



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Instituto de Exatas

Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

O princípio da dualidade na geometria de Galileu

Thafarel Rodrigues da Costa

BRASÍLIA

2018

Thafarel Rodrigues da Costa

O princípio da dualidade na geometria de Galileu

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de

Mestre

Orientador: Prof. Dr. Guy Grebot

Brasília
2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

RR696p Rodrigues da Costa, Thafarel
O princípio da dualidade na geometria de Galileu /
Thafarel Rodrigues da Costa; orientador Guy Grebot. --
Brasília, 2018.
94 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2018.

1. Geometria não euclidiana. 2. Princípio da dualidade.
3. Geometria de Galileu. 4. Ensino de geometria. 5. PCNEM.
I. Grebot, Guy, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O princípio da dualidade na geometria de Galileu

por

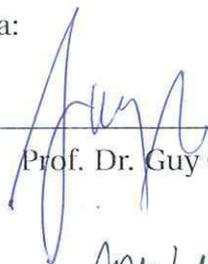
Thafarel Rodrigues da Costa [†]

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

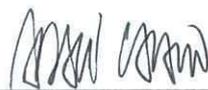
MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 19 de março de 2018.

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Guy Grebot - MAT/UnB - Orientador



Prof. Dr. Adail de Castro Cavalheiro - MAT/UnB - Membro



Prof. Dr. João Paulo dos Santos - MAT/UnB - Membro

[†]O autor foi bolsista do CAPES durante a elaboração deste trabalho.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha mãe Marinete, por ser o maior exemplo de determinação e honestidade que tenho; à minha esposa Ana Caroline, por todo carinho e apoio ao longo desse projeto.

Agradecimentos

À todos os professores que colaboraram com a minha formação ao longo de minha vida, em especial ao professor Guy Grebot por todo apoio, dedicação, paciência e orientação que me conduziram à conclusão deste trabalho.

Aos meus colegas de curso que compartilharam horas de estudos e dividiram momentos de felicidade e ansiedade ao longo desse projeto.

Aos meus familiares e amigos pelas palavras de apoio nos momentos de dificuldade.

À CAPES pelo apoio financeiro. À Universidade de Brasília onde tive a oportunidade de concluir minha graduação e também o PROFMAT.

Resumo

O estudo de geometrias não euclidianas no ensino médio tem por objetivo reforçar o estudo da geometria de Euclides além de apresentar aos alunos novas geometrias que também descrevem a realidade que nos cerca. Por meio de uma abordagem comparativa entre a geometria euclidiana e outros modelos geométricos é possível reforçar os conceitos estudados no plano euclidiano. Neste sentido, estudamos, do ponto de vista axiomático, a geometria plana associada ao princípio da relatividade de Galileu e mostramos que, nessa geometria, vale o princípio da dualidade. O plano cartesiano (plano de Galileu), com eixos associados as grandezas temporal e espacial, é um modelo da geometria de Galileu que nos permite estudar analiticamente objetos geométricos também estudados no plano euclidiano. Neste contexto foi desenvolvido um conjunto de atividades relativas às geometrias de Euclides e de Galileu para o público alvo de alunos do ensino médio com objetivo de ensinar geometria seguindo a proposta presente nos PCNEM.

Palavras-chave: Geometria não euclidiana. Princípio da Dualidade. Geometria de Galileu. Ensino de geometria. PCNEM.

Abstract

The study of non-Euclidean geometries in high school aims at reinforcing the study of Euclidean geometry in addition to presenting to the students new geometries which also describe the world that surrounds us. Through a comparative approach between Euclidean geometry and other geometric models, it is possible to reinforce the concepts studied in the Euclidean plane. In this sense, we study, from the axiomatic point of view, the plane geometry associated with Galileo's principle of relativity in which the principle of duality is shown to be valid. The coordinate plane (Galilean plane), with axes associated with temporal and spatial magnitudes, is a model of Galilean geometry that allows us to analytically examine geometric objects studied in the Euclidean plane. In this context, a set of activities related to the Euclidean and Galilean geometries was developed for the target audience of high school students with the objective of teaching geometry following the proposal found in the PCNEM.

Keywords: Non-Euclidean geometry. Principle of Duality. Galilean Geometry. Galilean Plane. Teaching geometry. PCNEM.

Sumário

Sumário	15
Lista de figuras	17
1 Introdução	19
2 A Geometria do princípio de Galileu	21
2.1 Axiomatização da geometria de Galileu	22
2.2 Alguns elementos e definições dessa geometria	26
2.2.1 Distância entre pontos	26
2.2.2 Reta	26
2.2.3 Ângulo entre retas e distância especial	27
3 Triângulos na geometria de Galileu	31
4 O princípio da dualidade	36
4.1 O princípio da dualidade na geometria de Galileu	36
4.2 Demonstração do princípio da dualidade na geometria de Galileu	42
5 Teoremas clássicos e a dualidade	50
5.1 O teorema de Menelaus.	50
5.1.1 Dual do teorema de Menelaus	53
5.2 O teorema de Ceva.	55
5.2.1 Dual do teorema de Ceva	60
5.3 O teorema de Desargues.	62
5.3.1 Dual do teorema de Desargues	66
5.4 O teorema de Pappus.	67
5.4.1 Dual do teorema de Pappus	69

6 Sugestões de atividades	71
6.1 Atividades	71
6.1.1 Distância na geometria de Galileu	71
6.1.2 Ângulo entre retas e equação da reta	72
6.1.3 Cônicas e a geometria de Galileu	75
6.1.4 O princípio da dualidade na geometria de Galileu	77
6.2 Sugestões de mediação das atividades propostas	80
6.2.1 Atividade 1	80
6.2.2 Atividade 2	81
6.2.3 Atividade 3	81
6.2.4 Atividade 4	82
6.2.5 Atividade 5	82
6.2.6 Atividade 6	83
6.2.7 Atividade 7	85
6.2.8 Atividade 8	86
6.2.9 Atividade 9	88
6.2.10 Atividade 10	88
6.2.11 Atividade 11	89
6.2.12 Desafio 1 e Desafio 2	89
Referências bibliográficas	93

Lista de figuras

2.1	Distância entre os pontos A e B.	26
2.2	Representação da reta AB.	27
2.3	Ângulo entre retas na geometria euclidiana.	28
2.4	Circunferência no plano de Galileu.	28
2.5	Ângulo entre as retas l_1 e l_2 na geometria de Galileu.	29
2.6	Distância especial entre os pontos A e B.	29
3.1	Triângulo no plano de Galileu.	31
3.2	Alturas do triângulo ABC do plano de Galileu.	33
4.1	Analogia entre pontos e retas na geometria euclidiana.	36
4.2	Pontos colineares e retas concorrentes na geometria euclidiana.	37
4.3	Magnitude do ângulo entre retas na geometria de Galileu.	38
4.4	Dualidade no triângulo isósceles.	40
4.5	Paralelogramo e coparalelogramo no plano de Galileu.	41
4.6	Lei do paralelogramo na geometria de Galileu.	43
4.7	(a) Doublets ordinários; (b) Doublets especiais.	44
4.8	(a) Lei do paralelogramo para vetores; (b) Lei do coparalelogramo para doublets.	45
4.9	Coordenadas ξ e η do doublet \bar{A}	47
5.1	Volta do teorema de Menelaus.	51
5.2	Ida do teorema de Menelaus.	52
5.3	Volta do dual do teorema de Menelaus.	54
5.4	Ida do dual do teorema de Menelaus.	55
5.5	O teorema de Ceva.	56
5.6	Decomposição do triângulo ABC.	56
5.7	Teorema de Ceva com AX , BY e CZ paralelas.	57

5.8	Recíproca do teorema de Ceva.	58
5.9	Dual do teorema de Ceva com pontos colineares.	60
5.10	Teorema dual de Ceva com pontos paralelos.	61
5.11	(a) Decomposição no $\triangle BCX$. (b) Decomposição no $\triangle BXA$	61
5.12	O teorema de Desargues.	62
5.13	Hipótese: X, Y e Z colineares; Tese: $AA' \parallel BB'$	63
5.14	Teorema de Desargues com $AA' \parallel BB' \parallel CC'$	66
5.15	Dualidade no teorema de Desargues.	67
5.16	Teorema de Pappus.	68
5.17	Dual do teorema de Pappus.	69
6.1	Retas no plano de Galileu.	72
6.2	Ângulo euclidiano.	73
6.3	Ângulo entre retas.	73
6.4	Ângulo e equação da reta.	74
6.5	Ângulos do triângulo.	75
6.6	Circunferência centrada em Q	76
6.7	Triângulo do plano de Galileu.	78
6.8	O teorema da bissetriz de um ângulo interno.	79
6.9	O Teorema de Pappus na geometria de Galileu.	80
6.10	Figura que não representa uma circunferência no plano de Galileu.	81
6.11	Parábola p com reta especial d como diretriz.	83
6.12	Parábola com reta ordinária d como diretriz.	84
6.13	Parábola com reta diretriz d paralela ao eixo Ox	84
6.14	(a) Reta focal ordinária, $2a=6$ e $2c=4$; (b) Reta focal especial, $2a=6$ e $2c=4$	85
6.15	(a) Reta focal ordinária, $2a = 2$ e $2c = 4$; (b) Reta focal especial, $2a = 2$ e $2c = 4$	87
6.16	Dualidade no teorema da bissetriz de um ângulo interno.	90

Capítulo 1

Introdução

Segundo os PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio)-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias [17], a abordagem tradicional do ensino de geometria, que se restringe ao cálculo de áreas e volumes de alguns sólidos, não é suficiente para explicar certos fenômenos da natureza e, por vezes, nem demandas cotidianas. Os PCNEM afirmam ainda que ensinar geometria no ensino médio deve possibilitar que dúvidas a respeito dessas demandas aflorem e possam ser discutidas e analisadas pelos alunos ([17], p.119). Nesse sentido, o estudo comparativo entre geometrias não euclidianas no ensino médio, pode estimular esses questionamentos. Segundo Kaleff (2009):

o estudo das geometrias não euclidianas traz grandes contribuições para a escola, pois possibilita uma visão da matemática como um conhecimento que pode ser contestado, por meio de discussões dos conceitos de verdade matemática e de espaço, já que historicamente o estudo das geometrias não euclidianas começou a partir da tentativa de se provar ou negar o 5º axioma de Euclides, conhecido também como postulado das paralelas. ([16], p. 4).

