrico de Al-Khwarizmi (página 2)

Espaço

Problema 1: Eu e meu irmão colecionamos figurinhas. Eu tenho uma quantidade de figurinhas e ele tem o quádruplo dessa quantidade. Sabendo que se eu elevar ao quadrado o número de figurinhas que eu tenho, ficaremos com a mesma quantidade de figurinhas, quantas figurinhas o meu irmão tem?

- Solução utilizando o método de completar quadrados:

- Solução utilizando o método de Al-Khwarizmi:

Fonte: Autora, 2016

Figura 22 – Oficina sobre o método geométrico de Al-Khwarizmi (página 3)

de Criação

FÓRUM CULTURAL

Problema 2: O quadrado de um número positivo adicionado a doze vezes esse número resulta em 189. Que número é esse?

- Solução utilizando o método de completar quadrados:

- Solução utilizando o método de Al-Khwarizmi:

Fonte: Autora, 2016

Figura 23 – Oficina sobre o método geométrico de Al-Khwarizmi (página 4)

Durante as nossas aulas, estudamos alguns métodos de resolução de equações do 2º grau e vimos também, que determinadas equações se tornam mais fáceis de resolver usando um determinado método. Seja a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Primeiramente, vimos como resolver uma equação do 2º grau utilizando o ***"Método de Completar Quadrados"***. Para encontrar os resultados de uma equação do 2º grau utilizando tal método, é preciso lembrar o conceito de produtos notáveis. Ao escrever uma equação do segundo grau na forma de produto notável, é possível simplificar todos os cálculos para encontrar suas raízes. Muitas vezes, as raízes já são dadas simplesmente ao reescrever a equação.

Em seguida, foi a vez da ***"Fórmula de Bhaskara"***. O nome da fórmula é uma homenagem ao matemático Bhaskara Akaria, considerado o mais importante matemático indiano do século XII. A fórmula de Bhaskara é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac$$

Dependendo do sinal do discriminante Δ, temos:

- $\Delta = 0$, então a equação tem duas raízes iguais.
- $\Delta > 0$, então a equação tem duas raízes diferentes.
- $\Delta < 0$, então a equação não tem raízes reais.

A ideia da demonstração dessa fórmula utiliza o método de completar quadrados.

Por último, aprendemos como resolver uma equação do 2º grau usando ***"Soma e Produto"***. Nos casos em que a equação possui raízes reais, algumas relações são observadas. Considerando a fórmula de Bhaskara, temos que:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Com base nessas informações podemos determinar as expressões matemáticas responsáveis pela soma e produto das raizes.

Soma: $x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

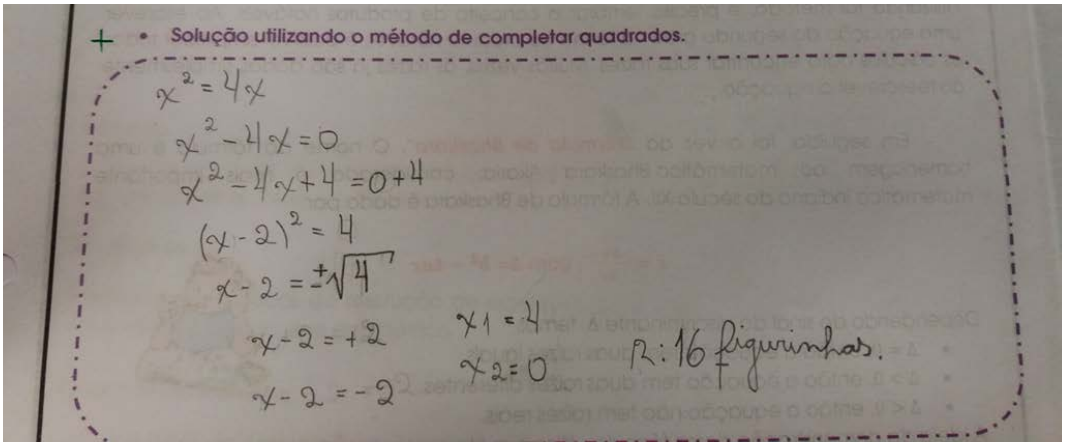
Produto: $x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 + b\sqrt{\Delta} - b\sqrt{\Delta} - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Nessa oficina, vamos conhecer um quarto método de resolução de equações do 2º grau desenvolvido pelo matemático Al-Khwarizmi. Ele viveu na Pérsia, entre os séculos VIII e IX, e realizou grandes descobertas nas áreas de aritmética, álgebra, astronomia, geografia e calendário. Devido às suas grandes contribuições, a palavra "algarismo" deriva de seu nome. Como esse método utiliza a Geometria, só é possível encontrar as soluções positivas das equações.

