UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

VALDEÍRE DO NASCIMENTO GUIRAL

# Técnicas Alternativas na Resolução de Problemas de Contagem no Ensino Básico

BELÉM

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

VALDEÍRE DO NASCIMENTO GUIRAL

# Técnicas Alternativas na Resolução de Problemas de Contagem no Ensino Básico

Dissertação de Mestrado apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT/IMPA) da Universidade Federal do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes

BELÉM
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

G965t Guiral, Valdeire do Nascimento
Técnicas alternativas na resolução de problemas de contagem no Ensino Básico / Valdeire do Nascimento Guiral. — 2018
76 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) , Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes

1. Princípiio Aditivo da Contagem. . 2. Princíipio Fundamental da Contagem. 3. Conjuntos. 4. Funções. I. Lopes, Prof. Dr. Francisco Paulo Marques , *orient.* II. Título

---

CDD 510

VALDEÍRE DO NASCIMENTO GUIRAL

# Técnicas Alternativas na Resolução de Problemas de Contagem no Ensino Básico

Esta Dissertação de Mestrado apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT/IMPA) da Universidade Federal do Pará foi julgada e aprovada pela seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes - UFPA

Membro: Profª. Drª. Joelma Morbach - UFPA

Membro: Prof. Dr. Miguel Chaquiam - UEPA

APROVADA EM: 23/03/2018

Dedico este trabalho a minha filha Ângela da Silva Guiral e a minha esposa Claudeciane Morais da Silva, por todo amor e carinho.

# AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida, saúde e proteção.

A UFPA pela oportunidade.

A todos os mestres.

A todos os colegas de turma.

Ao meu pai Vicente de Paulo Guiral, ao meu Irmão Valdison do Nascimento Guiral e a minha avó Benedita Rosa da Silva Guiral, por todo o apoio e por confiarem e torcerem pelo meu sucesso.

*"Sem liberdade não se educa. Sem autoridade não se educa para a liberdade."*

**Piaget**

# RESUMO

Este trabalho visa apoiar professores de Matemática do Ensino Básico na busca de solução para problemas de contagem, por meio da apresentação e utilização de métodos que priorizem a aplicação do Princípio Aditivo da Contagem - PAC, do Princípio Fundamental da Contagem - PFC e de propriedades de funções entre dois conjuntos finitos, quanto à injetividade, bijetividade e sobrejetividade e também quanto ao crescimento. Desta forma, o presente trabalho apresenta técnicas que poderão ser aplicadas em diversos outros problemas de contagem de acordo com suas restrições, baseado no Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEM) do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Está dividido em seis capítulos: introdução, princípios de contagem, resolução de problemas selecionados, exercícios propostos e considerações finais. Na introdução, ressaltamos a relevância deste trabalho. Nos princípios de contagem é apresentado o PAC e suas aplicações e, em seguida o PFC e suas aplicações. Em conjuntos e funções é apresentado o número de funções entre dois conjuntos finitos, sem restrições, injetivas, bijetivas e sobrejetivas, estritamente crescentes e não decrescentes, o qual está associado à métodos de contagem do Ensino Básico e serão utilizados para ataca-los e resolvê-los, estabelecendo uma relação entre o problema e a função a ele associada. Na resolução de exercícios selecionados são resolvidos diversos problemas escolhidos e/ou adaptados da Coleção Professor de Matemática, da Coleção Profmat, da OBMEP e do Portal da Matemática. Os exercícios propostos são deixados para o leitor exercitar suas habilidades e, nas considerações finais deixamos uma mensagem de reflexão para o leitor.

Palavras-chave: Principio Aditivo da Contagem. Princípio Fundamental da Contagem. Conjuntos. Funções

# ABSTRACT

This work aims to support teachers of Basic Mathematics in the search for solution to problems of counting, through the presentation and use of methods that prioritize the application of the Principle Additive of the Count - PAC, Fundamental Principle of Count - PFC and properties of functions between two finite sets, as for injectivity, bijectivity and overjectivity and also for growth. In this way, the present work presents techniques that can be applied in several other counting problems according to their restrictions, based on the Improvement Program for Teachers of High School Mathematics (PAPMEM) of the Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). It is divided into six chapters: introduction, counting principles, selected problem solving, proposed exercises, and final considerations. In the introduction, we highlight the relevance of this work. In the principles of counting the PAC and its applications are presented, and then the PFC and its applications. In sets and functions is presented the number of functions between two finite ascending and non-decreasing finite sets, unrestricted, injective, bijective and overjective, which is associated with the methods of counting the Basic Education and will be used to attack and solve them them, establishing a relation between the problem and the function associated with it. In the resolution of selected exercises are solved several problems chosen and / or adapted from the Collection Professor of Mathematics, the Profmat Collection, OBMEP and the Portal of Mathematics. The proposed exercises are left to the reader to exercise their abilities, and in the final considerations we leave a message of reflection for the reader.

Keywords: Additive Principle of Counting. Fundamental Principle of Counting. Sets. Functions

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Sumário

Capítulo 1

# INTRODUÇÃO

O presente trabalho é embasado no Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio - PAPMEM e tem como objetivo apresentar técnicas alternativas que podem ser utilizadas para solucionar problemas de contagem, a partir da identificação do que se quer contar. Essas técnicas alternativas estão associadas ao número de funções entre dois conjuntos, sem restrições, injetivas, sobrejetivas e bijetivas e também quanto ao crescimento.

A motivação para essa empreitada tem por base o fato de que, em muitos problemas de combinatória sobretudo da OBMEP, os alunos têm dificuldades de interpretar o enunciado do problema. Para minimizar esta problemática, nos problemas apresentados neste trabalho, serão exibidas serão exibidas possíveis soluções representadas por sequências de números e/ou de símbolos, tendo em vista identificar e visualizar o que está sendo contado. Contudo, este trabalho visa explorar métodos de contagem em que se aplica diretamente os significados das operações aritméticas fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) e propriedades de funções.

Visto desta forma, entendemos que este trabalho possui questões relevantes para o aperfeiçoamento de professores de Matemática do Ensino Básico, pois apresenta questões adaptadas do Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio - PAPMEM, das provas da OBMEP, de livros da Coleção Professor de Matemática da SBM, da Coleção Profmat e questões adaptadas do Portal da Matemática solucionadas por professores do IMPA, todas voltadas à Educação Básica, tendo em vista promover um ensino de combinatória que estimule a curiosidade e interesse dos alunos pela Matemática.

# Capítulo 2

# PRINCÍPIOS DE CONTAGEM

## 2.1 Princípio Aditivo da Contagem - PAC

Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui p + q elementos (MORGADO et al, 2016, p.16). A figura a seguir ilustra este fato para um conjunto com 5 elementos e outro conjunto com 7 elementos.

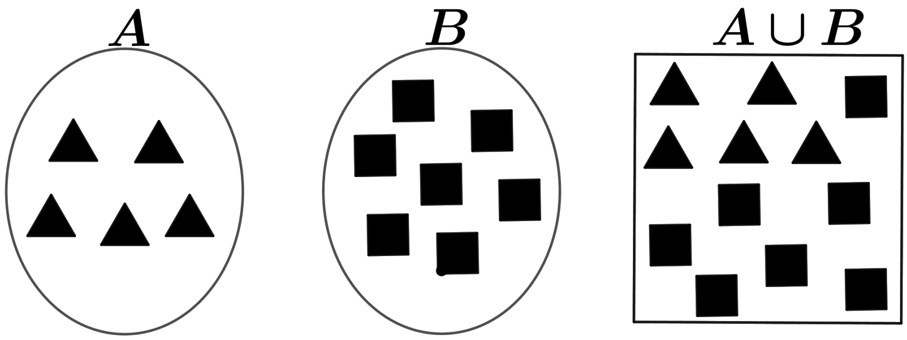


Figura 2.1: Imagem ilustrativa do PAC

O problema a seguir ilustra este princípio.

**Exemplo 2.1.** *Numa lanchonete há* 4 *opções de refrigerante,* 3 *opções de suco e* 2 *marcas de agua mineral. De quantas maneiras uma pessoa pode escolher UMA BEBIDA?*

Consideremos os conjuntos de possibilidades: REFRI: $\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$, SUCO: $\{S_1, S_2, S_3\}$ e ÁGUA: $\{A_1, A_2\}$. Queremos escolher UMA BEBIDA entre as opções dadas. Podemos escolher UM REFRIGERANTE (temos 4 possibilidades) **ou** escolher UM SUCO (temos 3 possibilidades) **ou** escolher UMA ÁGUA (temos 2 possibilidades). Observe que a solução do problema é obtida com UMA DAS ESCOLHAS. Assim o número total de possibilidades é 9, conforme ilustra a tabela a seguir.

Tabela 2.1: Exemplo ilustrativo do PAC

| OPÇÕES | DECISÃO | SOLUÇÕES |
|---|---|---|
| REFRI= $\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ | REFRI | $R_1$ |
| | | $R_2$ |
| | | $R_3$ |
| | | $R_4$ |
| SUCO= $\{S_1, S_2, S_3\}$ | SUCO | $S_1$ |
| | | $S_2$ |
| | | $S_3$ |
| ÁGUA= $\{A_1, A_2\}$ | ÁGUA | $A_1$ |
| | | $A_2$ |
| TOTAL DE POSSIBILIDADES | | 9 |

**Observação 2.1.** *Note que a pessoa tem que tomar somente UMA DECISÃO, pois trata-se de escolher UMA BEBIDA, tendo a disposição três conjuntos disjuntos de possibilidades. Assim o número total de possibilidades é a soma das possibilidades.*

## 2.2 Princípio Fundamental da Contagem - PFC

A multiplicação é a operação fundamental na análise combinatória. Por meio dela existe um princípio, conhecido como Principio Fundamental da Contagem - PFC também chamado de Principio Multiplicativo. O PFC ocorre sempre que temos um procedimento com varias etapas , com o mesmo número de possibilidades em cada etapa, não importando as decisões anteriores. Por exemplo, se para construirmos a solução de um problema precisamos tomar duas decisões, com 3 opções para a primeira decisão e, tomada esta decisão temos 2 opções para a segunda decisão, então o número de possibilidades de se obter uma solução para o problema dado será $2 \times 3 = 6$. Considere a tabela a seguir.

Tabela 2.2: PFC

| 1º CONJUNTO DE OPÇÕES | DECISÃO 1 | 2º CONJUNTO DE OPÇÕES | DECISÃO 2 | SOLUÇÃO |
|---|---|---|---|---|
| $\{A_1, A_2, A_3\}$ | $A_1$ | $\{B_1, B_2\}$ | $B_1$ | $A_1B_1$ |
| | | | $B_2$ | $A_1B_2$ |
| | $A_2$ | $\{B_1, B_2\}$ | $B_1$ | $A_2B_1$ |
| | | | $B_2$ | $A_2B_2$ |
| | $A_3$ | $\{B_1, B_2\}$ | $B_1$ | $A_3B_1$ |
| | | | $B_2$ | $A_3B_2$ |
| TOTAL DE POSSIBILIDADES | | | | $3 \times 2 = 6$ |

Em outras palavras o principio multiplicativo nos diz que, se temos $p$ possibilidades para a 1ª decisão e para cada uma destas $p$ possibilidades há $q$ possibilidades para a 2ª decisão, então temos $q + q + q + ... + q = p \times q$ possibilidades para as duas decisões consecutivamente, pois temos p parcelas iguais a q. Considere a tabela a seguir.

Tabela 2.3: PFC (caso geral)

| 1º CONJUNTO DE OPÇÕES | DECISÃO 1 | 2º CONJUNTO DE OPÇÕES | DECISÃO 2 | SOLUÇÃO |
|---|---|---|---|---|
| $\{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_p\}$ | $A_1$ | $\{B_1, B_2, \cdots, B_q\}$ | $B_1$ | $A_1B_1$ |
| | | | $B_2$ | $A_1B_2$ |
| | | | $\cdots$ | $\cdots$ |
| | | | $B_q$ | $A_1B_q$ |
| | | | $B_1$ | $A_2B_1$ |
| $\{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_p\}$ | $A_2$ | $\{B_1, B_2, \cdots, B_q\}$ | $B_2$ | $A_2B_2$ |
| | | | $\cdots$ | $\cdots$ |
| | | | $B_q$ | $A_2B_q$ |
| | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |
| $\{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_p\}$ | $A_p$ | $\{B_1, B_2, \cdots, B_q\}$ | $B_1$ | $A_pB_1$ |
| | | | $B_2$ | $A_pB_2$ |
| | | | $\cdots$ | $\cdots$ |
| | | | $B_q$ | $A_pB_q$ |
| TOTAL DE POSSIBILIDADES | | | | $p \times q$ |

Segundo Carvalho, 2016 "se há **p** modos de tomar a decisão $D_1$ e tomada a decisão $D_1$, há **q** modos de tomar a decisão $D_2$, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões $D_1$ e $D_2$ é o produto $p \times q$". Este princípio vale para um número $n$ de decisões, tendo para a 1ª decisão $r_1$ possibilidades, e tomado esta 1ª decisão, há para a 2ª decisão $r_2$ possibilidades e tomadas estas duas decisões, há para a 3ª decisão $r_3$ possibilidades e assim por diante até chegar a $n$-ésima decisão que terá $r_n$ possibilidades. Assim o número total de possibilidades para tomar $n$ decisões consecutivamente é $r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_n$. Veja os exemplos:

**Exemplo 2.2.** *Pedro tem a sua disposição* 3 *pares de tênis,* 2 *calças jeans e* 4 *camisetas. De quantas formas diferentes ele pode escolher um conjunto tênis-jeans-camiseta para passear?*

Considere os conjuntos: TÊNIS $= \{T_1, T_2, T_3\}$, JEANS $= \{J_1, J_2\}$ e CAMISETAS $=$ $\{C1, C_2,$
$C_3, C_4\}$. Queremos escolher um conjunto formado por um par de tênis, uma calca jeans e uma camiseta, logo temos três decisões a tomar. Podemos escolher um par de tênis (3 possibilidades) e escolhido o par de tênis, escolhemos uma calca jeans (2 possibilidades) e, escolhido um par de tênis e uma calça jeans escolhemos uma camiseta (4 possibilidades). Assim, pelo PFC, o número total de possibilidades de escolher um conjunto tênis-jeans-camiseta é $3 \times 2 \times 4 = 24$, conforme mostra a tabela a seguir.

Tabela 2.4: Aplicação do PFC

| CONJUNTO DE OPÇÕES | OPÇÕES | TOTAL DE POSSIBILIDADES |
|---|---|---|
| TÊNIS $= \{T_1, T_2, T_3\}$ | 3 | |
| JEANS $= \{J_1, J_2\}$ | 2 | $3 \times 2 \times 4 = 24$ |
| CAMISETAS $= \{C1, C_2, C_3\}$ | 4 | |

É muito importante nos problemas de contagem saber diferenciar e aplicar o PFC e o PAC, pois são princípios diferentes mais que podem ser utilizados num mesmo problema. Veja o exemplo a seguir.

**Exemplo 2.3.** *Numa lanchonete há* 5 *tipos de salgado,* 3 *tipos de sanduíche,* 2 *tipos de suco e* 4 *marcas de refrigerante. De quantas formas diferentes um cliente pode escolher somente um comestível e uma bebida?*

**Solução:** Para o comestível, o cliente pode escolher salgado **ou** sanduíche. Na escolha da bebida o cliente pode optar por suco **ou** refrigerante. Este "**ou** " caracteriza o Princípio

Aditivo da Contagem. Contudo, o cliente pode escolher um comestível **e** uma bebida. Este "**e**" caracteriza o Principio Fundamental da Contagem. Portanto, temos 8 opções para o comestível (5 opções de salgados + 3 opções de sanduíche) e 6 opções para a bebida (2 opções de suco + 4 opções de refrigerante). Logo, pelo PFC temos $8 \times 6 = 48$ formas.

**Observação 2.2.** *Os Princípios Aditivo e Fundamental da Contagem são a base para resolução de problemas de cálculo combinatório. Por isso, deve ficar muito clara a distinção entre os dois princípios como mostra a Tabela* 2.5.

Tabela 2.5: Diferença entre PAC e PFC

| **Conjunção** | **Faz ligação entre** | **Operação** |
|---|---|---|
| **ou** | **hipóteses** | **adição** |
| **e** | **etapas** | **multiplicação** |

Capítulo 3

# CONJUNTOS E FUNÇÕES

Trata-se do cálculo do número de funções entre dois conjuntos finitos, sem restrições, injetiva, bijetiva e sobrejetiva, crescente e não decrescente, quando dados dois conjuntos A e B com $m$ e $n$ elementos, respectivamente. Os resultados destes cálculos podem ser utilizados como técnicas para resolver problemas de contagem.

## 3.1 Número de funções entre dois conjuntos

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$, o número de funções de A em B é dado conforme a tabela a seguir.

Tabela 3.1: Número de funções de A em B, com $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$.

| **Conjuntos** | **Funções** | **Sequência** | **Distribuição do domínio da função à $\{1, 2\}$, nessa ordem.** |
|---|---|---|---|
| $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2\}$ | $f_1(1) = 1, f_1(2) = 1, f_1(3) = 1$ | $\{1, 1, 1\}$ | $\{(1, 2, 3); (0)\}$ |
| | $f_2(1) = 1, f_2(2) = 1, f_2(3) = 2$ | $\{1, 1, 2\}$ | $\{(1, 2); (3)\}$ |
| | $f_3(1) = 1, f_3(2) = 2, f_3(3) = 1$ | $\{1, 2, 1\}$ | $\{(1, 3); (2)\}$ |
| | $f_4(1) = 1, f_4(2) = 2, f_4(3) = 2$ | $\{1, 2, 2\}$ | $\{(1); (2, 3)\}$ |
| | $f_5(1) = 2, f_5(2) = 1, f_5(3) = 1$ | $\{2, 1, 1\}$ | $\{(2, 3); (1)\}$ |
| | $f_6(1) = 2, f_6(2) = 1, f_6(3) = 2$ | $\{2, 1, 2\}$ | $\{(2); (1, 3)\}$ |
| | $f_7(1) = 2, f_7(2) = 2, f_7(3) = 1$ | $\{2, 2, 1\}$ | $\{(3); (1, 2)\}$ |
| | $f_8(1) = 2, f_8(2) = 2, f_8(3) = 2$ | $\{2, 2, 2\}$ | $\{(0); (1, 2, 3)\}$ |
| Número de funções de A em B $= 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ | | | |

A Tabela 3.1 indica que, o que determina uma função de A em B é a escolha da imagem de cada elemento do conjunto A no conjunto B. Assim sendo, há 2 possibilidades para escolher a imagem do $1 \in$ A em B (pois pode ser 1 ou $2 \in$ B), feito esta escolha há 2 possibilidades para escolher a imagem do $2 \in$ A em B (pois pode ser 1 ou $2 \in$ B) e, feito estas duas escolhas há também 2 possibilidades para escolher a imagem do $3 \in$ A em B (pois pode ser 1 ou 2 $\in$ B). Assim, pelo PFC há $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ funções de A em B. Considere as funções $f_1, f_2, f_3$ e $f_4$ representadas na figura a seguir.