Parafraseando Franco e Delai (2010), o trabalho com geometrias não euclidianas pode ser conduzido em paralelo aos estudos da geometria de Euclides fazendo com que os alunos reconheçam as diferenças e semelhanças entre elas [19]. Por fim, segundo Berro (2008):

Não se exclui evidentemente as grandes vantagens que um professor teria de comparar as diferentes geometrias hoje estudadas a fim de que os alunos comecem a enxergar o universo com olhares distintos do que estão acostumados a fitar, bem como ter uma visão mais crítica do que se passa ao seu redor. ([18], p. 78).

Seguindo essas ideias, nessa dissertação foi desenvolvido um conjunto de atividades

que visam o estudo comparativo entre uma geometria não euclidiana e a geometria euclidiana plana com objetivo de reforçar os conceitos dessa última para alunos do ensino médio.

Para tal, estudamos, segundo uma abordagem axiomática, uma geometria não euclidiana, associada ao princípio da relatividade de Galileu (1564-1642 d.C) que admite o quinto axioma de Euclides, mas é não euclidiana pois possui maneira própria de medir distâncias [1]. Além disso, essa geometria admite como modelo o plano cartesiano com eixos Ox e Oy representando coordenadas temporais e espaciais, respectivamente, em que as transformações

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = vx + y + b, \end{cases}$$

formam seu grupo de isometrias. Além do mais, um aspecto fundamental desse trabalho consiste em estabelecer a validade do princípio da dualidade na geometria de Galileu e então estudá-lo sob a perspectiva de teoremas clássicos da geometria euclidiana.

A geometria associada ao princípio de Galileu se presta bem como ensino de geometria pois as peculiaridades das representações gráficas dos objetos geométricos no plano de Galileu desempenham um papel de "estranheza" para os alunos que é o ponto de partida para que os mesmos reconheçam a aprendizagem desses conceitos como significativa. O aluno que interpreta/projeta definições, propriedades e elementos do plano euclidiano no plano de Galileu mostra que possui competências essenciais ao estudo de geometria já que para transitar nessas duas geometrias é necessário o conhecimento dos conceitos estudados.

Essa dissertação está dividida em cinco capítulos tais que: no primeiro capítulo é apresentada a geometria de Galileu onde os termos físicos que a justificam foram citados de forma breve. Além disso, nesse capítulo é realizada a construção axiomática dessa geometria. No capítulo 2 foram explanados importantes resultados usados em demonstrações posteriores acerca dos triângulos nessa geometria. No capítulo 3 foi demonstrado que o princípio da dualidade é válido na geometria de Galileu. No capítulo 4, quatro grandes teoremas clássicos foram estudados assim como os seus teoremas duais. O último capítulo dessa dissertação conta com um grupo de atividades propostas para o estudo da geometria euclidiana a partir da geometria de Galileu. Esse capítulo é encerrado com algumas sugestões para auxiliar o professor na mediação dessas atividades ao público de alunos do ensino médio.

Capítulo 2

A Geometria do princípio de Galileu

De acordo com Klein (1849 - 1925), geometria é o estudo das propriedades invariantes das figuras, ou seja, propriedades que são preservadas por determinados grupos de transformações [1]. No caso da geometria euclidiana plana, estas transformações são dadas pelas isometrias [14]:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + a, \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b. \end{cases} \quad (2.1)$$

A geometria do princípio de Galileu, ou simplesmente, geometria de Galileu está baseada no princípio da relatividade de Galileu¹: *as leis básicas da física são idênticas em todos os sistemas de referência² que se movem com velocidade uniforme uns em relação aos outros* [13].

Este princípio da relatividade pode ser representado de uma maneira geométrica considerando-se um plano (*plano de Galileu*), com eixos Ox e Oy representando as coordenadas temporal e espacial, respectivamente, que indicam a localização do objeto A que se move com velocidade constante v ao longo de uma reta fixa r .

As transformações,

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = vx + y + b, \end{cases} \quad (2.2)$$

permitem a troca de sistemas de referência³ preservando as leis básicas da física e desempenham o papel das isometrias (2.1) do plano euclidiano.

Dessa maneira, enquanto a geometria de Euclides estuda as propriedades das figuras do plano euclidiano que permanecem invariantes sob as transformações (2.1), a geometria de Galileu estuda as propriedades das figuras do plano de Galileu que são preserva-

¹Informações sobre o princípio da relatividade de Galileu podem ser encontradas em [12].

²Sistemas físicos onde é válida a primeira lei de Newton [13].

³A dedução dessas equações é realizada a partir de conceitos físicos e pode ser encontrada de forma detalhada em [1].

das pelas *transformações de Galileu* (2.2) em consonância com o conceito de geometria sugerido por Klein [1].

2.1 Axiomatização da geometria de Galileu

A axiomatização desta geometria, que envolve 5 grupos de axiomas, se baseia no conceito de espaço vetorial e usa como termos indefinidos "ponto" e "vetor". Esta seção foi elaborada com base na referência [1].

Axiomas do Grupo 1. *A adição de vetores possui as seguintes propriedades:*

1. *comutatividade:* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, para todos os vetores \vec{a} e \vec{b} .
2. *associatividade:* $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, para quaisquer vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} .
3. *existência de um elemento neutro:* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, para cada vetor \vec{a} .
4. *existência de um inverso aditivo:* para cada vetor \vec{a} existe \vec{a}' tal que $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$.

Axiomas do Grupo 2. *A multiplicação de um vetor por números reais possui as seguintes propriedades:*

1. *existência de um elemento neutro multiplicativo:* para cada vetor \vec{a} temos que $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.
2. *associatividade:* $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$, com α e β reais e \vec{a} um vetor.
3. *distributividade:*
 - $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$, para todos α, β reais e para cada vetor \vec{a} .
 - $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$, para todos $\alpha \in \mathbb{R}$ e para quaisquer vetores \vec{a} e \vec{b} .

Observação 2.1. *Os axiomas acima implicam na unicidade do vetor zero (elemento neutro da soma) e do inverso aditivo.*

Axiomas do Grupo 3. *Os axiomas de dimensão são os seguintes:*

1. *Dados os vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} , existem três números reais, α , β e γ , não todos nulos tais que*

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0}.$$

2. Existem \vec{a} e \vec{b} vetores tais que

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$$

se, e somente se, $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

Observação 2.2. Os axiomas do grupo 3 garantem a existência de um par de vetores **linearmente independentes** que chamaremos de base.

Axiomas do Grupo 4. Propriedades do produto escalar entre vetores:

1. o produto escalar é comutativo: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ para quaisquer vetores \vec{a} e \vec{b} .
2. o produto escalar é associativo relativamente à multiplicação de um vetor por um número real: $(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$, para quaisquer vetores \vec{a} e \vec{b} e qualquer α real.
3. o produto escalar é distributivo em relação à adição de vetores: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, para \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} vetores arbitrários.
4. o produto escalar é não negativo: $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, para qualquer vetor \vec{a} .
5. existe um vetor \vec{i} com $\vec{i}^2 > 0$ e um vetor $\vec{o} \neq \vec{0}$ com $\vec{o}^2 = 0$.
6. o conjunto de todos os vetores \vec{o} tais que $\vec{a} \cdot \vec{o} = 0$ para todo vetor \vec{a} é uma reta euclidiana.

Dada $\{\vec{i}, \vec{o}\}$ uma base, para cada \vec{a} existe um único par de números reais x, y tais que

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{o}.$$

Os números reais x e y são chamados de coordenadas do vetor \vec{a} em relação à base $\{\vec{i}, \vec{o}\}$.

Como consequência dos axiomas temos que o **produto escalar do plano de Galileu**, entre os vetores \vec{a} e \vec{b} de componentes (x, y) e (x_1, y_1) , respectivamente, é dado por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x \cdot x_1. \quad (2.3)$$

Em particular,

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = x \cdot x = x^2.$$

O módulo $|\vec{a}|$ do vetor $\vec{a} = (x, y)$ é definido por

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2} = |x|. \quad (2.4)$$

Definição 2.1. Chamamos de **base ortonormal do plano de Galileu**, a base formada pelos vetores \vec{i} e \vec{o} tais que $\vec{i}^2 = 1$, $\vec{o}^2 = 0$ e $\vec{i} \cdot \vec{o} = 0$.

Axiomas do Grupo 5. Os axiomas da relação “ponto-vetor” são os seguintes:

1. para todo ponto A e vetor \vec{a} existe um único ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.
2. para quaisquer três pontos A, B e C temos que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Observação 2.3. A relação que associa cada par ordenado de pontos (A, B) ao vetor \vec{a} denotado por \overrightarrow{AB} , onde A é chamado a **origem** e B o **extremo** do vetor estabelece uma relação entre os conceitos não definidos de ponto e de vetor, onde as componentes de \overrightarrow{AB} são determinadas por $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Proposição 2.1. Os axiomas dos grupos 1, 2, 3, 4 e 5 são invariantes pelas transformações¹

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = vx + wy + b. \end{cases} \quad (2.5)$$

Demonstração 2.1.