Fonte: Autora, 2016

Inicialmente, foi feita a leitura da capa da oficina (proposta, objetivo geral e objetivos específicos) para a turma. Em seguida, alguns alunos se prontificaram a ler, em voz alta, os métodos de resolução já estudados. Com isso, foi possível relembrá-los. Após esse momento, o primeiro problema foi lido e, como proposto, os alunos deveriam resolvê-lo pelo método de completar quadrados. Sem maiores dificuldades, os alunos conseguiram ler e interpretar o problema, além de traduzi-lo para uma equação do 2º grau e resolver tal equação. Na figura 24 segue a resolução de um aluno.

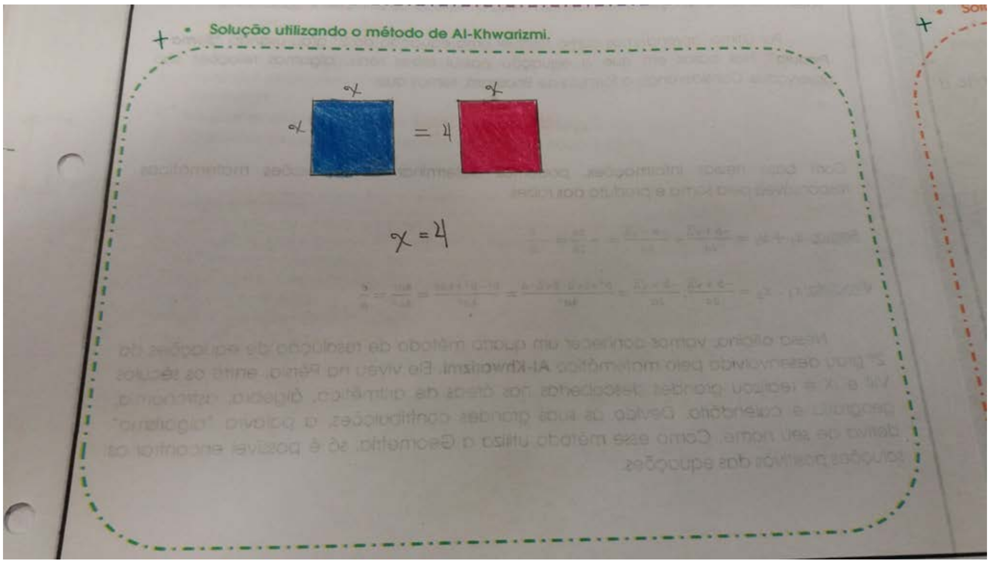
Figura 24 – Solução correta de um aluno sobre o problema 1



Fonte: Autora, 2016

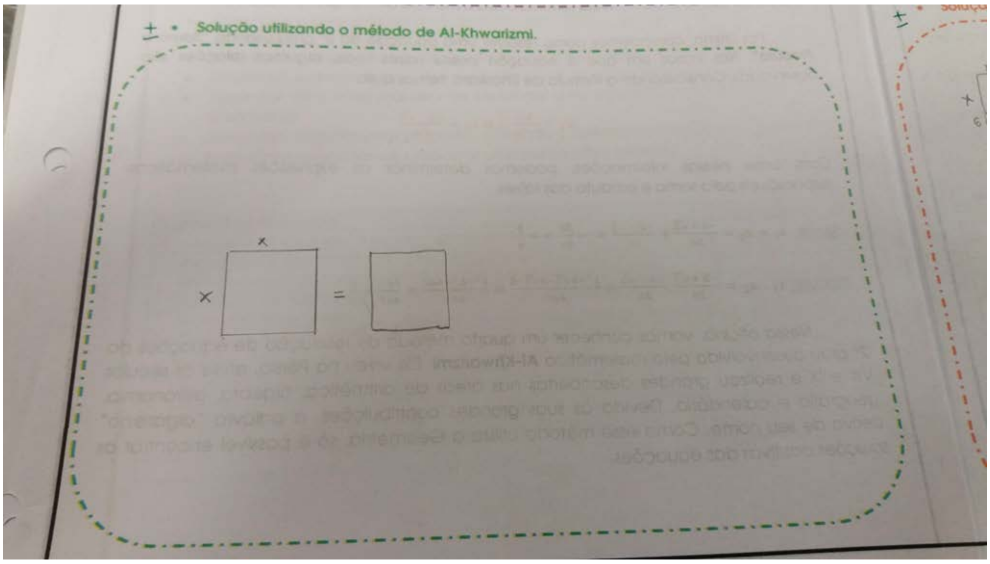
O próximo passo era resolver o mesmo problema usando o método geométrico de Al-Khwarizmi. Nesse momento, foi preciso interferir e auxiliar os alunos na construção da solução geométrica. Nas figuras 25 e 26 seguem duas soluções, sendo a primeiro correta e a segunda incompleta, dado que o aluno não inseriu as medidas nos lados dos quadrados para finalizar a questão.

