COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Diogo Bastos dos Santos

A EQUAÇÃO $x^y = y^x$

E POSSÍVEIS CAMINHOS NA BUSCA POR SOLUÇÕES

Rio de Janeiro
2018

Diogo Bastos dos Santos

A EQUAÇÃO $x^y = y^x$
E POSSÍVEIS CAMINHOS NA BUSCA POR SOLUÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Prof(a). Drª Luciana Santos da Silva Martino

Rio de Janeiro
2018

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

S237 Santos, Diogo Bastos dos

A equação $x^y = y^x$ e possíveis caminhos na busca por soluções / Diogo Bastos dos Santos. – Rio de Janeiro, 2018.

91 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Luciana Santos da Silva Martino.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Equação. 3. Análise gráfica. I. Martino, Luciana Santos da Silva. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Andre Dantas – CRB7 5026

Diogo Bastos dos Santos

A EQUAÇÃO $x^y = y^x$
E POSSÍVEIS CAMINHOS NA BUSCA POR SOLUÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____
Drª Luciana Santos da Silva Martino
Colégio Pedro II

____
Drª Tatiana Marins Roque
UFRJ

____
Drº Wellerson Quintaneiro da Silva
CEFET - RJ

____
Drª Marilis Bahr Karam Venceslau
Colégio Pedro II

Rio de Janeiro
2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família pelo apoio e incentivo durante a realização do curso PROFMAT.

Agradeço aos meus colegas de turma pela ajuda durante as longas jornadas de estudos. Pois sei que de algum modo todos contribuíram muito com a minha formação.

Gostaria de agradecer também aos professores do curso PROFMAT pelos conteúdos transmitidos durante as aulas. Em especial, àqueles do primeiro ano de curso, pois foram imprescindíveis para a minha aprovação no exame nacional de qualificação.

Por fim, mas não menos importante, agradeço à professora Luciana pelo incentivo, correções e conselhos durante a orientação dessa dissertação.

RESUMO

SANTOS, Diogo Bastos dos. **A EQUAÇÃO $x^y = y^x$ E POSSÍVEIS CAMINHOS NA BUSCA POR SOLUÇÕES**. 2018. 91 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

O objeto de estudo desse trabalho é a equação $x^y = y^x$, no campo dos números reais positivos. São analisadas as condições necessárias sobre os valores reais positivos de x e y , de modo que estes números satisfaçam tal equação. São apresentados dois caminhos possíveis para a construção de suas soluções, determinadas em ambos os caminhos, por uma mesma curva parametrizada. As coordenadas que descrevem essa parametrização são analisadas de maneira a caracterizar essas soluções como inteiras ou racionais (não inteiras). A partir das soluções apresentadas, é realizada uma análise gráfica das mesmas, concentrando a maior parte dessa análise sobre o traço da curva parametrizada que descreve as soluções não triviais. Com esta análise também é possível visualizar o comportamento dessas soluções, rastreadas pelos dois caminhos apresentados no início desse trabalho. No intuito de apresentar o assunto sobre as soluções reais e positivas desta equação no Ensino Médio, ao final desta pesquisa são propostas algumas atividades que abordam métodos de resolução de equações, algébricos, geométricos e numéricos, desde o “tentativa e erro” até o método numérico da bisseção.

Palavras-chave: Equação; Solução; Parametrização; Análise Gráfica; Métodos de Resolução.

ABSTRACT

SANTOS, Diogo Bastos dos. **A EQUAÇÃO $x^y = y^x$ E POSSÍVEIS CAMINHOS NA BUSCA POR SOLUÇÕES.**. 2018. 91 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

The object of study of this work is the equation $x^y = y^x$, in the field of positive real numbers. The necessary conditions on the positive real values of x and y are analyzed, so that these numbers satisfy this equation. Two possible paths are presented for the construction of their solutions, determined in both paths, by a same parameterized curve. The coordinates that describe this parameterization are analyzed in order to characterize these solutions as integer or rational (not integer). From the solutions presented, a graphical analysis of them is performed, concentrating most of this analysis on the parameterized curve trait that describes the nontrivial solutions. With this analysis it is also possible to visualize the behavior of these solutions, traced by the two paths presented at the beginning of this work. In order to present the subject about the real and positive solutions of this equation in High School, at the end of this research are proposed some activities that approach methods of solving equations, algebraic, geometric and numerical, from "trial and error" to method number of the bisection.

Keywords: Equation; Solution; Parameterization; Graphic Analysis; Methods of Resolution.

LISTA DE FIGURAS

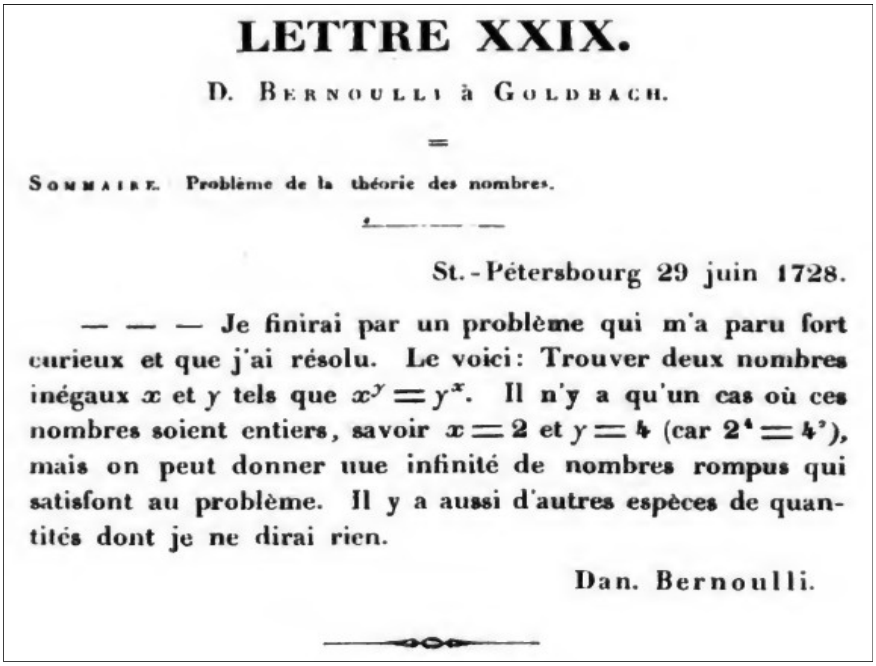
SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao tentar estudar a equação $x^y = y^x$, nos deparamos com uma equação indeterminada, nas variáveis x e y, com infinitas soluções em que não é possível expressar uma de suas variáveis somente em função da outra. Essas características peculiares, nos obriga a buscar métodos de resolução diferentes dos tradicionalmente vistos em sala de aula. Métodos que podem ser numéricos, algébricos ou geométricos, nos forçando em algumas ocasiões, no caso de soluções irracionais, a trabalhar com valores aproximados para as soluções de $x^y = y^x$.

O problema sobre encontrar números x e y que satisfaçam a equação $x^y = y^x$ não é recente. Segundo Bennett e Reznick (2004), a primeira referência histórica sobre a equação $x^y = y^x$ pode ser encontrada em uma carta que Daniel Bernoulli[1] escreveu para Christian Goldbach[2], que está datada em 29 de junho de 1728, conforme Figura 1.

Figura1: Carta de Bernoulli a Goldbach



LETTRE XXIX.

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Problème de la théorie des nombres.

St.-Pétersbourg 29 juin 1728.

— — — Je finirai par un problème qui m'a paru fort curieux et que j'ai résolu. Le voici: Trouver deux nombres inégaux x et y tels que $x^y = y^x$. Il n'y a qu'un cas où ces nombres soient entiers, savoir $x = 2$ et $y = 4$ (car $2^4 = 4^2$), mais on peut donner uue infinité de nombres rompus qui satisfont au problème. Il y a aussi d'autres espèces de quantités dont je ne dirai rien.

Dan. Bernoulli.

Fonte: Correspondance Mathématique et Physique, vol.2, p.262

1 Matemático, físico e professor suíço (1700-1782).
2 Matemático prussiano (1690-1764).

Nessa carta, Bernoulli comenta sobre a única solução inteira da equação $x^y = y^x$ com $y \neq x$ e afirma que existem infinitos números racionais que satisfazem o problema. Porém, Bernoulli não realiza nenhuma demonstração formal que confirme seus comentários.

Goldbach então, responde a Bernoulli, ratificando os seus comentários sobre a equação $x^y = y^x$ possuir uma única solução inteira com $y \neq x$ e infinitas soluções racionais. Além de mostrar uma solução geral para equação $x^y = y^x$, como podemos ver na Figura 2.

Figura 2: Carta de Goldbach a Bernoulli

LETTRE XXXV.

GOLDBACH à D. BERNOULLI.

SOMMAIRE. Solution de l'équation: $x^y = y^x$. Sommation des séries par approximation. Suite convergente pour $\sqrt{2}$. Théorème de la doctrine des séries.

Moscou ce 31 janvier 1729.

Je me servirai avec plaisir du mémoire que vous m'avez envoyé touchant les particularités de la vie de feu M. votre frère.

Je ne trouve pas la moindre difficulté à faire voir que, dans l'équation $x^y = y^x$, les nombres x et y ne peuvent être entiers à moins que l'un ne soit $= 2$, et l'autre $= 4$, et que, pour les nombres rompus, on peut donner une infinité de solutions. Voici comment je m'y prends: Je fais $y = ax$, donc $x^{ax} = a^x x^x$ et enfin $x = a^{\frac{1}{a-1}}$. Or, il est visible que x ne peut être un nombre entier que dans la supposition de $a = 2$; car si a est un nombre entier plus

— 281 —

grand que 2, on voit d'abord que x devient irrationel; d'un autre côté, a étant un nombre rompu, toutes ses puissances seront autant de nombres rompus, et par conséquent x ne peut être un nombre entier; mais pour exprimer la valeur de x par des nombres rompus, il n'y a qu'à faire

$$x = f^{\frac{g}{f-g}} : g^{\frac{g}{f-g}}$$

où f et g soient des nombres entiers.

Fonte: Correspondance Mathématique et Physique, vol.2, p.280,281

Em 1748, Leonhard Euler[3] também realizou um estudo sobre a equação $x^y = y^x$ no segundo volume de seu livro *Introductio In Analysin Infinitorum*. De acordo com Bennett e Reznick (2004), Euler soluciona a equação para os reais positivos e mostra como calcular as suas soluções racionais.

Na Figura 3, alguns valores racionais para x e y dados por Euler que são soluções da equação $x^y = y^x$ são apresentados. Em seguida, o próprio Euler realiza algumas verificações e confirma que esses valores realmente satisfazem a igualdade $x^y = y^x$.

Figura 3: A equação $x^y = y^x$ resolvida por L. Euler

Inter infinitas alias hujus generis Curvas, quarum conſtructio per Logarithmos effici poteſt, dantur ejuſmodi, quarum conſtructio non tam facile patet, quæ tamen ope idoneæ ſubſtitutionis abſolvi queat. Talis eſt Curva æquatione $x^y = y^x$ contenta; ex qua quidem ſtatim perſpicitur, Applicatam y perpetuo æqualem eſſe Abſciſſæ x, ita ut recta ad Axem ſub angulo ſemirecto inclinata æquationi ſatisfaciat. Interim tamen manifeſtum eſt hanc æquationem latius patere, quam æquationem pro recta $y = x$; neque igitur hanc vim æquationis $x^y = y^x$ exhaurire: ſatisfieri enim huic æquationi poteſt, etiamſi non ſit $x = y$; quoniam, ſi $x = 2$, etiam eſſe poteſt $y = 4$. Præter rectam ergo EAF, æquatio propoſita alias complectetur partes; ad quas inveniendas, ideoque ad totam Lineam æquatione contentam exhibendam, ponamus $y = tx$, ut ſit $x^{tx} = t^x x^x$: unde, radice poteſtatis x extrahenda, erit $x^t = tx$ & $x^{t-1} = t$; ideoque habebitur $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ & $y = t^{\frac{t}{t-1}}$. Vel, poſito $t - 1 = \frac{1}{u}$, erit $x = (1 + \frac{1}{u})^u$ & $y = (1 + \frac{1}{u})^{u+1}$. Hinc Curva, præter rectam EAF, habebit ramum RS ad rectas AG & AH, tanquam Aſymtotas, convergentem, cujus recta AF erit Diameter. Secabit autem Curva rectam AF in puncto C ita ut ſit $AB = BC = e$, denotante e numerum cujus Logarithmus eſt unitas. Inſuper autem æquatio ſuppeditat innumerabilia puncta diſcreta, quæ cum recta EF, & Curva RCS æquationem exhauriunt. Hinc ergo innumerabilia binorum numerorum x & y paria exhiberi poſſunt ut ſit $x^y = y^x$, tales enim numeri in rationalibus erunt

$$
\begin{array}{ll}
x = 2 & y = 4 \\
x = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} & y = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8} \\
x = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} & y = \frac{4^4}{3^4} = \frac{256}{81} \\
x = \frac{5^4}{4^4} = \frac{625}{256} & y = \frac{5^5}{4^5} = \frac{3125}{1024} \\
\&c. & \&c.
\end{array}
$$

horum ſcilicet binorum numerorum alter ad alterum elevatus eandem quantitatem producit: ſic erit

$$
\begin{array}{c}
2^4 = 4^2 = 16 \\
(\frac{9}{4})^{\frac{27}{8}} = (\frac{27}{8})^{\frac{9}{4}} = (\frac{3}{2})^{\frac{27}{4}} \\
(\frac{64}{27})^{\frac{256}{81}} = (\frac{256}{81})^{\frac{64}{27}} = (\frac{4}{3})^{\frac{256}{27}} \\
\&c.
\end{array}
$$

Fonte: Introductio In Analysin Infinitorum, vol.2, p.293-295,1797

3 Matemático e físico suíço (1707 – 1783).

Outra referência é Johann Van Hengel[4], que em 1888, demonstrou que os números 2 e 4 , formam o único par de inteiros positivos que satisfaz a equação $x^y = y^x$. Na Figura 4, encontra-se o início da demonstração realizada por Hengel.

Figura 4: Demonstração de Johann Van Hengel

b) Beweis des Satzes, dass unter allen reellen positiven ganzen Zahlen nur das Zahlenpaar 4 und 2 für a und b der Gleichung $a^b = b^a$ genügt.

Der Beweis, welcher hier gegeben werden soll, stützt sich auf folgende 2 Hülfssätze:

Hülfssatz 1. Versteht man unter r und n (unbenannte) endliche reelle positive ganze Zahlen und ist $r > 2$, also $\geqq 3$, so ist $r^n > \left(1 + \frac{n}{r}\right)^r$.

Nach dem binomischen Lehrsatze ist für irgend eine Zahl r:

$$\left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = 1 + 1 + \binom{r}{2} \cdot \frac{1}{r^2} + \binom{r}{3} \cdot \frac{1}{r^3} + \binom{r}{4} \cdot \frac{1}{r^4} + \ldots, \text{ also}$$

$$\left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = 2 + S, \text{ wenn } S = \binom{r}{2} \cdot \frac{1}{r^2} + \binom{r}{3} \cdot \frac{1}{r^3} + \binom{r}{4} \cdot \frac{1}{r^4} + \ldots \text{ ist.}$$

Jeder Summand der mit S bezeichneten Summe hat die Form $\binom{r}{m} \cdot \frac{1}{r^m}$, so daß dabei m eine reelle positive ganze Zahl größer als 1 bezeichnet und, wofern unter r nur reelle positive ganze Zahlen verstanden werden, $r \geqq m$ ist.

Zudem ist dann $\binom{r}{m} = r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \ldots [\text{m Faktoren}] \cdot \frac{1}{m!}$,

$$\text{daher } \binom{r}{m} \cdot \frac{1}{r^m} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{r}\right) \ldots [(m-1) \text{ Faktoren}] \cdot \frac{1}{m!}.$$

Da nun jeder der Faktoren $\left(1 - \frac{1}{r}\right)$, $\left(1 - \frac{2}{r}\right)$ u. s. w. eine reelle positive Zahl kleiner als 1 bezeichnet, so ist das Produkt aus ihnen positiv und kleiner als 1, somit $\binom{r}{m} \cdot \frac{1}{r^m}$ eine positive Zahl und $\binom{r}{m} \cdot \frac{1}{r^m} < \frac{1}{m!}$.

Ist aber $r = \infty$, so ist jeder der Faktoren $\left(1 - \frac{1}{r}\right)$, $\left(1 - \frac{2}{r}\right)$ u. s. w. gleich 1, also auch das Produkt aus ihnen gleich 1, und daher $\binom{r}{m} \cdot \frac{1}{r^m}$ positiv und $\binom{r}{m} \cdot \frac{1}{r^m} = \frac{1}{m!}$.

3

Fonte: Bericht über das Königliche Gymnasium zu Emmerich, vol. 1888, p. 9 - 12 , 1888

Outro autor que escreveu sobre a equação $x^y = y^x$ em suas obras foi Leonard Eugene Dickson[5]. Na Figura 5, temos o trecho do segundo volume do livro *History Of The Theory Of Numbers*, escrito por Dickson, em que o autor comenta sobre a equação $x^y = y^x$. Dickson faz referência a Euler, Bernoulli e Hengel, além de citar outros autores.

4 Professor alemão nascido em 1835.

5 Matemático americano (1874-1954).

Figura 5: Comentários de L.E.Dickson sobre $x^y = y^x$

RATIONAL SOLUTIONS OF $x^y = y^x$.

L. Euler[106] set $y = tx$ and deduced $x^{t-1} = t$. The graph is composed of $y = x$, a branch asymptotic to the positive x and y axes, and an infinity of isolated points. Among the rational solutions are $(x, y) = (2, 4)$, $(3^2/2^2, 3^3/2^3)$, $(4^3/3^3, 4^4/3^4)$.

D. Bernoulli[107] noted that, for $x \neq y$, the only integral solution is 2, 4; but that there is an infinitude of rational solutions.

J. van Hengel[108] remarked that $r^{r+n} > (r+n)^r$ if r and n are positive integers either one $\geqq 3$. Thus if $a^b = b^a$, it remains to treat the cases $a = 1$ or 2. If $a = 2$, $b > 4$, whence $b = 2 + n$, we apply the above remark.

* C. Herbst[109] noted that 2, 4 give the only solution in integers.

* A. Flechsenhaar[110] and R. Schimmack[111] discussed the rational solutions.

A. M. Nesbitt[112] and E. J. Moulton[113] discussed the graph of $x^y = y^x$.

A. Tanturri[114] proved that 2, 4 give the only solution in integers.

Fonte: History Of The Theory Of Numbers,vol.2,p.687,1920

Em 1960, encontra-se na *William Lowell Putnam Mathematical Competition*[6] uma questão sobre as soluções inteiras para a igualdade $n^m = m^n$, conforme Figura 6.