Sejam $\vec{a} = (x_a, y_a)$ e $\vec{b} = (x_b, y_b)$ vetores do plano de Galileu. Temos então que $\vec{a}' = (x_a, vx_a + wy_a)$ e $\vec{b}' = (x_b, vx_b + wy_b)$ são os vetores obtidos a partir de (2.5). Dessa maneira,

$$\vec{a}' + \vec{b}' = (x_a + x_b, vx_a + wy_a + vx_b + wy_b) = (x_b + x_a, vx_b + wy_b + vx_a + wy_a) = \vec{b}' + \vec{a}',$$

o que mostra a invariância do axioma 1 do grupo 1 pelas transformações (2.5). Seguindo raciocínio análogo é possível verificar a invariância dos demais axiomas dos grupos 1, 2, 3 e 5. Para concluir a invariância dos axiomas do grupo 4, precisamos mostrar que o produto escalar é invariante sob (2.5). De fato, dados os vetores \vec{a} e \vec{b} do plano de Galileu, as imagens \vec{a}' e \vec{b}' são tais que

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = x_a \cdot x_b = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

■

Definição 2.2. (Vetor especial) Um vetor de componentes $(0, y)$ com $y \in \mathbb{R}$ é chamado de **vetor especial**.

As expressões em (2.5) são mais gerais que as transformações de Galileu (2.2) e, por esse motivo, descrevem um modelo mais geral que essa geometria. O axioma 6 do grupo

¹Expressões mais gerais que as transformações de Galileu.

4 resolve esse problema pois afirma que no conjunto de todos os vetores especiais $\vec{\mathbf{o}} = (0, y)$ nós podemos definir um produto escalar especial, satisfazendo as propriedades da *geometria euclidiana*¹, que permanece invariante sob as transformações de Galileu.

Definição 2.3. *O produto escalar entre os vetores especiais $\vec{\mathbf{o}}_1 = (0, y_1)$, $\vec{\mathbf{o}}_2 = (0, y_2)$ é dado por*

$$\vec{\mathbf{o}}_1 \cdot \vec{\mathbf{o}}_2 = y_1 \cdot y_2. \quad (2.6)$$

Em particular, podemos definir o comprimento $|\vec{\mathbf{o}}|$ de um vetor especial $\vec{\mathbf{o}} = (0, y)$ como

$$|\vec{\mathbf{o}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{o}} \cdot \vec{\mathbf{o}}} = \sqrt{y^2} = |y|$$

para cada vetor $\vec{\mathbf{o}}$.

Proposição 2.2. *O produto escalar entre vetores especiais é invariante pelas transformações (2.5) se, somente se, $w = \pm 1$.*

Demonstração 2.2.

Sejam $\vec{\mathbf{o}}_1 = \overrightarrow{O_1 A_1}$ e $\vec{\mathbf{o}}_2 = \overrightarrow{O_2 A_2}$ vetores especiais do plano de Galileu. Os vetores $\vec{\mathbf{o}}'_1$ e $\vec{\mathbf{o}}'_2$ são determinados pelas imagens O'_1, O'_2, A'_1 e A'_2 dos pontos O_1, O_2, A_1 e A_2 , pelas transformações (2.5). Temos então que,

$$O'_1 = (x_{O_1} + a, v x_{O_1} + w y_{O_1} + b), \quad O'_2 = (x_{O_2} + a, v x_{O_2} + w y_{O_2} + b),$$

$$A'_1 = (x_{A_1} + a, v x_{A_1} + w y_{A_1} + b) \text{ e } A'_2 = (x_{A_2} + a, v x_{A_2} + w y_{A_2} + b),$$

ou seja,

$$\vec{\mathbf{o}}'_1 = (x_{A_1} - x_{O_1}, v x_{A_1} + w y_{A_1} - v x_{O_1} - y_{O_1}) \text{ e } \vec{\mathbf{o}}'_2 = (x_{A_2} - x_{O_2}, v x_{A_2} + w y_{A_2} - v x_{O_2} - y_{O_2}).$$

Como $\vec{\mathbf{o}}_1$ e $\vec{\mathbf{o}}_2$ são vetores especiais segue que $x_{A_1} - x_{O_1} = 0$ e $x_{A_2} - x_{O_2} = 0$ e então

$$\vec{\mathbf{o}}'_1 \cdot \vec{\mathbf{o}}'_2 = w^2 (y_{A_1} - y_{O_1}) \cdot (y_{A_2} - y_{O_2}) = \vec{\mathbf{o}}_1 \cdot \vec{\mathbf{o}}_2 \Leftrightarrow w = \pm 1.$$

■

Agora, fazendo $w = -1$ em (2.5) as transformações resultantes não são movimentos² no plano de Galileu. De fato, para $w = -1$ e $(a, b) = (0, 0)$ em (2.5), não há como obter a transformação identidade variando-se continuamente o parâmetro v . Com $w = -1$,

¹Essas propriedades incluem os axiomas 1, 2, 3, 4 do grupo 4 e a propriedade que afirma que $\vec{d}^2 = \vec{0}$ somente se $\vec{d} = \vec{0}$.

²Ou seja, não há uma sequência de transformações de Galileu infinitesimais que variam continuamente com o parâmetro v que as conectam com a identidade.

as transformações (2.5) em que $(a, b) = (0, 0)$, desempenham o mesmo papel que as *reflexões*¹ da geometria euclidiana plana. Como o grupo das transformações de Galileu, equações (2.2), é definido como sendo a componente conexa com a identidade do grupo de transformações (2.5), concluímos que os axiomas dos grupos 1, 2, 3 e 4 permanecem invariantes para $w = 1$. Esse fato, mostra a importância do axioma 6 do grupo 4 na caracterização dessa geometria.

2.2 Alguns elementos e definições dessa geometria

2.2.1 Distância entre pontos

Definição 2.4. A distância entre os pontos A e B do plano de Galileu é dada por

$$d_{AB} = |x_B - x_A|. \quad (2.7)$$

A distância entre os pontos A e B é definida como o comprimento do vetor \overrightarrow{AB} (Figura 2.1). Este comprimento é determinado pelo intervalo de tempo entre os eventos A e B .

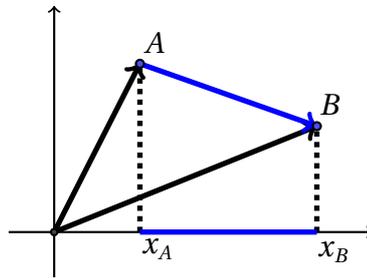


Figura 2.1: Distância entre os pontos A e B .

2.2.2 Reta

A reta AB ($A \neq B$) é indicada como o conjunto de pontos M tais que \overrightarrow{AM} e \overrightarrow{AB} são linearmente dependentes, ou seja, $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ para algum número real λ . O vetor \overrightarrow{AB} é chamado “vetor direção” da reta e é determinado de forma única. Se pusermos $\overrightarrow{AB} = \vec{t}$, então a reta AB pode ser descrita como o conjunto de pontos M tais que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{t}. \quad (2.8)$$

¹Ver [20].

Ou ainda, se O é qualquer ponto do plano, a reta AB é dada pelo o conjunto de pontos M (Figura 2.2) tais que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{t}. \quad (2.9)$$

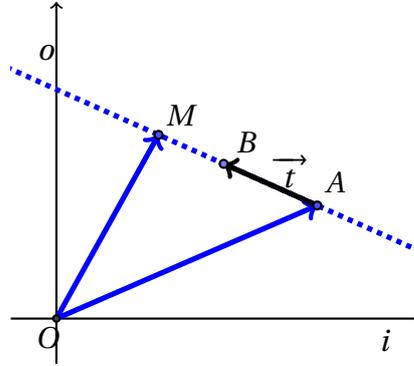


Figura 2.2: Representação da reta AB.

Sejam $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{o}\}$, uma base e O , a origem do sistema de coordenadas do plano de Galileu. As coordenadas do ponto M do plano de Galileu referem-se às coordenadas do vetor \overrightarrow{OM} relativo à base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{o}\}$. Se denotarmos o ponto A por (p, q) e as coordenadas do vetor \overrightarrow{t} , definido anteriormente, por $(-b, a)$, então, de acordo com a relação (2.9), as coordenadas do ponto M da reta l , que passa por A e tem direção \overrightarrow{t} , satisfazem as equações $x = p - \lambda b$ e $y = q + \lambda a$, ou ainda, $ax + by = ap + bq$. Fazendo $-c = ap + bq$ concluímos que as coordenadas do ponto M satisfazem

$$ax + by + c = 0. \quad (2.10)$$

A equação (2.10) é chamada de *equação geral da reta*. Para $b \neq 0$, fazendo $k = -\frac{a}{b}$ e $s = -\frac{ap + bq}{b}$, obtemos a *equação reduzida da reta*

$$y = kx + s, \quad (2.11)$$

onde k é o *coeficiente angular* e s o *coeficiente linear* da reta.

2.2.3 Ângulo entre retas e distância especial

Na geometria euclidiana, o ângulo α entre as retas l_1 e l_2 que se intersectam no ponto A é definido como o comprimento do arco circular \widehat{PQ} determinado pela circunferência S de raio unitário centrada em A (Figura 2.3).

Para medir ângulos entre retas na geometria de Galileu usaremos essa mesma definição, restando apenas definir circunferência no plano de Galileu e uma maneira para

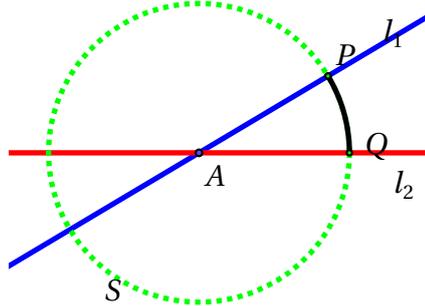


Figura 2.3: Ângulo entre retas na geometria euclidiana.

determinar o comprimento de um arco circular.

Definição 2.5. (Circunferência) Uma circunferência no plano de Galileu é o conjunto dos pontos $M(x, y)$ cuja distância r a um ponto fixo $A = (a, b)$ é constante.

