



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Diego Tranjan Viug

**O estudo das cônicas a partir da excentricidade –  
formando conceitos com o auxílio do Geogebra e a geometria dinâmica**

Rio de Janeiro

2016

Diego Tranjan Viug

**O estudo das cônicas a partir da excentricidade –  
formando conceitos com o auxílio do Geogebra e a geometria dinâmica**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.



Orientador: Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos

Rio de Janeiro

2016

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

V854 Viug, Diego Tranjan.  
O estudo das cônicas a partir da excentricidade: formando conceitos com o auxílio do geogebra e a geometria dinâmica / Diego Tranjan Viug. – 2016.  
74f.

Orientador: Francisco Roberto Pinto Mattos.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) -  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Geometria analítica. - Teses. 2. Curvas algébricas - Teses. 3. Matemática -  
Estudo e ensino. I. Mattos, Francisco Roberto Pinto. II. Universidade do Estado  
do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 514.12

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta  
dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Diego Tranjan Viug

**O estudo das cônicas a partir da excentricidade –  
formando conceitos com o auxílio do Geogebra e a geometria dinâmica**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 11 de julho de 2016.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos (Orientador)  
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Patricia Nunes da Silva  
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

---

Prof. Dr. Humberto José Bortolossi  
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2016

## DEDICATÓRIA

À minha família, por sempre ter acreditado e investido em mim. Em especial, à minha mãe, uma vez que, sem ela, eu nada seria e jamais teria alcançado o final deste trabalho. Mãe, obrigado pelo apoio incondicional e pela dedicação, amo você! Ao meu pai, que me trouxe motivação para melhorar cada vez mais e a quem busquei a vida inteira orgulhar. Também, não poderia deixar de citar o meu irmão, Matheus, a quem agradeço por todo o amor e por toda a parceria.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais e amigos por todo o apoio e toda a compreensão nas horas difíceis.

Em especial ao amigo Gilberto Gil, companheiro de longa data, parceiro de congressos, palestras e mini-cursos sobre o tema deste trabalho. Que a nossa parceria se perpetue, meu amigo.

Ao amigo Daniel, pois sem sua paciência e fluência no francês, nada disso seria possível.

Ao meu orientador, Francisco, por me dar todo o suporte necessário, pelas suas correções e por estar sempre disponível.

Aos amigos da Uerj por terem me acolhido e me mantido motivado.

E a todos os outros que não citei, mas que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito.

Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes.

*Martin Luther King*

## RESUMO

VIUG, Diego Tranjan. *O estudo das cônicas a partir da excentricidade: formando conceitos com o auxílio do geogebra e a geometria dinâmica*. 2016.74f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

Atualmente, no contexto escolar, sabe-se que o ensino das cônicas é feito de forma analítica e isolada, o que acarreta de maneira negativa a aprendizagem desse conteúdo. Desta forma, sob o ponto de vista geométrico, nossa investigação propõe o ensino contextualizado das cônicas, em sala de aula, a fim de potencializar os conhecimentos matemáticos dos estudantes de Ensino Médio e Superior. Para isso, em linha geral, discorreremos sobre os estudos teóricos de autores como Boyer (1996) e Cajori (1991) que tratam das divisões de cones investigadas inicialmente por Menaechmus e aperfeiçoadas por Dandelin. Além disso, tratamos da excentricidade, no ambiente da geometria dinâmica, por meio dos recursos computacionais apresentados por Giraldo, Caetano e Mattos (2012). Neste trabalho, realizamos, além do caráter científico, um convite à reflexão no momento em que elaboramos atividades para as nossas aulas e, sobretudo, porque estas tarefas auxiliam os alunos a fixarem conteúdos e a superarem suas dificuldades. Neste sentido, ao final desta pesquisa, sugerimos algumas atividades aos professores de matemática no intuito de colaborar para o ensino contextualizado das cônicas. Acreditamos que, dessa forma, combatemos a participação passiva do alunado ante qualquer desafio em seu processo de ensino/aprendizagem, e a partir desse contexto, promovemos uma interação mais significativa em sala de aula.

Palavras-chave: Cônicas. Excentricidade. Elipse. Hipérbole. Parábola.



## ABSTRACT

VIUG, Diego Tranjan. *The study of the conic from the eccentricity - forming concepts with the help of Geogebra and dynamic geometry*. 2016. 74f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

It is known at present in the school context that the teaching of conics is done in an isolated and analytical way, affecting negatively the learning of this subject matter. This way, from the geometrical point of view, our investigation proposes the contextualized teaching of the conics in the classroom in order to take full advantage of the mathematical knowledge from high school and college students. Having that in mind, in general terms, we go over the theoretical studies of Boyer (1996) and Cajori (1991) that deal with the divisions of cones investigated initially by Menaechmus and improved by Dandelin. Besides that, we deal with the eccentricity in the dynamic geometry environment, through computer resources presented by Giraldo, Caetano and Mattos (2012). In this work, we present, besides the scientific character, an invitation for reflection when we elaborate activities for our own classes and , besides that, because these tasks help the students develop their mastery of content and overcome their difficulties. This way, by the end of the research we suggest some activities to Mathematics teachers with the aim to collaborate with the contextualized teaching of conics. We believe that, this way, we fight against the passive participation of students in face of any challenge in their teaching/learning process, and , from this context, we promote a more meaningful interaction in the classroom.

Keywords: Conics. Eccentricity. Ellipse. Hyperbola. Parabola.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Busto de Apolônio de Perga.....	19
Figura 2 – Germinal Pierre Dandelin. ....	20
Figura 3 – Esfera tangente a um cone.....	21
Figura 4 – Ângulo de abertura de um cone. ....	22
Figura 5 – Casos de deeneração. ....	24
Figura 6 – Seção formando uma elipse. ....	25
Figura 7 – Elipse.....	25
Figura 8 – Focos da elipse. ....	26
Figura 9 – Seção formando uma hipérbole.....	27
Figura 10 – Hipérbole.....	28
Figura 11 – Focos da hipérbole. ....	29
Figura 12 – Seção formando uma parábola. ....	30
Figura 13 – Parábola.....	30
Figura 14 – Foco da Parábola. ....	31
Figura 15 – Excentricidade.....	32
Figura 16 – Excentricidade.....	33
Figura 17 – Excentricidade na elipse.....	34
Figura 18 – Seção no cone que gera uma elipse.....	35
Figura 19 – Excentricidade na hipérbole.....	36
Figura 20 – Seção no cone que gera uma hipérbole.....	36
Figura 21 – Excentricidade da elipse no Geogebra .....	37
Figura 22 – Excentricidade da hipérbole no Geogebra. ....	37
Figura 23 – Diretrizes na elipse.....	38
Figura 24 – Seção com as diretrizes da elipse.....	38
Figura 25 – Diretrizes na hipérbole.....	39
Figura 26 – Seção das Diretrizes com a Hipérbole .....	39
Figura 27 – Diretrizes da elipse no Geogebra. ....	40
Figura 28 – Diretrizes da hipérbole no Geogebra.....	40
Figura 29 – Teorema das tangentes na elipse.....	41
Figura 30 – Teorema das tangentes na hipérbole. ....	42

Figura 31 – Teorema das tangentes na parábola.....	43
Figura 32 – Simetria do foco em relação a tangente. ....	44
Figura 33 – Philippe de la Hire.....	45
Figura 34 – Teorema de La Hire na elipse. ....	46
Figura 35 – Teorema de La Hire na hipérbole.....	47
Figura 36 – Jean-Victor Poncelet. ....	48
Figura 37 – Teorema de Poncelet na elipse.....	49
Figura 38 – Demonstração do teorema de Poncelet. ....	50
Figura 39 – Teorema de Poncelet na hipérbole. ....	51
Figura 40 – Demonstração do teorema de Poncelet. ....	51
Figura 41 – Teorema de Poncelet na parábola. ....	52
Figura 42 – Demonstração do teorema de Poncelet. ....	53
Figura 43 – Conjugados isogonais. ....	54
Figura 44 – Propriedades Conjugados isogonais.....	55
Figura 45 – Propriedades Conjugados isogonais.....	56
Figura 46 – Propriedades Conjugados isogonais.....	57
Figura 47 – Elipse inscrita. ....	58
Figura 48 – Plano oblíquo gerando elipse. ....	62
Figura 49 – Plano oblíquo gerando hipérbole. ....	64
Figura 50 – Plano paralelo gerando parábola. ....	65
Figura 51 – Excentricidade no Geogebra. ....	66
Figura 52 – Circunferência focal na hipérbole. ....	68
Figura 53 – Circunferência focal na elipse.....	69
Figura 54 – Circunferência principal na elipse.....	70
Figura 55 – Circunferência principal na hipérbole.....	70

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Construção da elipse com as esferas de Dandelin .....	61
Tabela 2 – Construção da hipérbole com as esferas de Dandelin .....	63
Tabela 3 – Construção da parábola com as esferas de Dandelin.....	64
Tabela 4 – Análise da excentricidade de uma cônica.....	66
Tabela 5 – Construção das retas diretrizes .....	67
Tabela 6 – Construção das circunferências focais nas cônicas .....	68
Tabela 7 – Construção da circunferência principal nas cônicas.....	69

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	15
<b>1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS.....</b>	<b>17</b>
1.1 Sobre as curvas cônicas .....	17
1.2 Germinal Pierre Dandelin .....	20
<b>2 AS ESFERAS DE DANDELIN.....</b>	<b>21</b>
2.1 Esfera tangente a um cone.....	21
2.2 Definição de uma esfera de Dandelin .....	22
2.3 Ângulo de abertura de um cone e região do espaço associado a ele .....	22
<b>3 EXPLORANDO AS CÔNICAS COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA.....</b>	<b>23</b>
3.1 Secções no cone .....	23
3.2 Seção formando uma elipse .....	24
3.2.1 Teorema 1 .....	26
3.3 Seção formando uma hipérbole .....	27
3.3.1 Teorema 2 .....	28
3.4 Seção formando uma parábola .....	29
3.4.1 Teorema 3 .....	31
<b>4 EXCENTRICIDADE NAS CÔNICAS .....</b>	<b>32</b>
4.1 Excentricidade .....	32
4.1.1 Teorema 4 .....	34
4.2 Retas diretrizes .....	38
<b>5 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS CÔNICAS .....</b>	<b>41</b>
5.1 Teorema das tangentes .....	41
5.1.1 Teorema 5 .....	41
5.1.2 Teorema 6 .....	42
5.2 Teorema das tangentes na parábola.....	43
5.2.1 Lema 1 .....	43

5.2.2 Teorema 7 .....	44
5.3 Teorema de La Hire .....	45
5.3.1 Teorema 8 .....	46
5.3.2 Teorema 9 .....	47
5.4 Teorema de Poncelet .....	48
5.4.1 Teorema 10 .....	49
5.4.2 Teorema 11 .....	50
5.4.3 Teorema 12 .....	52
6 CONSTRUINDO UMA ELIPSE INSCRITA EM UM TRIÂNGULO.....	54
6.1 Conjugados Isogonais .....	54
6.1.1 Teorema 13 .....	55
6.1.2 Teorema 14 .....	55
6.1.3 Teorema 15 .....	56
6.1.4 Teorema 16 .....	57
7 ATIVIDADES COM O GEOGEBRA.....	59
7.1 Construção da Elipse .....	60
7.2 Construção da Hipérbole.....	62
7.3 Construção da Parábola .....	64
7.4 Excentricidade .....	65
7.5 Retas diretrizes .....	67
7.6 Circunferência focal.....	68
7.7 Circunferência principal .....	69
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	71
REFERÊNCIAS.....	73

## INTRODUÇÃO

É sabido que as cônicas são tradicionalmente estudadas no âmbito da geometria analítica durante o Ensino Médio, entretanto, por serem tratadas de maneira superficial, acreditamos que isso leva à restrição do conhecimento geométrico. Reconhecemos que estas curvas possuem um número muito maior de possibilidades do que as apresentadas no meio escolar. Diante disso, nesta investigação, apresentamos as cônicas, a partir de uma abordagem geométrica, de modo a explorar a construção dessas curvas no software de geometria dinâmica Geogebra, e motivar as práticas escolares relacionadas a amplitude do conteúdo em questão.

Para isso, construímos as seções no cone que originam a elipse, a hipérbole e a parábola. Além do mais, visualizamos as retas diretrizes das cônicas para, desse modo, definirmos a excentricidade como uma razão constante entre a distância de um ponto  $P$  ao foco, e a distância do ponto  $P$  à reta diretriz. Estabelecemos, também, a relação entre a definição abordada nesta pesquisa de excentricidade com a definição tradicional abordada nos livros didáticos e exploramos significativos teoremas da geometria das cônicas que são raramente abordados no ensino médio, como o teorema das tangentes, o teorema de *La Hire* e o teorema de *Poncelet* para elipses, hipérbolas e parábolas. Na seção final são definidos os conjugados isogonais e concluído que dado um triângulo e um ponto interno  $T$ , pode-se construir uma elipse inscrita cujos focos são  $T$  e seu conjugado isogonal.

No capítulo 1, apresentamos as referências históricas para situar o leitor acerca do tema. Para tratar das curvas cônicas e apresentar o matemático Dandelin, contamos com autores como Mattos (2001), Nokikov, Rousseau e Saint-Aubin (2011). No capítulo 2, com base em Baldin e Furuya (2011), apresentamos as esferas de Dandelin. No capítulo 3, a partir incentivados por Giraldo, Caetano e Mattos (2012), demonstramos e construímos as seções feitas no cone, que originam uma elipse, hipérbole e parábola, usando o *software* de geometria dinâmica Geogebra. No capítulo 4, sugerimos uma abordagem sobre excentricidade diferente da tradicional presente nos livros didáticos da Educação Básica, contudo estabelecemos a comunicação matemática entre essas abordagens. No capítulo 5, apresentamos algumas propriedades geométricas dessas curvas, citamos teoremas importantes e fazemos as suas construções no Geogebra. No capítulo 6, mostramos como podemos inscrever uma elipse num triângulo quando dado um ponto interior a esse triângulo, que será um dos focos dessa elipse.

Por fim, no capítulo 7, sugerimos algumas atividades para a elucidação dos temas propostos neste trabalho.

Em síntese, discorremos sobre o uso de geometria dinâmica como um um caminho possível para despertar o interesse pela beleza da geometria plana e espacial. Além do mais, o nosso estudo sobre as cônicas visa a compartilhar esse conhecimento com a geometria analítica, estabelecendo essas interligações que são apresentadas em diversos momentos do ensino de um aluno da Educação Básica. Cabe ressaltar que tanto na seção final como na relação das definições de excentricidade presentes nesse trabalho, as demonstrações foram feitas de modo independente e configuram minha contribuição para a literatura matemática.



## 1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

### 1.1 Sobre as curvas cônicas

Acreditamos que uma abordagem histórica elucidada muitas vezes os conhecimentos matemáticos descritos em linguagem moderna, principalmente quando compreendemos que não há linearidade na construção de um conceito. No assunto abordado, percebemos que houve uma certa continuidade dos estudos iniciados na antiguidade.

Encontramos em Mattos (2001) que a descoberta das cônicas é atribuída a *Menaechmus* (380 a.C. – 320 a.C.) e que tal descoberta ocorreu enquanto ele tentava encontrar duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta e resolver o problema da duplicação do cubo. Na solução que obteve, utilizou duas curvas inventadas por ele: uma parábola e uma hipérbole. Uma terceira curva, a elipse, surgiu como subproduto de sua invenção. Até hoje essas três curvas são chamadas de secções cônicas, pois o grande matemático grego as imaginou seccionando a superfície cônica por meio de um plano perpendicular às geratrizes da superfície.

Menaechmus foi o primeiro a mostrar como elipses, parábolas, e hipérbolas podem ser obtidas por cortes no cone por um plano não paralelo à sua base. É bom ressaltar que ele não foi o primeiro a usar as palavras ‘parábola’ e ‘hipérbole’, que seriam empregados por Apollonius apenas mais tarde. A solução de *Menaechmus* admite que sejam dados  $a$ ,  $b$  e nós desejamos encontrar duas médias proporcionais  $x, y$  entre eles, isto é,  $a \div x = x \div y = y \div b$ . Usando ferramentas da matemática atual, o que não era possível para *Menaechmus*, podemos ver como as secções cônicas aparecem com a solução do problema. (Mattos, 2001, p.16)

Nesse contexto, recomendamos ao leitor interessado a investigação realizada por Mattos (2001), uma vez que este autor descreve com exatidão os cálculos realizados por *Menaechmus*, além de apresentar a máquina de Platão associada ao problema de Plutarco, os trabalhos de Erastóstenes, Nicomedes, Diócles e Gauss, todos envolvendo o problema clássico da duplicação do cubo.

De acordo com Fernandes (Hipertexto, 2002), Menaechmus era astrônomo e foi um importante geômetra grego da Academia de Platão. Nascido em Alopeconnesus, Ásia Menor,

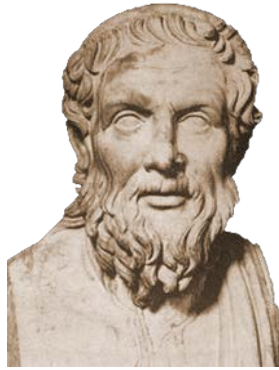
hoje Turquia, no século IV a. C., esse grande matemático se aperfeiçoou em geometria com seus estudos sobre parábolas e hipérbolas. Discípulo de *Eudoxo* e irmão de *Dinóstrato*, foi um dos tutores de *Alexandre, o Grande*. Especializou-se na dedução de propriedades de seções cônicas e outras curvas. Além disso, foi responsável pela descoberta da elipse (350 a. C.) e resolveu o problema da duplicação dos cubos, o que culminou nos primeiros passos na direção da geometria analítica. Conseguiu, assim, solucionar o chamado problema da duplicação do cubo. Este problema consistia em, a partir de um cubo de aresta unitária, construir um segmento de reta de comprimento  $x$  tal que  $x^3 = 2$ . Morreu em lugar incerto, talvez em Atenas, e no século II a. C., outro astrônomo e geômetra grego, *Apolônio de Perga* (262 - 190 a. C.), escreveu um tratado sobre as seções cônicas. Nesse tratado, reproduziu os conhecimentos do irmão de *Dinóstrato*, acrescentando, ainda, centenas de teoremas novos sobre as seções cônicas, deduzidos de uma maneira puramente geométrica. *Apolônio* deu o acabamento à Geometria grega de forma e de posição, elevando-a à altura máxima. Morreu em Cyzicus, hoje Kapidagi Yarimadasi, Turquia.

Anos depois, conforme Dubois (Hipertexto, 2011), *Apolônio de Perga* (262 – 190 a.C.) dá continuidade ao trabalho iniciado por *Menaechmus*. *Apolônio* foi um geômetra e astrônomo grego, que se tornou célebre a partir dos trabalhos elucidados em *Elementos das Cônicas*. Trata-se de um material de difícil leitura, pois aborda a hipótese das órbitas excêntricas para explicar o movimento aparente dos planetas e a variação da velocidade da Lua. É um conjunto de oito livros em que os quatro primeiros foram escritos em grego com comentários de *Eutócio*<sup>1</sup>. Os livros cinco, seis e sete, a que não tivemos acesso, foram conhecidos a partir de uma tradução árabe atribuída a *Thābit ibn Qurra* e revisto por *Nasir ad-Din at-Tusi*. O oitavo livro da série desapareceu do conjunto da obra, entretanto, em 1710, Edmund Halley escreve uma versão do que poderia conter nesse livro desaparecido e a pública.

---

<sup>1</sup> *Eutócio de Ascalão* (480 – 540 d.C.) foi um matemático grego que escreveu comentários sobre tratados de *Arquimedes* e sobre as cônicas de *Apolônio*, muito pouco é conhecido sobre sua vida.

Figura 1 – Busto de Apolônio de Perga.



Fonte: <http://alfaebetasstrindade.blogspot.com.br/> Acesso em: 25/08/2015.

Em 1706, duas obras de *Apolônio* foram traduzidas do árabe e publicadas; tais obras foram intituladas *De sectione rationis*. Encontramos em francês os textos *Sur la section de rapport*, *Sur la section d'aire*, *Sur la section déterminée*, *Les contacts*, *Les inclinaisons* e *Les lieux plans* disponíveis na biblioteca Gálica, todos traduzidos do grego. Cada um desses tratados mencionados compreendem dois livros, recebendo o conjunto da obra o nome de Tesouro da Análise<sup>2</sup>.