Figura 6: Questão sobre $x^y = y^x$ em Putnam Competition

1961] 1960 WILLIAM LOWELL PUTNAM COMPETITION 633

7. Let $N(n)$ denote the smallest positive integer N such that $x^N = 1$ for every permutation x on n symbols, where 1 denotes the identity permutation. Prove that if $n > 1$,

$$\frac{N(n)}{N(n-1)} = 1 \text{ if } n \text{ is divisible by 2 distinct primes,}$$
$$= p \text{ if } n \text{ is a power of a prime } p.$$

Part II

1. Find all solutions of $n^m = m^n$ in integers n and m $(n \neq m)$. Prove that you have obtained all of them.

Fonte:The American Mathematical Monthly, vol.68, pg.633, 1960

E mais recentemente, em 1990, Sved afirma que o problema não é novo e que também não é tão difícil. Porém não aparece na literatura padrão, e por isso não é amplamente conhecido.

6 Competição matemática realizada entre alunos de graduação dos Estados Unidos e do Canadá.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Gerais

- Resgatar o estudo da equação $x^y = y^x$, já realizado por nomes como Euler e Goldbach, utilizando tanto a linguagem da Álgebra como a da Geometria, construindo uma ponte entre essas duas áreas da Matemática;
- Apresentar novas possibilidades para a construção de soluções de equações, diferentes daquelas usualmente trabalhadas em sala de aula;
- Estimular e incentivar a atividade de pesquisa por parte do corpo discente, promovendo e propondo novas leituras no estudo das equações e na construção de suas soluções;
- Propor atividades para alunos de Ensino Médio que os estimulem a desenvolver habilidades relacionadas à representação, compreensão e investigação matemática, de acordo com os PCNEM [5];
- Estimular o uso da tecnologia durante o processo de visualização e determinação de soluções exatas e aproximadas dessa equação.

1.1.2 Específicos

- Realizar um estudo detalhado sobre a equação $x^y = y^x$, selecionando e demonstrando características importantes sobre essa equação.
- Determinar e caracterizar, com o auxílio de resultados da Álgebra, as soluções da equação $x^y = y^x$.
- Realizar uma análise gráfica das soluções reais positivas da equação $x^y = y^x$;
- Propor, através de algumas atividades, a construção das soluções por intermédio de diferentes métodos, desde o mais intuitivo como o método de “tentativa e erro”, até métodos numéricos de aproximação como o método da bisseção.

1.2 METODOLOGIA

No intuito de retomar a discussão sobre a equação $x^y = y^x$, resgatamos no Capítulo 1 alguns trabalhos históricos sobre esse tema, onde destacam-se correspondências entre Bernoulli e Goldbach, e estudos de Euler publicados em um de seus importantes livros.

No Capítulo 2 percorremos dois possíveis caminhos para uma análise inicial da equação $x^y = y^x$, especificamente, utilizando a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ e a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Em relação à primeira função, seu gráfico é construído com a ajuda do *software* Geogebra, com objetivo de identificar graficamente valores do domínio que, possuindo a mesma imagem, representam soluções para a equação $x^y = y^x$. Em relação à segunda função, realiza-se um estudo do seu sinal, da sua monotonicidade, da sua concavidade e as assíntotas de seu gráfico. E algumas condições importantes sobre os valores de x e y que satisfazem à equação $x^y = y^x$ são estabelecidas.

No terceiro capítulo, constrói-se o conjunto solução da equação $x^y = y^x$, novamente apresentando duas possibilidades para tal. A primeira delas, também opção de Euler e Goldbach, utiliza o feixe de retas $y = t \cdot x$ na identificação dessas soluções. Na segunda delas a relação utilizada na busca dessas soluções é a dada por $y = x^t$. Em ambos os casos, demonstra-se que o conjunto solução da equação $x^y = y^x$ é dado pela semirreta $y = x$, as soluções triviais, e pela curva parametrizada por $\alpha(t) = \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ ($t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$), as soluções não triviais. Além disso, utilizamos essas mesmas equações paramétricas para estudar as soluções inteiras positivas e racionais positivas da equação $x^y = y^x$.

A partir das soluções apresentadas, é realizado no quarto capítulo, uma análise gráfica sobre as mesmas. Concentrando maior parte dessa análise sobre o conjunto das soluções não triviais, que diferentemente do conjunto de soluções triviais, impõe maior dificuldade para o seu entendimento. E, tendo em vista essa maior dificuldade, são apresentados os rastreamentos das soluções via as relações $y = t \cdot x$ e $y = x^t$ apresentadas no capítulo anterior.

E por fim, no quinto capítulo, propõe-se algumas atividades que podem ser aplicadas em turmas de Ensino Médio, no intuito de aprofundar o entendimento do aluno em relação à resolução de equações, no interesse de soluções exatas ou em soluções aproximadas.

2 A EQUAÇÃO $x^y = y^x$

2.1 UMA ANÁLISE INICIAL

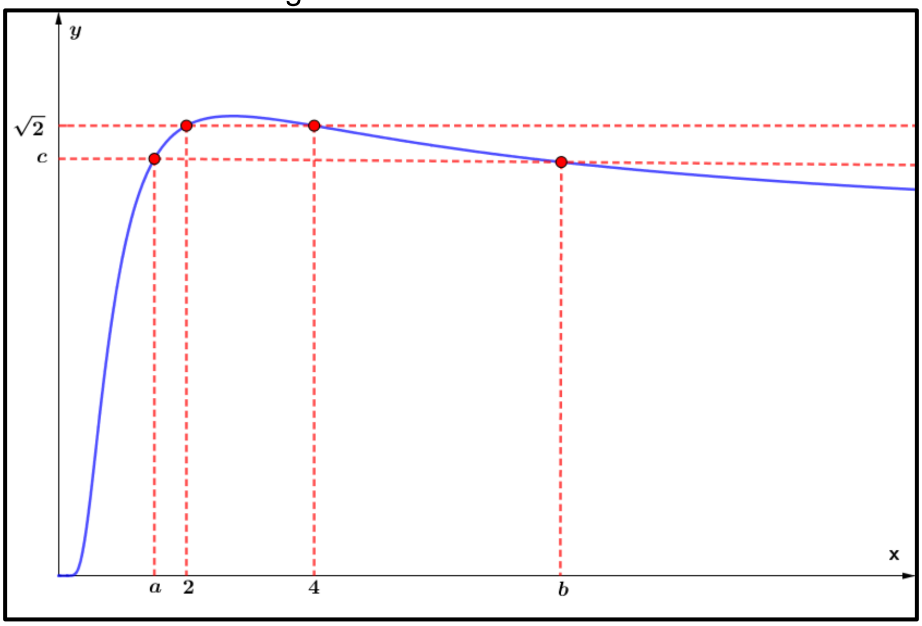
Para entender melhor essa equação, deve-se isolar as variáveis em membros diferentes. E para isso, podemos prosseguir de duas maneiras.

A primeira consiste em elevar ambos os seus membros à $\frac{1}{x \cdot y}$, obtendo a equação $x^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{y}}$, equivalente à anterior.

$$x^y = y^x \Leftrightarrow \left(x^y\right)^{\frac{1}{x \cdot y}} = \left(y^x\right)^{\frac{1}{x \cdot y}} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{y}}$$

Levando ao estudo da função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, cujo gráfico está representado abaixo.

Figura 7: Gráfico de $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$



Fonte: O autor

Ao analisarmos o comportamento de $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, podemos determinar os valores do seu domínio que possuem a mesma imagem. Com isso, podemos descobrir quando dois elementos distintos do domínio de $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, a e b por exemplo, satisfazem a igualdade $a^{\frac{1}{a}}=b^{\frac{1}{b}}$, ou seja, podemos determinar dois reais positivos a e b com $a\neq b$, que satisfazem $a^b=b^a$.(ATRACTOR[7], 2017).

A segunda maneira, que encontramos em Reznick [18], consiste em tomarmos o logaritmo natural em ambos da igualdade $x^y=y^x$, obtendo a equação $\ln(x^y)=\ln(y^x)$, equivalente à anterior. Desta última, segue que

$$\ln(x^y)=\ln(y^x)\Leftrightarrow y\cdot\ln(x)=x\cdot\ln(y)\Leftrightarrow\frac{\ln(x)}{x}=\frac{\ln(y)}{y}$$

Levando ao estudo da função $f:\mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$.

Analisando o comportamento de $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, podemos determinar os valores do seu domínio que possuem a mesma imagem. Ou seja, descobriremos quando dois elementos distintos do domínio de $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, a e b por exemplo, satisfazem a igualdade $\frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}$. E deste modo, podemos encontrar dois reais positivos a e b com $a\neq b$, que satisfazem $a^b=b^a$, já que $\frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}\Leftrightarrow a^b=b^a$. Resolvendo assim, a nossa equação inicial.

Ao contrário do que foi feito anteriormente, quando o gráfico da função $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ foi apenas plotado com a ajuda do *software* Geogebra, sem nenhuma justificativa ou dedução de suas características, a partir deste ponto, estudaremos a

7 Portal dedicado à divulgação da Matemática.

função $f: \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, acumulando os conhecimentos necessários para a construção de seu gráfico.

Com isso, observaremos características importantes da equação $x^{y}=y^{x}$, que serão utilizadas para determinarmos suas soluções.

2.2 O ESTUDO DO SINAL DE $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

2.2.1 A Raiz

Seja a função $f: \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$.

Dada uma função real definida por $y=f(x)$, dizemos que x_0 é raiz de $f(x)$ se, e somente se, $f(x_0)=0$.

Assim:

$$\frac{\ln(x)}{x}=0 \Leftrightarrow \ln(x)=0 \Leftrightarrow e^{\ln(x)}=e^{0} \Leftrightarrow x=1 \quad .$$

Portanto, a função $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ possui uma única raiz, que é $x=1$.

Note que o gráfico da função $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ possui uma única interseção com o eixo *OX,* exatamente quando x assume o valor da raiz. Porém o gráfico da função $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, não possui interseções com o eixo *OY,* já que $x=0$ não pertence ao domínio da função.

2.2.2 O Sinal

Queremos determinar para quais valores do domínio, a função $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ é positiva ou negativa. Para isso, analisaremos o sinal da função separando o seu domínio em dois intervalos $(0,1)$ e $(1,+\infty)$.

Para o intervalo $(0,1)$, temos:

$$0<x<1 \Leftrightarrow \ln(x)<0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x}<0 \quad .$$

Para o intervalo $(1,+\infty)$, temos:

$$1<x \Leftrightarrow 0<\ln(x) \Leftrightarrow 0<\frac{\ln(x)}{x} \quad .$$

Concluímos que a função $f:\mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, assume valores negativos para qualquer $x \in (0,1)$ e assume valores positivos para qualquer $x \in (1,+\infty)$.

2.3 MONOTONICIDADE DE $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

Derivando $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, segue que

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2} \quad .$$

Assim,

$$\frac{1-\ln(x)}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=1 \Leftrightarrow x=e \quad .$$

Substituindo $x=e$ em $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, temos:

$$f(e)=\frac{\ln(e)}{e}=\frac{1}{e} \quad ,$$

sendo $\left(e,\frac{1}{e}\right)$, candidato a ponto de máximo ou mínimo.

Para $0<x<e$, temos:

$$x<e \Leftrightarrow \ln(x)<1 \Leftrightarrow -\ln(x)>-1 \Leftrightarrow 1-\ln(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln(x)}{x^2}>0 \quad .$$

Para $x>e$, temos:

$$x>e \Leftrightarrow \ln(x)>1 \Leftrightarrow -\ln(x)<-1 \Leftrightarrow 1-\ln(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln(x)}{x^2}<0 \quad .$$

Concluímos então, que a função $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ é estritamente crescente no intervalo $(0,e)$, estritamente decrescente no intervalo $(e,+\infty)$, sendo o ponto $\left(e,\frac{1}{e}\right)$ o máximo global da função.

2.4 A CONCAVIDADE DO GRÁFICO DE $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$

Derivando $f'(x)=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$, encontra-se

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln(x))\cdot 2x}{x^4}=\frac{-x-2x+2x\cdot\ln(x)}{x^4}=\frac{-3x+2x\cdot\ln(x)}{x^4}=\frac{\ln(x^2)-3}{x^3} \quad .$$

Portanto, $f''(x)=\dfrac{\ln(x^2)-3}{x^3}$.

Fazendo $f''(x)=0$, segue que

$$\frac{\ln(x^2)-3}{x^3}=0\Leftrightarrow\ln(x^2)-3=0\Leftrightarrow\ln(x^2)=3\Leftrightarrow x^2=e^3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{e^3} \quad .$$

Como estamos trabalhando apenas com $x>0$, pela definição do domínio de $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$, utilizaremos apenas $x=\sqrt{e^3}$.

Substituindo $x=\sqrt{e^3}$ em $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ temos:

$$f(\sqrt{e^3})=\frac{\ln(\sqrt{e^3})}{\sqrt{e^3}}=\frac{\ln(e^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{e^3}}=\frac{\frac{3}{2}\cdot\ln(e)}{\sqrt{e^3}}=\frac{3}{2\cdot\sqrt{e^3}} \quad .$$

Portanto, $\left(\sqrt{e^3},\dfrac{3}{2\cdot\sqrt{e^3}}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

Como $f''(x)=\dfrac{\ln(x^2)-3}{x^3}$ se anula para $x=\sqrt{e^3}$, deve-se verificar para quais valores do domínio de $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ o sinal de $f''(x)=\dfrac{\ln(x^2)-3}{x^3}$ é positivo ou negativo.

Para $0<x<\sqrt{e^3}$, temos:

$$x<\sqrt{e^3}\Leftrightarrow x<e^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x^2<e^3\Leftrightarrow \ln(x^2)<\ln(e^3)\Leftrightarrow \ln(x^2)<3\Leftrightarrow \ln(x^2)-3<0 \quad .$$

Como $x>0$, temos que

$$\ln(x^2)-3<0\Leftrightarrow \frac{\ln(x^2)-3}{x^3}<0 \quad .$$

Seguindo o mesmo raciocínio para $x>\sqrt{e^3}$, teremos $\dfrac{\ln(x^2)-3}{x^3}>0$.

Concluímos então, que no intervalo $\left(0,\sqrt{e^3}\right)$ a concavidade do gráfico de $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ é voltada para baixo, e que no intervalo $\left(\sqrt{e^3},+\infty\right)$ a concavidade do gráfico de $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ é voltada para cima.

2.5 ASSÍNTOTAS DO GRÁFICO DE $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

2.5.1 Assíntota Horizontal

Provaremos primeiro dois limites importantes que nos ajudarão a estudar o $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$:

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$;

b) $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

<u>Demonstrações</u>

a) Dado $\varepsilon>0$ segue que,

$$\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow-\varepsilon<\frac{1}{x}<\varepsilon\Leftrightarrow x>\frac{1}{\varepsilon} \quad .$$

Assim, tomando $N=\frac{1}{\varepsilon}$, temos que $\forall\,\varepsilon>0$, existe $N>0$ tal que $x>N\Rightarrow\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$.

Dessa forma, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

b) Dado $M>0$ segue que,

$$\ln(x)>M\Leftrightarrow e^{\ln(x)}>e^{M}\Leftrightarrow x>e^{M} \quad .$$

Assim, tomando $N=e^{M}$, temos que $\forall M>0$ existe $N>0$ tal que $x>N\Rightarrow \ln(x)>M$.

Desa forma, $\lim_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$.

Agora utilizaremos a Regra de L'Hospital [11] para indeterminações do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$ para calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.

Deste modo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0 \quad .$$

Portanto, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}=0$.

Em [16] pode-se encontrar a seguinte definição:

Uma reta $y=b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de uma função $y=f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

i. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$;
ii. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$.

Com isso, concluímos que a reta $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, por definição.

2.5.2 Assíntota Vertical

Primeiro provaremos dois limites que nos ajudarão a estudar o $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$:

a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$;

b) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

<u>Demonstrações</u>

a) Dado $M>0$ segue que,

$$\frac{1}{x} > M \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{M} \quad .$$

Assim, tomando $\delta = \frac{1}{M}$, temos que $\forall M>0$ existe $\delta>0$ tal que $0<x<\delta \Rightarrow \frac{1}{x} > M$.

Dessa forma $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

b) Dado $M<0$ segue que,

$$\ln(x) < M < 0 \Leftrightarrow -\ln(x) > -M > 0 \Leftrightarrow e^{-\ln(x)} > e^{-M} \Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} > e^{-M} \Leftrightarrow \frac{1}{x} > e^{-M} \Leftrightarrow x < e^{M} \Leftrightarrow 0 < x < e^{M} \ .$$

Assim, tomando $\delta = e^{M}$, temos que $\forall M<0$ existe $\delta>0$ tal que $0<x<\delta \Rightarrow \ln(x) < M$.

Dessa forma, $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Em [15] pode-se encontrar o seguinte teorema:

Teorema 2.1

Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$.

Como $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(x)\right]$, temos pelo teorema 2.1 que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$.

Para assíntotas verticais voltamos à referência [16].

Uma reta $x = c$ é uma assíntota vertical ao gráfico de uma função $y = f(x)$ se uma das condições se verifica:

i. $\lim_{x \to c+} f(x) = +\infty$;

ii. $\lim_{x \to c-} f(x) = +\infty$;

iii. $\lim_{x \to c+} f(x) = -\infty$;

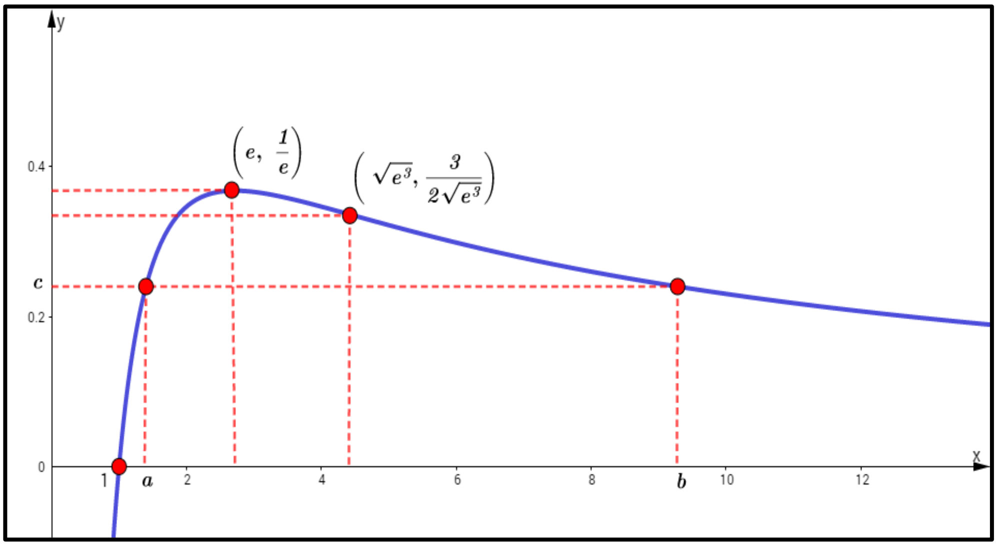
iv. $\lim_{x \to c-} f(x) = -\infty$.

Portanto, $x = 0$ é assíntota vertical de $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ por definição.

2.6 O GRÁFICO DE $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Com o estudo realizado sobre o comportamento da função $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, construímos o seu gráfico que está representado na Figura 8.

Figura 8: Gráfico da função $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$



Fonte: o autor

Observando o gráfico da Figura 8, notamos que os elementos a e b do domínio de $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$, ambos maiores que 1, possuem a mesma imagem c.