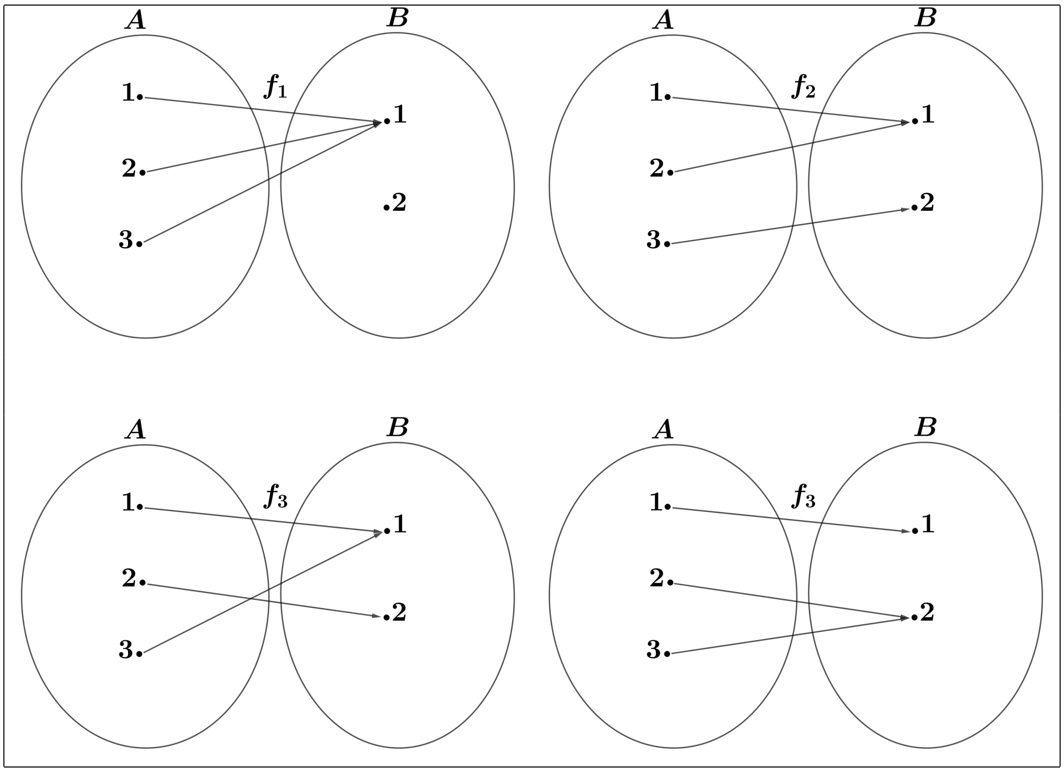


Figura 3.1: Diagramas de funções de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 2\}$

O caso geral do número de funções entre dois conjuntos finitos é análogo, conforme a proposição a seguir, a qual pode ser encontrada em [3].

**Proposição 3.1.** *Sejam um conjunto A com m elementos e um conjunto B com n elementos.O numero de funções de A em B é igual a* $n^m$.

Considere a tabela a seguir.

Tabela 3.2: Número de funções de A em B - caso geral

| **Conjuntos** | **Conjunto A** | **Número de possibilidades para a escolha da imagem dos elementos de A em B** |
|---|---|---|
| | 1 | $n$ |
| $A = \{1, 2, \cdots, m\}$ | 2 | $n$ |
| | 3 | $n$ |
| $B = \{1, 2, \cdots, n\}$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | $m$ | $n$ |
| Número de funções de A em B $= \underbrace{n \times n \times n \times n \times \cdots \times n}_{m\,vezes} = n^m$ | | |

***Demonstração:*** A Tabela 3.2 indica que, há $n$ possibilidades de escolha para a imagem do 1 em B, feito isso há $n$ possibilidades de escolha para a imagem do 2 em B, e assim por diante, até chegar ao $m$-ésimo elemento de A que também possui $n$ possibilidades de escolha de sua imagem em B, logo pelo PFC o número de funções de A em B é,

$$\underbrace{n \times n \times n \times n \times \cdots \times n}_{m\,vezes} = n^m \tag{3.1}$$

**Exemplo 3.1.** *Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de* 10 *questões de múltipla escolha, com* 5 *alternativa por questão?*

**Solução:** Considerando as questões dispostas numa fila de 1 a 10 e as alternativas A, B, C, D e E, algumas soluções possíveis estão na tabela a seguir.

Tabela 3.3: Gabaritos de uma prova de 10 questões

| **Conjuntos** | **Sequência formada pelas alternativas das questões de 1 a 10, nessa ordem** |
|---|---|
| | AAAAAAAAAA |
| $Q = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$ | AAAABCCDED |
| | BBBABCCDED |
| $T = \{A, B, C, D, E\}$ | CDDDBCCDEA |
| | $\vdots$ |
| | DDDDDDDDDD |
| Total de gabaritos $= \underbrace{5 \times 5 \times \cdots \times 5}_{10\,vezes} = 5^{10}$ | |

Pela Tabela 3.3 a sequência AAAAAAAAAA indica que todas as questões da prova tem como resposta certa a alternativa A; a sequência AAAABCCDED indica que as questões $1, 2, 3$ e 4 tem como resposta a alternativa A, a questão 5 tem como resposta a alternativa B, as questões 6 e 7 tem como resposta a alternativa C, as questão 8 e 10 tem como resposta a alternativa D, a questão 9 tem como resposta a alternativa E e desta maneira segue os demais casos. Assim, observamos que as soluções são todas as sequências ordenadas de 10 letras pertencentes ao conjunto $\{A, B, C, D, E\}$. Para chegar a solução, basta realizarmos a seguinte sequência de 10 etapas :

- **1ª Etapa:** Há 5 possibilidades para escolha da alternativa certa na questão 1;
- **2ª Etapa:** independentemente de qual foi a alternativa certa da questão 1, há 5 possibilidades de escolha para a alternativa certa da questão 2 e assim por diante até chegar a décima etapa;

  $\vdots$

- **10ª Etapa:** que também, independentemente de quais foram as alternativas certas nas questões $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 há 5 possibilidades de escolha para a alternativa certa da questão 10. Logo, pelo PFC temos $\underbrace{5 \times 5 \times \cdots \times 5}_{10\, vezes} = 5^{10}$ gabaritos.

**Exemplo 3.2.** *(Adaptado OBMEP* 2014*): Tio Pedro trouxe 5 presentes diferentes, e vai distribuir todos eles por seus sobrinhos Alberto, Bernardo, Carlos e Daniel. De quantos modos os presentes podem ser distribuídos?*

Considere a tabela a seguir.

Tabela 3.4: Distribuição de 5 presentes para 4 sobrinhos

| **Conjuntos** | **Distribuição dos presentes a A,B,C,D, nessa ordem** |
|---|---|
| $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ <br> $S = \{A, B, C, D\}$ | $(P_1, P_2); (P_3); (P_4); (P_5)$ |
| | $(P_3); (P_1, P_2); (P_4); (P_5)$ |
| | $(P_1, P_3); (P_2); (P_4, P_5); (0)$ |
| | $\vdots$ |
| | $(0); (0); (0); (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ |
| Total de modos $= 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$ | |

A Tabela 3.4 indica que há 4 possibilidades para distribuir cada um dos presentes, pois cada um deles pode ser dado a Alberto, Bernardo, Carlos e Daniel sem qualquer restrição. Logo, pelo PFC há $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$ modos de distribuir os presentes. Note que, haverá casos em que há um ou dois ou três sobrinhos sem receber nenhum presente.

## 3.2 Número de funções injetivas

Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, o número de funções injetivas de A em B é dado conforme a tabela a seguir.

Tabela 3.5: Número de funções injetivas de A em B, com $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$.

| **Conjuntos** | **Funções** | **Sequência formada pelo conjunto imagem das funções** |
|---|---|---|
| | $f_1(1) = 1, f_1(2) = 2$ | $\{1, 2\}$ |
| | $f_2(1) = 1, f_2(2) = 3$ | $\{1, 3\}$ |
| $A = \{1, 2\}$ | $f_3(1) = 2, f_3(2) = 1$ | $\{2, 1\}$ |
| | $f_4(1) = 2, f_4(2) = 3$ | $\{2, 3\}$ |
| $B = \{1, 2, 3\}$ | $f_5(1) = 3, f_5(2) = 1$ | $\{3, 1\}$ |
| | $f_6(1) = 3, f_6(2) = 2$ | $\{3, 2\}$ |
| Número de funções injetivas de A em B $= 3 \times 2 = 6$ | | |

A Tabela 3.5 indica que há 3 possibilidades para escolher a imagem do $1 \in$ A em B (pois pode ser 1 ou 2 ou $3 \in$ B) e, feito esta escolha há 2 possibilidades para escolher a imagem do $2 \in$ A em B pois o elemento escolhido para ser imagem do 1 não pode ser usado para ser imagem do 2. Logo, pelo PFC há $3 \times 2 = 6$ funções injetivas de A em B. Considere três funções injetivas $f_1, f_2$ e $f_3$ e uma função qualquer $f$ representadas na figura a seguir.

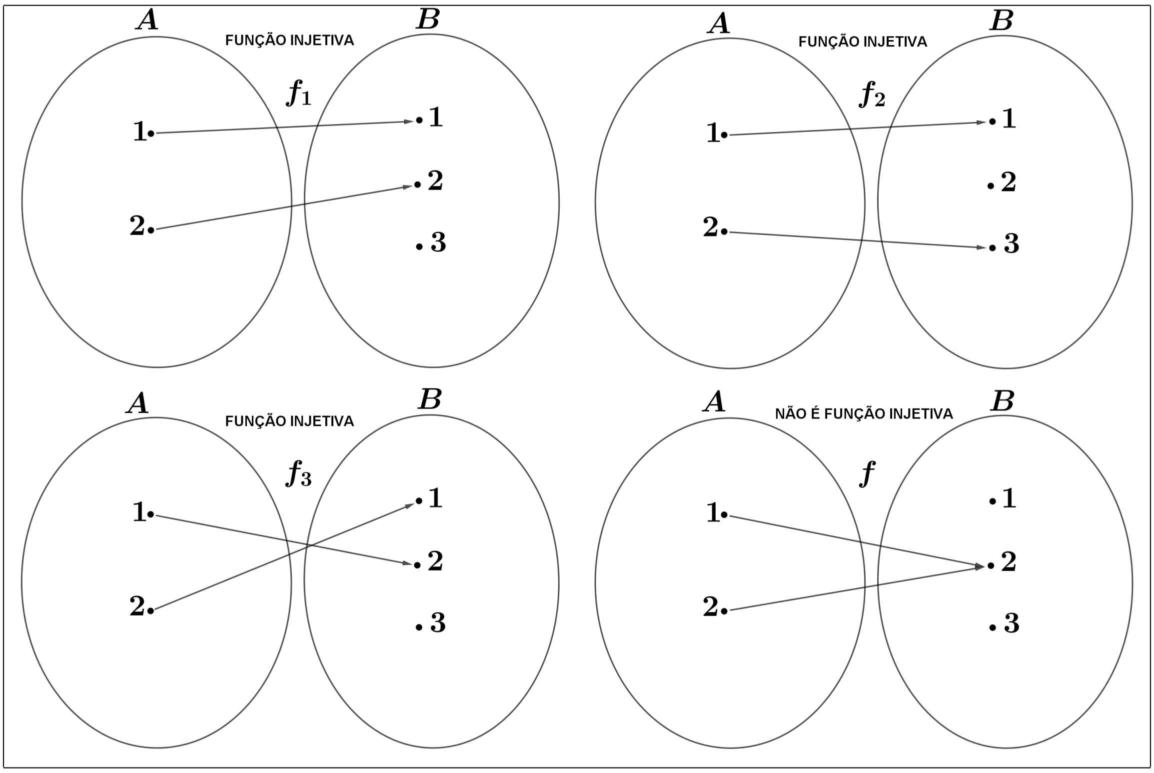


Figura 3.2: Funções injetivas e função qualquer

Na Figura 3.2 as funções $f_1, f_2$ e $f_3$ são funções injetivas, pois para $x_1, x_2 \in$ A temos $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$ para $i \in \{1,2,3\}$. Já a função $f$ não é uma função injetiva pois $f(1) = f(2) = 2$. O caso geral do número de funções injetivas entre dois conjuntos finitos é análogo, conforme a proposição a seguir, a qual pode ser encontrada em [3].

**Proposição 3.2.** *Sejam um conjunto A com m elementos e um conjunto B com n elementos, com $m \leq n$.O numero de funções injetivas de A em B é igual a $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-m+1)$.*

Considere a tabela a seguir.

Tabela 3.6: Número de funções injetivas de A em B - caso geral

| Conjuntos | Conjunto A | Número de possibilidades para a escolha da imagem dos elementos de A em B |
|---|---|---|
| $A = \{1, 2, \cdots, m\}$ | **1** | $n - (\mathbf{1} - 1) = n$ |
| | **2** | $n - (\mathbf{2} - 1) = n - 1$ |
| | **3** | $n - (\mathbf{3} - 1) = n - 2$ |
| $B = \{1, 2, \cdots, n\}$ | **4** | $n - (\mathbf{4} - 1) = n - 3$ |
| | **5** | $n - (\mathbf{5} - 1) = n - 4$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | $\boldsymbol{m}$ | $n - (\boldsymbol{m} - 1) = n - m + 1$ |
| Número de funções injetivas de A em B $= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n - m + 1)$ | | |

***Demonstração:*** A Tabela 3.6 mostra que, há n possibilidades para a escolha da imagem do elemento 1 em B e, feito esta escolha há $n - 1$ possibilidades para a escolha da imagem do elemento 2 em B, e assim por diante até chegar ao m-ésimo elemento de A que por sua vez possui $(n - m + 1)$ possibilidades para a escolha de sua imagem em B. Logo, pelo PFC o número de funções injetivas de A em B é,

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n - m + 1) \tag{3.2}$$

**Exemplo 3.3.** *De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos um presidente e um secretário de um conselho que tem* 12 *membros?*

Considere a tabela a seguir.

Tabela 3.7: Número de modos de escolher um presidente e um secretário dentre 12 conselheiros

| Conjuntos | Distribuição dos conselheiros aos cargos $\{P, S\}$, nessa ordem |
|---|---|
| $K = \{P, S\}$ | $\{C_1, C_2\}$ |
| | $\{C_2, C_1\}$ |
| | $\{C_1, C_3\}$ |
| | $\vdots$ |
| $C = \{C_1, C_2, \cdots, C_{12}\}$ | $\{C_2, C_3\}$ |
| | $\{C_3, C_2\}$ |
| Total de maneiras $= 12 \times 11 = 132$ | |

A Tabela 3.7 indica que, considerando os cargos presidente e secretário, nessa ordem, e os conselheiros $C_1, C_2, \cdots, C_{12}$ algumas maneiras possíveis de escolher um presidente e um secretário são: $C_1, C_2$ indicando que $C_1$ ocupa o cargo de presidente e $C_2$ ocupa o cargo de secretário; $C_2, C_1$ indicando que $C_2$ ocupa o cargo de presidente e $C_1$ ocupa o cargo de secretário; $C_1, C_3$ indicando que $C_1$ ocupa o cargo de presidente e $C_3$ ocupa o cargo de secretário; $C_2, C_3$ indicando que $C_2$ ocupa o cargo de presidente e $C_3$ ocupa o cargo de secretário. Desta forma, vemos que a solução são todos os pares ordenados de duas pessoas, escolhidas de um total de 12 pessoas disponíveis. Assim, temos as seguintes etapas:

- **1ª Etapa:** Há 12 modos para a escolha do presidente;
- **2ª Etapa:** escolhido o presidente, há 11 modos de escolher o secretário.

Logo, pelo PFC temos $12 \times 11 = 132$ maneiras. Note que, este problema está associado ao número de funções injetivas de K em C, onde K é o conjunto dos cargos e C é o conjunto dos conselheiros.

## 3.3 Número de funções bijetivas

Dados $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, encontre o número de funções bijetivas de A em B é dado na tabela a seguir.

Tabela 3.8: Número de funções bijetivas de A em B, com $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.

| **Conjuntos** | **Funções** | **Sequência formada pelo conjunto imagem das funções** |
|---|---|---|
| | $f_1(1) = 1, f_1(2) = 2, f_1(3) = 3$ | $\{1, 2, 3\}$ |
| | $f_2(1) = 1, f_2(2) = 3, f_2(3) = 2$ | $\{1, 3, 2\}$ |
| $A = \{1, 2, 3\}$ | $f_3(1) = 2, f_3(2) = 1, f_3(3) = 3$ | $\{2, 1, 3\}$ |
| | $f_4(1) = 2, f_4(2) = 3, f_4(3) = 1$ | $\{2, 3, 1\}$ |
| $B = \{1, 2, 3\}$ | $f_5(1) = 3, f_5(2) = 1, f_5(3) = 2$ | $\{3, 1, 2\}$ |
| | $f_6(1) = 3, f_6(2) = 2, f_6(3) = 1$ | $\{3, 2, 1\}$ |
| Número de funções bijetivas de A em B $= 3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ | | |

A Tabela 3.8 indica que cada função de A em B é determinada pela escolha da imagem de cada elemento do conjunto A no conjunto B, sendo que uma vez escolhida a imagem de um elemento de A em B, este elemento de B fica indisponível para ser imagem de outro elemento de A. Visto desta forma, há 3 possibilidades para escolher a imagem do $1 \in A$ em B, 2 possibilidades para escolher a imagem do $2 \in A$ em B e 1 possibilidade para escolher a imagem do $3 \in A$ em B. Logo, pelo PFC há $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ funções bijetivas de A em B. Veja as funções $f_1, f_2, f_3$ e $f_4$ representadas nos diagramas da Figura 3.3.

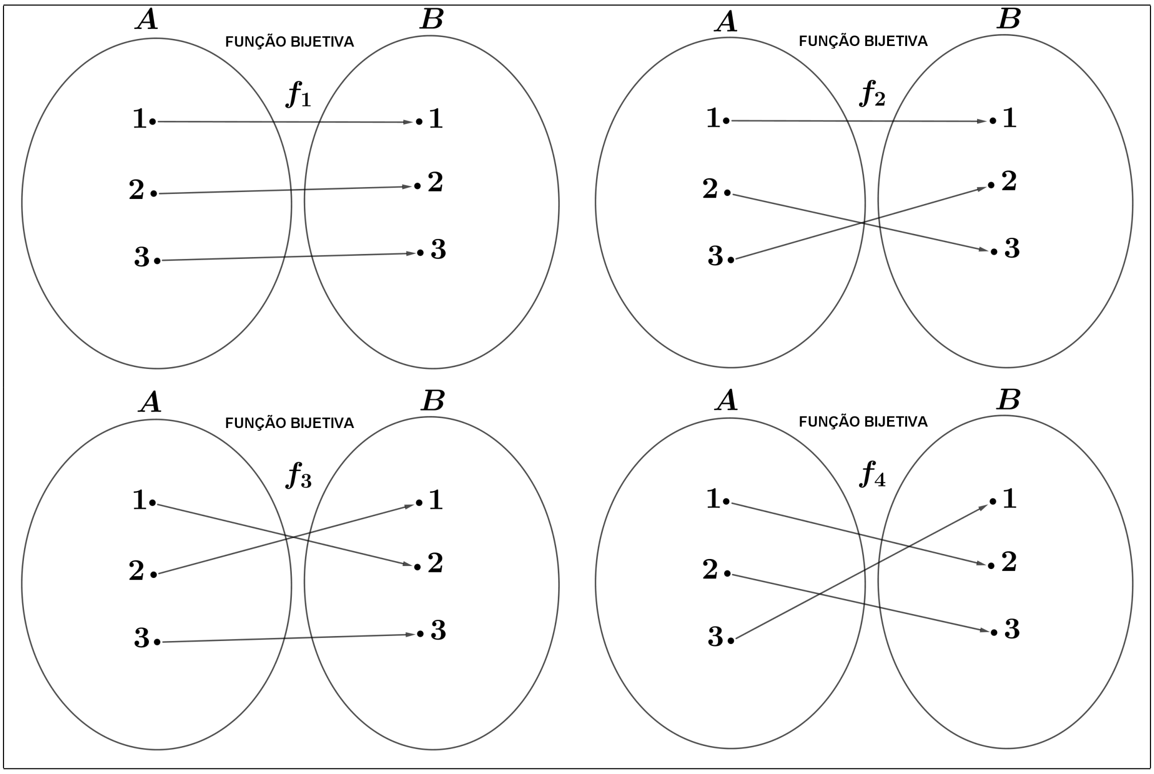


Figura 3.3: Diagramas de funções bijetivas.

O caso geral do número de funções bijetivas entre dois conjuntos finitos é análogo, conforme a proposição a seguir, a qual pode ser encontrada em [3].

**Proposição 3.3.** *Sejam um conjunto A e um conjunto B, ambos com n elementos. O número de funções bijetivas de A em B é n!.*

Considere a tabela a seguir.