Figura 25 – Solução correta de um aluno sobre o problema 1



Fonte: Autora, 2016

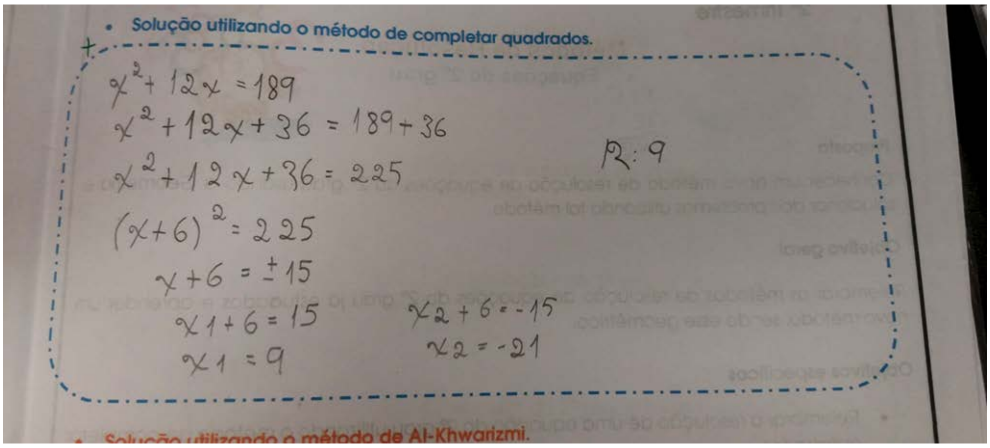
Figura 26 – Solução incompleta de um aluno sobre o problema 1



Fonte: Autora, 2016

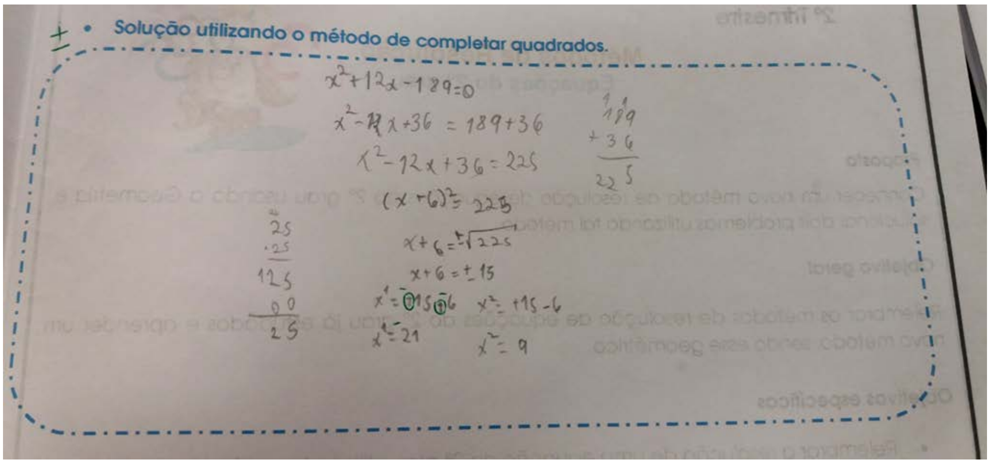
O segundo e último problema da oficina era uma charada matemática. Sem grandes dificuldades, os alunos souberam transformar o enunciado em uma sentença matemática. Assim como no problema anterior, foi solicitado que eles, primeiramente, resolvessem a questão pelo método de completar quadrados. Para exemplificar as respostas, seguem duas soluções dos alunos. A figura 27 apresenta o resultado correto, mas na figura 28, houve um descuido com o sinal.

Figura 27 – Solução correta de um aluno sobre o problema 2



Fonte: Autora, 2016

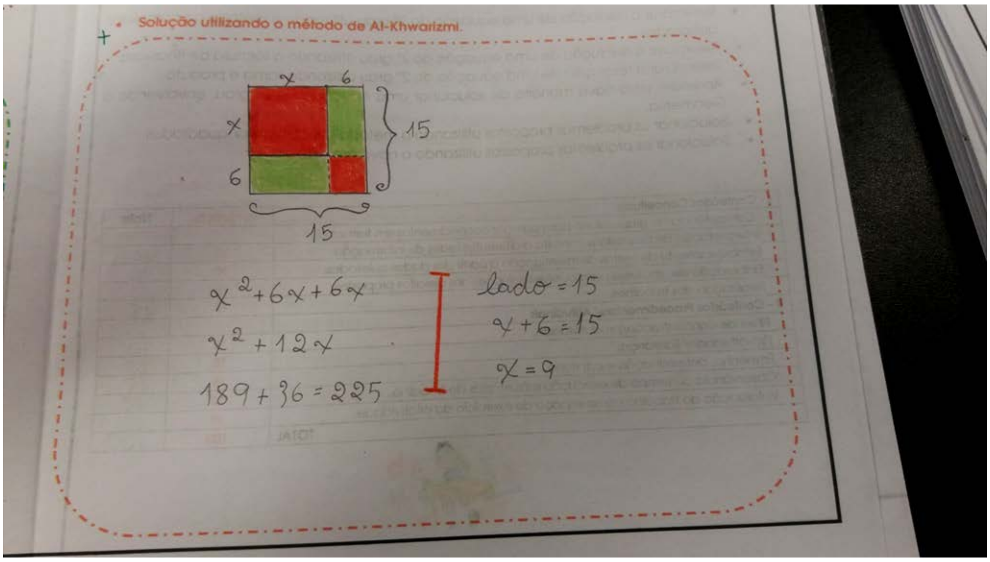
Figura 28 – Solução incorreta de um aluno sobre o problema 2



