UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOÃO CARLOS ESTEVAM DE CARVALHO

UMA PROPOSTA PARA INCLUSÃO DA RELAÇÃO DE GERBERT (PAPA SILVESTRE II) NO ENSINO BÁSICO

Belém - Pará
2018

JOÃO CARLOS ESTEVAM DE CARVALHO

UMA PROPOSTA PARA INCLUSÃO DA RELAÇÃO DE GERBERT (PAPA SILVESTRE II) NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador Prof. Dr. José Augusto N. Fernandes.

Belém - Pará
2018

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C331p Carvalho, João Carlos Estevam de Carvalho
UMA PROPOSTA PARA INCLUSÃO DA RELAÇÃO DE GERBERT (PAPA SILVESTRE II) NO ENSINO BÁSICO / João Carlos Estevam de Carvalho Carvalho. — 2018
45 f. : il. color

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística (PPGME), Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.
Orientação: Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes Fernandes

1. Relação de Gerbert. 2. Papa Silvestre II. 3. Triângulo Retângulo. 4. Relações Métricas no Triângulo Retângulo. I. Fernandes, José Augusto Nunes Fernandes, orient. II. Título

---

CDD 510.71

JOÃO CARLOS ESTEVAM DE CARVALHO

UMA PROPOSTA PARA INCLUSÃO DA RELAÇÃO DE GERBERT (PAPA SILVESTRE II) NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará como requisito básico para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador Prof. Dr. José Augusto N. Fernandes.

Data da apresentação: 08 / 03 / 2018

Resultado: Aprovado.

Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma

Belém – Pará
2018

Dedico este trabalho a minha filha Alicya Alcântara de Carvalho por ser a razão do meu viver.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela vida, pela saúde e por essa conquista.

Agradeço à Coordenação do Programa e a todos os professores que fizeram parte dessa trajetória.

Agradeço ao meu orientador Professor Doutor José Augusto Nunes Fernandes, por indicar os caminhos na elaboração dessa dissertação.

Agradeço a Universidade Federal do Pará e ao PROFMAT/IMPA, pela oportunidade.

Agradeço a todos os colegas de turma, por toda ajuda durante essa caminhada.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram para esse momento.

RESUMO

Este trabalho trata-se de um levantamento histórico da vida do Matemático e Papa Gerbert de Aurilac e suas contribuições à Matemática. Dentre essas contribuições, destaca-se a Relação de Gerbert, a qual demonstra aplicabilidade e eficácia na resolução de algumas situações problemas envolvendo triângulos retângulos. Esta é uma pesquisa bibliográfica, na qual, aborda as Relações Métricas no Triângulo Retângulo de forma analítica e geométrica, seguida de uma proposta de inclusão no currículo de Matemática como uma alternativa sobre o estudo das relações supracitadas.

PALAVRAS-CHAVE: Relação de Gerbert. Papa Silvestre II. Triângulo Retângulo. Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

ABSTRACT

.

This work deals with a historical survey of the life of the Mathematician and Pope Gerbert de Aurilac and his contributions to Mathematics. Among these contributions, we highlight the Gerbert Relation, which demonstrates applicability and effectiveness in solving some situations involving rectangle triangle. This is a bibliographical research, in which, it approaches the metric relations in the triangle rectangle of analytical and geometric form, followed by a proposal of inclusion in the curriculum of Mathematics as an alternative on the study of the relations above mentioned.

Key Word: Gerbert's relationship. Pope Silvestre II. Triangle Rectangle. Metric Relations in the Rectangle Triangle.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer.

Albert Einstein

O presente trabalho é fruto de uma busca pela resolução mais compacta de um problema de Matemática, apresentado no início da década de 90, por um professor do Ensino Médio que nos instigou. Tal busca nos levou, por anos, a aprofundar bastante os conhecimentos em geometria euclidiana, a fim de encontrar tal resolução que teve o seu fim a partir da descoberta da Relação de Gerbert[1]

A escolha de trazer à tona tal relação se deu por conta de acreditarmos na importância de sua aplicabilidade e eficácia na resolução de situações-problemas, recorrentes na Educação Básica, envolvendo triângulos retângulos e suas medidas, tornando algumas soluções mais econômicas em termos de cálculos algébricos.

Em virtude da demonstração da Relação de Gerbert ser de fácil entendimento, portanto perfeitamente adequadas ao nível de conhecimento do Ensino Básico, sugerimos o seu resgate nos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, a fim de facilitar na solução de diversos problemas que envolvam triângulos retângulos e que normalmente são propostos em questões de vestibulares mais concorridos, como por exemplo: os das escolas militares e provas de Olimpíadas de Matemática.

Aqui apresentaremos os resultados de uma pesquisa bibliográfica, na qual, primeiramente, fizemos um levantamento histórico da vida do Papa Silvestre II (Gerbert) e suas contribuições à Matemática. Em seguida, detalharemos a respeito dos elementos de um triângulo retângulo e de suas relações métricas elementares.

Mais adiante, apresentaremos a relação de Gerbert, além de outra, proveniente dessa, que denominamos de Relação de JC, para, em seguida, tratarmos do Problema Provocador que deu origem a esse trabalho, demonstrando a

[1] Gerbert d'Aurillac foi um Matemático do século X, que se tornou Papa e recebeu o nome de Silvestre II

aplicabilidade e a eficácia da relação na resolução do mesmo, além de algumas aplicações, contrastando-as com outras resoluções.

Por fim, esperamos contribuir apresentando uma proposta de inclusão no currículo de Matemática da Educação básica como uma alternativa sobre o estudo das Relações Métricas no Triângulo Retângulo, que hoje não se faz presente.

Na parte pós-textual apresentaremos dois anexos, um com o mapa da região onde Gerbert viveu na Europa e outro com a carta do Papa João Paulo II ao Bispo de Saint-Flour. Além desses confeccionamos um Glossário com termos deste trabalho que podem não ser do conhecimento de alguns leitores.

2 A HISTÓRIA DO MATEMÁTICO QUE SE TORNOU PAPA

O professor que ensina a Matemática desligada de sua parte histórica comete verdadeiro atentado contra a Ciência e contra a Cultura em geral.

Felix Klein (1849-1925)

Conforme Tahan (1987), na memorável dinastia espiritual, duas vezes milenar dos sumos-pontífices, devemos destacar, de modo especial, a figura de Silvestre II (Fig. 01), que foi o único papa matemático (profundo conhecedor de Geometria e Álgebra) e, por todos os títulos, o homem mais sábio do seu tempo. Os historiadores apontam Silvestre II como pioneiro da divulgação, no Ocidente Latino, do sistema de numeração indo-arábico.

FIGURA 01: Papa Silvestre II

Fonte: http://historyofinformation.com/images/gerbert_d%27aurillac.jpg

Seu nome era Gerbert, e segundo Bianchini e Senatore (2016) e Connor e Robertson (2012), nossos principais referenciais quanto a estes aspectos históricos, Gerbert representa uma das personalidades mais relevantes da cultura européia do século X, sendo um *erudito prolífico*, que nasceu entre 938 e 950 em Auvergne, uma região montanhosa no centro da França. Sua família é desconhecida; Mas, sabe-se que era muito pobre e sem qualquer status. Por volta de 963, ele entrou no mosteiro de Saint-Géraud em Aurillac, um assentamento beneditino bastante rigoroso e, acima de tudo, uma instituição independente de qualquer controle local, que respondia somente ao Papa.

Aqui, Gerbert inicia seu treinamento nas matérias do *trivium* (Gramática, Lógica e Retórica) aprendendo gramática latina também. Mas não havia em toda a França quem ensinasse sua continuação, o *quadrivium* (Aritmética, Geometria, Astronomia e Música). Para sorte de Gerbert, em 967 um conde catalão passou pelo mosteiro e a pedido do *abade*, levou consigo o jovem monge, que passou a estudar em uma cidade espanhola na região da Catalunha.

Vale lembrar que a Catalunha na época representava, tanto culturalmente como politicamente, a fronteira ocidental do cristianismo; uma fortaleza de certa forma contra a penetração árabe, mas ao mesmo tempo um ponto privilegiado para o intercâmbio cultural e científico. A Europa cristã estava de fato consideravelmente subdesenvolvida em comparação com os muçulmanos de *Al-Andalus* que se estabeleceram no sul da Espanha (Anexo A) e assim as comunicações (especialmente na direção sul-norte) foram geralmente toleradas e muitas vezes encorajadas. Gerbert aproveitou essas oportunidades, mostrando rapidamente habilidades e conhecimento até então além da média.

