Marcelo Martins Corrêa

Resolução de Problemas envolvendo Função Afim através do uso de Semelhança de Triângulos

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Março, 2018

Marcelo Martins Corrêa

Resolução de Problemas envolvendo Função Afim através do uso de Semelhança de Triângulos

Dissertação submetida por Marcelo Martins Corrêa como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Coorientador: Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Cristiana Andrade Poffal

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Março, 2018

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande
http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física
http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática
http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
http://www.capes.gov.br

Ficha catalográfica

C823r Corrêa, Marcelo Martins.
Resolução de problemas envolvendo função afim através do uso de semelhança de triângulos / Marcelo Martins Corrêa. – 2018.
79 p.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – Programa de Pós-graduação em Matemática, Rio Grande/RS, 2018.
Orientadora: Drª. Cinthya Maria Schneider Meneghetti.
Coorientadora: Drª. Cristiana Andrade Poffal.

1. Função Afim 2. Semelhança de Triângulos 3. Resolução de problema I. Meneghetti, Cinthya Maria Schneider II. Poffal, Cristiana Andrade III. Título.

CDU 517.5:37

Catalogação na Fonte: Bibliotecário Me. João Paulo Borges da Silveira CRB 10/2130

Marcelo Martins Corrêa

Resolução de Problemas envolvendo Função Afim através do uso de Semelhança de Triângulos

Dissertação submetida por Marcelo Martins Corrêa como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 09 de Março de 2018:

Cinthya M. S. Meneghetti

Profª. Drª. Cinthya Maria Schneider Meneghetti
(Orientadora - FURG)

Cristiana Andrade Poffal

Profª. Drª. Cristiana Andrade Poffal
(Coorientadora - FURG)

Mario Rocha Retamoso

Prof. Dr. Mario Rocha Retamoso
(Avaliador - FURG)

Prof. Me. Mauro Dinael Beilfuss Bartz
(Avaliador - IFSUL)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Março, 2018

Este trabalho é dedicado à minha mãe, por tudo o que me proporcionou.

Agradecimentos

Agradeço às professoras orientadoras Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti e Dra. Cristiana Andrade Poffal, que desde o primeiro momento me apoiaram e estiveram sempre dispostas a contribuir com a realização deste trabalho.

À minha mãe, Maria Eloá Rodrigues Martins, razão desta e de toda realização em minha vida.

Aos colegas de PROFMAT, pelo conhecimento compartilhado e pela companhia ao longo da jornada.

Aos alunos que disponibilizaram-se a participar das atividades, pela contribuição fundamental para o trabalho.

Aos amigos Marcelo Heinemann Presa, Gabriel Souza Germann e Diogo Rodrigues e à minha namorada, Luiza Felix Fonseca, por deixarem a vida mais leve e alegre, tornando pequenos os obstáculos encontrados no caminho. Obrigado pelo apoio e compreensão constantes.

Aos Professores Dr. Mario Rocha Retamoso e Me. Mauro Dinael Beilfuss Bartz, membros da Banca Examinadora, pela disponibilidade, atenção e contribuições dedicadas ao trabalho.

Ao corpo docente do Polo FURG do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, por todos os ensinamentos e pela experiência compartilhada.

"A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos, como também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens."
(Descartes)

Resumo

Este trabalho propõe três atividades voltadas à resolução de problemas que envolvem função afim através do uso de semelhança de triângulos. As atividades tratam dos temas: consumo e conta de água, imposto de renda e uso de sacolas plásticas. Sua sugestão baseia-se em dificuldades encontradas por alunos para obter a lei da função, o que levou a reflexão sobre formas alternativas de solução. Por meio da metodologia de resolução de problemas, as duas primeiras atividades foram elaboradas com questões orientadas, para que os alunos possam levantar e interpretar dados, analisar e aplicar a semelhança de triângulos em sua solução. Na terceira atividade, o problema é apresentado de forma livre, sem auxílio das questões para orientar, possibilitando que o aluno avalie qual método considera mais adequado para obter uma solução. O relato da aplicação das atividades é seguido pelos resultados obtidos, juntamente com uma avaliação realizada pelos participantes e pelo professor pesquisador.

Palavras-chaves: Função Afim, Semelhança de Triângulos, Resolução de Problemas.

Abstract

This study proposes three activities aimed at solving problems involving linear functions through the use of similarity of triangles. The activities deal with water consumption and water bill, IRS, and the use of plastic bags. Its suggestion is based on difficulties found by students trying to obtain the law of the function, which led to reflection on alternative ways of solution. Through problem solving methodology, the first two activities were created with guided questions, so students can collect and interpret data, analyze and apply similarity of triangles on their solution. On the third activity, the problem is presented in a free way, without the help of questions to guide it, enabling the students to evaluate which method they consider adequate to obtain the solution. The report on the application of activities is followed by the obtained results, together with the evaluation realized by the participants and by the researcher professor.

Key-words: Linear Function, Similarity of Triangles, Problem Solving.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

Algo que é muito curioso na Matemática é a possibilidade de chegar a respostas equivalentes para um mesmo problema por diferentes formas de resolução. Muitas vezes, mesmo obtendo um resultado plausível, busca-se outra resolução a fim de comparar os resultados. Em outros casos, a busca por mais formas de resolução ocorre com o objetivo de otimizá-las, obtendo uma solução mais simples e rápida.

Quando em sala de aula, em um curso pré-vestibular, os alunos apresentaram dificuldades em resolver alguns exercícios sobre função afim, que tinham por objetivo identificar qual seria a variação no valor da função, percebeu-se que a forma tradicional para resolução destes exercícios [1] poderia não ser uma forma eficiente de chegar ao resultado desejado. Com o uso de semelhança de triângulos, identificou-se uma forma de solucionar o problema de uma maneira mais prática do que a citada anteriormente. Embora existam outras formas alternativas para obter as respostas, como o uso de progressões aritméticas, considerou-se que a semelhança de triângulos consiste no método mais adequado a ser explorado, simplificando os cálculos e tornando mais compactas as resoluções. Essa foi a motivação para a escolha do tema deste trabalho: propor uma perspectiva de resolução diferente das tradicionais para problemas que envolvem a função afim.

> Quando a resolução a que finalmente chegamos é longa e complicada, suspeitamos, instintivamente, de que haja um outro processo mais claro e com menos rodeios: É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível vê-lo num relance? Até mesmo quando conseguimos encontrar uma resolução satisfatória, podemos estar interessados em achar outra. (POLYA, 1977, p. 59)

Neste sentido, o objetivo principal deste trabalho é estimular a aplicação de semelhança de triângulos em exercícios que envolvem função afim. Para isso, ao longo de três atividades, uma proposta de resolver estes problemas é, inicialmente, apresentada no formato de itens que orientam o aluno a essa nova estratégia e não como um novo algoritmo ou regramento. O foco principal das Atividades 1 e 2 é, com o auxílio dos itens orientados, despertar no estudante uma nova possibilidade de solução das mesmas. Já na Atividade 3 a estratégia permanece aberta e, neste caso, os itens não estão presentes orientando o aluno, que fica livre para resolver usando a estratégia que julgar mais adequada, assumindo uma postura participativa e ativa no processo.

[1] Entende-se aqui que a forma de resolução tradicional para exercícios envolvendo função afim é aquela onde a lei da função é determinada por um sistema de equações, para então, conhecendo a lei da função, obter valores pontuais.

> A caracterização de Educação Matemática, em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade. (ONUCHIC, 1999, p. 203)

Como objetivos gerais deste trabalho devem ser mencionados:

- destacar o uso de semelhança de triângulos como método de resolução em problemas envolvendo função afim;
- refletir acerca da possibilidade de diferentes formas de resolução para problemas matemáticos;
- apontar a importância da resolução de problemas como estratégia metodológica;
- incentivar professores e alunos a relacionar diferentes conteúdos matemáticos;
- estimular o uso de resoluções que fogem aos métodos tradicionais;
- avaliar os resultados das atividades e a receptividade das mesmas por parte dos alunos participantes.

Além desta introdução, no Capítulo 2, é apresentada a fundamentação sobre a metodologia utilizada e a revisão de algumas dissertações que têm como tema a função afim aparecem no Capítulo 3. Objetivos específicos, público alvo, pré-requisitos e recomendações metodológicas são apresentados no Capítulo 4. Os conteúdos matemáticos que dão suporte às atividades encontram-se no Capítulo 5. As atividades propostas, bem como suas soluções, encontram-se no Capítulo 6. O Capítulo 7, apresenta um relato das atividades aplicadas e a avaliação das mesmas, tanto por parte dos alunos como do professor pesquisador deste trabalho. Propostas de resoluções encontradas na internet para as questões que foram adaptadas nas atividades são apresentadas e analisadas no Capítulo 8. O Capítulo 9 traz uma breve retomada do trabalho, levando em consideração a impressão dos participantes e do autor. Nesse capítulo são apontados possíveis desdobramentos do trabalho e também os aprendizados durante o processo.

Por fim, no Apêndice C encontram-se as atividades propostas em um formato pronto para impressão, a fim de facilitar a aplicação das mesmas pelos colegas professores que assim desejarem.

2 Resolução de Problemas

Sabe-se que diversos conteúdos da Matemática podem ser relacionados entre si, por tratarem de tópicos equivalentes ou por possuírem aplicações em comum. Como exemplo, podem ser citados função afim, juros simples, progressões aritméticas e equações da reta que, em certo prisma, tratam de um tema semelhante: a reta, seus pontos e segmentos.

Porém, essa relação entre os conteúdos nem sempre é explorada. O que se nota é que o ensino de determinado conteúdo acaba, muitas vezes, restrito à apresentação de conceitos, definições, fórmulas e algoritmos, seguidos de exemplos resolvidos e uma bateria de exercícios específicos sobre o conteúdo. Os assuntos acabam sendo trabalhados de forma isolada, sem que haja interação entre diferentes tópicos estudados.

Dessa forma, o aluno passa por um processo de automatização da técnica de resolução, aplicando um passo a passo repetido diversas vezes nas listas de exercícios e sem a necessidade de refletir e elaborar estratégias, com o uso de seus conhecimentos, para obter o resultado desejado. É neste sentido, de estimular o aluno a pensar e propor diferentes planos e desenvolver habilidades, que se destaca a metodologia da resolução de problemas.

> Entre as tarefas mais importantes do professor em sala de aula está a de ser mediador entre o conhecimento e o aluno, o que não acontece se o professor assume apenas o papel de transmissor de conhecimento. Com o objetivo de auxiliar o aluno a desenvolver habilidades, muitos professores estão buscando na resolução de problemas uma alternativa metodológica para melhorar a aprendizagem, pois é uma das maneiras de fazer o educando pensar, propor e planejar soluções. (POZO, 1998, p. 13)

O desenvolvimento das técnicas e algoritmos de resolução é importante, mas deve ser observado que, quando isso é tratado de forma isolada, o aluno não é estimulado a analisar sobre a aplicação em outras situações, acaba utilizando determinado procedimento de forma imediata, pois é isso que vem fazendo ao longo da resolução de uma série de exercícios semelhantes e que reproduzem as formas de solução apresentadas pelo professor.

> Essa estratégia está centrada na ideia de superação de obstáculo pelo resolvedor, devendo, portanto, não ser de resolução imediata pela aplicação de uma operação ou fórmula conhecida, mas oferecer uma resistência suficiente, que leve o resolvedor a mobilizar seus conhecimentos anteriores disponíveis, bem como suas representações, e seu questionamento para a elaboração de novas ideias e de caminhos que visem a solucionar os desafios estabelecidos pela situação problematizadora, gerando então novas aprendizagens e formas de pensar. (SMOLE, 2011, p. 01)

Por mais que alguns conteúdos não estejam relacionados de forma direta como função exponencial e progressão geométrica, por exemplo, deve ser levado em consideração que o aluno precisa ser incentivado a buscar relações e aplicações, em diferentes contextos e situações, das diversas técnicas desenvolvidas. Conforme HATFIELD, apud (DANTE, 2003, p. 08),

> aprender a resolver problemas matemáticos deve ser o maior objetivo da instrução matemática. Certamente outros objetivos da Matemática devem ser procurados, mesmo para atingir o objetivo da competência em resolução de problemas. Desenvolver conceitos matemáticos, princípios e algoritmos através de um conhecimento significativo e habilidoso é importante. Mas o significado principal de aprender tais conteúdos matemáticos é ser capaz de usá-los na construção das soluções-problemas.

Mais do que apresentar ao aluno um conjunto de passos para obter a resposta de um exercício específico, a resolução de problemas aparece como uma metodologia de ensino que propõe que o aluno busque, através de conhecimentos desenvolvidos, alternativas para solucionar situações problemas de forma aberta, sem necessariamente recorrer a um método pré-estabelecido de "como fazer". Nesse sentido, não é imediata a aplicação de uma fórmula ou algoritmo para obter um resultado, cabe sim ao aluno refletir sobre o problema, buscando determinar o objetivo, as variáveis envolvidas, determinar os dados fornecidos, quais estratégias e técnicas podem ser utilizadas a fim de encontrar a solução.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) apontam ainda a resolução de problemas como uma estratégia de ensino, propiciando que os alunos desenvolvam alternativas de solução através da investigação, organização e sistematização dos conhecimentos e técnicas que já possuem ou que possam desenvolver ao longo do processo.

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 2000, p. 52)

A metodologia foi adotada para estimular os alunos a analisar os dados em busca da compreensão dos problemas, estabelecer e executar um plano para obter a solução e, com auxílio dos questionários, avaliar a resolução encontrada e sua validade. Segundo Polya (1977, p. XII), a resolução de um problema constitui-se em quatro etapas:

1. Compreensão do problema, que consiste em determinar incógnitas, dados e condicionantes;

2. Estabelecimento de um plano, que trata de encontrar conexões entre dados e incógnitas, buscar métodos utilizados ou resultados obtidos em problemas correlatos e estabelecer um plano para a resolução;

3. Execução do plano, onde é preciso verificar cada passo e, se possível, determinar se cada etapa está correta;

4. Retrospecto, onde deve-se examinar a solução obtida, verificar se é possível utilizar o método ou o resultado em outros problemas.

Com base no que foi apresentado, este trabalho propõe uma perspectiva de resolução diferente das tradicionais. As atividades, que tratam dos temas consumo e conta de água, imposto de renda e uso de sacolas plásticas, contam com questões que orientam o aluno a levantar dados e concluir que por meio de semelhança de triângulos podem ser obtidos os resultados desejados. Com a metodologia de resolução de problemas, espera-se contribuir para que o aluno consiga agregar novas estratégias para resolver exercícios envolvendo função afim, que usualmente são resolvidos determinando a lei da função, para então obter os valores pretendidos.

> Em todos os sentidos, o que se busca é que os alunos exerçam maior e melhor controle sobre o seu fazer e o seu pensar matemático, adquirindo sistemas de controle e autorregulação que os auxiliem a escolher ou optar por determinada estratégia, abandoná-la ou buscar outra que melhor se ajuste à situação e, ao final, avaliar o processo vivido. (SMOLE, 2011, p. 03)

No capítulo a seguir faz-se uma descrição de alguns trabalhos que tratam de função afim, porém com um foco diferente do que é proposto no Capítulo 6.

3 Trabalhos sobre Função Afim

Através de pesquisa sobre o tema função afim em bancos de dissertações e teses, percebe-se que grande parte dos trabalhos encontrados são focados em:

- ✓ Conceito de função;
- ✓ Definição, caracterização e propriedades da função afim;
- ✓ Construção do gráfico da função afim e sua relação com os coeficientes;
- ✓ Aplicações da função afim;
- ✓ Uso de softwares.

Nesse Capítulo, de maneira breve, faz-se uma descrição de alguns trabalhos que tratam de função afim sob as perspectivas supracitadas.

Em seu trabalho, Boschetto (2015) apresenta a metodologia de resolução de problemas para desenvolver o conceito e propriedades da função afim. Nos primeiros capítulos são apresentados a metodologia e o software GeoGebra, seguidos de conceitos da função afim, bem como casos particulares, coeficientes da função e seu gráfico. Após, a autora propõe uma sequência de aulas com o objetivo de desenvolver os conceitos relacionados a função afim. Para isso, explora a transferência da linguagem de situações problema para a simbologia matemática, determinação da lei da função através de valores conhecidos de dois pontos e construção e análise de gráficos no plano, com o uso do software.