Tabela 3.9: Número de funções bijetivas

| **Conjuntos** | **Conjunto A** | **Número de possibilidades para a escolha da imagem dos elementos de A em B** |
|---|---|---|
| $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ | **1** | $n - (\mathbf{1} - 1) = n$ |
| | **2** | $n - (\mathbf{2} - 1) = n - 1$ |
| | **3** | $n - (\mathbf{3} - 1) = n - 2$ |
| $B = \{1, 2, \cdots, n\}$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | $\boldsymbol{n}$ | $n - (\boldsymbol{n} - 1) = 1$ |
| Número de funções bijetivas $= n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$ | | |

***Demonstração:*** Esse é um caso particular de função injetiva, ou seja, quando os conjuntos A e B tem a mesma quantidade elementos (quando $m = n$). Assim, de maneira análoga ao cálculo do número de funções injetivas, há n possibilidades para a escolha da imagem do elemento $1 \in$ A em B, feito esta escolha há $n - 1$ possibilidades para escolher a imagem do $2 \in$ A em B e, assim por diante até chegar ao $n$-ésimo elemento de A que por sua vez possui $(n - (n - 1) = 1$ escolha para a sua imagem em B. Desta forma o numero de funções bijetivas de A em B, pelo PFC é,

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n! \tag{3.3}$$

**Observação 3.1.** *Note que chegamos a conhecida fórmula do número de permutações simples de um conjunto com n elementos.*

**Exemplo 3.4.** *De quantas maneiras* 5 *pessoas podem se sentar em um sofá com* 5 *acentos?*

**Solução:** Sejam as pessoas A,B,C,D e E. Algumas maneiras destas pessoas se sentarem são: ABCDE, ABDCE, BCDEA, $\cdots$, EDCBA. Assim as soluções deste problemas são todas as ordenações possíveis de 5 pessoas em fila.Considere as seguintes etapas para encontrar a solução:

- **1ª Etapa:** Há 5 possibilidades para a 1ª pessoa sentar-se (pois os 5 acentos estão disponíveis);
- **2ª Etapa:** 4 possibilidades para a 2ª pessoa sentar-se (após a 1ª pessoa sentar-se restam 4 acentos disponíveis);
- **3ª Etapa:** 3 possibilidades para 3ª pessoa sentar-se (após a 1ª e a 2ª pessoa sentarem-se restam 3 acentos disponíveis);

- **4ª Etapa:** 2 possibilidades para 4ª pessoa sentar-se (após a 1ª, 2ª e 3ª pessoa sentarem-se restam 2 acentos disponíveis) e;

- **5ª Etapa:** 1 possibilidade para 5ª pessoa sentar-se (após as 4 pessoas estiverem sentados resta apenas um acento disponível).

Logo pelo PFC, temos $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneiras.

## 3.4 Número de funções estritamente crescentes

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, o número de funções estritamente crescentes de A em B é dado conforme a tabela a seguir.

Tabela 3.10: Número de funções estritamente crescentes de A em B, com $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

| **Conjuntos** | **Funções** | **Sequência formada pelo conjunto imagem das funções** |
|---|---|---|
| | $f_1(1) = 1, f_1(2) = 2, f_1(3) = 3$ | $\{1, 2, 3\}$ |
| | $f_2(1) = 1, f_2(2) = 2, f_2(3) = 4$ | $\{1, 2, 4\}$ |
| $A = \{1, 2, 3\}$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | $f_7(1) = 2, f_7(2) = 3, f_7(3) = 4$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ | $f_8(1) = 2, f_8(2) = 3, f_8(3) = 5$ | $\{2, 3, 5\}$ |
| | $f_9(1) = 2, f_9(2) = 4, f_9(3) = 5$ | $\{2, 4, 5\}$ |
| | $f_{10}(1) = 3, f_{10}(2) = 4, f_{10}(3) = 5$ | $\{3, 4, 5\}$ |
| Número de funções estritamente crescentes | | $\dfrac{5 \times 4 \times 3}{3!} = 10$ |

A Tabela 3.10 indica que as funções estritamente crescente de A em B são definidas pelas escolhas não ordenadas de 3 entre 5 elementos do contradomínio B, porque para cada escolha desta só pode ser formada uma única função de A em B associando, em ordem crescente, os três elementos de A a esta escolha. Logo, pelo PFC, há $5 \times 4 \times 3 = 60$ escolhas ordenadas de 3 elementos e, como a ordem entre os elementos de uma escolha é irrelevante, basta desfazer as ordenações dividindo o resultado por $3! = 6$ de onde obtemos 10 funções estritamente crescentes. Considere as funções $f_1, f_2, f_7$ e $f_8$ representadas na figura a seguir.

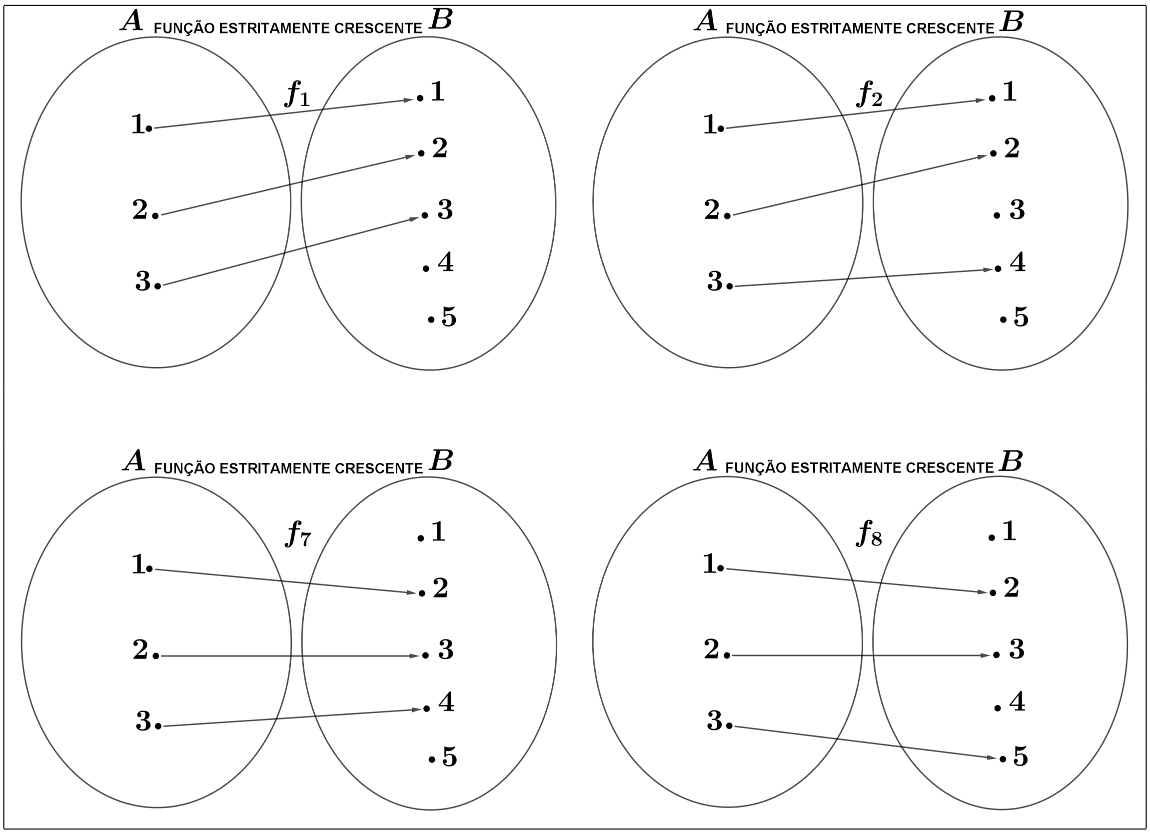


Figura 3.4: Funções estritamente crescente de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Nos diagramas da Figura 3.4 o conjunto imagem da função $f_1$ é {1,2,3}, da função $f_2$ é $\{1, 2, 4\}$, da função $f_7$ é $\{2, 3, 4\}$ e da função $f_8$ é $\{2, 3, 5\}$. Note que as setas não se cruzam nestas funções, o que indica que as sequências formadas pelo conjunto imagem das mesmas estão em ordem estritamente crescente. O caso geral do número de funções estritamente crescentes entre dois conjuntos finitos é análogo ao problema resolvido anteriormente, basta substituir 3 por $m$ e 5 por $n$, conforme a proposição a seguir, a qual pode ser encontrada em [3].

**Proposição 3.4.** *Sejam um conjunto A com m elementos e um conjunto B com n elementos, com $m \leq n$. O número de funções estritamente crescente de A em B é igual a* $\binom{n}{m}$.

***Demonstração:*** Há $n$ possibilidades para escolher a imagem do $1 \in$ A em B, $n - 1$ possibilidades para escolher a imagem do $2 \in$ A em B, $n - 2$ possibilidades para escolher a imagem do $3 \in$ A em B e assim por diante até chegarmos a escolha do $m$-ésimo elemento do conjunto B que tem $n - m + 1$ maneiras para ser escolhido. Pelo PFC, temos $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times (n - m + 1)$ agrupamentos ordenados e como a ordem entre os elementos de cada agrupamento é irrelevante, basta dividir o resultado anterior por $m!$ para desfazer as ordenações de cada agrupamento. Assim, o número de funções estritamente crescentes de A em B é dado pela equação 3.4 a seguir.

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m! \times (n-m)!} = \binom{n}{m} \tag{3.4}$$

**Observação 3.2.** *Note que* $\binom{n}{m}$ *é a conhecida fórmula do número de combinações simples.*

Com esta fórmula definida, vamos definir o 0! (zero fatorial).

**Definição 3.1.** *Quando* $m = n$ *temos que escolher* $n$ *elementos entre* $n$ *possíveis e só há uma maneira para fazer isso, ou seja,* $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \times (n-n)!} = \frac{n!}{n! \times 0!} = 1$ *. Assim para que a formula continue funcionando é conveniente que definamos* $0! = 1$*. Note que, não houve demonstração, mas apenas uma definição para manter a validade da fórmula nos casos* $\binom{n}{n}$ *e* $\binom{n}{0}$*.*

**Exemplo 3.5.** *(Adaptado Profmat ENQ* 2016.2*) De quantas maneiras distintas podemos escolher três números distintos do conjunto* $A = \{1, 2, 3, \cdots, 40\}$ *de modo que sua soma seja um número ímpar?*

Considere a tabela a seguir.

Tabela 3.11: Número de escolhas de 3 entre 40 números de $A = \{1, 2, \cdots, 40\}$, que possui soma ímpar.

| **Conjuntos** | **1º Caso:** Escolhas de três números ímpares | **2º Caso:** Escolhas de um número ímpar e dois números pares |
|---|---|---|
| $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ | $(1, 3, 5)$ | $(1, 2, 4)$ |
| $I_{20} = \{1, 3, \cdots, 39\}$ | $(1, 3, 7)$ | $(1, 2, 6)$ |
| $P_{20} = \{2, 4, \cdots, 40\}$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | $(35, 37, 39)$ | $(39, 38, 40)$ |
| **Total de maneiras por caso** | $\frac{20 \times 19 \times 18}{3!} = 1140$ | $20 \times \frac{20 \times 19}{2!} = 3800$ |
| Total de maneiras $= 1140 + 3800 = 4940$ | | |

A Tabela 3.11 mostra o conjunto $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ das três escolhas não ordenadas que devem ser feitas para obter três número distintos do conjunto $A = \{1, 2, 3, \cdots, 40\}$ de modo que a soma seja ímpar. Mas, $A = I_{20} \cup P_{20}$, ou seja, $\{1, 2, 3, \cdots, 40\} = \{1, 3, \cdots, 39\} \cup \{2, 4, \cdots, 40\}$. Visto desta forma, para que a soma de três números escolhidos do conjunto A seja ímpar, devemos escolher três números ímpares deste conjunto ou escolher número ímpar e dois pares. Assim, para o primeiro caso temos: 20 possibilidades para a 1ª escolha ($E_1$), 19 possibilidades para a 2ª escolha ($E_2$) e 18 possibilidades para a 3ª escolha ($E_3$). Logo, pelo PFC temos $20 \times 19 \times 18 = 6840$ escolhas ordenadas e como queremos escolhas não ordenadas, para desfazer as ordenações de cada escolha basta dividir o resultado por $3! = 6$, que são as ordenações de cada escolha e, assim temos $\dfrac{6840}{6} = 1140$ escolhas de 3 números ímpares não ordenados. Para o segundo caso temos 20 possibilidades para escolher um número ímpar, 20 possibilidades para escolher o 1º número par e 19 possibilidades para escolher o 2º número par. Logo, pelo PFC temos $20 \times 20 \times 19 = 7600$ escolhas com ordenação dos dois números pares escolhidos por pertencerem ao mesmo conjunto, como no caso anterior. Assim, para desfazer as ordenações destes dois números pares basta dividir por $2! = 2$, portanto, temos $\dfrac{7600}{2} = 3800$ escolhas não ordenadas de um número ímpar e dois pares. Logo, pelo PAC temos $1140 + 3800 = 4940$ escolhas de três números do conjunto A cuja soma deles é um número ímpar.

**Exemplo 3.6.** *Quantos são os números naturais de* 4 *algarismos distintos:*

*a) em que os algarismos de cada número estão em ordem estritamente crescente?*

*b) em que os algarismos de cada número estão em ordem estritamente decrescente?*

**Alternativa a)**

**Solução:** Algumas soluções possíveis deste problema são: 1234, 1235, 1236, 1237, 1238, $\cdots$ 5789, 6789. Para encontrar todas as soluções basta encontrar o número de escolhas de 4 algarismos entre 10 algarismos possíveis, pois a ordem entre os algarismos de uma escolha é irrelevante. Logo a resposta é $\binom{9}{4} = 126$ números. Note que este problema está associado ao *número de funções estritamente crescentes*, onde cada solução representa uma função estritamente crescente de A em B, com $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

**Alternativa b)**

**Solução:** Algumas soluções possíveis deste problema são: 3210, 4210, 4310, 4320, 4321, $\cdots$ 9875, 9876. Para encontrar todas as soluções basta encontrar o número de escolhas de 4 algarismos entre 9 algarismos possíveis, pois a ordem entre os algarismos de uma escolha é irrelevante. Logo a resposta é $\binom{10}{4} = 210$ números. Note que este problema está associado ao número de funções estritamente decrescente, onde cada solução representa uma função estritamente decrescente de A em B, onde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Observe ainda que a diferença na solução da alternativa a) e na solução da alternativa b) está no fato de que, o 0 na alternativa a) não faz parte do contradomínio. Desta forma, observemos que se o domínio e o contradomínio tiverem os mesma quantidade de elementos, respectivamente, o número de funções estritamente crescentes e estritamente decrescentes são iguais.

## 3.5 Número de funções sobrejetivas

Para o estudo desta seção, vamos usar um exemplo concreto como motivação, e em seguida generalizarmos.

Sejam A={1,2,3,4,5,6 } e B={1,2,3}, encontre o número de funções sobrejetivas de A em B.

**Solução 1:** Para este número de funções, não podemos aplicar diretamente o PFC, pois não cumpre suas condições, ou seja, precisa ser necessariamente divido em casos. Uma dúvida que pode surgir é em quantos casos será dividido o problema. E uma maneira de fazer esta divisão é escrever o número 6 *(número de elementos do domínio)* como uma soma de 3 *(número de elementos do contradomínio)* inteiros positivos não ordenados, ou seja, $6 = 1 + 1 + 4 = 1 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2$, o que mostra que temos três casos a considerar conforme a seguir.

**1º Caso:** indica que há funções sobrejetivas em que dois elementos do contradomínio é imagem de apenas *um* elemento do domínio cada um, e o outro é imagem de *quatro* elementos do domínio. Para o este caso, temos as seguintes etapas:

- **1ª Etapa:** Há 3 maneiras de escolher o elemento do contradomínio que será imagem de quatro elementos do domínio;
- **2ª Etapa:** $\binom{6}{4} = 15$ maneiras de escolher os elementos do domínio que estarão associados ao elemento do contradomínio escolhido na 1ª etapa;
- **3ª Etapa:** realizado as duas etapas anteriores restam dois elementos do domínio e dois elementos do contradomínio para serem associados, o que pode ser feito de $2! = 2$ maneiras. Logo, pelo PFC temos $3 \times 15 \times 2 = 90$ funções sobrejetivas deste tipo.

**2º Caso:** indica que há funções sobrejetivas em que um elemento do contradomínio é imagem de *um* elemento do domínio, o outro é imagem de *dois* elementos e o 3º é imagem de *três* elementos do domínio. Considere as seguintes etapas para este caso:

- **1ª Etapa:** Há 3 maneiras de escolher o elemento do contradomínio que será imagem de apenas um elemento do domínio e;

- **2ª Etapa:** 6 maneiras de escolher o elemento do domínio que estará associado a ele;
- **3ª Etapa:** 2 maneiras de escolher o elemento do contradomínio que será imagem de dois elementos do domínio e;
- **4ª Etapa:** $\binom{5}{2} = 10$ maneiras de escolher o elemento do domínio que estará associado a ele;
- **5ª Etapa:** sobram três elementos do domínio e um elemento do contradomínio, então, há 1 maneira para esta escolha (que associar os estes três elementos do domínio a este último elemento do contradomínio). Logo, pelo PFC temos $3 \times 6 \times 2 \times 10 \times 1 = 360$ funções sobrejetivas deste tipo.

**3º Caso:** indica que há funções sobrejetivas em que cada elemento do contradomínio é imagem de *exatamente dois* elementos do domínio. considere as seguintes etapas neste 3º caso:

- **1ª Etapa:** Há $\binom{6}{2} = 15$ maneiras de escolher os elementos do domínio que estarão associados ao 1º elemento do contradomínio;
- **2ª Etapa:** $\binom{4}{2} = 6$ maneiras de escolher os elementos do domínio que estarão associados ao 2º elemento do contradomínio e;
- **3ª Etapa:** sobram dois elementos do domínio e um elemento do contradomínio, então, há 1 maneira para esta escolha (que é associar estes dois elementos do domínio a este último elemento do contradomínio).

Logo, pelo PFC temos, $15 \times 6 \times 1 = 90$ funções sobrejetivas deste tipo. Portanto vemos que, **ou** ocorre o caso 1 **ou** ocorre o caso 2 **ou** ocorre o caso 3, então, pelo PAC temos $90 + 360 + 90 = 540$ funções sobrejetivas. Considere o resumo desta solução na tabela a seguir.

Tabela 3.12: Número de funções sobrejetivas de $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ em $B = \{1, 2, 3\}$.

| **Nº de casos** | **1º Caso:** $1+1+4$ | | | **2º Caso:** $1+2+3$ | | | | | **3º Caso:** $2+2+2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de etapas por caso | 1ª | 2ª | 3ª | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª | 5ª | 1ª | 2ª | 3ª |
| Possibilidades por etapa | 3 | $\binom{6}{4} = 15$ | $2! = 2$ | 3 | 6 | 2 | $\binom{5}{2} = 10$ | 1 | $\binom{6}{2} = 15$ | $\binom{4}{2} = 6$ | 1 |
| Possibilidades por caso | $3 \times 15 \times 2 = 90$ | | | $3 \times 6 \times 2 \times 10 \times 1 = 360$ | | | | | $15 \times 6 \times 1 = 90$ | | |
| Total de possibilidades | $90 + 360 + 90 = 540$ | | | | | | | | | | |

Considere três destas funções sobrejetivas e uma função qualquer na figura a seguir.

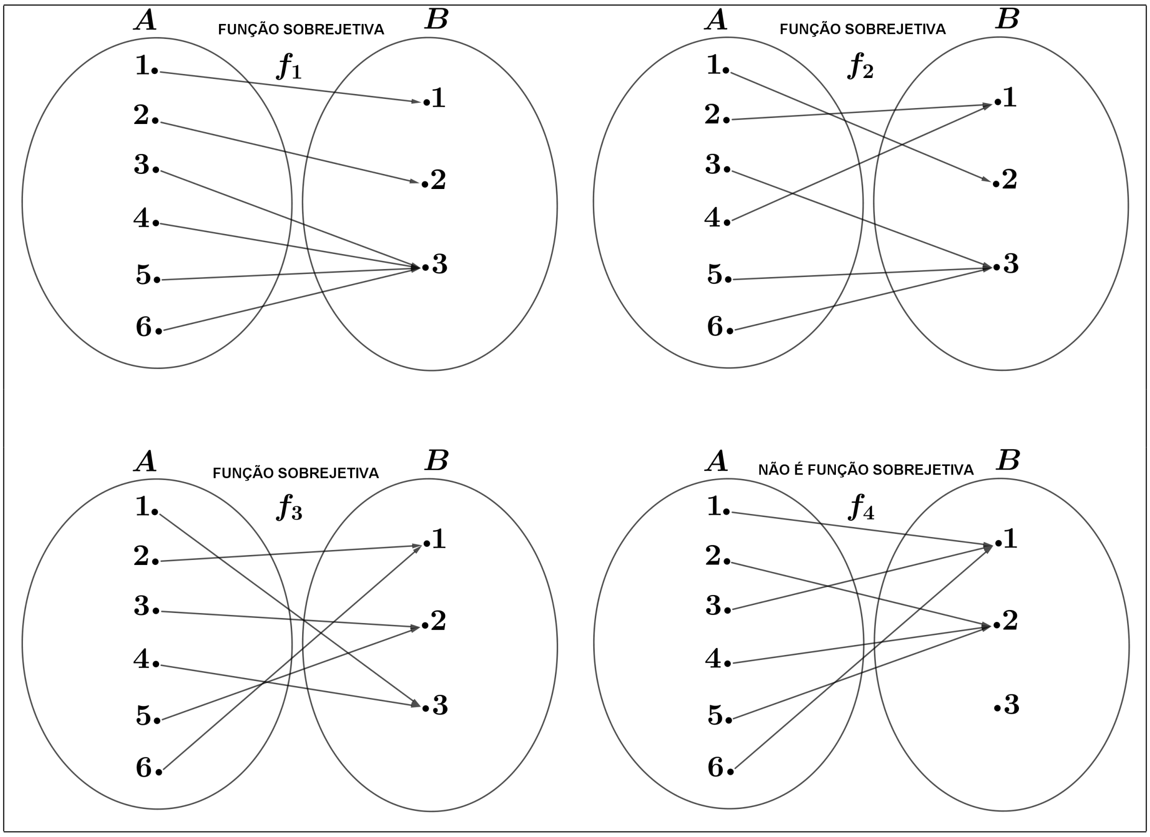


Figura 3.5: Diagramas de funções sobrejetivas e função qualquer.