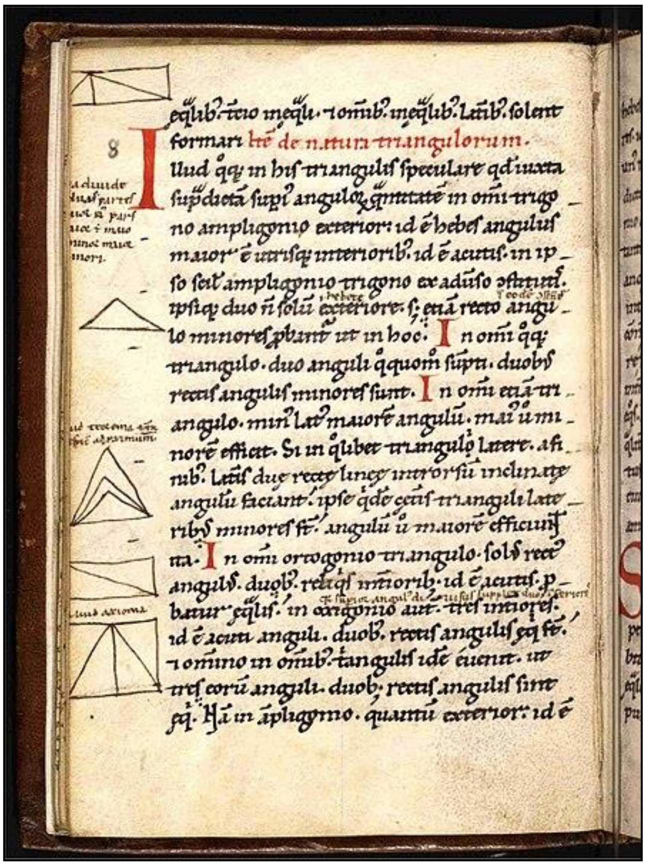
O monge absorveu tudo o que podia e, acompanhando o conde Borrell e o bispo Ato em uma peregrinação a Roma, em 969, impressionou o papa João XIII com seu conhecimento. O pontífice avisou o imperador Oto I, do Sacro Império Romano-Germânico, que havia encontrado a pessoa perfeita para ser tutor do príncipe que se tornaria Oto II. Gerbert trocou a Catalunha pela corte germânica, mas por pouco tempo, pois com o casamento do príncipe, Gerbert ficara sem emprego, mas foi imediatamente recrutado por Adalbero, arcebispo de Reims, principal cidade da França, onde ele teve a oportunidade de mostrar todas as suas habilidades, ensinando o *quadrivium* na escola da catedral, e depois se tornou diretor dessa escola. Pelas suas mãos passaram futuros bispos, arcebispos, abades, e um futuro rei da França.

Em Reims, Gerbert ensinou a seus alunos como usar instrumentos astronômicos, mas também aplicou seu vasto conhecimento a questões práticas e a equipamentos mecânicos. Ele se interessava bastante pela Mecânica, e os historiadores contam que fez construir na catedral de Reims um relógio mecânico e um órgão hidráulico com pressão constante, este último matematicamente calibrado cujo som se assemelhava ao de uma flauta, demonstrando com isso um profundo conhecimento de música.

De acordo com Ferreira (2008), Gerbert foi o primeiro ocidental a empregar os algarismos *indo-arábicos* na Europa Cristã, mas sem fazer o uso do zero. Reintroduziu o uso do ábaco na Europa que estava em desuso desde a queda do Império Romano, e o uso desta nova ferramenta não só alterou a forma como os cálculos eram feitos, mas também a maneira como a própria aritmética passou a ser ensinada por mais de 100 anos. O ábaco de Gerbert representou o mais poderoso sistema de cálculo (hardware e software como diríamos hoje em dia) disponível em toda Europa cristã ocidental. Também introduziu na Europa o uso do astrolábio, instrumento este inventado pelos gregos e aperfeiçoado pelos árabes que era muito usado para encontrar a posição geográfica e calcular o tempo a partir da posição dos astros, um precursor do GPS da atualidade.

Gerbert deixou várias obras, entre elas, citam-se: "Regras sobre a ciência dos números", "Regras sobre cálculos com ábacos", "Sobre a divisão dos números" e uma Geometria, com aplicações à Agrimensura (Figura 02).

FIGURA 02: Página do tratado de Geometria de Gerbert



Fonte: http://c7.alamy.com/comp/J4B7W3/pope-sylvester-ii-gerbert-daurillac-de-geometria-J4B7W3.jpg

A igreja católica, herdeira da tradição romana, não aceitava a superioridade de elementos vindos de outra cultura. Por isso, os algarismos arábicos na Europa cristã encontraram, a princípio, forte resistência. Além de serem boicotados por muitos calculadores medievais, que os tratavam como “signos diabólicos desses cúmplices de Satanás que são os árabes” (MOL, 2013, p. 75).

Em Reims, Gerbert tinha sido muito mais do que um professor e chefe da escola da catedral. Ele havia sido secretário e conselheiro do Arcebispo Adalbero, e profundamente envolvido nos assuntos políticos e eclesiásticos. O Arcebispo Adalbero morreu em 988 e ele queria que Gerbert fosse seu sucessor. No entanto, parece que Gerbert não queria se tornar arcebispo de Reims, e certamente havia outros que não queriam vê-lo nesse papel. Arnulf, descendente de Carlos Magno, tornou-se Arcebispo, mas foi acusado, quase imediatamente, de práticas irregulares. Um conselho de bispos e abades franceses foi realizado em Reims em 991, seguindo uma recomendação do rei francês. Arnulf foi demitido e Gerbert nomeado em seu lugar. Seguiu-se uma amarga discussão com alegações de que Arnulf fora impropriamente despedido e Gerbert enfrentou muitas dificuldades no desempenho de suas funções.

Em 995, realizou-se um *sínodo* que dispensou Gerbert e restabeleceu Arnulf. O Papa Gregório V tornou se papa em 996 e dois anos depois, nomeou Gerbert para ser arcebispo de Ravena. No ano seguinte, em 999, o papa Gregório V morreu e Gerbert foi eleito papa. No dia 9 de abril de 999, ele passou a ser chamar Papa Silvestre II (lembremos que o sistema atual de *conclave* só surgiu quase 200 anos depois).

Gerbert foi o primeiro papa francês e a nobreza romana não gostava de ser governada por um imperador estrangeiro, pois achavam que o cargo não deveria ir para um “estrangeiro”. Seu reinado foi difícil por não ser capaz de trazer paz e prosperidade e, com isso, não teve tempo para retomar os estudos, mas conseguiu grandes feitos aproximando os povos da Europa Central, Leste Europeu e Escandinávia da igreja, tentando moralizar o clero.

No inverno de 1001, estourou uma revolta em que o Imperador Otto III e o papa foram obrigados a sair de Roma. Otto III tentou voltar a Roma duas vezes, mas não obteve êxito, morrendo na terceira tentativa em 1002. Gerbert voltou a Roma logo após a morte de Otto III, e, embora não conseguisse impor sua autoridade, acabou morrendo no ano seguinte.

Segundo Almeida (1925), logo depois de sua morte, em 1003, seu corpo foi arrastado para um pátio, mutilado e, a seguir, esquartejado pelos cardeais. Um fim trágico do único Papa Matemático.

> Gerbert foi julgado diferentemente, na Idade Média: era considerado como alquimista e bruxo, que foi buscar sua ciência com os "infiéis sarracenos" e vendeu sua alma a Lúcifer. Graves acusações que se mantiveram sobre o sábio homem durante séculos, ao ponto de, em 1648, a autoridade pontifícia julgar necessário abrir o túmulo de Silvestre II, a fim de verificar se os diabos do inferno não se encontravam lá. (IFRAH, 1994, v.II, p. 360).

Conforme Brown (2012), todas as lendas surgidas em volta de Silvestre II, de que seu conhecimento científico era fruto de um pacto com o demônio (uma "demônia", para ser mais preciso) e coisas parecidas, provinham de um ataque pessoal de um cardeal adversário de Gregório VII[2]. Tal situação pode ser visualizada na figura 03

FIGURA 03: Papa Silvestre II e o demônio

Fonte: Cod.Pal.Germ. 137, Folio 216v Martinus Oppaviensis

Gregório VII teria sido educado por discípulos de Gerbert, e fora inclusive acusado de ter estudado magia e astrologia nas cidades árabes, o que alimentou a lenda e foi assim que ele entrou na história. Foi a partir da Reforma no século XVI, que os protestantes passaram a usar as lendas anti-Silvestre para tentar provar que os católicos eram inimigos da ciência e inventaram histórias para denegrir a imagem de um grande matemático e astrônomo.