Souza (2013) defende que, além de fórmulas matemáticas e gráficos, a função afim seja trabalhada através de aplicações que motivam os estudantes e mostram como o conceito pode ser utilizado para resolver problemas cotidianos. O conceito de função afim é exposto com auxílio de situações-problema envolvendo questões do dia a dia, seguido da definição formal, casos particulares e propriedades, onde é destacado o método para determinar os valores dos coeficientes angular e linear através de um sistema de equações lineares. Como aplicações da função aparecem as escalas termodinâmicas, movimento retilíneo uniforme, proporcionalidade em escalas e relação entre receita, custo e lucro, onde a solução algébrica é seguida por uma validação gráfica.

Após um capítulo onde são expostos definição e caracterização da função afim, seguidos de conceitos com respeito a raiz, coeficientes, monotonia e construção de gráficos, Torezani (2016) propões atividades, pautadas na metodologia de resolução de problemas, com o objetivo de auxiliar os aluno em uma aprendizagem efetiva sobre o tema. Em exemplos que abordam situações práticas, a autora propõe soluções onde a lei da função é determinada através de comparação entre equações ou pela determinação dos coeficientes angular e linear através da lei genérica e dados apresentados junto ao problema. Para o caso de problemas onde a solução é determinada pela intersecção de duas funções afim, a solução algébrica é acompanhada de uma solução com o auxílio do GeoGebra, com a construção e análise dos gráficos.

Para contribuir com os estudos já realizados sobre o tema função afim, este trabalho adota uma metodologia bastante utilizada, diferenciando-se, porém, no tratamento dado aos problemas. Propondo um método que foge ao tradicional, usa-se a semelhança de triângulos para obter os resultados. Precisamente, interpreta-se os comprimentos dos lados do triângulo como as variações nos valores da função, e assim obtém-se a solução do problema sem a necessidade de determinar a lei da função em questão.

O capítulo a seguir apresenta a caracterização das atividades, seus objetivos específicos, público alvo, pré-requisitos e recomendações metodológicas.

4 Caracterização

Este capítulo apresenta os objetivos específicos das atividades e os recursos mínimos necessários ao bom desenvolvimento das mesmas.

4.1 Objetivos das Atividades

Os objetivos específicos das atividades são:

- ✓ Interpretar os dados de um problema;
- ✓ Reforçar a análise e interpretação de gráficos de funções no plano cartesiano;
- ✓ Estabelecer um plano de solução para os problemas;
- ✓ Utilizar conceitos de geometria plana para estruturar uma forma de resolução;
- ✓ Estimular o aluno a perceber que, de acordo com o objetivo do problema, apenas uma parte do gráfico deve ser analisada;
- ✓ Construção de triângulos semelhantes a partir de um segmento de reta do gráfico;
- ✓ Obter a variação das grandezas envolvidas no problema;
- ✓ Resolver o problema utilizando as variações obtidas.

4.2 Público alvo

As atividades têm como público alvo, de um modo geral, estudantes do Ensino Médio que já tenham contato com o conteúdo de função afim, pois a finalidade é refletir sobre uma possibilidade de resolução de problemas utilizando conhecimentos sobre semelhança de triângulos. Esses conteúdos, usualmente são estudados no primeiro ano do Ensino Médio. Além disso, alunos que estejam concluindo o Ensino Médio e que desejam revisar ou aprofundar o estudo de função afim.

4.3 Pré-requisitos

Para o desenvolvimento das atividades são considerados pré-requisitos noções sobre:

- plano cartesiano;

- interpretação e análise de dados de gráficos de funções afim;
- semelhança de triângulos.

4.4 Recomendações metodológicas

Anteriormente à aplicação das atividades, o professor pode optar por uma revisão sobre semelhança de triângulos. É recomendado que as atividades sejam levadas impressas (veja Apêndice C).

Na primeira atividade, após a resolução por parte dos alunos, o professor pode resolvê-la no quadro, para auxiliar os alunos que apresentarem alguma dificuldade durante a resolução, bem como para uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos.

As atividades têm previsão de duração entre dois e três períodos de quarenta e cinco minutos, podendo ser realizadas juntas ou separadamente, respeitando a ordem numérica das mesmas. A aplicação pode ser feita de forma individual ou em grupos, conforme avaliação do professor. Após a realização das atividades é recomendada a discussão dos resultados com os alunos.

No próximo capítulo estão os conteúdos abordados nas atividades. As definições e resultados foram reunidos e enunciados em sequência, pois em geral, os mesmos encontram-se em seções distintas nos livros didáticos.

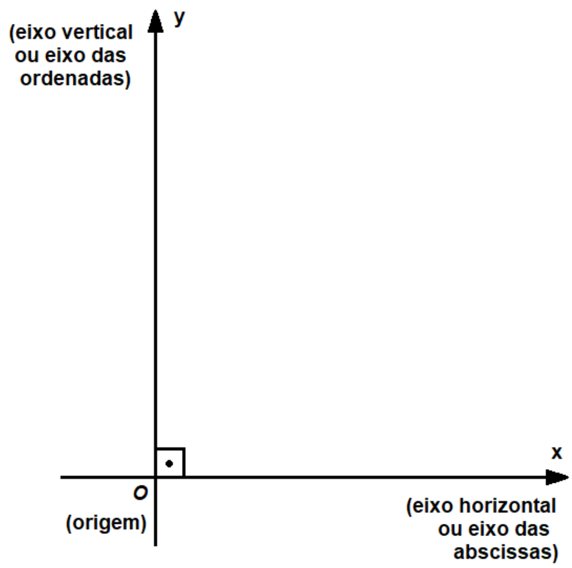
5 Plano Cartesiano, Função Afim e Semelhança de Triângulos

Neste capítulo são abordados os conteúdos matemáticos que embasam o método desenvolvido.

5.1 Plano Cartesiano

Definição 1. Um sistema de eixos ortogonais é constituído por dois eixos perpendiculares, Ox e Oy, que têm a mesma origem O (Figura 1). O sistema de eixos ortogonais é denominado plano cartesiano, em homenagem a Descartes (DANTE, 2014, p. 52).

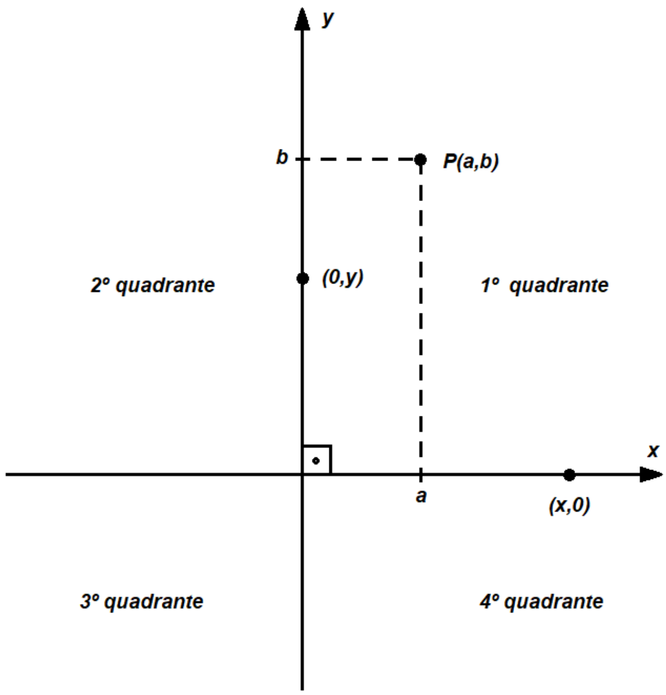
Figura 1 – Plano cartesiano.



Fonte: (DANTE, 2014, p. 52).

O plano cartesiano é dividido pelos eixos perpendiculares em quatro regiões, denominadas quadrantes e ordenadas conforme Figura 2.

Figura 2 – Quadrantes do plano cartesiano.



Fonte: (DANTE, 2014, p. 52).

Dado um ponto P qualquer no plano cartesiano, ao traçar segmentos de retas paralelos aos eixos ortogonais, obtém-se as coordenadas a e b do ponto P, conforme Figura 2. Dessa forma, todo ponto no plano cartesiano pode ser relacionado com um par ordenado $P(a, b)$ que representa sua localização. A coordenada a é chamada de abscissa e a coordenada b de ordenada do ponto P.

É importante notar que cada ponto está relacionado com um único par ordenado e que a cada par ordenado corresponde um único ponto no plano. É essa relação biunívoca que permite relacionar números reais e pontos no plano, possibilitando relacionar conceitos e propriedades algébricas e geométricas.

5.2 Função Afim

Definição 2. Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função afim quando a cada $x \in \mathbb{R}$ estiver associado o elemento $ax + b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, isto é (IEZZI; MURAKAMI, 1977, p. 96):

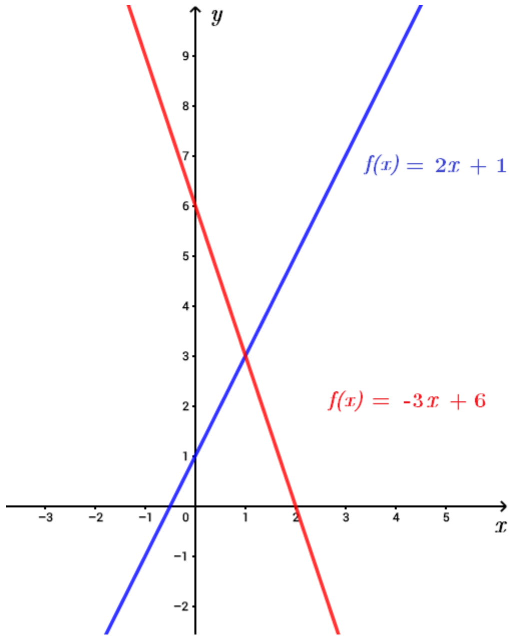
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b.$$

5.2.1 Gráfico da Função Afim

O gráfico cartesiano da função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta. No contexto dos problemas apresentados, o coeficiente angular a representa a taxa de variação da função, indicando se os valores da função aumentam ou diminuem em relação ao valor inicial indicado pelo coeficiente linear b. Graficamente, os parâmetros a e b estão associados, respectivamente, com a inclinação da reta e com o ponto de intersecção da mesma no eixo das ordenadas. Observe dois exemplos de função afim na Figura 3.

Figura 3 – Dois exemplos de função afim.



Fonte: próprio autor.

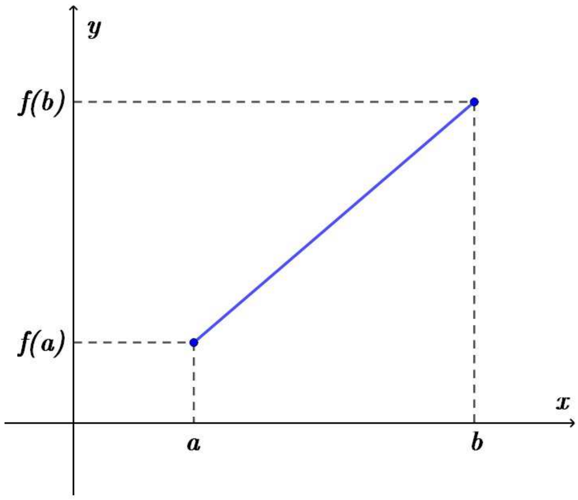
Para os casos onde a função afim tem seu domínio restringido do conjunto $\mathbb{R}$ a um intervalo $[a, b]$, temos que a função $f(x)$ associa a cada $x \in [a, b]$ o elemento $f(x) = ax+b$. Ou seja:

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto ax + b.$$

Nestes casos, o gráfico da função passa a ser um segmento de reta, com extremidades nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, conforme Figura 4.

Figura 4 – Gráfico da função afim com domínio $[a, b]$.



Fonte: próprio autor.

5.3 Retas Paralelas cortadas por uma Transversal

Neto (2013) apresenta o quinto Postulado de Euclides, seguido de um Corolário sobre retas paralelas cortadas por uma transversal. São eles:

Quinto Postulado de Euclides.
Dados, no plano, uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s, paralela a r e passando por A.

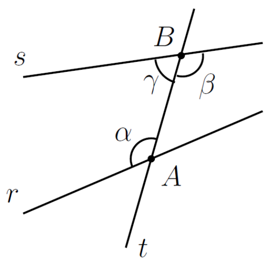
Escreve-se $r//s$ para representar as retas paralelas r e s.

O Corolário 1 decorre do Quinto Postulado de Euclides.

Corolário 1. Na notações da Figura 5, tem-se:

$$r//s \iff \alpha = \beta \iff \alpha + \gamma = 180^{o}.$$

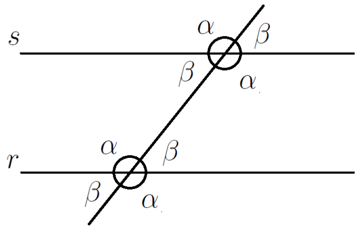
Figura 5 – Retas r e s cortadas pela tranversal t.



Fonte: (NETO, 2013, p.47)

Sendo r e s um par de retas paralelas cortadas por uma transversal t, com relação aos ângulos formados tem-se, pelo Corolário 1 e por ângulos opostos pelo vértice, o resultado apresentado na Figura 6.

Figura 6 – Retas r e s cortadas pela tranversal t e os ângulos formados.



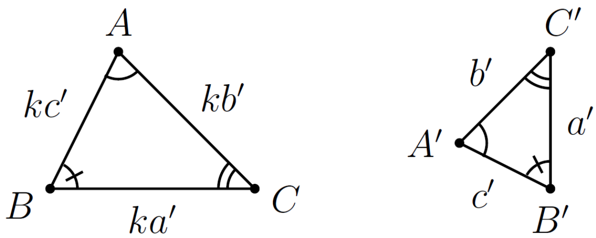
Fonte: próprio autor.

5.4 Semelhança de Triângulos

A Definição 3 e as Proposições 1, 2 e 3 podem ser encontradas em Neto (2013).

Definição 3. Diz-se que dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma (Figura 7).

Figura 7 – Dois triângulos semelhantes.



Fonte: (NETO, 2013, p. 148).

Na Figura 7, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Assim, $\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}'$ e existe $k > 0$ tal que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k.$$

Tal real positivo k é denominado a razão de semelhança entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, nessa ordem (observe que a razão de semelhança entre os triângulos $A'B'C'$ e ABC, nessa ordem, é $\frac{1}{k}$).

Escrevemos $ABC \sim A'B'C'$ para denotar que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$.

As três proposições a seguir estabelecem as condições suficientes usuais para que dois triângulos sejam semelhantes. Por tal razão, as mesmas são conhecidas como os casos de semelhança de triângulos usuais.

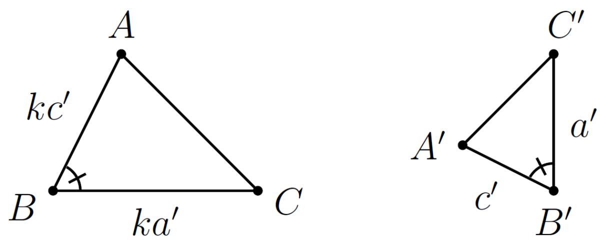
Proposição 1 (Caso de semelhança Lado, Lado, Lado - LLL)**.** Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Então $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, $\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}'$.

A Figura 8 ilustra o caso de semelhança LLL.

Figura 8 – Caso de semelhança LLL.



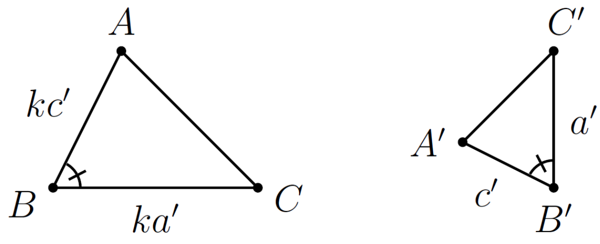
Fonte: (NETO, 2013, p. 149).

Proposição 2 (Caso de semelhança Lado, Ângulo, Lado - LAL)**.** Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \text{ e } \hat{B} = \hat{B}'.$$

Então $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, $\hat{A} = \hat{A}', \hat{C} = \hat{C}'$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$. Veja Figura 9.

Figura 9 – Caso de semelhança LAL.



Fonte: (NETO, 2013, p. 151).