Quando analisamos o trabalho de *Apolônio* envolvendo as cônicas, averiguamos dois casos:

- (1) O caso em que o plano passa pelo vértice do cone, sendo a interseção um ponto, uma reta ou a reunião de duas retas, o que conhecemos como caso de degeneração da cônica.
- (2) O caso em que o plano não passa pelo vértice do cone são encontradas três possibilidades:
  - (a) A interseção é uma curva fechada, limitada cujo bordo tem uma forma oval, denominada elipse, possuindo dois eixos de simetria perpendiculares e um centro de simetria.
  - (b) A interseção é uma curva não fechada, não limitada, chamada parábola possuindo apenas um eixo de simetria.
  - (c) A interseção é a reunião de duas curvas não limitadas, disjuntas, possuindo dois eixos perpendiculares, um centro de simetria (que é a sua interseção) e duas retas assíntotas, chamada de hipérbole.

---

<sup>2</sup> A Análise referida não é a *Análise Matemática* conhecida atualmente.

Ao longo do trabalho de *Apolônio*, as propriedades acima citadas foram apresentadas e demonstradas rigorosamente, assim como as outras propriedades que envolvem cada uma das cônicas. Antes de apresentar a definição das curvas cônicas, a partir do conceito de esferas de Dandelin, mostraremos um pouco dos trabalhos deste autor.

## 1.2. Germinal Pierre Dandelin

Tradicionalmente as curvas cônicas são apresentadas a alunos de ensino de médio ou a alunos de cursos iniciais de nível superior através do conceito de lugar geométrico. Equações cartesianas de tais curvas aparecem a partir de manipulações algébricas e seus elementos principais são estudados. Em geral, tais curvas são apresentadas centradas na origem e posteriormente transladas ou rotacionadas em cursos de Álgebra Linear. Uma preocupação deste trabalho foi demonstrar as propriedades estudadas por *Apolônio* de uma forma geométrica e sintética. Depois de várias leituras sobre o tema constatamos que *Germinal Pierre Dandelin* (1794 – 1847) tem historicamente o mérito dessas demonstrações, porém perdidas.

Figura 2 – Germinal Pierre Dandelin.



Fonte: <https://sites.google.com/site/russinowpp/studenty/laboratornye-raboty-praktika-dla-skolnikov/lrpm/p3>  
Acesso em: 25/08/2015.

Segundo Dubois (Hipertexto, 2011), *Dandelin* foi um matemático Franco-Belga conhecido por seus trabalhos em geometria. No campo das curvas cônicas, demonstra muitos resultados, principalmente, o que hoje conhecemos por Teorema de Dandelin, provado em 1822. Seu nome também está estritamente associado ao conceito de Esferas de Dandelin e a um método algébrico que consiste em uma forma de aproximação de raízes. Este estudo é chamado hoje método Dandelin-Graffe. É válido destacar que esse método foi estudado de forma independente por esses dois matemáticos.

## 2. AS ESFERAS DE DANDELIN

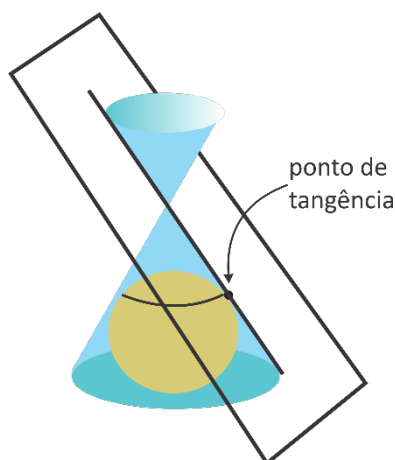
Seguindo Cajori (1991), constatamos que as definições de cônicas utilizadas atualmente foram estudadas de forma bem completa por Germinal Pierre Dandelin, no século XIX. Esta investigação teve como objetivo mostrar que dado um plano que secciona um cone, existe uma ou duas esferas que são tangentes ao plano e ao cone.

Estas esferas são as esferas de Dandelin. Trabalhando com a propriedade das retas tangentes a uma esfera que dado um ponto externo a uma esfera é possível traçar duas retas que a tangenciam em pontos distintos, cujas distâncias ao ponto dado são iguais, Dandelin consegue encontrar os focos e verificar a propriedade focal de uma só vez.

### 2.1 Esfera tangente a um cone

De acordo com Baldin e Furuya (2011), uma esfera é dita tangente a um plano em um ponto  $M$  se  $M$  é um ponto da esfera e se o plano tangente a esfera em  $M$  contém uma geratriz do cone. Quando uma esfera é tangente a um cone e seu centro está sobre o eixo do cone, então ela é tangente ao cone em uma infinidade de pontos que formam um círculo situado num plano ortogonal ao eixo do cone.

Figura 3 – Esfera tangente a um cone.



## 2.2 Definição de uma esfera de Dandelin

Com base em Baldin e Furuya (2011), consideremos um cone e um plano. Uma esfera de Dandelin relativa à este cone e ao plano é uma esfera cujo centro está sobre o eixo do cone, tangente às geratrizes desse cone e ao plano, simultaneamente.

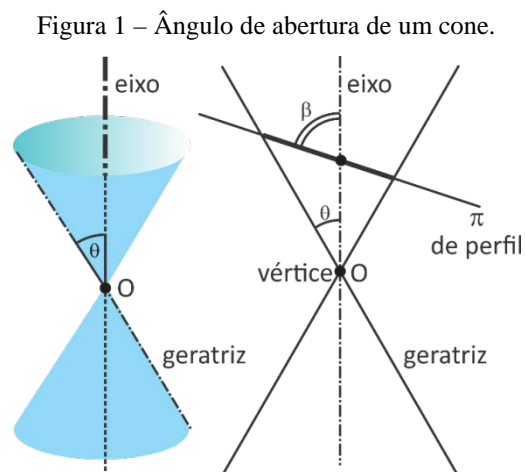
## 2.3 Ângulo de abertura de um cone e região do espaço associado a ele

De modo geral, seguindo ainda os apontamentos realizados por Baldin e Furuya (2011), consideremos um cone, suponhamos que o vértice deste cone está na origem do sistema cartesiano tridimensional e que o eixo se confunde com o eixo Oz. Chamamos de ângulo de abertura do cone o ângulo  $\theta$  geometricamente não orientado, formado por cada geratriz com o eixo do cone.

Podemos supor que  $\theta$  é positivo e estritamente entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , uma vez que o cone de abertura  $180^\circ - \theta$  é o mesmo que o cone de abertura  $\theta$ .

Para o caso  $\theta = 0^\circ$  temos o cone degenerado, ou seja, uma reta.

Para o caso  $\theta = 90^\circ$  também encontramos o caso degenerado em que o cone é um plano.



Existirá uma única esfera de Dandelin quando o plano faz com o eixo um ângulo de incidência igual ou oposto ao ângulo de abertura do cone e duas esferas de Dandelin nos demais casos.

### 3. EXPLORANDO AS CÔNICAS COM AUXILIO DO GEOGEBRA

Uma das maiores dificuldades dos alunos, quando se referem à geometria, é a visualização dos objetos geométricos, dessa maneira, a construção no ambiente de Geometria dinâmica<sup>3</sup> é para o aluno, muito importante para a compreensão dos conceitos. Segundo GIRALDO et ali. (2012, p.106),

as ferramentas de geometria dinâmica permitem as construções dos objetos de acordo com suas propriedades ou as relações estabelecidas. Estes podem então ser manipulados dinamicamente, de tal maneira que as propriedades e relações sejam preservadas. Esse modo particular de construção geométrica apresenta características especiais, que podem ter consequências importantes para a aprendizagem [...]

#### 3.1 Secções no cone

As secções cônicas, embora possam ser definidas separadamente, são originadas a partir de secções de um mesmo cone por planos distintos. De modo geral, segundo Cruz (2012), as secções cônicas são curvas planas obtidas da intersecção de um plano com um cone de revolução. Sendo assim, compreendemos que a parábola, a elipse e a hipérbole são partes essenciais na secção de um cone.

Lembremos que um cone circular pode ser obtido a partir da rotação uma reta (geratriz) em torno de uma outra reta (eixo de rotação), sendo que a geratriz e o eixo devem se interceptar num ponto (vértice do cone, V). Essa forma de obter o cone traduz o cone circular como uma superfície de revolução. Seja  $\pi$  o plano que secciona o cone. Temos então os seguintes casos para a intersecção do cone com o plano:

1. Se o plano  $\pi$  é perpendicular ao eixo do cone mas não passa pelo vértice V, então a secção é uma circunferência. Logo, uma circunferência é uma cônica.

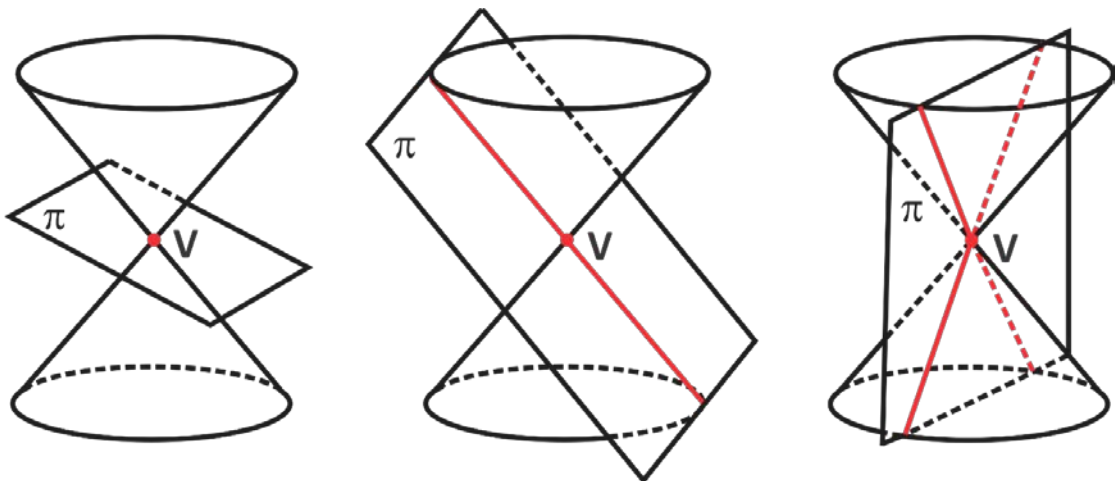
---

<sup>3</sup> O software usado para tais atividades é o Geogebra com a janela 3D, que pode ser obtido gratuitamente no site <http://www.geogebra.org/>. A razão para nossa escolha se dá à facilidade para encontrá-lo e o fato de o mesmo ser gratuito.

2. Quando o plano  $\pi$  passa pelo vértice  $V$ , e o ângulo entre  $\pi$  e o eixo é igual a  $\theta$ , a interseção resulta em uma reta, que é uma reta geratriz.
3. Quando o plano  $\pi$  passa pelo vértice  $V$ , e o ângulo entre  $\pi$  e o eixo é maior que  $\theta$ , a interseção resulta em um ponto, mais precisamente, o vértice  $V$ .
4. um par de retas concorrentes. (Quando o plano  $\pi$  passa pelo vértice  $V$ , e o ângulo entre  $\pi$  e o eixo é menor que  $\theta$ )
5. uma reta (quando o plano tangencia a cônica) e um ponto (quando o plano contém apenas o vértice  $V$ ).

Apresentaremos nessa seção, exemplos dessas seções utilizando o software Geogebra 3d, com suas construções e posteriormente as suas respectivas demonstrações. As cônicas obtidas como interseção do cone por planos passando pelo vértice  $V$  são exemplos de cônicas tidas como degeneradas.

Figura 2 – Casos de deeneração.



Nesse contexto, apresentaremos nesta seção exemplos de algumas dessas seções utilizando o *Software* Geogebra 3D, com suas construções e, posteriormente, as suas respectivas demonstrações.

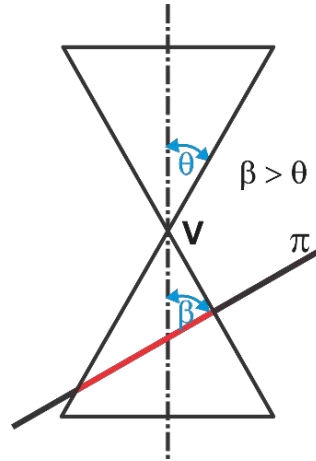
### 3.2 Seção formando uma elipse

Se o ângulo entre o plano  $\pi$  e o eixo  $r$  é maior que o ângulo  $\theta$  entre o eixo e a geratriz, e  $\pi$  não passa pelo vértice, então a interseção contém pontos em apenas um dos lados do cone



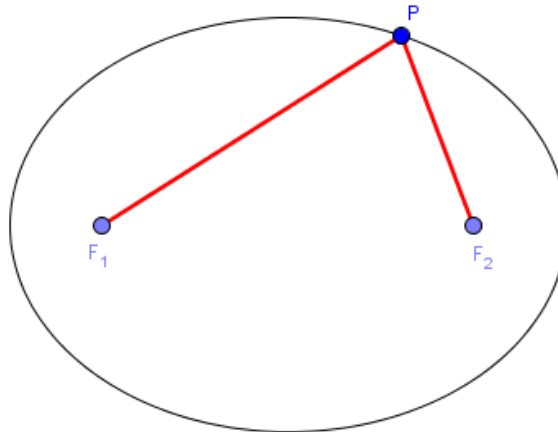
em relação ao vértice e a curva resultante é chamada de elipse. Um caso extremo é quando o ângulo é  $\frac{\pi}{2}$ , e a elipse se torna uma circunferência.

Figura 3 – Seção formando uma elipse.



Fixados dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  de um plano  $\pi$ , chamamos de *elipse* o conjunto dos pontos  $P \in \pi$  cuja soma das distâncias  $PF_1$  e  $PF_2$  é uma constante. Neste trabalho, consideraremos o valor dessa constante igual a  $2a$  e a distância entre os focos igual a  $2c$ . Dessa maneira, temos  $PF_1 + PF_2 = 2a$ .

Figura 4 – Elipse.



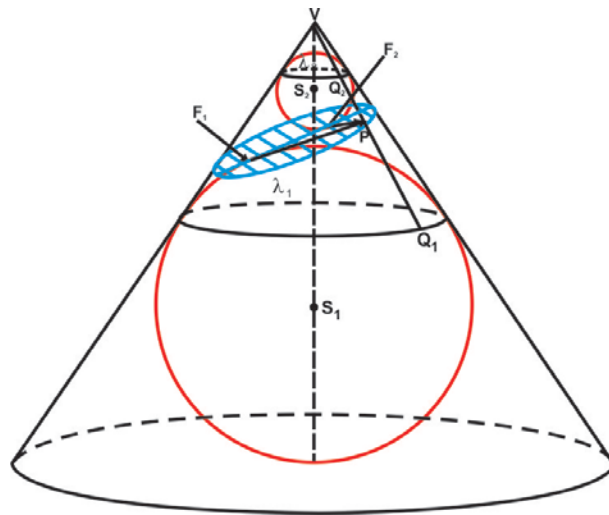
Contudo, esse lugar geométrico é originado através de uma seção num cone, que veremos a seguir. As demonstrações a seguir foram feitas baseadas nos conceitos apresentados no capítulo 2. Note que nas figuras encontraremos um cone, um plano e as esferas de Dandelin associadas a eles.

### 3.2.1 Teorema 1

Dado um cone e uma seção por um plano de modo que intersecte todas as geratrizes do cone numa mesma folha, como mostra a figura, a curva de interseção entre o plano e o cone é uma elipse.

**Demonstração:** Consideremos um cone de revolução, uma seção no cone por um plano  $\pi$  e duas esferas inscritas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  que tangenciam simultaneamente este plano.

Figura 5 – Focos da elipse.

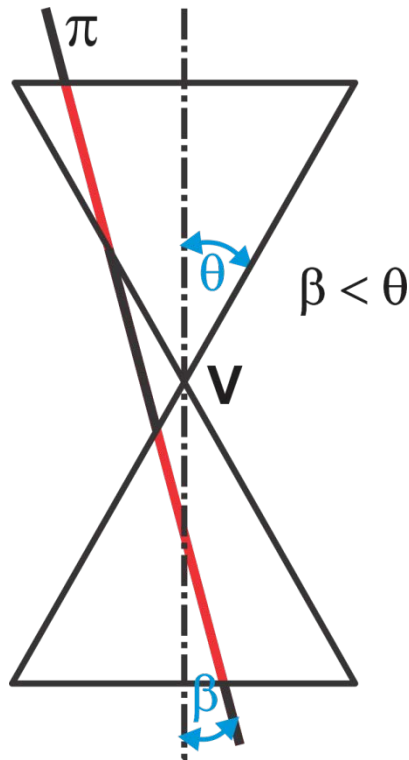


Tomemos arbitrariamente um ponto  $P$  da interseção de  $\pi$  com o cone e tracemos a geratriz deste cone que contém  $P$ . Sejam os pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  a interseção da geratriz com as esferas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respectivamente e  $F_1$  e  $F_2$  a interseção de  $\pi$  com as esferas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respectivamente, como mostra a figura acima. Temos então que  $PF_1 = PQ_1$ , pois  $PQ_1$  e  $PF_1$  são tangentes às esferas. Analogamente  $PF_2 = PQ_2$ . Portanto,  $PF_1 + PF_2 = Q_1Q_2$ , que é constante, pois o segmento  $Q_1Q_2$  pertence à geratriz do cone e está compreendido entre dois planos paralelos às bases do cone e esta constante não depende da escolha de  $P$ . Logo a seção determinada pelo plano  $\pi$  é uma elipse.

### 3.3 Seção formando uma hipérbole

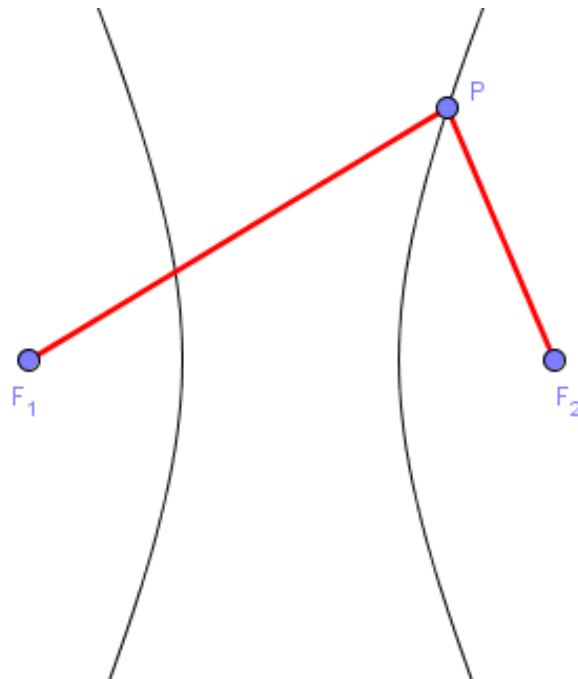
Se o ângulo entre o plano  $\pi$  e o eixo  $r$  é menor que o ângulo  $\theta$  entre o eixo e a geratriz, e  $\pi$  não passa pelo vértice, então a interseção contém pontos nos dois lados do cone em relação ao vértice e a curva resultante é chamada de hipérbole.

Figura 6 – Seção formando uma hipérbole.



Fixados dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  de um plano  $\pi$ , chamamos de *hipérbole* o conjunto dos pontos  $P \in \pi$  cuja diferença das distâncias  $PF_1$  e  $PF_2$  é uma constante. Neste trabalho, consideraremos o valor dessa constante igual a  $2a$  e a distância entre os focos igual a  $2c$ . Dessa maneira, temos  $|PF_1 - PF_2| = 2a$ .

Figura 7 – Hipérbole.

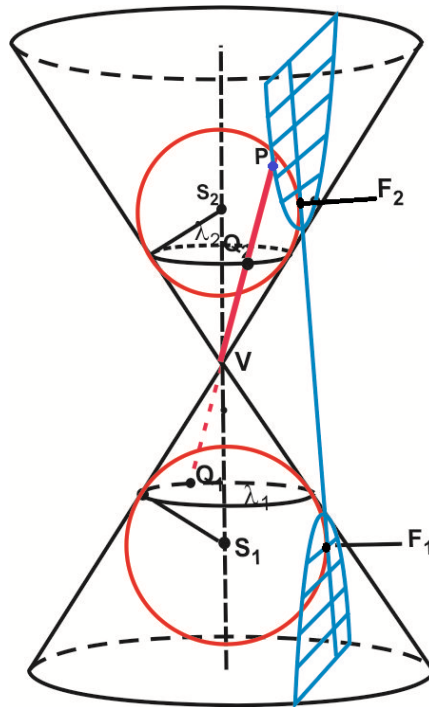


### 3.3.1 Teorema 2

Dado um cone de duas folhas e uma seção por um plano  $\pi$  de modo que intersecte geratrizes das duas folhas do cone, como mostra a figura, a curva de interseção entre o plano e o cone é uma hipérbole.