[2] Foi o 157º Papa da Igreja Católica no período de 22/04/1073 até a sua morte em 25/05/1085.

Atualmente existem relatos atribuídos ao Papa Silvestre II (945 – 1003) referente à invenção de estranhos *autômatos*[3], devido a cabeça de bronze mecânica contemporânea, construída por ele. Isso poderia ser um robô no passado? A cabeça foi destruída, ou talvez escondida após a sua morte. Mas, há referências a sua obra mecânica na Biblioteca do Vaticano.

Na carta de João Paulo II ao Bispo de Saint-Flour[4] este faz referência à importância ao jovem Gerbert e no período da celebração do Jubileu da Igreja este reconhecimento vem por sua contribuição pela unificação da igreja em momentos difíceis, diante de suas habilidades, inteligência e competência em diversas áreas dos conhecimentos científico, mesclando ao mesmo tempo, uma dosagem singular entre Religião e Ciência, de modo que a busca pela verdade, permeava pelo “esclarecimento” do homem por meio da história, desta forma contribuindo pela unidade da Igreja e ação de seus membros diante da sociedade de maneira que estes pudessem contribuir socialmente, como se ressalta na carta, que seu pontificado impressionou em virtude de sua “multiplicidade e atualidade” dos temas relacionados a vida.

Silvestre II ganhou uma estátua em sua homenagem na cidade de Aurillac, de onde herdou o nome antes de torna-se Papa e também começou sua vida de monge. Tal estátua encontra-se na figura a seguir.

FIGURA 04: Estátua de Silvestre II em Aurilac, França

Fonte: https://es.dreamstime.com/foto-de-archivo-estatua-de-papa-silvestre-ii

No campo religioso, podemos destacar que Silvestre II promoveu a Reforma Eclesiástica, combateu a *simonia* e impôs a Trégua de Deus.

[3] Verifica-se em https://super.abril.com.br/tecnologia/robo-habilis/ Acesso em 21/11/2017
[4] Carta redigida por João Paulo II em 1999 – ANEXO B

3 O TRIÂNGULO RETÂNGULO

Neste capítulo faremos uma breve abordagem a respeito do triângulo retângulo, bem como dos elementos que o compõe. Em seguida trataremos das Relações Métricas no Triângulo Retângulo de forma analítica e geométrica.

3.1 Considerações iniciais

Desde a antiguidade já havia registros de utilização de triângulos retângulos na agrimensura. Esse tipo de triângulo, e suas propriedades, merecem destaque devido à utilização frequente das relações métricas e trigonométricas que resultam de seu estudo na resolução de várias situações-problema.

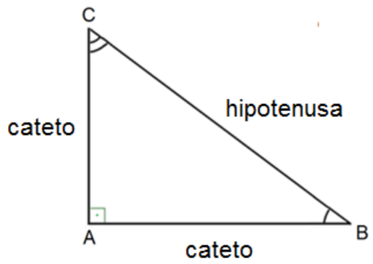
A altura relativa à hipotenusa em um triângulo retângulo decompõe-no em dois outros triângulos retângulos. A semelhança entre eles determina várias fórmulas chamadas de **Relações Métricas no Triângulo Retângulo** que são usadas na resolução de vários outros problemas. Dentre elas, o teorema de Pitágoras é o mais utilizado e também o mais famoso, pois aplicando-o, podemos resolver muitos problemas de cálculos que envolvem medidas. Observamos também sua aplicação no estudo relacionado à semelhança e medidas de polígonos regulares e circunferências. Esse estudo espera contribuir para a construção de conceitos e propriedades relevantes para o ensino da geometria.

3.2 Elementos de um triângulo retângulo

Um triângulo chama-se retângulo quando o valor de um dos seus ângulos internos medir 90º, ou seja, for um ângulo reto e, como consequência disso, os outros dois ângulos serão agudos.

No triângulo retângulo da figura a seguir, o lado $\overline{BC}$ que fica oposto ao ângulo reto é o de maior medida e recebe o nome de **hipotenusa**; os lados adjacentes ao ângulo reto, são $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, chamados de **catetos**.

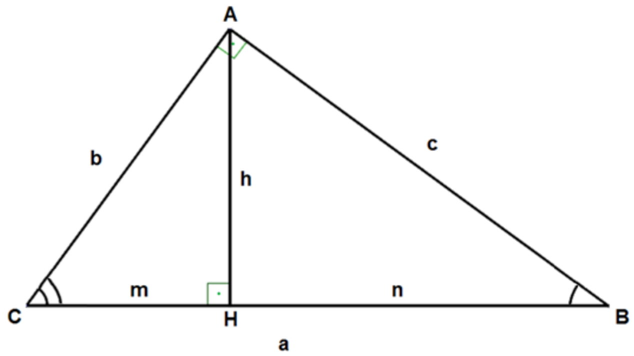
FIGURA 05: Triângulo Retângulo



Fonte: Autor, 2018

No triângulo retângulo ABC reto em A, ao traçar o segmento AH, perpendicular a BC, temos a altura relativa à hipotenusa, conforme figura a baixo:

FIGURA 06: Triângulo Retângulo 2



Fonte: Autor, 2018

Os elementos deste triângulo são:

a → hipotenusa $\overline{BC}$

b → cateto $\overline{AC}$

c → cateto $\overline{AB}$

h → altura $\overline{AH}$

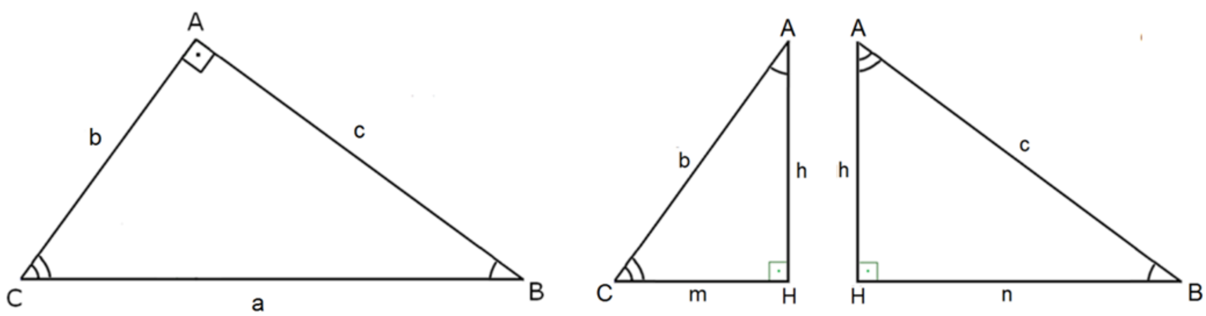
m → projeção de $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa

n → projeção de $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa

3.3 As Relações Métricas no Triângulo Retângulo

A altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ABC, divide o mesmo em dois triângulos retângulos, conforme as figuras abaixo:

FIGURA 07: Triângulos Retângulos Semelhantes



Fonte: Autor, 2018

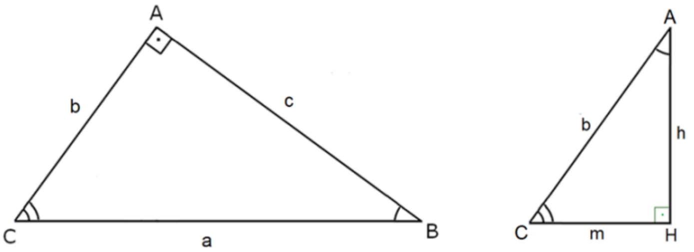
Os triângulos ABC, AHC e ABH são semelhantes (têm três ângulos congruentes). Então, podemos enunciar as relações que seguem.

3.3.1 Relação 01

A medida de cada cateto é a média proporcional (ou média geométrica) entre as medidas da hipotenusa e da projeção deste cateto.