Proposição 3 (Caso de semelhança Ângulo, Ângulo - AA)**.** Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que

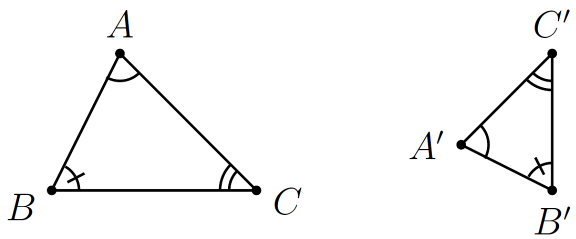
$$\hat{A} = \hat{A}' \text{ e } \hat{B} = \hat{B}'.$$

Então $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da Figura 10 são semelhantes pois $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$.

Figura 10 – Caso de semelhança AA.



Fonte: (NETO, 2013, p. 151).

6 Proposta de Atividades

Neste capítulo são apresentadas as atividades aplicadas, seguidas pelas soluções, elaboradas de acordo com as questões que orientam as atividades.

6.1 Atividades Aplicadas

São propostas três atividades. Nas duas primeiras, as situações problemas são apresentadas juntamente com questões e instruções que direcionam os participantes ao uso de semelhança de triângulos para obter as variações entre as grandezas que possibilitam concluir o resultado. Na terceira atividade, o problema é apresentado de forma livre e os participantes podem aplicar as técnicas utilizadas nas atividades anteriores ou optar por outra forma de resolução, de acordo com seus conhecimentos.

6.1.1 Atividade 1

Esta atividade foi adaptada da 2ª aplicação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2010 e pode ser encontrada em MEC (2010).

O objetivo de cada questão elaborada na adaptação é:

Questão a - analisar os dados disponíveis a respeito de consumo e custo;

Questão b - padronizar os pontos conhecidos, dando suporte à questão seguinte;

Questão c - determinar que parte do gráfico deve ser analisada;

Questão d - desconsiderar dados desnecessários e visualizar de forma mais limpa o segmento a ser analisado;

Questão e - construir a reta r que contém pontos que servirão como vértices dos triângulos;

Questão f - definir o ponto cuja as coordenadas determinam a solução do problema;

Questão g - definir os demais pontos que são vértices dos triângulos;

Questão h - determinar a semelhança entre os triângulos construídos;

Questão i - definir as medidas dos lados dos triângulos construídos a fim de aplicar a semelhança de triângulos;

Questão j - encontrar a variação que possibilita obter o resultado desejado;

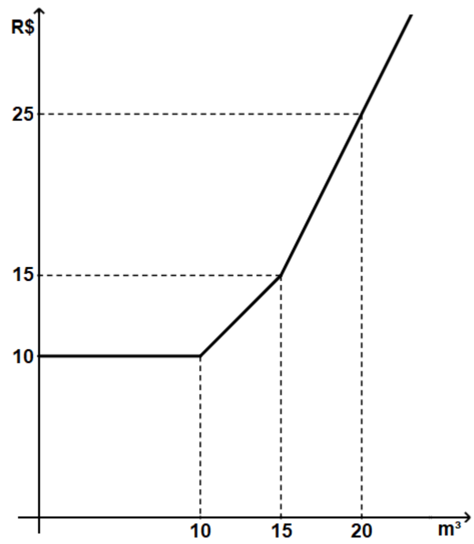
Questão k - utilizar a variação obtida no item anterior para solucionar o problema.

A seguir, a atividade é apresentada conforme foi disponibilizada aos participantes.

Atividade 1. Relação custo × consumo em uma conta de água.

Certo município brasileiro cobra a conta de água de seus habitantes de acordo com o gráfico (Figura 11). O valor a ser pago em R$ depende do consumo mensal em m^3.

Figura 11 – Custo da conta de água em função do consumo.



Fonte: (MEC, 2010).

Resolva:

a) Qual o valor a ser pago para os consumos de $0\,m^3$, $10\,m^3$, $15\,m^3$ e $20\,m^3$?

b) Marque no gráfico os pontos A, B, C e D correspondentes aos resultados, na ordem em que foram obtidos no item anterior.

c) Suponha uma conta no valor de R$19,00. Dentre os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, qual devemos analisar para obter o consumo associado ao valor da conta? Por quê?

d) Represente, em um novo gráfico, apenas o segmento de reta a ser analisado, segundo o item anterior.

e) Trace a reta horizontal r que passa pelo ponto C.

f) Marque, no segmento de reta $\overline{CD}$, o ponto E, de ordenada 19.

g) Sendo x o consumo associado a uma conta de R$ 19,00, marque os pontos $F(20, 15)$ e $G(x, 15)$.

h) Verifique que os triângulos CGE e CFD são semelhantes.

i) Determine o comprimento dos segmentos $\overline{EG}$, $\overline{DF}$ e $\overline{CF}$.

j) Usando a semelhança entre os triângulos CGE e CFD, determine o comprimento do segmento $\overline{CG}$.

k) Conclua qual é o valor de x, em m^3, associado a uma conta no valor de R$19,00.

6.1.2 Atividade 2

Esta atividade foi adaptada do vestibular da Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST) 2013 e pode ser encontrada em FUVEST (2013).

O objetivo de cada questão elaborada na adaptação é:

Questão *a* - verificar as bases de cálculo envolvidas no problema;

Questão *b* - determinar que parte do gráfico deve ser analisada;

Questão *c* - desconsiderar dados desnecessários e visualizar de forma mais limpa o segmento a ser analisado;

Questão *d* - definir pontos cujas ordenadas determinam a solução do problema;

Questão *e* - definir os demais pontos que serão vértices dos triângulos;

Questão *f* - determinar a semelhança entre os triângulos construídos;

Questão *g* - definir as medidas dos lados dos triângulos construídos a fim de aplicar a semelhança de triângulos;

Questão *h* - relacionar o segmento com a variação no valor do imposto;

Questão *i* - encontrar o comprimento do segmento (variação no imposto);

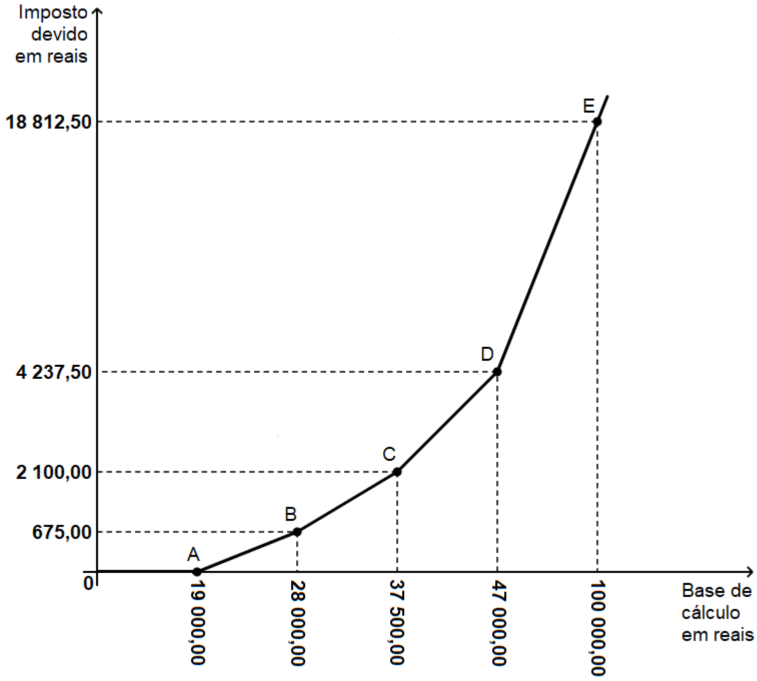
Questão *j* - concluir a solução do problema.

A seguir, a atividade é apresentada conforme foi disponibilizada aos participantes.

Atividade 2. Variação no valor do imposto de renda.

O imposto de renda devido por uma pessoa física à Receita Federal é função da chamada base de cálculo, que se calcula subtraindo os valores das deduções do valor dos rendimentos tributáveis. O gráfico dessa função, representado na Figura 12, é a união dos segmentos de reta $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e da semirreta $\overline{DE}$. João preparou sua declaração, tendo apurado como base de cálculo o valor de R$ 43 800,00. Pouco antes de enviar a declaração, ele encontrou um documento esquecido numa gaveta que comprovava uma renda tributável adicional de R$ 1 000,00.

Figura 12 – Relação entre imposto de renda devido e sua base de cálculo.



Fonte: (FUVEST, 2013).

Com o objetivo de determinar qual foi a variação no imposto de renda ocasionada pelo acréscimo na base de cálculo, desenvolva:

a) Inicialmente a base de cálculo para o imposto de renda era de R$43 800, 00. Qual foi a base de cálculo final?

b) Dos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$, qual devemos analisar afim de obter o resultado desejado? Por quê?

c) Represente, em um novo gráfico, apenas o segmento a ser analisado, segundo o item anterior.

d) Sejam y_1 e y_2 os valores do imposto associado para as bases de cálculo no valor de R$ 43. 800, 00 e R$ 44 800, 00 respectivamente. Marque, no novo gráfico, os pontos $P(43800, y_1)$ e $Q(44800, y_2)$.

e) Marque os pontos $R(44800, y_1)$ e $F(47000, 2100)$.

f) Verifique que os triângulos CDF e PQR são semelhantes.

g) Determine o comprimento dos segmentos de reta $\overline{CF}$, $\overline{DF}$ e $\overline{PR}$.

h) Qual é a relação que o segmento de reta $\overline{QR}$ tem com o problema?

i) Usando a semelhança entre os triângulos CDF e PQR, determine o comprimento do segmento de reta $\overline{QR}$.

j) Qual é a variação causada pelo acréscimo de R\$1 000, 00 na base de cálculo?

6.1.3 Atividade 3

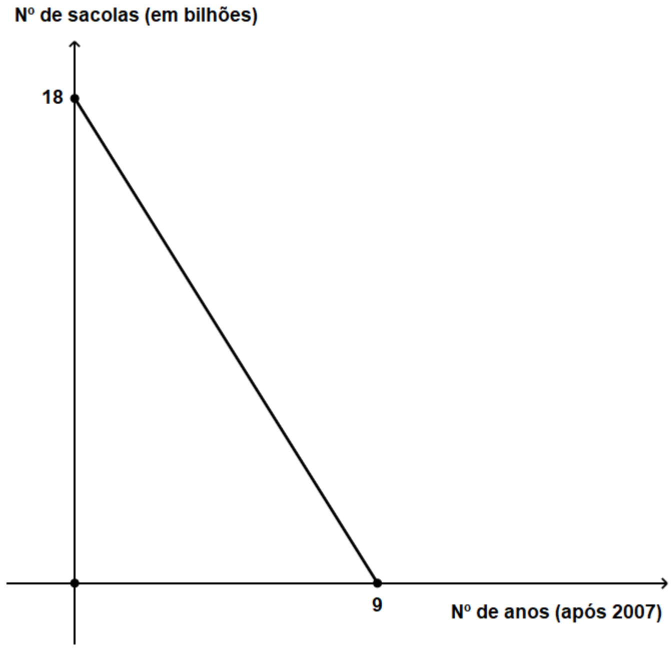
Esta atividade foi retirada da 2ª aplicação do ENEM 2010 e pode ser encontrada em MEC (2010).

Nesta atividade optou-se por não adaptar questões orientadas, deixando o aluno livre para analisar os dados que considera relevantes, elaborar e executar o plano para obter a solução conforme julgue mais conveniente.

Atividade 3. Redução do consumo de sacolas plásticas.

As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas. Os supermercados brasileiros se preparam para acabar com as sacolas plásticas até 2016. Observe o gráfico apresentado na Figura 13, em que se considera a origem como o ano de 2007.

Figura 13 – Consumo de sacolas plásticas em função do tempo.



Fonte: (MEC, 2010).

De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos em 2011?

a) 4,0.

b) 6,5.

c) 7,0.

d) 8,0.

e) 10,0.

6.2 Solução das Atividades

Nesta seção são apresentadas dificuldades previstas e as resoluções seguindo as questões e instruções presentes nas duas primeiras atividades e aplicando, na terceira, o método, de forma semelhante ao que foi realizado na resolução das anteriores.

6.2.1 Dificuldades previstas

Duas observações importantes devem ser feitas em relação ao método apresentado para que os alunos obtenham resultados corretos:

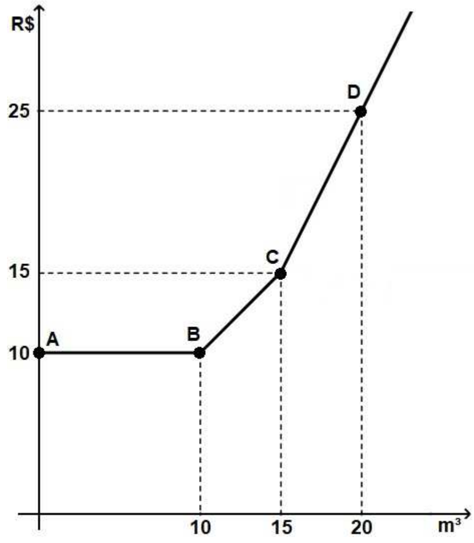
- o método fornece a variação dos valores e não necessariamente o resultado final. Para obter a solução o aluno deve aplicar a variação ao valor considerado inicialmente. Um equívoco desse tipo pode ser observado na resolução da Atividade 3, apresentada na seção 7.1.3, Figura 40;
- o método só pode ser aplicado para valores pertencentes a um mesmo segmento de reta.

6.2.2 Resolução da Atividade 1

a) O valor a ser pago para os consumos de 0 m^3, 10 m^3, 15 m^3 e 20 m^3 são, respectivamente, R$ 10,00, R$ 10,00, R$ 15,00 e R$ 25,00.

b) Os pontos $A(0, 10)$, $B(10, 10)$, $C(15, 15)$ e $D(20, 25)$, correspondentes aos resultados obtidos no item anterior podem ser observados na Figura 14.

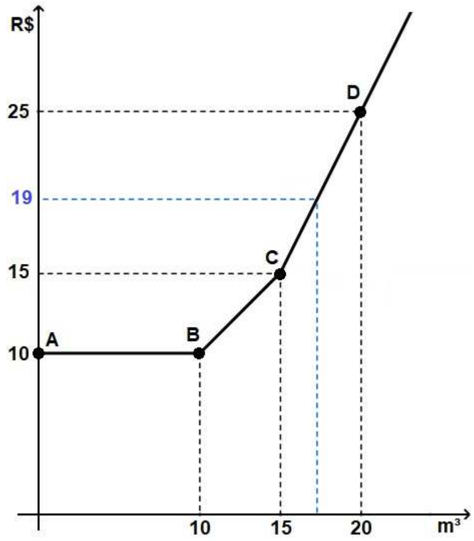
Figura 14 – Pontos A, B, C e D.



Fonte: próprio autor.

c) Para uma conta de R$ 19,00, o segmento a ser analisado deve ser o $\overline{CD}$, pois o ponto com ordenada 19 pertence a este segmento, conforme a Figura 15.

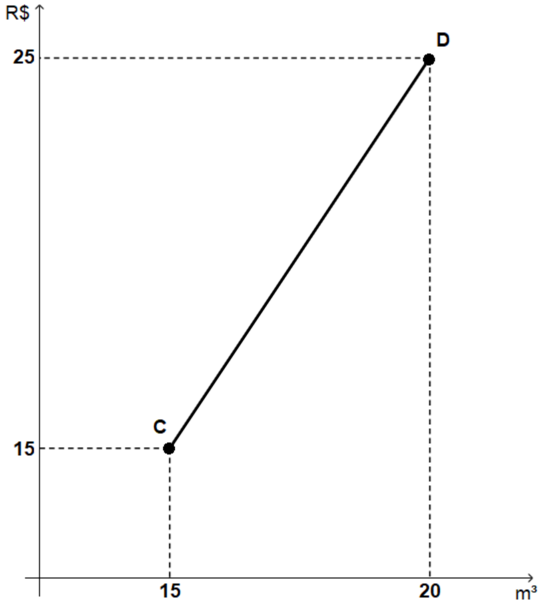
Figura 15 – Segmento a ser analisado.



Fonte: próprio autor.

d) O gráfico representado apenas com o segmento $\overline{CD}$ está na Figura 16.

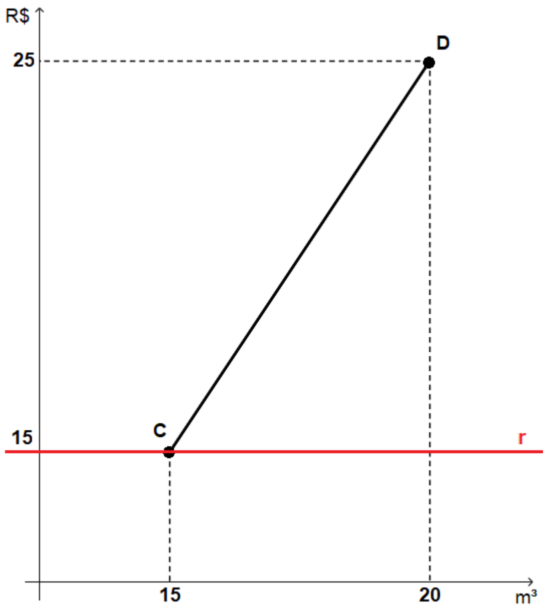
Figura 16 – Segmento $\overline{CD}$.