**Demonstração:** Consideremos um cone duas folhas, uma seção no cone por um plano  $\pi$  e duas esferas inscritas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , uma em cada folha, que tangenciam simultaneamente este plano.

Figura 8 – Focos da hipérbole.

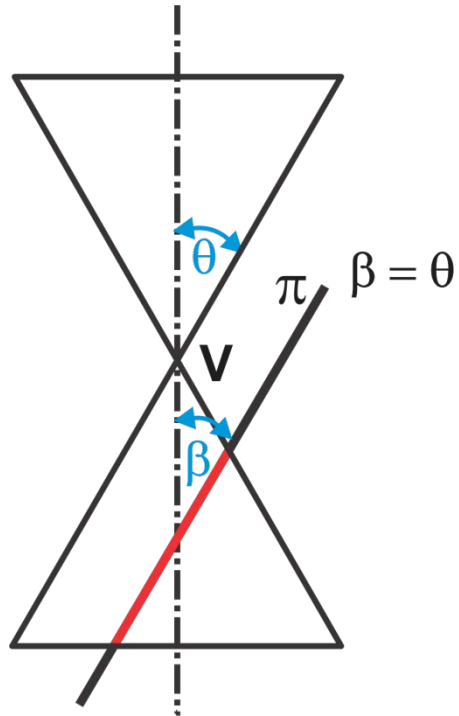


Seja  $P$  um ponto desta curva gerada pela interseção de  $\pi$  com o cone. Sejam ainda os pontos  $Q_1$  e  $Q_2$  a interseção da geratriz com as esferas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respectivamente e  $F_1$  e  $F_2$  a interseção de  $\pi$  com as esferas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respectivamente, como mostra a figura acima. Desse modo, temos  $PF_1 = PQ_1$ , pois  $PQ_1$  e  $PF_1$  são tangentes às esferas, como ilustra a figura acima. Analogamente,  $PF_2 = PQ_2$ . Portanto,  $PF_1 - PF_2 = Q_1Q_2$ , que é constante, pois o segmento  $Q_1Q_2$  pertence à geratriz do cone e está compreendido entre dois planos paralelos às bases do cone e esta constante não depende da escolha de  $P$ .  $\square$

### 3.4 Seção formando uma parábola

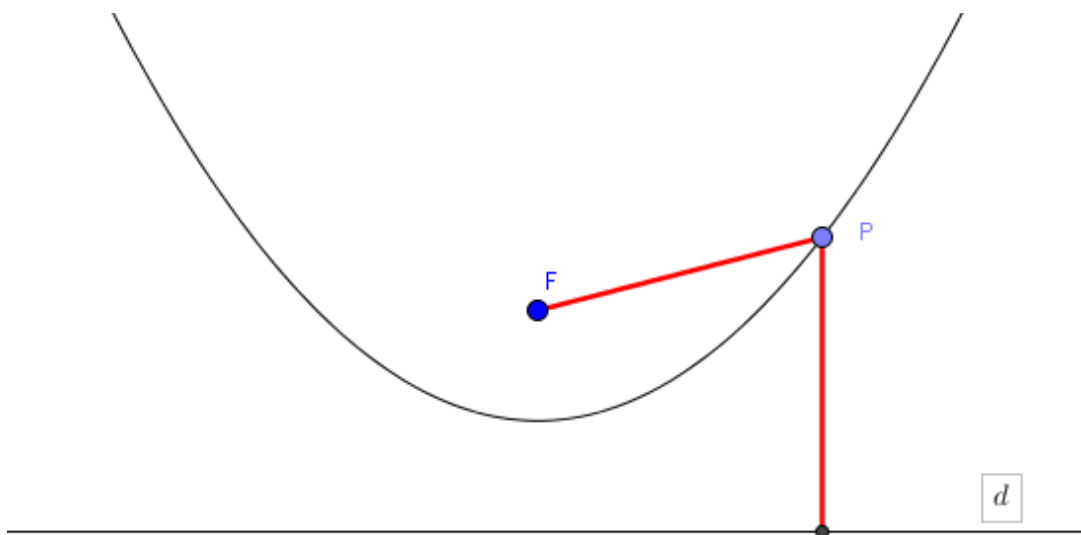
Se o ângulo entre o plano  $\pi$  e o eixo  $r$  é igual ao ângulo  $\theta$  entre o eixo e a geratriz, e  $\pi$  não passa pelo vértice, então a interseção contém pontos em apenas um dos lados do cone em relação ao vértice e a curva resultante é chamada de parábola.

Figura 9 – Seção formando uma parábola.



Fixados um pontos  $F$  e uma reta  $d$  um plano  $\pi$ , chamamos de **parábola** o conjunto dos pontos  $P \in \pi$  cuja distância ao ponto  $F$  e à reta  $d$  são iguais.

Figura 10 – Parábola

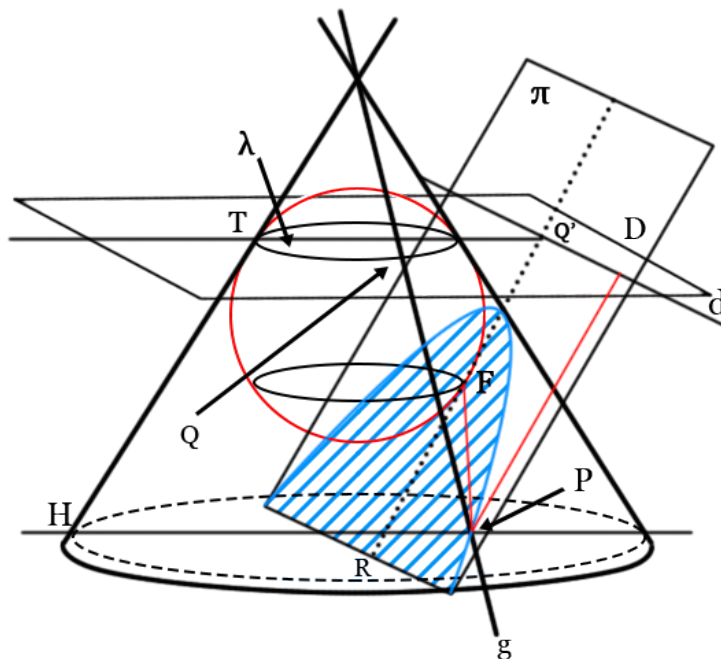


### 3.4.1 Teorema 3

Dado um cone e uma seção por um plano  $\pi$  de modo que  $\pi$  seja paralelo à uma geratriz (ângulo de incidência igual ou oposto ao ângulo de abertura do cone), a curva de interseção entre o plano e o cone é uma parábola.

**Demonstração:** Consideremos um cone, uma seção no cone por um plano  $\pi$  paralelo a alguma geratriz e uma esfera inscrita no cone que tangencia simultaneamente este plano.

Figura 11 – Foco da Parábola.



Seja ainda  $F$  a interseção de  $\pi$  com a esfera  $\lambda$ . Por um ponto  $P$  qualquer da interseção do cone com o plano  $\pi$  tracemos a geratriz que intersecta a esfera em  $Q$ . Temos que  $PF = PQ$ . Por outro lado, seja  $\sigma$  o plano que contém a interseção da esfera com o cone e  $\sigma'$  o plano paralelo a  $\sigma$  que contém  $P$ , logo temos uma reta  $d$  que é a interseção de  $\pi$  com  $\sigma$ . Temos então que quadriláteros  $HTQ'R$  e  $RQ'DP$  são paralelogramos, assim,  $HT = RQ' = PQ = PD$ , pois  $H$  e  $P$  pertencem a  $\sigma'$ , logo  $PF = PD$ .

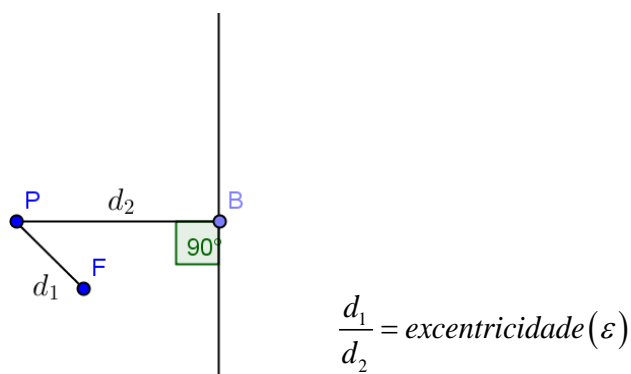
## 4. EXCENTRICIDADE NAS CÔNICAS

Normalmente, nos livros didáticos referentes ao ensino básico, quando é abordado o tema cônicas, somente são explorados as habilidades referentes à Geometria Analítica. Nessa abordagem, é usada uma definição de excentricidade como uma razão entre medidas estabelecidas nas cônicas  $e = \frac{c}{a}$ . O objetivo desse capítulo é apresentar uma abordagem geométrica do que é a excentricidade  $e$ , posteriormente, estabelecer a comunicação matemática entre essas abordagens.

### 4.1 Excentricidade

Podemos definir as cônicas através de um ponto fixo  $F$  e de uma reta fixa  $d$ . Uma cônica está bem definida como o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a  $F$  e a  $d$  mantêm uma razão constante. Esta razão entre essas distâncias é o que chamamos de excentricidade.

Figura 12 – Excentricidade.

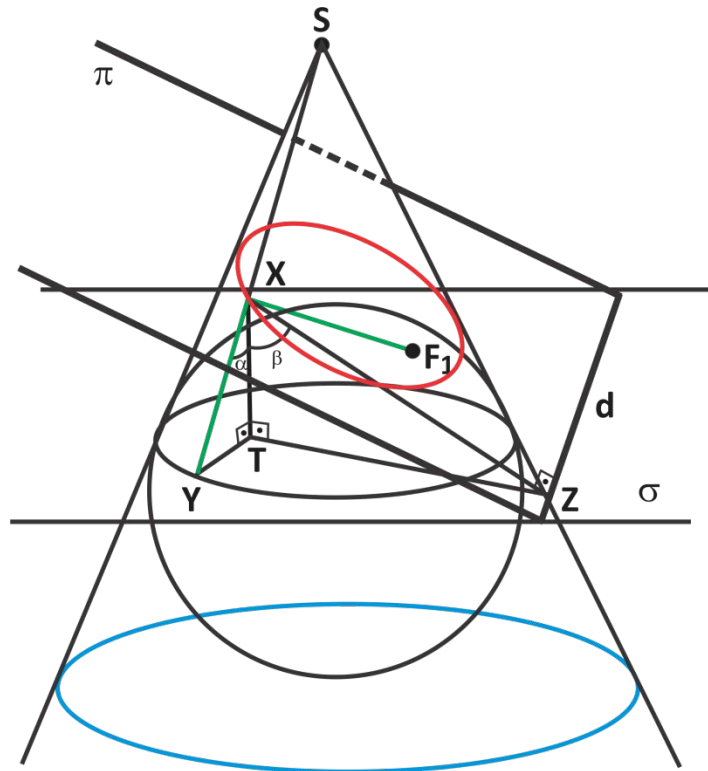


Observemos então como essa razão se dá nas seções cônicas.

Suponha um cone circular reto de vértice  $S$  e um plano  $\pi$  que o secciona obliquamente. Considere a esfera inscrita no cone e tangente a  $\pi$  no ponto  $F_1$ . Seja também um plano  $\sigma$  que contém os pontos de tangência entre a esfera o cone. Os planos  $\pi$  e  $\sigma$  se intersectam em uma reta  $d$ , como ilustra a figura.



Figura 13 – Excentricidade.



Traçando uma geratriz qualquer desse cone, notemos dois pontos importantes dessa geratriz:  $X \in \pi$  e  $Y \in \sigma$ . Baixando a perpendicular de  $X$  sobre o plano  $\sigma$ , determinamos dois triângulos retângulos  $XTZ$  e  $XTY$ , onde  $Z$  é o pé da perpendicular baixada de  $X$  sobre a reta  $d$ . Com  $\alpha = \angle TXY$  e  $\beta = \angle TXZ$ , temos que  $\cos \beta = \frac{XT}{XZ}$  e  $\cos \alpha = \frac{XY}{XZ}$ , logo,  $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{XY}{XZ}$ . Mas sabemos que  $XY = XF_1$ , pois ambos os segmentos são tangentes à esfera partindo de  $X$ , que  $\cos \alpha$  e  $\cos \beta$  são constantes pois  $\alpha$  é o ângulo do eixo do cone com uma geratriz e  $\beta$  é o ângulo entre os planos  $\pi$  e  $\sigma$ . Portanto,  $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{XY}{XZ} = \frac{XF_1}{XZ}$ , ou seja  $\frac{XF_1}{XZ} = \varepsilon$  é uma constante que se chama excentricidade.

Caso  $\varepsilon < 1$ , temos uma elipse; caso  $\varepsilon > 1$ , temos uma hipérbole e caso  $\varepsilon = 1$ , temos uma parábola. Portanto, consideramos a excentricidade como um parâmetro associado a curvas cônicas que mede seu desvio em relação a uma circunferência. Esse número determina a forma da cônica.

Chamaremos esse ponto fixo  $F$  de Foco e a reta  $d$  de diretriz, dessa maneira a partir de um foco e uma reta diretriz definimos uma cônica.

#### 4.1.1 Teorema 4

Seja uma cônica  $\xi$  gerada pela interseção de um plano  $\pi_1$  com um cone circular reto. Sejam os focos  $F_1$  e  $F_2$  interseções das esferas com  $\pi_1$ , os pontos  $A_1$  e  $A_2$  os vértices de  $\xi$ , onde  $A_1A_2 = 2a$  e  $F_1F_2 = 2c$ . Sejam ainda  $\delta_1$  a circunferência de interseção entre o cone e a esfera,  $\pi_2$  o plano que contém  $\delta_1$  e os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\theta$  entre a geratriz e o eixo do cone, entre  $\pi_1$  e o eixo do cone e entre  $\pi_2$  e  $\pi_1$  respectivamente.

A excentricidade da cônica é dada pela razão  $e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$ , logo  $e = \frac{c}{a}$ .

**Demonstração:** Seja  $\xi$  uma elipse, o plano  $\pi_3 \parallel \pi_2$  e que passa por  $A_1$ , gerando  $\delta_2$  a circunferência de interseção entre o cone e  $\pi_3$ . Sejam ainda  $A \in \delta_2$  diametralmente oposto a  $A_1$  e  $E_1E_2 \in \delta_1$  diametralmente opostos, como sugere a figura abaixo.

Figura 14 – Excentricidade na elipse.

Figura 15 – Seção no cone que gera uma elipse.

É fácil ver que  $A_1F_1 = A_2F_2 = A_1E_1 = AE_2$ , pois estes segmentos são tangentes à esfera e  $OA_1 = OA_2 = a$  e  $OF_1 = OF_2 = c$  e  $M$  é o centro de  $\delta_2$ . Temos ainda que  $A_2E_2 = A_2F_1$  e assim  $AA_2 = A_2E_2 - AE_2 = A_2F_1 - A_1F_1 = A_2F_1 - A_2F_2 = F_1F_2 = 2c$ . Logo,  $OM = c$  pois  $OM$  é base

média do triângulo  $AA_1A_2$ . Portanto  $e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{\frac{OB}{OA_1}}{\frac{OB}{OM}} = \frac{OM}{OA_1} = \frac{c}{a}$ .

De modo análogo, se  $\xi$  é uma hipérbole, temos a seguinte ilustração.

Figura 16 – Excentricidade na hipérbole.

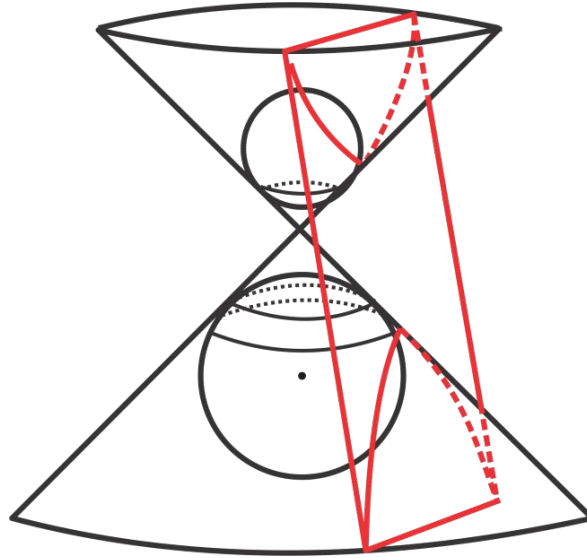
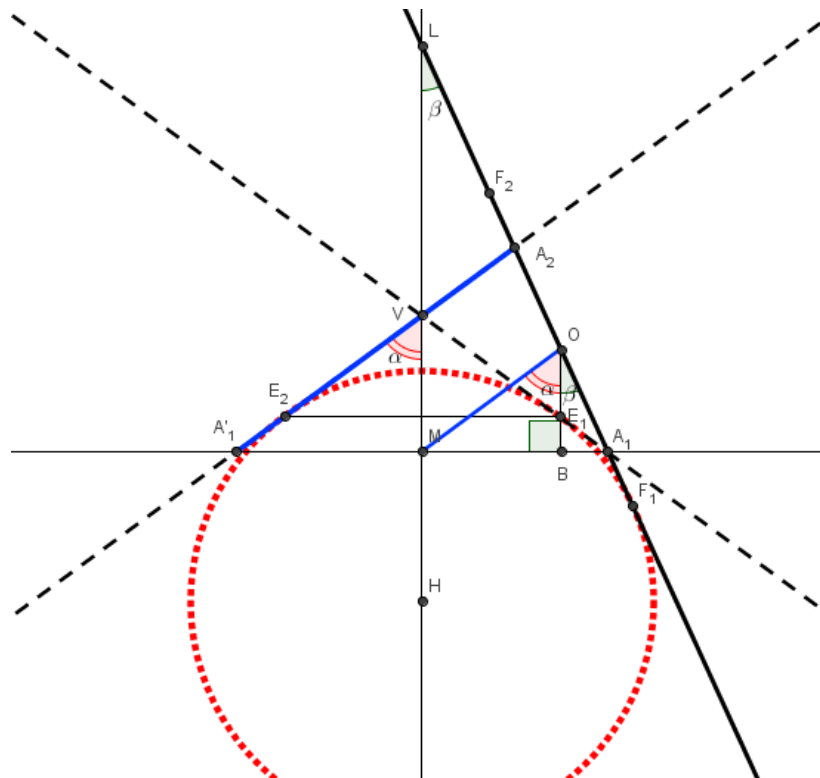


Figura 17 – Seção no cone que gera uma hipérbole.



Assim  $A_1F_1 = A_2F_2 = A_1E_1 = A'_1E_2$ ,  $OA_1 = OA_2 = a$ ,  $OF_1 = OF_2 = c$  e  $M$  é o centro de  $\delta_2$ . Temos ainda que  $A_2E_2 = A_2F_1$  e  $A'_1A_2 = A_2E_2 + A'_1E_2 = A_2F_1 + A_1F_1 = A_2F_1 + A_2F_2 = F_1F_2 = 2c$ , assim  $OM = c$  pois  $OM$  é base média do triângulo  $A'_1A_1A_2$ , como ilustra a figura e

$$e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{\frac{OB}{OA_1}}{\frac{OB}{OM}} = \frac{OM}{OA_1} = \frac{c}{a}. \quad \square$$

Fazendo a construção do exposto acima no Geogebra, podemos utilizar uma ferramenta chamada CRIAR VISTA 2D DO PLANO, que ao construir os elementos citados no teorema e o plano que determina a seção meridiana, clique sobre o plano com o botão direito do mouse e em seguida em CRIAR VISTA 2D. Abrirá ao lado da janela 3D uma nova janela somente com os elementos pertencentes ao plano. Abaixo seguem as figuras relativas às construções feitas no Geogebra 3D acerca do teorema.