Considerando a semelhança entre os triângulos ABC e AHC, temos:

FIGURA 08: Triângulos Retângulos Semelhantes 2

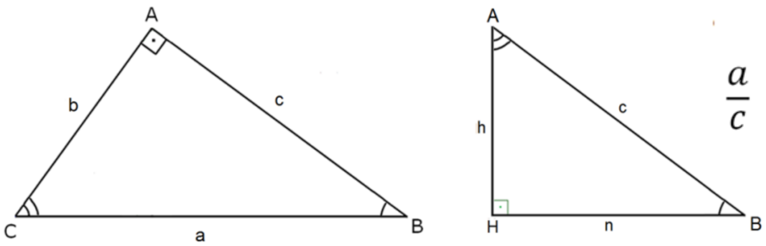


$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow \boxed{b^2 = a.m}$$

Fonte: Autor, 2018

Considerando a semelhança entre os triângulos ABC e ABH, temos:

FIGURA 09: Triângulos Retângulos Semelhantes 3



$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow \boxed{c^2 = a.n}$$

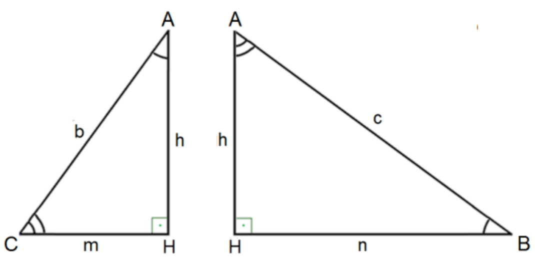
Fonte: Autor, 2018

3.3.2 Relação 02

A medida da altura à hipotenusa é a média proporcional (ou média geométrica) entre as medidas das projeções dos catetos.

Considerando a semelhança entre os triângulos AHC e ABH, temos:

FIGURA 10: Triângulos Retângulos Semelhantes 4



$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow \boxed{h^2 = m.n}$$

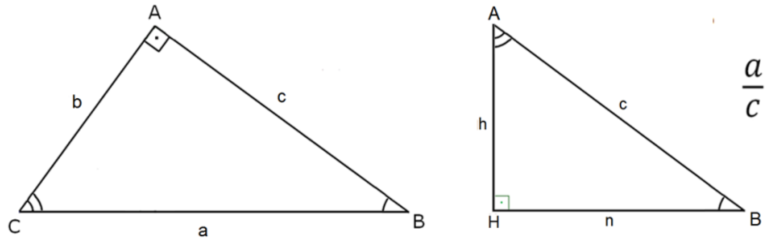
Fonte: Autor, 2018

3.3.3 Relação 03

O produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa a essa hipotenusa.

Considerando a semelhança entre os triângulos ABC e ABH, temos:

FIGURA 11: Triângulos Retângulos Semelhantes 5



$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow \boxed{b.c = a.h}$$

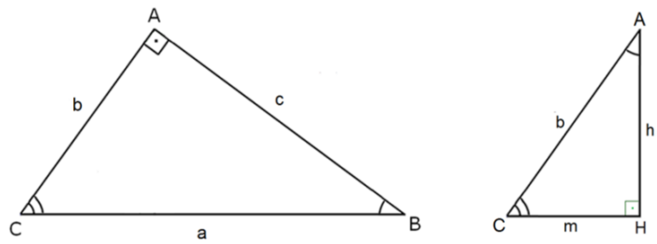
Fonte: Autor, 2018

3.3.4 Relação 04

O produto da medida de um cateto pela medida da hipotenusa é igual ao produto da medida de sua projeção pela medida do outro cateto.

Considerando a semelhança entre os triângulos ABC e AHC, temos:

FIGURA 12: Triângulos Retângulos Semelhantes 6

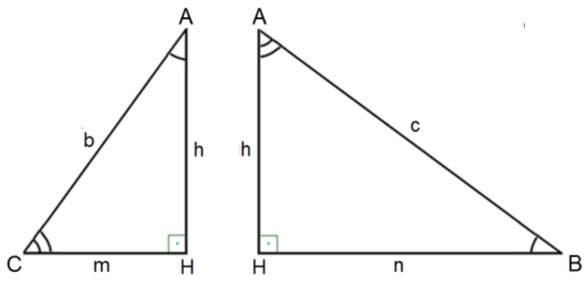


$$\frac{c}{h} = \frac{b}{m} \Rightarrow \boxed{b.h = m.c}$$

Fonte: Autor, 2018

Considerando a semelhança entre os triângulos AHC e ABH, temos:

FIGURA 13: Triângulos Retângulos Semelhantes 7



$$\frac{c}{b} = \frac{n}{h} \Rightarrow \boxed{c.h = n.b}$$

Fonte: Autor, 2018

A partir dessas relações, podemos demonstrar um dos teoremas mais famoso da Matemática. O Teorema de Pitágoras[5]

3.3.5 Relação 05 – Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

Somando membro a membro as igualdades obtidas na Relação 01 da página 19, e considerando que a soma das projeções corresponde a hipotenusa, temos:

$$b^2 + c^2 = a.m + a.n$$
$$b^2 + c^2 = a.(m + n)$$
$$b^2 + c^2 = a.a$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$

c.q.d.

3.3.6 Relação 06

O inverso do quadrado da medida da altura é igual à soma dos inversos dos quadrados das medidas dos catetos.

Da Relação 03 página 20, temos:

$$b.c = a.h$$
$$b^2.c^2 = a^2.h^2$$
$$\frac{1}{h^2} = \frac{a^2}{b^2 \cdot c^2}$$
$$\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{b^2 \cdot c^2} + \frac{b^2}{b^2 \cdot c^2}$$
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

c.q.d

[5]Embora o teorema seja atribuído a Pitágoras, existem provas concretas que os babilônios e os egípcios já conheciam tal relação bem antes de Pitágoras (Vide: Temas e Problemas Elementares. E. Lima, P. C. Carvalho, A. Morgado e E. Wagner. Coleção PROFMAT, SBM).

3.4 Um olhar geométrico sobre as relações métricas

As Relações Métricas no Triângulo Retângulo citadas até o momento podem ser verificadas das geometricamente, com o intuito de facilitar a visualização e o entendimento das propriedades geométricas.

A título de exemplificação, faremos a verificação geométrica das Relações 04 e 05. As demais verificações podem ser encontradas em diversas fontes como, por exemplo, em Lamas (2004).

Relação 05 – Teorema de Pitágoras

Verificação:

De acordo com Oliveira e Pinheiro (2016, p. 89), temos que:

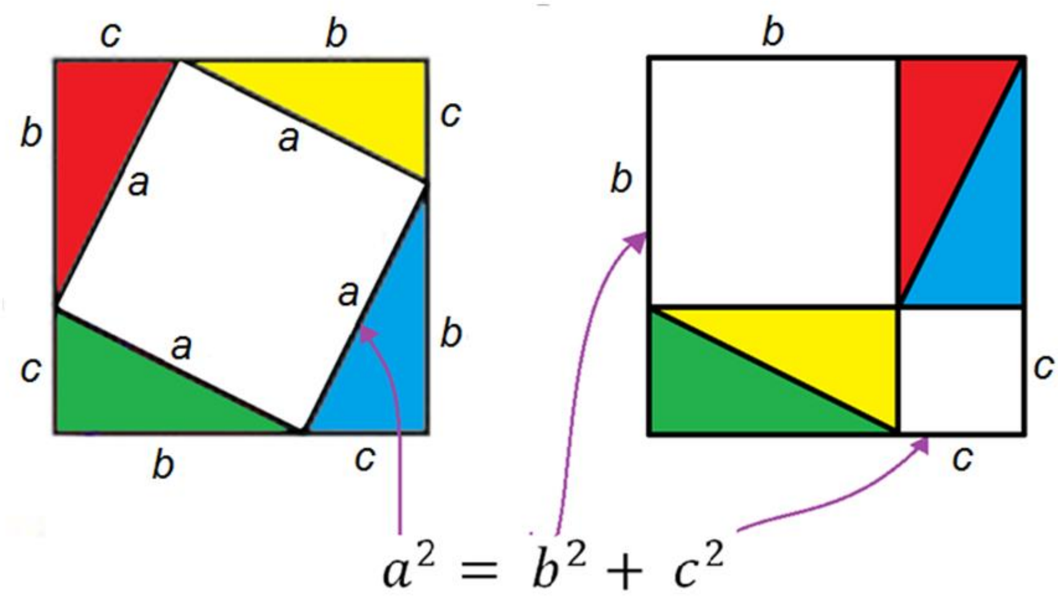
Em um quadrado de lado *b* + *c* (figura 14) desenhamos 4 triângulos retângulos, todos congruentes, de catetos *b* e *c* e hipotenusa *a*. No interior do quadrado original, temos um quadrado de lado a.

Arrastando os triângulos de modo a formar a figura 15, Observamos que nesta, temos dois quadrados brancos, um de lado *b* e outro de lado *c*.