Fonte: Autora, 2016

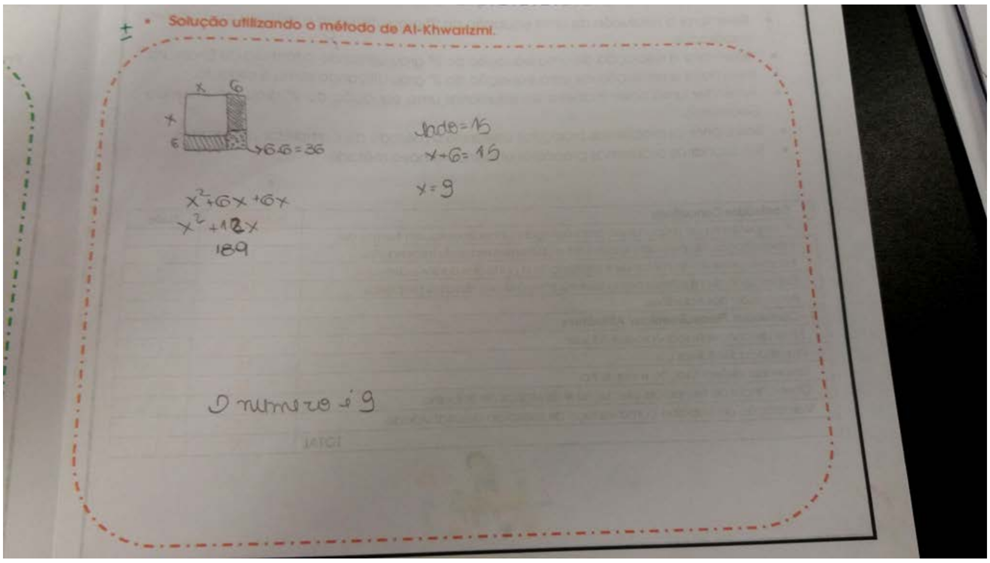
Por fim, os alunos teriam que resolver o mesmo problema utilizando o método geométrico de Al-Khwarizmi. Assim como no primeiro problema, os alunos tiveram dificuldades para elaborar a figura necessária para encontrar a solução e então fizemos algumas sugestões para que eles pudessem fazer tal construção. A maioria da turma apresentou bastante dificuldade nesse item. A seguir, temos duas soluções dos alunos. A primeira, na figura 29, está completa e a segunda, na figura 30, incompleta, dado que o aluno não apresentou todos os cálculos necessários.

Figura 29 – Solução correta de um aluno sobre o problema 2



Fonte: Autora, 2016

Figura 30 – Solução incompleta de um aluno sobre o problema 2



Fonte: Autora, 2016

A última atividade aplicada nessa turma aconteceu no final do mês de junho. Se tratava de uma lista composta por 12 problemas que seriam modelados por equações do 2º grau. Os alunos poderiam usar os quatro métodos aprendidos para resolver tais problemas, mas com uma condição: eles teriam que resolver exatamente 3 problemas utilizando cada método.

Abaixo, vamos fazer uma análise de cada problema, que foram elencados da letra a até l, comentar os métodos escolhidos pelos alunos para resolvê-los e quantificar tais escolhas, usando uma tabela. É importante ressaltar que a turma de nono ano em que essa atividade foi aplicada é composta por 27 alunos.

a) A diferença entre a terça parte do quadrado de um número e o próprio número é 60. Qual é o triplo desse número?

Seja x o número procurado. Sabemos que o problema pode ser traduzido para a equação $\frac{x^2}{3} - x = 60$. Resolvendo a equação, encontraremos dois valores reais para x, 15 ou -12. Mas, o problema pede o triplo desse número. Então a resposta é 45 ou -36.

No quadro 2, segue a quantidade de alunos que optou por cada método de resolução da equação do 2º grau.