Figura 18 – Excentricidade da elipse no Geogebra

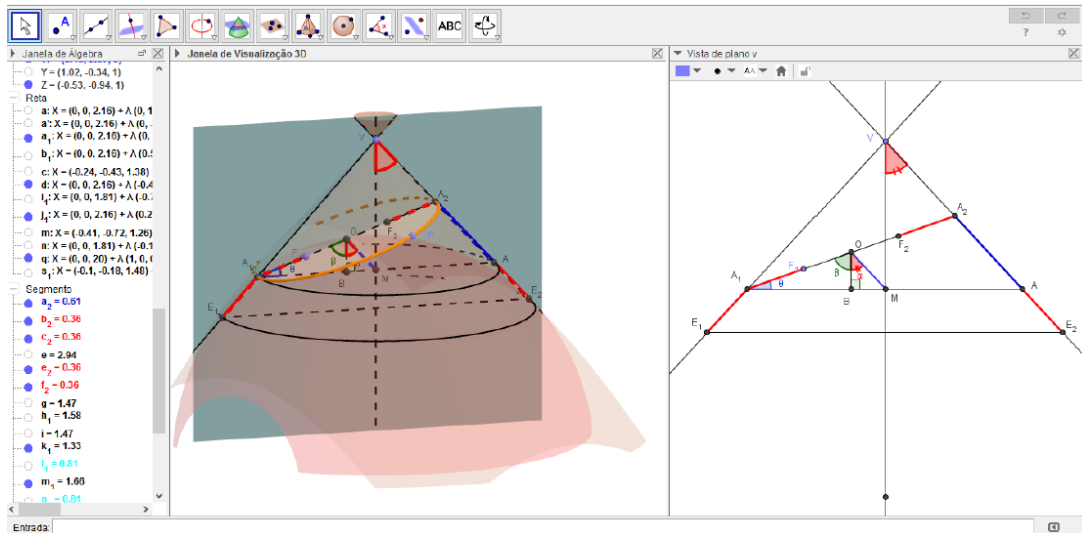
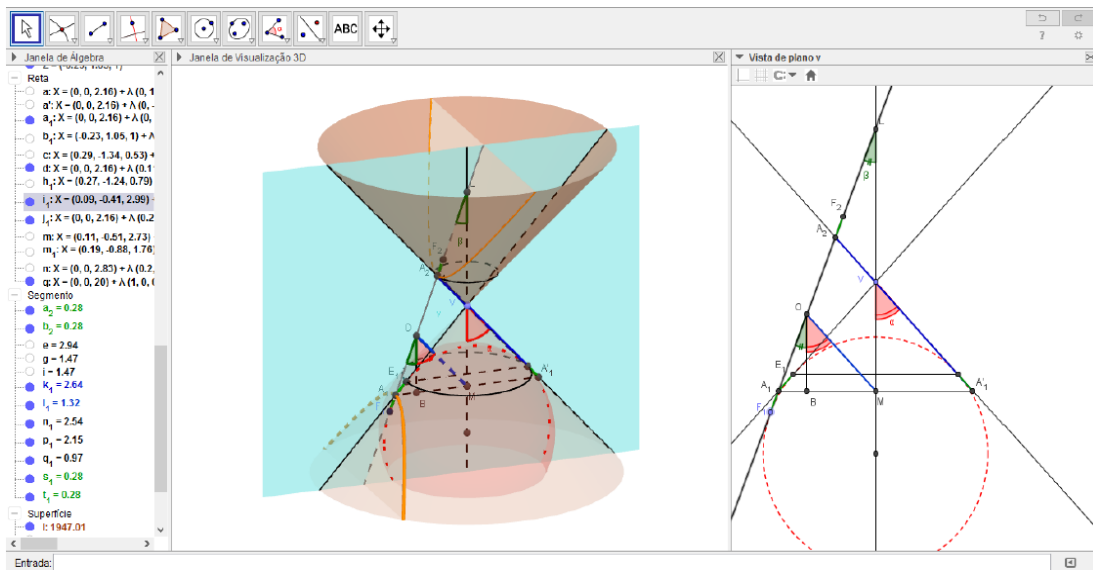


Figura 19 – Excentricidade da hipérbole no Geogebra.



## 4.2 Retas diretrizes

Chamamos de **retas diretrizes** as retas de interseção entre o plano que origina a cônica e os planos definidos pela interseção das esferas com o cone.

Sejam  $F_1$  e  $F_2$  os focos,  $P$  um ponto da cônica,  $Z_1$  e  $Z_2$  os pés das distâncias de  $P$  às retas diretrizes. Assim, seja  $d$  a distância do centro da cônica à reta diretriz, observe a ilustração a seguir das retas diretrizes de uma elipse.

Figura 20 – Diretrizes na elipse.

Figura 21 – Seção com as diretrizes da elipse.

Como a excentricidade é a razão entre as distâncias de  $P$  ao foco e à reta diretriz, teremos na elipse,  $e = \frac{PF_1}{PZ_1} = \frac{PF_2}{PZ_2} = \frac{PF_1+PF_2}{PZ_1+PZ_2} = \frac{2a}{2d} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow d = \frac{a^2}{c}$ .

Observe agora a ilustração das retas diretrizes de uma hipérbole.

Figura 22 – Diretrizes na hipérbole.

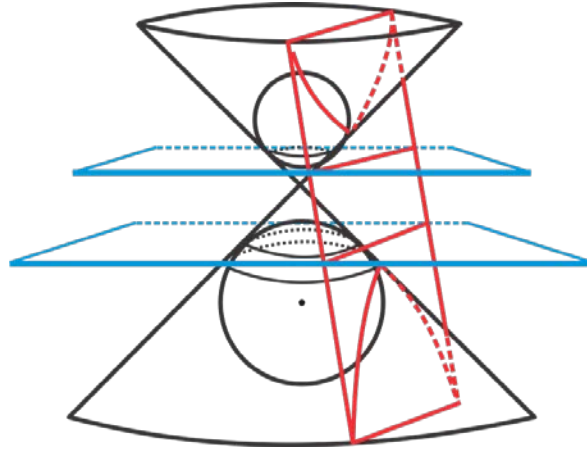
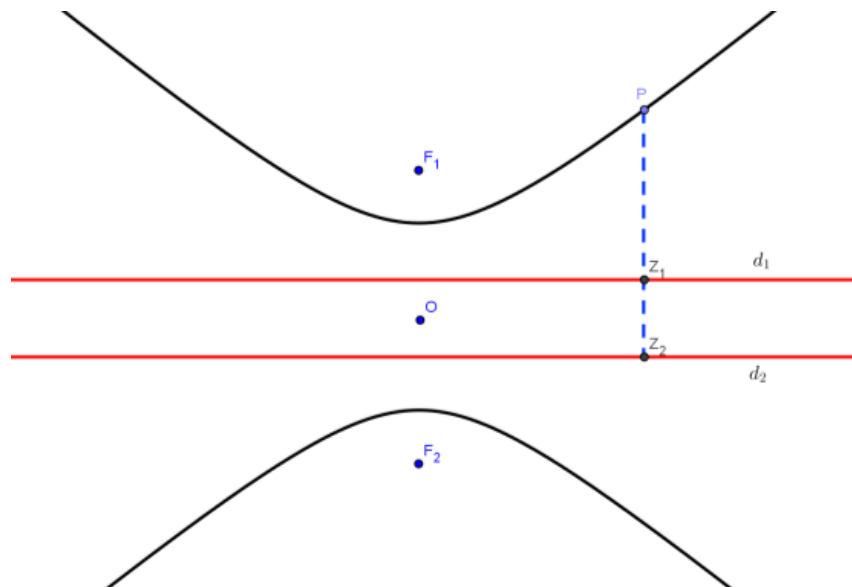


Figura 23 – Seção das Diretrizes com a Hipérbole



De modo análogo, na hipérbole obtemos  $e = \frac{PF_1}{PZ_1} = \frac{PF_2}{PZ_2} = \frac{|PF_1 - PF_2|}{|PZ_1 - PZ_2|} = \frac{2a}{2d} = \frac{c}{a}$

$$\Leftrightarrow d = \frac{a^2}{c}.$$

Usando novamente a ferramenta, no Geogebra 3D, CRIAR VISTA 2D podemos obter as construções ilustradas a seguir:

Figura 24 – Diretrizes da elipse no Geogebra.

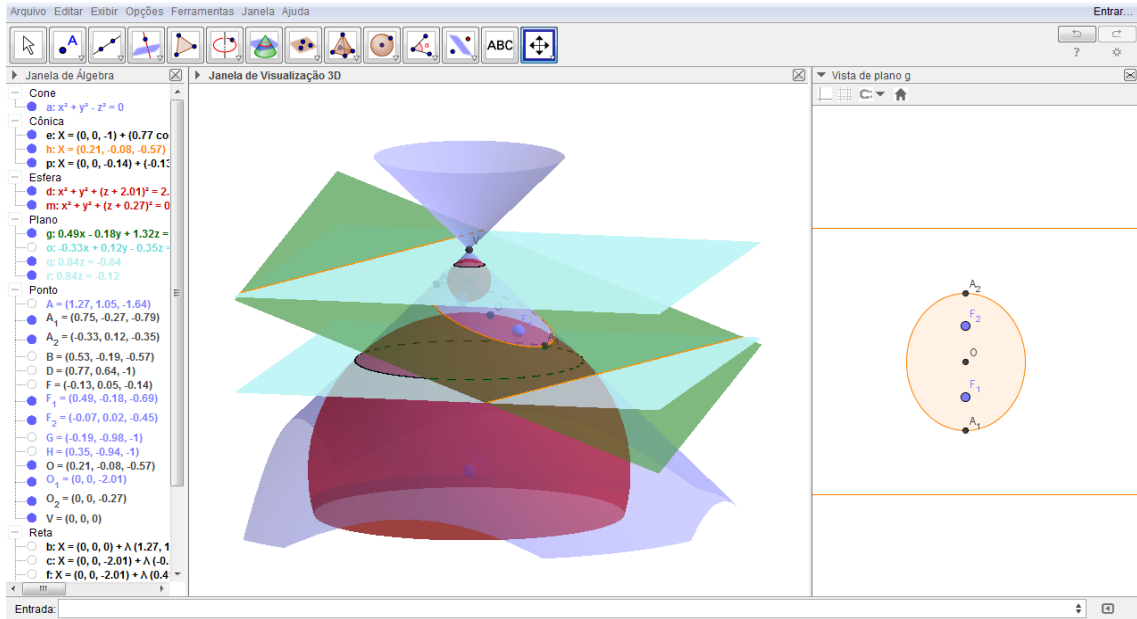
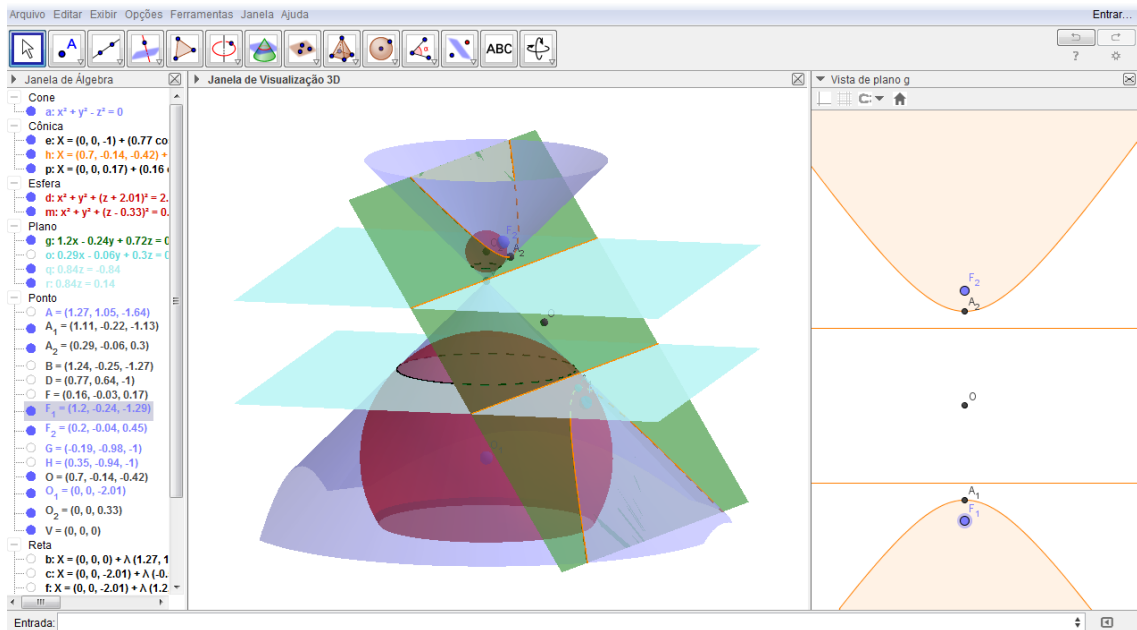


Figura 25 – Diretrizes da hipérbole no Geogebra.





## 5. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS CÔNICAS

Esse capítulo tem por objetivo enunciar e demonstrar alguns teoremas que exploram propriedades geométricas das seções cônicas. Posteriormente, sugerimos uma construção no Geogebra para uma abordagem no ensino de Cônicas.

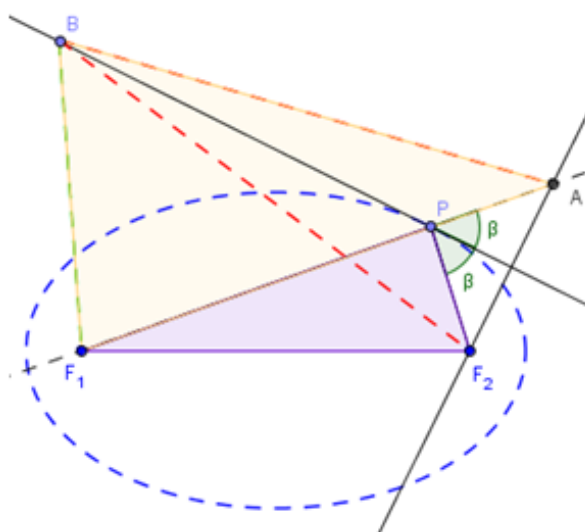
### 5.1 Teorema das tangentes

Uma das propriedades geométricas mais importantes quando falamos em Cônicas é em relação às retas tangentes. Veremos adiante os teoremas sobre as retas tangentes à essas curvas.

#### 5.1.1 Teorema 5

Seja uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ ,  $P$  um ponto dessa cônica. Tomando o triângulo  $PF_1F_2$ , a bissetriz externa do ângulo  $P$  é tangente à elipse.

Figura 26 – Teorema das tangentes na elipse.



**Demonstração:** Tomemos um ponto  $P$  qualquer da Elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ . Seja  $t$  a bissetriz externa do ângulo  $P$  do triângulo  $PF_1F_2$ . Queremos provar que  $t$  é tangente à elipse.

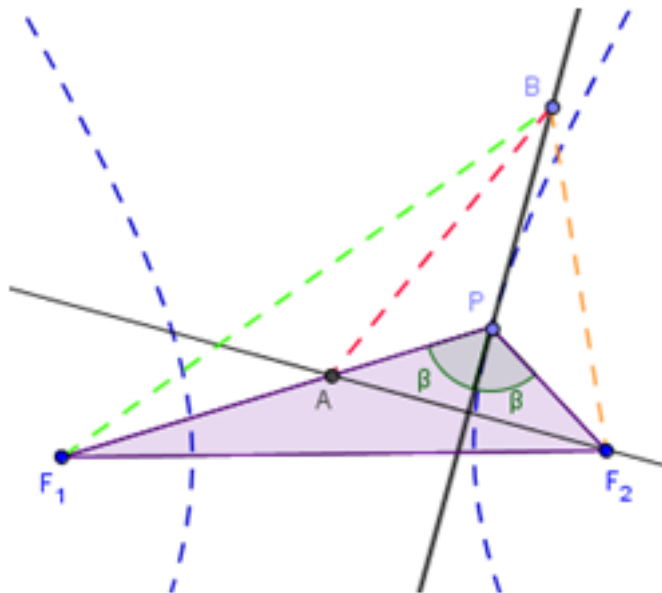
Tomemos o ponto  $A$ , simétrico de  $F_2$  em relação à bissetriz externa de  $P$ , como na fig.16. Note que  $A$  está na reta  $PF_1$ , pois o triângulo  $PF_2A$  é isósceles, logo  $t$  é mediatriz de  $F_2A$ ,  $PF_2 = PA$  e  $PF_1 + PF_2 = F_1A = 2a$ . Tomando um ponto  $B$  qualquer em  $t$ , observe que  $BA = BF_2$ , então  $BF_1 + BF_2 = BF_1 + BA > F_1A = 2a$ , desta forma temos que  $B$  é exterior à elipse então  $P$  é único como queríamos demonstrar.

Chamaremos de **Circunferência Focal** a circunferência cujo centro é um foco e o raio é o eixo maior da elipse. Concluimos do teorema anterior que a circunferência focal do foco  $F$  é o lugar geométrico dos pontos simétricos de  $F$  em relação às retas tangentes à elipse.

### 5.1.2 Teorema 6

Seja uma hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$ ,  $P$  um ponto dessa cônica. Tomando o triângulo  $PF_1F_2$ , a bissetriz interna do ângulo  $P$  é tangente à hipérbole.

Figura 27 – Teorema das tangentes na hipérbole.



**Demonstração:** Tomemos um ponto  $P$  qualquer da hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$ . Seja  $t$  a bissetriz interna do ângulo  $P$  do triângulo  $PF_1F_2$ . Queremos provar que  $t$  é tangente à hipérbole.

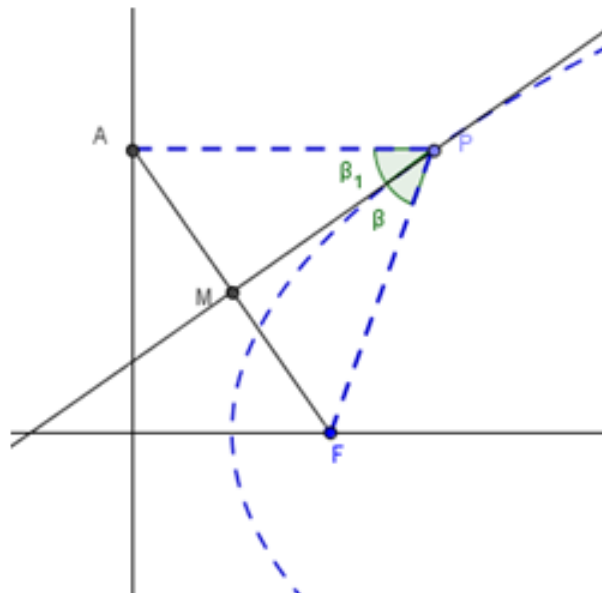
Tomemos o ponto  $A$ , simétrico de  $F_2$  em relação à bissetriz interna de  $P$ , como na fig.17. Note que  $A$  está na reta  $PF_1$ , pois o triângulo  $PF_2A$  é isósceles, logo  $t$  é mediatriz de  $F_2A$ ,  $PF_2 = PA$  e  $|PF_1 - PF_2| = |PF_1 - PA| = 2a$ . Tomando um ponto  $B$  qualquer em  $t$ , observe que  $BA = BF_2$ , então  $|BF_1 - BF_2| = |BF_1 - BA| > F_1A = 2a$ , desta forma temos que  $B$  é exterior à hipérbole, logo  $P$  é único, como queríamos demonstrar.

## 5.2 Teorema das tangentes na parábola

### 5.2.1 Lema 1

O ponto simétrico do foco da parábola em relação à bissetriz do ângulo  $APF$  é um ponto sobre a reta diretriz.

Figura 28 – Teorema das tangentes na parábola.

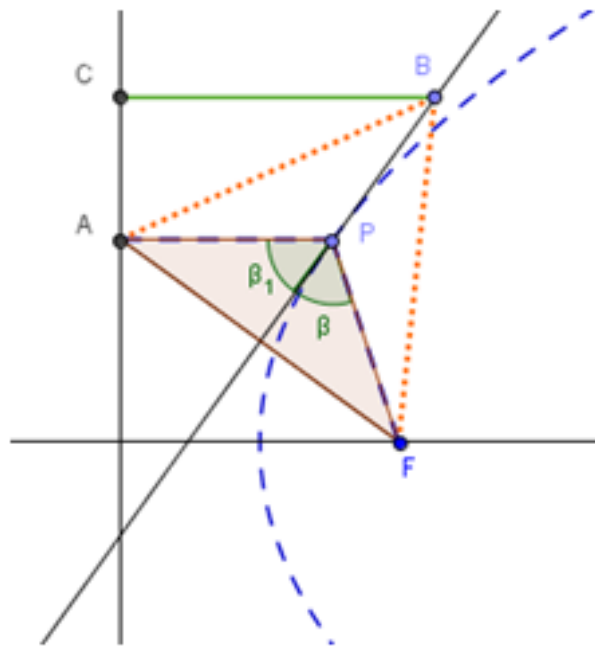


**Demonstração:** Seja  $P$  um ponto qualquer da parábola e  $A$  sua projeção ortogonal sobre a reta diretriz como na figura acima. Temos que  $PF = PA$ , e observando a bissetriz de  $APF$  note que esta é também mediatriz de  $AF$ , pois o triângulo  $APF$  é isósceles. Desta forma  $M$  é ponto médio de  $AF$  e concluímos que  $A$  é simétrico de  $F$  em relação à bissetriz de  $P$  do triângulo  $PAF$ .