Uma vez que a área em branco nas duas figuras deve possuir o mesmo valor, então a área do quadrado de lado *a* deve ser igual a soma das áreas dos quadrados de lados *b* e *c*, conforme indicado nas figuras abaixo.

FIGURA 14: Verificação Pitágoras

FIGURA 15: Verificação Pitágoras 2



Fonte: Autor, 2018

Relação 04

Mostrar que em um triângulo retângulo o produto da hipotenusa pela altura relativa a esta é igual ao produto dos catetos, ou seja, *b.c = a.h .*

Verificação:

Em Lamas (2004, p. 820), temos a seguinte verificação, com algumas adaptações na numeração das figuras:

(A) Unindo as hipotenusas dos dois triângulos congruentes construídos sendo um deles o que está dividido em outros dois na altura relativa à hipotenusa (Fig. 16), obtém-se um retângulo cuja área é dada pelo produto dos catetos *b* e *c* (Fig. 17).

A figura 17 é o próprio modelo utilizado para provar a relação pedida.

Vejamos.

FIGURA 16: Triângulos Retângulos

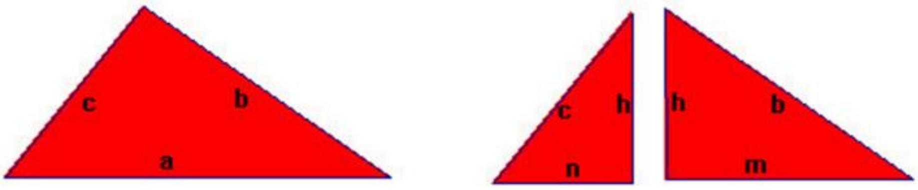
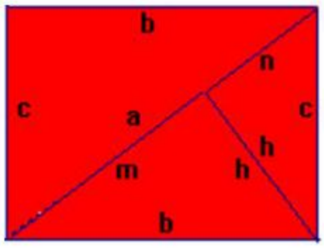
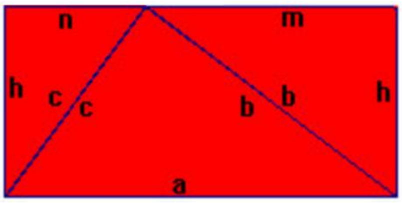


FIGURA 17: Retângulo



(B) Os triângulos da figura 17 são então posicionados de forma que os catetos *b* e *c* coincidam, para formar um novo retângulo de área *ah* (Fig. 18).

FIGURA 18: Retângulo 2



As áreas de figuras distintas formadas por triângulos congruentes são iguais. Logo, de (A) e (B)

$$b.c = a.h$$

4 A RELAÇÃO DE GERBERT

Neste capítulo trataremos da Relação de Gerbert, em seguida faremos a construção de uma nova relação, a fim de utilizá-la na resolução de situações problemas, envolvendo triângulo retângulo.

4.1 Determinando os catetos de um triângulo retângulo

Segundo Eves (2007), em sua Geometria, Gerbert teria resolvido no século X, um problema considerado muito difícil na época, consistindo em determinar os catetos de um triângulo retângulo, conhecendo algumas medidas. Tal solução deu origem à relação que leva o seu nome, Relação de Gerbert.

A Relação de Gerbert trata em determinar os catetos de um triângulo retângulo em função da área e da altura relativa à hipotenusa como se segue:

$$\textit{RELAÇÃO DE GERBERT}$$

$$c = \frac{\sqrt{a^2+4s} \pm \sqrt{a^2-4s}}{2} \qquad \begin{cases} c = cateto \\ a = hipotenusa \\ s = \text{área do triângulo} \end{cases}$$

Obs. Na relação de Gerbert o sinal “+” é utilizado para determinar a medida do maior cateto, enquanto que o sinal de “-” utiliza-se para determinar a medida do menor cateto.

Demonstração:

Sejam b e c as medidas dos catetos de um triângulo retângulo e a a medida de sua hipotenusa.

Sendo S a medida da área do triângulo retângulo, temos:

$$S = \frac{bc}{2}$$

$$2S = bc$$

$$4S = 2bc \quad \text{(I)}$$

Por outro lado, sabemos que:

$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

Onde aplicando o teorema de Pitágoras e usando (I) temos:

$$(b+c)^2 = a^2 + 4S$$

$b + c = \sqrt{a^2 + 4S}$ (II)

De maneira análoga considerando que $b > c$, podemos escrever:

$b - c = \sqrt{a^2 - 4S}$ (III)

Somando membro a membro (II) e (III), temos:

$2b = \sqrt{a^2 + 4S} + \sqrt{a^2 - 4S}$

$$b = \frac{\sqrt{a^2 + 4S} + \sqrt{a^2 - 4S}}{2} \quad (maior\ cateto)$$

Subtraindo agora (III) de (II) membro a membro, temos que:

$2c = \sqrt{a^2 + 4S} - \sqrt{a^2 - 4S}$

$$c = \frac{\sqrt{a^2 + 4S} - \sqrt{a^2 - 4S}}{2} \quad (menor\ cateto)$$

Considerando simultaneamente o maior e o menor cateto, temos a Relação de Gerbert.

4.2 Escrevendo uma nova relação

A partir da Relação de Gerbert, propomos uma relação, aqui denominada de Relação de JC (em alusão às iniciais do autor deste trabalho), que não encontramos em livros e manuais e que possibilita calcular a soma das medidas dos catetos de um triângulo retângulo (S_c) desde que se conheça a sua hipotenusa (a) e a altura relativa a mesma (h).

Esta relação apresenta-se da seguinte forma:

$$\boxed{S_c = \sqrt{a(a+2h)}}$$

Demonstração:

A partir da Relação de Gerbert, temos as seguintes igualdades:

Sendo o maior cateto: $$c_1 = \frac{\sqrt{a^2+4s} + \sqrt{a^2-4s}}{2} \quad \text{(I)}$$

e o menor cateto: $$c_2 = \frac{\sqrt{a^2+4s} - \sqrt{a^2-4s}}{2} \quad \text{(II)}$$

Somando membro a membro (I) e (II), temos:

$$c_1 + c_2 = \sqrt{a^2 + 4s}$$

Como $S_C = c_1 + c_2$ e $s = \frac{a.h}{2}$, então temos que:

$$S_C = \sqrt{a^2 + 2ah}$$

Ou seja,

$$S_C = \sqrt{a(a + 2h)} \quad \textit{c. q. d.}$$

Veremos mais adiante no capítulo 6, duas aplicações (problema 1 e problema 3) desta relação.

5 O PROBLEMA PROVOCADOR

O Problema Provocador nos foi apresentado pelo professor Manoel Leite Carneiro[6], durante nossos estudos no Grupo de Ensino Ideal e na ocasião ele desafiou-nos a lhe apresentar uma resolução mais econômica em termos de cálculos algébricos, do que a que se segue no seguinte problema.

Determinar a medida do menor cateto de um triângulo retângulo, sabendo que a medida da hipotenusa é 25 cm e altura relativa a ela mede 6,72 cm.

1ª solução:

$$Dados: \quad a = 25 \quad e \quad h = 6{,}72$$

Usando as relações métricas mais usuais, teremos:

$$I. \quad a = m + n$$

$$II. \quad h^2 = m.n$$

$$III. \quad b^2 = a.n$$

$$substituindo\ os\ dados\ em\ I\ e\ II\ , temos:$$

$$\begin{cases} m + n = 25 \\ m\,.\,n = 6{,}72^2 = 45{,}1584 \end{cases}$$

$$isolando\ \mathbf{m}\ na\ primeira\ equação\ e\ substituindo\ na\ segunda\ temos:$$

$$(\,25 - n\,).n \;=\; 45{,}1584$$

$$n^2 - \; 25\,n \;+\; 45{,}1584 \;= 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau em n, temos:

$$\Delta = (-25)^2 - \; 4.1.45{,}1584$$

$$\Delta = 625 - \; 180{,}6336$$

$$\Delta = 444{,}3664$$

[6] O professor Manoel Leite Carneiro nasceu em Alenquer - PA no ano de 1933, (1933-2014), e por mais de 60 anos exerceu funções docentes e administrativas, na Universidade federal do Pará, em escolas públicas e particulares da Educação Básica no Estado do Pará.

$$n = \frac{-(-25) \pm \sqrt{444,3664}}{2.1}$$

|

$$n = \frac{25 \pm 21,08}{2} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 23,04 \\ n_2 = 1,96 \checkmark \end{cases}$$

⇨ *Como queremos o menor cateto, devemos utilizar a menor projeção*

$$usando\ III$$

$$b^2 = 25\ .\ 1,96$$

$$b^2 = a.n$$

$$b = \sqrt{49}$$

$$b = 7$$

Portanto o menor cateto mede 7 cm.