O ponto $A(a, b)$ é chamado de centro da circunferência S e r é o raio. Desta forma, temos,

$$r = d_{AM} = |x - a|$$

e assim,

$$(x - a)^2 = r^2 \tag{2.12}$$

é a equação que define a circunferência S (Figura 2.4). Podemos agora representar o ân-

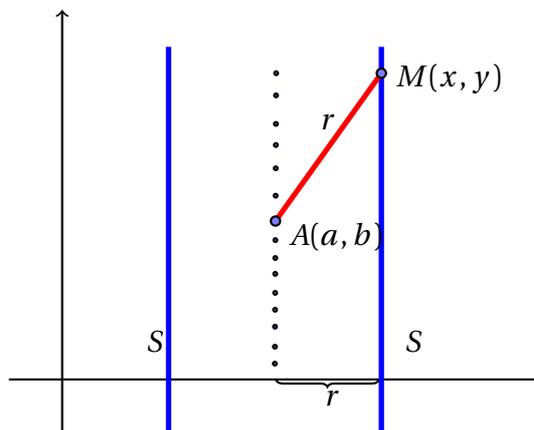


Figura 2.4: Circunferência no plano de Galileu.

gulo $\delta_{l_1 l_2}$ entre as retas l_1 e l_2 que se intersectam no ponto $A(a, b)$, segundo a geometria de Galileu, conforme mostrado na Figura 2.5.

Definição 2.6. Na geometria de Galileu, uma reta paralela ao eixo Oy é chamada de **reta especial**. Caso contrário a reta é chamada de **ordinária**.

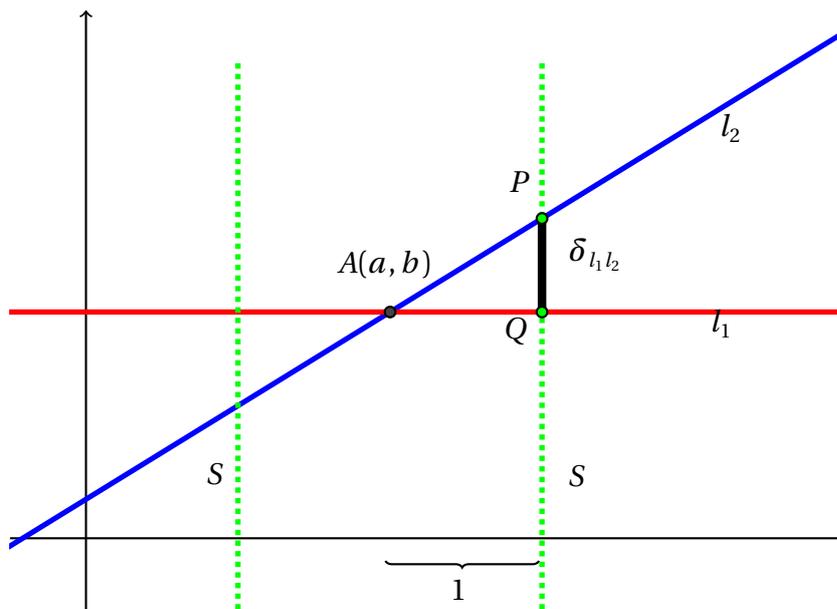


Figura 2.5: Ângulo entre as retas l_1 e l_2 na geometria de Galileu.

Definição 2.7. (*Distância Especial*) A distância δ_{AB} entre os pontos A e B de uma reta especial (Figura 2.6) é dada por

$$\delta_{AB} = |y_B - y_A|. \quad (2.13)$$

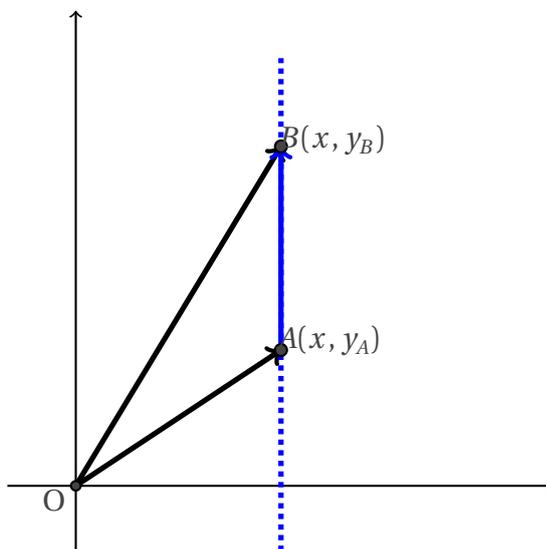


Figura 2.6: Distância especial entre os pontos A e B .

Portanto para medir o comprimento do arco \widehat{PQ} na Figura 2.5, ou seja, o ângulo $\delta_{l_1l_2}$, é necessário calcular a distância especial δ_{PQ} .

Proposição 2.3. Se $y_1 = k_1x + s_1$ e $y_2 = k_2x + s_2$ são as equações das retas ordinárias l_1 e l_2 que se intersectam no ponto A (Figura 2.5), respectivamente, então $\delta_{l_1l_2} = |k_2 - k_1|$.

Demonstração 2.3.

De fato, como $\{A\} = l_2 \cap l_1$ temos

$$k_2 a + s_2 = k_1 a + s_1.$$

Além disso,

$$P = (a + 1, k_2 a + k_2 + s_2)$$

e

$$Q = (a + 1, k_1 a + k_1 + s_1).$$

Logo,

$$\delta_{l_1 l_2} = \delta_{PQ} = |k_2 a + k_2 + s_2 - k_1 a - k_1 + s_1| \Rightarrow \delta_{l_1 l_2} = |k_2 - k_1|.$$



Capítulo 3

Triângulos na geometria de Galileu

Este capítulo é dedicado ao estudo de algumas propriedades dos triângulos na geometria de Galileu que serão usadas em demonstrações posteriores e foi elaborado com base nas referências [1] e [11]. Os critérios de congruência de triângulos, importantes propriedades da geometria euclidiana, também podem ser estudados na geometria de Galileu, mas não serão objeto de estudo desta dissertação.

Definição 3.1. Na geometria de Galileu, um triângulo ABC é o polígono formado por três pontos A , B e C não colineares e três segmentos de retas ordinárias AB , AC e BC .

Os lados a , b e c do triângulo ABC são dados, respectivamente, por $d_{BC} = \overline{BC}$, $d_{CA} = \overline{CA}$ e $d_{AB} = \overline{AB}$ e as magnitudes dos ângulos são tais que $\hat{A} = |\delta_{qr}|$, $\hat{B} = |\delta_{pq}|$ e $\hat{C} = |\delta_{pr}|$, onde p , q e r são as retas suportes aos lados como na Figura 3.1.

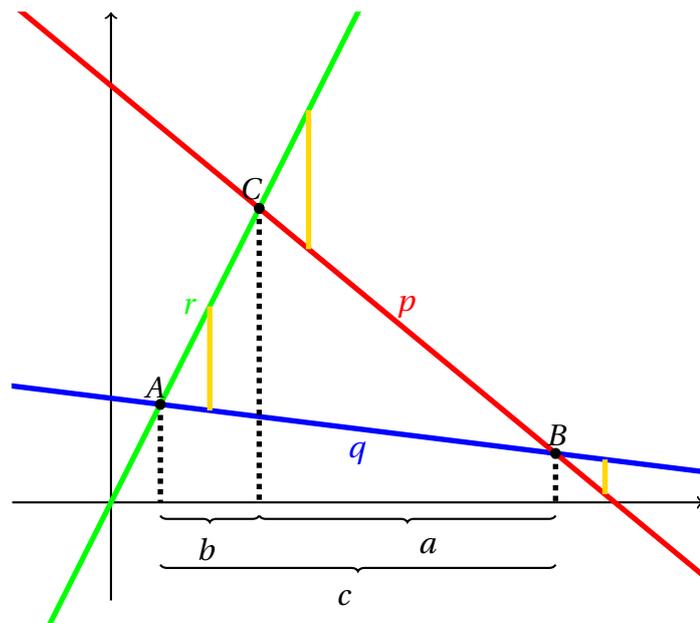


Figura 3.1: Triângulo no plano de Galileu.

Proposição 3.1. *Num triângulo ABC do plano de Galileu, se c é o maior lado, então $c = a + b$.*

Demonstração 3.1.

Dado ABC triângulo no plano de Galileu, temos $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AB} = c$. Note que

$$a = |x_B - x_C|$$

e

$$b = |x_C - x_A|.$$

Então,

$$a + b = |x_B - x_C| + |x_C - x_A|, \quad (3.1)$$

e assim,

$$a + b = x_B - x_A \text{ ou } a + b = x_A - x_B,$$

ou seja,

$$a + b = |x_B - x_A| = c.$$

Os casos em que $a + b = \pm(2x_C - x_A - x_B)$ não são válidos. Para que $a + b = x_A + x_B - 2x_C$ seja válida, devemos ter $x_B > x_C$ e $x_A > x_C$ o que implicaria em $a > c$ ou $b > c$, o que contraria a hipótese. O caso em que $a + b = 2x_C - x_A - x_B$ segue de maneira análoga. ■

Proposição 3.2. *Num triângulo ABC do plano de Galileu, se \hat{C} é o maior ângulo, então $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ ¹.*

Demonstração 3.2.

Sejam $y_1 = k_1 + s_1$, $y_2 = k_2 + s_2$ e $y_3 = k_3 + s_3$ as equações das retas ordinárias AC , BC e AB , respectivamente. De acordo com a definição de triângulo e pela Proposição 2.3 segue que

$$\hat{A} = |k_1 - k_3| \quad (3.2)$$

e

$$\hat{B} = |k_3 - k_2|. \quad (3.3)$$

Dessa maneira, $\hat{A} + \hat{B} = k_1 - k_2$ ou $\hat{A} + \hat{B} = k_2 - k_1$, ou seja,

$$\hat{A} + \hat{B} = |k_1 - k_2| = \hat{C}. \quad (3.4)$$

¹Pela definição de ângulo nesta geometria, não é possível estabelecer o conceito de ângulo externo.

Procedendo como na conclusão da Proposição 3.1 é possível verificar que se $\hat{A} + \hat{B} = \pm(2k_3 - k_1 - k_2)$ teríamos $\hat{A} > \hat{C}$ ou $\hat{B} > \hat{C}$. ■

Definição 3.2. (Altura) A altura AP de um triângulo ABC , relativa ao vértice A (Figura 3.2), é o segmento sobre a reta especial que une o ponto A ao ponto P , em que P é a intersecção dessa reta especial com a reta suporte oposta ao ponto A [11].