Quadro 2 – Quantidade de alunos que optou por cada método de resolução de equações do 2º grau no item a

Método de completar quadrados	**Fórmula de Bhaskara**	**Soma e produto**	**Método geométrico de Al-Khwarizmi**
Nenhum	24	3	Nenhum

Fonte: Autora, 2016

b) Uma folha quadrada de cartolina tem x cm de lado. Recorta-se dessa folha um retângulo que tem x cm de comprimento e 16 cm de largura. A parte que restou da folha é um retângulo de área 1700 cm². Qual é a área da folha de cartolina?

Nesse problema já ficou determinado que x é a medida do lado de uma folha quadrada de cartolina. Para solucioná-lo, foi preciso montar a equação $x(x-16) = 1700$ e as soluções 50 e -34 foram encontradas, mas a última foi ignorada, por ser um número negativo. Como o problema perguntava a área da da folha de cartolina, a resposta era $50^2 = 2500$ cm^2.

No quadro 3, segue a quantidade de alunos que optou por cada método de resolução da equação do 2º grau.

Quadro 3 – Quantidade de alunos que optou por cada método de resolução de equações do 2º grau no item b

Método de completar quadrados	Fórmula de Bhaskara	Soma e produto	Método geométrico de Al-Khwarizmi
12	14	1	Nenhum

Fonte: Autora, 2016

c) Um número foi somado com 5 e o resultado foi elevado ao quadrado, obtendo-se 36. Descubra esse número sabendo que ele é um quadrado perfeito.

O número desconhecido foi chamado de x e o problema traduzido para a equação $(x+5)^2 = 36$. As soluções encontradas foram 1 e -11. Como foi dito no enunciado que o número era um quadrado perfeito, a solução do problema era 1. A maioria dos alunos optou por resolver esse problema utilizando o método geométrico de Al-Khwarizmi. Para isso, eles desenharam um quadrado, cujo lado mede $x+5$ e a área é 36. Eles concluíram que o lado do quadrado deveria ser 6 e para isso $x=1$.

No quadro 4, segue a quantidade de alunos que optou por cada método de resolução da equação do 2º grau.

Quadro 4 – Quantidade de alunos que optou por cada método de resolução de equações do 2º grau no item c

Método de completar quadrados	Fórmula de Bhaskara	Soma e produto	Método geométrico de Al-Khwarizmi
2	1	1	23

Fonte: Autora, 2016

d) Pensei em um número positivo, elevei-o ao quadrado, dividi o resultado por 4 e subtraí 15. Deu o mesmo número em que eu havia pensado. Em que número eu havia pensado?

Seja x o número pensado. Temos que $\frac{x^2}{4} - 15 = x$ é a equação que modela o problema. Ao resolvê-la, encontramos 10 e -6 como respostas, mas foi dito no enunciado que o número pensado era positivo. Logo, $x = 10$.

No quadro 5, segue a quantidade de alunos que optou por cada método de resolução da equação do 2º grau.

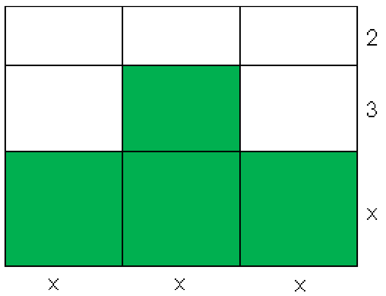
Quadro 5 – Quantidade de alunos que optou por cada método de resolução de equações do 2º grau no item d

Método de completar quadrados	**Fórmula de Bhaskara**	**Soma e produto**	**Método geométrico de Al-Khwarizmi**
12	10	5	Nenhum

Fonte: Autora, 2016

e) A área da parte verde da figura abaixo (figura 31) é 60. Qual é o valor de x?

Figura 31 – Problema item e



Fonte: Autora, 2016

Nesse problema, a figura já definiu o que seria a incógnita x. Assim, temos que a área da parte verde seria indicada por $3x^2 + 3x$ e essa área é 60. Então, a equação $3x^2 + 3x = 60$ modela o problema e os números -5 e 4 são suas soluções. Como x é o lado de um polígono, temos que $x = 4$.

No quadro 6, segue a quantidade de alunos que optou por cada método de resolução da equação do 2º grau.

Quadro 6 – Quantidade de alunos que optou por cada método de resolução de equações do 2º grau no item e

Método de completar quadrados	Fórmula de Bhaskara	Soma e produto	Método geométrico de Al-Khwarizmi
Nenhum	2	25	Nenhum

Fonte: Autora, 2016

f) A base de um retângulo tem 6 m a mais que a altura dele. A área do retângulo é 315 m². Calcule o perímetro desse retângulo.

A altura do retângulo foi chamada de x e a base de $x + 6$. Dado que a área do retângulo é 315, temos que $x(x + 6) = 315$. Ao resolver a equação, as soluções encontradas foram 15 e -21, mas a última foi desconsiderada, dado que a incógnita representa a altura do retângulo. Assim, o quadrilátero possui altura e base medindo 15 e 21 metros, respectivamente. Mas o problema pedia o perímetro do retângulo e, portanto, a resposta era 72 metros.