Demonstraremos esse fato provando que se a e b são elementos distintos do domínio de $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ que possuem a mesma imagem, então a e b são ambos maiores que 1. Em outras palavras, provaremos que se a e b são números reais positivos e distintos tais que $\dfrac{\ln(a)}{a}=\dfrac{\ln(b)}{b}$, então $a>1$ e $b>1$.

Nessa demonstração usaremos o teorema abaixo, encontrado em [14].

Teorema 2.2

Sendo $a\in\mathbb{R}$, $0<a<1$, $x_1\in\mathbb{R}$ e $x_2\in\mathbb{R}$, temos: $a^{x_1}>a^{x_2}$ se, e somente se, $x_1<x_2$.

Como $\frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}\Leftrightarrow a^b=b^a$, podemos substituir a igualdade $\frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}$ por $a^b=b^a$.

Proposição 2.3

Se a e b são números reais positivos e distintos tais que $a^b=b^a$, então $a>1$ e $b>1$.

Demonstração

Para fixar as ideias suporemos $a<b$, sendo análogo o raciocínio para $b<a$.

Suponhamos por absurdo que a ou b não seja maior que 1.

1° caso: $0<a\leq 1<b$

Se $a=1$, a igualdade $a^b=b^a$ será verdadeira apenas para $b=1$, o que contraria o fato de a e b serem distintos por hipótese. Se $a<1$, temos $a^b<1$. Por outro lado, como $1<b$, temos $1<b^a$. O que contradiz a nossa hipótese de $a^b=b^a$.

2° caso: $0<a<b\leq 1$

Se $b=1$, a igualdade é verdadeira apenas para $a=1$, contrariando a hipótese de a e b serem distintos. Se $0<a<b<1$, temos pelo teorema 2.2 que $a<b\Rightarrow a^b<a^a$. Por outo lado, da desigualdade $a<b$ temos que $a<b\Leftrightarrow a^a<b^a$. Portanto, teríamos $a^b<b^a$, o que contradiz a hipótese de $a^b=b^a$.

Logo, se a e b são números reais positivos e distintos tais que $a^b=b^a$, então $a>1$ e $b>1$. E este fato também é válido para $\frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}$.

Outro fato que podemos observar no gráfico de $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ é que se a e b são elementos distintos do domínio de $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ e possuem a mesma imagem, um será menor que e e o outro será maior que e. Em outras palavras, observamos que se a e b são números reais positivos e distintos tais que $\frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}$, então $a<e<b$ ou $b<e<a$.

Novamente, como $\frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}\Leftrightarrow a^b=b^a$, podemos substituir $\frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}$ por $a^b=b^a$.

<u>Proposição 2.4</u>

Se a e b são números reais positivos e distintos tais que $a^b=b^a$ então $a<e<b$ ou $b<e<a$.

<u>Demonstração</u>

Suporemos $a<e<b$, sendo análogo o raciocínio para $b<e<a$.

Como a e b são reais positivos, então pertencem ao domínio de $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, como definido anteriormente. Utilizaremos esse fato para prosseguirmos com a demonstração.

Agora, suponhamos por absurdo que $a<b\leq e$ ou $e\leq a<b$.

1° Caso: $a<b\leq e$

Pelo estudo do comportamento de $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, sabemos que $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ é crescente no intervalo $(0,e)$ e que para $x=e$, $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ assume o seu valor máximo. Portanto, se $a<b\leq e$, então $f(a)<f(b)\Rightarrow\frac{\ln(a)}{a}<\frac{\ln(b)}{b}$. Ou seja, se $a<b\leq e$ não podemos ter $\frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}$ contrariando a nossa hipótese $a^b=b^a$, pois $\frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}\Leftrightarrow a^b=b^a$.

2° Caso: $e\leq a<b$

Como $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ é decrescente no intervalo $(e,+\infty)$ e assume o seu valor máximo em $x=e$, temos $f(a)>f(b)\Rightarrow\frac{\ln(a)}{a}>\frac{\ln(b)}{b}$. Ou seja, se $e\leq a<b$ não podemos ter $\frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}$, contrariando novamente a nossa hipótese $a^b=b^a$.

Concluímos que, se $a^b=b^a$ acontece para $a<b$, então a e b não podem pertencer simultaneamente ao intervalo $(0,e]$ e não podem pertencer simultaneamente ao intervalo $[e,+\infty)$. Portanto, se a e b são números reais positivos e distintos tais que $a^b=b^a$, devemos ter $a<e<b$. E este fato também é válido para $\frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}$.

Após a análise do gráfico de $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, conseguimos determinar um fato inerente à equação $x^y=y^x$.

Sejam x e y números reais positivos e distintos.

Se x e y satisfazem a equação $x^y=y^x$, então pelas proposições 2.3 e 2.4 temos $1<x<e$ e $y>e$ ou $x>e$ e $1<y<e$.

3 SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO $x^y = y^x$

Neste capítulo analisaremos as soluções da equação $x^y = y^x$ com x e y reais positivos. Para isso, localizaremos todos os pontos representados pelos pares ordenados (x, y) do primeiro quadrante do $\mathbb{R}^2$ que satisfazem $x^y = y^x$.

Note que podemos garantir a existência de soluções para equação $x^y = y^x$, já que se $y = x$ a solução é óbvia. Nesse caso, qualquer ponto do primeiro quadrante cuja abscissa é igual à ordenada satisfaz a igualdade $x^y = y^x$.

Para $y \neq x$ a literatura aponta dois caminhos possíveis, que veremos a seguir.

- 1º caminho possível [2]:

Retomamos aqui o raciocínio seguido por Euler [8] e Goldbach [9], e mais recentemente por Sved [21], que buscam as soluções para a equação $x^y = y^x$ através do feixe de retas $y = t \cdot x$, com inclinação $t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

Se $y \neq x$, existe $t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ tal que $\frac{y}{x} = t \Rightarrow y = t \cdot x$. Resolveremos então, o sistema de equações $\begin{cases} y = t \cdot x \\ x^y = y^x \end{cases}$, cujas soluções descrevem a curva α parametrizada por $\alpha(t) = \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$, onde $t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$; como será demonstrado a seguir.

<u>Demonstração</u>

Sabemos que para $y \neq x$, existe $t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ tal que $\frac{y}{x} = t$ (i), que implica em $y = t \cdot x$ (ii). Por outro lado, a equação $x^y = y^x$ implica em $x^{\frac{y}{x}} = y$ (iii). Substituindo (i) e (ii) em (iii) segue que,

$$x^{\frac{y}{x}}=y \Rightarrow x^{t}=t\cdot x \Rightarrow \frac{x^{t}}{x}=t \Rightarrow x^{t-1}=t \Rightarrow \left(x^{t-1}\right)^{\frac{1}{t-1}}=t^{\frac{1}{t-1}} \Rightarrow x=t^{\frac{1}{t-1}}\ .$$

Substituindo $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ em (ii) teremos,

$$y=t\cdot x \Rightarrow y=t\cdot t^{\frac{1}{t-1}} \Rightarrow y=t^{1+\frac{1}{t-1}} \Rightarrow y=t^{\frac{t}{t-1}}\ .$$

Portanto, o conjunto solução do sistema $\begin{cases} y=t\cdot x \\ x^{y}=y^{x} \end{cases}$ com $t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$ descreve a curva α parametrizada por $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ com $t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$.

- 2º caminho possível [18]:

Nesse caminho, buscam-se as soluções da equação $x^{y}=y^{x}$ através da relação $y=x^{t}$.

Sabemos que para $y\neq x$, existe $t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$ tal que $\frac{y}{x}=t$. Por outro lado, $y^{x}=x^{y} \Leftrightarrow y=x^{\frac{y}{x}}$. Fazendo $\frac{y}{x}=t$ em $y=x^{\frac{y}{x}}$, temos $y=x^{t}$ com $t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$.

Observe que fazendo $t=1$ em $y=x^{t}$ temos novamente $y=x$, tornando a solução para a equação $x^{y}=y^{x}$ trivial outra vez.

Resolveremos então, o sistema de equações $\begin{cases} y=x^{t} \\ x^{y}=y^{x} \end{cases}$ com $t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$, cujas soluções descrevem a mesma curva α parametrizada por $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$, onde $t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$; como será demonstrado a seguir.

<u>Demonstração</u>

Substituindo $y=x^t$ em $x^y=y^x$. Deste modo, teremos:

$$x^y=y^x \Leftrightarrow x^{x^t}=(x^t)^x \Leftrightarrow x^{x^t}=x^{t\cdot x} \Leftrightarrow x^t=t\cdot x \Leftrightarrow \frac{x^t}{x}=t \Leftrightarrow x^{t-1}=t \Leftrightarrow \left(x^{t-1}\right)^{\left(\frac{1}{t-1}\right)}=t^{\frac{1}{t-1}} \Leftrightarrow x=t^{\frac{1}{t-1}} .$$

Substituindo $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ em $y=x^t$, temos

$$y=x^t \Leftrightarrow y=\left(t^{\frac{1}{t-1}}\right)^t \Leftrightarrow y=t^{\frac{t}{t-1}} .$$

Portanto, o conjunto solução do sistema $\begin{cases} y=x^t \\ x^y=y^x \end{cases}$ com $t\in\mathbb{R}^+-\{1\}$ descreve a mesma curva α do caso anterior, parametrizada por $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ com $t\in\mathbb{R}^+-\{1\}$.

Concluímos que a reta $y=x$ ($x,y\in\mathbb{R}^+$) é o conjunto das soluções triviais da equação $x^y=y^x$ e que as soluções não triviais (no caso em que $y\neq x$) da equação $x^y=y^x$ são dadas pela parametrização $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$, onde $t\in\mathbb{R}^+-\{1\}$.

Utilizando a parametrização $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$, podemos escrever algumas soluções para a equação $x^y=y^x$ com $y\neq x$, atribuindo alguns valores para t. Como exemplos, podemos citar os pares, $(2,4)$, $\left(3^{\frac{1}{2}},3^{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(4^{\frac{1}{3}},4^{\frac{4}{3}}\right)$ e $\left(5^{\frac{1}{4}},5^{\frac{5}{4}}\right)$ que são encontrados quando t assume respectivamente os valores 2, 3, 4 e 5.

Ao observarmos os valores encontrados para x e y, podemos questionar sobre quais circunstâncias teremos soluções racionais para a equação $x^y=y^x$

quando $y \neq x$, já que os pares ordenados encontrados para os valores que atribuímos ao parâmetro t parecem não fornecer nenhuma informação útil nesse sentido.

Notamos que para $t=2$ encontramos $x=2$ e $y=4$, valores racionais que por sinal, também são os únicos inteiros a satisfazer a equação $x^y=y^x$ como veremos mais adiante. Porém para os próximos valores inteiros que utilizamos para t, como 3, 4 e 5; encontramos apenas x e y irracionais como solução da equação $x^y=y^x$.

Nos deparamos então, com o problema de como encontrar soluções racionais para equação $x^y=y^x$ utilizando a parametrização $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$.

Estudaremos como encontrar tais soluções na próxima seção deste capítulo.

3.1 SOLUÇÕES RACIONAIS DA EQUAÇÃO $x^y=y^x$

Prosseguindo com o nosso estudo sobre as soluções da equação $x^y=y^x$, utilizaremos as equações paramétricas da curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ estudada anteriormente, para encontrar as soluções racionais positivas da equação $x^y=y^x$. Ou seja, determinaremos todos pontos (x, y) do primeiro quadrante, com $y \neq x$, cujas coordenadas são ambas números racionais e que satisfazem a igualdade $x^y=y^x$.

Reznick (2001) observa que se $t=1+\frac{1}{k}$, para k inteiro, a equação $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ resulta em uma solução racional para $x^y=y^x$, a saber $x=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ e

$y=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$. Ainda mais, demonstra que toda solução racional da equação $x^y=y^x$ é da forma $x=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$ e $y=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$.

De fato, considerando $t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$ observe que $t=1+\frac{1}{k}\Leftrightarrow t-1=\frac{1}{k}\Leftrightarrow k=\frac{1}{t-1}$. Se $\frac{1}{t-1}$ for um número inteiro, então os números $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y=t^{\frac{t}{t-1}}$, são racionais positivos. Demonstraremos essa afirmação.

<u>Demonstração</u>

Seja k um número inteiro tal que $\frac{1}{t-1}=k$, sendo $t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$.

Façamos duas observações antes de seguirmos com a nossa demonstração.

Note que $k\neq 0$, pois k é igual a uma fração de numerador 1 . Além disso, também temos $k\neq -1$, pois $k=-1\Leftrightarrow t=0$, e estamos considerando $t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$.

Prosseguindo com a demonstração, provaremos primeiro a veracidade da afirmação para $x<y$ (1ª etapa) e depois para $y<x$ (2ª etapa).

1ª etapa

Voltemos à igualdade $\frac{y}{x}=t$ ($t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$), que utilizamos para chegar às soluções $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y=t^{\frac{t}{t-1}}$, da equação $x^y=y^x$.

Se $x<y$ temos $\frac{y}{x}>1\Leftrightarrow t>1\Leftrightarrow t-1>0\Leftrightarrow\frac{1}{t-1}>0\Leftrightarrow k>0$. Ou seja, k será inteiro positivo.

Substituindo $\frac{1}{t-1}=k$ e $t=1+\frac{1}{k}$, em $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y=t^{\frac{t}{t-1}}$, temos:

- $x=t^{\frac{1}{t-1}}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$;
- $y=t^{\frac{t}{t-1}}=t^{\frac{1}{t-1}\cdot t}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$.

Segundo Lima (2016), o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um exemplo de corpo e por isso, dados $a\in\mathbb{Q}$ e $b\in\mathbb{Q}$, temos $a+b\in\mathbb{Q}$ e $a\cdot b\in\mathbb{Q}$. Ou seja, o conjunto dos números racionais é fechado em relação às operações de soma e multiplicação.

Como k é um número inteiro diferente de zero, temos respectivamente pela definição de número racional e pelo fechamento da soma entre números racionais, que $\frac{1}{k}$ e $1+\frac{1}{k}$ serão números racionais. E pelo fechamento do produto entre números racionais, concluímos que $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$ e $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ também serão números racionais.

Além disso, como k é inteiro positivo, temos $1+\frac{1}{k}>0$. De fato, como $1+\frac{1}{k}=t$ e $t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$, temos $1+\frac{1}{k}=t>0$. Como potências com bases positivas sempre resultam em números positivos, temos $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}>0$ e $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}>0$.

Logo, se $\frac{1}{t-1}$ for um número inteiro positivo, então os números $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y=t^{\frac{t}{t-1}}$, são racionais positivos.

2ª etapa

Se $x>y$ temos $0<\frac{y}{x}<1\Leftrightarrow 0<t<1\Leftrightarrow t-1<0\Leftrightarrow\frac{1}{t-1}<0\Leftrightarrow k<0$. Ou seja, k será inteiro negativo.

De modo análogo à primeira etapa dessa demonstração, substitui-se $\frac{1}{t-1}=k$ e $t=1+\frac{1}{k}$ em $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y=t^{\frac{t}{t-1}}$, obtendo $x=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$ e $y=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$.

Como $k<0$ e $k\neq-1$, existe m natural e diferente de 1 tal que $k=-m$. Substituindo $k=-m$ em $x=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$ e $y=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$, segue que,

- $x=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\left(\frac{m-1}{m}\right)^{-m}=\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m}=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m}$;
- $y=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}=\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m+1}=\left(\frac{m-1}{m}\right)^{-(m-1)}=\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m-1}=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}$.

Fazendo $m-1=n$, temos $x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ e $y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, sendo n um número inteiro positivo, pois m é natural e maior que 1. Deste modo, pela primeira etapa dessa demonstração, os números $x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ e $y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ são racionais positivos.

Logo, se $\frac{1}{t-1}$ for um número inteiro negativo, então os números $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y=t^{\frac{t}{t-1}}$, são racionais positivos.

Concluímos então, que se $\frac{1}{t-1}$ ($t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$) for um número inteiro, então os números $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y=t^{\frac{t}{t-1}}$, são racionais positivos.

Com essa demonstração, observa-se que a equação $x^{y}=y^{x}$ possui soluções na forma $x=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$ e $y=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ ($k\in\mathbb{Z}-\{-1,0\}$), e que essas soluções são racionais positivas.

Agora mostraremos que todas as soluções racionais positivas da equação $x^y = y^x$ possuem essa forma.

Para demonstrarmos esse fato, devemos mostrar que, se x e y são números racionais positivos e satisfazem a igualdade $x^y = y^x$, então $x = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ e $y = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ com $k \in \mathbb{Z} - \{-1, 0\}$.

Demonstração

Voltemos novamente à igualdade $\frac{y}{x} = t$ ($t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$).

Supondo que x e y são números racionais positivos e substituindo $t = \frac{y}{x}$ em $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y = t^{\frac{t}{t-1}}$, temos:

- $x = t^{\frac{1}{t-1}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{y}{x}-1}} = \left(\frac{x+y-x}{x}\right)^{\frac{1}{\frac{y-x}{x}}} = \left(1+\frac{y-x}{x}\right)^{\frac{x}{y-x}} \Leftrightarrow x = \left(1+\frac{y-x}{x}\right)^{\frac{x}{y-x}}$;
- $y = t^{\frac{t}{t-1}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1}} = \left(\frac{x+y-x}{x}\right)^{\left(\frac{x+y-x}{x}\right)\cdot\left(\frac{x}{y-x}\right)} = \left(1+\frac{y-x}{x}\right)^{\left(1+\frac{y-x}{x}\right)\cdot\frac{x}{y-x}} \Leftrightarrow y = \left(1+\frac{y-x}{x}\right)^{\left(1+\frac{y-x}{x}\right)\cdot\frac{x}{y-x}}$.

Fazendo $\frac{x}{y-x} = k$, teremos $x = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ e $y = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$, sendo k um número racional.

Primeiro provaremos que $k \neq -1$ e $k \neq 0$.

Como k é igual a uma fração com numerador positivo, temos $k \neq 0$. Além disso, $k \neq -1$. Pois ao supor $k = -1$, teríamos $\frac{x}{y-x} = -1 \Leftrightarrow y - x = -x \Leftrightarrow y = 0$, o que contraria o fato de y ser racional positivo.

Portanto $k \neq -1$ e $k \neq 0$.

Agora será provado que k é um número inteiro.

1ª etapa

Para $x<y$, temos $k>0$, pois $y>x \Leftrightarrow y-x>0 \Leftrightarrow \frac{x}{y-x}>0 \Leftrightarrow k>0$.

Suponhamos que k não seja um número inteiro. Isto é, tome k um número racional positivo não inteiro. Nesse caso, existem números inteiros positivos a e b, primos entre si, tais que $k=\frac{a}{b}$.

Deste modo, substituindo $k=\frac{a}{b}$ em $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$, segue que

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\left(\frac{k+1}{k}\right)^k=\left(\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a+b}{a}\right)^{\frac{a}{b}},$$

onde o máximo divisor comum entre a e b é igual ao máximo divisor comum entre a e $a+b$. Desta maneira a e $a+b$ também são primos entre si.