Fonte: próprio autor.

e) Traçando a reta horizontal r que passe pelo ponto C, tem-se o resultado representado na Figura 17.

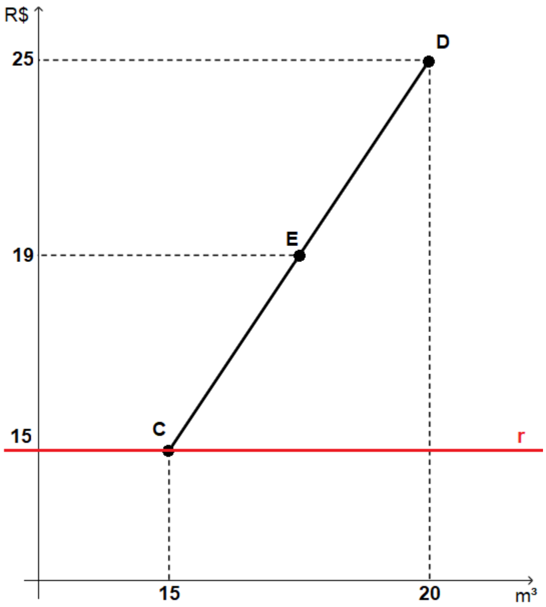
Figura 17 – Reta r.



Fonte: próprio autor.

f) Marcando o ponto E, de ordenada 19, resulta o gráfico apresentado na Figura 18.

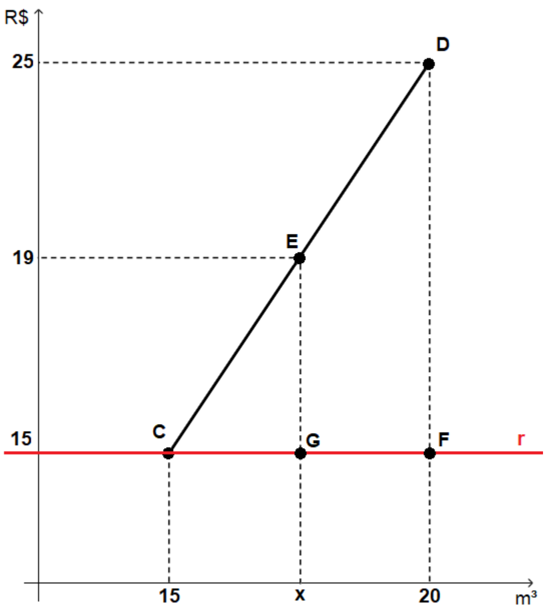
Figura 18 – Ponto E, de ordenada 19.



Fonte: próprio autor.

g) Seguindo as orientações deste item, obtém-se como resultado a Figura 19.

Figura 19 – Pontos F e G.



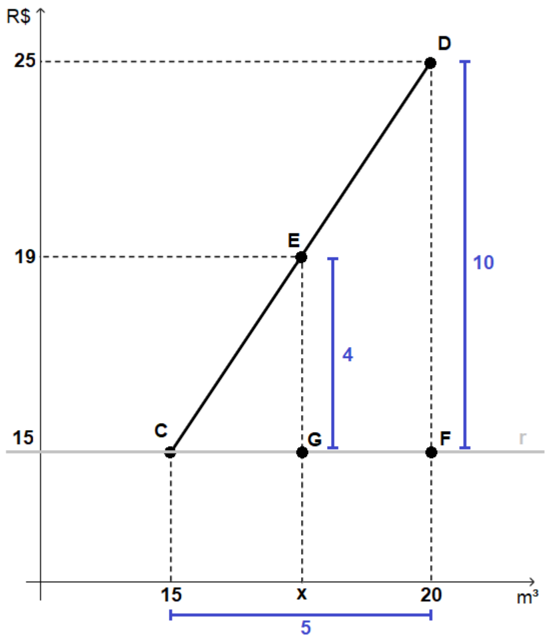
Fonte: próprio autor.

h) Pode-se notar que os ângulos $G\hat{C}E$ e $F\hat{C}D$ são iguais e que os ângulos $E\hat{G}C$ e $D\hat{F}C$ são ângulos retos. O que permite concluir que os ângulos $C\hat{E}G$ e $C\hat{D}F$ são congruentes.

Portanto, pelo caso de semelhança AA (Proposição 3), pode-se afirmar que os triângulos CGE e CFD são semelhantes e possuem os três ângulos congruentes.

i) O comprimento dos segmentos $\overline{EG}$, $\overline{DF}$ e $\overline{CF}$ são, respectivamente, 4, 10 e 5, conforme Figura 20.

Figura 20 – Comprimento dos segmentos $\overline{EG}$, $\overline{DF}$ e $\overline{CF}$.



Fonte: próprio autor.

j) Pela semelhança entre os triângulos CGE e CFD, tem-se:

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{DF}}$$

Substituindo os valores de $\overline{CF}$, $\overline{EG}$ e $\overline{DF}$, tem-se:

$$\frac{\overline{CG}}{5} = \frac{4}{10},$$

de onde segue que

$$\overline{CG} = \frac{20}{10}$$

e, portanto,

$$\overline{CG} = 2.$$

k) Como o comprimento do segmento $\overline{CG}$ é igual a 2, conclui-se que o valor de x é de $15 + 2 = 17$.

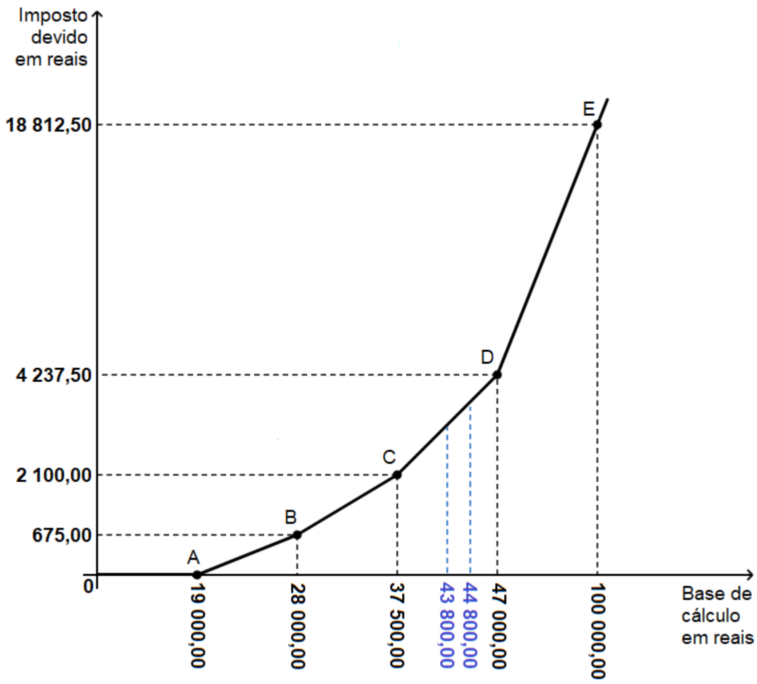
Portanto, o consumo, em m^3, associado a uma conta de R$ 19,00 é de 17 m^3.

6.2.3 Resolução da Atividade 2

a) A base de cálculo final foi de R$ 44 800,00. Pois ao valor inicial de R$ 43 800,00 foi acrescida uma renda tributável de R$ 1 000,00.

b) O segmento a ser analisado deve ser o $\overline{CD}$, pois os pontos de abscissas referentes as bases de cálculo R$ 43 800,00 e R$ 44 800,00 pertencem a esse segmento, conforme Figura 21.

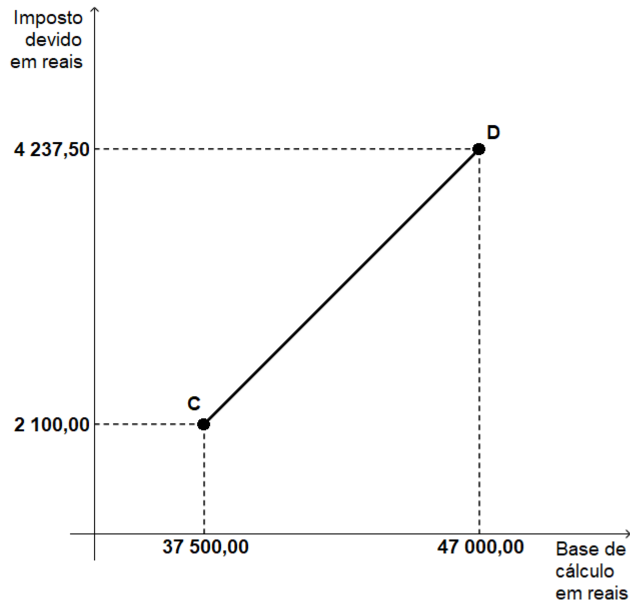
Figura 21 – Segmento a ser analisado.



Fonte: próprio autor.

c) Representando em um gráfico apenas o segmento $\overline{CD}$, obtém-se a Figura 22.

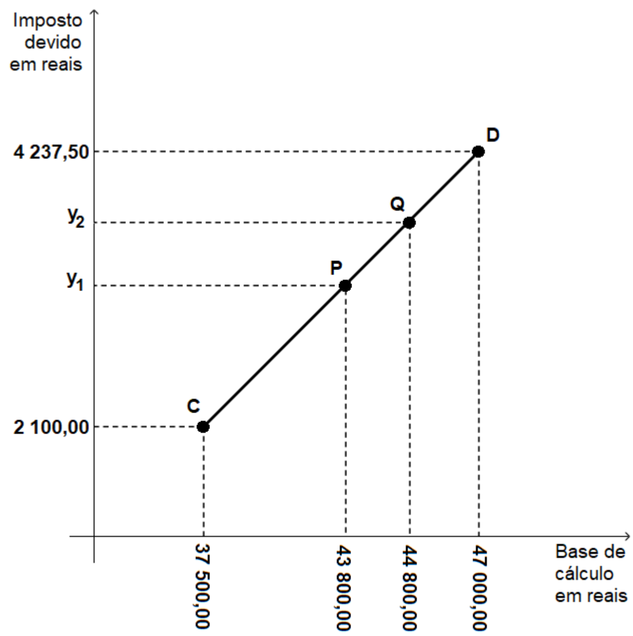
Figura 22 – Segmento $\overline{CD}$.



Fonte: próprio autor.

d) Seguindo as orientações deste item, resulta a Figura 23.

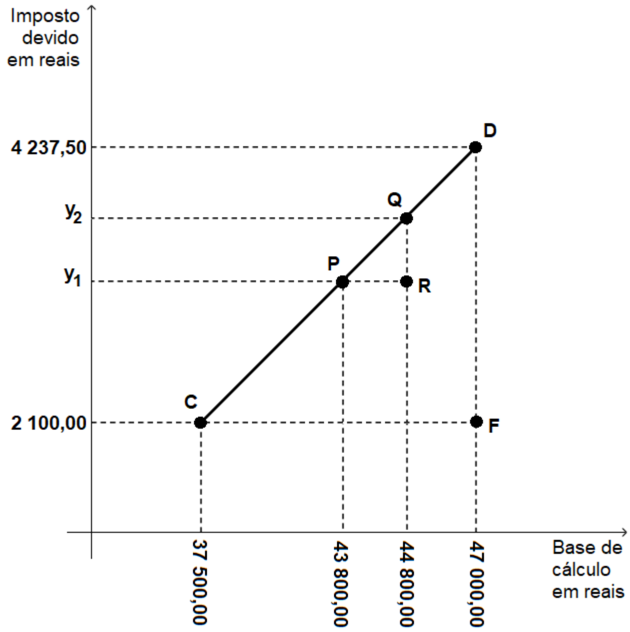
Figura 23 – Pontos P e Q.



Fonte: próprio autor.

e) Marcando os pontos R e F, conforme solicitado no item, tem-se a Figura 24.

Figura 24 – Pontos R e F.



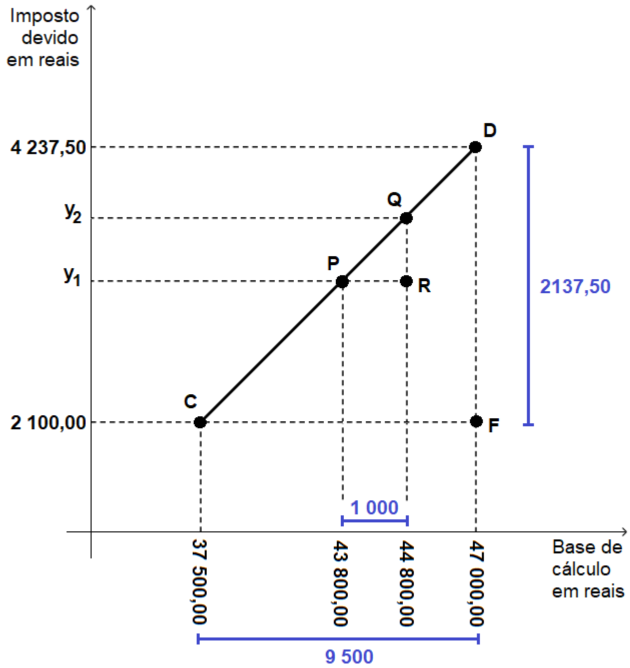
Fonte: próprio autor.

f) Pode-se notar que os ângulos $F\hat{C}Q$ e $R\hat{P}Q$ são congruentes, pois $\overleftrightarrow{CF}$ é paralela a $\overleftrightarrow{PR}$ e a reta $\overleftrightarrow{CQ}$ é uma transversal, e que os ângulos $P\hat{R}Q$ e $C\hat{F}D$ são ângulos retos. O que permite concluir que os ângulos $C\hat{D}F$ e $P\hat{Q}R$ são congruentes, pelo caso AA (Proposição 3).

Portanto, como os triângulos CDF e PQR possuem os três ângulos congruentes, pode ser afirmado que os triângulos são semelhantes.

g) O comprimento dos segmentos $\overline{CF}$, $\overline{DF}$ e $\overline{PR}$ são, respectivamente, 9 500; 2 137,50 e 1 000 conforme a Figura 25.

Figura 25 – Comprimento dos segmentos $\overline{CF}$, $\overline{DF}$ e $\overline{PR}$.



Fonte: próprio autor.

h) O segmento de reta $\overline{QR}$ representa a variação no valor do imposto de renda causada pelo acréscimo de R$ 1 000,00 na base de cálculo, que é o objetivo da questão.

i) Pela semelhança entre os triângulos CDF e PQR:

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{CF}}.$$

Substituindo os valores dos comprimentos $\overline{CF}$, $\overline{DF}$ e $\overline{PR}$, tem-se:

$$\frac{\overline{QR}}{2\,137,50} = \frac{1\,000}{9\,500}.$$

Portanto,

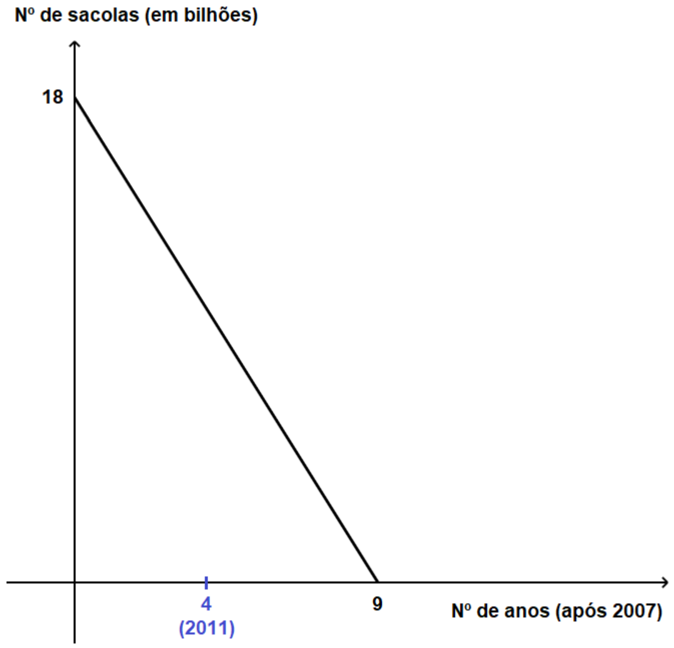
$$\overline{QR} = 225.$$

j) De acordo com os resultados dos itens g e h, conclui-se que a variação no imposto causada pelo acréscimo de R$ 1 000,00 na base de cálculo foi de R$ 225,00. Ou seja, deve ser pago R$225,00 a mais do que o valor do imposto devido anteriormente.