No quadro 7, segue a quantidade de alunos que optou por cada método de resolução da equação do 2º grau.

Quadro 7 – Quantidade de alunos que optou por cada método de resolução de equações do 2º grau no item f

Método de completar quadrados	Fórmula de Bhaskara	Soma e produto	Método geométrico de Al-Khwarizmi
5	22	Nenhum	Nenhum

Fonte: Autora, 2016

g) Sabemos que o número de diagonais de um polígono convexo é determinado pela fórmula $d = \frac{n.(n-3)}{2}$, na qual d é o número de diagonais e n o número de lados do polígono. Assim, determine o polígono que tem 35 diagonais.

O enunciado desse problema já definiu que a incógnita n indica os lados do polígono. A equação $35 = \frac{n(n-3)}{2}$, ou ainda, $n^2 - 3n = 70$ quando resolvida, terá como solução os números 10 e -7. Como n indica o número de lados do polígono, temos que $n = 10$ e o polígono é o decágono.

No quadro 8, segue a quantidade de alunos que optou por cada método de resolução da equação do 2º grau.

Quadro 8 – Quantidade de alunos que optou por cada método de resolução de equações do 2º grau no item g

Método de completar quadrados	**Fórmula de Bhaskara**	**Soma e produto**	**Método geométrico de Al-Khwarizmi**
Nenhum	14	13	Nenhum

Fonte: Autora, 2016

h) A medida do lado de um quadrado é expressa por $(5x - 3)$ cm. A área desse quadrado é 16 cm². Qual é a área de um retângulo cujas dimensões são expressas por $(5x - 3)$ cm e $(5x + 4)$ cm?

Dado que o quadrado possui lado medindo $(5x - 3)$ e área igual a 16 cm², podemos montar a equação $(5x - 3)^2 = 16$. Alguns alunos, optaram por fazer um desenho e utilizar o método geométrico para solucionar o problema. Assim, se a área do quadrado é igual a 16 cm², então cada lado tem que medir 4 cm. Portanto, $5x - 3 = 4$ e, com isso, $x = \frac{7}{5}$.

No quadro 9, segue a quantidade de alunos que optou por cada método de resolução da equação do 2º grau.

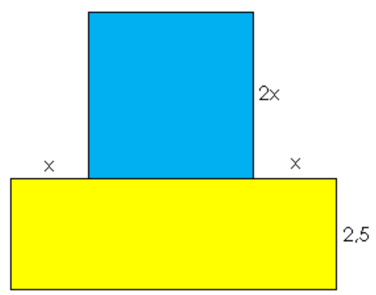
Quadro 9 – Quantidade de alunos que optou por cada método de resolução de equações do 2º grau no item h

Método de completar quadrados	**Fórmula de Bhaskara**	**Soma e produto**	**Método geométrico de Al-Khwarizmi**
1	1	Nenhum	25

Fonte: Autora, 2016

i) Para que valor de x a área do quadrado será igual a área do retângulo na figura a seguir (Figura 32)?

Figura 32 – Problema item i



Fonte: Autora, 2016

A área do quadrado é determinada por $A = (2x)^2 = 4x^2$ e a área do retângulo é determinado por $A = 2{,}5\,.\,(x + 2x + x) = 2{,}5\,.\,4x = 10x$. Dado que queremos descobrir o valor de x para que essas áreas sejam iguais, temos a equação $4x^2 = 10x$. Ao resolvê-la, encontramos $x = 0$ ou $x = \frac{5}{2}$, mas apenas a última solução pode ser considerada, pois a medida x está no lado de um polígono.

No quadro 10, segue a quantidade de alunos que optou por cada método de resolução da equação do 2º grau.

Quadro 10 – Quantidade de alunos que optou por cada método de resolução de equações do 2º grau no item i

Método de completar quadrados	**Fórmula de Bhaskara**	**Soma e produto**	**Método geométrico de Al-Khwarizmi**
Nenhum	9	8	10

Fonte: Autora, 2016

j) As dimensões de um terreno retangular são expressas por $3\mathrm{x} + 15$ e $2\mathrm{x} + 10$. A área desse terreno é 2400 m². Calcule essas dimensões.

Dado que o terreno tem formato retangular e área igual a 2400 m^2, podemos montar a seguinte equação: $(3x + 15)(2x + 10) = 2400$. Fazendo os devidos ajustes, é possível chegar a $x^2 + 10x - 375 = 0$. As soluções 15 e -25 foram encontradas, mas apenas a primeira é pertinente ao problema. Portanto, as dimensões do terreno são 60 e 40 metros. Houve um empate entre o método de completar quadrados e a fórmula de Bhaskara nas escolhas dos alunos.

No quadro 11, segue a quantidade de alunos que optou por cada método de resolução da equação do 2º grau.