Na Figura 3.5 temos que as funções $f_1$, $f_2$ e $f_3$ são funções sobrejetivas pois todos os elementos do contradomínio (conjunto B) é imagem de pelo menos um elemento do domínio (conjunto A). Já na função $f_4$ o $3 \in$ B não é imagem de nenhum elemento do contradomínio e portanto não é função sobrejetiva.

**Solução 2:** Vamos dividir 6 elementos distintos (*domínio*) em 3 (*contradomínio*) *grupos* *não vazios e ordenados.* Assim, escrevendo $6 = 1 + 1 + 4 = 1 + 2 + 3 = 2 + 2 + 2$, temos três casos a considerar.

**1º Caso:** um grupo tem 4 elementos e dois grupos tem 1 elemento cada um. A ordem entre os elementos dentro de cada grupo é irrelevante, então basta ordenar os 6 elementos distintos e dividir pelas permutações dos elementos de cada grupo e, além disso, há 3 maneiras de escolher o grupo que ficará com três elementos (pode ser o 1º, o 2º ou o 3º grupo). Logo, temos $\dfrac{6!}{4! \times 1! \times 1!} \times 3 = 90$ funções sobrejetivas deste tipo.

**2º Caso:** um dos grupos tem 1 elemento, o outro tem 2 elementos e o 3º grupo tem 3 elementos. A ordem entre os elementos dentro de cada grupo é irrelevante, então basta ordenar os 6 elementos distintos e dividir pelas permutações dos elementos de cada grupo e, além disso, há 3 maneiras de escolher o grupo que ficará com um elemento (pode ser o 1º, o 2º ou o 3º grupo); 2 maneiras de escolher o grupo que ficará com 2 elementos e (pode ser qualquer dos grupos que sobrou da etapa anterior) e 1 maneira de escolher o grupo que ficará com 3 elementos. Logo temos, $\dfrac{6!}{1! \times 2! \times 3!} \times 3 \times 2 \times 1 = 360$ funções sobrejetivas deste tipo.

**3º Caso:** Cada grupo tem exatamente dois elementos. A ordem entre os elementos dentro de cada grupo é irrelevante, então basta ordenar os 6 elementos distintos e dividir pelas permutações dos elementos de cada grupo. Assim, temos $\dfrac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$ funções sobrejetivas deste tipo. Portanto, pelo PAC temos, $90 + 360 + 90 = 540$ funções sobrejetivas.

**Observação 3.3.** *Note que, encontrar o número de funções sobrejetivas é um processo que envolve uma divisão em vários casos e várias etapas em cada caso. Assim, se os conjuntos tiverem uma quantidade muito grande de elementos, torna-se muito trabalhoso este cálculo usando esta técnica.*

A seguir, desenvolveremos um outro método que será mais eficaz para encontrar o número de funções sobrejetivas entre dois conjuntos finitos com qualquer quantidade de elementos, conforme a proposição 3.5 que segue, a qual pode ser encontrada em [6].

**Proposição 3.5.** *Sejam um conjunto $A$ com $m$ elementos e um conjunto $B$ com $n$ elementos, sendo $m \geq n$ O número de funções sobrejetivas de $A$ em $B$ é igual a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \times (n-k)^m$.

***Demonstração:*** Seja a função $f : A \to B$, com $A = \{1, 2, 3, ..., m\}$ e $B = \{1, 2, 3, ..., n\}$ e $m \geq n$, pois se $m < n$ teremos sempre elementos sobrando no contradomínio e daí não formaremos nenhuma função sobrejetiva. Nestas condições temos $n^m$ funções $f : A \to B$, pois para cada um dos $m$ elementos de A há $n$ modos de escolher sua imagem em B. Assim, o numero de funções que não são sobrejetivas são aquelas em que 1 ou 2 ou 3,... ou $n$ não fazem parte do conjunto imagem da função. Denotando por $A_j$, o conjunto das funções $f: A \to B$ em que $y_j$ não pertence ao conjunto-imagem, para $j = \{1, 2, 3, ..., n\}$, as funções que não são sobrejetivas são aquelas que pertencem a $A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n$. Portanto, o numero de funções sobrejetivas de A em B é $n^m$ - $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 ... \cup A_n) = n^m - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^n.S_n$, onde $A_1$ é o numero de funções em que escolhido um dos elementos do contradomínio $B = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ não fará parte do conjunto-imagem da função, isto é, $A_1 = (n-1)^m$, e $S_1 = \binom{n}{1} \times A_1 = \binom{n}{1} \times (n-1)^m$; $A_2$ é o numero de funções em que escolhido dois dos elementos do contradomínio $B = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ não farão parte do conjunto imagem, isto é, $A_2 = (n-2)^m$ , e $S_2 = \binom{n}{2} \times A_2 = \binom{n}{2} \times (n-2)^m$; $A_3$ é o numero de funções em que, escolhido três dos elementos do contradomínio $B = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ não farão parte do conjunto imagem, isto é, $A_3 = (n-3)^m$ , e $S_3 = \binom{n}{3} \times A_3 = \binom{n}{3} \times (n-3)^m$. E Segue-se deste modo, até chegar a escolha de n-1 entre n elementos do conjunto B que é o $A_{n-1}$ ,isto é, $A_{n-1} = 1^m$ , e $S_{n-1} = \binom{n}{n-1} \times A_{n-1} = n \times (-1)^m$. Logo o número de funções sobrejetivas de A em B é $n^m - \binom{n}{1} \times (n-1)^m + \binom{n}{2} \times (n-2)^m - \binom{n}{3} \times (n-3)^m + \cdots + (-1)^{n-1} \times \binom{n}{n-1} \times 1^{n-1} = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \times \binom{n}{k} \times (n-k)^m$. Esta expressão é equivalente a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times \binom{n}{k} \times (n-k)^m \tag{3.5}$$

que representa o número de funções sobrejetivas de A em B.

Usando esta técnica, vamos encontrar o número de funções sobrejetivas de A em B, do problema já resolvido, onde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, ou seja, $m = 6$ e $n = 3$. Esta será a 3ª solução do problema.

**Solução 3:** Usando o resultado obtido na equação 3.5, temos $\sum_{k=0}^{3} (-1)^k \times \binom{3}{k} \times (3-k)^6 = 3^6 - \binom{3}{1} \times 2^6 + \binom{3}{2} \times 1^6 = 729 - 192 + 3 = 540$ funções sobrejetivas.

**Corolário 3.1.** *Se $m = n$ o número de funções sobrejetivas é igual a $n!$.*

***Demonstração:*** Neste caso as funções serão injetivas e sobrejetivas simultaneamente, portanto serão bijetivas. Mas, pela proposição 3.3 o número de funções bijetivas de A em B é igual a $n!$.

**Exemplo 3.7.** *(Adaptado OBMEP* 2014*): Tio Pedro trouxe 5 presentes diferentes, sendo um deles uma bola, e vai distribuir todos eles por seus sobrinhos Alberto, Bernardo, Carlos e Daniel. De quantos modos os presentes podem ser distribuídos:*

*a) sem restrições?*

*b) de modo que cada sobrinho ganhe pelo menos um presente ?*

*c) de modo que cada sobrinho ganhe pelo menos um presente e a bola fique com Alberto?*

**Alternativa a)**

**Solução:** Como os presentes são distintos, suponhamos sem perda de generalidade, que os presentes sejam a bola e 4 carrinhos de cores diferentes: azul, branco, preto e vermelho. Assim, cada presente pode ser distribuído de 4 modos, pois pode ser dado a qualquer um dos 4 sobrinhos, independentemente de já ter recebido presente ou não. Logo pelo PFC, temos $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1024$ modos. Oberseve algumas soluções possíveis na tabela a seguir.

Tabela 3.13: Distribuição de presentes

| **Candidatos** | **Alberto** | **Bernardo** | **Carlos** | **Daniel** |
|---|---|---|---|---|
| Distribuição de presentes | $C_a$ | $(C_b$ | $C_p$ | $(C_v, B)$ |
| | $0$ | $(C_a, C_b)$ | $(C_p, C_v)$ | $B$ |
| | $C_b$ | $(C_a$ | $C_p$ | $(C_v, B)$ |
| | $0$ | $(C_a, C_b, C_p, C_v, B)$ | $0$ | $0$ |

A 2ª linha da tabela 3.13 indica que Alberto recebeu o carrinho azul, Bernardo recebeu o carrinho branco, Carlos recebeu o carrinho preto e Daniel recebeu o carrinho vermelho e a bola; A 3ª linha da tabela 3.13 indica que Alberto não recebeu nenhum presente, Bernardo recebeu os carrinhos azul e branco, Carlos recebeu os carrinhos preto e vermelho e Daniel recebeu a bola; A 4ª linha da tabela 3.13 indica que Alberto recebeu o carrinho branco, Bernardo recebeu o carrinho azul, Carlos recebeu o carrinho preto e Daniel recebeu o carrinho vermelho e a bola; A 2ª linha da tabela 3.13 indica que Alberto, Carlos e Daniel não receberam nenhum presente e Bernardo recebeu os 5 presentes. Note que, cada configuração que representa uma possível solução, é considerada a ordem entre os presentes como mostra a 2ª e a 4ª linha da tabela 3.13 e ainda, pode ficar sobrinho(s) sem receber presente(s) nessa distribuição.

**Alternativa b)**

**Solução 1:** Neste caso, não é possível resolver o problema diretamente pelo PFC, pois como nenhum sobrinho pode ficar sem presente é preciso dividir o problema em casos. Uma dificuldade que pode aparecer é em quantos casos o problema deve ser dividido. Uma maneira de fazer isso é escrever o 5 *(os 5 presentes)* como uma *soma de* 4 *(4 sobrinhos) inteiros positivos não ordenados*, ou seja, $5 = 1 + 1 + 1 + 2$, o que mostra que só há um caso indicando que 3 sobrinhos recebem 1 presente cada um e o outro sobrinho recebe dois presentes. Assim, para encontrar a solução considere as etapas a seguir.

- **1ª Etapa:** Há 4 maneiras de escolher o sobrinho que receberá 2 presentes;
- **2ª Etapa:** escolhido o sobrinho que recebera dois presentes, há $\binom{5}{2} = 10$ maneiras de escolher os dois presente para dar a ele;
- **3ª Etapa:** realizado as etapas anteriores, restam 3 presentes para serem distribuídos para 3 sobrinhos e isso pode ser feito de $3! = 6$ maneiras. Logo, pelo PFC temos

$4 \times 10 \times 6 = 240$ modos. Considere a tabela a seguir.

Tabela 3.14: Distribuição de 5 presentes distintos para 4 sobrinhos

| **Etapas** | **Possibilidades por etapa** | **Total de possibilidades** |
|---|---|---|
| **1ª Etapa:** escolha do sobrinho que receberá dois presentes | 4 | |
| **2ª Etapa:** escolha dos dois presentes para dar ao sobrinho escolhido na etapa anterior | $\binom{5}{2} = 10$ | $4 \times 10 \times 6 = 240$ |
| **3ª Etapa:** distribuição de 3 presentes distintos para 3 sobrinhos | $3! = 6$ | |

**Solução 2:** Vamos dividir 5 presentes em 4 grupos *não vazios e ordenados.* Assim, basta ordenar os 5 presentes em fila e dividir pelas permutações dos elementos de cada grupo já que a ordem dos elementos dentro de cada grupo é irrelevante e, além disso há 4 maneiras de escolher o grupo que ficará com três presentes(pois pode ser qualquer um dos 4 grupos). Logo temos $\dfrac{5!}{2! \times 1! \times 1!} \times 4 = 240$ maneiras.

**Solução 3:** Contamos todas as maneiras de distribuir os 5 presentes sem restrição, como na alternativa a), daí retiramos as contagens indevidas que são aquelas em que há sobrinho(s) sem presente(s), como a seguir.

$$\sum_{k=0}^{4}(-1)^k \times \binom{4}{k} \times (4-k)^5 = 4^5 - \binom{4}{1} \times (4-1)^5 + \binom{4}{2} \times (4-2)^5 - \binom{4}{3} \times (4-3)^5 =$$

$1024 - 4\times 243 + 6\times 32 - 4\times 1 = 240$ modos. Observe que a 2ª e a 4ª linha da tabela 3.13 são dois exemplos que satisfazem este caso, pois cada sobrinho recebe pelo menos um presente. Assim, fazem parte desta solução os casos da alternativa a) em que não há nenhum sobrinho sem receber presente(s).

**Alternativa c)**

Este caso é a alternativa b) com a restrição de que a bola fique com Alberto. Assim sendo temos dois casos a considerar:

**1º Caso:** *Alberto ganha dois presentes e os demais um.*Considere as seguintes etapas para este caso:

- **1ª Etapa:** Sabendo que a bola fica com Alberto outro presente dele pode ser escolhido de 4 modos;
- **2ª Etapa:** os demais presentes devem ser distribuídos pelos demais sobrinhos, o que pode ser feito de $3! = 6$ modos.

Logo pelo PFC, o número total de possibilidades neste caso é $4 \times 6 = 24$.

**2º Caso:** *Um outro sobrinho ganha dois presentes e os demais um.* Considere as seguintes etapas para este caso:

- **1ª Etapa:** O sobrinho a ganhar dois presentes pode ser escolhido de 3 modos e;
- **2ª Etapa:** seus presentes podem ser escolhidos de $\binom{4}{2} = 6$ modos;
- **3ª Etapa:** restam dois presentes e dois sobrinhos, então, há $2! = 2$ modos de distribuí-los.

Logo pelo PFC, o número total de possibilidades neste caso é $3 \times 6 \times 2 = 36$. Reunindo os dois casos, o número total de possibilidades é $24 + 36 = 60$. Considere a tabela a seguir.

Tabela 3.15: Distribuição de presentes e Alberto com a bola

| **Nº de casos** | **1º Caso:** Alberto ganha dois presentes e os demais um | | **2º Caso:** Um outro sobrinho ganha dois presentes e os demais um. | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nº de etapas por caso | **1ª etapa:** escolhas do 2º presente de Alberto | **2ª etapa:** distribuição de 3 presentes distintos para 3 sobrinhos | **1ª etapa:** escolha do sobrinho que ganha dois presentes | **2ª etapa:** escolhas de dois presentes | **3ª etapa:** distribuição de dois presentes para dois sobrinhos |
| Possibilidades por etapa | 4 | $3! = 6$ | 3 | $\binom{4}{2} = 6$ | $2! = 2$ |
| Possibilidades por caso | $4 \times 6 = 24$ | | $3 \times 6 \times 2 = 36$ | | |
| Total de possibilidades $= 24 + 36 = 60$ | | | | | |

**Observação 3.4.** *Note que,a alternativa a) está ligada ao número de funções de $P$ em $S$, onde $P$ é o conjunto dos 5 presentes e $S$ é o conjunto dos 4 sobrinhos. Já as alternativas b) e c) estão ligadas ao número de funções sobrejetivas de $P$ em $S$. Considere os diagramas da figura a seguir.*

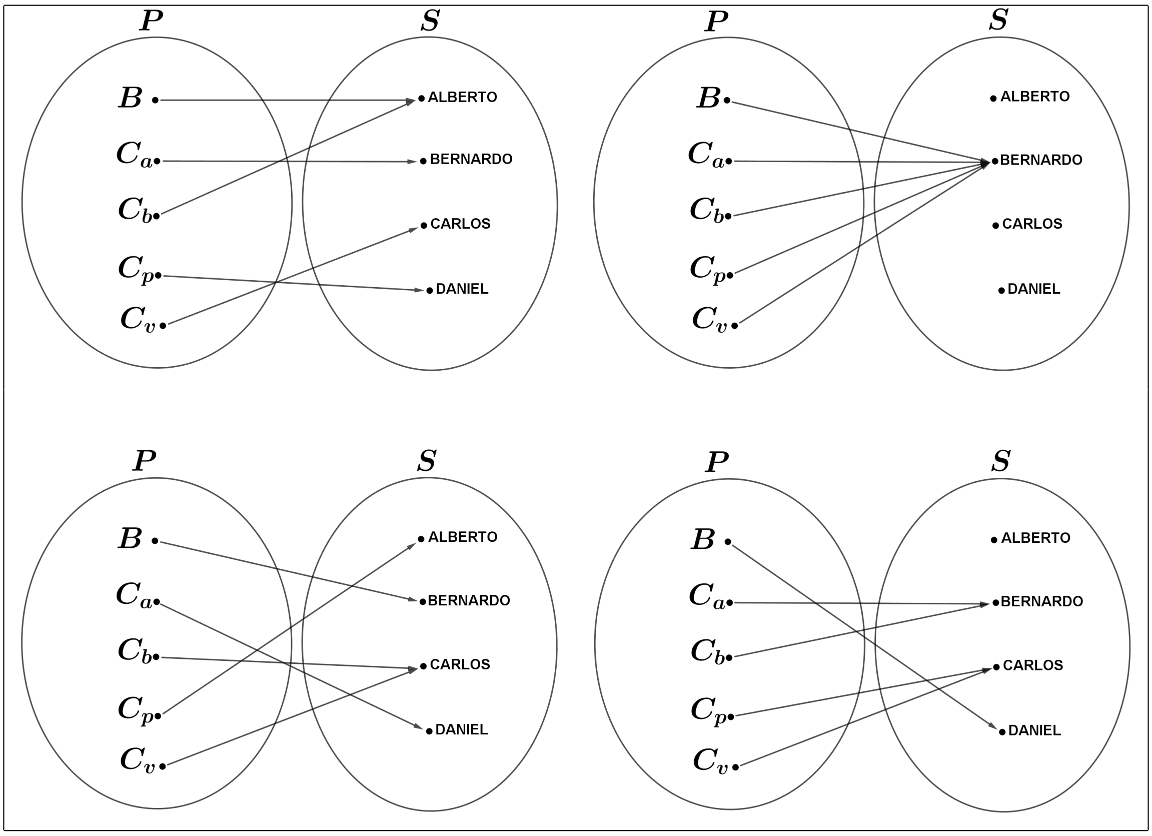


Figura 3.6: Distribuição de 5 presentes para 4 sobrinhos

A Figura 3.6 temos as seguintes situações: a 1ª figura representa a solução $[(B, C_b); C_a; C_v; C_p]$ indicando que Alberto ganha de presente a bola e o carrinho branco, Bernardo ganha o carrinho azul, Carlos ganha o carrinho vermelho e Daniel ganha o carrinho preto, logo satisfaz as alternativas a), b) e c). A 2ª ª figura representa a solução $[0; (B, C_a, C_b, C_p, C_v); 0; 0; 0]$ indicando que Bernardo ganha todos os 5 presentes, logo satisfaz somente o alternativa a). A 3ª ª figura representa a solução $[C_p; B; (C_b, C_v); C_a]$ indicando que Alberto ganha de presente o carrinho preto, Bernardo ganha a bola, Carlos ganha os carrinhos branco e vermelho e Daniel ganha o carrinho azul, logo satisfaz as alternativas a) e b). A 4ª figura representa a solução $[0; (C_a, C_b); (C_p, C_v); B]$ indicando que Alberto não ganha nenhum presente, Bernardo ganha os carrinhos azul e branco, Carlos ganha os carrinhos preto e vermelho e Daniel ganha a bola, logo satisfaz somente a alternativa a).