2ª solução:

Utilizando a Relação de Gerbert temos:

$$\text{Área do Triângulo} \rightarrow S = \frac{25\ .\ 6,72}{2} = 84$$

$$C = \frac{\sqrt{25^2 + 4.84} - \sqrt{25^2 - 4.84}}{2} = \frac{\sqrt{961} - \sqrt{289}}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

6 APLICAÇÕES

Neste capítulo apresentaremos algumas aplicações práticas da Relação de Gerbert, e da Relação de JC.

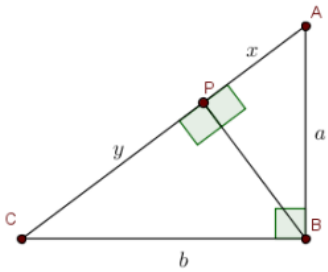
6.1 Problema 1:

OBMEP
Problema Olímpico – Nível C

Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 49 cm e a altura relativa à hipotenusa mede 16 cm. Calcule, em cm, a soma dos comprimentos dos catetos desse triângulo.

Solução 1

Na figura abaixo, o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo em B, a altura relativa hipotenusa é $\overline{BP} = 16$, $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$.



Agora observe que $\triangle APB$ e $\triangle ABC$ são triângulos semelhantes, pois possuem um ângulo em comum, o $\measuredangle PAB$, e possuem um ângulo reto.

Assim:

$$\frac{a}{49} = \frac{16}{b},$$

donde

$$ab = 784.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, podemos escrever que

$$a^2 + b^2 = 2401,$$

logo

$$(a+b)^2 = 2401 + 2ab,$$

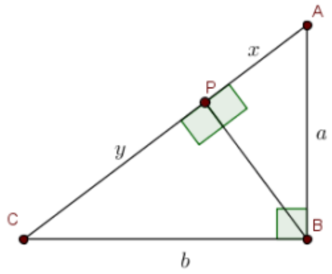
ou seja,

$$(a+b)^2 = 3969$$

e, finalmente,

$$a + b = 63cm.$$

Solução 2



Com base na figura acima podemos comparar as áreas dos três triângulos e observar que $A_{\triangle APB} + A_{\triangle CPB} = A_{\triangle ABC}$.

Assim segue que:

$$\frac{16x}{2} + \frac{16y}{2} = \frac{ba}{2}$$

$$16x + 16y = ba$$

$$16(x+y) = ba$$

$$16 \cdot 49 = ba$$

$$ba = 784$$

Pelo Teorema de Pitágoras temos que

$$a^2 + b^2 = 49^2 = 2401,$$

e, por outro lado,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

Assim,

$$(a+b)^2 = 2401 + 2ab = 2401 + 2 \cdot 784,$$

ou seja,

$$(a+b)^2 = 3969$$

e, finalmente,

$$a + b = 63.$$

Portanto, a soma dos catetos do triângulo ABC é $63cm$.

Solução 3:

Aplicando a Relação de JC temos:

$$S_c = \sqrt{a(a+2h)} = \sqrt{49(49+2.16)} = \sqrt{3969} = 63\ cm$$

6.2 Problema 2:

(UFPA) Determine as medidas dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo 10 cm e altura relativa a mesma, igual de 4,8 cm.

1ª Solução:

$$RelaçõesMétricas$$

$I.\ \ a = m + n$

$II.\ \ h^2 = m.n$

$III.\ \ b^2 = a.m$

$IV.\ \ c^2 = a.n$

$Dados:\ \ a = 10 \ \ e \ \ \ h = 4{,}8$

$substituindo\ os\ dados\ em\ I\ e\ II\ montamos\ o\ seguinte\ sistema:$

$$\begin{cases} m + n = 10 \\ m.n = 4{,}8^2 = 23{,}04 \end{cases}$$

$isolando\ \boldsymbol{m}\ na\ primeira\ equação\ e\ substituindo\ na\ segunda\ temos:$

$(10 - n).n = 23{,}04$

$n^2 - 10n + 23{,}04 = 0$

$Resolvendo\ a\ equação\ do\ 2º\ em\ n$

$\Delta = (-10)^2 - 4.1.23{,}04$

$\Delta = 100 - 92{,}16$

$\Delta = 7{,}84$

$$n = \frac{-(-10) \pm \sqrt{7{,}84}}{2.1}$$

$$n = \frac{10 \pm 2{,}8}{2} \begin{cases} n_1 = 6{,}4 \\ n_2 = 3{,}6 \end{cases}$$

$usando\ III, temos$:

$b^2 = a.n$

$b^2 = 10\ .\ 6{,}4$

$b = \sqrt{64}$

$\boxed{b = 8}$

$usando\ IV, temos$:

$c^2 = a.n$

$c^2 = 10.3{,}6$

$c^2 = 36$

$c = \sqrt{36}$

$\boxed{c = 6}$

Portanto as medidas são 6 cm e 8 cm.

2ª Solução:

Utilizando a Relação de Gerbert temos:

$Área\ do\ Triângulo$: $\quad s = \dfrac{10\ .\ \ 4{,}8}{2} = 24$

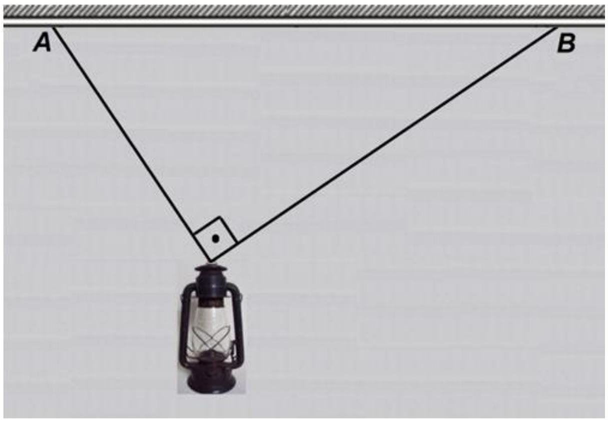
$$c = \frac{\sqrt{a^2 + 4s} \pm \sqrt{a^2 - 4s}}{2}$$

$$c = \frac{\sqrt{10^2 + 4.24} \pm \sqrt{10^2 - 4.24}}{2} = \frac{\sqrt{196} \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} c_1 = \dfrac{14+2}{2} = 8 \\ c_2 = \dfrac{14-2}{2} = 6 \end{cases}$$

É possível perceber aqui o quão econômico se torna a utilização da Relação de Gerbert, quando confrontada com a resolução que faz uso das demais relações.

6.3 Problema 3:

(UFRS) O lampião, representado na figura, está suspenso por duas cordas perpendiculares presas ao teto, nos pontos A e B que distam entre si de 50 cm. Sabendo que a distância entre o lampião e o teto é de 24 cm, determine a quantidade de corda utilizada em centímetros.



1ª Solução:

$$Relações Métricas$$

$I.\ \ a = m + n$

$II.\ \ h^2 = m.n$

$III.\ \ b^2 = a.m$

$IV.\ \ c^2 = a.n$

$$Dados:\ \ a = 50 \quad e \quad h = 24$$

$substituindo\ os\ dados\ em\ I\ e\ II\ montamos\ o\ seguinte\ sistema:$

$$\begin{cases} m + n = 50 \\ m.n = 24^2 = 576 \end{cases}$$

$isolando\ \boldsymbol{m}\ na\ primeira\ equação\ e\ substituindo\ na\ segunda\ temos:$

$(50 - n).n = 576$

$n^2 - 50n + 576 = 0$

$Resolvendo\ a\ equação\ do\ 2º\ em\ n$

$\Delta = (-50)^2 - 4.1.576$

$\Delta = 2500 - 2304$

$\Delta = 196$

$$n = \frac{-(-50) \pm \sqrt{196}}{2.1}$$

$$n = \frac{50 \pm 14}{2} \begin{cases} n_1 = 32 \\ n_2 = 18 \end{cases}$$

$usando\ III, temos:$

$$b^2 = a.n$$

$$b^2 = 50\,.\,32$$

$$b = \sqrt{1600}$$

$$\boxed{b = 40}$$

$usando\ IV, temos:$

$$c^2 = a.n$$

$$c^2 = 50.18$$

$$c^2 = 900$$

$$c = \sqrt{900}$$

$$\boxed{c = 30}$$

portanto

$$\boxed{b + c = 70\ cm}$$

2ª Solução:

Aplicando a Relação de JC, temos:

$$S_c = \sqrt{a(a+2h)} = \sqrt{50(50+2.24)} = \sqrt{4900} = 70\ cm$$

Novamente destacamos a economia que se apresenta ao utilizar uma relação alternativa que denominamos de Relação de JC.