De fato, pois caso contrário a e $a+b$ teriam um fator comum $m\in\mathbb{Z}^{+}-\{1\}$ tal que $a=m\cdot r$ e $a+b=m\cdot s$ onde $r,s\in\mathbb{Z}^{+}$ com $s>r$. Deste modo, $a+b=m\cdot s \Leftrightarrow b=m\cdot s-a \Leftrightarrow b=m\cdot s-m\cdot r \Leftrightarrow b=m\cdot(s-r)$. Assim $a=m\cdot r$ e $b=m\cdot(s-r)$, contrariando o fato de a e b serem primos entre si.

Além disso, como $\left(\frac{a+b}{a}\right)^{\frac{a}{b}}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ é racional positivo por hipótese, existem p e q inteiros positivos e primos entre si, tais que

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^{\frac{a}{b}}=\frac{p}{q} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{a}\right)^a=\left(\frac{p}{q}\right)^b \Leftrightarrow (a+b)^a\cdot q^b=a^a\cdot p^b .$$

Como $a+b$ e a são primos entre si, temos que $(a+b)^a$ e a^a também serão primos entre si. Da mesma maneira, como p e q são primos entre si, p^b e q^b também serão primos entre si. Portanto, $(a+b)^a=p^b$ e $a^a=q^b$.

Vejamos a igualdade $(a+b)^a=p^b$.

Como os expoentes a e b dessa igualdade são primos entre si por hipótese, temos que necessariamente, $a+b$ é uma potência de expoente b , caso contrário $(a+b)^a$ não poderia ser igual a p^b , uma potência de expoente b . Ou seja, existe c inteiro, tal que $(a+b)^a=p^b \Leftrightarrow (c^b)^a=p^b \Leftrightarrow (c^a)^b=p^b$. De modo análogo, em relação à igualdade $a^a=q^b$, existe d inteiro tal que $a^a=q^b \Leftrightarrow (d^b)^a=q^b \Leftrightarrow (d^a)^b=q^b$.

Desta maneira, temos $a+b=c^b$ e $a=d^b$, com $c>d \Leftrightarrow c=d+f$, onde $f \in \mathbb{Z}^+$. Segue que, $b=a+b-a=c^b-d^b=(d+f)^b-d^b$.

Para prosseguir com os nossos cálculos, utilizaremos a fórmula do binômio de Newton, que nos dá o desenvolvimento de $(a+b)^n$.

“Sejam a e b números reais e seja $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+...+\binom{n}{n-1}\cdot a\cdot b^{n-1}+b^n$$ ”. (HEFEZ, 2014).

Utilizando a fórmula do binômio de Newton, segue que,

$$b=(d+f)^b-d^b=\binom{b}{0}\cdot d^b+\binom{b}{1}\cdot d^{b-1}\cdot f^1+\binom{b}{2}\cdot d^{b-2}\cdot f^2+...+\binom{b}{b}\cdot f^b-d^b=$$

$$=d^b+b\cdot d^{b-1}\cdot f^1+\binom{b}{2}\cdot d^{b-2}\cdot f^2+...+\binom{b}{b}\cdot f^b-d^b=$$

$$=b\cdot d^{b-1}\cdot f^1+\binom{b}{2}\cdot d^{b-2}\cdot f^2+...+\binom{b}{b}\cdot f^b>b\ .$$

O que é um absurdo. E portanto, nossa suposição inicial de k não ser um número inteiro é falsa.

Logo, se x e y ($x<y$) são números racionais positivos e satisfazem a $x^y=y^x$, então $x=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ e $y=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ com k inteiro positivo.

2ª etapa

Para $y<x$, temos que $k<0$, pois $y<x \Leftrightarrow y-x<0 \Leftrightarrow \frac{x}{y-x}<0 \Leftrightarrow k<0$. Sendo assim, existe m racional positivo tal que $k=-m$. Substituindo $k=-m$ em $x=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ e $y=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$, segue que

- $x=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m$;
- $y=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}=\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m+1}=\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}$.

Fazendo $m-1=n$, temos $x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ e $y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, sendo n um número racional positivo, já que $m>1$. De fato,

$$\frac{x}{y-x}=k=-m \Leftrightarrow m=\frac{x}{x-y}=\frac{x-y-(x-y)+x}{x-y}=1+\frac{y}{x-y} \Leftrightarrow m=1+\frac{y}{x-y} .$$

Como $x>y \Leftrightarrow x-y>0 \Leftrightarrow \frac{y}{x-y}>0$, temos $m=1+\frac{y}{x-y}>1$, e portanto $n=m-1=1+\frac{y}{x-y}-1=\frac{y}{x-y}>0$.

Pela 1ª etapa dessa demonstração, concluímos que n é inteiro positivo. E disso decorre, que m é inteiro maior que 1 e consequentemente k é inteiro menor que -1, pois definimos anteriormente $m-1=n$ e $k=-m$.

Logo, se x e y ($y<x$) são números racionais positivos e satisfazem a $x^y=y^x$, então $x=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ e $y=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ com k inteiro negativo diferente de -1.

E com isso, acabamos de mostrar que todas as soluções racionais positivas da equação $x^y=y^x$, possuem a forma $x=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ e $y=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ ($k\in\mathbb{Z}-\{-1,0\}$).

3.2 RETOMANDO AS SOLUÇÕES INTEIRAS DA EQUAÇÃO $x^y=y^x$

Nesta seção, determinaremos as soluções inteiras positivas para a equação $x^y=y^x$. Ou seja, determinaremos todos os pontos (x,y) do primeiro quadrante, com $y\neq x$, cujas coordenadas são ambas números inteiros e que satisfazem a igualdade $x^y=y^x$.

Sabemos que as soluções racionais positivas da equação $x^y=y^x$, são dadas por $x=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ e $y=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$, para $k\in\mathbb{Z}-\{-1,0\}$.

Fazendo $k=1$, encontramos o par ordenado $(2,4)$ como solução inteira positiva. Que verificaremos ser a única solução inteira positiva possível com $x<y$.

Pelas proposições 2.3 e 2.4 da seção anterior, se x e y são números reais positivos e distintos, com $x<y$ e satisfazem a igualdade $x^y=y^x$, devemos ter $1<x<e$ e $y>e$.

Como $e \approx 2{,}718$, o único valor inteiro positivo que x pode assumir entre 1 e e , é o 2 . Portanto, a única solução inteira positiva para a equação $x^y = y^x$, com $x < y$, é o par ordenado $(2, 4)$.

Obviamente, o par ordenado $(4, 2)$ também satisfaz a igualdade $x^y = y^x$. E para determiná-lo, basta tomar $k = -2$ em $x = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ e $y = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$. Deste modo, temos novamente pelas proposições 2.3 e 2.4 da seção anterior, que se x e y são números reais positivos e distintos, com $y < x$ e satisfazem a igualdade $x^y = y^x$, devemos ter $1 < y < e$ e $x > e$.

Mais uma vez, como $e \approx 2{,}718$, o único valor inteiro positivo que y pode assumir entre 1 e e , é o 2 . O que faz o par ordenado $(4, 2)$ ser a única solução inteira positiva para a equação $x^y = y^x$, com $y < x$.

Veremos posteriormente, que não é mera coincidência, os pares ordenados $(2, 4)$ e $(4, 2)$ pertencerem ambos ao conjunto solução da equação $x^y = y^x$. No próximo capítulo verificaremos que o motivo para isso ocorrer, é o fato do traço da curva $\alpha(t) = \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ ($t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$) ser simétrica em relação à reta $y = x$.

4 ANÁLISE GRÁFICA DAS SOLUÇÕES DE $x^y = y^x$

Na busca por pares ordenados (x, y) que satisfazem a equação $x^y = y^x$, vimos no capítulo anterior que a semirreta $y = x$ ($x, y \in \mathbb{R}^+$) representa o conjunto das soluções triviais da equação $x^y = y^x$ e que o conjunto das soluções não triviais (o caso em que $y \neq x$) da equação $x^y = y^x$ é representado pela curva parametrizada por $\alpha(t) = \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$, onde $t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

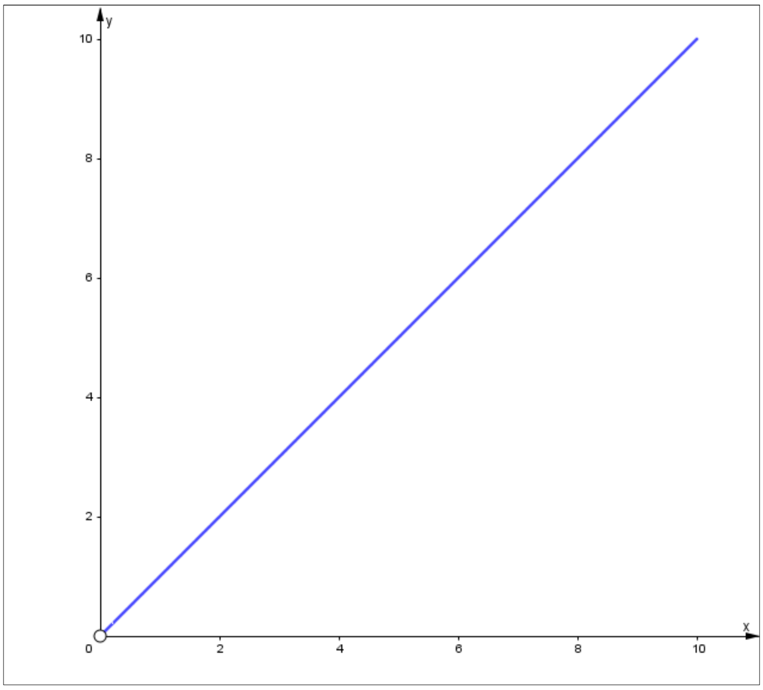
Neste capítulo, seguindo o proposto em ATRACTOR(2017), rastreamos no primeiro quadrante o comportamento das soluções da equação $x^y = y^x$ utilizando o feixe de retas $y = t \cdot x$ com inclinação $t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, descrevendo o lugar geométrico de tais pontos como $\alpha(t) = \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ onde $t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

E seguindo ao exposto anteriormente, quanto aos possíveis caminhos para a determinação de soluções da equação $x^y = y^x$, esse rastreamento é refeito utilizando o conjunto de curvas $y = x^t$ onde $t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ encontrando os mesmos pontos (x, y) ($y \neq x$) que encontramos quando resolvemos o sistema $\begin{cases} y = t \cdot x \\ x^y = y^x \end{cases}$, e consequentemente, descrevendo o mesmo lugar geométrico, ou seja, a curva $\alpha(t) = \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ onde $t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

Com base nesses estudos, visualizaremos o comportamento das soluções de $x^y = y^x$ no plano *OXY.*

Começaremos pela construção do gráfico das soluções triviais. Ou seja, vamos construir o gráfico da semirreta reta $y = x$ ($x, y \in \mathbb{R}^+$). Veja a Figura 9.

Figura 9: Gráfico da semirreta $y=x\ (x, y \in \mathbb{R}^{+})$



Fonte: O autor

A partir de agora, concentraremos nossos estudos na curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ ($t \in \mathbb{R}^{+}-\{1\}$) que, como vimos anteriormente, é a curva que representa as soluções da equação $x^y=y^x$, representando a variável y por $y=t \cdot x$ ou representando y por $y=x^t$.

4.1 SOBRE O TRAÇO DE $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$

4.1.1 Simetria em Relação à Reta $y=x$

O traço (imagem) da curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ ($t \in \mathbb{R}^{+}-\{1\}$) é simétrico em relação à reta $y=x$.

<u>Demonstração</u>

Para verificarmos que o traço de uma curva α é simétrico em relação à reta $y=x$, basta mostrar que (x,y) pertence ao traço de α se, e só se (y,x) pertence ao traço de α.

Fixemos $t>0$ e seu par correspondente $(x(t),y(t))=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$.

Fazendo a substituição do parâmetro t por $\frac{1}{t}$ segue que,

- $x=\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{t}-1}}=\left(\frac{1}{t}\right)^{-\frac{t}{t-1}}=t^{\frac{t}{t-1}}$;
- $y=\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-1}}=\left(\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{t-1}}=t^{\frac{1}{t-1}}$.

Concluímos que, para cada $t>0$ que determina o par (x,y) do traço de α, o número $\frac{1}{t}$ determina o par (y,x) que também pertence ao traço de α. E portanto, a curva α é simétrica em relação à reta $y=x$.

Na Tabela 1, listamos alguns valores para o parâmetro t e os pontos do traço da curva α que esses valores determinam. Podemos observar claramente a simetria em relação à reta $y=x$.

Tabela 1: Pontos do traço de $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**
t	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2	3	4	5
x	$5^{\frac{5}{4}}$	$4^{\frac{4}{3}}$	$3^{\frac{3}{2}}$	4	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	$\left(\frac{5}{4}\right)^5$	$\left(\frac{5}{4}\right)^4$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	2	$3^{\frac{1}{2}}$	$4^{\frac{1}{3}}$	$5^{\frac{1}{4}}$
y	$5^{\frac{1}{4}}$	$4^{\frac{1}{3}}$	$3^{\frac{1}{2}}$	2	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(\frac{5}{4}\right)^4$	$\left(\frac{5}{4}\right)^5$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	4	$3^{\frac{3}{2}}$	$4^{\frac{4}{3}}$	$5^{\frac{5}{4}}$

Fonte: O autor

4.1.2 Convergência Para o Ponto (e, e)

Estudaremos agora, o que acontece com as equações paramétricas da curva α, quando os valores de t se aproximam de 1. Ou seja, estudaremos os limites

$$\lim_{t \to 1} t^{\frac{1}{t-1}} \quad \text{e} \quad \lim_{t \to 1} t^{\frac{t}{t-1}} .$$

Provaremos que $\lim_{t \to 1} t^{\frac{1}{t-1}} = e$ e $\lim_{t \to 1} t^{\frac{t}{t-1}} = e$, utilizando o seguinte teorema que pode ser encontrado em [15]:

<u>**Teorema 4.1**</u>

"Seja a função definida em $\{x \in \mathbb{R} / -1 < x \neq 0\}$, por $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, então $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ".

De fato, fazendo $t = 1 + h \Leftrightarrow h = t - 1$, quando t tende a 1 (pela direita ou pela esquerda), h tende a zero. Deste modo, pelo teorema 4.1 acima, teremos:

- $\lim_{t \to 1} t^{\frac{1}{t-1}} = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$;
- $\lim_{t \to 1} t^{\frac{t}{t-1}} = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1+h}{h}} = \lim_{h \to 0} \left[(1+h)^{\frac{1}{h}} \cdot (1+h)^{1} \right] = e \cdot 1 = e$.

Portanto, quando t tende a 1, as coordenadas dos pontos do traço da curva α tendem a e .

Note que o ponto (e,e) não pertence ao traço de α. Pois caso contrário, deveríamos ter $t^{\frac{1}{t-1}}=e$ e $t^{\frac{t}{t-1}}=t^{\frac{1}{t-1}}\cdot t=e$. Com isso, também teríamos $t^{\frac{1}{t-1}}\cdot t=e\Leftrightarrow e\cdot t=e\Leftrightarrow t=1$, contrariando o fato de $t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$. Portanto, o ponto (e,e) não pertence ao traço de α.

Em geral, as coordenadas dos pontos do traço de α nunca assumirão o valor e. Basta lembrar que $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y=t^{\frac{t}{t-1}}$ são as soluções reais e positivas da equação $x^{y}=y^{x}$ para $y\neq x$. Porém, para que x e y satisfaçam a equação $x^{y}=y^{x}$ com $y\neq x$, devemos ter pelas proposições 2.3 e 2.4, $1<x<e$ e $y>e$ ou $x>e$ e $1<y<e$. Portanto $t^{\frac{1}{t-1}}\neq e$ e $t^{\frac{t}{t-1}}\neq e$.

4.1.3 Assíntota Horizontal ao Traço de $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$

Em relação a uma curva parametrizada do tipo $\alpha(t)=(x(t),y(t))$, quando tivermos $\lim_{t\to a}x(t)=\pm\infty$ e $\lim_{t\to a}y(t)=b$ com $a,b\in\mathbb{R}$, a reta $y=b$ será uma assíntota horizontal ao traço determinado pela curva α. (ALVES, 2014).

Agora estudaremos o que acontece com as equações paramétricas de α quando t se aproxima de 0 pela direita. Ou seja, estudaremos $\lim_{t\to 0^{+}}t^{\frac{1}{t-1}}$ e $\lim_{t\to 0^{+}}t^{\frac{t}{t-1}}$.

Primeiro provaremos que $\lim_{t\to 0}\frac{t}{t-1}=0$.

Demonstração

Dado $\varepsilon>0$ segue que,

$$|t|<\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\Rightarrow-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}<t<\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\Rightarrow-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}-1<t-1<\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}-1\Rightarrow\frac{-2\varepsilon-1}{\varepsilon+1}<t-1<\frac{-1}{\varepsilon+1}\Rightarrow$$

$$-\varepsilon-1<\frac{1}{t-1}<-\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon+1}\Rightarrow-\varepsilon<\frac{t}{t-1}<\frac{\varepsilon}{2\varepsilon+1}.$$

Como $\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2\varepsilon+1}=\frac{2\varepsilon^2}{2\varepsilon+1}>0$, temos $\varepsilon>\frac{\varepsilon}{2\varepsilon+1}$. Logo,

$$-\varepsilon<\frac{t}{t-1}<\frac{\varepsilon}{2\varepsilon+1}<\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon<\frac{t}{t-1}<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{t}{t-1}\right|<\varepsilon .$$

Assim, tomando $\delta=\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$, temos que $\forall\,\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $|t|<\delta\Rightarrow\left|\frac{t}{t-1}\right|<\varepsilon$.

Como $\lim_{t\to 0}\frac{t}{t-1}=0$ se, e somente se $\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{t-1}=\lim_{t\to 0^-}\frac{t}{t-1}=0$, concluímos que $\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{t-1}=0$.

Voltemos aos $\lim_{t\to 0^+}t^{\frac{1}{t-1}}$ e $\lim_{t\to 0^+}t^{\frac{t}{t-1}}$.

Para $\lim_{t\to 0^+}t^{\frac{t}{t-1}}$, utilizaremos o seguinte teorema que pode ser encontrado em [15]:

Teorema 4.2

"Se $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $\lim_{x \to b} f(x) = 0$, então $\lim_{x \to b} a^{f(x)} = 1$ ".

Como $\lim_{t \to 0^+} \frac{t}{t-1} = 0$ e $0 < t \neq 1$, temos pelo teorema 4.2 que:

$$\lim_{t \to 0^+} t^{\frac{t}{t-1}} = t^0 = 1 \ .$$

Para $\lim_{t \to 0^+} t^{\frac{1}{t-1}}$, utilizaremos a seguinte teorema que pode ser encontrado em [15]:

Teorema 4.3

"Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = b \neq 0$, então:

- se $b > 0$, $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$;
- se $b < 0$, $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$."

Como $\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$ (provado anteriormente na seção 2.5) e $\lim_{t \to 0^+} t^{\frac{t}{t-1}} = 1$, temos pelo teorema 4.3 que:

$$\lim_{t \to 0^+} t^{\frac{1}{t-1}} = \lim_{t \to 0^+} \left(t^{\frac{t}{t-1}} \cdot t^{-1} \right) = \lim_{t \to 0^+} \left(t^{\frac{t}{t-1}} \cdot \frac{1}{t} \right) = +\infty \ .$$

Como $\lim_{t \to 0^+} t^{\frac{1}{t-1}} = +\infty$ e $\lim_{t \to 0^+} t^{\frac{t}{t-1}} = 1$, temos que a reta $y = 1$ será assíntota horizontal ao traço da curva $\alpha(t) = \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}} \right)$ ($t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$).