6.2.4 Resolução da Atividade 3

Conforme o enunciado, a origem do plano corresponde ao ano de 2007. Portanto, o ano de 2011 (4 anos após 2007) corresponde, no eixo das abscissas, ao número 4, conforme Figura 26.

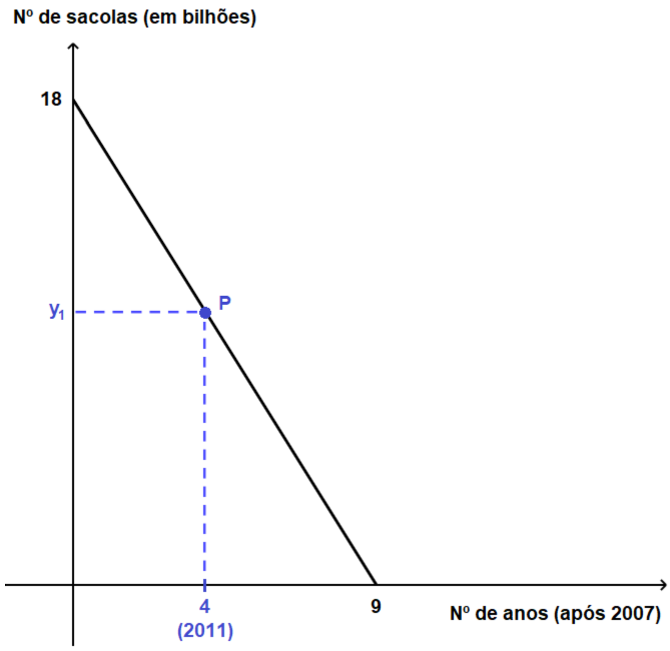
Figura 26 – Ano de 2011 no eixo das abscissas.



Fonte: próprio autor.

Seja P o ponto do gráfico com abscissa 4 e ordenada y_1, conforme Figura 27. Para solucionar o problema o objetivo é determinar o valor de y_1.

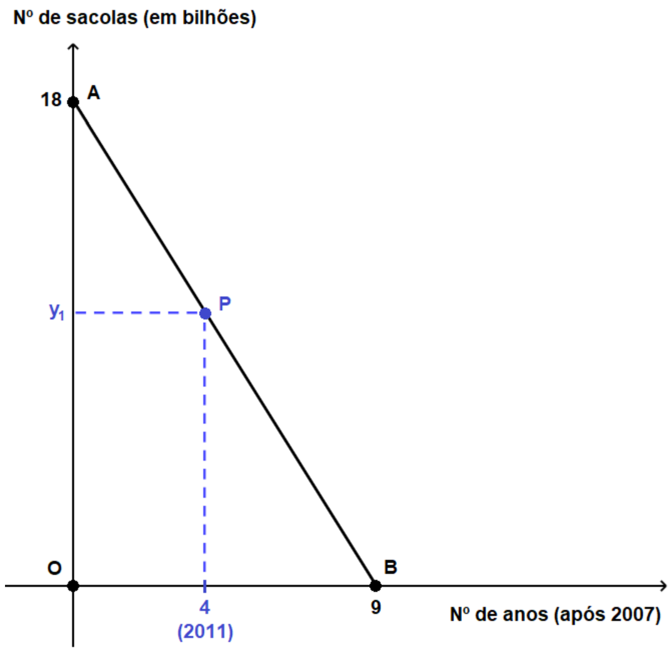
Figura 27 – Ponto P de abscissa 4 e ordenada y_1.



Fonte: próprio autor.

Sejam os pontos $A(0, 18)$, $B(9, 0)$ e $O(0, 0)$ na Figura 28.

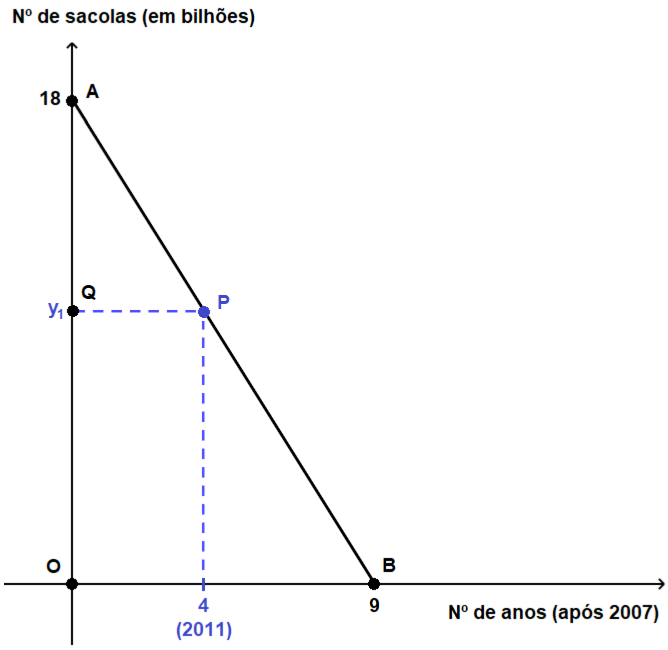
Figura 28 – Pontos A, B, e O.



Fonte: próprio autor.

Tomando o ponto $Q(4, y_1)$, Figura 29, tem-se que os triângulos ABO e APQ são semelhantes.

Figura 29 – Ponto Q.



Fonte: próprio autor.

Da semelhança entre os triângulos, tem-se:

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{OB}}.$$

Substituindo os valores dos comprimentos $\overline{QP}$, $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$, obtém-se:

$$\frac{\overline{AQ}}{4} = \frac{18}{9},$$

e, portanto,

$$\overline{AQ} = \frac{18}{9} \times 4 = 8.$$

Como o segmento $\overline{AQ} = 8$ representa a variação no número de sacolas consumidas de 2007 a 2011, temos que o consumo de sacolas em 2011, representado por y_1, é dado por $y_1 = 18 - 8 = 10$.

Portanto, o consumo de sacolas no ano de 2011 será de 10 bilhões e a resposta correta é a alternativa E.

No próximo capítulo é apresentado o relato da aplicação das atividades, juntamente com a análise dos resultados obtidos e a avaliação das atividades, tanto por parte dos participantes, através do Questionário de Avaliação (Apêndice B), quanto do professor pesquisador.

7 Relato da Aplicação das Atividades

As atividades propostas na seção 6.1 foram aplicadas com alunos de uma turma de um curso pré-vestibular localizado na cidade de Pelotas, Rio Grande do Sul. A aplicação ocorreu fora do período regular de aulas. Os alunos compareceram voluntariamente para a realização das atividades. Para a aplicação foi utilizada uma sala de aula cedida pelo curso pré-vestibular.

No dia 28 de outubro de 2017, estavam presentes 12 (Figura 30) que, em sua maioria, cursaram o ensino médio em escolas particulares e já haviam estudado em cursos pré-vestibular anteriormente. A faixa etária dos alunos presentes variava entre 17 e 33 anos.

Figura 30 – Aplicação das atividades.

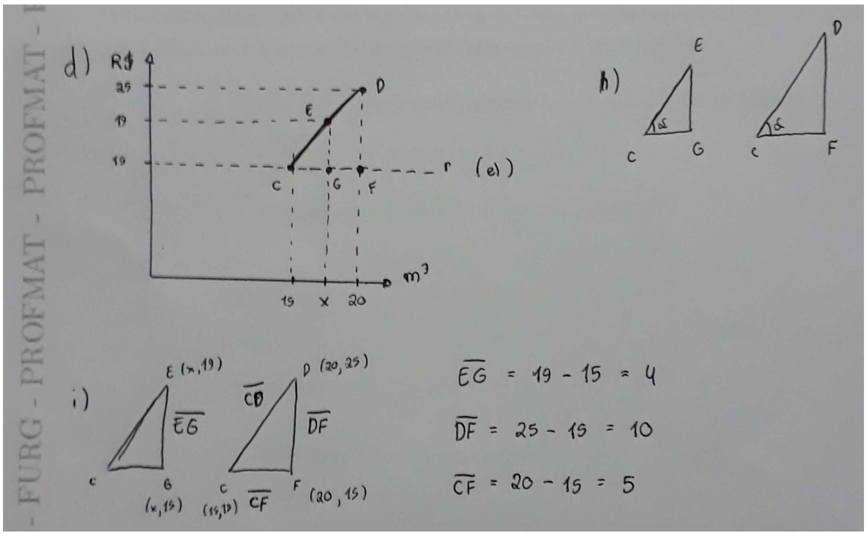
Fonte: próprio autor.

O tempo previsto para a aplicação das atividades era de, no máximo, duas horas, o que foi confirmado ao final das atividades, que ocorreram entre 10h e 12h.

Inicialmente os alunos receberam o Questionário de Perfil dos Participantes (Apêndice A), que teve como objetivos levantar dados a respeito do perfil dos alunos que participaram da aplicação, conhecer suas opiniões quanto à dificuldade ou facilidade com matemática e com os conteúdos abordados e investigar se eles identificavam alguma relação entre funções afim e semelhança de triângulos.

Após o preenchimento do questionário foi entregue a Atividade 1 (Figura 31). Devido ao formato da atividade, orientada por questões e instruções, não foi realizada previamente uma aula de revisão dos conteúdos envolvidos nas atividades ou ainda explicação sobre a proposta de resolução. Os alunos apenas foram orientados a seguir os itens apresentados.

Figura 31 – Recorte de uma resolução da Atividade 1.



Fonte: aluno participante

Durante a realização da primeira atividade foi constatado que alguns estudantes apresentaram dificuldade com a interpretação e execução das orientações, sendo necessário alguns esclarecimentos individuais. Mediante isso, foi decidido que a atividade seria resolvida no quadro com a turma assim que todos tivessem terminado, a fim de esclarecer as dúvidas e facilitar a execução da segunda.

Em meio a realização da Atividade 1 foi percebido que uma informação estava ausente nas instruções que orientavam a resolução, fato que foi corrigido junto aos alunos, modificando a instrução do item g da atividade. Após a alteração o item passou de “Marque os pontos $F(20, 15)$ e $G(x, 15)$” para “Sendo x o consumo associado a uma conta de R\$ 19,00, marque os pontos $F(20, 15)$ e $G(x, 15)$”. Com isso, o ponto E do item anterior ficou bem definido e não houve mais dúvidas a respeito da abscissa x do ponto G. A alteração feita já está presente na Atividade 1, seção 6.1.1, bem como no Apêndice C.

Após aproximadamente quarenta minutos todos os participantes terminaram a primeira atividade. A seguir, o pesquisador resolveu-a no quadro, seguindo os itens apresentados e respeitando a resolução apresentada na seção 6.2.2. Esta etapa levou em torno de 15 minutos e foi acompanhada atentamente pelos alunos. Neste momento os participantes não apresentaram dúvidas.

Em seguida, os alunos receberam a Atividade 2 e, assim como na primeira, foram orientados a seguir os itens. Desta vez não apresentaram dificuldades em realizar as orientações propostas, que eram semelhantes as da atividade anterior e que havia sido resolvida no quadro, o que indica que a ideia do método foi bem assimilada para as atividades orientadas. A segunda atividade foi concluída em aproximadamente 30 minutos. O tempo menor para a solução em comparação com a primeira atividade indica que os participantes encontraram mais facilidade em atender as questões e executar o método proposto.

Após a realização das duas primeiras foi entregue Atividade 3 e, desta vez, os alunos foram orientados sobre a realização, visto que nessa atividade não havia as questões e instruções para guiar a resolução. Foi solicitado aos alunos que resolvessem o problema apresentado da forma como considerassem mais adequada. Os participantes não apresentaram dúvidas durante a atividade e, novamente, houve uma redução no tempo necessário para a solução, neste caso cerca de 20 minutos.

Ao final da execução das atividades os alunos receberam o Questionário de Avaliação (Apêndice B), de onde foram coletados dados acerca da recepção da atividade, bem como sobre a consideração dos alunos quanto ao método proposto.

Os resultados das atividades e dos questionários aplicados são apresentados, respectivamente, nas seções 7.1 e 7.2.

As atividades foram concluídas em um total de duas horas e, de modo geral, transcorreram sem maiores complicações. Eventuais dificuldades na execução foram solucionadas com a correção do item g na primeira atividade bem como com a resolução no quadro.

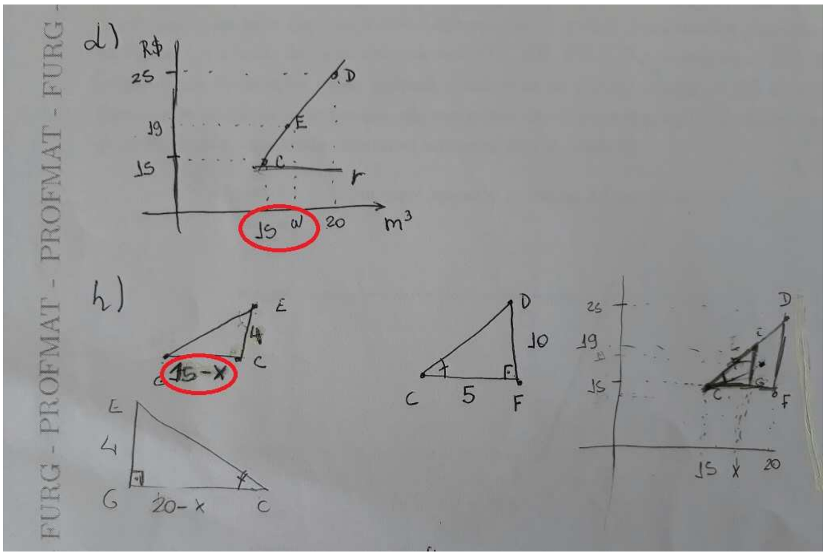
7.1 Análise dos Resultados

Nesta seção são analisados os resultados das atividades aplicadas.

7.1.1 Resultados da Atividade 1

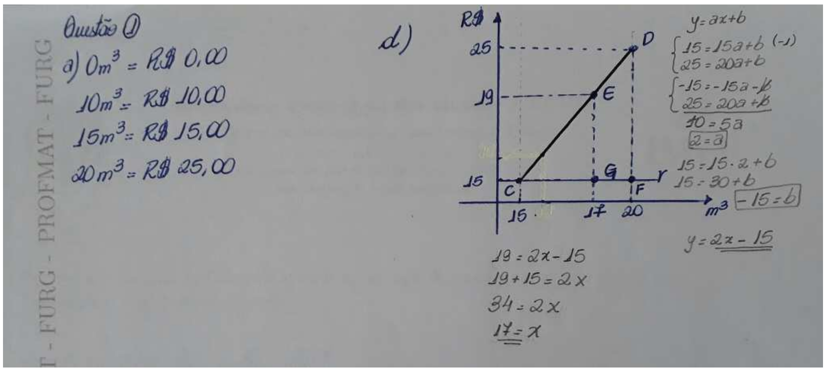
Dos alunos que participaram da Atividade 1, apenas dois não chegaram ao resultado correto. Em um dos casos o participante aplicou corretamente o método, porém cometeu um erro ao expressar comprimento do segmento $\overline{CG}$ como $15 - x$ ao invés de $x - 15$ (Figura 32). Com relação as resoluções corretas, um aluno optou por não utilizar o método proposto e resolveu a atividade de uma maneira tradicional, identificando, através de um sistema com os dois pontos conhecidos, a função afim que continha o segmento CD e obtendo assim o valor de x que levaria a uma conta de R$ 19,00 (Figura 33). Outro aluno utilizou conceitos de geometria analítica, identificando a equação da reta suporte do segmento CD e encontrando a abscissa do ponto com ordenada 19 (Figura 34), mas na sequência resolveu também utilizando o método.

Figura 32 – Equívoco no comprimento do segmento $\overline{CG}$.