7 UMA PROPOSTA DE INCLUSÃO NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

Neste capítulo faremos uma breve reflexão sobre a abordagem das Relações Métricas no ensino básico, o que propõe os PCN's e em seguida faremos uma proposta de inclusão no currículo de matemática.

7.1 Relações métricas - livros didáticos

Por meio de nossa experiência em sala de aula verificamos que, geralmente, os livros didáticos utilizados no apoio do ensino das Relações Métricas no Triângulo Retângulo, dificilmente abordam de maneira ampla esse conteúdo, deixando de lado algumas relações importantes que são de fundamental importância para o aluno.

Em particular esse fato verifica-se de forma explícita com a ausência da Relação de Gerbert, que pode ser usada em alguns casos para simplificar em termos de cálculo algébrico a resolução de situações problemas como visto no capítulo anterior, e que dificilmente é abordada em livros didáticos da Educação Básica.

Outro ponto a se frisar é em relação à história da matemática como recurso metodológico, pois observamos que em geral não se faz uma introdução histórica a respeito das Relações Métricas o que poderia ser uma ferramenta a mais no auxílio do processo de ensino aprendizagem, fato que torna o assunto trabalhado como algo puramente abstrato e sem contextualização. Segundo os PCN's (1997):

> "Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer idéias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês" e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento."(PCN'S, 1997, p. 34)

Assim, entendemos que uma abordagem histórica dos conteúdos, aliada à curiosidade dos alunos, pode facilitar a significação e a desmistificação da matemática, auxiliando para um melhor processo de ensino e de aprendizagem.

7.2 O que propõe os PCN's

De acordo com os PCN's (1998) no que tange o ensino das Relações Métricas, temos:

> - Do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
>
> [...]

> - ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais. (PCN'S, 1998, p. 81)

Além disso, a que se refere aos conteúdos propostos para o ensino de matemática, e em particular para o estudo das Relações Métricas no Triângulo Retângulo, no bloco espaço e forma, pode eventualmente ser identificado, conforme os PCN's (1998),"[...] - Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras." (PCN's, 1998, p,89)".Pois sabemos que uma das possíveis e frequentes formas de demonstrar o Teorema de Pitágoras em sala de aula é feita por meio das Relações Métricas. De acordo com os PCN's (1998):

> "[...] no caso do teorema de Pitágoras, essa justificativa poderá ser feita com base na congruência de figuras planas e no principio da aditividade para as áreas. Posteriormente, os alunos poderão também demonstrar esse teorema quando tiverem se apropriado do conceito de semelhança de triângulos e estabelecido às relações métricas dos triângulos retângulos." (PCN's, 1998, p.127)

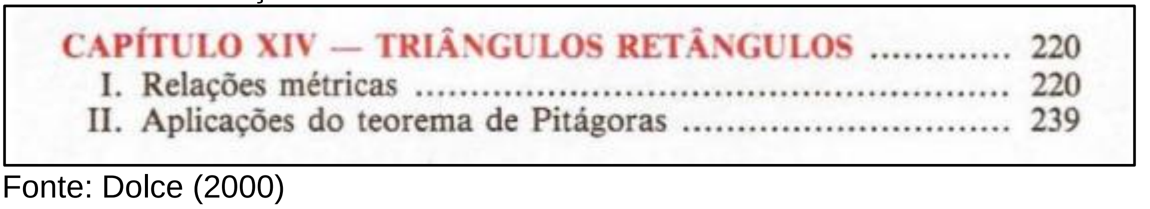
Assim, notemos que, tanto no conteúdo como nas orientações didáticas, os Parâmetros Curriculares Nacionais fazem referência ao assunto de Relações Métricas no Triângulo Retângulo, sinalizando para sua importância na formação do educando.

7.3 Uma proposta de inclusão

No que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem do tema em questão, e tomando por base o que apresentamos neste trabalho, propomos modificações nos livros e manuais didáticos da Educação Básica brasileira, de forma a unificar procedimentos, uma vez que nos foi possível constatar que isso não vem ocorrendo.

De um modo geral as Relações Métricas no triângulo retângulo, são apresentadas nos sumários como na figura a seguir:

FIGURA 19: Relações métricas nos livros didáticos



CAPÍTULO XIV — TRIÂNGULOS RETÂNGULOS 220
I. Relações métricas 220
II. Aplicações do teorema de Pitágoras 239

Fonte: Dolce (2000)

As Relações Métricas no Triângulo Retângulo foram aqui apresentadas, numeradas de 01 a 06 (pg. 22 a 24), mas percebemos uma incompletudo em livros e manuais de Matemática, como podemos apontar que Dolce(2000), por exemplo, apresenta em seu livro as relações de 01 a 05, não apresentando a relação 06, enquanto Morgado, Wagner e Jorge (2008), apresentam as relações 01, 02, 03, 05 e 06, deixando de exibir a relação 04.

Nossa proposta vem no sentido de que as seis relações aqui demonstradas, assim como as verificações geométricas de algumas, que comumente não constam de livros e manuais, passem a constar. Além disso sugerimos também que nos textos escolares de Matemática da Educação Básica, sejam apresentados um breve histórico de Gerbert d'Aurillac, não somente por se tratar do único Papa matemático, mas, e principalmente em razão da relação métrica proposta por ele, e que leva o seu nome, como forma de resgate da mesma, que se mostra econômica quando da resolução de alguns problemas envolvendo Relações Métricas nos Triângulos Retângulos.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O resgate deste trabalho, voltado ao ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica, só foi viabilizado graças a pesquisas do autor por algo que lhe instigara o conhecimento.

Para chegar a proposta de inclusão feita ao seu final, foi necessário a realização de pesquisa bibliográfica sobre uma temática ainda obscura que é a participação de Gerbert d'Aurillac, que posteriormente tornara-se o Papa Silvestre II.

Acreditamos que os frutos deste trabalho venham, de alguma forma, contribuir para a melhoria da aprendizagem dos alunos e futuros professores, bem como sirva de instrumento para despertar o interesse e aguçar a curiosidade do leitor a fim de buscar aprofundar mais os seus conhecimentos nesta área.

Esperamos que tais medidas incentivem a promoção e discussão da inclusão proposta e possa também estimular o uso das verificações geométricas das Relações Métricas no Triângulo Retângulo, proposto por Lamas (2004), que, como dito, não é comum de se encontrar, mas que entendemos que podem ser ensinadas por meio de atividades experimentais, feitas em sala de aula, com modelos concretos.

Almejamos que essa proposta de inclusão pode despertar nos alunos um interesse maior pelo estudo da geometria.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, F. A. **História das Matemáticas na Antiguidade**. Lisboa: Aillaud& Bertrand, 1925.

BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana - **Coleção do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 1997.

BIANCHINI, C.; SENATORE, L. J. ***Distinguished Figures in Descriptive Geometry and Its Applications for Mechanism Science.*** Rome, Italy: Springer, 2016.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Matemática). Brasília: Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

BROWN, N. M. ***The Abacus and the Cross:*** *The Story of the Pope Who Brought the Light of Science to the Dark Ages*. New York: Basic Books, 2012.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2ª ed. São Paulo: Ática,1998.

DOLCE, O. **Fundamentos da Matemática Elementar:** Geometria Plana, Vol. 9, 7ª ed. São Paulo: Atual, 2000.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** São Paulo: UNICAMP, 2007.

FERREIRA, E. S. O ÁBACO DE SILVESTER II. **Revista Brasileira de História da Matemática** - Vol. 8 nº15. São Paulo: UNICAMP, 2008.

IFRAH, G. ***Histoire Universelle des chiffres****, Vol. II*. Paris: Robert Laffont,1994.

IFRAH, G. **OS NÚMEROS:** A história de uma grande invenção. São Paulo: Globo, 2005.

LAMAS, R. C. **O Teorema de Pitágoras e as Relações Métricas no Triângulo Retângulo com material emborrachado.** São José do Rio Preto: UNESP, 2004.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MORGADO, A. C. ; WAGNER, E. ; JORGE, M. **Geometria II.** Fortaleza: VestSeller, 2008.