Quadro 11 – Quantidade de alunos que optou por cada método de resolução de equações do 2º grau no item j

Método de completar quadrados	**Fórmula de Bhaskara**	**Soma e produto**	**Método geométrico de Al-Khwarizmi**
13	13	1	Nenhum

Fonte: Autora, 2016

k) Um triângulo tem base medindo $2\mathrm{x} + 5$ cm e altura $\mathrm{x} + 2$ cm. Para que valor de x esse triângulo tem 95 cm² de área?

A área do triângulo é dada pela metade do produto entre a base e a altura. Assim, podemos elaborar a equação $\frac{(2x+5)(x+2)}{2} = 95$ para traduzir o problema. Na forma geral, a equação passa a ser $2x^2 + 9x - 180 = 0$ e, quando resolvida, as soluções encontradas são -12 e $\frac{15}{2}$, porém apenas a última representa a resposta do problema. Vale ressaltar que todos os alunos resolveram esse problema utilizando a fórmula de Bhaskara.

No quadro 12, segue a quantidade de alunos que optou por cada método de resolução da equação do 2º grau.

Quadro 12 – Quantidade de alunos que optou por cada método de resolução de equações do 2º grau no item k

Método de completar quadrados	**Fórmula de Bhaskara**	**Soma e produto**	**Método geométrico de Al-Khwarizmi**
Nenhum	27	Nenhum	Nenhum

Fonte: Autora, 2016

l) Quando Ivete nasceu, seu irmão tinha 5 anos. Daqui a 5 anos o produto das idades deles será 500. Qual é a idade atual da Ivete?

Seja x a idade atual de Ivete. Assim, nesse momento, seu irmão tem $x+5$ anos. Como o problema cita que o produto das idades deles daqui a 5 anos será igual a 500, temos que considerar as idades de Ivete e de seu irmão daqui a 5 anos, ou seja, $x+5$ e $x+10$, respectivamente. Com isso, é possível formular a equação $(x+5)(x+10)=500$. Resolvendo-a, chega-se as soluções 15 e -30. Logo, Ivete tem 15 anos atualmente.

No quadro 13, segue a quantidade de alunos que optou por cada método de resolução da equação do 2º grau.

Quadro 13 – Quantidade de alunos que optou por cada método de resolução de equações do 2º grau no item I

Método de completar quadrados	Fórmula de Bhaskara	Soma e produto	Método geométrico de Al-Khwarizmi
Nenhum	16	11	Nenhum

Fonte: Autora, 2016

Após a aplicação dessas atividades foi possível observar a preferência dos alunos pela fórmula de Bhaskara e pela soma e produto como métodos de resolução de equações do 2º grau. Durante esse trabalho, ficou evidente que os alunos compreenderam que a fórmula de Bhaskara resolve todas as equações, mas leva um pouco mais de tempo se comparado ao tempo necessário para resolver por soma e produto. Já a resolução por soma e produto facilita o trabalho em algumas equações, mas isso vai depender dos coeficientes da equação.

Foi possível observar também um certo apego de alguns alunos à fórmula de Bhaskara. Eles absorveram a fórmula e a aplicam em todos os problemas. Os demais alunos já se sentem mais à vontade em tentar resolver a equação utilizando o método da soma e do produto e, caso esse não funcione, eles partem para a fórmula de Bhaskara.

Poucos alunos se arriscam a resolver algumas equações pelo método de completar quadrados. Os que ainda tentam, preferem utilizá-lo em situações tais que a equação se assemelha a $(x+m)^2 = n$, sendo n um número quadrado perfeito. O método geométrico de Al-Khwarizmi não foi aderido por nenhum aluno da turma como o método preferido. Depois da oficina, alguns alunos ainda tentaram resolver problemas utilizando esse método, mas com o passar do tempo, eles acabaram deixando-o de lado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme vimos, o ensino da Matemática através da resolução de problemas pode ser feito de três formas, segundo os autores Schroeder e Lester, isto é, ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para resolução de problemas e ensinar por meio da resolução de problemas. Nesse trabalho, optamos pelo uso da última forma que é ensinar através da resolução de problemas. Aqui, tem-se a resolução de problemas como uma metodologia de ensino e o problema como um ponto de partida para o professor desenvolver as ideias sobre determinado conteúdo. O aluno é a peça central desse processo e quem irá construir os conceitos matemáticos durante a resolução do problema. Depois, tais conceitos serão formalizados pelo professor.

Com o objetivo de ensinar a solucionar problemas, George Polya sugere um método de quatro fases. Segundo ele, se essas quatro etapas forem cumpridas com excelência, chegaremos a solução do problema: selecionar as informações relevantes; estabelecer um plano de ação; executar o plano e verificar se a solução encontrada para o problema satisfaz as condições propostas.