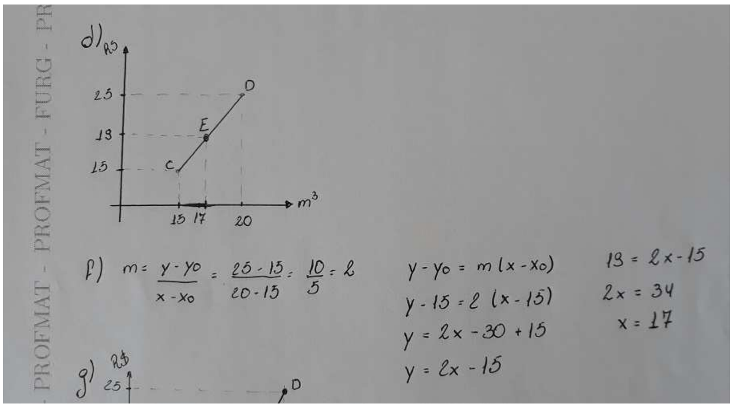
Fonte: aluno participante.

Figura 33 – Obtenção da lei da função através de sistema de equações.



Fonte: aluno participante.

Figura 34 – Solução através da equação da reta.

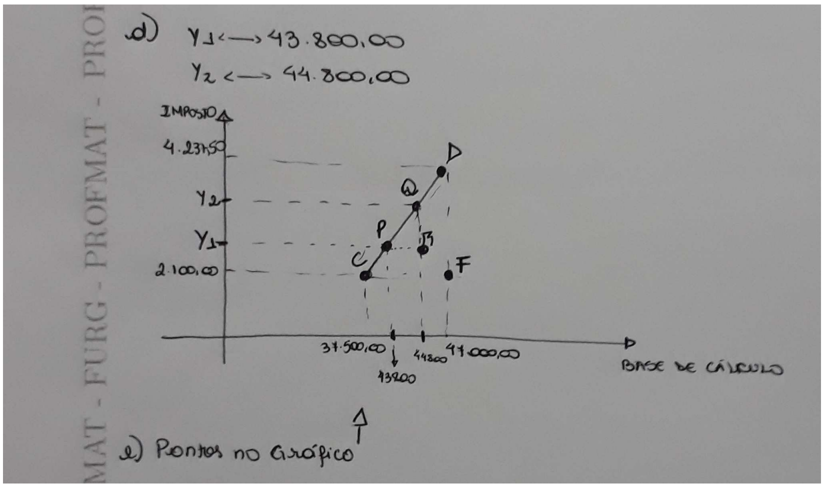


Fonte: aluno participante.

7.1.2 Resultados da Atividade 2

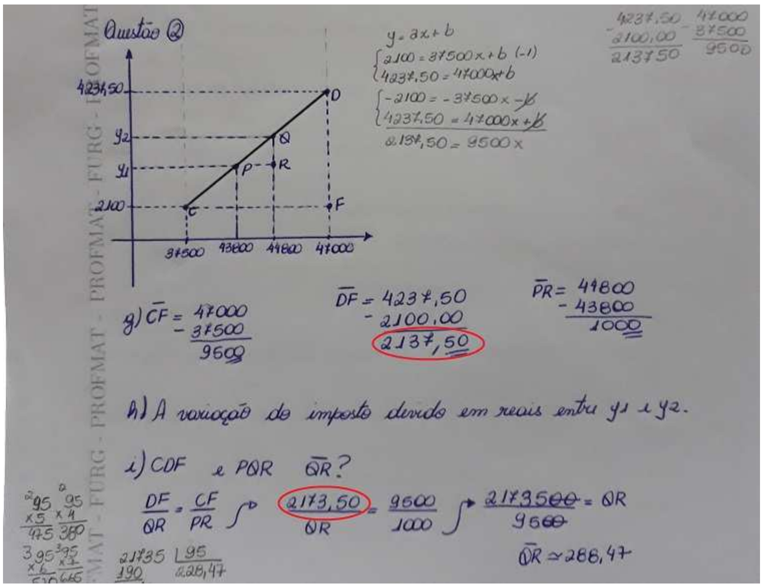
Na Atividade 2, todos os alunos aplicaram o método sugerido corretamente (Figura 35). Quatro alunos não chegaram ao resultado correto, em função de problemas de cálculo como mostra a Figura 36. De maneira geral, o método foi bem assimilado para as atividades orientadas.

Figura 35 – Recorte de resolução da Atividade 2.



Fonte: aluno participante.

Figura 36 – Exemplo de problema no cálculo na Atividade 2.

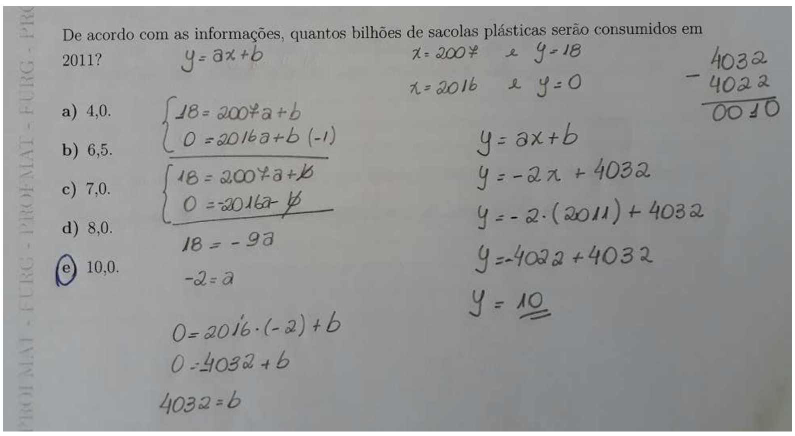


Fonte: aluno participante.

7.1.3 Resultados da Atividade 3

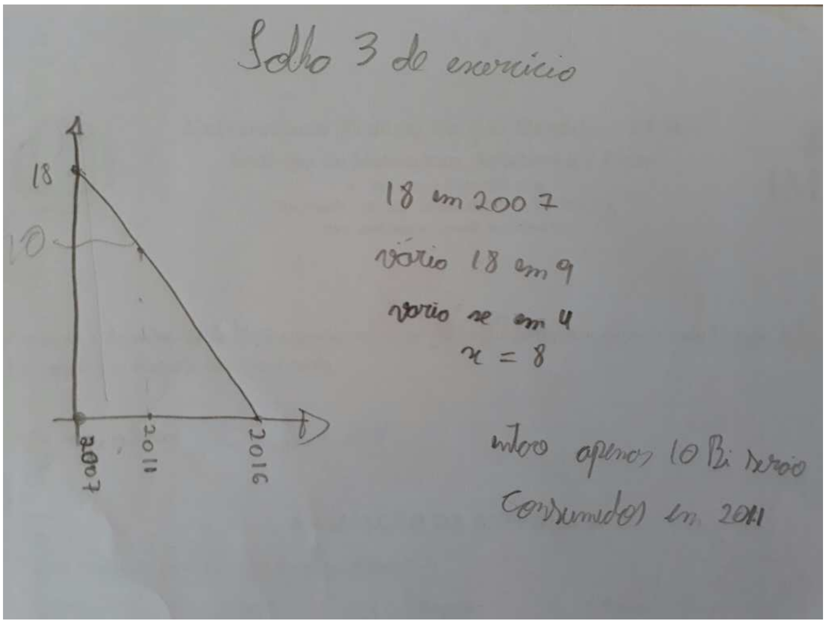
Devido ao fato de a Atividade 3 não ser orientada, surgiram diferentes métodos para a resolução. Um participante optou por determinar a lei da função através de um sistema obtido com a substituição dos valores de dois pontos conhecidos na lei genérica da função afim (Figura 37), obtendo corretamente o resultado da questão. Outro aluno utilizou regra de três com as variações apresentadas (Figura 38), novamente obtendo o resultado correto.

Figura 37 – Resolução da Atividade 3 através da lei da função.



Fonte: aluno participante.

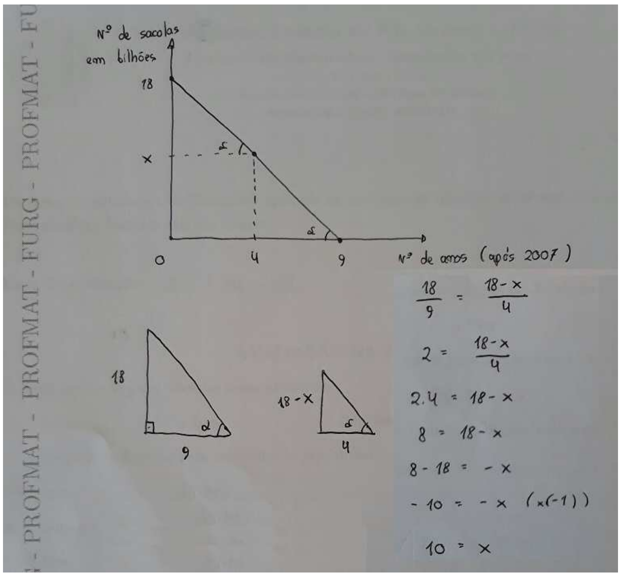
Figura 38 – Resolução da Atividade 3 por regra de três com as variações.



Fonte: aluno participante.

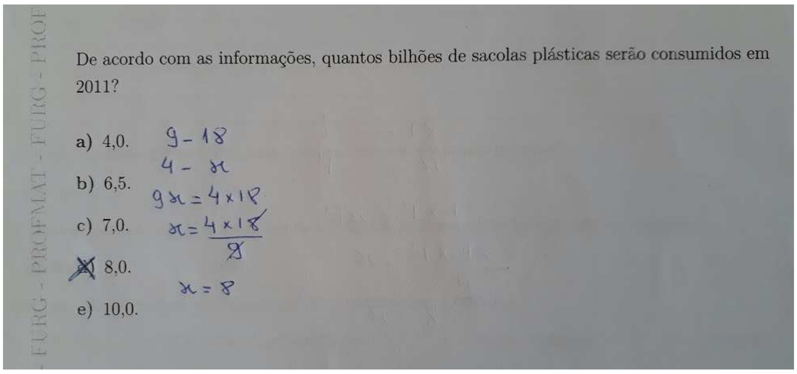
Nos demais casos os participantes optaram por aplicar o método proposto nas duas atividades anteriores, sendo que seis chegaram ao resultado correto (Figura 39). Dentre os quatro que não concluíram corretamente a questão, pode-se destacar que três deles aplicaram todos os passos corretamente, encontrando portanto a variação no consumo de sacolas no período, o que não era o resultado da questão (Figura 40). Para a conclusão correta da atividade, bastava aplicar a variação encontrada (8) ao valor inicial do problema (18), obtendo $18 - 8 = 10$. O quarto participante que não concluiu corretamente a atividade utilizou de forma equivocada o método, com auxílio de outro segmento de reta que não se encontrava junto ao original da função e que portanto não trazia informações com relação ao problema em questão (Figura 41).

Figura 39 – Atividade 3 resolvida corretamente.



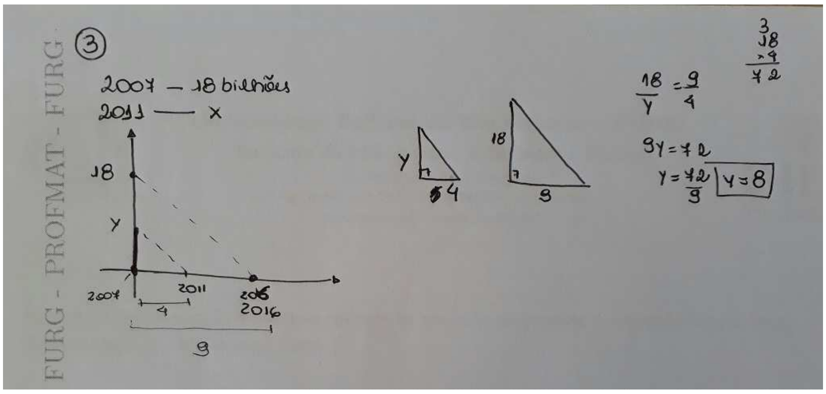
Fonte: aluno participante.

Figura 40 – Variação considerada, equivocadamente, como resultado.



Fonte: aluno participante.

Figura 41 – Segmento de reta construído fora do gráfico.



Fonte: aluno participante.

7.2 Análise dos Questionários

Nessa seção são analisados os questionários respondidos pelos alunos que realizaram as atividades.

O Questionário do Perfil do Participante (Apêndice A) trouxe, além das informações sobre escolaridade e idade dos alunos apresentados na seção 7, uma avaliação a respeito da dificuldade que os alunos avaliam ter em alguns conteúdos. O interesse maior, neste caso, é permitir uma comparação de complexidade, de acordo com a opinião dos participantes, entre a função afim e semelhança de triângulos.

Na Pergunta 5 deste questionário os alunos deviam marcar, dentre os conteúdos apresentados, aqueles que considerassem ter mais facilidade. Com o levantamento das respostas pode-se apontar que os alunos consideram ter mais facilidade ao trabalhar com semelhança de triângulos (marcada 10 vezes) do que com função afim (marcada 5 vezes), resultado que favorece o uso da proposta de resolução apresentada neste trabalho.

Através do Questionário de Avaliação (Apêndice B) foi possível avaliar as atividades sob o ponto de vista dos participantes.

Pode-se concluir que a receptividade das atividades por parte dos participantes foi positiva. Os questionários apresentaram, em sua totalidade, avaliações entre ótima e boa.

Todos os alunos indicaram que o tempo para responder as perguntas foi suficiente e que consideram válidas as atividades, com possibilidade de aplicação em outras situações.

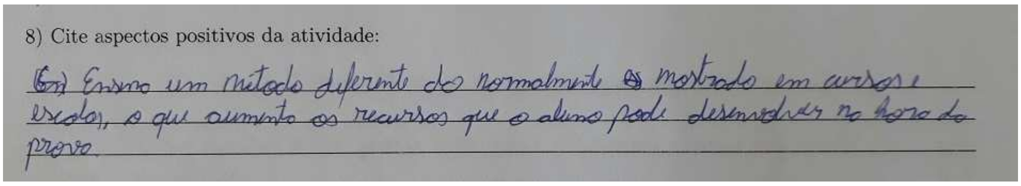
Com relação a Pergunta 6 do Questionário de Avaliação, constatou-se que apenas três participantes já haviam utilizado semelhança de triângulos como uma possibilidade de resolução conforme aplicado nas atividades, todos eles na escola. Esse fato indica que essa forma de resolução não é muito utilizada.

Nos casos em que alunos indicaram algum tipo de dificuldade para desenvolver as atividades, surgem como justificativa o problema apresentado com o item g da Atividade 1 (onde o próprio aluno citou que, após corrigido o item, a dificuldade foi sanada), dificuldades com os cálculos presentes na Atividade 2 e dificuldade em seguir o método (apontado por um participante que não havia aplicado essa forma de resolução anteriormente).

Como aspectos positivos das atividades encontram-se:

- método diferente do que normalmente é mostrado nas escolas, o que aumenta os recursos que o aluno dispõe para solucionar o problema (Figura 42);
- a forma como foram abordados os itens permite a organização de ideias para aplicar, de forma mais clara, a semelhança de triângulos (Figura 43);
- desenvolvimento de habilidades para resolver problemas como os propostos nas atividades (Figura 44);
- forma mais fácil e rápida para a resolução desse tipo de problemas matemáticos (Figura 44).

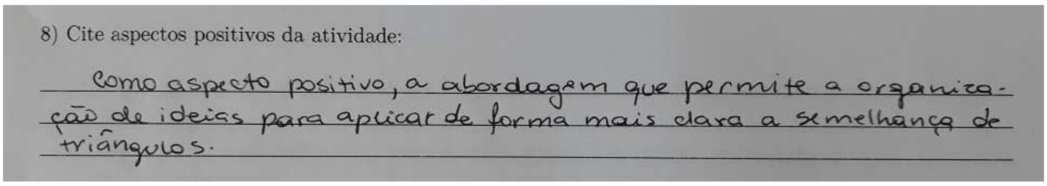
Figura 42 – Um aspecto positivo destacado pelo aluno.


8) Cite aspectos positivos da atividade:

~~Eu~~ Ensina um método diferente do normalmente ~~é~~ mostrado em cursos e escolas, o que aumenta os recursos que o aluno pode desenvolver na hora da prova.

Fonte: aluno participante.