### 5.2.2 Teorema 7

Seja uma parábola de focos  $F$  e reta diretriz  $d$ . Considere um ponto  $P$  dessa parábola e  $A$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre  $d$ . Tomando o triângulo  $PAF$ , a bissetriz interna do ângulo  $P$  é tangente à parábola.

Figura 29 – Simetria do foco em relação a tangente.



Tomemos um ponto  $P$  qualquer da parábola de foco  $F$  e diretriz  $r$ . Seja  $t$  a bissetriz interna do ângulo  $P$  do triângulo  $PAF$ , vale ressaltar que  $A$  é o ponto simétrico de  $F$  em relação a reta  $t$  e este ponto está sobre a diretriz. Queremos provar que  $t$  é tangente à parábola. Tomando um ponto  $B$  qualquer em  $t$ , temos que  $BA = BF$  e tomando o ponto  $C$  projeção ortogonal de  $B$  na reta diretriz temos que  $BA > BC$ , então  $BF = BA > BC$ , desta forma temos que  $B$  é exterior à parábola. Então  $P$  é único como queríamos demonstrar.

### 5.3 Teorema de La Hire

De acordo com Miguel (Hipertexto, 2004), Philippe de la Hire [27 de fevereiro, 1606 - 28 de dezembro de 1656] foi educado como um artista em Paris e tornou-se hábil em desenho e pintura. Embora ele não tenha recebido nenhuma educação formal em escola ou universidade, tornou-se um grande estudioso da área, já que seu pai, matemático, esperara que o filho seguisse sua profissão e treinou-o em conformidade. La Hire tinha dezesseis anos quando seu pai morreu e, naquela época, estava totalmente comprometido com a vida como artista.

Figura 30 – Philippe de la Hire.



Fonte: [http://www.1st-art-gallery.com/\(after\)-De-La-Hire,-Philippe/Self-Portrait-Of-Philippe-De-La-Hire-1640-1718.html](http://www.1st-art-gallery.com/(after)-De-La-Hire,-Philippe/Self-Portrait-Of-Philippe-De-La-Hire-1640-1718.html) Acesso em: 08/03/2016

Há relatos de que La Hire, conforme Dubois (Hipertexto, 2011) partiu para Veneza em 1660 e lá passou quatro anos desenvolvendo suas habilidades artísticas e aprendizagem de geometria. O interesse em geometria devido a seus estudos de perspectiva na arte, e logo considerou que suas aulas de matemática eram mais agradáveis do que as classe de pintura. Em 1678 La Hire foi eleito para a *Académie des Sciences*. Apesar de seus interesses em toda uma gama de disciplinas científicas, permaneceu fascinado pela geometria. Em 1685, ele publicou um trabalho abrangente sobre seções cônicas.

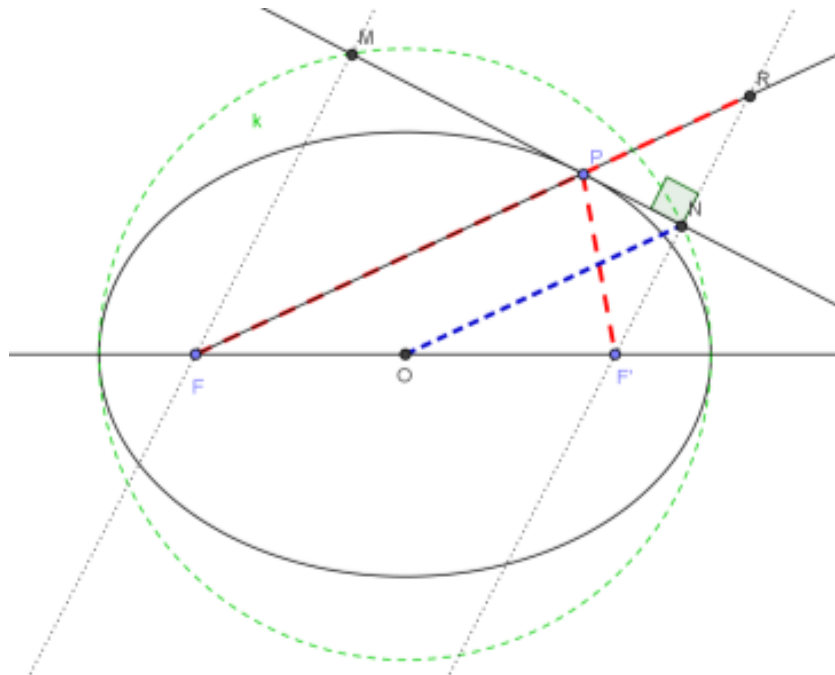
Tomando agora a definição de Circunferência principal da elipse como a circunferência cujo centro coincide com o da cônica e o seu raio vale  $a$ , o Teorema de La Hire diz que as projeções ortogonais dos focos na reta tangente pertencem à circunferência principal. Vejamos as demonstrações abaixo.

### 5.3.1 Teorema 8

Sejam  $M$  e  $N$  as projeções dos focos  $F$  e  $F'$ , de uma elipse, em relação à reta  $t$ , tangente à elipse no ponto  $P$ . Os pontos  $M$  e  $N$  pertencem à circunferência principal. (**O teorema de La Hire na elipse**)

**Demonstração:** Tomemos o ponto  $R$  simétrico a  $F'$  em relação à tangente  $t$ . O ponto  $N$ , médio de  $F'R$  é a projeção de  $F'$  em  $r$ . Pelo teorema das tangentes, temos que  $r$  é mediatriz de  $F'R$ , então  $PF' = PR$  e  $PF + PF' = 2a$ . Temos então que  $ON$  é base média do triângulo  $FF'R$  e, portanto  $ON = a$ . A demonstração para o ponto  $M$  é análoga.

Figura 31 – Teorema de La Hire na elipse.

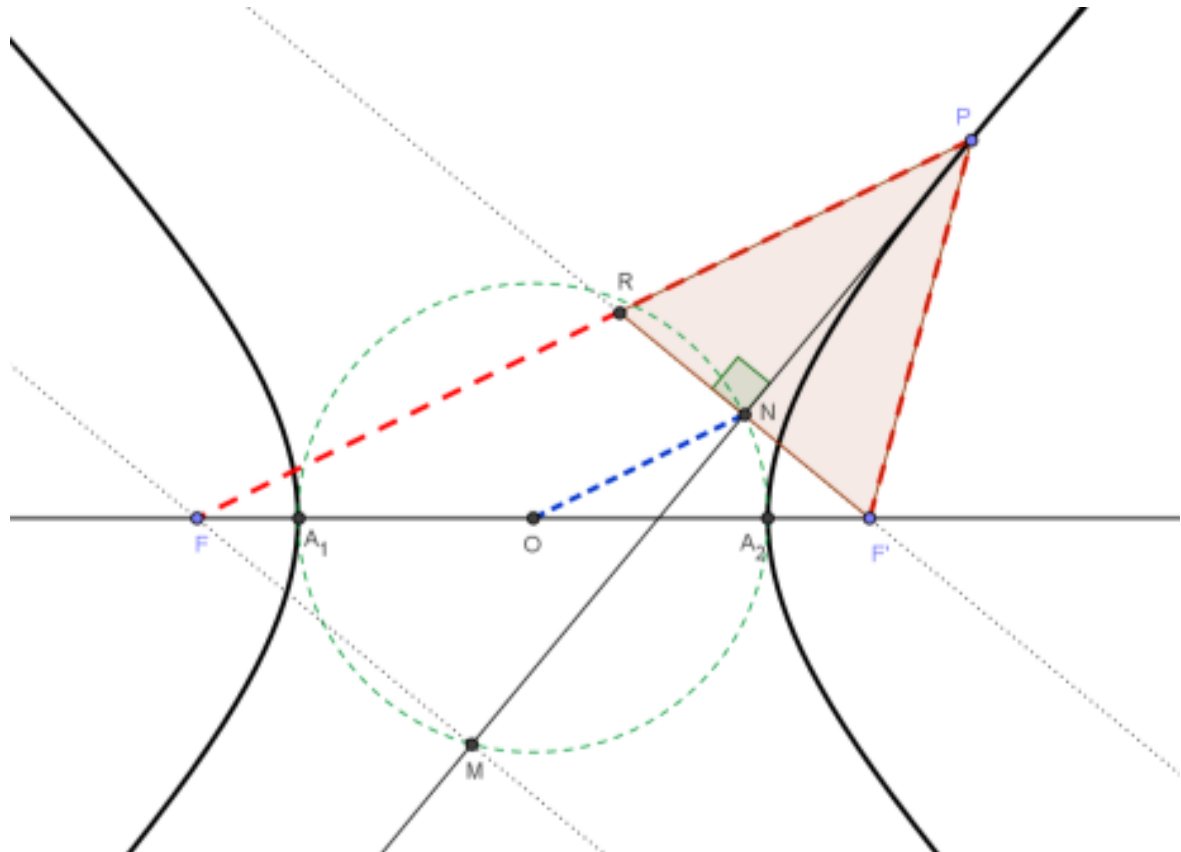


### 5.3.2 Teorema 9

Sejam  $M$  e  $N$  as projeções dos focos  $F$  e  $F'$ , de uma hipérbole, em relação à reta  $t$ , tangente à hipérbole no ponto  $P$ . Os pontos  $M$  e  $N$  pertencem à circunferência principal. **(Teorema de La Hire na Hipérbole)**

**Demonstração:** Tomemos o ponto  $R$  simétrico a  $F'$  em relação à tangente  $t$ . O ponto  $N$ , médio de  $F'R$  é a projeção de  $F'$  em  $t$ . Pelo teorema das tangentes, temos que  $t$  é mediatriz de  $F'R$ , então  $PF' = PR$  e  $PF - PF' = FR = 2a$ . Temos então que  $ON$  é base média do triângulo  $FF'R$  e, portanto  $ON = a$ . A demonstração para o ponto  $M$  é análoga.

Figura 32 – Teorema de La Hire na hipérbole.



#### 5.4 Teorema de Poncelet

Segundo Oliveira (2012), Jean-Victor Poncelet nasceu em 01 de julho de 1788, em Metz, Lorraine, França. Formou-se na École Polytechnique em 1810, e ingressou na carreira militar em 1812, ano em que se formou como tenente. Assim, foi chamado a participar na campanha da Rússia de Napoleão, onde se juntou ao exército de 600.000 homens de Napoleão. Contudo, foi detido e preso de março 1813 a junho de 1814, quando ele retornou para a França.

Figura 33 – Jean-Victor Poncelet.



Fonte: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jean-Victor\\_Poncelet.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jean-Victor_Poncelet.jpg). Acesso em: 07/03/2016

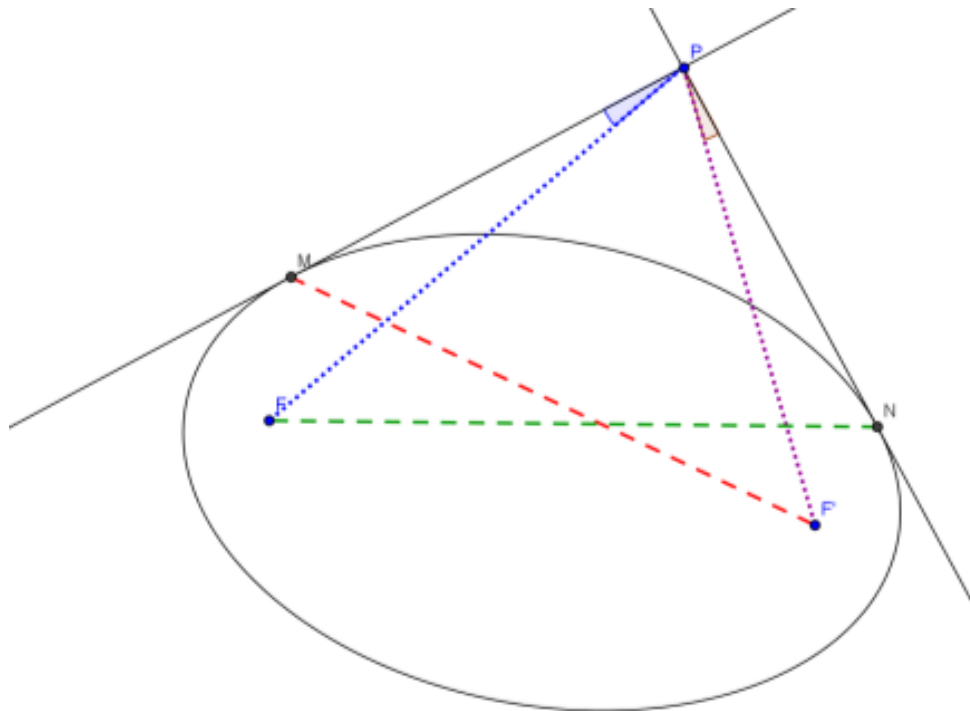
Durante sua prisão, ele lembrou os princípios fundamentais da geometria e passou a desenvolver propriedades de cônicas. Até 1825, supervisionou a construção de máquinas no arsenal em Metz e mecânica de ensino no colégio militar. Após isso, várias de suas ideias foram publicadas, o que lhe rendera um prêmio do governo francês. Então, em 1835, tornou-se professor de Mecânica na Universidade de Sorbonne e, em 1848, tornou-se diretor da École Polytechnique. Além do mais, Poncelet publicou muitos artigos sobre geometria e mecânica, particularmente, em Anais de Matemática.



### 5.4.1 Teorema 10

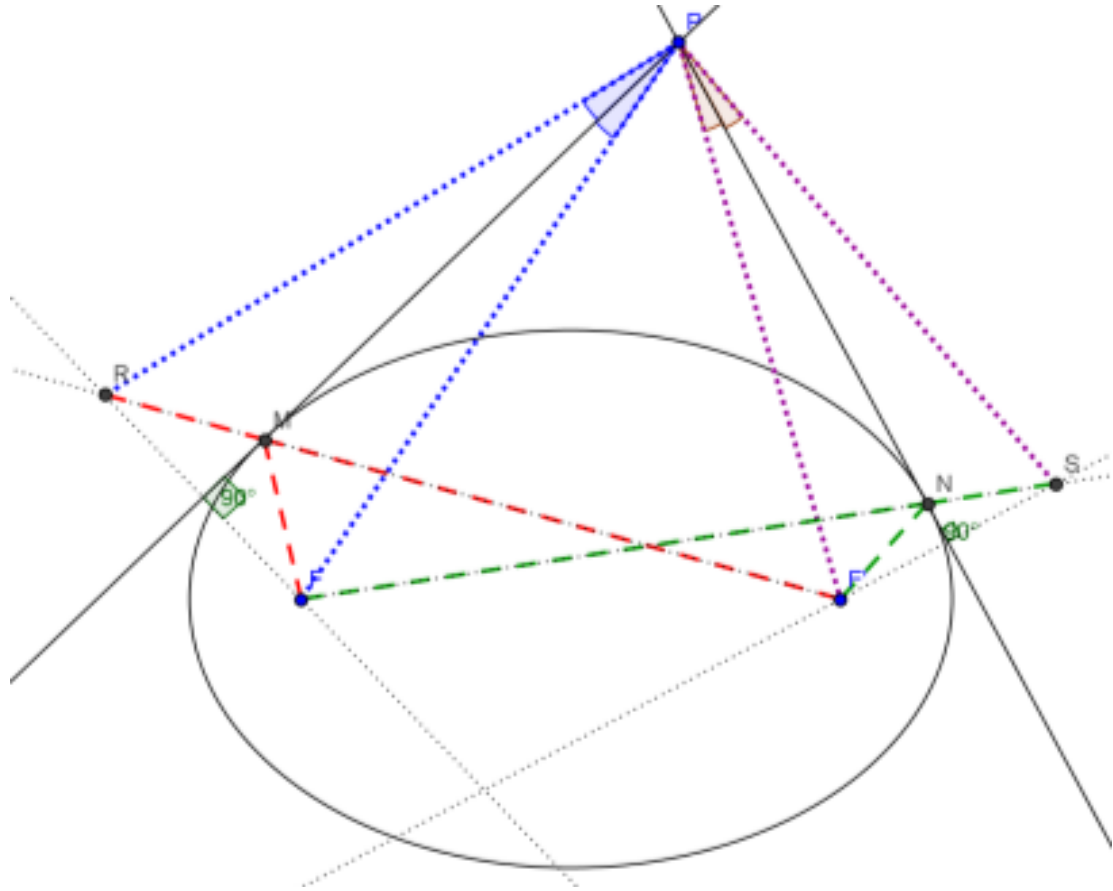
Dada uma elipse de focos  $F$  e  $F'$  e duas retas  $r$  e  $s$  tangentes à elipse nos pontos  $M$  e  $N$  respectivamente. Temos então que os ângulos  $\sphericalangle MPF$  e  $\sphericalangle NPF'$  são congruentes. (Teorema de Poncelet nas elipses)

Figura 34 – Teorema de Poncelet na elipse.



**Demonstração:** Tomemos o ponto  $R$ , simétrico de  $F$  em relação à reta tangente  $r$ . Observemos que  $R$  pertence à reta  $MF'$ , pois a reta  $r$  é bissetriz externa do ângulo  $M$  do triângulo  $MFF'$ . Logo  $MF = MR$  e  $PF = PR$ , com a reta  $r$  mediatriz do segmento  $FR$ . Seja  $S$ , simétrico de  $F'$  em relação à reta tangente  $s$ . Analogamente,  $F'N = NS$  e  $PF' = PS$ . Temos então que  $MF + MF' = RF' = 2a$  e  $NF + NF' = FS = 2a$ . Logo temos que os triângulos  $PRF'$  e  $PSF$  são congruentes pelo caso LLL e, portanto  $\sphericalangle RPF' = \sphericalangle SPF'$  e  $\sphericalangle MPF = \sphericalangle NPF'$ .

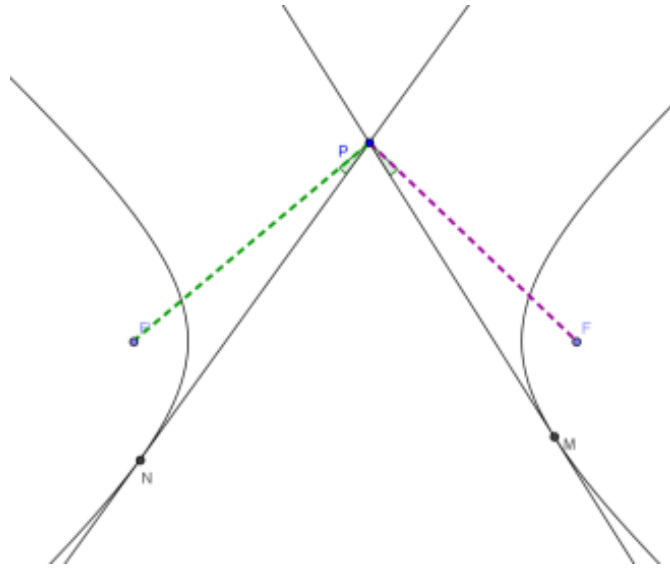
Figura 35 – Demonstração do teorema de Poncelet.



#### 5.4.2 Teorema 11

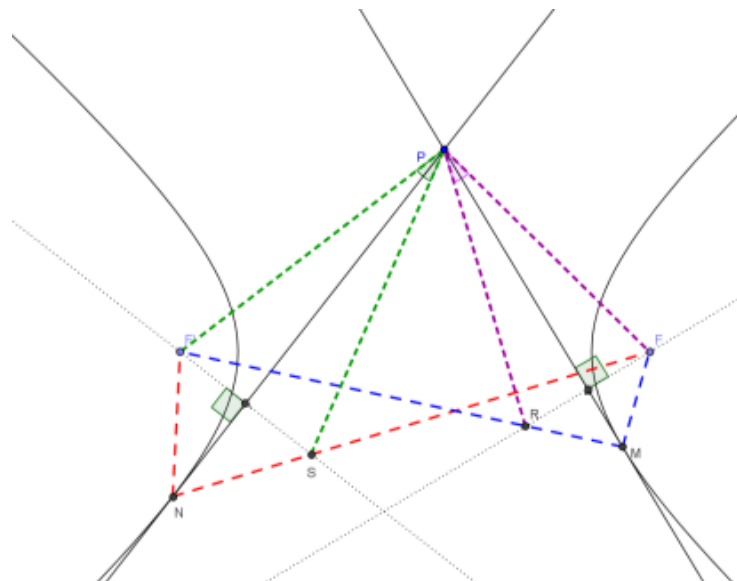
Dada uma hipérbole de focos  $F$  e  $F'$  e duas retas  $r$  e  $s$  tangentes à hipérbole nos pontos  $M$  e  $N$  respectivamente. Temos então que os ângulos  $\sphericalangle MPF$  e  $\sphericalangle NPF'$  são congruentes. (Teorema de Poncelet na Hipérbole)

Figura 36 – Teorema de Poncelet na hipérbole.