## 3.6 Número de funções não decrescente

Seja uma função de A em B, com $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Considere algumas funções não decrescente e funções quaisquer na figura a seguir.

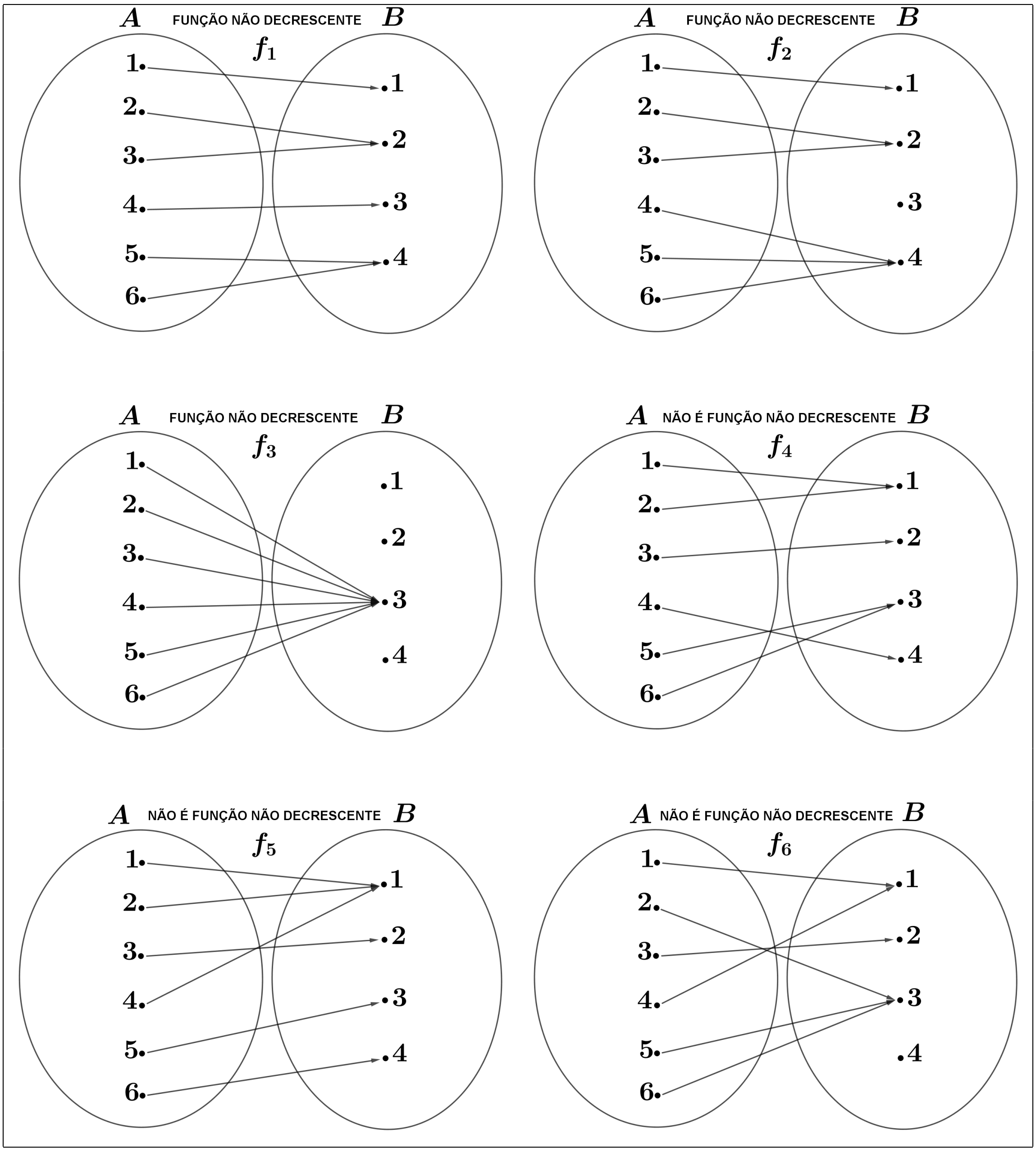


Figura 3.7: Diagramas de funções não decrescentes e funções quaisquer.

Observando a função $f_1$ vemos que $f_1(1) = 1, f_1(2) = 2, f_1(3) = 2, f_1(4) = 3, f_1(5) = 4$ $f_1(6) = 4$. Na ordem crescente dos elementos do domínio, se formarmos uma sequência com as imagens de cada elemento do domínio teremos a sequência 122344, o que é uma solução da forma (1,2,1,2) indicando que os elementos $1, 2, 3, 4 \in$ B é imagem 1,2,1,2 elementos do conjunto A, respectivamente. Observe que para $x_1 \leq x_2$, com $x_1$ e $x_2 \in$ A temos que

$f_1(x_1) \leq f_1(x_2)$ para todo $f_1(x_1), f_1(x_2) \in$ B. Analogamente, temos as sequências 122244, 333333 das funções $f_2$ e $f_3$, respectivamente, formadas pelas imagens. Observe que, nestes casos em que as funções são não decrescentes, as setas não se cruzam. Agora perceba que nas funções $f_4, f_5$ e $f_6$ as setas se cruzam, determinando uma função que não é não decrescente e por sua vez formam com suas imagens as sequências 112433, 112134. Observe estas sequências nas colunas da Tabela 3.16, denotadas pelas funções $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ e $f_6$.

Tabela 3.16: Funções não decrescentes e funções quaisquer.

| $x$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ | $f_3(x)$ | $f_4(x)$ | $f_5(x)$ | $f_6(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 3 | 4 | 1 | 1 |
| 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 6 | 4 | 4 | 3 | 3 | 4 | 3 |

Conforme a Tabela 3.16, o que determina a função não decrescente é quantas vezes cada elemento do contradomínio (conjunto B) é escolhido para ser imagem de algum elemento do domínio (conjunto A). Esta quantidade de vezes que os elementos de B podem ser escolhidos varia de 0 a 6 vezes. Como estamos definindo uma função de A em B, sabemos que cada um dos 6 elementos do conjunto A precisa está associado a um único elemento do conjunto B. Visto desta maneira, o problema consiste em encontrar o numero de soluções inteiras não-negativas da equação a seguir.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

onde $x_1$ indica quantas vezes aparece o 1 na sequência; $x_2$ indica quantas vezes aparece o 2 na sequência; $x_3$ indica quantas vezes aparece o 3 na sequência; $x_4$ indica quantas vezes aparece o 4 na sequência. Por exemplo, a sequência 122333 é uma solução da forma (1,2,3,0), pois $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ e $x_4 = 0$, ou seja, isto equivale dizer que, o elemento $1 \in$ B é imagem de um elemento do conjunto A, o elemento $2 \in$ B é imagem de dois elementos do conjunto A, o elemento $3 \in$ B é imagem de três elementos do conjunto A e o elemento $4 \in$ B não é imagem de nenhum elemento do conjunto A. Logo, podemos encontrar a solução deste problema, recorrendo à uma sequência de símbolos, como por exemplo, usando palitos como elementos do conjunto A e sinais de mais (+) como separadores, ou seja, I + I I +

I I I +. Nestas condições, devemos encontrar quantas vezes cada elemento do conjunto B aparece na sequência, podendo ser zero ( ou seja, pode aparecer zero vezes). E como a soma é constante e igual a 6, podemos pensar em 6 palitos sobre uma mesa, onde queremos separar estes 6 palitos em 4 grupos e para fazer isso precisamos de 3 separadores. Vejamos algumas soluções possíveis da equação 3.6 na tabela a seguir.

Tabela 3.17: Soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$

| **Símbolos** | **Sequência** | **Solução** | **Representação na equação** $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ |
|---|---|---|---|
| I I + I + I I I + | 112333 | (2,1,3,0) | $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3,\ x_4 = 0$ |
| + I I I + I + I I | 222344 | (0,3,1,2) | $x_1 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$ |
| I + I I + + I I I | 122444 | (1,2,0,3) | $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 3$ |
| + I I + I I + I I | 223344 | (0,2,2,2) | $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2,\ x_4 = 2$ |
| I + I + I + I I I | 123444 | (1,1,1,3) | $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 3$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| + + + I I I I I I | 444444 | (0,0,0,6) | $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 3$ |
| Número de funções não decrescente $= P_9^{6,3} = \dfrac{9!}{6! \times 3!} = 84$ | | | |

Pela Tabela 3.17 temos que I I + I + III + representa a sequência 112333 que é uma solução da forma (2,1,3,0); + III + I + I I representa a sequência 222344 que é uma solução da forma (0,3,1,2); I +I I + + I I I representa a sequência 122444 que é uma solução da forma (1,2,0,3); + I I + I I + I I representa a sequência 223344 que é uma solução da forma (0,2,2,2); I + I + I + I I I representa a sequência 123444 que é uma solução da forma (1,1,1,3); + + + I I I I I I representa a sequência 444444 que é uma solução da forma (0,0,0,6). Note que qualquer maneira que arrumarmos os palitos vai aparecer uma sequência representando uma solução da equação 3.6 e, o que temos que fazer para encontrar todas as sequências possíveis é permutar a sequência de símbolos composta por três sinais de mais (+), que são os separadores, e os 6 palitos que representam os elementos do conjunto A e isto equivale ao número de permutação com repetições de 9 elementos com três sinais de "mais" (+) iguais e 6 palitos (I) iguais. Assim temos, $\dfrac{9!}{3! \times 6!} = 84$ funções não decrescentes de A em B. Observe que os três sinais de "+" (separadores) é um a menos em relação ao número de elementos do conjunto B que são as variáveis da equação 3.6 e que as sequências formadas são sequencias em que a ordem do menor para o maior é preservada, admitindo repetição. Por estas razões, este método é conhecido como combinações completas que é numericamente igual ao número de permutações com repetição, que foi técnica usada para resolver o problema. Note que, permutações com repetição ou combinações completas, neste caso, são equivalentes. Mas, por questões de conveniência usaremos combinações completas, já que cada sequência de símbolos tem sempre 9 símbolos e o que muda é a posição em que esses símbolos são colocados. Portanto, sabendo exatamente quais são essas posições, descobrimos a sequência. Visto deste modo, então basta escolher a posição onde vão ficar os sinais de "+". Logo a solução do problema equivale responder, de quantas maneiras pode-se escolher as três posições dos sinais de "+" entre as 9 possíveis? E isto por sua vez, é equivalente ao números de combinações simples de 9 elementos tomados 3 a 3. Desta maneira, juntando as informações dos dois parágrafos anteriores concluímos que o problema trata-se de encontrar o número de combinações completas de 4 elementos tomados 6 a 6 indicado pela notação $CR_{4,6}$. Portanto o numero de funções não decrescentes de A em B é igual a $CR_{4,6} = C_{4-1+6,6} = C_{9,6} = C_{9,3} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3!} = 84$.

O caso geral do número de funções não decrescentes entre dois conjuntos finitos é análogo ao problema resolvido anteriormente, basta substituir 6 por $m$ e 4 por $n$, o qual pode ser encontrado em [5]. Observe o Figura 3.8 a seguir.

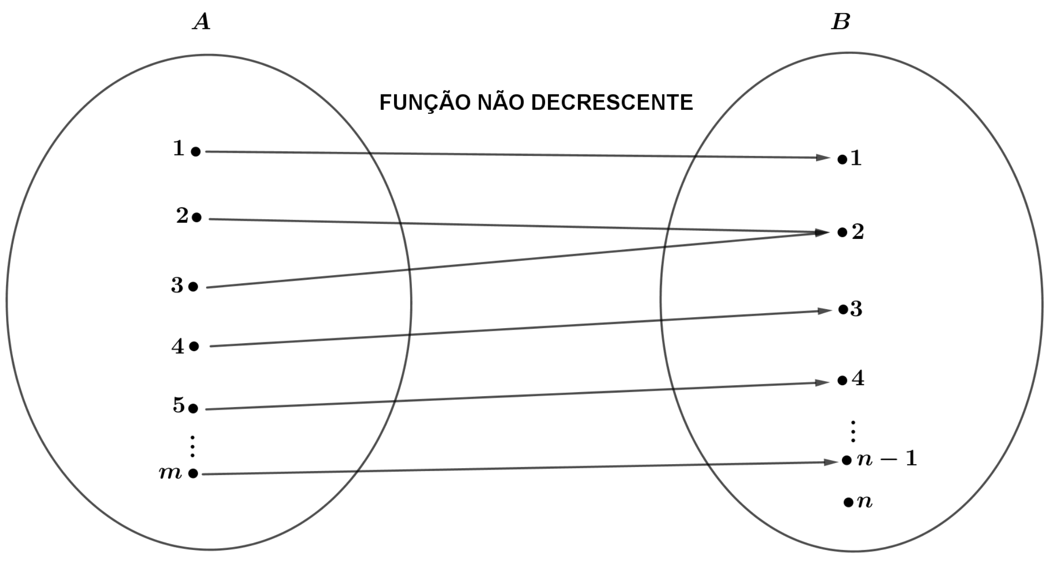


Figura 3.8: Número de funções não decrescente

Como no caso anterior, dados $x_1$ e $x_2 \in$ A e $f(x_1), f(x_2) \in$ B, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$. Daí, segue de maneira análoga ao problema anterior, que cada função está associada a uma sequência de números inteiros e não negativos com soma constante e igual a m, logo a solução geral equivale ao numero de soluções inteiras e não negativas da equação 3.6 a seguir.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = m \tag{3.6}$$

E de maneira análoga ao problema anterior, dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ e $B = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, consideremos $m$ palitos e $n-1$ separadores, que serão os sinais de "+", conforme a sequência de símbolos, $\underbrace{II + III + I + \cdots + IIII}_{com\, m\, palitos\, e\, n-1\, sinais\, de\, \text{“}mais''} = m$. E assim encontramos o número de funções não decrescentes de A em B dado por:

$$\frac{(m+n-1)!}{m! \times (n-1)!} = \binom{n+m-1}{m} \tag{3.7}$$

Esta equação equivale ao número de combinações com repetição ( ou combinações completas) de $n$ elementos tomados $m$ a $m$ e, é indicado por $CR_{n,m} = C_{n+m-1,m} = \binom{n+m-1}{m}$.

**Exemplo 3.8.** *De quantas maneiras podem ser pintados* 5 *carros iguais usando* 3 *cores diferentes?*

*a) sem restrições?*

*b) de modo que sejam usadas as três cores?*

**Alternativa a)**

**Solução 1:** Suponhamos, sem perda de generalidade, que as cores sejam azul, branca e preta, nessa ordem.Como os carros são iguais se mudarmos a ordem entre qualquer configuração, que representa uma possível solução,não fará nenhuma diferença. Assim o problema equivale ao cálculo de todas as permutações da sequência de símbolos I + I I + I I, onde os "IIIII" representam os 5 carros iguais e os sinais de "+ +" representam os 2 separadores, que são um a menos em relação as cores (que são 3). Esta representação significa que a quantidade de "I" a esquerda do 1º sinal "+" é a quantidade de carros pintados com a cor Azul, a quantidade de "I" a direita do 1º sinal "+" é a quantidade de carros pintados com a cor Branca e a quantidade de "I" a direta do 2º sinal "+" é a quantidade de carros pintados com a cor Preta. Logo a solução é, $P_{5+2}^{5,2} = P_7^{5,2} = \dfrac{7!}{5! \times 2!} = 21$ modos. Considere a tabela a seguir.

Tabela 3.18: Pintura de 5 carros iguais com 3 cores distintas

| **Símbolos** | **Sequência** | **Solução** | **Representação na equação** $x_a + x_b + x_p = 5$ |
|---|---|---|---|
| I I + I I + I | AABBP | $(2,2,1)$ | $x_a = 2,\ x_b = 2,\ x_p = 1$ |
| I + I I I + I | ABBBP | $(1,3,1)$ | $x_a = 1,\ x_b = 3,\ x_p = 1$ |
| + I I I + I I | BBBPP | $(0,3,2)$ | $x_a = 0,\ x_b = 3,\ x_p = 2$ |
| + I I I I + I | BBBBP | $(0,4,1)$ | $x_a = 0,\ x_b = 4,\ x_p = 1$ |
| I I I I I + + | AAAAA | $(5,0,0)$ | $x_a = 5,\ x_b = 0,\ x_p = 0$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| + + I I I I I | PPPPP | $(0,0,5)$ | $x_a = 0,\ x_b = 0,\ x_p = 5$ |
| Número de maneiras $= P_7^{5,2} = \dfrac{7!}{5! \times 3!} = 21$ | | | |

Pela Tabela 3.18 temos que I I + I I + I representa a sequência AABBP indicando que dois carros são pintados de azul, outros dois são pintados de branco e um é pintado de preto; I + I I I + I representa a sequência ABBBP indicando que um carro é pintado de azul, três são pintados de branco e o outro é pintado de preto; + I I I + I I representa a sequência BBBPP indicando que dois carros são pintados de branco e dois são pintados de preto; + I I I I + I representa a sequência BBBBP indicando que quatro carros são pintados de branco e um carro é pintado de preto; I I I I I + + representa a sequência PPPPP indicando que os cinco carros são pintados com a cor azul; + + I I I I I representa a sequência PPPPP indicando que os cinco carros são pintados com a cor preta.

**Solução 2:** Chamando de $x_A$ o número de carros pintados com a cor azul, $x_B$ o número de carros pintados com a cor branca e $x_P$ o número de carros pintados com a cor preta a solução do problema é equivalente ao número de soluções inteiras não negativas da equação $x_a+x_b+x_p = 5$, que por sua vez equivale ao numero de combinações completas de 3 elementos (3 cores) tomados 5 a 5 (5 carros) que é igual a $CR_{3,5} = C_{3-1+5,5} = C_{7,5} = \dfrac{7!}{5! \times 2!} = 21$ modos.

**Solução 3:** Sejam A,B e P as letras que representam as cores azul, branca e preta, respectivamente. Observe, por exemplo, que a sequência AABBP, AABPB, AAPBB, APABB, AABB, ABABP, ABBAP, ABBPA, $\cdots$, PAABB, representam uma mesma solução, pelo fato dos carros serem iguais. Logo as soluções deste problema podem ser descritas por sequências *não ordenadas* das letras A,B e P admitindo repetição das mesmas. Mas, isto equivale ao *número de funções não decrescentes* de K em C, sendo K o conjunto dos cinco carros iguais e C o conjunto das 3 cores, como mostra a Figura 3.9.

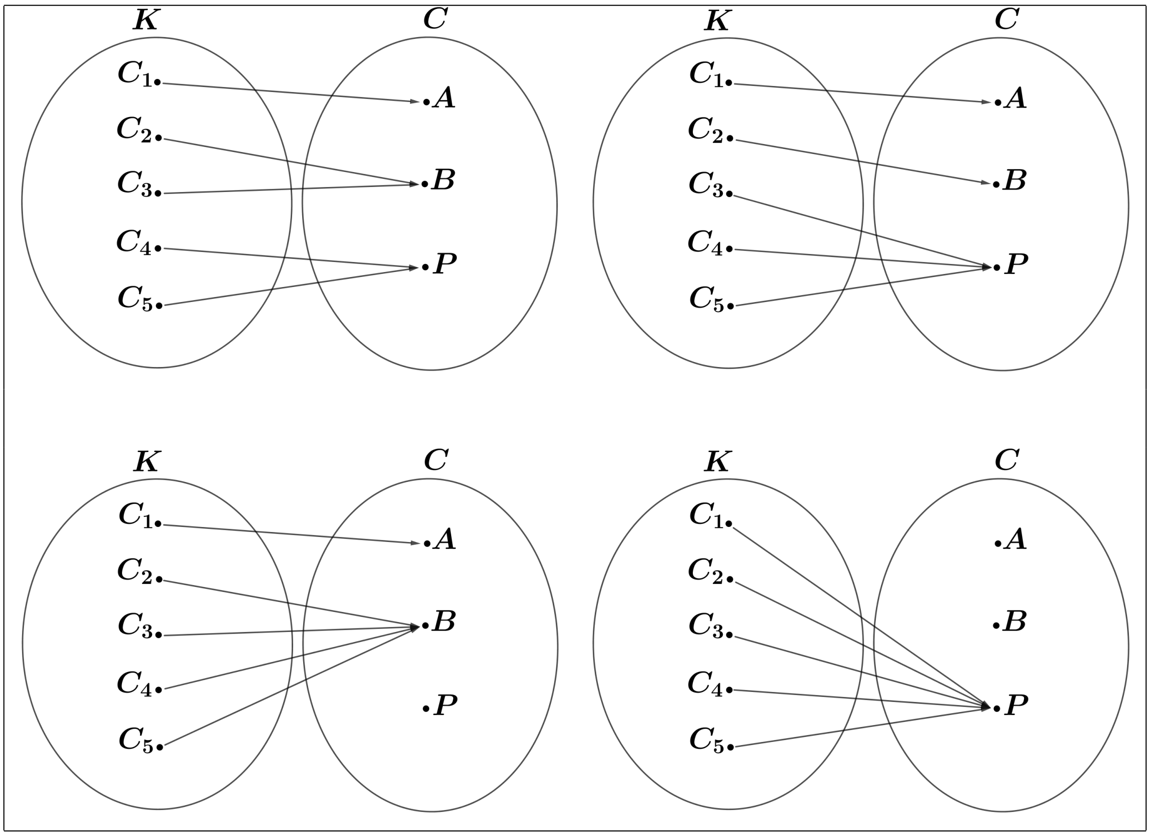


Figura 3.9: Pintura de 5 carros iguais com 3 cores.