4.1.4 Assíntota Vertical ao Traço de $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$

Utilizando o fato do traço de α ser simétrico em relação à reta $y=x$ e que por isso (x,y) pertence ao traço de α se, e somente se (y,x) pertence ao traço de α, podemos concluir que o traço de α também terá uma assíntota vertical.

Mostraremos que o traço de α realmente possui uma assíntota vertical estudando $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{t-1}}$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{t}{t-1}}$.

Primeiro provaremos que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t-1}=0$.

<u>Demonstração</u>

Dado $\left|\frac{1}{t-1}\right|<\varepsilon$, segue que

$$\left|\frac{1}{t-1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<\frac{1}{t-1}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{t-1}<\varepsilon \Leftrightarrow t-1>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow t>1+\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow t>\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}.$$

Assim tomando $N=\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}$, temos que $\forall\,\varepsilon>0$, existe $N>0$ tal que $t>N \Rightarrow \left|\frac{1}{t-1}\right|<\varepsilon$.

Voltemos aos $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{t-1}}$ e $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{t}{t-1}}$.

Para $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{1}{t-1}}$, temos

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{1}{t-1}} = \lim_{\frac{1}{t-1} \to 0} t^{\frac{1}{t-1}} = t^0 = 1 \ .$$

Para $\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{t}{t-1}}$, utilizaremos a seguinte teorema que pode ser encontrado em [15]:

<u>Teorema 4.4</u>

"Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = b \neq 0$, então:

- se $b > 0$, $\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$;
- se $b < 0$, $\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = -\infty$."

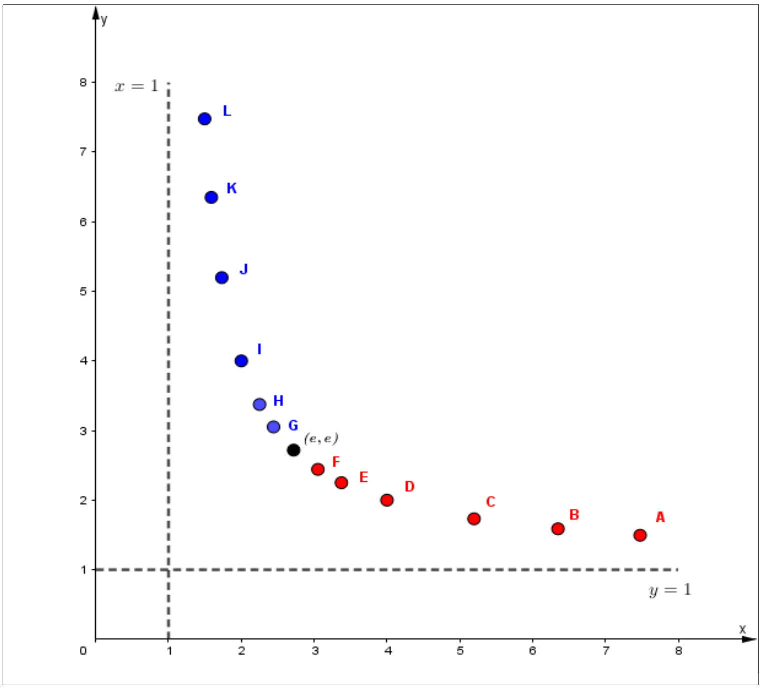
Como $\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{t}{t-1}} = \lim_{t \to +\infty} \left(t^{\frac{1}{t-1}} \cdot t^1 \right) = \lim_{t \to +\infty} \left(t^{\frac{1}{t-1}} \cdot t \right)$. E além disso, temos $\lim_{t \to +\infty} t = +\infty$ e $\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{1}{t-1}} = 1$, segue pelo teorema 4.4 que

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{t}{t-1}} = \lim_{t \to +\infty} \left(t^{\frac{1}{t-1}} \cdot t \right) = +\infty \ .$$

Como $\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{1}{t-1}} = 1$ e $\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{t}{t-1}} = +\infty$, concluímos que a reta $x = 1$ será uma assíntota vertical ao traço da curva $\alpha(t) = \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}} \right)$ ($t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$).

Com as informações obtidas até o momento, podemos construir um esboço inicial do traço da curva α , conforme Figura 10.

Figura 10: Esboço inicial de $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$



Fonte: O autor

4.1.5 Inclinação da Reta Tangente ao Traço de $\boldsymbol{\alpha(t)=(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}})}$

Por praticidade, invés de utilizarmos as equações paramétricas da curva α, utilizaremos a equação $x^y=y^x$, considerando $y\neq x$.

Foi visto no capítulo 2 que

$$x^y=y^x \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x}=\frac{\ln(y)}{y}.$$

Derivando implicitamente a última igualdade acima, teremos:

$$\frac{1-\ln(x)}{x^2}=\left(\frac{1-\ln(y)}{y^2}\right)\cdot\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y^2\cdot(1-\ln(x))}{x^2\cdot(1-\ln(y))}.$$

Pelas proposições 2.3 e 2.4, se x e y satisfazem $x^y=y^x$, então $1<x<e$ e $y>e$ ou $x>e$ e $1<y<e$. Deste modo,

- Para $1<x<e$ e $y>e$, temos

  $\ln(x)<1$ e $\ln(y)>1 \Leftrightarrow -\ln(x)>-1$ e $-\ln(y)<-1 \Leftrightarrow 1-\ln(x)>0$ e $1-\ln(y)<0$;

- Para $x>e$ e $1<y<e$, temos

$\ln(x)>1$ e $\ln(y)<1 \Leftrightarrow -\ln(x)<-1$ e $-\ln(y)>-1 \Leftrightarrow 1-\ln(x)<0$ e $1-\ln(y)>0$.

Concluímos que se x e y satisfazem $x^y=y^x$, então $1-\ln(x)$ e $1-\ln(y)$ possuem sinais opostos e portanto $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2\cdot(1-\ln(x))}{x^2\cdot(1-\ln(y))}<0$.

Logo, a inclinação da reta tangente ao traço de α será sempre negativa. Ou seja, o traço de α é sempre decrescente.

Pelo esboço inicial da Figura 10 e pelo fato do sinal da inclinação da reta tangente ao traço de α ser sempre negativa, podemos concluir que a concavidade do traço de α será sempre voltada pra cima. Pois caso contrário, teríamos uma mudança no sinal da inclinação da reta tangente ao traço de α .

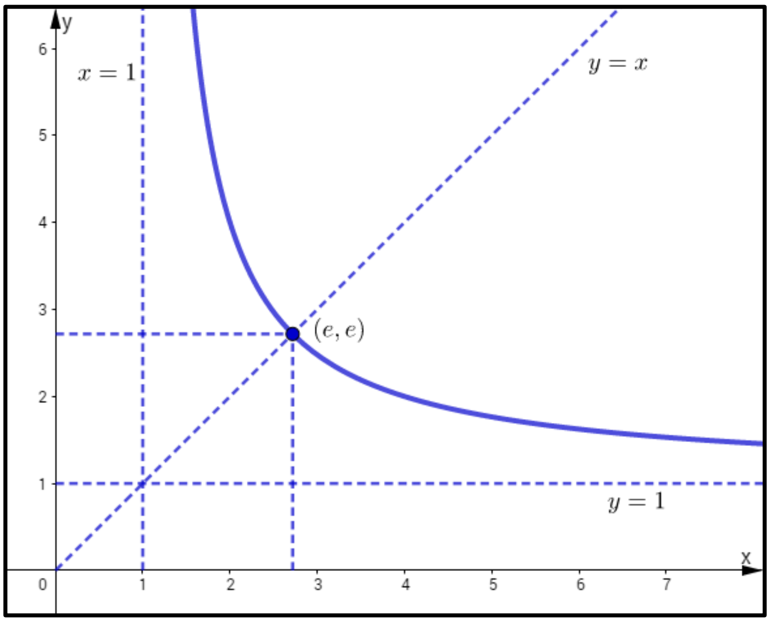
Vamos juntar todas as informações que temos até o momento sobre a curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ ($t\in\mathbb{R}^+-\{1\}$) para construir o seu gráfico:

- As equações paramétricas de α fornecem as soluções para a equação $x^y=y^x$ com $y\neq x$. E pelas proposições 2.3 e 2.4, se x e y são números distintos e satisfazem a equação $x^y = y^x$, então $1 < x < e$ e $y > e$ ou $x > e$ e $1 < y < e$;

- As assíntotas horizontal e vertical ao traço de α são respectivamente $x = 1$ e $y = 1$;
- O traço de α é simétrico em relação à reta $y = x$;
- As coordenadas dos pontos do traço de α convergem para o número e quando t tende a 1, mas nunca assumem esse valor;
- A inclinação da reta tangente ao traço de α será sempre negativa;
- A concavidade do traço de α será sempre voltada pra cima.

Segue na Figura 11, o gráfico da curva $\alpha(t) = \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ ($t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$) que é representado pelo seu traço.

Figura 11: Traço da curva $\alpha(t) = \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$

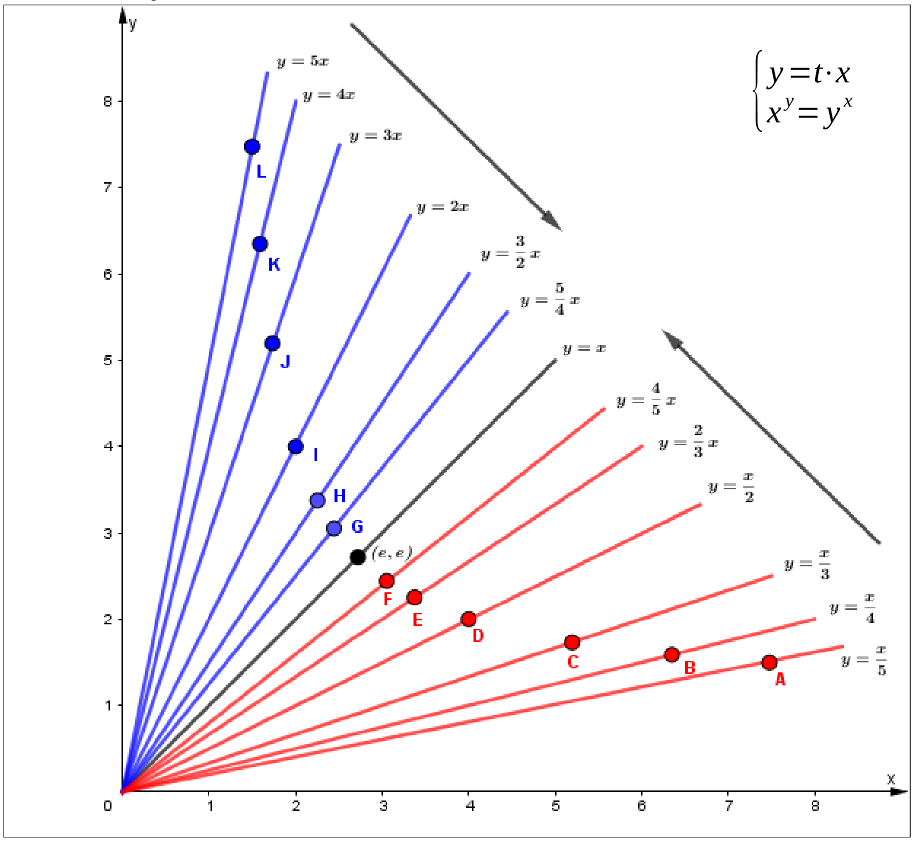


Fonte: O autor

4.2 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DAS SOLUÇÕES DE $x^y = y^x$

Na Figura 12, está sendo representado no plano *OXY* os pontos pertencentes ao traço de $\alpha(t) = \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ ($t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$) que estão na Tabela 1 e que são soluções da equação $x^y = y^x$. Também mostramos o comportamento desses pontos quando são rastreados pela reta $y = t \cdot x$ quando o parâmetro t tende a 1, lembrando que $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y = t^{\frac{t}{t-1}}$ são as soluções do sistema $\begin{cases} y = t \cdot x \\ x^y = y^x \end{cases}$ com $t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

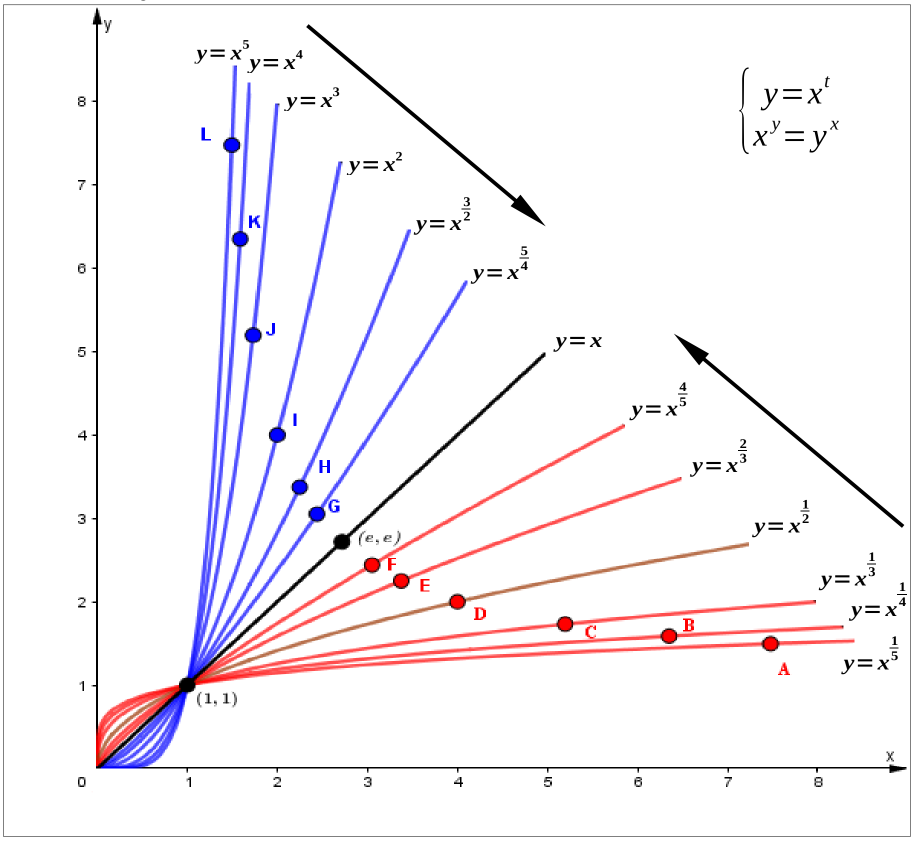
Figura 12: Comportamento das soluções da equação $x^y = y^x$ quando rastreadas pelo feixe de retas $y = t \cdot x$



Fonte: O autor

Na Figura 13, está sendo representado no plano *OXY* os pontos pertencentes ao traço de $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ ($t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$) que estão na Tabela 1 e que são soluções da equação $x^y=y^x$. Também mostramos o comportamento desses pontos quando são rastreados pelo conjunto de curvas $y=x^t$ quando o parâmetro t tende a 1, lembrando que $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y=t^{\frac{t}{t-1}}$ são as soluções do sistema $\begin{cases} y=x^t \\ x^y=y^x \end{cases}$ com $t\in\mathbb{R}^{+}-\{1\}$.

Figura 13: Comportamento das soluções da equação $x^y=y^x$ quando rastreadas pelas curvas do tipo $y=x^t$

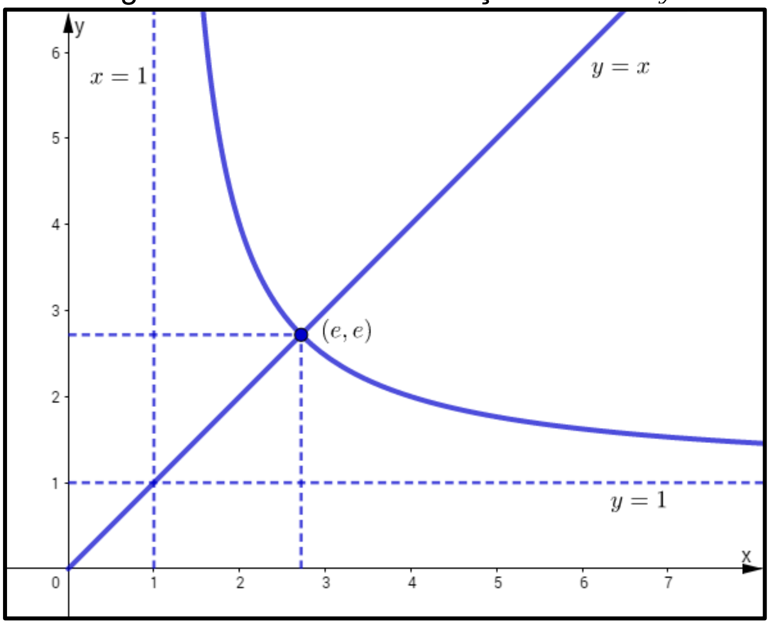


Fonte: O autor

Para finalizarmos a análise gráfica sobre as soluções da equação $x^y = y^x$, construiremos o gráfico de suas soluções.

Plotando em um mesmo sistema de eixos coordenados o traço da curva $\alpha(t) = \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ ($t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$) e o gráfico da semirreta $y = x$ ($x, y \in \mathbb{R}^+$), vamos obter a representação das soluções reais positivas da equação $x^y = y^x$, conforme a Figura 14 abaixo.

Figura 14: Gráfico das soluções de $x^y = y^x$



Fonte: O autor

5 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Este capítulo consiste na apresentação de algumas atividades pedagógicas cujo objetivo é encontrar soluções reais e positivas para a equação $x^y = y^x$ e que podem ser aplicadas em turmas de Ensino Médio. As atividades propostas nesse capítulo tentam aprofundar o entendimento do aluno em relação à resolução de equações, através da equação $x^y = y^x$. Trata-se de uma equação indeterminada, nas variáveis x e y, com infinitas soluções, na qual, ao contrário do que geralmente é visto em sala de aula, não é possível expressar uma de suas variáveis somente em função da outra.

Com isso podemos identificar duas possíveis fontes de “estranheza” por parte dos alunos. Uma é o fato de, por se tratar de uma equação indeterminada em duas variáveis, “não encontramos nunca apenas um valor para uma quantidade desconhecida e sim uma infinidade de valores que variam de acordo com os valores da outra quantidade”, (Roque, 2012, p. 372). Outra é o fato de não termos representada nessa equação uma função explícita na variável x e sim uma função implícita nas variáveis x e y.

Dessa forma, com as atividades aqui propostas encaminhamos a busca de soluções, exatas e/ou aproximadas da equação $x^y = y^x$, abordando tanto os seus aspectos algébricos quanto os geométricos por caminhos que, no geral, diferem das tradicionais estratégias de busca de soluções adotadas em nosso cotidiano em sala de aula.

Iniciamos a nossa busca pelas soluções da equação $x^y = y^x$ propondo inicialmente uma atividade que utiliza o método da tentativa e erro. Porém, para agilizar e facilitar os cálculos, a atividade foi elaborada para ser aplicada com o auxílio de uma planilha eletrônica.