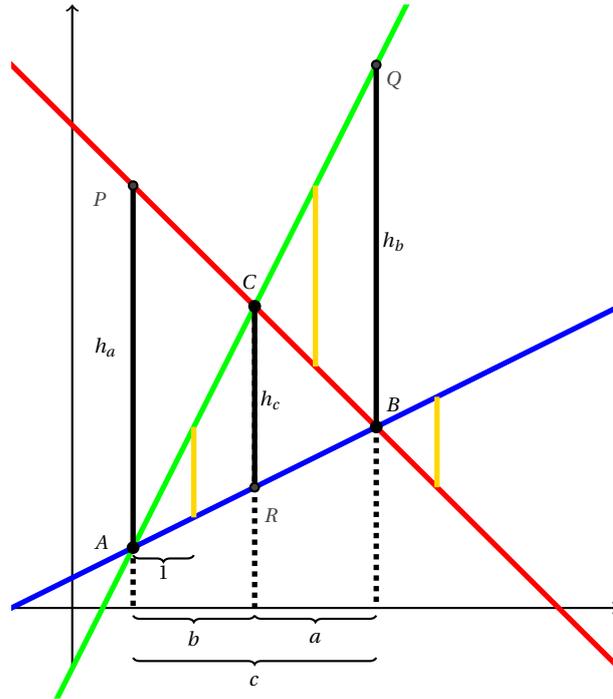


Figura 3.2: Alturas do triângulo ABC do plano de Galileu.

Proposição 3.3. Num triângulo ABC do plano de Galileu, os lados são proporcionais aos ângulos opostos, ou seja,

$$\frac{a}{\hat{A}} = \frac{b}{\hat{B}} = \frac{c}{\hat{C}}. \quad (3.5)$$

Demonstração 3.3.

Traçando as alturas $\overline{AP} = \delta_{AP} = h_a$, $\overline{BQ} = \delta_{BQ} = h_b$ e $\overline{CR} = \delta_{CR} = h_c$ relativas aos vértices A , B e C , respectivamente, temos as seguintes proporções¹

$$\frac{\hat{A}}{1} = \frac{h_b}{c} \Rightarrow h_b = c \cdot \hat{A}$$

e

$$\frac{\hat{C}}{1} = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a \cdot \hat{C}.$$

¹Estas proporções decorrem da definição de ângulo na geometria de Galileu.

E assim,

$$\frac{a}{\hat{A}} = \frac{c}{\hat{C}}. \quad (3.6)$$

Além disso,

$$\frac{\hat{B}}{1} = \frac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = c \cdot \hat{B}$$

e

$$\frac{\hat{C}}{1} = \frac{h_a}{b} \Rightarrow h_a = b \cdot \hat{C},$$

ou seja,

$$\frac{c}{\hat{C}} = \frac{b}{\hat{B}}. \quad (3.7)$$

Comparando (3.6) e (3.7) concluímos que

$$\frac{a}{\hat{A}} = \frac{b}{\hat{B}} = \frac{c}{\hat{C}}.$$

■

Observação 3.1. A relação (3.5) do plano de Galileu corresponde à lei dos senos no plano euclidiano.

Proposição 3.4. O triângulo ABC do plano de Galileu é isósceles, isto é, possui dois lados congruentes ou de medidas iguais, se, e somente se, é isogonal, ou seja, possui dois ângulos congruentes ou de medidas iguais.

Demonstração 3.4.

Suponha inicialmente que $b = \overline{AC} = \overline{BC} = a$. Pela relação (3.5),

$$\frac{a}{\hat{A}} = \frac{b}{\hat{B}} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}.$$

A recíproca ocorre de maneira análoga. ■

Observação 3.2. O conceito de triângulo equilátero no plano de Galileu não é definido. De fato, pela Proposição 3.1, se $\overline{AC} = \overline{BC} = x$ então $\overline{AB} = 2x$. Por meio de raciocínio análogo concluímos resultado semelhante para os ângulos.

Proposição 3.5. (Semelhança de triângulos de 1ª espécie) Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ que possuem ângulos homólogos congruentes têm lados correspondentes proporcionais.

Demonstração 3.5.

Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos de lados a, b, c e a', b', c' , respectivamente, e que possuem ângulos congruentes, ou seja, $\hat{A} \cong \hat{A}'$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$ e $\hat{C} \cong \hat{C}'$. Pela relação (3.5) temos

$$a = \lambda_1 \hat{A}, b = \lambda_1 \hat{B}, c = \lambda_1 \hat{C}$$

e

$$a' = \lambda_2 \hat{A}', b' = \lambda_2 \hat{B}', c' = \lambda_2 \hat{C}'.$$

Dessa maneira,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (3.8)$$

o que conclui a demonstração. ■

Proposição 3.6. (*Semelhança de triângulos de 2ª espécie*) Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ que possuem lados homólogos congruentes têm ângulos correspondentes proporcionais.

Demonstração 3.6.

Análoga à demonstração 3.5. ■

Capítulo 4

O princípio da dualidade

O princípio da dualidade em geometria permite a dedução de novos resultados a partir de resultados dados. Na geometria de Galileu, este princípio pode ser definido como se segue.

Definição 4.1. *(O princípio da dualidade) Dados resultados válidos na geometria de Galileu, a troca entre si dos termos "pontos" e "retas", "segmentos ou distâncias" e "ângulos", "está sobre" e "passa por", estabelece outros resultados também válidos nessa geometria.*

Nas seções seguintes discutiremos a validade deste princípio na geometria de Galileu. O texto que segue se baseia nas referências [1], [2], [3] e [10].

4.1 O princípio da dualidade na geometria de Galileu

Na geometria euclidiana, com a troca entre si dos termos "pontos" e "retas", "está sobre" e "passa por", em alguns resultados, é possível estabelecer uma correspondência entre propriedades das retas e dos pontos. Por exemplo, dois pontos determinam uma única reta (Figura 4.1(a)), enquanto que duas retas se intersectam num único ponto (Figura 4.1(b)). O conjunto de pontos **colineares** da reta a (Figura 4.2(a)) corresponde ao conjunto de retas **concorrentes** no ponto A (Figura 4.2(b)).

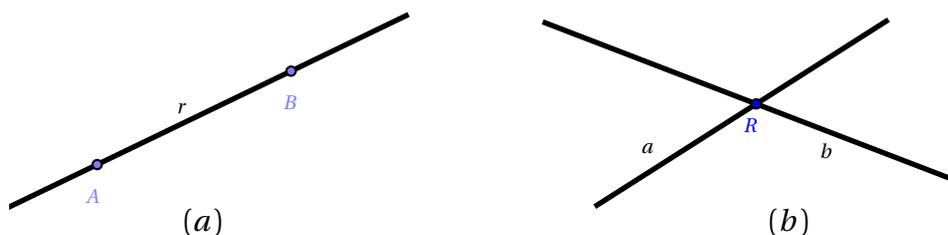


Figura 4.1: Analogia entre pontos e retas na geometria euclidiana.

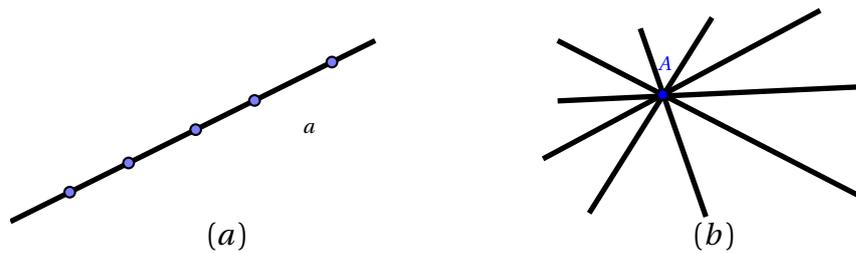


Figura 4.2: Pontos colineares e retas concorrentes na geometria euclidiana.

Apesar de ocorrer a analogia entre pontos e retas na geometria euclidiana em algumas situações, o princípio da dualidade não se sustenta nessa geometria. Por exemplo, o análogo a "*retas paralelas*" (duas retas coplanares que não se interceptam [10]) seriam "*pontos paralelos*" (pontos que não possuem retas em comum) e este último paralelismo não pode ser definido na geometria de Euclides uma vez que dois pontos determinam uma reta nessa geometria.

É natural estabelecer uma analogia¹ entre a distância entre pontos e o ângulo entre retas. Assim surge uma outra situação que não valida o princípio da dualidade na geometria euclidiana. Note que, na Figura 4.2(a), a distância entre os pontos colineares pode ser tão grande quanto se deseja, mas o mesmo não ocorre com os ângulos entre as retas da Figura 4.2(b).

Na geometria de Galileu, essas situações são superadas já que existe o conceito de "*pontos paralelos*", ou seja, pontos que não pertencem a uma mesma reta **ordinária** [1]. Além disso, o ângulo entre duas retas ordinárias pode ser tão grande quanto a distância entre pontos do plano de Galileu (Figura 4.3). Desta forma, a analogia entre pontos e retas nessa geometria se sustenta².

Segundo o princípio da dualidade, *proposições duais*³ são resultados obtidos a partir da analogia completa entre pontos e retas de uma sentença válida dada em determinada geometria. Por exemplo, vimos que num triângulo do plano de Galileu de lados a , b e c , se c é o maior lado, então $c = a + b$. Considerando este princípio válido na geometria de Galileu, a relação dual desse resultado é a seguinte: *num triângulo do plano de Galileu de ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , se \hat{C} é o maior ângulo, então $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$.*

No exemplo anterior, vimos que ao aplicar o princípio da dualidade obtivemos um resultado diferente do original que é o que geralmente ocorre, mas pode ocorrer o contrário. Veja o caso da relação correspondente à lei dos senos nesta geometria: *num tri-*

¹Ou correspondência.

²Este argumento mostra que a analogia discutida é perfeitamente possível, mas não prova o princípio da dualidade nessa geometria. A prova em questão é assunto da seção seguinte.

³Aqui "proposições" pode ser interpretado como teoremas, corolários e etc.