Nas figuras acima temos que na 1ª figura há 1 carro pintado com a cor azul, 2 carros pintados com a cor branca e dois com a cor preta (ABBPP); na 2ª figura temos 1 carro pintado com a cor azul, um carro pintado com a cor branca e 3 carros pintados com a cor preta (ABPPP); na 3ª figura temos 1 carro pintado com a cor azul e 4 carros pintados com a cor branca (ABBBB); na 4ª figura os 5 carros são pintados com a cor preta (PPPPP). Logo, pela proposição 3.6, o número de funções não decrescentes de K em C é $\binom{5+3-1}{5}$ $=\binom{7}{5} =\binom{7}{2} = \dfrac{7 \times 6}{2!} = 21$, que equivale a 21 modos de pintar 5 carros iguais com três cores distintas.

**Alternativa b)**

**Solução 1:** Como na alternativa a) suponhamos, sem perda de generalidade, que as cores sejam Azul, Branca e Preta, nessa ordem.Como os carros são iguais se mudarmos a ordem entre qualquer configuração, que representa uma possível solução,não fará nenhuma diferença. Então considere que três carros foram pintados cada um com uma cor diferente.Logo restam 2 carros que podem ser pintados cada um com uma única cor dentre 3 cores disponíveis, o que equivale ao cálculo das permutações com repetição da sequência de símbolos + I + I, onde os "I I" representam os 2 carros iguais e os sinais de "+" representam os 2 separadores, um a menos em relação as cores (que são 3). Esta representação significa que a quantidade de "I" a esquerda do 1º sinal "+" é a quantidade de carros pintados com a cor Azul, a quantidade de "I" a direita do 1º sinal "+" é a quantidade de carros pintados com a cor branca e a quantidade de "I" a direta do 2º sinal "+" é a quantidade de carros pintados com a cor preta. Logo a solução é $P_{2+2}^{2,2} = P_4^{2,2} = \dfrac{4!}{2! \times 2!} = 6$ modos. Note que, cada solução da sequência de símbolos "+ I + I" será adicionada a sequência ABP, que indica que três carros foram pintados cada um com uma única cor. Visto desta forma, algumas soluções possíveis são: I + I + representa a sequência AB indicando que um carro é pintado de azul e o outro é pintado de branco, resultando na sequência AABBP; + I + I representa a sequência BP indicando que um carro é pintado de branco e o outro é pintado de preto, resultando na sequência ABBPP; + I I + representa a sequência BB indicando que dois carros são pintados de branco, resultando na sequência ABBBP e + + I I representa a sequência PP indicando que dois carros são pintados de preto, resultando na sequência ABPPP.

**Solução 2:** Chamando de $x_a = x'_a + 1$ o número de carros pintados com a cor Azul, $x_b = x'_b + 1$ o número de carros pintados com a cor Branca e $x_p = x'_p + 1$ o número de carros pintados com a cor Preta a solução do problema é equivalente ao número de soluções inteiras não negativas da equação $x'_a + 1 + x'_b + 1 + x'_p + 1 = 5$ equivalente a $x'_a + x'_b + x'_p = 2$. E, este número de soluções inteiras não negativas desta equação é igual ao numero de combinações completas de 3 elementos (3 cores) tomados 2 a 2 (2 carros, pois os outros 3 estão pintados com uma cor de cada tipo) que é igual a $CR_{3,2} = C_{3-1+2,2} = C_{4,2} = \dfrac{4!}{2! \times 2!} = 6$ modos.

Capítulo 4

# RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS SELECIONADOS

**Problema 4.1.** *(OBMEP* 2014*) O número* 2014 *tem quatro algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles* 0*. Quantos números possuem exatamente essas características?*

**Solução 1:** Temos as etapas a seguir para solucionar este problema.

- **1ª Etapa:** Há 3 possibilidades para a posição do 0, pois ele pode está na ordem das centenas, dezenas ou unidades;
- **2ª Etapa:** 5 possibilidades para a escolha de um algarismo ímpar (pois pode ser 1,3,5,7 ou 9);
- **3ª Etapa:** 3 possibilidades para a escolha de sua posição, as três posições não ocupadas pelo zero;
- **4ª Etapa:** 4 possibilidades para escolher o 1º algarismo par e;
- **5ª Etapa:** 3 possibilidades para escolher o 2º algarismo par, para ocupar as duas posições restantes.

Logo, pelo PFC, temos exatamente $3 \times 5 \times 3 \times 4 \times 3 = 540$ números. Considere a tabela a seguir.

Tabela 4.1: O número de quatro algarismos, um ímpar e três pares, sendo um deles o 0.

| **Etapas** | **Possibilidades por etapa** | **Total de possibilidades** |
|---|---|---|
| **1ª Etapa:** escolhas para a posição do zero | 3 | |
| **2ª Etapa:** nº de escolhas de um algarismo ímpar | 5 | |
| **3ª Etapa:** nº de possibilidades para a posição do algarismo ímpar | 3 | $3 \times 5 \times 3 \times 4 \times 3 = 540$ |
| **4ª Etapa:** nº de escolhas do 1º algarismo par | 4 | |
| **5ª Etapa:** nº de escolhas do 2º algarismo par | 3 | |

**Solução 2:** Há 3 possibilidades para a posição do zero, pois não pode ser a ordem dos milhares, 5 possibilidades para a escolha de um algarismo ímpar e $4 \times 3$ possibilidades para escolher os dois algarismos pares. Logo, pelo PFC temos $3 \times 5 \times 4 \times 3 = 180$ números. Mas como os conjuntos de números pares e ímpares são distintos e disjuntos, exceto o zero cada um destes 180 números possui algarismos pares e ímpares não ordenados. Assim é preciso ordená-los já que os números também se diferenciam pela ordem. E sua ordenação é igual a $P_3^{2,1} = \dfrac{3!}{2! \times 1!} = 3$. Portanto, a quantidade de números procurada é igual a $180 \times 3 = 540$ números.

**Problema 4.2.** *(Profmat - MA*12 2012*) Num porta-CDs, cabem* 10 *CDs colocados um sobre o outro, formando uma pilha vertical. Tenho* 3 *CDs de MPB,* 5 *de rock e* 2 *de música clássica.*

*a) De quantos modos diferentes posso empilhá-los de modo que todos os CDs de rock fiquem juntos?*

*b) De quantos modos posso escolher* 4 *CDs para levar em uma viagem, de modo que eu leve pelo menos um CD de cada tipo de música?*

### Alternativa a)

**Solução:** Vamos descrever as posições dos CDs atribuindo números de 1 a 10 a suas posições, contando de baixo para cima conforme as etapas a seguir.

- **1ª Etapa:** Se todos os 5 CDs de rock ficam juntos, o primeiro CD pode ficar nas posições de 1 a 6 $(10 - 5 + 1 = 6)$, portanto são 6 escolhas para a posição do bloco de CDs de rock;

- **2ª Etapa:** os 5 CDs de rock podem ser arrumados de $5! = 120$ maneiras dentro do bloco;

- **3ª Etapa:** as posições restantes são 5 e os demais CDs também podem ser ordenados de $5! = 120$ maneiras nessas posições restantes (não importa que o bloco de CDs de rock interrompa a sequência).

Portanto, pelo PFC são, $6 \times 120 \times 120 = 86400$ maneiras. Considere a tabela a seguir.

Tabela 4.2: Empilhamento de 10 CDs de modo que 5 CDs de rock fiquem juntos

| **Etapas** | **Possibilidades por etapa** | **Total de possibilidades** |
|---|---|---|
| **1ª Etapa:** nº escolhas para a posição do bloco de CDs de rock | $10 - 5 + 1 = 6$ | $6 \times 120 \times 120 = 86400$ |
| **2ª Etapa:** nº de permutações dos 5 CDs de rock dentro do bloco | $5! = 120$ | |
| **3ª Etapa:** nº de permutações dos demais CDs nas posições restantes | $5! = 120$ | |

**Alternativa b)**

**Solução:** Como são 4 CDs e apenas 3 gêneros musicais diferentes então dos 4 CDs, dois são do mesmo gênero e os outros dois são dos outros dois gêneros restantes cada um.

**1º Caso:** Se os dois de gênero repetido forem de MPB então temos:

- **1ª Etapa:** $\binom{3}{2} = 3$ escolhas para eles;

- **2ª Etapa:** para cada uma destas escolhas, restam 5 escolhas para o CD de rock e;

- **3ª Etapa:** 2 escolhas para o CD de música clássica, portanto, são $3 \times 5 \times 2 = 30$ maneiras para se ter dois CDs de MPB e um de cada dos outros dois.

**2ª Caso:** Se os dois de gênero repetido forem de rock, temos as seguintes etapas:

- Há $\binom{5}{2} = 10$ escolhas para os dois CDs de rock;

- 3 escolhas para o CD de MPB e;

- 2 escolhas para o CD de música clássica. Logo, pelo PFC temos perfazendo $10 \times 3 \times 2 = 60$ possibilidades com dois CDs de rock e um de cada dos outros dois.

**3ª Caso:** Finalmente, se os dois CDs de gênero repetido forem de música clássica, então:

- **1ª Etapa:** Temos 1 possibilidade (são todos os disponíveis para esse gênero);

- **2ª Etapa:** 3 escolhas para o CD de MPB e;

- **3ª Etapa:** 5 escolhas para o CD de rock, portanto, temos $1 \times 3 \times 5 = 15$ possibilidades para se ter dois CDs de música clássica e um de cada dos outros dois.

Logo, pelo PAC temos $60 + 30 + 15 = 105$ possibilidades. Considere a tabela a seguir.

Tabela 4.3: Escolha de 4 CDs entre 3 repertórios distintos

| **Nº de casos** | **1º Caso** | | | **2º Caso** | | | **3º Caso** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de etapas por caso | 1ª | 2ª | 3ª | 1ª | 2ª | 3ª | 1ª | 2ª | 3ª |
| Possibilidades por etapa | $\binom{3}{2} = 3$ | 2 | 5 | $\binom{5}{2} = 10$ | 2 | 3 | 1 | 3 | 5 |
| Possibilidades por caso | $3 \times 2 \times 5 = 30$ | | | $10 \times 2 \times 3 = 60$ | | | $1 \times 3 \times 5 = 15$ | | |
| Total de possibilidades $= 30 + 60 + 15 = 105$ | | | | | | | | | |

**Problema 4.3.** *(Adaptado PAPMEM Janeiro / 2015) Sejam* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

*a) Quantas são as funções estritamente crescentes de $A$ em $B$ tais que $f(3) = 4$?*

*b) Quantas são as funções sobrejetivas de $B$ em $A$?*

**Alternativa a)**

**Solução:** A restrição de $f$ a $\{1, 2\}$ deve ser uma função estritamente crescente de $\{1, 2\}$ em $\{1, 2, 3\}$, enquanto a restrição de $f$ a $\{4, 5, 6\}$ deve ser uma função estritamente crescente de $\{4, 5, 6\}$ em $\{5, 6, 7, 8\}$.

- **1ª Etapa:** Para formar tais funções crescentes basta escolher suas imagens, o que pode ser feito de $\binom{3}{2} = 3$ e;

- **2ª Etapa:** $\binom{4}{3} = 4$ modos, respectivamente.

Note que, para cada uma das 3 possíveis funções estritamente crescente de $\{1, 2\}$ em $\{1, 2, 3\}$ há 4 possíveis funções estritamente crescente de $\{4, 5, 6\}$ em $\{5, 6, 7, 8\}$. Logo, pelo PFC há

$3 \times 4 = 12$ funções estritamente crescentes satisfazendo as condições dadas. Considere a tabela a seguir.

Tabela 4.4: Números de funções estritamente crescente de A em B

| **Etapas** | **1ª Etapa** | **2ª Etapa** |
|---|---|---|
| Escolha das imagens | $\binom{3}{2} = 3$ | $\binom{4}{3} = 4$ |
| Total de funções estritamente crescentes | $3 \times 4 = 12$ | |

**Alternativa b)**

**Solução 1:** Como já visto em exemplos anteriores, uma maneira de resolver este problema e dividindo-o em casos escrevendo o 8 como uma soma de números inteiros positivos não ordenados, ou seja, $8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2$, indicando que para formar uma função sobrejetiva de B em A temos dois casos a considerar como veremos a seguir.

**1º Caso:** indica que um valor da imagem deve ser usado três vezes e os demais uma vez cada um. Temos as seguintes etapas para este caso:

- **1ª Etapa:** O valor a ser repetido pode ser escolhido de 6 modos (pois pode ser qualquer um dos 6 elementos do contradomínio) e;
- **2ª Etapa:** os valores que o usarão como imagem de pode ser escolhido de $\binom{8}{3} = 56$ modos;
- **3ª Etapa:** sobram 5 valores em cada um dos conjuntos, que devem formar uma correspondência biunívoca (uma bijeção), o que pode ser feito de $5! = 120$ modos.

Logo, pelo PFC temos, $6 \times 56 \times 120 = 40320$ funções sobrejetivas de B em A deste tipo.

**2º Caso:** indica que dois valores da imagem deve ser usado duas vezes cada um e os demais apenas uma vez cada. Temos as seguintes etapas para este caso:

- **1ª Etapa:** Os dois valores a serem repetidos podem ser escolhidos de $\binom{6}{2} = 15$ modos e;
- **2ª Etapa:** para o 1º valor escolhido, os dois valores que o usarão como imagem de pode ser escolhido de $\binom{8}{2} = 28$ modos e;
- **3ª Etapa:** para o 2º valor escolhido há $\binom{6}{2} = 15$ modos;

- **4ª Etapa:** sobram 4 valores em cada um dos conjuntos, que devem formar uma correspondência biunívoca, o que pode ser feito de $4! = 24$ modos.

Logo, pelo PFC temos $15 \times 28 \times 15 \times 24 = 151200$ funções sobrejetivas de B em A deste tipo. Assim, pelo PAC, temos $40320 + 151200 = 191520$ funções sobrejetivas de B em A. Considere a tabela a seguir.

Tabela 4.5: Número de funções sobrejetivas

| **N° de casos** | **1º Caso** | | | **2º Caso** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de etapas por caso | 1ª | 2ª | 3ª | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
| Possibilidades por etapa | 6 | $\binom{8}{3} = 56$ | $5! = 120$ | $\binom{6}{2} = 15$ | $\binom{8}{2} = 28$ | $\binom{6}{2} = 15$ | $4! = 24$ |
| Possibilidades por caso | $6 \times 56 \times 120 = 40320$ | | | $15 \times 28 \times 15 \times 24 = 151200$ | | | |
| Total de possibilidades $= 40320 + 151200 = 191520$ | | | | | | | |

**Solução 2:** Outra maneira de resolver este problema é aplicar o resultado da proposição 3.5 para o calculo direto do número de funções sobrejetivas. Assim temos, $\sum_{k=0}^{6} (-1)^k \times \binom{6}{k} \times (6-k)^8 = 6^8 - \binom{6}{1} \times 5^8 + \binom{6}{2} \times 4^8 - \binom{6}{3} \times 3^8 + \binom{6}{4} \times 2^8 - \binom{6}{5} \times 1^8 =$

$$1679616 - 2343750 + 983040 - 131220 + 3840 - 6 = 191520 \text{ funções sobrejetivas.}$$

**Problema 4.4.** *Em um concurso há três candidatos e cinco examinadores, devendo cada examinador votar em um candidato.*

*a) De quantos modos os votos podem ser distribuídos?*

*b) De quantos modos os votos podem ser distribuídos de modo que cada candidato receba pelo menos um voto?*

### Alternativa a)

**Solução:** Sejam $A, B$ e $C$ os 3 candidatos e $E_1, E_2, E_3, E_4$ e $E_5$ os 5 examinadores. Algumas possíveis soluções estão representadas na tabela a seguir.

Tabela 4.6: Distribuição de votos

| **Candidatos** | **A** | **B** | **C** |
|---|---|---|---|
| Distribuição de votos | $(E_1, E_2)$ | $(E_3, E_4)$ | $E_5$ |
| | $(E_3, E_4)$ | $(E_1, E_2)$ | $E_5$ |
| | $(E_1, E_4, E_5)$ | $(E_2, E_3)$ | 0 |
| | 0 | 0 | $(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5)$ |

Observando as configurações da tabela 4.6 vemos que estamos diante de um agrupamento ordenado, podendo ser zero. Assim, temos as etapas seguintes para encontrar todas as soluções:

- **1ª Etapa:** Há 3 opções de escolha para o examinador $E_1$ votar;
- **2ª Etapa:** independentemente de quem o examinador $E_1$ votou, há 3 opções de escolha para o examinador $E_2$ votar;
- **3ª Etapa:** independentemente de quem os examinadores $E_1$ e $E_2$ votaram, há 3 opções de escolha para o examinador $E_3$ votar;
- **4ª Etapa:** independentemente de quem os examinadores $E_1, E_2$ e $E_3$ votaram, há 3 opções de escolha para o examinador $E_4$ votar;
- **5ª Etapa:** independentemente de quem os examinadores $E_1, E_2, E_3$ e $E_4$ votaram, há 3 opções de escolha para o examinador $E_5$ votar. Logo, pelo PFC temos $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$ modos.

**Alternativa b)**

**Solução:** Vamos escrever o 5 como uma soma de 3 números inteiros positivos *não ordenados* para saber quantos casos temos. Logo, $5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2$ e assim temos dois casos a considerar.

**1º Caso:** um candidato recebe 3 votos e os outros dois recebem um voto cada um. Para este caso temos as seguintes etapas:

- **1ª Etapa:** Há 3 maneiras de escolher o candidato que receberá três votos e;
- **2ª Etapa:** escolhido este candidato há $\binom{5}{3} = 10$ maneiras de escolher os examinadores que votarão nele;

- **3ª Etapa:** sobram dois candidatos e dois examinadores, então, temos uma correspondência biunívoca e, portanto há $2! = 2$ possibilidades nesta etapa. Logo, pelo PFC temos, $3 \times 10 \times 2 = 60$ modos.

**2º Caso:** um candidato recebe um voto e os outros dois candidatos recebem dois votos cada um. Para este caso temos as seguintes etapas:

- **1ª Etapa:** Há $\binom{3}{2} = 3$ maneiras de escolher os candidatos que receberão dois votos e;
- **2ª Etapa:** escolhido estes dois candidatos há $\binom{5}{2} = 10$ maneiras de escolher os dois examinadores que votarão em um deles e;
- **3ª Etapa:** $\binom{3}{2} = 3$ maneiras de escolher o outros dois examinadores que votarão no outro candidato;
- **4ª Etapa:** sobram um candidato e um examinador e, assim temos uma correspondência biunívoca, portanto temos 1 possibilidade nesta etapa (este último examinador vota no último candidato).

Logo, pelo PFC temos, $3 \times 10 \times 3 \times 1 = 90$ modos. Assim, pelo PAC, temos $60 + 90 = 150$ modos. Considere a tabela a seguir.