Segundo Giraldo et al. (2013, p. 17),

> as planilhas podem ser utilizadas para a resolução numérica de equações, ou mesmo de sistemas de equações, especialmente em situações que envolvam modelos aproximados, permitindo a procura de soluções aproximadas em um determinado intervalo.

Em seguida, lançamos mão de meios algébricos para encontrar uma “fórmula” que forneça as soluções que estamos procurando. Faremos isso, utilizando a ideia de parametrização de curvas, podendo ser necessário tocar nesse assunto antes de iniciar a atividade.

Por fim, exploramos alguns aspectos geométricos da equação $x^y = y^x$ e de suas soluções, com o auxílio do Geogebra, um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único pacote fácil de se usar.

> Tabelas, gráficos, desenhos, fotos, vídeos, câmeras, computadores e outros equipamentos não são só meios. Dominar seu manuseio é também um dos objetivos do próprio ensino das Ciências, Matemática e suas Tecnologias. Determinados aspectos exigem imagens e, mais vantajosamente, imagens dinâmicas; outros necessitam de cálculos ou de tabelas de gráfico; outros podem demandar expressões analíticas, sendo sempre vantajosa a redundância de meios para garantir confiabilidade de registro e/ou reforço no aprendizado. (BRASIL, 2016, p.53).

5.1 ATIVIDADE 1 – APRESENTAÇÃO DA EQUAÇÃO $x^y = y^x$

a) Com o auxílio do Calc[8], complete as seguintes tabelas:

---

8 Software de planilha eletrônica que integra a suíte de aplicativos para escritório LibreOffice.

Figura 15: Atividade 1 (item a)

x	y	x^y	y^x
1	2		
2	2		
3	2		
4	2		
5	2		
6	2		
7	2		
8	2		
9	2		
10	2		
11	2		
12	2		
13	2		
14	2		
15	2		
16	2		
17	2		
18	2		
19	2		
20	2		

x	y	x^y	y^x
1	3		
2	3		
3	3		
4	3		
5	3		
6	3		
7	3		
8	3		
9	3		
10	3		
11	3		
12	3		
13	3		
14	3		
15	3		
16	3		
17	3		
18	3		
19	3		
20	3		

x	y	x^y	y^x
1	4		
2	4		
3	4		
4	4		
5	4		
6	4		
7	4		
8	4		
9	4		
10	4		
11	4		
12	4		
13	4		
14	4		
15	4		
16	4		
17	4		
18	4		
19	4		
20	4		

x	y	x^y	y^x
1	5		
2	5		
3	5		
4	5		
5	5		
6	5		
7	5		
8	5		
9	5		
10	5		
11	5		
12	5		
13	5		
14	5		
15	5		
16	5		
17	5		
18	5		
19	5		
20	5		

x	y	x^y	y^x
2,125	2,250		
2,250	2,250		
2,375	2,250		
2,500	2,250		
2,625	2,250		
2,750	2,250		
2,875	2,250		
3,000	2,250		
3,125	2,250		
3,250	2,250		
3,375	2,250		
3,500	2,250		
3,625	2,250		
3,750	2,250		
3,875	2,250		
4,000	2,250		
4,125	2,250		
4,250	2,250		
4,375	2,250		
4,500	2,250		

x	y	x^y	y^x
2,125	3,375		
2,250	3,375		
2,375	3,375		
2,500	3,375		
2,625	3,375		
2,750	3,375		
2,875	3,375		
3,000	3,375		
3,125	3,375		
3,250	3,375		
3,375	3,375		
3,500	3,375		
3,625	3,375		
3,750	3,375		
3,875	3,375		
4,000	3,375		
4,125	3,375		
4,250	3,375		
4,375	3,375		
4,500	3,375		

Fonte: O autor

b) Quais são os valores de x que satisfazem a equação $x^y = y^x$ quando fixamos $y=2$, $y=3$, $y=4$, $y=5$, $y=2{,}25$ e $y=3{,}375$?

c) Sempre teremos soluções para a equação $x^y = y^x$ para $y=x$?

d) A equação $x^y = y^x$ apresenta soluções para $y \neq x$? Caso apresente, cite alguns exemplos.

Objetivos:

- Apresentar o problema: Encontrar números reais positivos x e y que satisfaçam a equação $x^y = y^x$;
- Concluir que para $y=x$, a equação $x^y = y^x$ possui solução;
- Apresentar algumas soluções para a equação $x^y = y^x$ com $y \neq x$.

Desenvolvimento:

O primeiro item dessa atividade, consiste em atribuir um valor real positivo fixo para y e realizar uma investigação para tentar descobrir valores reais positivos para x que satisfaçam a equação $x^y = y^x$. Para realizar essa investigação, atribuímos diferentes valores para x e observamos o que acontece com os resultados de x^y e y^x .

Para agilizar os cálculos, essa tarefa deve ser realizada preenchendo tabelas com o auxílio de uma planilha eletrônica como o Calc. As tabelas devem ser construídas pelo professor, conforme Figura 15. Sendo atribuído ao aluno, somente a missão de preencher as tabelas, configurando as fórmulas para obter os resultados de x^y e y^x .

Em relação às tabelas que apresentam números decimais, a quantidade de algarismos após a vírgula para os resultados de x^y e y^x fica a critério do professor.

No exemplo de tabelas preenchidas que veremos mais adiante, foram utilizadas sete casas decimais para os valores de x^y e y^x. Porém, a planinha acusará os resultados iguais para x^y e y^x, independentemente da quantidade de casas decimais utilizadas.

São atribuídos vinte valores distintos para x em cada tabela apresentada nesse exercício, enquanto os valores fixados para y são 2, $2{,}25$, 3, $3{,}375$, 4 e 5, conforme Figura 15. Ao fixarmos esses valores para y, iniciamos uma busca por valores de x que satisfazem a igualdade $x^y = y^x$, completando as tabelas com a ajuda do Calc, que nos permitirá encontrar os resultados de x^y e y^x de modo muito mais prático e rápido, como citado anteriormente.

A Figura 16 na página seguinte, mostra como as tabelas do item (a) da atividade 1 ficam após serem preenchidas. Note que podemos utilizar o recurso de formatação condicional do Calc para destacar as células quando $x^y = y^x$.

Após a análise das tabelas construídas no item (a), espera-se que o aluno consiga encontrar os seguintes valores para x no item (b):

- Para $y=2$, temos $x=2$ e $x=4$;
- Para $y=3$, temos $x=3$;
- Para $y=4$, temos $x=2$ e $x=4$;
- Para $y=5$, temos $x=5$;
- Para $y=2{,}25$, temos $x=2{,}25$ e $x=3{,}375$;
- Para $y=3{,}375$, temos $x=2{,}25$ e $x=3{,}375$.

Figura 16: Tabelas da atividade 1 (item a) preenchidas

x	y	x^y	y^x
1	2	1	2
2	2	4	4
3	2	9	8
4	2	16	16
5	2	25	32
6	2	36	64
7	2	49	128
8	2	64	256
9	2	81	512
10	2	100	1024
11	2	121	2048
12	2	144	4096
13	2	169	8192
14	2	196	16384
15	2	225	32768
16	2	256	65536
17	2	289	131072
18	2	324	262144
19	2	361	524288
20	2	400	1048576

x	y	x^y	y^x
1	3	1	3
2	3	8	9
3	3	27	27
4	3	64	81
5	3	125	243
6	3	216	729
7	3	343	2187
8	3	512	6561
9	3	729	19683
10	3	1000	59049
11	3	1331	177147
12	3	1728	531441
13	3	2197	1594323
14	3	2744	4782969
15	3	3375	14348907
16	3	4096	43046721
17	3	4913	129140163
18	3	5832	387420489
19	3	6859	1162261467
20	3	8000	3486784401

x	y	x^y	y^x
1	4	1	4
2	4	16	16
3	4	81	64
4	4	256	256
5	4	625	1024
6	4	1296	4096
7	4	2401	16384
8	4	4096	65536
9	4	6561	262144
10	4	10000	1048576
11	4	14641	4194304
12	4	20736	16777216
13	4	28561	67108864
14	4	38416	268435456
15	4	50625	1073741824
16	4	65536	4294967296
17	4	83521	17179869184
18	4	104976	68719476736
19	4	130321	274877906944
20	4	160000	1099511627776

x	y	x^y	y^x
1	5	1	5
2	5	32	25
3	5	243	125
4	5	1024	625
5	5	3125	3125
6	5	7776	15625
7	5	16807	78125
8	5	32768	390625
9	5	59049	1953125
10	5	100000	9765625
11	5	161051	48828125
12	5	248832	244140625
13	5	371293	1220703125
14	5	537824	6103515625
15	5	759375	30517578125
16	5	1048576	152587890625
17	5	1419857	762939453125
18	5	1889568	3814697265625
19	5	2476099	19073486328125
20	5	3200000	95367431640625

x	y	x^y	y^x
2,125	2,250	5,4520220	5,6025772
2,250	2,250	6,2002709	6,2002709
2,375	2,250	7,0023390	6,8617277
2,500	2,250	7,8589589	7,5937500
2,625	2,250	8,7708350	8,4038658
2,750	2,250	9,7386456	9,3004064
2,875	2,250	10,7630451	10,2925916
3,000	2,250	11,8446661	11,3906250
3,125	2,250	12,9841208	12,6057987
3,250	2,250	14,1820027	13,9506096
3,375	2,250	15,4388874	15,4388874
3,500	2,250	16,7553344	17,0859375
3,625	2,250	18,1318879	18,9086981
3,750	2,250	19,5690775	20,9259143
3,875	2,250	21,0674194	23,1583310
4,000	2,250	22,6274170	25,6289063
4,125	2,250	24,2495617	28,3630472
4,250	2,250	25,9343336	31,3888715
4,375	2,250	27,6822017	34,7374966
4,500	2,250	29,4936251	38,4433594

x	y	x^y	y^x
2,125	3,375	12,7302345	13,2611680
2,250	3,375	15,4388874	15,4388874
2,375	3,375	18,5295425	17,9742269
2,500	3,375	22,0316756	20,9259143
2,625	3,375	25,9753503	24,3623212
2,750	3,375	30,3911995	28,3630472
2,875	3,375	35,3104084	33,0207634
3,000	3,375	40,7646985	38,4433594
3,125	3,375	46,7863131	44,7564419
3,250	3,375	53,4080035	52,1062448
3,375	3,375	60,6630159	60,6630159
3,500	3,375	68,5850800	70,6249609
3,625	3,375	77,2083972	82,2228341
3,750	3,375	86,5676302	95,7252842
3,875	3,375	96,6978929	111,4450765
4,000	3,375	107,6347412	129,7463379
4,125	3,375	119,4141636	151,0529916
4,250	3,375	132,0725731	175,8585763
4,375	3,375	145,6467988	204,7376788
4,500	3,375	160,1740785	238,3592429

Fonte: O autor

Em relação ao item (c), o aluno deve perceber que a equação $x^y = y^x$ sempre terá solução quando $y = x$. Nesta etapa, podemos dizer para corpo discente que os pares ordenados (x, y) com $y = x$, em que x e y são reais positivos, formam o conjunto das soluções triviais da equação $x^y = y^x$. Por isso, qualquer ponto do primeiro quadrante (pois estamos procurando x e y positivos) cujo o valor da abscissa é igual valor da ordenada é uma solução para a equação $x^y = y^x$.

E para o item (d), espera-se que o aluno responda com os valores que podem ser visualizados nas planilhas eletrônicas, tais como:

- $x = 2$ e $y = 4$ (ou vice-versa);
- $x = 2{,}25$ e $y = 3{,}375$ (ou vice-versa).

5.2 ATIVIDADE 2 – SOLUÇÕES: UMA ALTERNATIVA ALGÉBRICA

Essa atividade refere-se ao conteúdo exposto no capítulo 3 desse trabalho. No referido capítulo, desenvolve-se uma sequência de cálculos que nos permitiram encontrar um par de equações paramétricas capazes de fornecerem soluções reais positivas para a equação $x^y = y^x$.

No intuito de contemplar parte do conteúdo abordado no capítulo 3 dessa dissertação, propomos a atividade a seguir, para trabalharmos tais equações paramétricas em sala de aula.

Sejam x e y números reais positivos.

a) Determine o valor de t na equação $y = t \cdot x$ quando $y = x$.

b) Determine a expressão que indica o valor de t na equação $y = t \cdot x$ quando $y \neq x$.

c) Seja o sistema $\begin{cases} y=t\cdot x \\ x^y=y^x \end{cases}$, com $y\neq x$.

- Substitua $y=t\cdot x$ em $x^y=y^x$ e utilizando propriedades de potenciação, determine a expressão que indica o valor de x em função de t;
- Substitua a expressão encontrada no item anterior em $y=t\cdot x$, e utilizando novamente regras de potenciação, determine a expressão que indica o valor de y em função de t.

d) Utilizando as equações paramétricas encontradas no item (c), determine as soluções da equação $x^y=y^x$ para $t=\frac{3}{2}$, $t=2$ e $t=3$. Verifique se esses valores encontrados para x e y realmente satisfazem $x^y=y^x$.

e) Utilizando as equações paramétricas encontradas no item (c), determine as soluções da equação $x^y=y^x$ para $t=\frac{2}{3}$, $t=\frac{1}{2}$ e $t=\frac{1}{3}$. Verifique se esses valores encontrados para x e y realmente satisfazem $x^y=y^x$.

f) O que acontece quando substituímos t por $\frac{1}{t}$ nas equações paramétricas encontradas no item (c)?

g) Obtenha uma solução para a equação $x^y=y^x$ com $y\neq x$ tal que $y=3$ utilizando a solução encontrada no item (c).

<u>Objetivo:</u>

- Encontrar soluções para a equação $x^y=y^x$ com $y\neq x$, utilizando recursos algébricos e parametrização de curvas tal como visto no capítulo 3 deste trabalho;

- Entender o parâmetro t como recurso necessário para a construção de um conjunto solução para a equação $x^y = y^x$ com $y \neq x$.

Desenvolvimento:

Essa atividade consiste em encontrar através de uma curva parametrizada, pontos do primeiro quadrante do $\mathbb{R}^2$ que sejam soluções da equação $x^y = y^x$.

Para isso, inicia-se a atividade com a análise sobre o valor de t em relação a equação $y = t \cdot x$ quando $y = x$ no item (a) e quando $y \neq x$ no item (b).

Espera-se que o aluno seja capaz de perceber que $t = 1$ no item (a) e que t será um número real positivo diferente de 1 no item (b).

Caso seja necessário uma explicação mais elucidativa nesses dois primeiros itens, podemos realizar alguns cálculos simples com os alunos, como por exemplo $y = t \cdot x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = t$. E a partir daí, trabalhar com a razão entre dois reais positivos iguais e dois reais positivos distintos.

- Para $y = x$ tem-se $y = t \cdot x \Leftrightarrow t = \frac{y}{x} = 1$, pois a razão entre dois números reais iguais é sempre igual a 1;
- Para $y \neq x$ também tem-se $y = t \cdot x \Leftrightarrow t = \frac{y}{x}$. Entretanto, como x e y são números reais positivos e distintos, temos que t será um número real positivo e diferente de 1.

Focando no caso em que $y \neq x$, chegamos ao sistema de equações $\begin{cases} y = t \cdot x \\ x^y = y^x \end{cases}$ no item (c).

Caso seja necessário esclarecer ao aluno o porque deve-se resolver o sistema $\begin{cases} y = t \cdot x \\ x^y = y^x \end{cases}$, faça-o lembrar que ele está tentando encontrar soluções reais positivas para a equação $x^y = y^x$ com $y \neq x$. Por outro lado, foi visto no item (b) que para x e y reais positivos distintos, temos $y = t \cdot x$ onde $t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Portanto, as soluções que estamos buscando obedecem a duas condições: $x^y = y^x$ e $y = t \cdot x$.

Após realizar alguns cálculos envolvendo substituições e propriedades de potenciação, espera-se que o aluno consiga encontrar a solução do sistema $\begin{cases} y = t \cdot x \\ x^y = y^x \end{cases}$ em função do parâmetro t. No caso, as equações paramétricas $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y = t^{\frac{t}{t-1}}$.

Um possível cálculo para se chegar a solução do sistema está descrito a seguir:

- $x^{tx} = (tx)^x \Leftrightarrow x^t = tx \Leftrightarrow x^{t-1} = t \Leftrightarrow x = t^{\frac{1}{t-1}}$;
- $y = t \cdot t^{\frac{1}{t-1}} \Leftrightarrow y = t^{\frac{t}{t-1}}$.

Neste momento, devemos informar ao aluno que $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y = t^{\frac{t}{t-1}}$ constituem um par de equações paramétricas. Ou seja, os valores de x e y são dados em função de um número real que chamamos de parâmetro. E que nesse caso, o parâmetro está sendo representado pela letra t, onde $t \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

Também devemos dizer para nossos alunos que cada t determina no plano *OXY* um par ordenado (x, y) e que quando isso ocorre temos um exemplo de curva plana parametrizada.

Para fixar as ideias, pede-se no item (d) que sejam determinadas algumas soluções para a equação $x^y = y^x$ utilizando as equações paramétricas encontradas no item (c). E que sejam verificadas se essas soluções encontradas realmente satisfazem a equação $x^y = y^x$.

Segue os valores para x e y que o aluno deve encontrar após as substituições:

- Para $t=\frac{3}{2}$, tem-se $x=\frac{9}{4}$ e $y=\frac{27}{8}$;
- Para $t=2$, tem-se $x=2$ e $y=4$;
- Para $t=3$, tem-se $x=3^{\frac{1}{2}}$ e $y=3^{\frac{3}{2}}$.

Nesta etapa, pode-se informar ao aluno que $x=\frac{9}{4}=2{,}25$ e $y=\frac{27}{8}=3{,}375$, e que essas representações decimais já foram utilizadas na atividade 1. Essa informação adicional pode ser apresentada como uma simples curiosidade, mas resgatará o que foi estudado na atividade anterior, atribuindo maior significado a ela.

Por exemplo, após essa informação ficaria evidente para o aluno que os números $x=2{,}25$ e $y=3{,}375$ não foram escolhidos ao acaso para a atividade 1.

Agora, seguem as verificações para as soluções encontradas para $t=\frac{3}{2}$, $t=2$ e $t=3$:

- Para $t=\frac{3}{2}$, tem-se $x^y=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2\cdot\frac{27}{8}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}}$ e $y^x=\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}}=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{\frac{9}{4}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}}$;
- Para $t=2$, tem-se $x^y=2^4=16$ e $x^y=4^2=16$;
- Para $t=3$, tem-se $x^y=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{3^{\frac{3}{2}}}=3^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{27}}$ e $y^x=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{3^{\frac{1}{2}}}=3^{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}}=3^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{27}}$.

Para o item (e), encontramos os mesmos valores para x e y do item (d), porém trocados.

- Para $t=\frac{2}{3}$, tem-se $x=\frac{27}{8}$ e $y=\frac{9}{4}$;
- Para $t=\frac{1}{2}$, tem-se $x=4$ e $y=2$;

- Para $t=\frac{1}{3}$, tem-se $x=3^{\frac{3}{2}}$ e $y=3^{\frac{1}{2}}$.