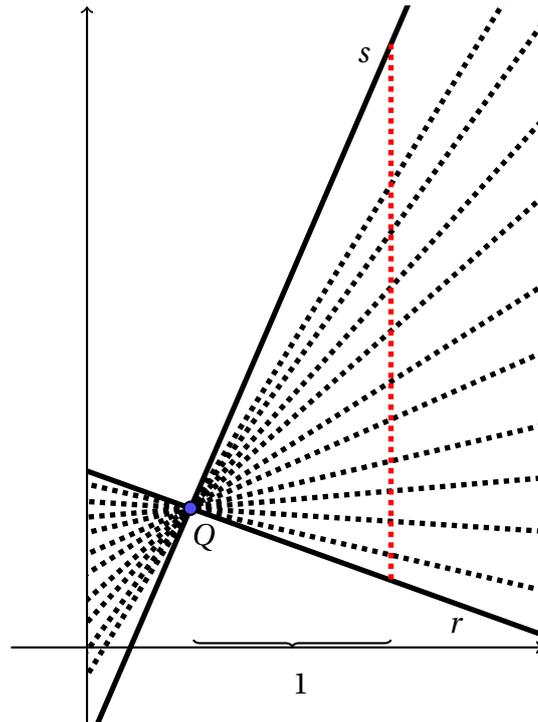


Figura 4.3: Magnitude do ângulo entre retas na geometria de Galileu.

ângulo do plano de Galileu, os lados são proporcionais aos ângulos opostos, ou seja,

$$\frac{a}{\hat{A}} = \frac{b}{\hat{B}} = \frac{c}{\hat{C}}.$$

Novamente, considerando o princípio válido nessa geometria, o resultado dual é: *num triângulo do plano de Galileu, os ângulos são proporcionais aos lados opostos, ou seja,*

$$\frac{\hat{A}}{a} = \frac{\hat{B}}{b} = \frac{\hat{C}}{c}.$$

Veja que temos essencialmente o mesmo resultado. Logo, o princípio da dualidade pode admitir resultados *auto duais*¹.

Seguiremos agora aplicando o princípio da dualidade em alguns resultados da geometria de Galileu, apesar de não tê-lo demonstrado ainda, com objetivo de estudar um pouco mais a analogia entre as propriedades de pontos e retas nesta geometria.

Proposição 4.1. *Num triângulo isósceles ABC do plano de Galileu com $\overline{AC} = \overline{BC}$, o ponto médio F do lado AB é paralelo ao vértice C (Figura 4.4).*

¹Resultados obtidos pelo princípio da dualidade que são essencialmente iguais aos resultados originais.

Demonstração 4.1.

Por hipótese, $\overline{AC} = \overline{BC}$, ou seja,

$$d_{BC} = d_{AC} \Rightarrow |x_B - x_C| = |x_C - x_A|.$$

Decorre então que:

• $x_B - x_C = x_A - x_C \Rightarrow x_B = x_A$. Absurdo, pois ABC é triângulo.

• $x_B - x_C = x_C - x_A \Rightarrow x_C = \frac{x_B + x_A}{2}$.

Como F é ponto médio do lado AB ,

$$d_{FA} = d_{BF} \Rightarrow x_F = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Temos então que $x_C = x_F$, o que mostra que C e F estão sobre a mesma reta especial, ou seja, são paralelos. ■

Aplicando o princípio da dualidade na Proposição 4.1 obtemos a proposição abaixo.

Proposição 4.2. *Num triângulo isósceles ABC do plano de Galileu em que os ângulos da base \hat{A} e \hat{B} são congruentes, a bissetriz¹ f do ângulo \hat{C} é paralela à base AB (Figura 4.4).*

Demonstração 4.2.

Sejam

$$y_1 = k_1 x + m,$$

$$y_2 = k_2 x + n,$$

$$y_3 = k_3 x + p,$$

$$y_4 = k_4 x + q,$$

as equações das retas BC , AC , AB e f , respectivamente. Vamos mostrar que $k_3 = k_4$ para concluir o paralelismo entre f e AB . Por hipótese, $\hat{A} = \hat{B}$, ou seja,

$$\hat{A} = |k_2 - k_3| = |k_1 - k_3| = \hat{B}.$$

Temos então dois casos:

i) $k_2 - k_3 = k_1 - k_3 \Rightarrow k_2 = k_1$. Absurdo, pois AC e BC concorrem no ponto C .

ii) $k_2 - k_3 = k_3 - k_1 \Rightarrow k_3 = \frac{k_2 + k_1}{2}$.

¹Por abuso de linguagem, nos referiremos à bissetriz de um ângulo como sendo a reta que contém a sua bissetriz.

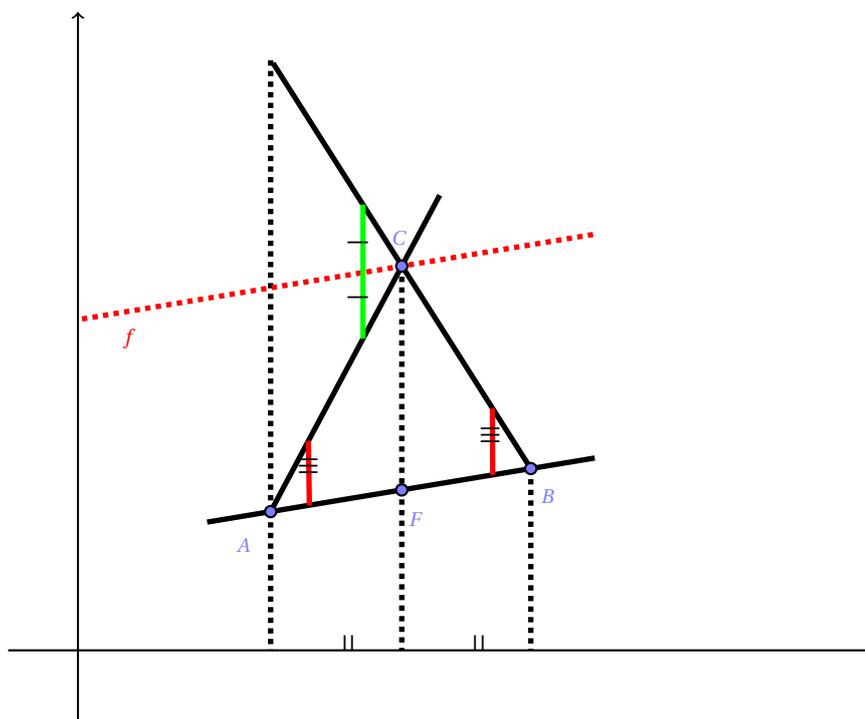


Figura 4.4: Dualidade no triângulo isósceles.

Como f é bissetriz do ângulo \hat{C} ,

$$|k_1 - k_4| = |k_4 - k_2|.$$

Pode ocorrer então que,

a) $k_1 - k_4 = k_4 - k_2 \Rightarrow k_4 = \frac{k_1 + k_2}{2}.$

b) $k_1 - k_4 = k_2 - k_4 \Rightarrow k_1 = k_2.$ Absurdo!

Concluimos então que $k_3 = k_4$, o que mostra que no triângulo isósceles onde $AC = BC$ a bissetriz f é paralela à base AB . ■

Considere agora o paralelogramo $ABCD$ (quadrilátero que possui lados opostos paralelos [3]) da Figura 4.5 (a). Sabemos que na geometria euclidiana essa figura possui as seguintes propriedades:

- i) lados opostos têm medidas iguais;
- ii) ângulos opostos são congruentes;
- iii) $\{Q\} = m \cap n$ é ponto médio das diagonais $AC = m$ e $BD = n$.

Essas propriedades também são válidas na geometria de Galileu. Dessa forma é possível construir uma figura no plano de Galileu que apresenta propriedades duais a **i)**, **ii)** e **iii)**. Chamaremos essa figura de "*coparalelogramo*" (Figura 4.5 (b)).

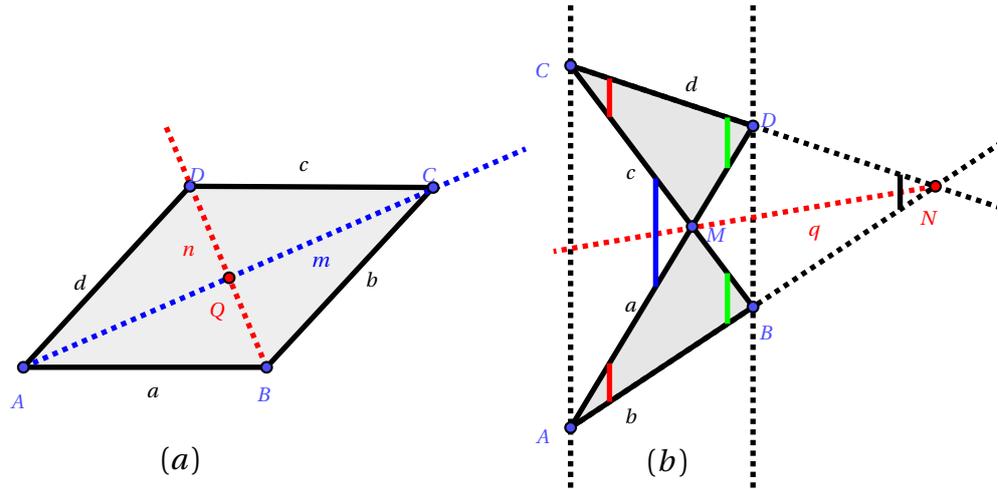


Figura 4.5: Paralelogramo e coparalelogramo no plano de Galileu.

Definição 4.2. Na geometria de Galileu, coparalelogramo é um quadrilátero que possui vértices opostos paralelos¹ [1].

Dualizando² o paralelogramo da Figura 4.5 (a) temos que o coparalelogramo deve possuir lados a e b concorrentes no ponto A , lados b e c concorrentes no ponto B com $a \cap c = \{M\}$, lados c e d concorrentes no ponto C paralelo ao ponto A com $b \cap d = \{N\}$ e os lados a e d concorrentes no ponto D paralelo ao ponto B conforme a Figura 4.5 (b).