Tabela 4.7: Distribuição de 5 votos para 3 candidatos

| Nº de casos | **1º Caso** | | | **2º Caso** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de etapas por caso | 1ª | 2ª | 3ª | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
| Possibilidades por etapa | 3 | $\binom{5}{3} = 10$ | $2! = 2$ | $\binom{3}{2} = 3$ | $\binom{5}{2} = 10$ | $\binom{3}{2} = 3$ | 1 |
| Possibilidades por caso | $3 \times 10 \times 2 = 60$ | | | $3 \times 10 \times 3 \times 1 = 90$ | | | |
| Total de possibilidades $= 60 + 90 = 150$ | | | | | | | |

**Problema 4.5.** *De quantos modos é possível comprar* 4 *sabores de sorvete em uma sorveteria que os oferece em* 7 *sabores distintos?*

**Solução 1:** Suponhamos, sem perda de generalidade, que os 7 sabores de sorvete sejam açaí, baunilha, cupú, flocos, graviola, leite condensado e morango, nessa ordem. Assim, basta encontrar todas as sequências de I + I + I + I + + + = 4, onde os 4 palitos (I I I I), representam os 4 sabores de sorvetes, que serão escolhidos com ou sem repetição e, os 6 sinais de "mais" (+ + + + + +) representam os 6 separadores, que são um a menos em relação a quantidade de sabores distintos de sorvetes disponíveis (que são 7). Considere as soluções da tabela a seguir.

Tabela 4.8: Escolhas de 4 sorvetes, de sabores repetidos ou não, entre 7 sabores distintos disponíveis

| **Símbolos** | **Sequência** | **Solução** | **Representação na equação A + B + C + F + G + L + M = 4** |
|---|---|---|---|
| I + I + I + I + + + | ABCF | $(1,1,1,1,0,0,0)$ | A=1, B=1, C=1, F=1 e G=L=M=0 |
| + I + + I I + + I + | BFFL | $(0,1,0,2,0,1,0)$ | B=1, F=2, L=1 e A=C=G=M=0 |
| I I I+ + + + I + + | AAAG | $(3,0,0,0,1,0,0)$ | A=3, G=1 e B=C=F=L=M=0 |
| + + + + + + I I I I | MMMM | $(0,0,0,0,0,0,4)$ | M=4 e A=B=C=F=G=L=0 |

Pela Tabela 4.8, temos que I + I + I + I + + + representa a sequência ABCF e é uma solução da forma (1,1,1,1,0,0,0) indicando que foram escolhidos um sorvete de açaí, um de baunilha, um de cupú e um de flocos e nenhum dos outros sabores; + I + + I I + + I + representa a sequência BFFL e é uma solução da forma (0,1,0,2,0,1,0) indicando que foram escolhidos um sorvete de baunilha, dois sorvetes de flocos e um de leite condensado e nenhum dos demais sabores; I I I + + + + I + + representa a sequência AAAG e é uma solução da forma (3,0,0,0,1,0,0) indicando que foram escolhidos três sorvetes de açaí, um sorvete de graviola e um de leite condensado e nenhum dos demais sabores; + + + + + + I I I I representa a sequência MMMM e é uma solução da forma (0,0,0,0,0,0,4) indicando que foram escolhidos quatro sabores de sorvete de morango e nenhum dos demais sabores. Visto desta forma, todas as sequências procuradas é dada pela permutação 10 símbolos com repetição de 4 e 6 deles. Portanto, temos, $P_{10}^{4,6} = \dfrac{10!}{4! \times 6!} = 210$ maneiras.

**Solução 2:** Chamando de $A$ a quantidade de sorvetes do sabor de açaí,$B$ a quantidade de sorvetes do sabor de baunilha, $C$ a quantidade de sorvetes do sabor de cupú, $F$ a quantidade de sorvetes do sabor de flocos, $G$ a quantidade de sorvetes do sabor de graviola, $L$ a quantidade de sorvetes do sabor de leite condensado e $M$ a quantidade de sorvetes do sabor de morango, a solução do problema é equivalente ao número de soluções inteiras não negativas da equação $A + B + C + F + G + L + M = 4$, que é igual ao número de combinações completas de 7 elementos (7 sorvetes de sabores distintos) tomados 4 a 4 (escolha de 4 sorvetes com ou sem repetição dos sabores). Assim temos, $CR_{7,4} = \binom{7-1+4}{4}$ $= \binom{10}{4} = \dfrac{10!}{4! \times 6!} = 210$ modos. Note que este problema está associado ao *número de funções não decrescentes*, pois as configurações que representam possíveis soluções, são sequências não ordenadas que admitem repetição dos elementos da mesma.

**Problema 4.6.** *(Adaptado OBMEP* 2012*) Pedro vai participar de um programa de prêmios em que há uma urna contendo quatro bolas com valores diferentes e desconhecidos por ele, que serão sorteadas uma a uma até que ele decida ficar com uma delas. Ele observa o valor das duas primeiras bolas sorteadas e as descarta. Se o valor da terceira bola sorteada for maior que os das duas primeiras, ele ficará com ela e, caso contrário, ficará com a bola que restou. De quantas maneiras Pedro pode ficar com a bola de maior valor?*

**Solução:** Sem perda de generalidade, podemos numerar as quatro bolinhas de 1 a 4, do menor para o maior valor. Pedro fica com o prêmio de maior valor nos seguintes casos:
**1º Caso:** A bolinha 4 sai na 3ª retirada; neste caso, seu número é necessariamente maior que os das duas primeiras. Considere as etapas a seguir para este caso:

- **1ª Etapa:** Na 1ª retirada há 3 possibilidades para a saída da 1ª bolinha (pois pode ser a bolinha 1, 2 ou 3);

- **2ª Etapa:** na 2ª retirada há 2 possibilidades para a 2ª bolinha (pois tendo saído uma das bolinhas 1, 2 ou 3 na 1ª retirada sobram duas delas);

- **3ª Etapa:** na 3ª retirada sai a bola 4, ou seja, 1 possibilidade. Logo, pelo PFC, há $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilidades. São elas: $(1, 2, 4), (2, 1, 4), (1, 3, 4), (3, 1, 4), (2, 3, 4), (3, 2, 4)$.

**2º Caso:** A bolinha 4 sai na 4ª retirada, desde que a bolinha 3 saia em uma das duas primeiras retiradas (caso contrário, ou seja, se ela sair na 3ª retirada, Pedro ficará com ela, por seu número ser maior que o das duas primeiras). Considere as seguintes etapas para este caso:

- **1ª Etapa:** Há 2 possibilidades para a posição em que sai a bolinha 3 (1ª ou 2ª posição);

- **2ª Etapa:** tendo saído a bolinha 3 em uma das duas primeiras posições, há 2 possibilidades para a bolinha que sai na outra posição;

- **3ª Etapa:** 1 possibilidade para a bolinha que sai na 3ª posição e;

- **4ª Etapa:** 1 possibilidade para a bolinha que sai na 4ª retirada (que é a bolinha 4). Logo, pelo PFC, temos $2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4$ possibilidades. São elas: $(1, 3, 2, 4), (3, 1, 2, 4), (2, 3, 1, 4), (3, 2, 1, 4)$. Assim, pelo PAC temos $6 + 4 = 10$ maneiras de Pedro ficar com a bola de maior valor. Considere a tabela a seguir.

Tabela 4.9: A bola de maior valor

| **N° de casos** | **1º Caso:** a bolinha 4 sai na 3ª retirada | | | **2º Caso:** a bolinha 4 sai na 4ª retirada, desde que a bolinha 3 saia em uma das duas primeiras retiradas | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de etapas por caso | 1ª | 2ª | 3ª | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
| Possibilidades por etapa | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| Possibilidades por caso | $3 \times 2 \times 1 = 6$ | | | $2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4$ | | | |
| Total de possibilidades $= 6 + 4 = 10$ | | | | | | | |

**Problema 4.7.** *De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição três cartas.Quantas são as extrações nas quais nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama?*

**Solução:** Neste baralho há 13 cartas de copas (que é um naipe), 4 reis, sendo um rei de copas e, 4 damas sendo uma delas de copas. Assim, temos três casos a considerar.
**1º Caso:** 1ª carta é um rei de copas. Considere as seguintes etapas para este caso:

- **1ª Etapa:** Há 1 possibilidade para a extração da 1ª carta (o rei de copas);

- **2ª Etapa:** tendo saído a 1ª carta, há 3 possibilidades para a extração da 2ª carta (que são os outros 3 reis);

- **3ª Etapa:** tendo saído as duas cartas anteriores, há 46 possibilidades para a extração da 3ª carta (pois, já foram extraídas duas cartas e não pode ser nenhuma das 4 damas); Logo, pelo PFC temos $1 \times 3 \times 46 = 138$ extrações.

**2º Caso:** 1ª carta é uma dama de copas. Para este 2º caso temos as etapas a seguir.

- **1ª Etapa:** Há 1 possibilidade para a extração da 1ª carta (a dama de copas);

- **2ª Etapa:** tendo saído a 1ª carta, há 4 possibilidades para a extração da 2ª carta (que são os 4 reis);

- **3ª Etapa:** tendo saído as duas cartas anteriores, há 47 possibilidades para a extração da 3ª carta (pois, devem ser excluídas 5 cartas das 52: um rei e a dama de copas que saíram e as outras três damas que não podem sair). Logo, pelo PFC temos $1 \times 4 \times 47 = 188$ extrações.

**3º Caso:** 1ª carta não é um rei nem uma dama de copas. Para este 3º caso temos as seguintes etapas:

- **1ª Etapa:** Há 11 possibilidades para a extração da 1ª carta (pois das 13 cartas são excluídas o rei e a dama de copas);

- **2ª Etapa:** tendo saído a 1ª carta, há 4 possibilidades para a extração da 2ª carta (que são os 4 reis);

- **3ª Etapa:** tendo saído as duas cartas anteriores, há 46 possibilidades para a extração da 3ª carta (pois, devem ser excluídas 6 cartas das 52: as duas que saíram e as outras 4 damas que não podem sair). Logo, pelo PFC temos $11 \times 4 \times 46 = 2024$ extrações. Assim, pelo PAC, temos $138 + 188 + 2024 = 2350$ extrações. Considere a tabela a seguir.

Tabela 4.10: Problema dos baralhos

| **Nº de casos** | **1º Caso:** a 1ª carta é um rei de copas | | | **2º Caso:** a 1ª carta é uma dama de copas | | | **3º Caso:** a 1ª carta não é um rei nem uma dama de copas | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de etapas por caso | 1ª | 2ª | 2ª | 1ª | 2ª | 3ª | 1ª | 2ª | 3ª |
| Possibilidades por etapa | 1 | 3 | 46 | 1 | 4 | 47 | 11 | 4 | 46 |
| Possibilidades por caso | $1 \times 3 \times 46 = 138$ | | | $1 \times 4 \times 47 = 188$ | | | $11 \times 4 \times 46 = 2024$ | | |
| Total de possibilidades $=138 + 188 + 2024 = 2350$ | | | | | | | | | |

**Problema 4.8.** *Calcule o número de maneiras diferentes pelas quais podemos repartir* 7 *balas distintas entre* 3 *crianças.*

*a) de modo que cada criança receba pelo menos duas balas?*

*b) de modo que cada criança receba pelo menos uma bala?*

*c) Supondo que as balas sejam iguais, responda as alternativas a) e b).*

**Alternativa a)**

**Solução 1:** Como as balas são distintas, isto significa que colocando as crianças numa fila para receber suas balas, a ordem entre as balas que as crianças recebem é relevante. Assim, temos um único caso a considerar, representado pela soma $7 = 2 + 2 + 3$, indicando que duas crianças recebem duas balas cada uma e a outra recebe três balas. Assim, temos as seguintes etapas:

- **1ª Etapa:** Há $\binom{3}{2} = 3$ escolhas para as duas crianças que receberão duas balas cada uma e, escolhido estas duas crianças;
- **2ª Etapa:** $\binom{7}{2} = 21$ escolhas de duas balas para uma criança e;
- **3ª Etapa:** $\binom{5}{2} = 10$ escolhas de duas balas para a outra criança;
- **4ª etapa:** sobram três balas e uma criança e só há 1 possibilidade neste caso (dar as três balas a esta criança).Logo, pelo PFC há $3 \times 21 \times 10 \times 1 = 630$ maneiras.

**Solução 2:** Considere as etapas a seguir nesta solução.

- **1ª Etapa:** Há 3 escolhas para a criança que receberá 3 balas e, escolhido esta criança;
- **2ª Etapa:** $\binom{7}{3} = 35$ escolhas de três balas para ela;
- **3ª Etapa:** $\binom{4}{2} = 6$ escolhas de duas balas para uma criança e;
- **4ª Etapa:** 1 escolha de duas balas para a outra criança (que é dar as duas balas para esta outra criança). Assim, pelo PFC há $3 \times 35 \times 6 \times 1 = 630$ maneiras.

**Alternativa b)**

**Solução 1:** Vamos escrever o 7 (7 *balas*) *como uma soma de* 3 *números* (3 *crianças*) *inteiros positivos não ordenados* para saber em quantos casos devemos dividir o problema, isto é, $7 = 1 + 1 + 5 = 1 + 2 + 4 = 1 + 3 + 3 = 2 + 2 + 3$, o que mostra que temos quatro casos a considerar, como a seguir. Mas, o 4º caso já foi resolvido na alternativa a), então, apenas o somaremos com os demais casos após encontrar suas soluções.

**1º Caso:** duas crianças recebem uma bala cada uma e a outra recebe 5 balas. Vamos considerar as seguintes etapas para este caso:

- **1ª Etapa:** Há $\binom{3}{2} = 3$ escolhas de duas crianças que receberão uma bala cada uma e;

- **2ª Etapa:** escolhido estas duas crianças, há 7 escolhas de uma bala para uma dessas crianças e;

- **3ª Etapa:** 6 escolhas de uma bala para a outra criança;

- **4ª Etapa:** sobram 5 balas e uma criança, portanto temos 1 possibilidade (dar as 5 balas a esta criança). Logo, pelo PFC temos $3 \times 7 \times 6 \times 1 = 126$ maneiras neste caso.

**2º Caso:** a 1ª criança recebe 1 bala, a 2ª criança recebe 2 balas e a 3ª criança recebe 4 balas. Considere as etapas a seguir para este caso:

- **1ª Etapa:** Há 3 escolhas da criança que receberá uma bala e;

- **2ª Etapa:** 7 escolhas de uma bala para ela;

- **3ª Etapa:** 2 escolhas da criança que receberá duas balas e;

- **4ª Etapa:** $\binom{6}{2} = 15$ escolhas de duas balas para ela;

- **5ª Etapa:** sobram 4 balas e uma criança, portanto temos 1 possibilidade (dar as 4 balas a esta criança). Logo, pelo PFC temos $3 \times 7 \times 2 \times 15 \times 1 = 630$ possibilidades nesta etapa.

**3º Caso:** uma criança recebe 1 bala e as outras duas recebem 3 balas cada uma. Temos as seguintes etapas para este caso:

- **1ª Etapa:** Há 3 escolhas para a criança que receberá uma bala e;

- **2ª Etapa:** 7 escolhas de uma bala para ela;

- **3ª Etapa:** sobram duas crianças que receberão 3 balas cada uma, então, há $\binom{6}{3} = 20$ escolhas de três balas para uma criança e, feito esta escolha;

- **4ª Etapa:** sobram três balas e uma criança, portanto, temos 1 possibilidade (dar as três balas a esta criança).

Logo, pelo PFC, temos $3 \times 7 \times 20 \times 1 = 420$ maneiras. Portanto, pelo PAC, temos $126 + 630 + 420 + 630 = 1806$ maneiras. A tabela a seguir mostra o resumo desta solução.

Tabela 4.11: Distribuição de 7 balas distintas para 3 crianças

| Nº de casos | 1º Caso | | | | 2º Caso | | | | | 3º Caso | | | | 4º Caso | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de etapas por caso | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª | 5ª | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª |
| Possibilidades por etapa | 3 | 7 | 6 | 1 | 3 | 7 | 2 | 15 | 1 | 3 | 7 | 20 | 1 | 3 | 21 | 10 | 1 |
| Possibilidades por caso | $3 \times 7 \times 6 \times 1 = 126$ | | | | $3 \times 7 \times 2 \times 15 \times 1 = 630$ | | | | | $3 \times 7 \times 20 \times 1 = 420$ | | | | $3 \times 21 \times 10 \times 1 = 630$ | | | |
| Total de possibilidades $=126 + 630 + 420 + 630 = 1806$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Solução 2:** Usando o resultado da proposição 3.5, temos, que neste caso consiste em calcular o total de possibilidades, sem restrições, em que pode haver crianças sem balas, e em seguida subtrai deste o número de possibilidades em que há crianças sem receber bala(s). Assim, temos $\sum_{k=0}^{3}(-1)^k \times \binom{3}{k} \times (3-k)^7 = 3^7 - \binom{3}{1} \times 2^7 + \binom{3}{2} \times 1^7 = 2187 - 384 + 3 = 1806$ maneiras. Note que as alternativas a) e b) deste problema, obedecendo as restrições, estão associadas ao *número de funções sobrejetivas.*

**Alternativa c)**

Agora vamos resolver a alternativa a) de duas maneiras diferentes.

**Solução 1:** Como as 7 balas são iguais, a diferença entre as configurações é apenas a quantidade de balas que cada criança recebe e não a ordem entre elas. Nesta alternativa queremos que cada criança receba pelo duas uma bala. Sem perda de generalidade,considere as crianças André, Bruno, e Carlos, nessa ordem, para distribuição das balas iguais. Assim para garantirmos que cada criança receba pelos menos duas balas, basta dar duas balas a cada criança e em seguida calcular o número de maneiras de distribuir 1 bala para três crianças, que são 3 maneiras (pode ser dada a André, Bruno ou Carlos). São elas: (2,2,3), (2,3,2),(3,2,2).

**Solução 2:** Dado $A = A' + 2$, $B = B' + 2$ e $C = C' + 2$, a solução deste problema é dada pelo número de soluções inteiras e não negativas da equação $A' + 2 + B' + 2 + C' + 2 = 7$ que equivale a $A' + B' + C' = 1$. Mas, o número de soluções inteiras e não negativas desta equação é igual ao número de combinações completas de 3 elementos tomados 1 a 1. Portanto temos $CR_{3,1} = \binom{3+1-1}{1} = \binom{3}{1} = 3$ maneiras.

Agora vamos resolver a alternativa b), também de duas maneiras diferentes.

**Solução 1:** Como as 7 balas são iguais, a diferença entre as configurações é apenas a quantidade de balas que cada criança recebe e não a ordem entre elas, como no item a). Assim, queremos que cada criança receba pelo menos uma bala. Sem perda de generalidade,considere as crianças André, Bruno, e Carlos, nessa ordem, para distribuição das balas iguais. Assim, dada a sequência de símbolos I I + I I I + I I = 7, onde os 7 palitos (I I I I I I I), representam as 7 balas iguais e os 2 sinais de "mais" (+ +) representam os 2 separadores, que são um a menos em relação a quantidade crianças (que são 3), basta encontrar o número de maneiras de colocarmos os 2 separadores entre os 7 palitos. Mas, entre os 7 palitos há apenas 6 espaços. Portanto, temos $\binom{6}{2}$ = 15 maneiras. Considere algumas soluções na tabela a seguir.

Tabela 4.12: Distribuição de 7 balas iguais para 3 crianças

| **Símbolos** | **Sequência** | **Solução** | **Representação na equação A + B + C = 7** |
|---|---|---|---|
| I I + I I + I I I | AABBCCC | $(2,2,3)$ | A=2, B=2, C=3 |
| I I + I I I + I I | AABBBCC | $(2,3,2)$ | A=2, B=3, C=2 |
| I + I I + I I I I | ABBCCCC | $(1,2,4)$ | A=1, B=2, C=4 |
| I I I I I + I + I | AAAAABC | $(5,1,1)$ | A=5, B=1, C=1 |

Pela tabela 4.12 temos que I I + I I + I I I representa a sequência AABBCCC e é uma solução da forma (2,2,3) indicando que André e Bruno recebem 2 balas cada um e Carlos recebe 3 balas; I I + I I I + I I representa a sequência AABBBCC e é uma solução da forma (2,3,2) indicando que André e Carlos recebem 2 balas cada um e Bruno recebe 3 balas; I + I I + I I I I representa a sequência ABBCCCC e é uma solução da forma (1,2,4) indicando que André recebe 1 bala, Bruno recebe 2 balas e Carlos recebe 4 balas; I I I I I + I + I representa a sequência AAAAABC e é uma solução da forma (5,1,1) indicando que André recebe 5 balas e, Bruno e Carlos recebem 1 bala cada um. Note que as soluções são sequências de letras *não ordenadas* que admitem repetição, portanto, estão associadas ao *número de funções não decrescentes*.