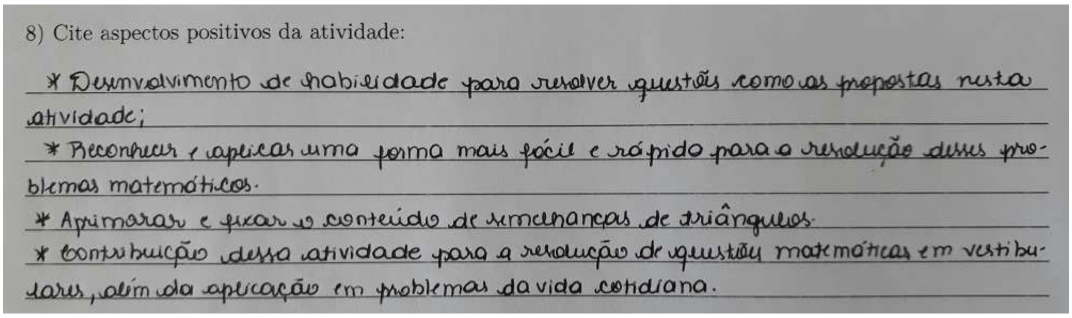
Figura 43 – O aluno destaca a abordagem diferenciada do problema.


8) Cite aspectos positivos da atividade:

Como aspecto positivo, a abordagem que permite a organização de ideias para aplicar de forma mais clara a semelhança de triângulos.

Fonte: aluno participante.

Figura 44 – Outros aspectos positivos.



8) Cite aspectos positivos da atividade:

* Desenvolvimento de habilidade para resolver questões como as propostas nesta atividade;
* Reconhecer e aplicar uma forma mais fácil e rápido para a resolução desses problemas matemáticos.
* Aprimorar e fixar o conteúdo de semelhanças de triângulos.
* Contribuição dessa atividade para a resolução de questões matemáticas em vestibulares, além da aplicação em problemas da vida cotidiana.

Fonte: aluno participante.

O único aspecto negativo citado foi o problema apresentado com o item g da Atividade 1, já mencionado nas dificuldades apresentadas na resolução.

7.3 Avaliação das Atividades pelo Professor Pesquisador

A forma como as duas primeiras atividades foram apresentadas, com questões e itens orientados, mostrou-se bastante adequada e possibilitou que os participantes analisassem dados e utilizassem seus conhecimentos para obter a solução através de semelhança de triângulos.

Na terceira atividade, apresentada de forma aberta, dois alunos optaram por formas de resolução diferentes do método proposto neste trabalho e os demais alunos optaram pela utilização da estratégia desenvolvida nas atividades anteriores, o que leva a concluir que consideraram uma forma eficiente para a resolução da atividade.

Dados os resultados das atividades e as avaliações por parte dos alunos, considerou-se que as atividades alcançaram seus objetivos, pois os participantes, com o uso de seus conhecimentos, concluíram que a semelhança de triângulos pode ser usada como uma forma, em alguns casos mais rápida e prática, de resolução de problemas envolvendo função afim, como os que foram propostos nas atividades.

8 Resoluções Encontradas na Internet

A fim de ilustrar diferentes formas de resolução foi realizada uma pesquisa com relação às questões adaptadas para as atividades. É possível perceber que, na maioria das soluções, a técnica utilizada trata de conceitos que envolvem exclusivamente a função afim, sua lei, coeficientes e características.

Nas duas propostas de resolução encontradas para a questão do ENEM adaptada para a Atividade 1 aparecem métodos tradicionais para exercícios de função afim, sendo que em uma delas é apresentado uma alternativa de resolução utilizando semelhança de triângulos.

Na resolução apresentada na Figura 45 foram determinados os coeficientes a e b da lei da função $f(x) = ax + b$, para então encontrar o consumo desejado.

Figura 45 – Resolução determinando a lei da função.

Como R\$ 15,00 $\leq$ R\$ 19,00 $\leq$ R\$ 25,00, devemos encontrar a lei da função afim cujo gráfico passa por $(15, 15)$ e $(20, 25)$. Seja $f(x) = ax + b$ a lei da função procurada, em que $f(x)$ é o valor a ser pago para um consumo de x m^3, com $15 \leq x \leq 20$. Temos que $a = \frac{25-15}{20-15} = \frac{10}{5} = 2$ e $f(15) = 15 \Leftrightarrow 15 = 2 \cdot 15 + b \Leftrightarrow b = -15$. Portanto, $f(x) = 19 \Leftrightarrow 19 = 2x - 15 \Leftrightarrow x = \frac{34}{2} = 17$ m^3.

Fonte: ARI DE SÁ (2010).

A Figura 46 apresenta duas propostas distintas de resolução. A primeira determina a lei da função através da resolução de um sistema para então obter a solução desejada, enquanto a segunda utiliza semelhança de triângulos para chegar ao resultado.

Como exemplo de resolução para a questão do ENEM utilizada na Atividade 1, temos:

Figura 46 – Lei da função e semelhança de triângulos.

13. (ENEM) Certo município brasileiro cobra a conta de água de seus habitantes de acordo com o gráfico. O valor a ser pago depende do consumo mensal em m^3.
Se um morador pagar uma conta de R$ 19,00, isso significa que ele consumiu:

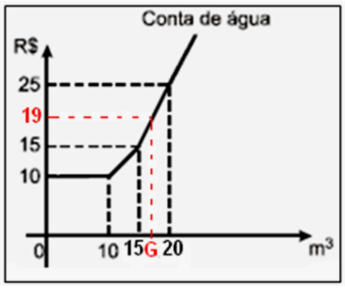
a) 16 m^3 de água **b)** 17 m^3 de água c) 18 m^3 de água d) 19 m^3 de água e) 20 m^3 de água

Solução 1. O gasto de R$19,00 está na faixa de R$15,00 a R$25,00. Encontrando a lei da função afim representada pela reta que passa pelos pontos (15,15) e (20,25), temos:

$$\text{i)} \begin{cases} 15 = a.(15) + b \\ 25 = a.(20) + b \rightarrow \times(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15a + b = 15 \\ -20a - b = -25 \end{cases} \Rightarrow -5a = -10 \Rightarrow a = 2$$

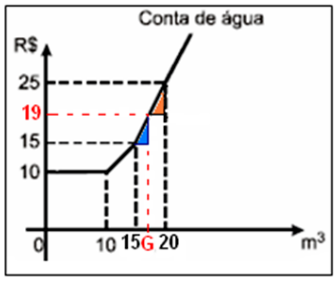
$$\text{ii)}\ 15 = (2).(15) + b \Rightarrow b = -30 + 15 = -15$$

$$\text{iii)} \begin{cases} f(x) = 2x - 15 \\ f(x) = 19 \end{cases} \Rightarrow 2x - 15 = 19 \Rightarrow 2x = 34 \Rightarrow x = \frac{34}{2} = 17$$



Solução 2. Os triângulos pintados são semelhantes. Estabelecendo a relação, temos:

$$\frac{25-19}{20-G} = \frac{19-15}{G-15} \Rightarrow \frac{6}{20-G} = \frac{4}{G-15} \Rightarrow 6G - 90 = 80 - 4G \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6G + 4G = 90 + 80 \Rightarrow 10G = 170 \Rightarrow G = \frac{170}{10} = 17$$



Fonte: Tadeu e Baccar (2013).

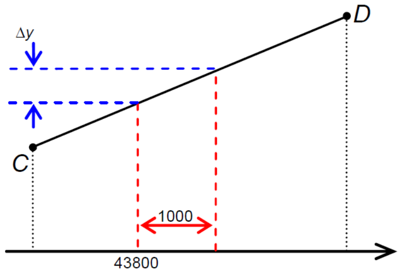
Para a questão da FUVEST adaptada na Atividade 2 foram analisadas três propostas de resolução, duas delas baseiam-se em conceitos de função afim e uma delas apresenta uma resolução baseada na semelhança de triângulos.

A resolução apresentada na Figura 47 baseia-se no fato da inclinação da reta ser constante para obter o valor desejado. A solução apresentada na Figura 48 determina a taxa de variação da função para então obter a variação desejada. Por último, na Figura 49, a solução é determinada através de uma resolução análoga a apresentada na Atividade 2.

Figura 47 – Resolução pela inclinação da reta.

Resolução **Alternativa C**

Perceba que nossos valores estão no intervalo $(37500, 47000)$, então os valores que queremos são valores da função de primeiro grau que liga os pontos C e D:



Queremos encontrar o valor Δy que representa o acréscimo no imposto devido ao se aumentar a base de cálculo em 1000 reais.
Como temos uma função de primeiro grau, a inclinação é constante ao longo do intervalo e vale:

$$m = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{4237{,}5 - 2100}{47000 - 37500} = \frac{2137{,}5}{9500}$$

Utilizando novamente a inclinação temos:

$$m = \frac{\Delta y}{1000} = \frac{2137{,}5}{9500} \Leftrightarrow \boxed{\Delta y = 225}$$

Fonte: Cunha e Junior (2013).

Figura 48 – Taxa de variação.

resolução

Vamos considerar f : [37500; 47000] a função definida por $f(x) = ax + b$, em que x é a base de cálculo e f(x) é o imposto devido.

A taxa de variação da função f é dada por:

$$a = \frac{4237{,}5 - 2100}{47000 - 37500} = 0{,}225.$$

Portanto, o acréscimo pedido é igual a:

$f(x + 1000) - f(x) = 0{,}225 \cdot (x + 1000) + b - (0{,}225x + b) =$ R$ 225,00.

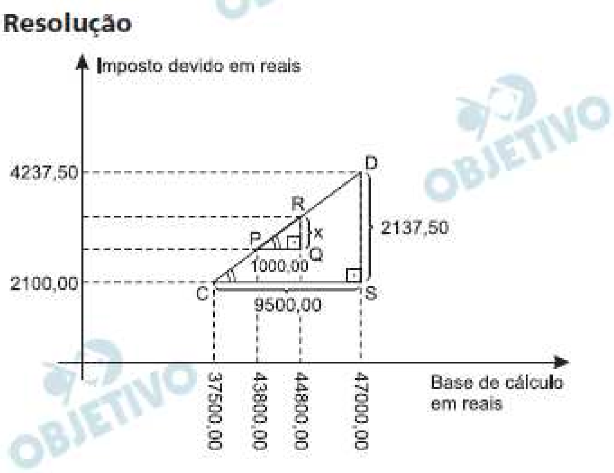
RESPOSTA CORRETA:

C R$ 225,00

Fonte: EDUCAÇÃO GLOBO (2013).

Figura 49 – Resolução análoga a aplicada na Atividade 2.

Resolução



Sendo x o valor, em reais, que será acrescido ao imposto devido, da semelhança dos triângulos PQR e CSD, temos:

$$\frac{x}{1000{,}00} = \frac{2137{,}50}{9500{,}00} \Leftrightarrow x = 225{,}00$$

Fonte: OBJETIVO (2013).

Com relação à questão do ENEM adaptada na Atividade 3 foram encontradas três propostas de resolução bastante semelhantes, todas determinando a lei da função para então obter o resultado desejado. As resoluções encontradas podem ser observadas em Figura 50, Figura 51 e Figura 52.

Figura 50 – Resultado obtido pela lei da função.

Resolução:

Como o gráfico é uma reta, podemos dizer que trata-se de uma função afim, logo:

f(x) = ax + b

Pelo gráfico, se x = 0 então f(x) = 18 ; se f(x) = 0, então x=9 ; logo:
b = 18

a*9 + 18 = 0 → a = -2
f(x) = -2x +18

No ano de 2011, x = 2011 – 2007 = 4 , logo:
f(x) = -2*4 + 18 = 10

Resposta "e"

Fonte: KUADRO (2017).

Figura 51 – Obtendo a lei da função para encontrar a solução.

Resolução:

De acordo com o enunciado do exercício, a origem do eixo **x** é o ano de **2007**, e o próximo ano destacado corresponde a **9 anos após 2007**, portanto, o ano de **2016**.

Após uma cuidadosa análise do gráfico da função, podemos identificar dois pontos: **(0, 18)** e **(9, 0)**. Através desses pontos, vamos encontrar a lei de formação da função. Como o gráfico é uma reta, sabemos que essa é uma função do 1° grau, portanto, do tipo **y = a · x + b**. Dessa forma, vamos substituir os pontos **(0, 18)** e **(9, 0)** nessa equação:

$$y = a \cdot x + b$$

(0, 18) → 18 = a . 0 + b **b = 18**	**(9, 0) → 0 = a . 9 + 18** **– 9 . a = 18** **a = – 2**

Podemos afirmar que a lei de formação da função representada no gráfico é dada por:

$$y = -2 \cdot x + 18,$$

***y** é o número de sacolas e x é o ano (subtraindo **2007** de **x**).

Para que não haja confusão a respeito do valor de x, podemos reescrever a função da seguinte forma:

$$y = -2 \cdot (x - 2007) + 18$$

Agora que temos a lei de formação da função, podemos determinar quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos quando tivermos **x = 2011**:

$$y = -2 \cdot (x - 2007) + 18$$
$$y = -2 \cdot (2011 - 2007) + 18$$
$$y = -2 \cdot 4 + 18$$
$$y = -8 + 18$$
$$y = 10$$

Portanto, em **2011**, serão produzidos **10 bilhões** de sacolas. A alternativa correta é a **letra e**.

Fonte: Ribeiro (2014).

Figura 52 – Lei da função para obter o resultado.

Resposta: Para encontrar o valor pedido, devemos primeiro achar a função. Analisando o gráfico acima, vemos que os pontos (0, 18) e (9, 0) fazem parte do gráfico da função, ou seja, quando temos que:

$$18 = 0a + b$$

Isto é,

$$b = 18$$

E quando $f(x) = 0$ temos que:

$$0 = 9a + b$$

Substituindo o valor de b na última equação temos:

$$0 = 9a + 18$$

$$9a = -18$$

$$a = -2.$$

Logo, a função será,

$$f(x) = -2x + 18$$

A questão pede para calcular a quantidade de sacolas plásticas que serão consumidas em 2011, como de 2007 até 2011 são 4 anos, basta considerar $x = 4$ na função encontrada, desta forma

$$f(x) = -2 \times 4 + 18$$

$$f(x) = -8 + 18$$

$$f(x) = 10$$

Logo, a resposta certa corresponde à alternativa ***E***.

Fonte: Junior (2014).

Resoluções oficiais não são disponibilizadas por parte das bancas responsáveis pelas provas de onde foram adaptadas as questões para as atividades. Porém, em uma busca na internet é possível encontrar *sites* de cursos pré-vestibular, escolas e professores que disponibilizam propostas para solução. As resoluções encontradas, em sua maioria, baseiam-se em técnicas, conceitos e definições específicos da função afim, poucas vezes foram encontradas soluções que utilizavam meios distintos dos tradicionalmente aplicados a questões desse tipo.

Das oito propostas de solução apresentadas neste capítulo, em apenas duas, referentes a Atividade 1 e Atividade 2, a semelhança de triângulos foi utilizada para obter a resposta desejada (Figura 46 e Figura 49). Para a Atividade 3 não foram encontradas soluções que utilizassem semelhança de triângulos ou outra forma alternativa de resolução. Em nenhum resultado na pesquisa foi encontrada solução que utilizasse alguma forma de resolução distinta das mencionadas anteriormente.

O capítulo a seguir apresenta as considerações finais, onde é feita uma breve retomada sobre as atividades aplicadas, a metodologia utilizada e as impressões acerca deste trabalho. Além disso, são mencionados possíveis desdobramentos das atividades apresentadas.

9 Considerações finais

Neste trabalho foram apresentadas e aplicadas três atividades com a proposta de, com auxílio da metodologia de resolução de problemas, estimular nos participantes o uso de semelhança de triângulos para solucionar problemas envolvendo função afim. Um dos objetivos foi encontrar a solução correta usando um método alternativo para exercícios que envolvem este tipo de função. O tema do trabalho foi escolhido a partir de dificuldades apresentadas por alunos durante a resolução tradicional, buscando obter a lei da função para então determinar valores desejados.

As pesquisas e leituras feitas durante a realização e aplicação deste trabalho possibilitaram uma nova visão sobre a formar de elaborar e apresentar os problemas aos alunos. O papel do professor em sala de aula também foi alvo de reflexão. Nesta aplicação, as duas primeiras atividades contaram com questões elaboradas para que os alunos fossem incentivados a analisar os dados, variáveis, objetivos e possíveis alternativas para a solução dos problemas. Isso pode ser adotado como postura do professor em sala de aula, valorizando diferentes raciocínios e a busca por soluções utilizando outras técnicas conhecidas pelos alunos, não apenas repetindo algoritmos mecanizados, valorizando a compreensão do problema e dos processos tomados para obter a solução.