Fica evidente que utilizando esse caminho, é possível não apenas ensinar a solucionar problemas, como também ensinar Matemática. É importante ressaltar que essas peculiaridades e possibilidades de um aprendizado mais extenso e rico não são exclusividade da resolução de problemas como metodologia de ensino para a Matemática. Elas também estão presentes em outras tendências no processo de ensinar e de aprender Matemática. Acreditamos que o aprendizado da Matemática só tem a ganhar se caminhos diferenciados forem traçados e, para isso, os fundamentos teóricos e metodológicos do trabalho nessa área do conhecimento precisam ser revisados, implementados e refletidos.

O conteúdo equações do 2º grau é visto durante o nono ano do Ensino Fundamental. Em geral, os professores ensinam apenas a fórmula de Bhaskara como método de resolução dessas equações. Quando muito, eles também apresentam as relações entre os coeficientes das equações do 2º grau, que podem ser chamadas de relações de Girard ou ainda soma e produto das raízes. Nessa dissertação, optamos por fazer um trabalho diferenciado em uma turma do nono ano de uma escola privada do município de Niterói. O ensino das equações do 2º grau foi feito usando, nessa ordem, o método de completar quadrados, a fórmula de Bhaskara, as relações de Girard e, por último, o método geométrico de Al-Khwarizmi. Juntamente com esse trabalho, realizamos a apresentação de cada método utilizando a ideia proposta pela resolução de problemas, ou seja, cada assunto foi iniciado a partir de um problema que gerava a situação necessária.

O foco dessa dissertação está no ensino das equações do 2º grau utilizando a resolução de problemas e apresentando aos alunos os métodos de completar quadrados e de Al-Khwarizmi. As atividades aplicadas foram duas oficinas, sendo uma de cada método citado anteriormente e uma lista de exercícios composta por 12 problemas, em que os alunos deveriam resolver exatamente três problemas usando cada um dos métodos de resolução das equações do 2º grau aprendidos em sala de aula. Os alunos apenas apresentaram dificuldades em quais problemas deveriam resolver utilizando o método geométrico de Al-Khwarizmi, o que mostra que os demais métodos foram bem compreendidos pela maioria da turma.

Como resultado dessas atividades, foi possível perceber a preferência dos alunos pela praticidade da aplicação da fórmula de Bhaskara. Eles não querem ter que pensar em estratégias para solucionar os problemas e, mesmo quando a resolução pela fórmula é mais longa do que se utilizassem outro método, a maioria dos estudantes não deixa de utilizá-la. Apesar dessa evidência, consideramos importante a apresentação dos quatro métodos, pois disponibiliza-se uma gama maior de maneiras para resolver essas equações.

O objetivo desse trabalho foi apresentar novas estratégias de abordar um assunto tão pertinente dentro da Matemática, as equações do 2º grau e tentar fazer com que os professores da disciplina reflitam sobre essa maneira de ensinar tal conteúdo. Esperamos poder dar continuidade ao trabalho aplicando essa metodologia em outras escolas e analisando os resultados alcançados.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. et al. (Orgs.). Resolução de Problemas: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35 - 52.

Araribá Plus Matemática. Obra coletiva, concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora executiva Mara Regina Garcia Gay. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2014.

BERTI, N. M. O Ensino de Matemática no Brasil: Aspectos para uma compreensão histórica. In: VI Jornada Nacional do HISTEDBR, 2005, Ponta Grossa - PR. Disponível em: http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer_histedbr/jornada/jornada6/trabalhos/617/617.pdf

BIANCHINI, E. Matemática Bianchini. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DANTE, L.R. Didática da Resolução de Problemas de Matemática. São Paulo: Ática, 1991.

FERNANDES, J. A. S. ; OLIVEIRA, E. B. A resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática em sala de aula. In: X Encontro Capixaba de Educação Matemática, 2015.

FURLANETTO, V. ; DULLIUS, M. M. ; ALTHAUS, N. . Estratégias de resolução de problemas para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de matemática. In: IX ANPED SUL, 2012, Caxias do Sul. IX ANPED SUL. Caxias do Sul: UCS, 2012. v. único.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em educação matemática. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. R. ; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, no. 1, p.299-311, mai. 2012. Disponível em: http://www.reveduc.ufscar.br.

SCHROEDER, T.L., LESTER Jr., F.K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.) New Directions for Elementary School Mathematics. NCTM, 1989. (Year Book). p.31-42.

SILVA; J. A. F. da; Refletindo sobre as dificuldades de aprendizagem na Matemática: algumas considerações. Universidade Católica de Brasília, 2005. Disponível em: http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/JoseAugustoFlorentinodaSilva.pdf

SOUSA, A. B. A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática. Universidade Católica de Brasília, 2005. Disponível em: http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf

SOUZA, G. M. Felix Klein e Euclides Roxo: uma reflexão sobre o ensino de geometria.. In: VIII Seminário Nacional de História da Matemática, 2009, Belém.