**Solução 2:** Sejam as crianças André, Bruno e Carlos. Para garantir que cada criança receba pelo menos uma bala devemos dar uma bala a cada criança. Sobram 4 balas (iguais) que devem ser distribuídas a estas três crianças que equivale ao número de soluções inteiras e não negativas da equação $A + B + C = 4$, onde A é o número de bala(s) dada a André, B é o número de bala(s) dada a Bruno e C é o número de bala(s) dada a Carlos. Mas, o número de soluções inteiras e não negativas desta equação é por sua vez igual ao número de combinações completas de 3 elementos (3 crianças) tomados 4 a 4 (4 balas a serem distribuídas). Assim, temos $CR_{3,4} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$ maneiras.

**Problema 4.9.** *(Adaptado Portal da Matemática) Um supermercado vende biscoitos com recheio de diversos sabores. Em uma promoção era possível comprar três pacotes de biscoitos recheados com desconto, desde que estes recheios fossem dos sabores de brigadeiro, chocolate, flocos ou morango, repetidos ou não. De quantos modos distintos, um cliente que comprar três pacotes de biscoitos da promoção poderá escolher os sabores do recheio?*

**Solução 1:** Colocando os sabores do recheio, brigadeiro, chocolate, flocos e morango, nessa ordem, basta encontrar todas as sequências de, I + I + I + = 3, onde os 3 palitos (I I I), representam os 3 sabores do recheio que serão escolhidos, com ou sem repetição e, os 3 sinais de "mais" (+ + +) representam os 3 separadores, que são um a menos em relação a quantidade de sabores de recheio distintos disponíveis (que são 4). Assim, basta encontrar todas as permutações 6 símbolos com repetição de 3 palitos e 3 sinais de "mais", portanto temos, $P_6^{3,3} = 20$ maneiras. Considere algumas soluções na tabela a seguir.

Tabela 4.13: Escolhas de três entre quatro biscoitos recheados com ou sem repetição

| **Símbolos** | **Sequência** | **Solução** | **Representação na equação B + C + F + M = 3** |
|---|---|---|---|
| I + I + I + | BCF | $(1,1,1,0)$ | B=1, C=1, F=1 e M=0 |
| + I I + + I | CCM | $(0,2,0,1)$ | B=0, C=2, F=0 e M=1 |
| I + + I I + | BFF | $(1,0,2,0)$ | B=1, C=0, F=2 e M=0 |
| + + + I I I | MMM | $(0,0,0,3)$ | B=0, C=0, F=0 e M=3 |

Pela Tabela 4.13, temos que I + I + I + é uma solução da forma (1,1,1,0) que representa a sequência BCF indicando que foram escolhidos um biscoito com recheio de brigadeiro, um biscoito com recheio de chocolate, um biscoito com recheio de flocos e nenhum biscoito de morango; + I I + + I é uma solução da forma (0,2,0,1) que representa a sequência CCM indicando que foram escolhidos dois biscoitos com recheio de chocolate e um biscoito com recheio de morango e nenhum dos biscoitos com recheio de brigadeiro e flocos; I + + I I + é uma solução da forma (1,0,2,0) que representa a sequência BFF indicando que foram escolhidos um biscoito com recheio de brigadeiro e dois biscoitos com recheio de flocos e nenhum dos biscoitos com recheio de chocolate e morango; + + + I I I é uma solução da forma (0,0,0,3) que representa a sequência MMM indicando que foram escolhidos três biscoitos com recheio de morango e nenhum dos biscoitos com recheio de brigadeiro, chocolate e flocos. Note que as soluções são sequências de letras *não ordenadas* que admitem repetição, portanto, estão associadas ao *número de funções não decrescentes.*

**Solução 2:** Chamando de $B$ a quantidade de biscoitos com recheio de brigadeiro, $C$ a quantidade de biscoitos com recheio de chocolate , $F$ a quantidade de biscoitos com recheio de flocos e $M$ a quantidade de biscoitos com recheio de morango, a solução do problema é equivalente ao número de soluções inteiras não negativas da equação $B+C+F+M=3$, que por sua vez, equivale ao número de combinações completas de 4 elementos (4 sabores distintos de recheio disponíveis) tomados 3 a 3 (escolha de 3 biscoitos com ou sem repetição de sabores do recheio). Assim temos, $CR_{4,3} = \binom{4-1+3}{3} = \binom{6}{3} = \dfrac{6!}{3! \times 3!} = 20$ maneiras.

**Problema 4.10.** *(Adaptado Profmat - MA*12 2011*) Os professores de seis disciplinas devem escolher um dia, de segunda a sexta, de uma única semana para a realização da prova de sua disciplina. Suponha que cada professor escolha o seu dia de prova ao acaso, sem combinar com os demais professores.*
*a) De quantas maneiras diferentes pode ocorrer a realização das provas nesta semana?*
*b) De quantas maneiras diferentes as provas podem ser feitas em todos os dias da semana?*

**Alternativa a)**
**Solução:** Sejam as disciplinas, biologia, física, geografia, matemática, português e química. Considere as etapas a seguir para encontrarmos a solução:

- **1ª Etapa:** Há 5 escolhas para o dia da prova de biologia;
- **2ª tapa:** tendo escolhido o dia de realização da prova de biologia, há 5 escolhas para o dia de realização da prova de física;
- **3ª Etapa:** tendo escolhido o dia de realização das provas de biologia e de física, há 5 escolhas para o dia de realização da prova de geografia;
- **4ª Etapa:** tendo escolhido o dia de realização das provas de biologia, física e de geografia, há 5 escolhas para o dia de realização da prova de matemática;
- **5ª Etapa:** tendo escolhido o dia de realização das provas de biologia, física, geografia e de matemática, há 5 escolhas para o dia de realização da prova de português;
- **6ª Etapa:** tendo escolhido o dia de realização das provas de biologia, física, geografia, matemática e de português, há 5 escolhas para o dia de realização da prova de química.

Logo, pelo PFC, há $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6 = 15625$ maneiras.

**Alternativa b)**

**Solução 1:** Vamos escrever o 6 (6 *disciplinas*) *como uma soma de* 5 (5 *dias*) *números inteiros positivos não ordenados.* Logo, 6=1+1+1+1+2 indicando que duas disciplinas devem ter o mesmo dia de prova e as demais devem ser distribuídas nos demais dias. Asssim, temos as seguintes etapas:

- **1ª Etapa:** Há 5 maneiras de escolher o dia para realização da prova de duas disciplinas e;
- **2ª Etapa:** $\binom{6}{2} = 15$ maneiras de escolher estas duas disciplinas para este dia;
- **3ª Etapa:** sobram quatro disciplinas e quatro dias e, assim temos uma correspondência biunívoca (uma bijeção), portanto há $4! = 24$ possibilidades. Logo, pelo PFC há $5 \times 15 \times 24 = 1800$ maneiras. Considere a tabela a seguir.

Tabela 4.14: Distribuição de 6 disciplinas em 5 dias

| **Etapas** | **Possibilidades por etapa** | **Total de possibilidades** |
|---|---|---|
| **1ª Etapa:** escolha do dia para a prova de duas disciplinas | 5 | $5 \times 15 \times 24 = 1800$ |
| **2ª Etapa:** escolha das duas disciplinas | $\binom{6}{2} = 15$ | |
| **3ª Etapa:** distribuição de quatro disciplinas em quatro dias | $4! = 24$ | |

**Solução 2:** Contamos todas as possibilidades como feito na alternativa a) e retiramos destas, as possibilidades em que há dias sem a realização de prova(s). Isso pode ser feito usando o resultado da proposição 3.5. Logo, temos $\sum_{k=0}^{5}(-1)^k \times \binom{5}{k} \times (5-k)^6 = 5^6 - \binom{5}{1} \times 4^6 + \binom{5}{2} \times 3^6 - \binom{5}{3} \times 2^6 + \binom{5}{4} \times 1^6 = 15625 - 20480 + 7290 - 640 + 5 = 1800$ maneiras.

**Problema 4.11.** *(Profmat MA*12 2015*) De quantos modos é possível dividir* 15 *atletas em três times de* 5 *atletas, denominados Esporte, Tupi e Minas?*

**Solução 1:** Considere as seguintes etapas para encontrarmos a solução:

- **1ª Etapa:** Há $\binom{15}{5} = 3003$ escolhas possíveis para formar o time do Esporte;
- **2ª Etapa:** e feito a escolha na etapa anterior, há $\binom{10}{5} = 252$ escolhas possíveis para formar o time do Tupi;
- **3ª Etapa:** e feito estas duas escolhas anteriores, restam 5 atletas, portanto 1 escolha para formar o time do Minas. Logo, pelo PFC, há $\binom{15}{5} \times \binom{10}{5} \times 1 = 3003 \times 252 \times 1 = 756756$ maneiras. Considere a tabela a seguir.

Tabela 4.15: Divisão de 15 atletas em 3 times definidos

| **Etapas** | **Possibilidades por etapa** | **Total de possibilidades** |
|---|---|---|
| **1ª Etapa:** escolhas para formar o time do Esporte | $\binom{15}{5} = 3003$ | $3003 \times 252 \times 1 = 756756$ |
| **2ª Etapa:** escolhas para formar o time do Tupi | $\binom{10}{5} = 252$ | |
| **3ª Etapa:** escolhas para formar o time do Minas | 1 | |

**Solução 2:** Queremos dividir 15 atletas em 3 grupos *ordenados* de 5 atletas. Mas, como a ordem entre os atletas dentro de cada grupo é irrelevante, basta ordenar os 15 atletas e dividir pelas permutações dos 5 atletas em cada grupo. Assim, temos, $\frac{15!}{5! \times 5! \times 5!} = 756756$ maneiras.

**Problema 4.12.** *(Profmat MA*12 2015*) De quantos modos é possível dividir* 15 *atletas em três times de* 5 *atletas?*

**Solução 1:** Queremos 3 grupos não ordenados de 5 atletas. Como na questão anterior encontramos 756756 maneiras para 3 grupos ordenados de 5 atletas, basta dividir este valor por $3! = 6$ para desfazer as ordenações entre os grupos, obtendo o valor desejado. Portanto, temos, $\frac{756756}{6} = 126126$ maneiras. Considere a tabela a seguir.

Tabela 4.16: Divisão de 15 atletas em 3 times não definidos

| **Etapas** | **Possibilidades por etapa** | **Total de possibilidades** |
|---|---|---|
| **1ª Etapa:** escolhas para formar o 1º time | $\binom{15}{5} = 3003$ | $\dfrac{3003 \times 252 \times 1}{3!} = 126126$ |
| **2ª Etapa:** escolhas para formar o 2º time | $\binom{10}{5} = 252$ | |
| **3ª Etapa:** escolhas para formar o 3º time | 1 | |

**Solução 2:** Queremos dividir 15 atletas em 3 grupos *não ordenados* de 5 atletas e, como a ordem entre os atletas dentro de cada grupo é irrelevante, então basta ordenar os 15 atletas e dividir o resultado pelas permutações dos três grupos e pelas permutações dos 5 atletas em cada grupo . Assim, temos $\dfrac{15!}{3! \times 5! \times 5! \times 5!} = 126126$ maneiras.

**Problema 4.13.** *(Profmat MA*12 2015*) De quantos modos é possível dividir* 20 *objetos em* 4 *grupos de* 3 *e* 2 *grupos de* 4*?*

**Solução 1:** Queremos 6 grupos não ordenados de objetos, sendo 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4. Entretanto, não há risco de haver permutação de grupos com quantidades diferentes de objetos. Assim, vamos encontrar os 6 grupos ordenados e em seguida desfazer as ordenações dividindo o resultado por $4! = 24$ e $2! = 2$ que são as permutações dos grupos entre si que possuem quantidades iguais de objetos. Vamos encontrar a quantidade de grupos ordenados realizando as etapas:

- **1ª Etapa:** Há $\binom{20}{3} = 1140$ escolhas possíveis para formar o 1º grupo;
- **2ª Etapa:** feito a escolha na etapa anterior, há $\binom{17}{3} = 680$ escolhas possíveis para formar o 2º grupo;
- **3ª Etapa:** feito as duas escolhas anteriores, há $\binom{14}{3} = 364$ escolhas possíveis para formar o 3º grupo;
- **4ª Etapa:** feito as três escolhas anteriores, há $\binom{11}{3} = 165$ escolhas possíveis para formar o 4º grupo;
- **5ª etapa:** feito as quatro escolhas anteriores, há $\binom{8}{4} = 70$ escolhas possíveis para formar o 5º grupo;

- **6ª Etapa:** sobram 4 objetos e portanto há 1 escolha possível para formar o 6º grupo.

Logo, pelo PFC, há $\binom{20}{3} \times \binom{17}{3} \times \binom{14}{3} \times \binom{11}{3} \times \binom{8}{4} \times 1 = 3\,259\,095\,840\,000$ grupos ordenados. Assim, o resultado procurado é igual a, $\dfrac{3\,259\,095\,840\,000}{24 \times 2} = 67\,897\,830\,000$ maneiras. Considere a tabela a seguir.

Tabela 4.17: Divisão de 20 objetos em 4 grupos de 3 objetos e 2 grupos de 4 objetos

| **Etapas** | **Possibilidades por etapa** | **Total de possibilidades** |
|---|---|---|
| **1ª Etapa:** escolhas para formar o 1º grupo | 1140 | $\dfrac{1140 \times 680 \times 364 \times 165 \times 70 \times 1}{4! \times 2!} =$ 67 897 830 000 |
| **2ª Etapa:** escolhas para formar o 2º grupo | 680 | |
| **3ª Etapa:** escolhas para formar o 3º grupo | 364 | |
| **4ª Etapa:** escolhas para formar o 4º grupo | 165 | |
| **5ª Etapa:** escolhas para formar o 5º grupo | 70 | |
| **6ª Etapa:** escolhas para formar o 6º grupo | 1 | |

**Solução 2:** Queremos dividir 20 objetos em 6 grupos não ordenados, sendo 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4. Assim, a ordem entre os objetos dentro de cada grupo é irrelevante. Contudo, não há risco de haver permutação de grupos com quantidades diferentes de objetos, então basta ordenar os 20 objetos e dividir o resultado pelas permutações dos 4 grupos de 3 objetos, pelas permutações dos 2 grupos de 4 objetos e pelas permutações dos 3 e 4 objetos em cada grupo, respectivamente. Assim, temos $\dfrac{20!}{(3!)^4 \times (4!)^2 \times 4! \times 2!} = 67\,897\,830\,000$ maneiras.

Capítulo 5

# EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**Problema 5.1.** (Adaptado Portal da Matemática) Para ir de uma cidade A até a cidade B há 3 estradas diferentes e de B até C há duas estradas diferentes.

a) De quantas maneiras podemos ir de A até C passando por B? (Sugestão: problema 4.1)

b) De quantas maneiras podemos ir de A até C passando por B, depois voltar de C para A passando por B ? (Sugestão: problema 4.1)

c) De quantas maneiras podemos ir de A até C passando por B, depois voltar de C para A passando por B sem passar passar na volta pela mesma estrada da ida? (Sugestão: problema 4.1)

**Problema 5.2.** Em uma banca há 5 exemplares iguais da Veja, 6 exemplares iguais da Época e 4 exemplares iguais da Isto é. Quantas coleções não vazias de revistas dessa banca podem ser formadas? (Sugestão: problema 4.1)

**Problema 5.3.** (OBMEP 2012) Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados tem 2,3 e 4 lugares. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa? (Sugestão: alternativa a) do problema 4.2)

**Problema 5.4.** (Profmat - Exame de Acesso 2011) Uma equipe esportiva composta por 6 jogadoras está disputando uma partida de 2 tempos. No intervalo do primeiro para o segundo tempo podem ser feitas até 3 substituições e, para isto, o técnico dispõe de 4 jogadoras no banco. Quantas formações distintas podem iniciar o segundo tempo? (Sugestão: alternativa b) do problema 4.2)

**Problema 5.5.** (PAPMEM Janeiro / 2015) Há 10 pessoas para telefonar e apenas 3 cabines telefônicas. De quantas maneiras essas pessoas podem formar filas diante das cabines (admita a possibilidade de haver filas vazias). (Sugestão: problema 4.5)

**Problema 5.6.** Quantas são as solução inteiras e não negativas da equação x + y + z = 20 com $x \geq 2$, $y \geq 2$ e $z \geq 2$? (Sugestão: problema 4.5)

**Problema 5.7.** (Profmat MA12 2015) Dispondo de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma *linha* não podem receber a mesma cor? (Sugestão: problema 4.6)

**Problema 5.8.** (PAPMEM Janeiro / 2015) Uma industria fabrica 5 tipos de balas, que são vendidas em caixas de 20 balas, de um so tipo ou sortidas. Quantos tipos diferentes de caixa podem ser fabricadas? (Sugestão: alternativa c) do problema 4.8)

**Problema 5.9.** (Profmat - MA12 2013) Penélope quer distribuir 6 presentes entre seus sobrinhos Alfredo, Bruno Carlos e Daniel, de modo que cada um receba pelo menos um presente. Todos os presentes devem ser distribuídos.
a) Supondo que todos os presentes sejam iguais, de quantos modos ela pode distribuir os presentes? (Sugestão: alternativa c) do problema 4.8)
b) Resolva novamente o item a), supondo agora que todos os presentes sejam diferentes. (Sugestão: alternativa b) do problema 4.8)

**Problema 5.10.** (PAPMEM Janeiro / 2015) Em um torneio de tiro, oito alvos são dispostos em três colunas penduradas, sendo 3 alvos na 1ª coluna, 2 alvos na 2ª coluna e 3 alvos na terceira coluna. Cada competidor deve atirar nos alvos da seguinte forma: ele escolhe primeiro uma das três colunas e atira no alvo mais baixo que ele ainda não acertou. Em quantas ordens os oito alvos podem ser acertados? (Sugestão: problema 4.11)

Capítulo 6

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mostramos neste trabalho algumas técnicas alternativas para resolver problemas de contagem tendo em vista que, analise combinatória é um tema mais abrangente do que é apresentado nos livros didáticos do ensino básico. Assim, o que foi apresentado neste trabalho visa fornecer mais uma ferramenta que possa ser útil para atacar e resolver problemas de combinatória presentes nos livros didáticos do Ensino Básico, nas provas da OBMEP, nas provas do ENEM, entre outras.

Além disso, espera-se promover a reflexão do leitor (professores e alunos) diante de problemas de contagem tendo em vista o encorajamento dos mesmos para o planejamento e execução de estratégias que sejam bem sucedidas, de modo que ao resolver problemas combinatórios os mesmos possam extrair significados relevantes, úteis para aplicar em outros problemas. Neste contexto vislumbra-se a formação de sujeitos ativos e críticos que possam estabelecer relações e diferenças entre métodos de contagem, observando em que situação cada método deve ser aplicado, exibindo configurações do conjunto solução em cada problema resolvido com vistas ao reconhecimento do que está sendo contado. Contudo, após muitas experiências em resolver problemas de contagem, espera-se que professores e alunos sejam capazes de ataca-los e resolvê-los, aplicando mais de uma técnica e/ou método, explicando as etapas da resolução.

# Referências Bibliográficas


[1] PAPMEN - Julho de 2015 - Combinatória. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA. **Youtube**. 12 ago. 2015. 1h 11min 15s. Disponível em: `<https://www.youtube.com/watch?v=DJgvov6FWkY&list=PLo4jXE-LdDTSOn4yWtgwHmybU_jORinEP>`. Acesso em: 10 ago. de 2017.

[2] PAPMEN - Janeiro de 2014 - Combinatória I. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA.**Youtube**. 20 fev. 2014. 1h 11min 14s. Disponível em:`<https://www.youtube.com/watch?v=RNp6O-MOQRs>`. Acesso em: 20 set. de 2017.

[3] PAPMEN - Janeiro de 2015 - Combinatória I. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA. **Youtube**. 27 jan. 2015. 1h 12min 12s. Disponível em: `<https://www.youtube.com/watch?v=NOlp77ApXOA&t=17s>`. Acesso em: 31 ago. de 2017.

[4] PAPMEN - Janeiro de 2014 - Combinatória II. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA. **Youtube**. 20 fev. 2014. 1h 22min 29s. Disponível em: `<https://www.youtube.com/watch?v=STrd34Lc3Kk>`. Acesso em: 25 out. de 2017.

[5] PAPMEN - Janeiro de 2015 - Combinatória II. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA.**Youtube**. 29 jan. 2015. 1h 14min 53s. Disponível em: `<https://www.youtube.com/watch?v=YLP4CyNzugg&t=2695s>`. Acesso em: 19 dez. de 2017.

[6] MORGADO, A. C. O. **Coleção Professor de Matemática:** Análise Combinatória e Probabilidade. 10ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[7] MORGADO, A. C. O. **Coleção Profmat:** Matemática Discreta. 2ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.