**Demonstração:** Tomemos o ponto R, simétrico de F em relação à reta tangente r. Observemos que R pertence à reta MF', pois a reta r é bissetriz interna do ângulo M do triângulo MFF'. Logo  $MF = MR$  e  $PF = PR$ , com a reta r mediatriz do segmento FR. Seja S, simétrico de F' em relação à reta tangente s. Analogamente,  $F'N = NS$  e  $PF' = PS$ . Temos então que  $MF' - MF = RF' = 2a$  e  $NF' - NF = FS = 2$ . Logo temos que os triângulos PRF' e PSF são congruentes pelo caso LLL e portanto  $\sphericalangle RPF = \sphericalangle SPF'$  e  $\sphericalangle MPF = \sphericalangle NPF'$ .

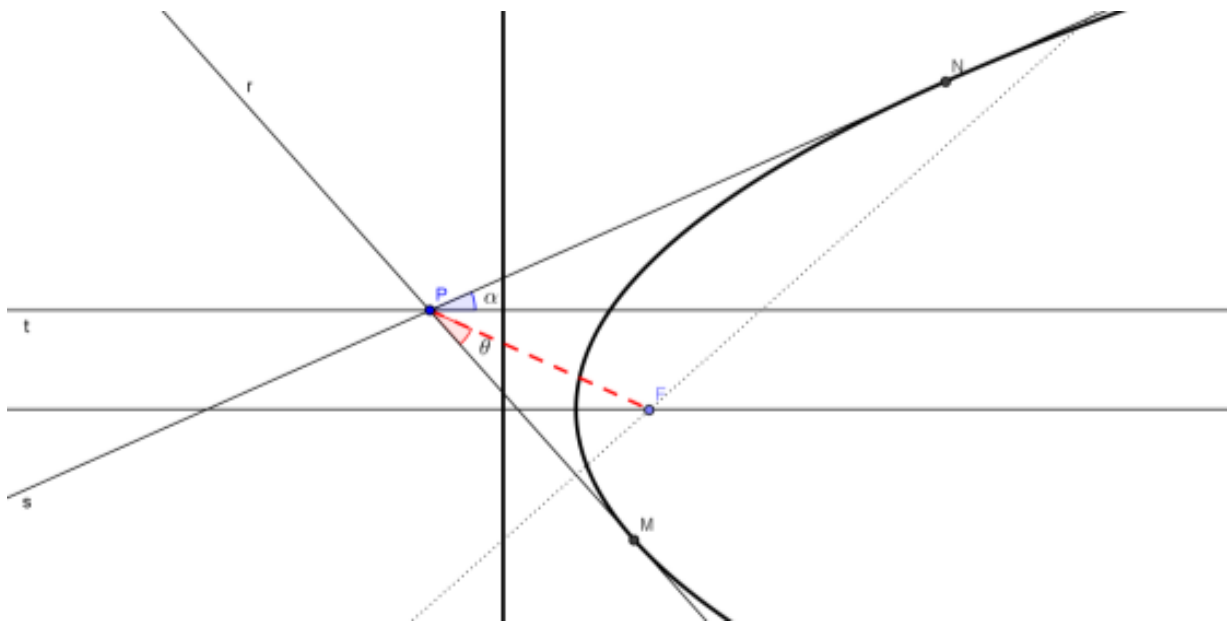
Figura 37 – Demonstração do teorema de Poncelet.



### 5.4.3 Teorema 12

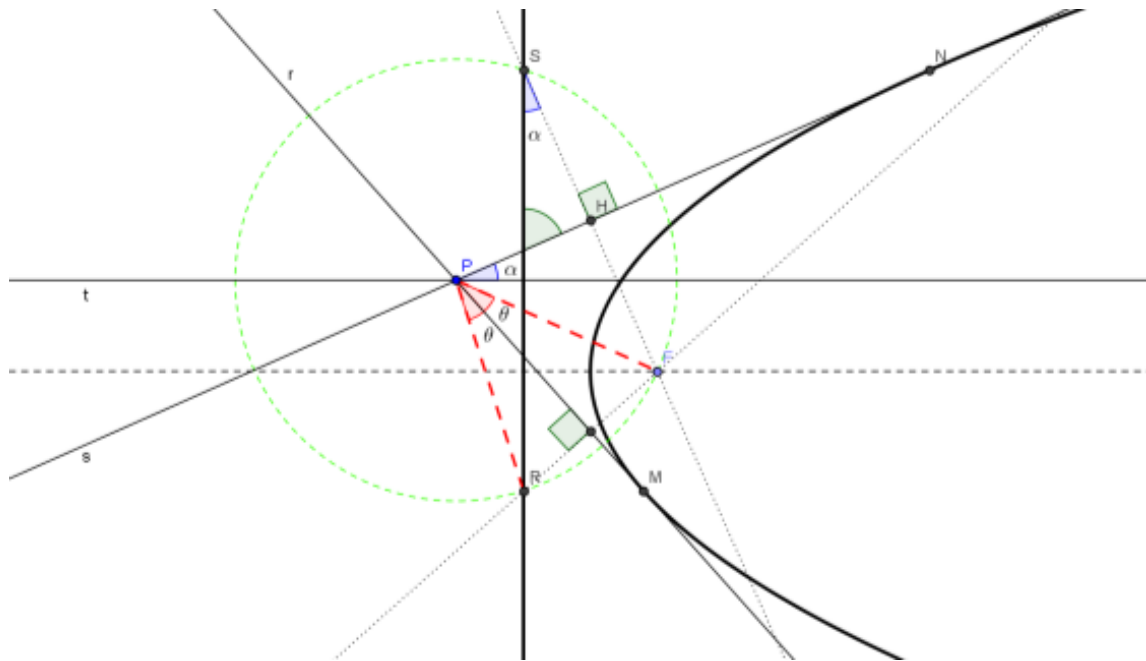
Sejam as retas  $r$  e  $s$  tangentes a uma parábola nos pontos  $M$  e  $N$  respectivamente a partir de um ponto  $P$ . Tracemos por  $P$  uma reta  $t$ , paralela ao eixo, formando um ângulo  $\alpha$  com  $s$ . Seja ainda  $\angle FPM = \theta$ . Temos que os ângulos  $\alpha$  e  $\theta$  são congruentes. (**Teorema de Poncelet nas Parábolas**)

Figura 38 – Teorema de Poncelet na parábola.



**Demonstração:** É sabido que o simétrico do foco em relação à reta tangente na parábola pertence à reta diretriz. Sejam os pontos  $R$  e  $S$  simétricos do foco  $F$  em relação às retas  $r$  e  $s$  respectivamente. Temos então que as retas  $r$  e  $s$  são mediatrizes de  $RF$  e  $SF$  respectivamente. Logo  $P$  é o circuncentro do triângulo  $FSR$  e o ângulo  $\angle FSR = \alpha = \theta$ , pois  $\angle FSR$  é inscrito no círculo e enxerga o mesmo arco cujo ângulo central é  $2\alpha$ .

Figura 39 – Demonstração do teorema de Poncelet.



## 6. CONSTRUINDO UMA ELIPSE INSCRITA EM UM TRIÂNGULO

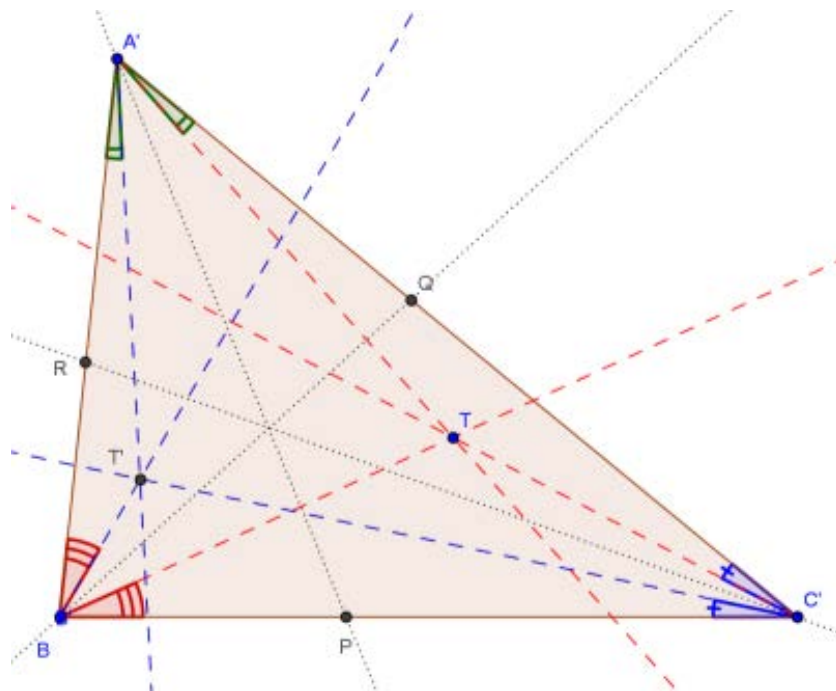
O objetivo deste capítulo é procedimentar a construção de uma elipse tangente a uma circunferência. Para isso, apresentamos o conceito de Conjugados Isogonais.

### 6.1 Conjugados Isogonais

**Definição:** Dado um triângulo  $ABC$ , o conjugado isogonal de um ponto  $T$  em relação a  $ABC$  é obtido refletindo as retas  $TA$ ,  $TB$  e  $TC$  em relação às bissetrizes internas de  $ABC$  que passam por  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. As retas refletidas são concorrentes no ponto  $T'$ , que chamamos de par conjugado isogonal de  $T$ .

Na figura a seguir,  $AP$ ,  $BQ$  e  $CR$  são bissetrizes e  $T$  um ponto qualquer e  $T'$  seu isogonal.

Figura 40 – Conjugados isogonais.



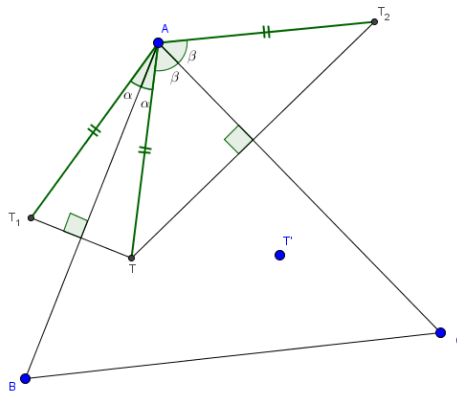
Dessa maneira, conhecendo o teorema de Poncelet, podemos pensar se é possível construir uma elipse inscrita em  $ABC$  com os focos em  $T$  e  $T'$ .

### 6.1.1 Teorema 13

Seja  $ABC$  um triângulo, com  $T$  um ponto interior a esse triângulo. Tomemos  $T_1$  e  $T_2$  os pontos simétricos a  $T$  em relação aos lados  $AB$  e  $AC$  respectivamente. Os segmentos  $AT_1$  e  $AT_2$  são congruentes.

**Demonstração:** Se  $T_1$  é simétrico de  $T$  em relação à  $AB$ , temos que  $AB$  é mediatriz de  $TT_1$ , ou seja,  $AT = AT_1$ . Da mesma maneira,  $T_2$  é simétrico de  $T$  em relação à  $AC$ , assim  $AT = AT_2$ . Portanto, temos que  $AT_2 = AT_1$ .

Figura 41 – Propriedades Conjugados isogonais

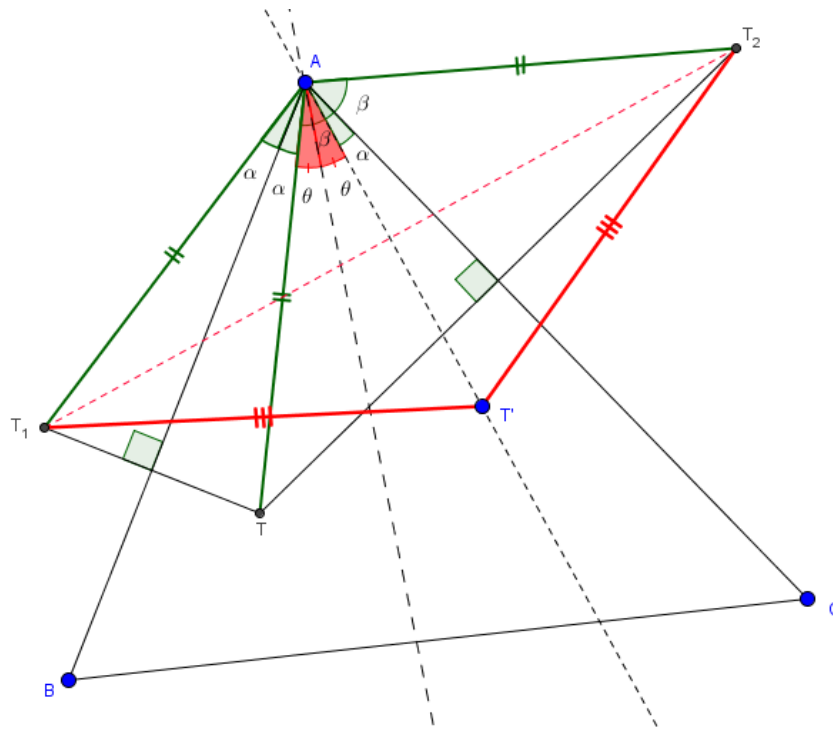


### 6.1.2 Teorema 14

Seja  $ABC$  um triângulo, com  $T$  um ponto interior a esse triângulo, com  $T'$  seu conjugado isogonal. Tomemos  $T_1$  e  $T_2$  os pontos simétricos a  $T$  em relação aos lados  $AB$  e  $AC$  respectivamente. Os segmentos  $T'T_1$  e  $T'T_2$  são congruentes.

**Demonstração:** Consideremos  $\sphericalangle T_1AT = 2\alpha$ ,  $\sphericalangle TAT' = 2\theta$  e  $\sphericalangle TAT_2 = 2\beta$ . Como  $\sphericalangle T'AC = \sphericalangle TAB = \alpha$  e  $\beta = 2\theta + \alpha$ , temos que  $\sphericalangle T'AT_2 = \alpha + \beta = 2\theta + 2\alpha$  e  $\sphericalangle T_1AT' = 2\alpha + 2\theta$ , assim  $AT'$  é bissetriz de  $\sphericalangle T_1AT_2$ . Pelo teorema anterior, temos que  $AT_2 = AT_1$  e a reta  $AT'$  é mediatriz de  $T_1T_2$ , portanto,  $T'T_1 = T'T_2$ .

Figura 42 – Propriedades Conjugados isogonais



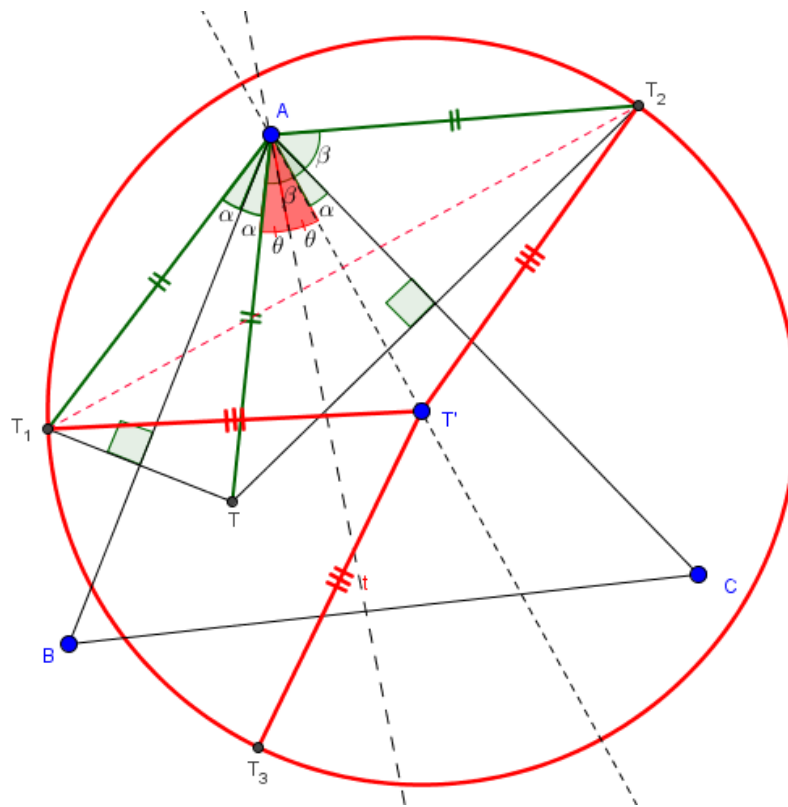
### 6.1.3 Teorema 15

Seja o triângulo  $ABC$  com  $T$  e  $T'$  conjugados isogonais internos. Tomemos os pontos  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  simétricos de  $T$  em relação aos lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  respectivamente. O círculo que contém os pontos  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  possui centro  $T'$ .

**Demonstração:** Sem perda de generalidade, pelo teorema anterior, temos que  $T'T_1 = T'T_2$ ,  $T'T_1 = T'T_3$ . Assim concluímos que  $T'T_1 = T'T_2 = T'T_3$  e, portanto, o círculo que contém os pontos  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  possui centro  $T'$ .



Figura 43 – Propriedades Conjugados isogonais

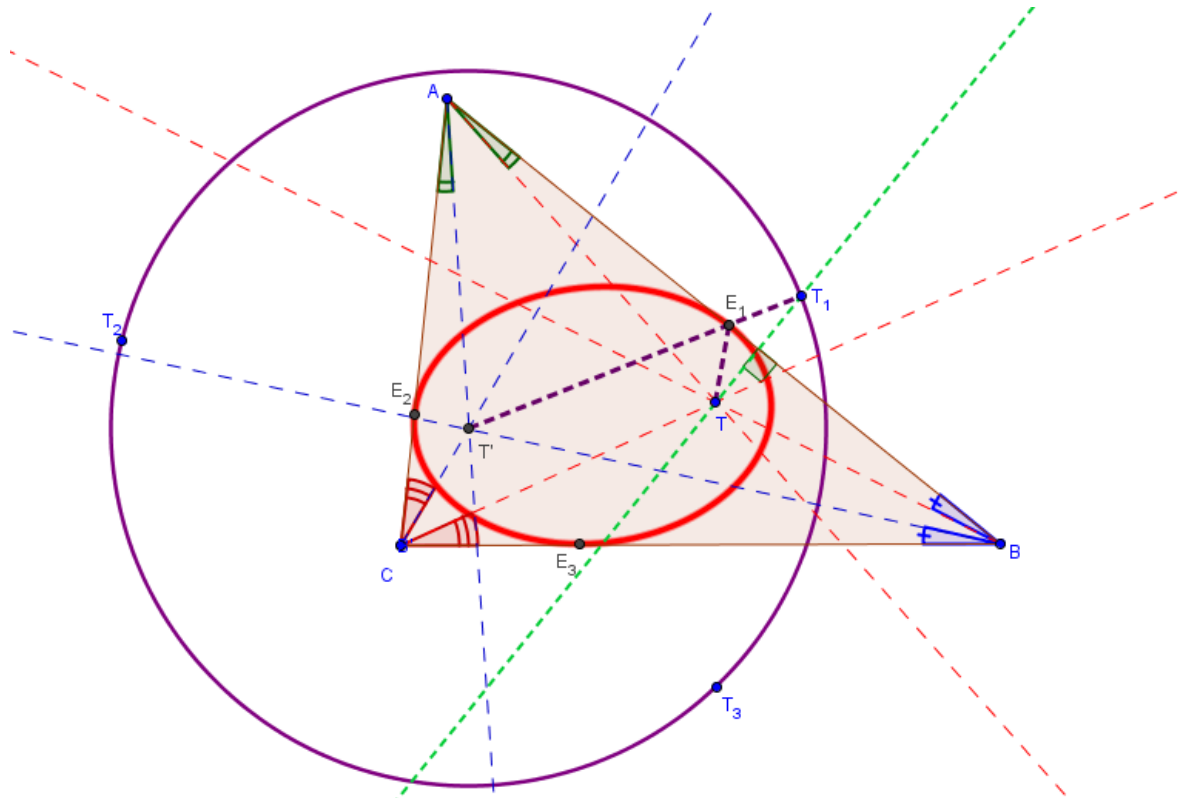


#### 6.1.4 Teorema 16

Seja  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  simétricos de  $T$  em relação aos lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  respectivamente. Sejam ainda  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  as interseções de  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  com  $T'T_1$ ,  $T'T_2$  e  $T'T_3$  respectivamente. Os pontos  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  pertencem à elipse de focos em  $T$  e  $T'$  cujo eixo maior é igual a  $T'T_1 = T'T_2 = T'T_3$ .