MORI, D. ; ONAGA, D. S. **Matemática:** idéias e desafios.São Paulo: Saraiva, 2012.

CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. ***Gerbert of Aurillac****. Mac Tutor History of Mathematics,* 2012. Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gerbert.html, acesso em 13/11/2016.

OLIVEIRA, M. R. ; PINHEIRO, M. R. . **Elementos de Matemática – Vol 2**. Belém: Marcelo Rufino de Oliveira, 2016.

ROQUE, T. **História da Matemática.** Rio de Janeiro: ZAHAR, 2012.

TAHAN, M. **As Maravilhas da Matemática.** Rio de Janeiro: BLOCH, 1987.

GLOSSÁRIO

Abade – Responsável pelo mosteiro.

All-Andalus – Nome dado à Península Ibérica (com a Septimânia) no século VIII.

Autômato – Máquina ou robô que se opera de maneira automática.

Conclave – Reunião do sacro colégio de cardeais, convocado para eleger um novo pontífice.

Erudito – Alguém que possui uma cultura vasta, sobre um determinado assunto

Indo-arábicos – É o sistema de numeração utilizado atualmente.

Prolífico – que gera prole.

Quadrivium – Estudo da música, aritmética, geometria e astronomia.

Simonia – Comércio das coisas sagradas

Sínodo – Assembléia de eclesiásticos e de leigos, convocados pelo seu prelado ou outro superior, que se reúnem com o propósito de “caminhar juntos”, seguindo um determinado plano.

Trivium – Estudo da retórica, lógica ou dialética e gramática.

ANEXO A – OS ANOS DE GERBERT NA EUROPA (950-1003 A.D.)

ANEXO B –A CARTA DO PAPA JOÃO PAULO II

CARTA DO PAPA JOÃO PAULO II AO BISPO DA DIOCESE DE SAINT-FLOUR NO MILENÁRIO DA ELEVAÇÃO DO MONGE GERBERTO COM O NOME DE SILVESTRE II AO SÓLIO PONTIFÍCIO

D. René SEJOURNE
Bispo de Saint-Flour

1. Há mil anos, no dia 2 de Abril, Gerberto tornou-se Papa com o nome de Silvestre II. Por ocasião da comemoração deste evento, desejo unir-me mediante o pensamento e a oração a todas as pessoas que o hão-de celebrar na Diocese de Saint-Flour, em particular aos participantes nas Jornadas de Estudos organizadas pela Associação do Cantal. Era na cidade de Aurillac que se encontrava o mosteiro beneditino fundado por São Geraldo, que recebeu o jovem pastor Gerberto e nele forjou o homem e o cristão.

2. Homem notável, o monge Gerberto dominou o seu século de maneira singular. A vastidão do seu saber, as suas qualidades pedagógicas, a erudição sem precedentes, a rectidão moral e o sentido espiritual fizeram dele um verdadeiro mestre. Os imperadores e os Papas recorreram a ele. Humanista sábio, filósofo versado e autêntico promotor da cultura, Gerberto colocou a sua inteligência ao serviço do homem, formando o seu espírito e o seu coração, sempre em busca da verdade através da leitura de obras profanas e da meditação da Escritura. Tudo despertava o seu interesse: se ignorava, aprendia; se sabia, transmitia.

Em virtude do seu espírito de abertura e de grande generosidade, Gerberto soube pôr o seu saber e as suas qualidades morais e espirituais ao serviço do homem e da Igreja. Ele recorda-nos que a inteligência é uma maravilhosa dádiva do Criador, que tem em vista fazer com que o homem seja cada dia mais responsável pelos talentos recebidos e sirva o próximo, cumprindo desta forma a sua verdadeira vocação.

3. Homem de Igreja activo e fiel, Gerberto prodigalizou-se ao serviço dos seus irmãos. Como Pastor genuíno, defendeu os interesses da Igreja, combateu a simonia e salvaguardou os mosteiros contra as várias usurpações. Homem de unidade e de paz, sabia repreender paternalmente aqueles que se afastavam do bem, denunciava os abusos e perdoava, chegando a eclipsar-se quando havia o perigo das divisões. Com zelo apostólico, favoreceu a implantação da Igreja na Hungria e na Polónia. Gerberto foi um reformador singular, e a consciência que ele tinha do próprio ministério fez dele um Papa dotado de espírito missionário, desejoso de anunciar o Evangelho através da sua palavra e durante a vida inteira. No limiar do terceiro milénio, enquanto grassam a violência e as guerras, e os cristãos ainda estão desunidos, a figura de Gerberto convida-nos a buscar incansavelmente a paz e a unidade através da via do diálogo, solícitos pela verdade e pelo perdão. A este propósito, como eu já disse na Carta Apostólica *Tertio millennio adveniente*, o Jubileu deve ser «a ocasião propícia para uma frutuosa colaboração, visando colocar em comum as muitas coisas que nos unem e que seguramente são mais do que aquelas que nos dividem» (n. 16).

4. Gerberto manifestava incessantemente a sua preferência pela investigação da verdade e a sua vontade de a servir. Ele demonstrou que o homem é convidado a seguir o caminho, cujo «ponto de partida está na capacidade de a razão superar o contingente para se estender até ao infinito» (Carta Encíclica *Fides et ratio*, 24). Para Gerberto, bem como para todos os crentes, a verdade revela-se em Cristo, Palavra eterna na qual todas as coisas foram criadas, e Palavra encarnada que revela o Pai (cf. *ibid*., n. 34). E a Palavra em que acreditamos esclarece o nosso conhecimento do homem e da história, e faz-nos descobrir a salvação e a felicidade para as quais somos chamados.

Sem dúvida, as problemáticas contemporâneas são diferentes daquelas que Gerberto enfrentou, mas a sua atitude intelectual e espiritual constitui um apelo aos pastores e fiéis do tempo moderno: ir à busca da verdade, encontrar a força interior na oração, ser solícitos pela investigação moral e colocar-se ao serviço dos homens. Que os cristãos tenham este mesmo desejo, não de se mostrar aos olhos dos homens, mas de ser exemplos e modelos, testemunhando deste modo que Cristo é a fonte da felicidade!

5. A Igreja prepara-se para celebrar o Grande Jubileu do Ano 2000, recordando que Cristo, alfa e ómega, nos conduz rumo ao Pai das misericórdias. Não nos podemos esquecer de que a primeira passagem de milénio foi portadora de numerosas esperanças. Apraz-me sublinhar que Silvestre II uniu os seus esforços aos do imperador Otão III para administrar a cristandade, como já o Papa Silvestre I tinha feito, colaborando com o imperador Constantino. Portanto, devemos considerar que a solicitude pela unidade e a harmonia entre os povos pertencia ao pensamento de Gerberto e deve inspirar sempre a acção da Igreja e dos homens responsáveis pela vida social. A paz é uma tarefa comum e a Igreja quer dar-lhe a sua contribuição, pois ela constitui um serviço ao homem e portanto um serviço a Deus. Enquanto o nosso mundo, submetido a transformações cada vez mais numerosas, aspira a uma paz profunda, Gerberto deixa-nos uma mensagem que D. Paul Lecoeur, Bispo de Saint-Flour e antigo predecessor de Vossa Excelência, na sua carta pastoral por ocasião do milénio do nascimento do Papa Silvestre II, resumiu assim: «Pacificar, congregar e unir em Cristo». Esta paz deve realizar-se nos sectores mais diversificados, pois o campo de actividade do homem é vário. Essa só é possível se ele tiver em conta o Evangelho e os valores humanos e morais fundamentais, no respeito de todas as pessoas.

6. Por conseguinte a acção pastoral de Gerberto, e não só a do seu Pontificado relativamente breve, impressiona em virtude da sua multiplicidade e actualidade. Essa pode ser apreciada através do seu serviço às questões da Igreja, dos seus esforços de renovação, da sua solicitude pela comunhão e do seu sentido de diálogo. O Concílio Vaticano II salientou todos estes aspectos, em vista de uma nova evangelização. Oxalá a figura de Gerberto, o primeiro Papa francês, ilumine todos nós no serviço à Igreja e aos nossos irmãos, para a glória de Deus e a salvação do mundo!

Enquanto o confio à intercessão da Mãe de Deus e de São Flour, primeiro evangelizador e padroeiro da sua Diocese, concedo-lhe de todo o coração, bem como aos seus diocesanos e àqueles que participarem nesta comemoração, a minha Bênção apostólica.

Vaticano, 7 de Abril de 1999.

PAPA JOÃO PAULO II