A verificação não precisa ser feita novamente, pois os valores encontrados são os mesmos de anteriormente e foi provado que eles satisfazem a equação $x^y=y^x$.

Espera-se que o aluno perceba que se o número t, com $t\in\mathbb{R}^+-\{1\}$, nos fornece o par ordenado (x,y) pelas equações paramétricas $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y=t^{\frac{t}{t-1}}$, o seu inverso $\frac{1}{t}$ nos fornecerá o par ordenado (y,x). De acordo com o que foi visto sobre propriedade de simetria da curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ no capítulo 3.

Para provar esse fato, pede-se no item (f) que o aluno faça a substituição de t por $\frac{1}{t}$ nas equações paramétricas $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y=t^{\frac{t}{t-1}}$.

Seguem os cálculos:

- $x=\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{t}-1}}=\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\frac{1-t}{t}}}=\left(\frac{1}{t}\right)^{-\frac{t}{t-1}}=t^{\frac{t}{t-1}}$;
- $x=\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-1}}=\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1-t}{t}}}=\left(\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{t-1}}=t^{\frac{1}{t-1}}$.

Para finalizar essa atividade, no item (g) o aluno deve encontrar uma solução para a equação $x^y=y^x$ com $y\neq x$ tal que $y=3$. Como as equações $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ e $y=t^{\frac{t}{t-1}}$ estão em função de t, espera-se que o aluno faça $t^{\frac{t}{t-1}}=3$ para tentar encontrar o valor do parâmetro t e substituí-lo $x=t^{\frac{1}{t-1}}$ para encontrar x.

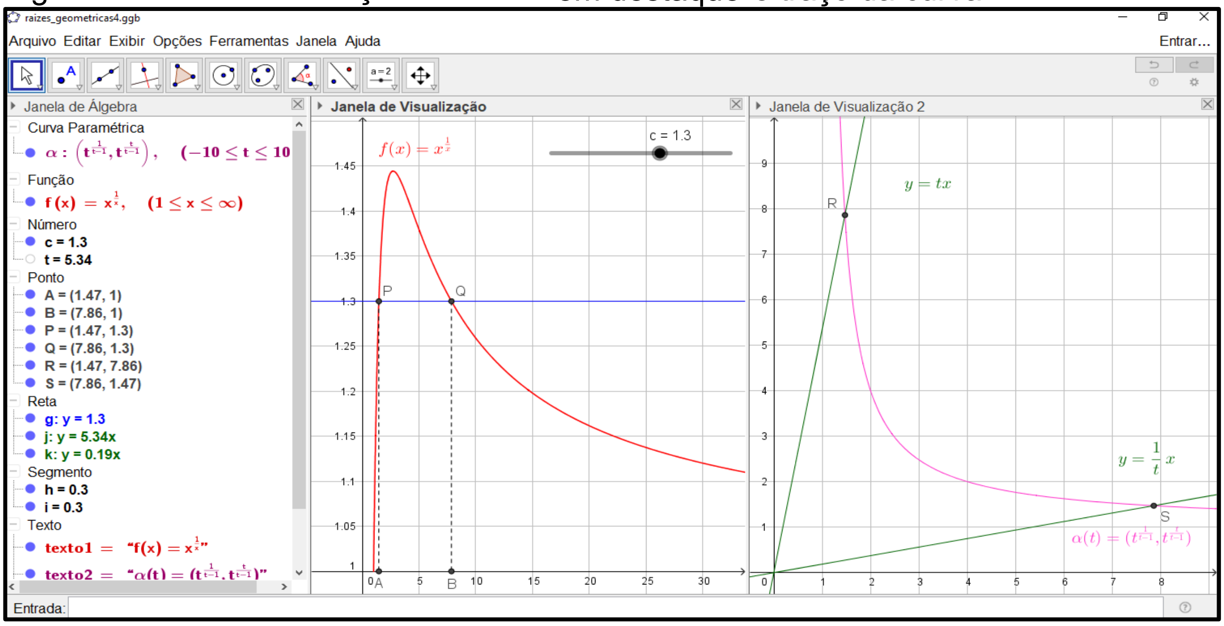
Porém, não é possível isolar t quando se tem a igualdade $t^{\frac{t}{t-1}}=3$ e consequentemente, também não é possível encontrar um valor para x. Logo, dado um valor fixo para y, utilizar as equações paramétricas para encontrar o valor de x de modo que tenhamos $x^y=y^x$ não é uma boa escolha.

5.3 SOLUÇÕES: UMA ALTERNATIVA GEOMÉTRICA

5.3.1 Atividade 3

Nesta atividade, explora-se a relação existente entre o gráfico da função $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ e as soluções da equação $x^y=y^x$. Essa relação é feita por retas do tipo $y=c$ que cortam o gráfico de $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ fornecendo pontos de interseção cuja abscisas são aproximações para as soluções não triviais da equação $x^y=y^x$.

Figura 17: Gráfico da função $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ em destaque e traço da curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$



Fonte: O autor

À esquerda da tela na Figura 17, temos representado em vermelho, o gráfico da função $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ e, em azul, o gráfico da reta $y=c$.

(a) Através da ferramenta *Mover* faça variar os valores assumidos pelo número c, observe o que ocorre com o gráfico e registre suas observações.

(b) Identifique os pontos de interseção entre os gráficos da função $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ e da reta $y=c$.

(c) Para um valor fixo de c, escolhido por você, identifique as coordenadas desses pontos de interseção, registrando aqui seus resultados.

Valor de c escolhido: ________

- coordenadas do 1º ponto de interseção: ponto ____ coordenadas ________
- coordenadas do 2º ponto de interseção: ponto ____ coordenadas ________

(d) O que se pode concluir quando se compara as ordenadas desses pontos de interseção?

(e) Para esse mesmo valor de c, reescreva a expressão $a^b=b^a$ substituindo as variáveis a e b respectivamente pelas abcissas dos pontos A e B.

(f) De acordo com o que você respondeu nos itens (d) e (e), identifique o que representam as abcissas desses pontos de interseção em relação à equação $a^b=b^a$.

(g) Observando o comportamento dos gráficos de $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ e de $y=c$, determine o valor da variável a quando $b=7{,}86$.

(h) De acordo com o que você respondeu nos itens anteriores, registre o que você pode concluir a respeito das soluções da equação $a^b = b^a$.

Objetivos:

- Estudar as soluções da equação $x^y = y^x$ utilizando recursos geométricos;
- Encontrar aproximações para as soluções não triviais da equação $x^y = y^x$ utilizando a interseção entre retas do tipo $y = c$ e o gráfico de $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

Desenvolvimento:

Iniciamos esta atividade pedindo ao aluno que varie o valor do número c e que após essas variações, registre suas observações. Espera-se que o aluno perceba que o número c determina a reta $y = c$ paralela ao eixo *OX*, que está em azul no gráfico.

O aluno também observará que aumentando o valor de c , os valores das abscissas dos pontos de interseção se aproximam e quando o valor de c diminui, os valores das abscissas dos pontos de interseção se afastam.

Para o item (b), o aluno deve identificar que os pontos de interseção entre a reta $y = c$ e o gráfico de $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ são os pontos $P = (x_p, c)$ e $Q = (x_q, c)$. Caso o aluno não tenha percebido que as ordenadas dos pontos P e Q são iguais, terá a oportunidade de visualizar este fato no item seguinte.

Segue um exemplo para o item (c), de acordo com a Figura 17:

- $c = 1{,}3$, $P = (1{,}47 ; 1{,}3)$ e $Q = (7{,}86 ; 1{,}3)$.

Para o item (d), espera-se que o aluno não tenha mais dúvidas em relação às ordenadas dos pontos P e Q serem iguais.

No item (e), ao substituir as variáveis a e b da expressão $a^b = b^a$ respectivamente pelas abcissas dos pontos A e B, que são as projeções dos pontos P e Q sobre a reta $y=1$, o aluno encontrará resultados diferentes para a^b e b^a, porém muito próximos.

Observe os cálculos abaixo:

- $a^b = 1{,}47^{7{,}86} \approx 20{,}66$ e $b^a = 7{,}86^{1{,}47} \approx 20{,}71$.

Para o item (f), espera-se que o aluno perceba que os valores das abscissas dos pontos de interseção entre a reta $y=c$ e o gráfico de $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ são aproximações para as soluções da equação $a^b = b^a$.

Devemos dar uma explicação plausível para o nosso aluno, como a que será dada a seguir.

A reta $y=c$ intersecta o gráfico de $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ em dois pontos distintos, ou seja, temos dois elementos do domínio de $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, a e b por exemplo, com a mesma imagem c. Ou seja, temos:

- $c = a^{\frac{1}{a}} = b^{\frac{1}{b}} \Leftrightarrow a^b = b^a$.

Porém, o *software* Geogebra nos fornece um valor aproximado para a e b, o que explica o fato dos resultados das potências a^b e b^a serem valores próximos mas não iguais.

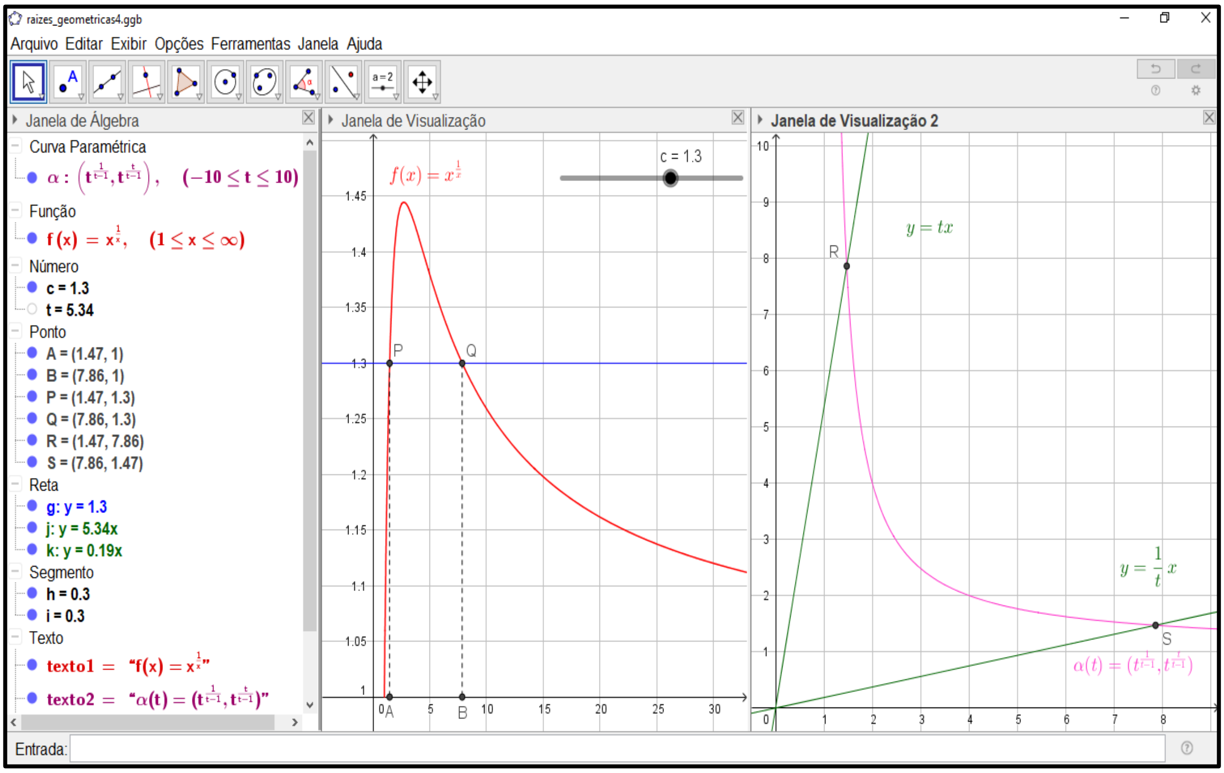
Para o item (g), o aluno identificará com facilidade o valor da variável a ao observar a janela de álgebra do Geogebra. Observando a Figura 17, visualiza-se que para $b = 7{,}86$ temos $a = 1{,}47$.

E para finalizar essa atividade, pede-se no item (h) que o aluno registre suas conclusões a respeito das soluções da equação $a^b = b^a$. Esperamos que o aluno entenda que as soluções da equação $a^b = b^a$ nem sempre podem ser encontradas utilizando meios algébricos. E que às vezes, deve-se lançar mão de outros métodos para conseguir resolver um problema.

Espera-se também que o aluno entenda, que nem sempre as soluções encontradas para um problema a ser resolvido serão exatas, ou seja, números inteiros ou decimais com uma quantidade de casas definidas. Às vezes as respostas encontradas podem ser valores aproximados daqueles que por ventura resolveriam o problema.

5.3.2 Atividade 4

Figura 18: Gráfico da função $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ e traço da curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ em destaque



Fonte: O autor

À direita da tela na Figura 18 temos representado, em rosa, o traço da curva parametrizada $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ e, em verde, as semirretas $y=tx$ e $y=\frac{1}{t}x$.

(a) Através da ferramenta *Mover* faça variar os valores assumidos pelo número c, o mesmo da atividade anterior, observe o que ocorre com o traço da parametrização e com as semirretas e registre suas observações.

(b) Identifique os pontos de interseção entre o traço da parametrização e as semirretas.

(c) Para o mesmo valor fixo de c, escolhido por você no item (c) da Atividade 3, identifique o valor do parâmetro t correspondente e das coordenadas desses pontos de interseção, registrando aqui seus resultados.

Valor de c escolhido: _______
Valor de t: _______

- coordenadas do ponto de interseção entre a curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ e a semirreta $y=tx$:

ponto ____ coordenadas ___________

- coordenadas do ponto de interseção entre a curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ e a semirreta $y=\frac{1}{t}x$:

ponto ____ coordenadas ___________

(d) Substitua esse valor de t do item anterior nas expressões das coordenadas x e y da curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ e encontre, para esse valor de t, o valor dessas coordenadas x e y. Identifique a qual dos dois pontos de interseção do item anterior corresponde esses valores. Registre aqui seus resultados.

Valor de t : _______

- coordenadas da curva: $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ ___________________________
- ponto correspondente: _______

(e) Para esse mesmo valor de t substitua os valores das coordenadas da curva na $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ equação $x^y=y^x$, efetue os devidos cálculos e registre seus resultados.

(f) De acordo com o item anterior o que você pode concluir a respeito das soluções da equação $x^y=y^x$?

(g) Para esse mesmo valor de t e observando suas respostas nos itens (c) e (d) e (e) que ponto devemos encontrar ao substituir o valor de $\frac{1}{t}$ nas expressões das coordenadas x e y da curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$. Registre seus resultados, justificando sua resposta da maneira que achar mais apropriada.

Valor de $\frac{1}{t}$: _____

ponto: ______

(h) O que você pode concluir ao substituir as coordenadas x e y desse ponto do item anterior na equação $x^y=y^x$?

(i) Qual a relação entre as abscissas dos pontos da interseção da reta $y=c$ com o gráfico da função $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ e as coordenadas x e y da curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$?

Objetivos:

- Estudar as soluções da equação $x^y=y^x$ utilizando recursos geométricos;
- Observar o comportamento das soluções da equação $x^y=y^x$ para $y\neq x$, utilizando o traço da curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$.

Desenvolvimento:

De modo análogo à atividade 3, iniciamos a atividade 4 pedindo ao aluno que varie o valor do número c e que após essas variações, registre suas observações. Esperamos que o aluno perceba que os pontos de interseção entre as semirretas $y=tx$ e $y=\frac{1}{t}x$ e o traço da curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ se aproximam um do outro quando o parâmetro c aumenta seu valor. E se distanciam quando c diminui seu valor.

Para o item (b) o aluno identificará facilmente que os pontos de interseção entre o traço da parametrização e as semirretas são R e S .

Segue um exemplo para o item (c), (d) e (e) desta atividade, de acordo com o que foi respondido no item (c) da atividade anterior (veja na Figura 18):

(c) $c=1{,}3$, $t=5{,}34$, $R=(1{,}47\,;7{,}86)$, $S=(7{,}86\,;1{,}47)$;

(d) $x=5{,}34^{\frac{1}{5{,}34-1}}\approx 1{,}47$ e $y=5{,}34^{\frac{5{,}34}{5{,}34-1}}\approx 7{,}86$;

(e) $x^y=1{,}47^{7{,}86}\approx 20{,}66$ e $y^x=7{,}86^{1{,}47}\approx 20{,}71$.

Para o item (f), esperamos que o aluno perceba que podemos obter aproximações das soluções da equação $x^y=y^x$ utilizando as interseções das retas $y=tx$ e $y=\frac{1}{t}x$ com o traço da curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$.

Segue a verificação para $\frac{1}{t}$ do item (g):

- $x=\left(\frac{1}{5{,}34}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{5{,}34}-1}}\approx 7{,}86$ e $y=\left(\frac{1}{5{,}34}\right)^{\frac{5{,}34}{\frac{1}{5{,}34}-1}}\approx 1{,}47$;

Para o item (h), o aluno deve observar que para cada ponto (x,y) determinado para o parâmetro t, o seu inverso $\frac{1}{t}$ determina o par (y,x), como foi visto por ele na atividade 2.

No item (i), pedimos que o aluno tente encontrar uma relação entre as abscissas dos pontos da interseção da reta $y=c$ com o gráfico da função $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ e as coordenadas x e y da curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$.

Nesse momento final, esperamos que o aluno perceba que as coordenadas dos pontos de interseção das semirretas $y=tx$ e $y=\frac{1}{t}x$ com o traço da curva $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}},t^{\frac{t}{t-1}}\right)$, são as abscissas dos pontos de interseção da reta $y=c$ com o gráfico de $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$.

Deve-se fornecer uma explicação plausível para o nosso aluno em relação a isso.

Da atividade 3, sabemos que quando a reta $y=c$ intersecta o gráfico de $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ em dois pontos distintos, temos dois elementos distintos do domínio de $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, a e b por exemplo, com a mesma imagem que implica em $a^{\frac{1}{a}}=b^{\frac{1}{b}} \Leftrightarrow a^b=b^a$. E portanto, o par (a,b) é uma solução não trivial $(y \neq x)$ da equação $x^y=y^x$.

Por outro lado, pela atividade 2, sabe-se que as soluções não triviais da equação $x^y=y^x$ são dadas pela parametrização $\alpha(t)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$. Ou seja, temos $a=t^{\frac{1}{t-1}}$ e $b=t^{\frac{t}{t-1}}$ ou $a=t^{\frac{t}{t-1}}$ e $b=t^{\frac{1}{t-1}}$. Pois não podemos esquecer, da atividade 2, que para cada solução (x,y) determinada pelo número t, o seu inverso $\frac{1}{t}$ determina a solução (y,x).

Mas qual seria o "formato" do parâmetro t?

Suponhamos que $(a,b)=\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$, onde a e b são as abscissas dos pontos de interseção da reta $y=c$ e o gráfico da função $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$.

Segue que,

- $c=a^{\frac{1}{a}}=\left(t^{\frac{1}{t-1}}\right)^{\frac{1}{t^{\frac{1}{t-1}}}}=t^{\frac{1}{z}}$ onde $z=t^{\frac{t}{t-1}}-t^{\frac{1}{t-1}}=b-a$.