**Demonstração:** Sem perda de generalidade, tomemos o triângulo  $TT'E_1$ . Note que a reta  $AB$  será bissetriz externa de  $E_1$  no triângulo  $TT'E_1$  pois  $\angle TE_1B = \angle T_1E_1B$ . Dessa maneira, o ponto  $E_1$  pertence à elipse de focos em  $T$  e  $T'$  cujo eixo maior é igual a  $T'T_1$ . De modo análogo, temos que o ponto  $E_2$  pertence à elipse de focos em  $T$  e  $T'$  cujo eixo maior é igual a  $T'T_2$  e o ponto  $E_3$  pertence à elipse de focos em  $T$  e  $T'$  cujo eixo maior é igual a  $T'T_3$ . Contudo, sabemos pelo teorema anterior que  $T'T_1 = T'T_2 = T'T_3$ .

Figura 44 – Elipse inscrita no triângulo.



Cabe ressaltar ainda que a circunferência definida pelos pontos simétricos de  $T$  em relação aos lados é chamada circunferência focal do foco  $T'$  da elipse inscrita no triângulo  $ABC$ .

## 7. ATIVIDADES COM O GEOGEBRA

O objetivo desse capítulo é utilizar o *Software* de geometria dinâmica Geogebra para reconhecimento e visualização das curvas cônicas a partir do conceito de esferas de Dandelin, isto é, partindo do princípio do conceito que dado um plano que secciona o cone sempre existem estas esferas, e então poderemos melhor compreender os resultados obtidos em todos os teoremas num ambiente de aprendizagem virtual.

Concordamos com Alves e Soares (2003) quando afirmam que, através dos recursos de animação de alguns *softwares* geométricos, o aluno pode construir, mover e observar de vários ângulos as figuras geométricas, além de modificar algumas de suas características. Há desenhos de execução bastante complicada e até mesmo impossível de ser realizado com papel, lápis, quadro e giz, por exemplo, mas que tornam-se facilmente executáveis com o uso de um *software* de geometria dinâmica no computador.

Defendemos a tese de que a atuação do professor como mediador no processo de ensino-aprendizagem em ambientes virtuais deva ser a de um facilitador à compreensão de enunciados de teoremas e de propriedades relativas as figuras apresentadas. Cabe ao professor dizer ao aluno que atividades com o uso da geometria dinâmica não significam que um teorema foi provado e comentar o que realmente é uma prova ou demonstração matemática. O professor deve orientar o aluno quanto à formalização de resultados através de uma boa escrita matemática para evitar que o estudante, apenas com a visualização do resultado em tela, esteja convencido daquilo que ainda pode ser somente uma conjectura.

A seguir, apresentamos atividades que permitem o traçado das curvas cônicas e a verificação de algumas propriedades citadas, ao longo desta pesquisa, com o uso do Geogebra 3D. Além disso, tal ferramenta tecnológica faz com que a apresentação do conteúdo tenha uma estética visual muito mais interessante para o aluno do que a prática habitual dos professores em escolas brasileiras em construir tais curvas à mão livre.

As atividades propostas são de nível intermediário, porém, com o passo a passo longo, sendo mais indicadas a estudantes de graduação ou a professores em formação continuada em cursos de pós-graduação. Para professores de ensino médio em exercício, acreditamos ser importante o domínio da ferramenta tecnológica, entretanto, não haver necessidade deste mesmo domínio por parte de seus alunos nestas atividades propostas.

## 7.1 Construção da Elipse

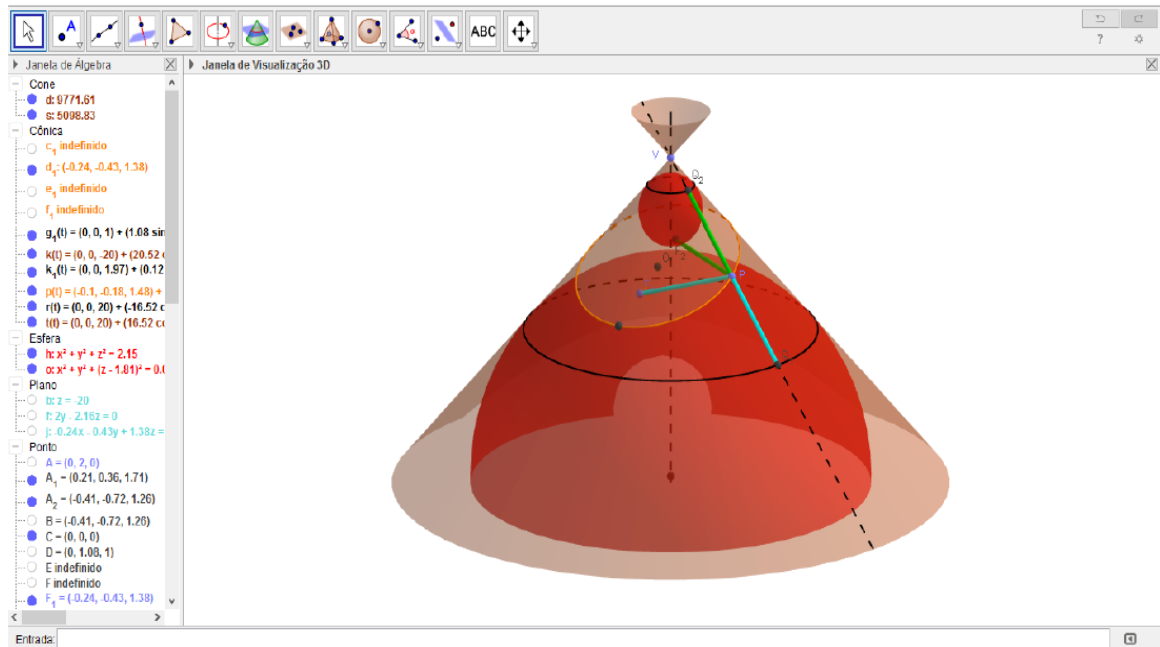
Esta atividade propõe a construção de um plano oblíquo a um cone reto que gera uma elipse. É importante que o professor dê ênfase ao item 8, pois a partir dele é imediata a verificação de que a curva encontrada é uma elipse, pois a soma das distâncias de qualquer ponto da curva obtida aos dois focos se manterá inalterada. Nesse momento o professor deve retomar a definição de elipse e formalizá-la. Caso o professor trabalhe com a visão da geometria analítica esta é a hora de retomar a fórmula de distância entre pontos e assim chegar a equação da elipse com centro na origem. Em alguns casos pode ser interessante a abordagem da mesma equação transladada ao longo do eixo  $x$  ou ao longo do eixo  $y$ .

Tabela 1 – Construção da elipse com as esferas de Dandelin

Passos	Comando de construção
1	Abra o GeoGebra e escolha a disposição Janela de visualização 3D.
2	Construa um cone com a altura e o raio que desejar.
3	Inscriva uma esfera nesse cone. (Basta tomar um ponto $S_1$ do eixo e uma geratriz, em seguida traçar a reta perpendicular à geratriz e que passa pelo ponto escolhido. O ponto do eixo será o centro da esfera e a interseção das retas será um ponto da esfera.)
4	Marque um ponto $F_1$ sobre a esfera e trace um plano $\pi$ perpendicular à esfera que passe por $F_1$ . (Basta traçar a reta $S_1 F_1$ e o plano perpendicular à reta passando por $F_1$ ).
5	Determine o outro ponto $F_2$ sobre o plano que será o ponto de tangência com a segunda esfera tangente ao cone. (Após determinar os pontos $A_1$ e $A_2$ extremos do eixo da curva, fazer o ponto médio $O$ entre eles e uma reflexão de $F_1$ com o centro em $O$ )
6	Determine o centro da segunda esfera (interseção do eixo do cone com o plano perpendicular à reta $A_1A_2$ ) e desenhe-a.
7	Selecione um ponto $P$ da curva definida pelo plano $\pi$ e o cone, trace uma geratriz que passe por $P$ , e em seguida trace as interseções das esferas com o cone e as interseções $Q_1$ e $Q_2$ entre a geratriz e as circunferências de interseção entre as esferas e o cone.
8	Observe a soma dos valores dos segmentos $PQ_1 + PQ_2$ e $PF_1 + PF_2$ .
9	Mova o ponto $P$ e o ponto $F_1$ e observe o que acontece com o valor das somas.
10	Selecione o ponto $P$ e clique sobre ele com o botão direito. Ative a ferramenta ANIMAR e observe o valor das distâncias.
11	Sobre o plano que define a curva, clique sobre ele com o botão direito do mouse e ative a ferramenta CRIAR VISTA 2D.

Exemplo de um momento da tela de construção em aula:

Figura 45 – Plano oblíquo gerando elipse.



## 7.2 Construção da Hipérbole

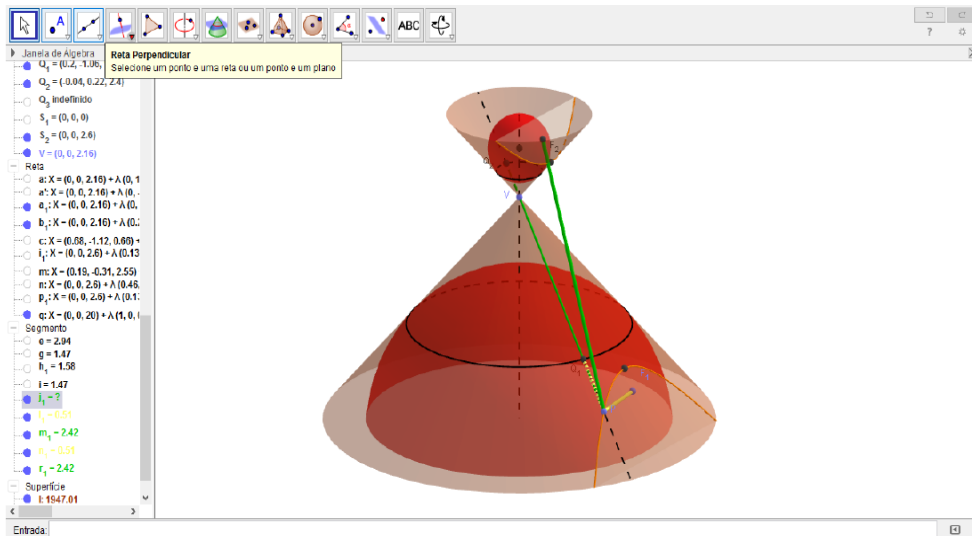
Esta atividade propõe a construção de um plano oblíquo a um cone reto de duas folhas que gera uma hipérbole. É importante que o professor dê ênfase ao item 8, pois, a partir dele, será feita a verificação de que a curva encontrada é uma hipérbole, dado que a diferença das distâncias de qualquer ponto da curva obtida aos dois focos se manterá inalterada. Neste momento, usar a dinâmica do *software* é de extrema importância, já que o resultado encontrado não é trivial. Além disso, cada passo desenvolvido pelo professor merece questionamentos aos alunos a fim de que estes entendam o porquê de tal construção geométrica. Neste momento, uma grande quantidade de alunos deverá apresentar dificuldades na compreensão da própria definição de hipérbole, sendo interessante que o professor recorra à figura da curva no plano como é tradicionalmente mostrada nos livros didáticos atuais.

Tabela 2 – Construção da hipérbole com as esferas de Dandelin

Passos	Comando de construção
1	Abra o GeoGebra e escolha a disposição Janela de visualização 3D.
2	Construa um cone com a altura e o raio que desejar.
3	Inscriva uma esfera nesse cone. (Basta tomar um ponto $S_1$ do eixo e uma geratriz, em seguida traçar a reta perpendicular à geratriz e que passa pelo ponto escolhido. O ponto do eixo será o centro da esfera e a interseção das retas será um ponto da esfera.)
4	Marque um ponto $F_1$ sobre a esfera e trace um plano $\pi$ perpendicular à esfera que passe por $F_1$ . (Basta traçar a reta $S_1 F_1$ e o plano perpendicular à reta passando por $F_1$ ).
5	Determine o outro ponto $F_2$ sobre o plano que será o ponto de tangência com a segunda esfera tangente ao cone. (Após determinar os pontos $A_1$ e $A_2$ extremos do eixo da curva, fazer o ponto médio $O$ entre eles e uma reflexão de $F_1$ com o centro em $O$ )
6	Determine o centro da segunda esfera (interseção do eixo do cone com o plano perpendicular à reta $A_1A_2$ ) e desenhe-a.
7	Selecione um ponto $P$ da curva definida pelo plano $\pi$ e o cone, trace uma geratriz que passe por $P$ , e em seguida trace as interseções das esferas com o cone e as interseções $Q_1$ e $Q_2$ entre a geratriz e as circunferências de interseção entre as esferas e o cone.
8	Observe a soma dos valores dos segmentos $ PQ_1 - PQ_2 $ e $ PF_1 - PF_2 $ .
9	Mova o ponto $P$ e o ponto $F_1$ e observe o que acontece com o valor das diferenças.
10	Selecione o ponto $P$ e clique sobre ele com o botão direito. Ative a ferramenta ANIMAR e observe o valor das distâncias.
11	Sobre o plano que define a curva, clique sobre ele com o botão direito do mouse e ative a ferramenta CRIAR VISTA 2D.

Exemplo de um momento da tela de construção em aula:

Figura 46 – Plano oblíquo gerando hipérbole.



### 7.3 Construção da Parábola

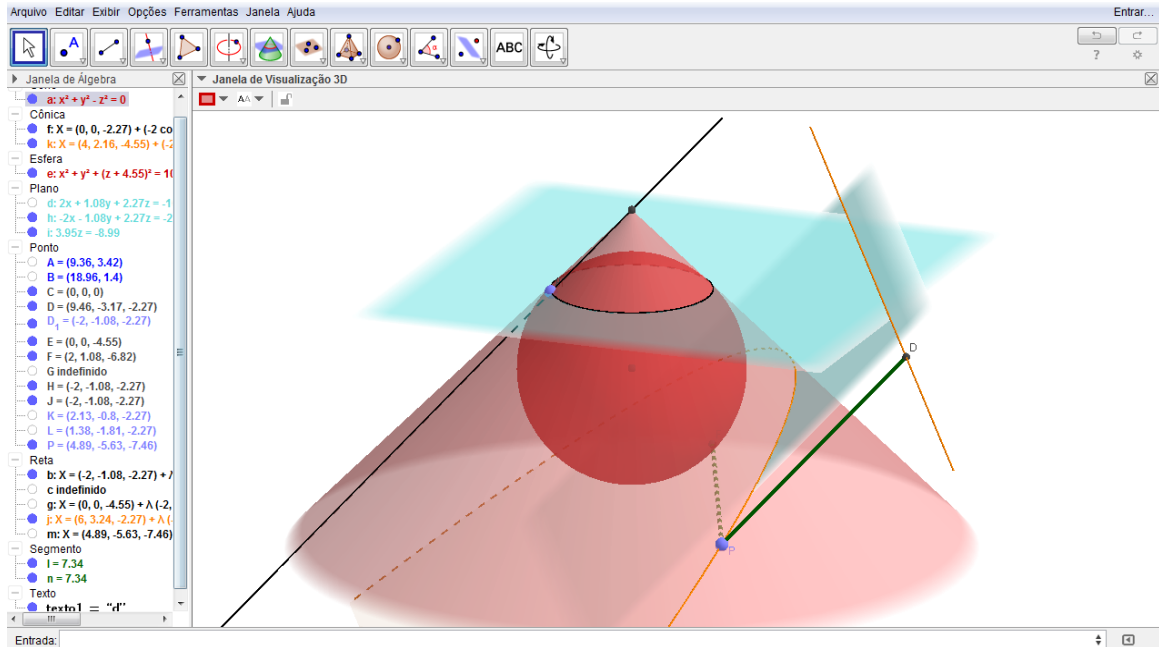
Tabela 3 – Construção da parábola com as esferas de Dandelin

Passos	Comando de construção
1	Abra o GeoGebra e escolha a disposição Janela de visualização 3D.
2	Construa um cone como desejar.
3	Inscruva uma esfera nesse cone e marque a curva de interseção entre a esfera e o cone.
4	Escolha um ponto K dessa interseção, trace a geratriz que contém K, e em seguida determine o ponto F, diametralmente oposto a K.
5	Determine o plano paralelo à geratriz e que passa por F, e em seguida, marque a curva de interseção entre o plano e o cone.
6	Determine agora, o plano que contém a interseção entre o cone e a esfera, e em seguida, a reta $d$ de interseção entre os dois planos.
7	Selecione um ponto P da curva e em seguida calcule a distância de P á reta $d$ e de P ao ponto F.
8	Mova o ponto P e observe o que acontece com o valor das distâncias.
9	Selecione o ponto P e clique sobre ele com o botão direito. Ative a ferramenta ANIMAR e observe o valor das distâncias.
10	Sobre o plano que define a curva, clique sobre ele com o botão direito do mouse e ative a ferramenta CRIAR VISTA 2D.



Exemplo de um momento da tela de construção em aula:

Figura 47 – Plano paralelo gerando parábola.



## 7.4 Excentricidade

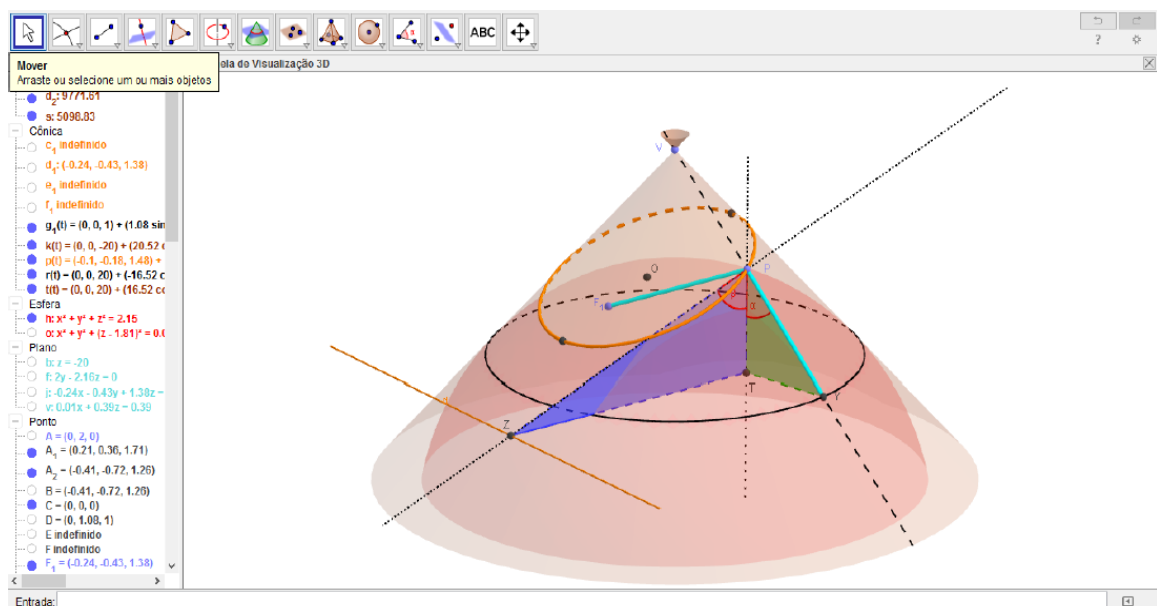
Esta atividade visa à melhor compreensão do Teorema 4 deste trabalho, assim como sua demonstração. É importante que o professor comente com seus alunos que, para uma mesma elipse, o valor da excentricidade é constante, isso pode ser verificado através do aspecto dinâmico do *software*.