A validade das propriedades do paralelogramo na geometria de Galileu implica que, num coparalelogramo $ABCD$, são válidas as propriedades duais correspondentes, ou seja:

- a) ângulos opostos de medidas iguais;
- b) lados opostos congruentes;
- c) a reta $q = MN$ é bissetriz dos ângulos de vértices M e N .

De fato, pela Definição 4.2 de coparalelogramo temos que A e C , B e D são pares de vértices paralelos e assim AC e BD são retas especiais. Segue então que $\overline{CD} = \overline{AB}$, $\overline{CM} = \overline{AM}$ e $\overline{DM} = \overline{BM}$, ou seja, $\triangle CDM \sim \triangle ABM$ (semelhança de 2ª espécie). Dessa maneira,

$$1 = \frac{\widehat{CMD}}{\widehat{BAM}} = \frac{\widehat{MDC}}{\widehat{ABM}}$$

donde concluímos que $\widehat{MCD} = \widehat{BAM}$ e $\widehat{MDC} = \widehat{ABM}$ ³. Para a propriedade b), temos que AB é o lado oposto a CD e o lado BC é oposto a AD . Como AC e BD são retas

¹Vértices opostos são aqueles que não estão sobre a mesma reta ordinária.

²Refere-se a aplicar o princípio da dualidade por meio da analogia entre as propriedades de pontos e retas.

³ \widehat{ABM} é o ângulo de vértice B e lados AB e BM . O mesmo vale para os outros ângulos citados.

especiais, segue que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$. Para o item *c*), ao traçarmos a reta especial que passa por *M* temos que as alturas dos triângulos *CDM* e *ABM* têm a mesma medida pois são opostas a ângulos congruentes o que implica na igualdade $\widehat{DNM} = \widehat{MNB}$. Pela Proposição 3.2, $\angle cMq = \angle dNq + \angle cCd^1$ e $\angle aMq = \angle aAb + \angle bNq$. Como $\angle dNq = \angle bNq$ e $\angle cCd = \angle aAb$, temos $\angle cMq = \angle aMq$, ou seja, *q* é bissetriz dos ângulos de vértices *M* e *N*.

Esse exemplo ilustra que se um resultado é válido e demonstrado na geometria de Galileu, então o resultado dual também é válido e não exige demonstração a partir do momento em que o princípio da dualidade é provado. Além disso, caso seja de interesse demonstrar o resultado dual, um caminho é dualizar os passos adotados na demonstração original (vide demonstração do Teorema 5.2).

4.2 Demonstração do princípio da dualidade na geometria de Galileu

Na seção anterior, vimos que a inexistência do conceito de pontos paralelos é um dos argumentos que mostra que o princípio da dualidade não é válido na geometria euclidiana. Além disso, os exemplos apresentados mostram que esse princípio é bastante plausível na geometria de Galileu, apesar de não termos discutido nenhum argumento que prove sua validade nessa geometria.

O conceito de dualidade em geometria foi estudado inicialmente na *geometria projetiva* pelo engenheiro e geômetra francês J. V. Poncelet (1787-1867) que o deduziu a partir da troca dos termos pontos e retas em resultados estudados no plano projetivo. Um outro geômetra francês, J. D. Gergonne (1771-1859), também estudou o princípio da dualidade. Apesar de conhecer os estudos de Poncelet, Gergonne não os usou para estabelecer este princípio. Ele escreveu teoremas e os seus duais em duas colunas e notou que o princípio da dualidade pode ser deduzido a partir de uma lista de axiomas da geometria projetiva. Além de Poncelet e Gergonne, o geômetra alemão A.F. Möbius (1790-1868) provou o princípio da dualidade na geometria projetiva usando os conceitos de "coordenadas dos pontos" e "coordenadas das retas"[1].

No capítulo 2 descrevemos, a partir de um conjunto de axiomas, a geometria de Galileu em termos dos conceitos indefinidos de "ponto" e "vetor". Vimos que para cada par (A, B) de pontos do plano de Galileu, existe um vetor associado $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ que satisfaz os grupos de axiomas 1, 2, 3 e 4. Além disso, essa relação "ponto-vetor" satisfaz os axiomas do grupo 5.

¹ $\angle cCd$ é o ângulo de vértice *C* e lados coincidentes com as retas *c* e *d*. O mesmo vale para os outros ângulos citados.

Para provar a validade do princípio da dualidade na geometria de Galileu, definiremos o conceito de **doublet**, que é o conceito dual do conceito de vetor, e então verificaremos a validade dos axiomas estudados no Capítulo 2 para o doublet o que nos permitirá estabelecer *axiomas duais* aos estudados. Dessa maneira, a validade dos axiomas duais, no âmbito da geometria de Galileu, estabelece o princípio da dualidade.

Definimos o vetor \vec{a} no plano de Galileu como um par ordenado de pontos (A, B) e a reta AB é chamada de *reta suporte* do vetor \vec{a} . Dizemos que os vetores (A, B) e (C, D) são iguais se suas retas suporte são paralelas (ou coincidentes) e seus comprimentos são iguais, ou seja, $d_{AB} = d_{CD}$ (ou $\delta_{AB} = \delta_{CD}$ no caso de vetores especiais que possuem retas especiais como retas suporte). Esta regra é equivalente à *lei do paralelogramo* na geometria de Galileu: se $\vec{AB} = \vec{CD}$ e suas retas suporte são distintas, então os pontos A, B, C, D são vértices de um paralelogramo [1] (Figura 4.6).

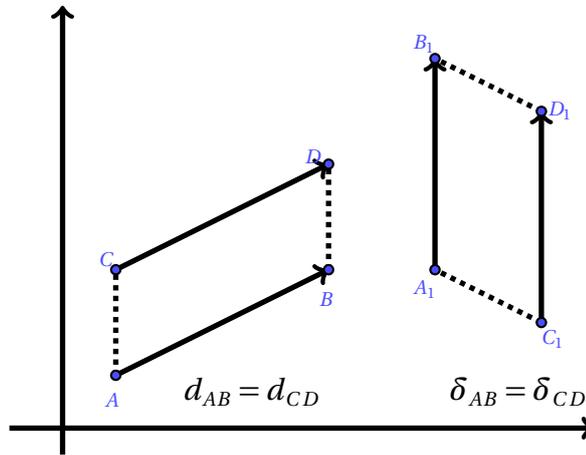


Figura 4.6: Lei do paralelogramo na geometria de Galileu.

De maneira similar, definiremos o conceito de **doublet** no plano de Galileu.

Definição 4.3. Um **doublet** é um par ordenado (a, b) ou \overline{ab} de retas ordinárias. Se a e b são retas paralelas, dizemos que o doublet é um **doublet especial**, caso contrário, temos um **doublet ordinário** [1].

Chamamos as retas a e b do doublet \overline{ab} de *origem* e *extremo*, respectivamente. O ponto de intersecção das retas a e b é o vértice do doublet ordinário \overline{ab} e qualquer ponto da origem de um doublet especial $\overline{a_1b_1}$, é seu vértice (Figura 4.7). O *ângulo do doublet* \overline{ab} é definido como o ângulo δ_{ab} entre as retas a e b e a distância $d_{a_1b_1}$ associada ao doublet especial $\overline{a_1b_1}$ é o *ângulo especial*.

Note que com essas características, o doublet é, de fato, o dual do vetor: as retas de origem e de extremo são os duais dos pontos de origem e extremo de um vetor; o vértice é o dual da reta suporte do vetor; o ângulo é o dual do módulo do vetor.

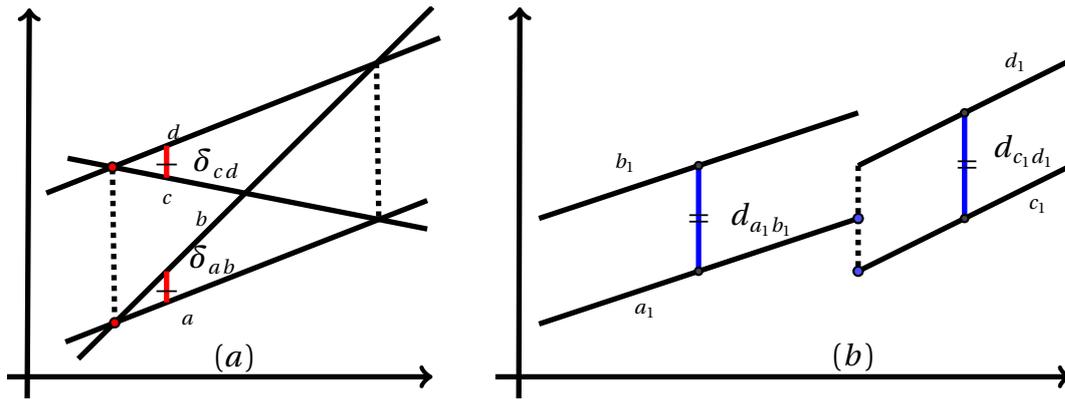


Figura 4.7: (a) Doublets ordinários; (b) Doublets especiais.

Dizemos que os doublets \overline{ab} e \overline{cd} são iguais se os seus vértices são paralelos (estão sobre a mesma reta especial) ou coincidentes e os seus ângulos, ou ângulos especiais, são iguais¹ (Figura 4.7). Essa definição é equivalente a afirmar que se $\overline{ab} = \overline{cd}$ e os vértices dos doublets são distintos, então as retas a, b, c, d são lados de um coparalelogramo. Além disso, *doublets nulos*² são ditos todos iguais. O doublet nulo \overline{aa} é denotado por $\overline{0}$. Nossa definição da igualdade de doublets implica que qualquer doublet \overline{cb} é igual a algum doublet com origem em a ³.

A adição de vetores é definida pela *lei do triângulo* [9]: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Figura 4.8 (a)). Essa definição implica na comutatividade e associatividade dessa operação (axiomas do grupo 1).