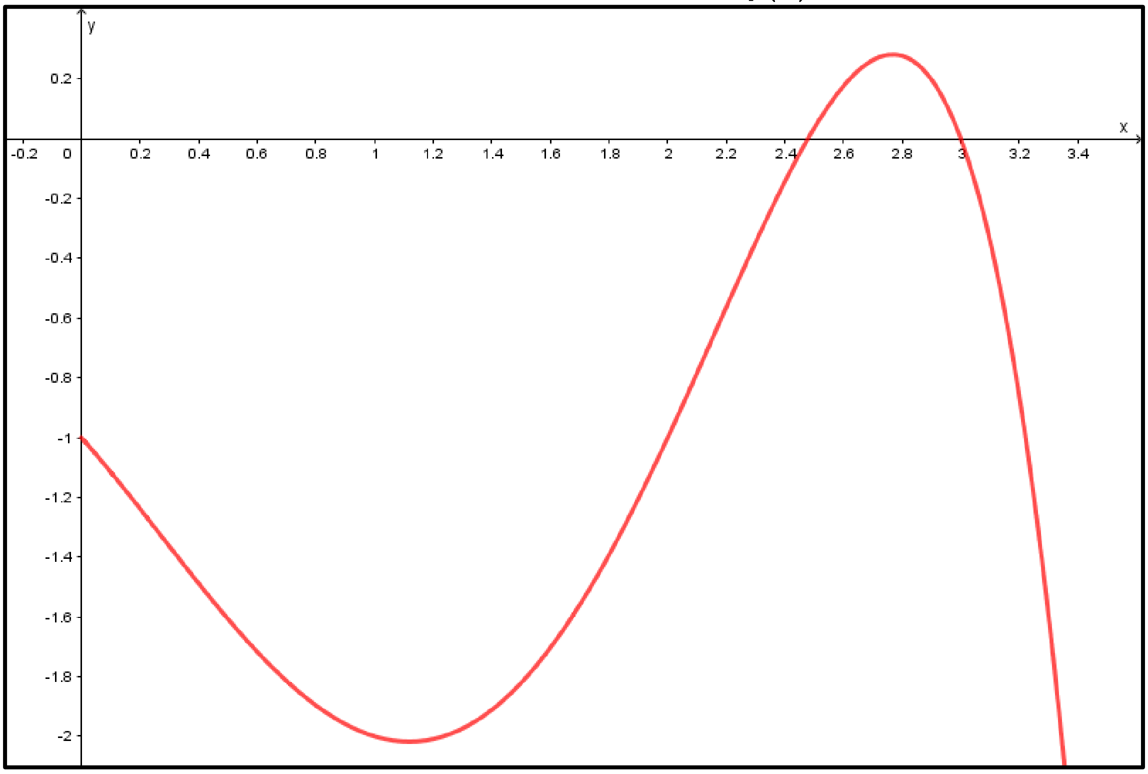
Portanto,

- $t^{\frac{1}{b-a}}=c \Leftrightarrow t=c^{b-a}$.

5.4 ATIVIDADE 5 – SOLUÇÕES: UMA ALTERNATIVA NUMÉRICA

a) As raízes da função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = x^3 - 3^x$ satisfazem a equação $x^3 = 3^x$? Justifique sua resposta.

Figura 19: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3^x$



Fonte: O autor

Notamos ao observarmos o gráfico da Figura 19 que a função $f(x) = x^3 - 3^x$ possui uma raiz no intervalo $[a_1, b_1] = [2.4, 2.6]$.

b) Qual a média aritmética entre os extremos desse intervalo? Esse valor encontrado como média entre os extremos do intervalo está mais próximo ou mais distante do valor da raiz da função $f(x) = x^3 - 3^x$ do que os próprios extremos do intervalo? Justifique sua resposta.

Chamaremos o valor da média aritmética encontrado no item (b) de c_1.

c) Observe os sinais das imagens da função $f(x)=x^3-3^x$ nos extremos do intervalo e diga se são positivas ou negativas essas imagens.

d) Substitua na lei de formação da função $f(x)=x^3-3^x$, o valor encontrado c_1 como média aritmética no item (b) e calcule a sua imagem, indicando se esta é negativa ou positiva.

e) De acordo com os sinais observados nos itens (c) e (d), indique o próximo intervalo $[a_2, b_2]$, sobre o qual devemos atuar na busca de uma raiz da função $f(x)=x^3-3^x$, justificando sua resposta.

f) Refaça o item (b) para o intervalo $[a_2, b_2]$.
Chamaremos o valor da média aritmética encontrado no item (f) de c_2 .

g) Refaça os itens (c), (d) e (e) para o intervalo $[a_2, b_2]$ e para a média c_2 , chamando o novo intervalo de $[a_3, b_3]$.

h) Chamando as novas médias de $c_3, c_4, \ldots$ e os novos intervalos de $[a_4, b_4], [a_5, b_5], \ldots$, repita esse processo, refazendo os itens de (b) a (g) completando a tabela abaixo com a ajuda do Calc:

Tabela 2: Atividade 5 (item h)

Iteração	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$	$b_n - a_n$
1	2,4000000	2,6000000	2,5000000	0,0365427	0,2000000
2	2,4000000	2,5000000	2,4500000	-0,0491421	0,1000000
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					
25					

Fonte: O autor

i) O que acontecerá se repetirmos os itens (b), (c), (d), (e), (f) e (g) indefinidamente? Justifique sua resposta.

j) Após completar a tabela do item (g), dê um valor aproximado para a solução de $x^3=3^x$ com até sete casas decimais. Substitua esse valor em $x^3=3^x$ e verifique se ele realmente satisfaz a equação.

Objetivos:

- Resolver a equação $x^y=y^x$ utilizando um método numérico;
- Encontrar aproximações para as soluções não triviais da equação $x^y=y^x$ utilizando o método da bisseção, usando como exemplo a equação $x^3=3^x$.

Desenvolvimento:

Essa atividade envolve a aplicação do método da bisseção para encontrar uma aproximação para a solução da equação $x^3=3^x$.

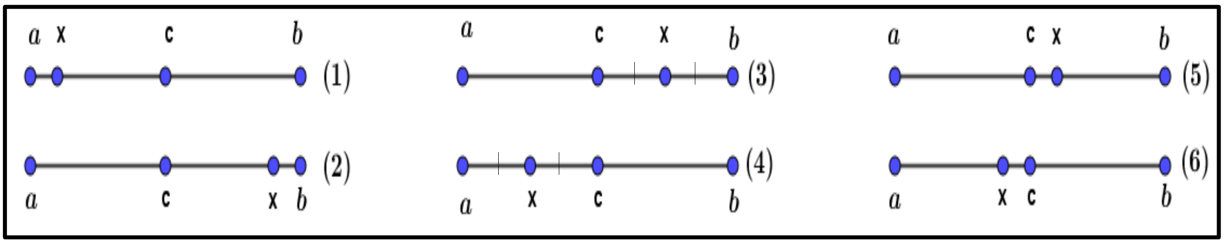
Para o item (a) pedimos ao aluno que responda se as raízes da função $f:\mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}$ com $f(x)=x^3-3^x$ satisfazem a equação $x^3=3^x$ e que justifique sua resposta.

Esperamos que o aluno possua o conhecimento que determinar as raízes da função $f(x)=x^3-3^x$, significa encontrar um número real tal que $x^3-3^x=0$, o que implica em $x^3=3^x$. E portanto, ao encontrarmos as raízes de $f(x)=x^3-3^x$, estaremos encontrando x que também satisfaz a igualdade $x^3=3^x$.

Para o item (b), o aluno deve responder sem dificuldade que a média entre os extremos do intervalo é $\frac{2.4+2.6}{2}=2.5$. E ao indagarmos se esse valor está mais próximo ou mais distante da raiz função $f(x)=x^3-3^x$, precisaremos que o aluno tenha noção de ponto médio. Com isso o aluno deverá notar, que o valor da média estará centrado no intervalo e responder que o valor estará mais próximo da raiz da função, pelo menos em relação a um dos extremos.

Para esclarecer possíveis dúvidas, podemos mostrar as ilustrações da Figura 20. Onde a e b são extremos de um intervalo, c é a média aritmética entre os extremos a e b, e x é um valor pertencente ao intervalo $[a,b]$. Excluímos o caso em que a média c coincide com x.

Figura 20: Possíveis localizações para um número dentro de um intervalo em relação à média aritmética dos extremos desse intervalo



Fonte: O autor

Prosseguindo com a atividade, para o item (c) o aluno deverá notar que, estando uma raiz da função no intervalo $[2.4, 2.6]$, o sinal da mesma deverá mudar de positivo para negativo ou de negativo para positivo.

No item (d) o aluno substituirá o valor da média $c_1 = 2.5$ na lei de formação da função e encontrará o seguinte resultado: $f(2.5) = 2.5^3 - 3^{2.5} = 0.0365427319$. O aluno deverá indicar então que essa imagem é positiva.

No item (e) o aluno deverá perceber em qual dos intervalos $[a_1, c_1]$ ou $[c_1, b_1]$ ocorre a mudança de sinal das imagens da função, observando que nos próximos passos deverá atuar sobre esse novo intervalo a ser chamado de $[a_2, b_2]$.

Com base nesse argumento, o aluno deve indicar para o item (e) o intervalo $[a_2, b_2] = [2.4, 2.5]$ pois $f(2.4)$ é negativo enquanto que $f(2.5)$ é positivo.

Prosseguindo com item (f), o aluno deve realizar o seguinte cálculo: $c_2 = \frac{2.4 + 2.5}{2} = 2.45$. E após os cálculos, o aluno deve perceber que $c_2 = 2.45$ está mais próximo da raiz da função, pelo menos em relação a um dos extremos.

No item (g) o aluno deverá retomar as observações quanto ao sinal da função no intervalo $[a_2, b_2] = [2.4, 2.5]$, sendo $f(2.4)$ negativo e $f(2.5)$ positivo, calcular $f(2.45) = -0{,}0491420508$, observando que este é negativo, e indicar que o próximo intervalo a ser trabalhado será o intervalo $[a_3, b_3] = [2.45, 2.5]$.

No item (h) esperamos que o aluno proceda às próximas iterações, apresentando uma tabela que o aluno deverá preencher com a ajuda do Calc, programa que já foi utilizado na atividade 1. A utilização do Calc visa novamente agilizar os cálculos.

De modo análogo à atividade 1, as fórmulas devem ser formatadas pelo professor, cabendo ao aluno somente a missão de completar a tabela com o recurso arrastar da planilha eletrônica.

Segue um exemplo da tabela do item (h) totalmente preenchida.

Tabela 3: Atividade 5 (item h) – tabela preenchida

Iteração	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$	$b_n - a_n$
1	2,4000000	2,6000000	2,5000000	0,0365427	0,2000000
2	2,4000000	2,5000000	2,4500000	-0,0491421	0,1000000
3	2,4500000	2,5000000	2,4750000	-0,0052197	0,0500000
4	2,4750000	2,5000000	2,4875000	0,0159454	0,0250000
5	2,4750000	2,4875000	2,4812500	0,0054320	0,0125000
6	2,4750000	2,4812500	2,4781250	0,0001233	0,0062500
7	2,4750000	2,4781250	2,4765625	-0,0025440	0,0031250
8	2,4765625	2,4781250	2,4773438	-0,0012093	0,0015625
9	2,4773438	2,4781250	2,4777344	-0,0005427	0,0007813
10	2,4777344	2,4781250	2,4779297	-0,0002097	0,0003906
11	2,4779297	2,4781250	2,4780273	-0,0000432	0,0001953
12	2,4780273	2,4781250	2,4780762	0,0000400	0,0000977
13	2,4780273	2,4780762	2,4780518	-0,0000016	0,0000488
14	2,4780518	2,4780762	2,4780640	0,0000192	0,0000244
15	2,4780518	2,4780640	2,4780579	0,0000088	0,0000122
16	2,4780518	2,4780579	2,4780548	0,0000036	0,0000061
17	2,4780518	2,4780548	2,4780533	0,0000010	0,0000031
18	2,4780518	2,4780533	2,4780525	-0,0000003	0,0000015
19	2,4780525	2,4780533	2,4780529	0,0000004	0,0000008
20	2,4780525	2,4780529	2,4780527	0,0000001	0,0000004
21	2,4780525	2,4780527	2,4780526	-0,0000001	0,0000002
22	2,4780526	2,4780527	2,4780527	0,0000000	0,0000001
23	2,4780527	2,4780527	2,4780527	0,0000000	0,0000000
24	2,4780527	2,4780527	2,4780527	0,0000000	0,0000000
25	2,4780527	2,4780527	2,4780527	0,0000000	0,0000000

Fonte: O autor

Para item (i), o aluno perceberá que a partir de certo momento as casas decimais das médias aritméticas calculadas (c_n) começam a repetir, fazendo a diferença entre os extremos dos intervalos que estamos trabalhando ficar cada vez menor, até reduzir-se a zero.

No item (j), o aluno encontrará como aproximação da raiz da função $f(x)=x^3-3^x$ que pertence ao intervalo $[2.4,2.6]$, o número 2.4780527 .

Seguem as verificações:

- $3^{2.4780527}=15.21709015$;
- $2.4780527^3=15.217090183$.

A partir deste ponto, apresentamos ao aluno o método que utilizamos para determinar a solução da equação $x^3=3^x$, o método da bisseção [19].

Seja a função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$, tal que $f(a)\times f(b)<0$ ($f(a)$ e $f(b)$ com sinais opostos).

Vamos supor, para simplificar, que o intervalo (a,b) contenha uma única raiz da equação $f(x)=0$.

O objetivo deste método é reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz até se atingir a precisão (ε) requerida: $(b-a)<\varepsilon$, usando para isso a sucessiva divisão de $[a,b]$ ao meio.

Descreve-se abaixo, o passo a passo para a sua utilização.

- Calcule $c=\frac{a+b}{2}$;
- Se $f(c)=0$, então a raiz da função é igual a c ;
- Se $f(c)\times f(a)<0$, existe uma raiz no intervalo (a,c) ;
- Se $f(c)\times f(b)<0$, existe uma raiz no intervalo (c,b) .

Recomeça-se o processo com o novo intervalo para melhorar a aproximação da raiz. Ou seja, o processo deve ser repetido até que se encontre um intervalo $[a_n,b_n]$ tal que $(b_n-a_n)<\varepsilon$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tema escolhido para ser desenvolvido nesse trabalho foi curiosamente interessante. Visto que, uma equação aparentemente simples pode gerar tantas horas de estudos e tantas páginas de conteúdo com demonstrações matemáticas envolvendo não somente assuntos da educação básica como potências e logaritmos, mas também limites, derivadas e parametrização de curvas, que atualmente são assuntos abordados apenas no Ensino Superior. Assim, podemos dizer que de não há nada de simples na equação $x^y = y^x$.

Ao longo da pesquisa nos deparamos com a dificuldade de encontrar referências bibliográficas que expusessem demonstrações completas e detalhadas sobre fatos importantes inerentes a essa equação. E motivados por essa vontade de obter um material com um estudo mais abrangente sobre as soluções da equação $x^y = y^x$, procuramos realizar um trabalho minucioso sobre suas soluções reais. Com isso, esperamos que esse material passe a ser uma fonte de referência sobre o assunto.

Portanto, acreditamos ter alcançado os objetivos propostos inicialmente pela pesquisa de realizar um estudo detalhado sobre as soluções da equação $x^y = y^x$ dentro do campo dos números reais positivos e de propor atividades que realmente possam ser trabalhadas com turmas do Ensino Médio. E que ao serem aplicadas, estimulem o interesse do aluno pela atividade da pesquisa através de um assunto que normalmente não é abordado na Educação Básica.

Durante a pesquisa realizada, constatamos a relação entre as soluções da equação $x^y = y^x$ e outros assuntos dentro da Matemática. Tais como a convergência das superexponenciais ($c^c, c^{c^c}, c^{c^{c^c}}$) e sistemas dinâmicos. Podendo ser esses assuntos, relacionados com as soluções de $x^y = y^x$, temas de estudo para trabalhos futuros.

7 REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

[1] ALVES, Francisco Regis Vieira. **Construção de curvas parametrizadas: uma discussão sobre o uso dos *softwares Geogebra* e *CAS Maple*.** Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, v. 3, n. 1, p. 5-22, 2014.*

[2] ATRACTOR. **Dinâmica de uma Família de Exponenciais**. Disponível em: <http://www.atractor.pt/publicacoes/publs_coluna.html>. Acesso em: 20 out 2017.

[3] BENNETT,M.A.; REZNICK, Bruce. **Positive Rational Solutions to** $x^y = y^{mx}$ **: A Number – Theoretic Excursion**. The American Mathematical Monthly, V. 111, n.1, p. 13 – 21, jan. 2004.

[4] BERNOULLI, Daniel. **Problème de la Théorie des Nombres**. in: Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célèbres Géomètres du XVIII Ème Siècle. P.H. Fuss, ed. St. Pétersbourg, vol. 2, 1843.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).** Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2016.

[6] Bush L. E., **The 1960 William Lowell Putnam Mathematical Competition.** The Americal Mathematical Monthly, vol. 68, nº 7, p. 629-637, 1961.

[7] DICKSON, L.E.. **History of the Theory of Numbers.** v. 2, Washington. 1920.

[8] EULER, L. **Introductio in Analysin Infinitorum**. 1797. v.2.

[9] GOLDBACH, Christian. **Solution de L'équation** $x^y = y^x$ **. Sommation des Séries par Aproximation. Suite Convergente pour** $\sqrt{2}$ **. Théorème de la Doctrine des Séries**. in: Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célèbres Géomètres du XVIII Ème Siècle. P.H. Fuss, ed. St. Pétersbourg, vol. 2, 1843.

[10] GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos Computacionais no Ensino da Matemática**. Coleção PROFMAT. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[11] GUIDORIZZI, L.H. **Um Curso de Cálculo**. 5 ed. v.1. Rio de Janeiro: LTC 2008.

[12] HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[13] HENGEL, Johann Van. **Beweis des Satzes, dass unter allen reellen positiven ganzen Zahlen nur das Zahlenpaar 4 und 2 für a und b der Gleichung $a^b = b^a$ genügt.** Bericht über das Königliche Gymnasium zu Emmerich, vol 1888, p. 9-12, 1888.

[14] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos da Matemática Elementar,** vol2, 9 ed. São Paulo: Atual, 2004.

[15] IEZZI, G.; MURAKAMI, C.;MACHADO, N. J. **Fundamentos da Matemática Elementar**, vol 8, 8 ed. São Paulo: Atual, 2004.

[16] LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**, v.1, 1 ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1977.

[17] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**,v.1. Coleção Projeto Euclides. 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1989.

[18] REZNICK, Bruce. **Notes on the Equation $x^y = y^x$** . Disponível em:<https://faculty.math.illinois.edu/~reznick/xyyx.pdf>. Acesso em: 03 jul 2017.

[19] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática.** Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[20] RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico.** Aspectos Teóricos e Computacionais. 2 ed. São Paulo: ABDR, 1988.

[21] SVED, Marta. **On the Rational Solutions of $x^y = y^x$.** Mathematics Magazine, vol. 63. nº 1, p. 30-33, 1990.