Tabela 4 – Análise da excentricidade de uma cônica

Passos	Comando de construção
1	Abra o GeoGebra e escolha a disposição Janela de visualização 3D.
2	Construa um cone como desejar.
3	Inscruva uma esfera nesse cone e marque a curva de interseção entre a esfera e o cone.
4	Marque um ponto F sobre a esfera e em seguida determine o plano $\pi$ tangente à esfera em F e a curva de interseção entre o plano $p$ e o cone.
5	Determine agora, o plano $\sigma$ que contém a interseção entre o cone e a esfera, e em seguida, a reta $d$ de interseção entre os dois planos.
6	Marque um ponto P sobre a curva obtida e determine as distâncias PF e de P à reta $d$ (tome Z como o pé da perpendicular de $d$ traçada por P).
7	Calcule os ângulos $\alpha$ e $\beta$ , sendo $\alpha$ ângulo do eixo do cone com uma geratriz e $\beta$ o ângulo entre os planos $\pi$ e $\sigma$ .
8	Calcule o valor da razão $\frac{PF}{PZ}$ e a razão $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$ .
9	Mova o ponto F, o ponto P e observe o valor das razões calculadas.

Exemplo de um momento da tela de construção em aula:

Figura 48 – Excentricidade no Geogebra.



As atividades a seguir são propostas A classes que buscam maior aprofundamento tanto em conteúdo matemático quanto no domínio dos conteúdos que envolvem as curvas cônicas. Voltamos a dizer que cursos de formação continuada de professores ou especializações em geometria dinâmica, em níveis avançados, são espaços ideais para o desenvolvimento dessas tarefas.

As retas diretrizes de uma cônica e as circunferências focal e principal, quanto tratadas em 3D, são, para muitos, imperceptíveis. Desse modo, garantimos, com as atividades abaixo, a visualização de tais elementos geométricos e a possibilidade de, através deles, criar na sala de aula um ambiente de discussão sobre propriedades que os envolvem.

Abaixo, deixamos o passo a passo das atividades e apresentamos como sugestão que o professor promova a criação de um ambiente investigativo em suas aulas.

### 7.5 Retas diretrizes

Tabela 5 – Construção das retas diretrizes

Passos	Comando de construção
1	Construa, como sugerido anteriormente na hipérbole, um cone com duas folhas, duas esferas tangentes ao cone e um plano $\pi$ tangente às esferas seccionando o cone formando uma seção cônica.
2	Determine os planos de interseção das esferas com o cone e, em seguida, as retas de interseção desses planos com o plano $\pi$ .
3	Selecione o plano $\pi$ e em seguida, clique com o botão direito do mouse no plano e selecione CRIAR VISTA 2D.
4	Mova o foco inicialmente determinado e, assim, posicionando-o convenientemente, determine as retas diretrizes de uma elipse e de uma hipérbole.

## 7.6 Circunferência focal

Tabela 6 – Construção das circunferências focais nas cônicas

Passos	Comando de construção
1	Defina uma cônica de focos $F_1$ e $F_2$ .
2	Selecione um ponto $P$ desta cônica e em seguida determine a reta tangente à cônica passando pelo ponto $P$ .
3	através da ferramenta REFLEXÃO EM RELAÇÃO A UMA RETA, determine o ponto $Q$ simétrico do foco em relação à reta tangente.
4	Habilite os rastros do ponto $Q$ e em seguida, clique com o botão direito sobre o ponto $P$ e utilize a ferramenta ANIMAR.

A circunferência obtida é a circunferência focal.

Figura 49 – Circunferência focal na hipérbole.

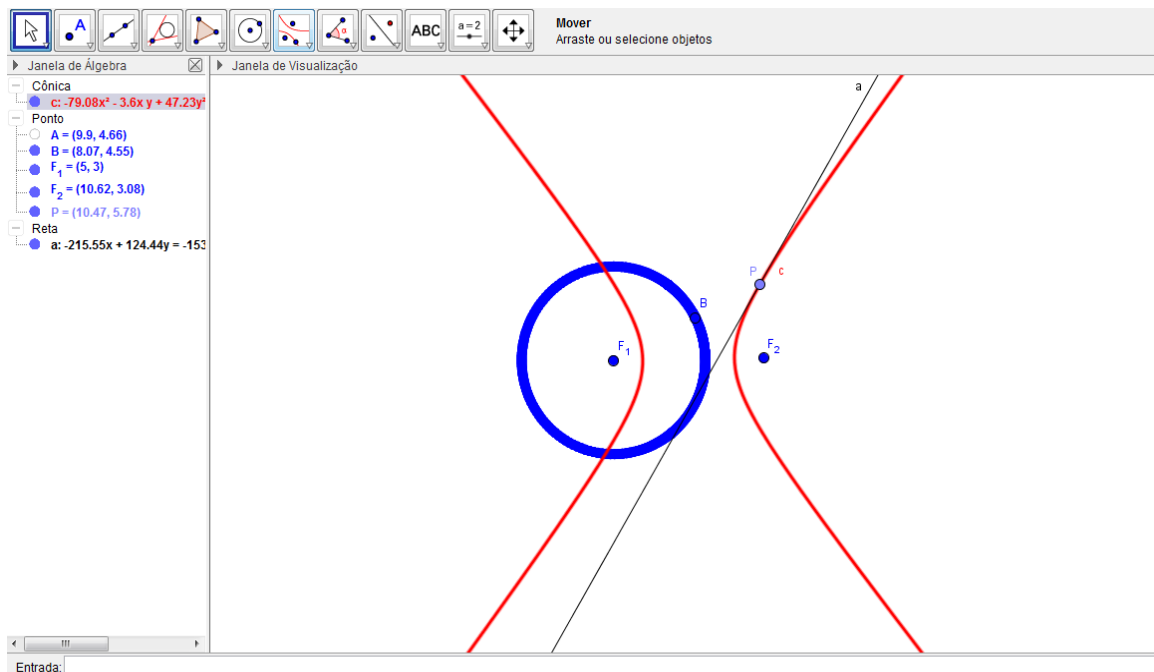
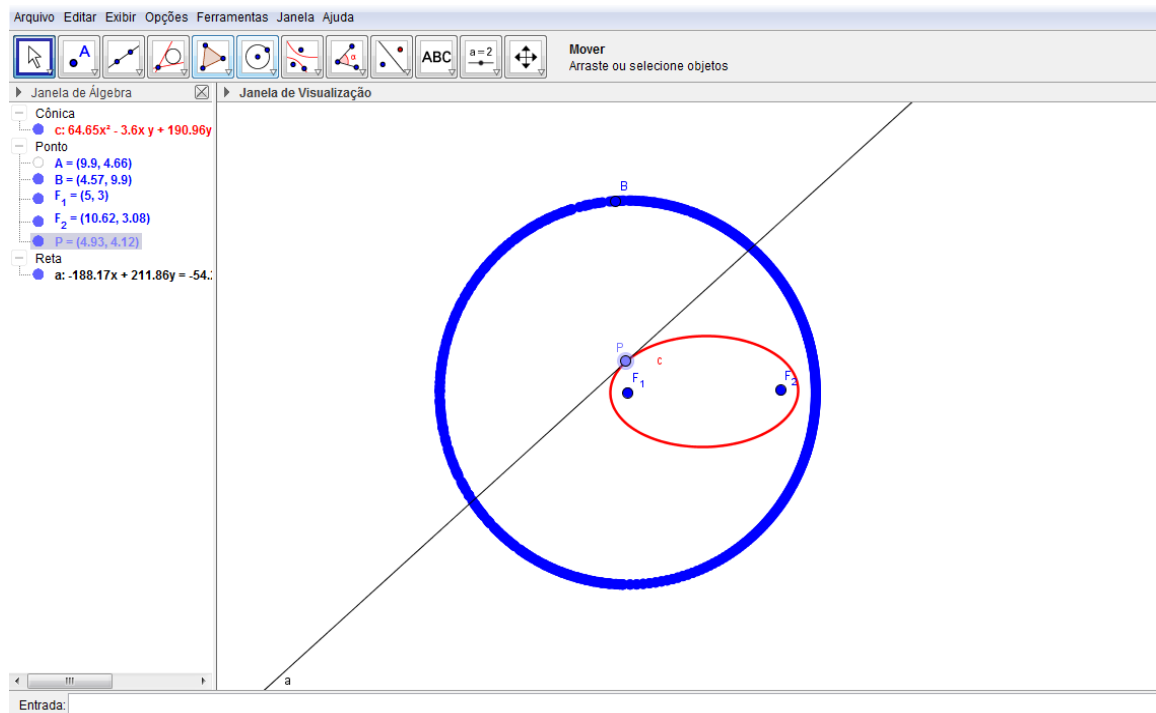


Figura 50 – Circunferência focal na elipse.



## 7.7 Circunferência principal

Tabela 7 – Construção da circunferência principal nas cônicas

Passos	Comando de construção
1	Defina uma cônica de focos F1 e F2.
2	Selecione um ponto P desta cônica e em seguida determine a reta tangente à cônica passando pelo ponto P.
3	Determine as retas perpendiculares à tangente passando pelos focos, e marque os pontos M e N de interseção das retas.
4	Habilite os rastros dos pontos M e N e em seguida, clique com o botão direito sobre o ponto P e utilize a ferramenta ANIMAR.
5	Determine uma circunferência de raio a e centrada no mesmo ponto da cônica.

Figura 51 – Circunferência principal na elipse.

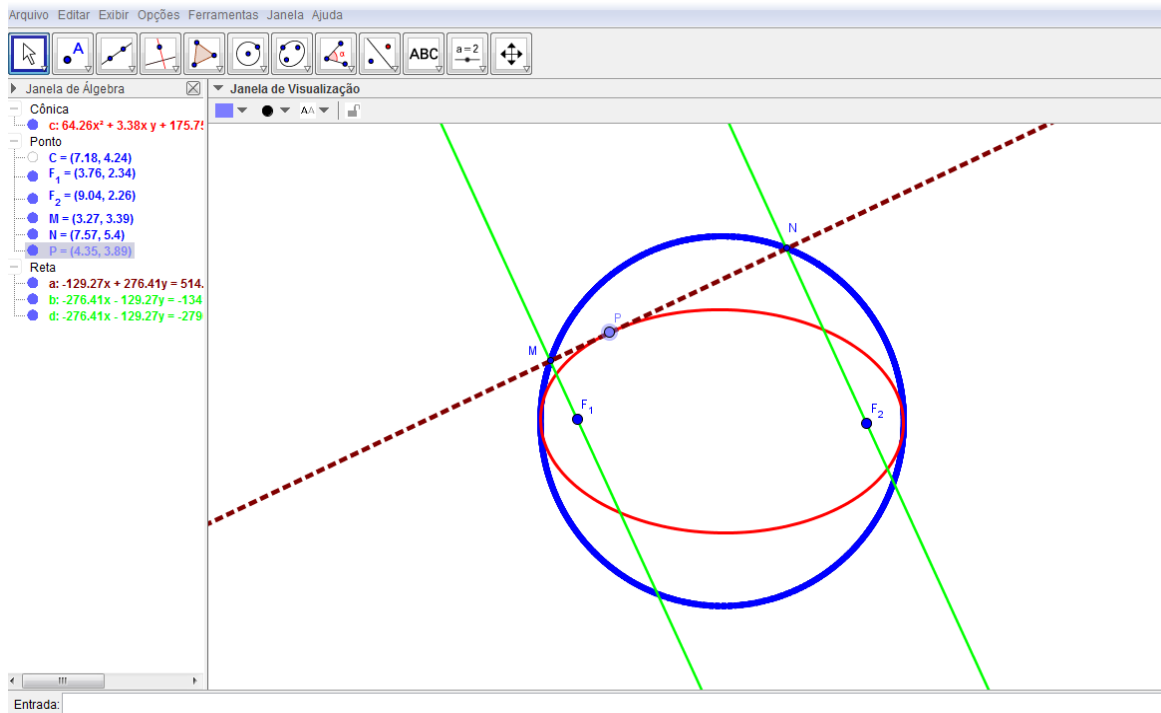
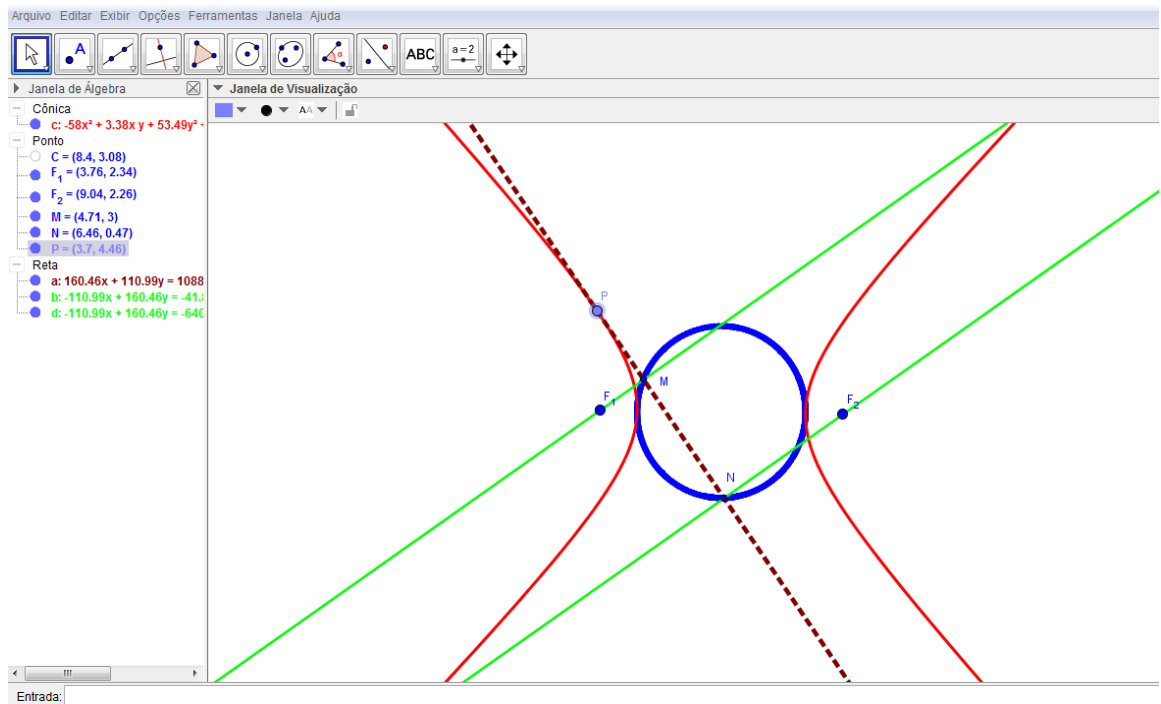


Figura 52 – Circunferência principal na hipérbole.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observamos, na construção deste trabalho, que as curvas cônicas foram estudadas desde a antiguidade, o que mostra a beleza e o fascínio natural por esse assunto. Suas propriedades desempenham papéis importantes em vários ramos da ciência, desde a astronomia, arquitetura, engenharia e a física.

Mesmo com toda essa relevância histórica, no Brasil, o seu estudo ficou comprimido no terceiro ano do ensino médio de algumas instituições, que ainda adotam um currículo mais tradicional. Uma vez que os exames oficiais nacionais não têm as curvas cônicas como um de seus itens e não pertencem ao currículo mínimo, grande parte das instituições simplesmente as eliminaram de seus conteúdos programáticos.

Sabemos também que a única abordagem dada pelos professores é feita a partir da geometria analítica. Colégios tradicionais da cidade do Rio de Janeiro, como o Colégio Pedro II e o Colégio Militar ainda possuem em suas grades curriculares a disciplina Desenho Geométrico, em que na primeira série do ensino médio trabalham com a definição de lugar geométrico no plano e por fim apresentam as curvas cônicas como exemplos de conjuntos de pontos de um plano que possuem uma dada propriedade. Porém, tais cursos reduzem-se à construção geométrica através de processos longos e enfadonhos que contribuem para o desinteresse dos alunos. Já nos cursos de matemática quando são vistas acontecem de um modo muito superficial priorizando o reconhecimento de tais curvas por relações entre seus coeficientes ao longo de sua representação analítica.

Uma sequência de atividades tendo por ferramenta o uso da Geometria Dinâmica pode permitir, por meio da visualização do processo de construção, uma aproximação maior do aluno, seja ele do nível médio, graduandos, ou ainda professores.

Devido ao alto grau das abstrações advindas do estudo analítico das cônicas, percebemos que esta é uma das maiores dificuldades de abordagem deste tema por professores, além da visualização de entes geométricos que compõem as figuras. Dessa maneira, são trabalhadas as propriedades das curvas cônicas de uma forma dinâmica, onde ganhos são certamente obtidos por isso preferimos fazer uso da geometria sintética.

Acreditamos que esse é um caminho capaz de despertar o interesse pela beleza da geometria plana e espacial, compartilhar esse conhecimento com a geometria analítica, além de ser uma excelente ferramenta para os professores tornarem suas aulas mais atraentes.

Desse modo, conseguimos expor a relação desses conteúdos, que na maioria das vezes são tratados sem as belas interconexões que podemos estabelecer em diversos momentos do ensino

Por fim, defendemos também a permanência deste conteúdo ainda em anos anteriores ao ingresso do aluno em nível superior, através de atividades de aprofundamento em matemática, ou iniciação científica júnior, caso a instituição opte definitivamente por retirar este assunto de sua grade curricular. Caso a abordagem seja realizada em cursos de formação de professores, sugerimos que as atividades não sejam somente desenvolvidas sem permitir, por parte dos alunos, a criação de conjecturas e até auxiliar nas demonstrações matemáticas, de modo que esteja sempre presente o ato de explorar, de conjecturar e de demonstrar logicamente resultados.



## REFERÊNCIAS

- ALVES, SOARES, *Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae*. Congresso da SBC, P.275-286, 2003.
- BALDIN, Yuriko Y. ; FURUYA, Yolanda K. S. *Geometria Analítica para todos e Atividades com Octave e Geogebra*. 1 ed. São Carlos: Edufscar, 2011.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução por Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Blucher, 1996.
- CAJORI, F., *A HISTORY OF MATHEMATICS*, Fifth Edition, AMS Chelsea Publishing, 1991.
- CARONNET, T.H. *Exercices de Géométrie*. França, Les Courbes Uselles, 1959.
- DUBOIS, G. (2011). *Coniques euclidiennes*. Disponível em: <[http://gilles.dubois10.free.fr/geometrie\\_affine/coniqueshist.html](http://gilles.dubois10.free.fr/geometrie_affine/coniqueshist.html)> Acesso em 16 fev. 2016.
- CRUZ, L. F. *Cálculo Vetorial e Geometria Analítica*. Disponível em: <[http://www.fc.unesp.br/~lfcruz/GA\\_CAP\\_08.pdf](http://www.fc.unesp.br/~lfcruz/GA_CAP_08.pdf)> Acesso em 15 maio 2016.
- FERNANDES, C. (2002). *Só Biografias*. Disponível em: <<http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/Menaecmu.html>> Acesso em 20 mar. 2016.
- GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. Recursos Computacionais no Ensino de Matemática. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. *Geometria: una visión de la estereometria*. Peru. Lumbreras, 2010.
- LIMA, E. CARVAKHO, P. C.; WAGNER, E.; MORGADO, A. *A Matemática do Ensino Médio- volume 2*, SBM, 2006.
- MACHADO, Antônio dos Santos. *Álgebra Linear e Geometria Analítica*. 2 ed. São Paulo: Atual, 1980.
- MATTOS, F.R.P. *Números construtíveis por dobraduras ou reflexões*. In Dissertação de Mestrado apresentada ao DMA-IM-UFRJ, 2001.
- MIGUEL, Ruiza. *Biografías y Vidas: La enciclopedia Bibliográfica en Línea*. Disponível em: <[http://www.biografiasyvidas.com/biografia/h/hire\\_philippe.htm](http://www.biografiasyvidas.com/biografia/h/hire_philippe.htm)> Acesso em 18 fev 2016.
- NOKIKOV, D., ROUSSEAU, C., SAINT-AUBIN, Y. *Las Spheres de Dandelin*. In Accromath - Institut des sciences mathématiques, Université du Québec à Montréal. Canadá, 2011.

OLIVEIRA, A. R. E. *Jean-Victor Poncelet*: matemático e engenheiro politécnico.  
Disponível em: <<http://www.hcte.ufrj.br>> Acesso em: 15 mar. 2016.

RIGHETTO, A. *Vetores e Geometria Analítica*, IBEC, 1982.

SMITH, P.F; GALE, A.S.; NEELLEY, J.H. *New analytic geometry*. Estados Unidos.  
Ginn and company, 1958.

ZALAVSKY, A.A; AKOPYAN, A. V. (2007). *Geometry of conics*. Estados Unidos.  
*Ams. Coniques euclidiennes*. Disponível em:  
<[http://gilles.dubois10.free.fr/geometrie\\_affine/coniques.html](http://gilles.dubois10.free.fr/geometrie_affine/coniques.html)> Acesso em: 20/01/2016.