Embora nem todos os participantes tenham obtido os resultados esperados nas atividades, conforme seção 7.1, considera-se que o aproveitamento foi satisfatório, uma vez que o objetivo do trabalho não se limitava a encontrar os resultados, mas também em incentivar os participantes a refletir sobre novas possibilidades para resolução de exercícios, baseando-se em diferentes conhecimentos e fugindo dos métodos tradicionais (que nem sempre se mostram os mais eficientes). Quanto ao uso de formas alternativas para resolver os problemas, constatou-se, através das avaliações apresentadas na seção 7.2, que a proposta foi bem aceita e que consideram importante a utilização de diferentes métodos de resolução. Dentre as vantagens apontadas pelos alunos destacam-se o aumento das possibilidades a serem avaliadas para a solução de problemas como os apresentados e a possibilidade de uma solução mais prática e rápida.

De um modo geral, verificou-se que os objetivos do trabalho foram alcançados. Estabelecendo conexões entre conteúdos distintos, foi utilizado um método alternativo aos tradicionais para resolução de problemas envolvendo função afim, neste caso a semelhança de triângulos. A forma como foram apresentadas as atividades, bem como o Capítulo 2 sobre a resolução de problemas, apontam a importância desta metodologia, estimulando o raciocínio e propiciando diferentes formas de resolução.

Como possibilidade para desdobramentos das atividades apresentadas pode ser feito um comparativo entre a solução proposta neste trabalho e a solução obtida através da lei da função, determinada por um sistema de equações, a fim de revisar a técnica utilizada tradicionalmente e estabelecer as diferenças entre os métodos, bem como possíveis vantagens e desvantagens no uso de cada um. Além disso, pode ser proposto aos alunos a busca por outras formas alternativas de solução, como, por exemplo, através de progressões aritméticas ou de geometria analítica. Através dos questionários, podem ser identificados os conteúdos em que os alunos apresentam mais dificuldade e então propor aulas de revisão ou atividades específicas.

Espera-se que, além da aplicação de semelhança de triângulos, os participantes das atividades e todos que tiverem contato com este trabalho sintam-se estimulados a buscar formas alternativas para resoluções de diversos problemas matemáticos, relacionando conteúdos a fim de obter as soluções desejadas, e não apenas recorrendo a aplicação de algoritmos e técnicas automatizadas que, em muitos casos, não são acompanhados da compreensão do problema ou do processo realizado para chegar ao resultado.

Referências

ARI DE SÁ. *ENEM 2ª aplicação - Matemática - Comentada*. 2010. Disponível em: <http://www.aridesa.com.br/servicos/click_professor/vasco_vasconcelos/enem_2010_2aplicacao_comentada.pdf>. Acesso em: 28.1.2018. Citado na página 59.

BOSCHETTO, V. C. Função afim e suas propriedades através da resolução de problemas. 2015. Citado na página 19.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Matemática*. Brasília, 2000. 57 p. Citado na página 17.

CUNHA, D. G. A. de C.; JUNIOR, M. M. *Elite Resolve - FUVEST 1ª fase*. 2013. Disponível em: <https://www.elitecampinas.com.br/gabaritos/fuvest/2013/Elite_Resolve_Fuvest_2013-1a_fase.pdf>. Acesso em: 28.1.2018. Citado na página 61.

DANTE, L. R. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 2003. Citado na página 17.

DANTE, L. R. *Projeto Múltiplo: Matemática (Ensino Médio)*. São Paulo: Ática, 2014. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

EDUCAÇÃO GLOBO. 2013. Disponível em: <http://educacao.globo.com/provas/fuvest-2013/questoes/32.html>. Acesso em: 28.1.2018. Citado na página 61.

FUVEST. *Vestibular FUVEST*. FUVEST, 2013. Disponível em: <http://acervo.fuvest.br/fuvest/2013/fuv2013_1fase_prova_V.pdf>. Acesso em: 15.10.2017. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 77.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar - Conjuntos e Funções*. São Paulo: Atual, 1977. v. 1. Citado na página 24.

JUNIOR, O. da S. *Funções - Revisão de Matemática para ENEM e Vestibular*. 2014. Disponível em: <https://blogdoenem.com.br/funcoes-matematica-enem-vestibular/>. Acesso em: 28.1.2018. Citado na página 64.

KUADRO. *Funções Matemáticas no ENEM*. 2017. Disponível em: <https://www.kuadro.com.br/posts/funcoes-matematicas-no-enem/>. Acesso em: 28.1.2018. Citado na página 62.

MEC. *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) - 2ª aplicação*. INEP, 2010. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/AZUL_quinta-feira_GAB.pdf>. Acesso em: 15.10.2017. Citado 5 vezes nas páginas 30, 31, 34, 75 e 79.

NETO, A. C. M. Coleção Profmat. In: *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. p. 471. Citado 4 vezes nas páginas 26, 27, 28 e 29.

OBJETIVO. *Resolução Vestibular FUVEST 2013*. 2013. Disponível em: <https://www.curso-objetivo.br/vestibular/resolucao_comentada/fuvest/fuvest2013_1fase.asp?img=01>. Acesso em: 28.1.2018. Citado na página 62.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Ed.). *Pesquisa em movimento*. [S.l.]: UNESP, 1999. cap. 12, p. 199–220. Citado na página 15.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas - Um Novo Aspecto do Método Matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 17.

POZO, J. I. *A solução de Problemas: Aprender a Resolver, Resolver para Aprender*. Porto Alegre: Artmed, 1998. Citado na página 16.

RIBEIRO, A. G. *Funções no ENEM*. 2014. Disponível em: <http://vestibular.brasilescola.uol.com.br/enem/funcoes-no-enem.htm>. Acesso em: 28.1.2018. Citado na página 63.

SMOLE, K. S. A resolução de problemas e o pensamento matemático. 2011. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.

SOUZA, W. J. de. Função afim: teoria e aplicações. 2013. Citado na página 19.

TADEU, W.; BACCAR, M. H. *Aula 14: Funções - Gabarito*. 2013. Disponível em: <http://professorwaltertadeu.mat.br/GABCp2AprofENEMFuncoesAula142013.doc>. Acesso em: 28.1.2018. Citado na página 60.

TOREZANI, A. Uma proposta de atividades para o ensino de função afim no ensino médio. 2016. Citado na página 19.

Apêndices

APÊNDICE A – Questionário de Perfil dos Participantes

Perfil do Participante

Idade: ________ Sexo: ( ) F ( ) M

1) Há quanto tempo você concluiu o ensino médio? ______________________

2) Seu ensino médio foi cursado em escola pública ou particular? __________

3) Você tinha facilidade com matemática no ensino médio? ______________

4) É seu primeiro ano em curso pré-vestibular? ______________________

5) Com relação aos conteúdos listados abaixo, marque aquele(s) que você considera ter mais facilidade:

( ) coordenadas no plano cartesiano ( ) função afim

( ) sistemas lineares ( ) interpretação de gráficos

( ) ângulos na geometria plana ( ) semelhança de triângulos

6) Entre os conteúdos citados acima, você identifica alguma relação entre dois ou mais deles? Em caso afirmativo, cite entre quais e, se possível, exemplifique.

____

____

____

7) Você considera que algum desses conteúdos possui aplicação prática? Em caso afirmativo, cite quais.

____

____

____

APÊNDICE B – Questionário de Avaliação

Avaliação da Atividade

1) Qual avaliação geral você faz dessa atividade?

( ) Ótima ( ) Boa ( ) Regular ( ) Ruim

2) O tempo foi suficiente para responder às perguntas?

( ) Sim ( ) Não

3) A comunicação com o pesquisador foi eficiente?

( ) Sim ( ) Não

4) Você teve dificuldade para desenvolver a atividade?

( ) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo, quais problemas você encontrou durante a resolução?

____

____

____

5) Você considera que esta atividade pode ser aplicada em outras ocasiões?

( ) Sim ( ) Não

6) Você já havia utilizado semelhança de triângulos da forma como foi aplicada na atividade?

( ) Sim ( ) Não

Em caso afirmativo, por qual meio você teve contato com o método?

( ) Escola ( ) Curso pré-vestibular ( ) Livro didático

( ) Internet ( ) Outro: ________________

7) Você considera válida a participação na atividade?

( ) Sim ( ) Não

8) Cite aspectos positivos da atividade:

____

____

____

9) Cite aspectos negativos da atividade:

____

____

____

Espaço para críticas e sugestões gerais:

____

____

____

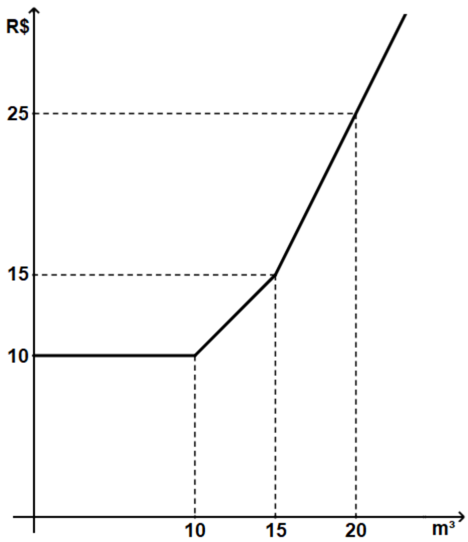
APÊNDICE C – Atividades

A atividade a seguir foi adaptada da 2ª aplicação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2010.

Atividade 1. Relação custo × consumo em uma conta de água.

Certo município brasileiro cobra a conta de água de seus habitantes de acordo com o gráfico (Figura 1). O valor a ser pago em R$ depende do consumo mensal em m^3.

Figura 1 – Custo em função do consumo



Fonte: MEC (2010).

a) Qual o valor a ser pago para os consumos de $0\,m^3$, $10\,m^3$, $15\,m^3$ e $20\,m^3$?

b) Marque no gráfico os pontos A, B, C e D correspondentes aos resultados, na ordem em que foram apresentados, obtidos no item anterior.

c) Suponha uma conta no valor de R$$19,00$. Dentre os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, qual devemos analisar para obter o consumo associado ao valor da conta? Por quê?

d) Represente, em um novo gráfico, apenas o segmento de reta a ser analisado, segundo o item anterior.

e) Trace a reta horizontal r que passa pelo ponto C.

f) Marque, no segmento de reta $\overline{CD}$, o ponto E, de ordenada 19.

g) Sendo x o consumo associado a uma conta de R$ 19,00, marque os pontos $F(20, 15)$ e $G(x, 15)$.

h) Verifique que os triângulos CGE e CFD são semelhantes.

i) Determine o comprimento dos segmentos $\overline{EG}$, $\overline{DF}$ e $\overline{CF}$.

j) Usando a semelhança entre os triângulos CGE e CFD, determine o comprimento do segmento $\overline{CG}$.

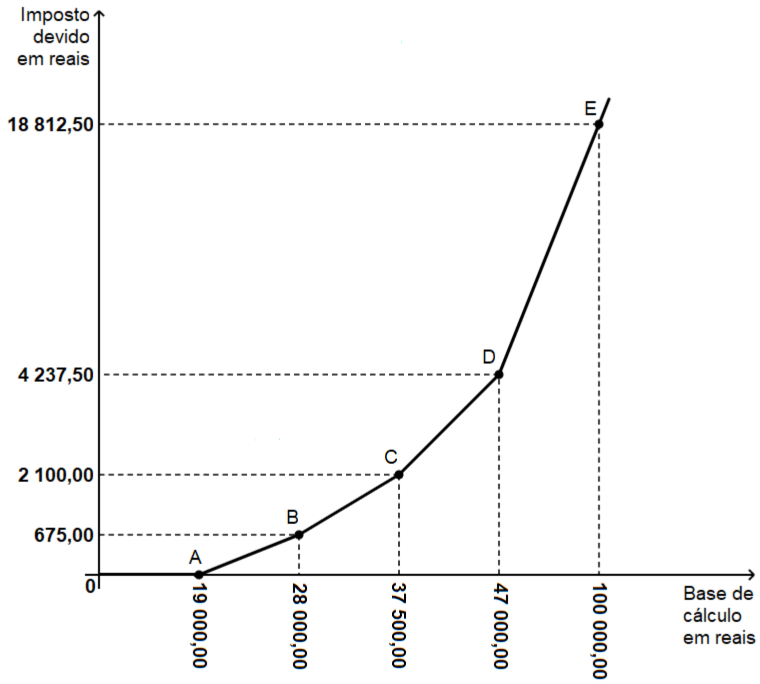
k) Conclua qual o valor de x, em m^3, associado a uma conta no valor de R\$$19,00$.

A atividade a seguir foi adaptada do vestibular da Fundação Universitária para o Vestibular (FUVEST) 2013.

Atividade 2. Variação no valor do imposto de renda.

O imposto de renda devido por uma pessoa física à Receita Federal é função da chamada base de cálculo, que se calcula subtraindo os valor das deduções do valor dos rendimentos tributáveis. O gráfico dessa função, representado na Figura 2, é a união dos segmentos de reta $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e da semirreta $\overline{DE}$. João preparou sua declaração, tendo apurado como base de cálculo o valor de R$ 43.800,00. Pouco antes de enviar a declaração, ele encontrou um documento esquecido numa gaveta que comprovava uma renda tributável adicional de R$ 1 000,00.

Figura 2 – Relação entre imposto de renda e sua base de cálculo



Fonte: FUVEST (2013).

Com o objetivo de determinar qual foi a variação no imposto de renda ocasionada pelo acréscimo na base de cálculo, desenvolva os itens a seguir:

a) Inicialmente a base de cálculo para o imposto de renda era de $R\$43\,800,00$. Qual foi a base de cálculo final?

b) Dos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$, qual devemos analisar afim de obter o resultado desejado? Por quê?

c) Represente, em um novo gráfico, apenas o segmento a ser analisado, segundo o item anterior.

d) Sejam y_1 e y_2 os valores do imposto associado para as bases de cálculo no valor de $R\$\,43.800,00$ e $R\$\,44\,800,00$ respectivamente. Marque, no novo gráfico, os pontos $P(43800, y_1)$ e $Q(44800, y_2)$.

e) Marque os pontos $R(44800, y_1)$ e $F(47000, 2100)$.

f) Verifique que os triângulos CDF e PQR são semelhantes.

g) Determine o comprimento dos segmentos de reta $\overline{CF}$, $\overline{DF}$ e $\overline{PR}$.

h) Qual a relação que o segmento de reta $\overline{QR}$ tem com o problema?

i) Usando a semelhança entre os triângulos CDF e PQR, determine o comprimento do segmento de reta $\overline{QR}$.

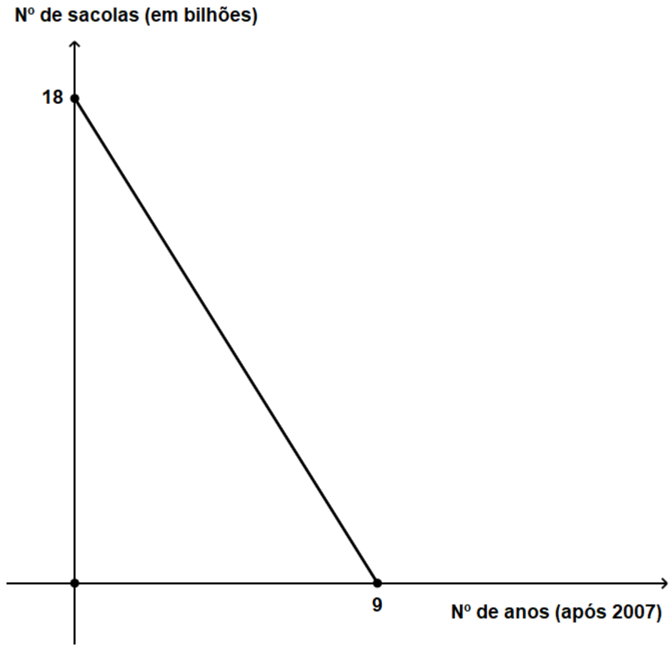
j) Qual foi a variação causada pelo acréscimo de $R\$1\,000,00$ na base de cálculo?

A atividade a seguir foi retirada da 2ª aplicação do ENEM 2010.

Atividade 3. Redução do consumo de sacolas plásticas.

As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas. Os supermercados brasileiros se preparam para acabar com as sacolas plásticas até 2016. Observe o gráfico a seguir (Figura 3), em que se considera a origem como o ano de 2007.

Figura 3 – Consumo de sacolas plásticas.



Fonte: MEC (2010).

De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos em 2011?

a) 4,0.

b) 6,5.

c) 7,0.

d) 8,0.

e) 10,0.