De maneira similar, a adição de doublets é definida como $\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac}$ (Figura 4.8 (b)). Essa definição implica na comutatividade ($\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac} = \overline{ad} + \overline{dc} = \overline{bc} + \overline{ab}$) e associatividade ($(\overline{ab} + \overline{bc}) + \overline{cd} = \overline{ad} = \overline{ab} + (\overline{bc} + \overline{cd})$) dessa operação, propriedades que podem ser verificadas pela lei do coparalelogramo para a adição de doublets: $\overline{ab} + \overline{ad} = \overline{ac}$ se os vértices de \overline{ab} e \overline{dc} , \overline{ad} e \overline{bc} são paralelos e $b \parallel d$ (Figura 4.8 (b)).

Temos ainda que a existência de um elemento neutro aditivo é justificado pela igualdade $\overline{ab} + \overline{0} = \overline{ab} + \overline{bb} = \overline{ab}$, para cada doublet \overline{ab} . Além disso, o doublet \overline{ba} é o inverso aditivo do doublet \overline{ab} , ou seja, $\overline{ab} + \overline{ba} = \overline{aa} = \overline{0}$. Concluímos então que a adição de doublets satisfaz todos os axiomas do grupo 1. Note que a adição de doublets satisfaz os axiomas do grupo 5 desde que as retas façam o papel dos pontos. De fato, a definição de igualdade de doublets implica que dada a reta a , existe um único doublet de origem em a igual a um doublet \overline{ab} dado e, pela definição da adição de doublets, temos que

¹Observe que essa definição é o dual da definição de igualdade de vetores citada acima.

²Doublets que possuem mesma origem e extremo.

³Para verificar esse resultado, basta considerar a reta $d \parallel b$ que intercepta a num ponto paralelo ao vértice de \overline{cb} (Figura 4.8) e tal que as interseções de d e c e b e a sejam pontos paralelos.

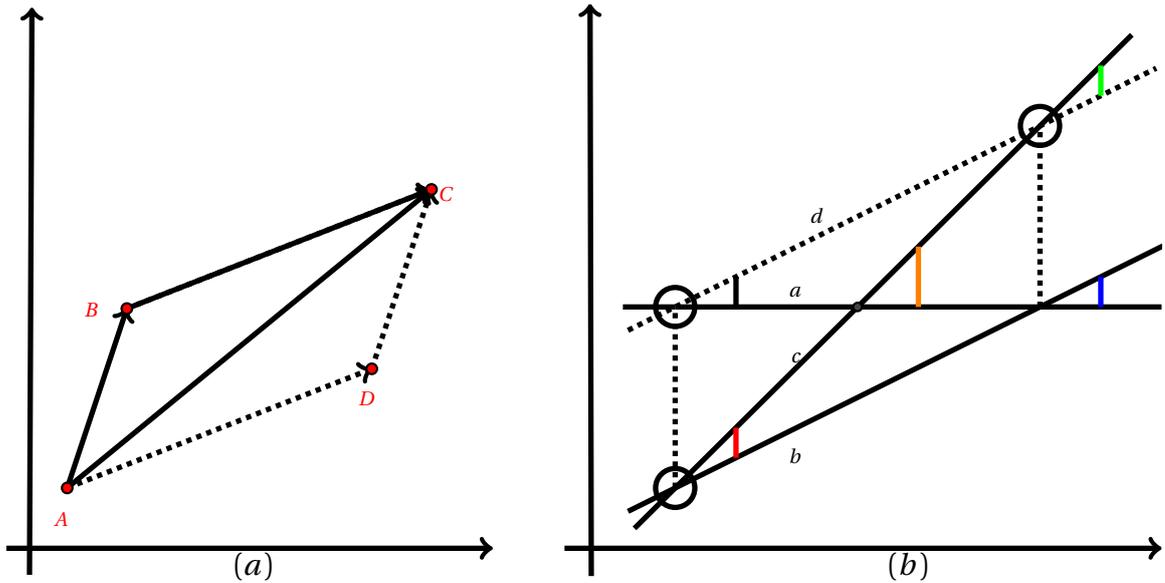


Figura 4.8: (a) Lei do paralelogramo para vetores; (b) Lei do coparalelogramo para doublets.

$$\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac}.$$

A multiplicação do doublet por um número real é definida por: $\overline{ac} = \alpha \overline{ab}$ se os doublets \overline{ac} e \overline{ab} tem um vértice em comum com $\delta_{ac} = \alpha \delta_{ab}$, no caso de doublets ordinários, ou $d_{ac} = \alpha d_{ab}$, caso contrário.

Para deixar a notação de doublet menos carregada, vamos representar o doublet \overline{ab} por \overline{A} e a multiplicação do doublet por um número real por $\overline{A'} = \alpha \overline{A}$ com $\delta_{A'} = \alpha \delta_A$. Segue da definição de multiplicação de doublet que, para α, β reais e os doublets \overline{A} e \overline{B} :

I) $1\overline{A} = \overline{A}$;

II) $\alpha(\beta\overline{A}) = (\alpha\beta)\overline{A}$;

III) $(\alpha + \beta)\overline{A} = \alpha\overline{A} + \beta\overline{A}$;

IV) $\alpha(\overline{A} + \overline{B}) = \alpha\overline{A} + \alpha\overline{B}$.

De fato,

$$1.\overline{A} = \overline{A'} \Rightarrow \overline{A} \text{ e } \overline{A'} \text{ tem o mesmo vértice e } 1.\delta_A = \delta_{A'} \Rightarrow \overline{A} = \overline{A'}.$$

Para II),

$$\alpha(\beta\overline{A}) = \alpha\overline{A'} \Rightarrow \delta_{A'} = \beta\delta_A.$$

Fazendo $\alpha\overline{A'} = \overline{C}$,

$$\delta_C = \alpha\delta_{A'} \Rightarrow \delta_C = \alpha\beta\delta_A. \quad (4.1)$$

Tomando agora $(\alpha\beta)\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{D}}$,

$$\delta_D = \alpha\beta\delta_A. \quad (4.2)$$

Além dos doublets $\bar{\mathbf{C}}$ e $\bar{\mathbf{D}}$ terem o mesmo vértice que $\bar{\mathbf{A}}$, as igualdades (4.1) e (4.2) sugerem que os doublets $\bar{\mathbf{C}}$ e $\bar{\mathbf{D}}$ têm ângulos congruentes. Pela igualdade de doublets segue que $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{D}}$.

O resultado III) é válido pois para $\bar{\mathbf{B}} = (\alpha + \beta)\bar{\mathbf{A}}$ temos

$$\delta_B = (\alpha + \beta)\delta_A, \quad (4.3)$$

ou seja, $\bar{\mathbf{B}}$ tem o mesmo vértice que $\bar{\mathbf{A}}$. Fazendo $\bar{\mathbf{C}} = \alpha\bar{\mathbf{A}} + \beta\bar{\mathbf{A}}$ temos que $\bar{\mathbf{C}}$ tem o mesmo vértice que $\bar{\mathbf{A}}$ e assim

$$\delta_C = \alpha\delta_A + \beta\delta_A = (\alpha + \beta)\delta_A. \quad (4.4)$$

Segue então, pela igualdade de doublets, que $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{C}}$.

No caso de IV), para $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}$ e $\bar{\mathbf{C}}' = \alpha\bar{\mathbf{C}}$ temos

$$\delta_{C'} = \alpha\delta_C = \alpha(\delta_A + \delta_B), \quad (4.5)$$

onde $\bar{\mathbf{C}}$ tem o mesmo vértice que a soma $\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}$. Fazendo $\bar{\mathbf{D}}' = \alpha\bar{\mathbf{A}} + \alpha\bar{\mathbf{B}}$ temos que $\bar{\mathbf{D}}'$ tem o mesmo vértice que a soma $\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}$, uma vez que a multiplicação por um escalar afeta apenas o ângulo do doublet. Além disso,

$$\delta_{D'} = \delta_{\alpha A} + \delta_{\alpha B} = \alpha\delta_A + \alpha\delta_B = \alpha(\delta_A + \delta_B). \quad (4.6)$$

Logo, por (4.5) e (4.6), concluímos que $\bar{\mathbf{C}}' = \bar{\mathbf{D}}'$.

Os resultados em I), II), III) e IV) verificam a validade dos axiomas do grupo 2 para o conceito de doublets.

A adição e a multiplicação de doublets por números reais nos permitem associar *coordenadas* aos doublets. De fato, tome $\bar{\mathbf{I}}$ como o doublet \overline{oe} onde, por uma questão de simplicidade, a reta o é horizontal e $\delta_{oe} = 1$; tome $\bar{\mathbf{O}}$ como o doublet especial \overline{of} com $d_{of} = 1$ (Figura 4.9). Se $\bar{\mathbf{A}} = \overline{oa}$ é o doublet com origem o , extremo a , com vértice M , então, traçando $u \parallel a$ passando pelo ponto O nós obtemos a decomposição $\overline{oa} = \overline{ou} + \overline{ua} = \overline{ou} + \overline{ov}^1$, onde $v \parallel o$ é a reta determinada pela condição $d_{ov} = d_{ua}$. Segue então que $\overline{ou} = \xi\overline{oe}$, $\overline{ov} = \eta\overline{of}^2$, onde os números $\xi = \delta_{oa}$ e $\eta = d_{OM} \cdot \delta_{oa}^3$ são os coeficientes da decomposição

$$\bar{\mathbf{A}} = \xi\bar{\mathbf{I}} + \eta\bar{\mathbf{O}} \quad (4.7)$$

¹Essa decomposição decorre da adição de doublets e da igualdade dos doublets especiais \overline{ov} e \overline{ua} .

²Expressões que decorrem da multiplicação de doublets.

³Igualdade que decorre da proporção $\frac{\eta}{d_{OM}} = \frac{\xi}{1}$.

e são chamados de *coordenadas* do doublet $\bar{\mathbf{A}}$ (escrevemos $\bar{\mathbf{A}} = (\xi, \eta)$ ou $\bar{\mathbf{A}}(\xi, \eta)$ para expressar o doublet $\bar{\mathbf{A}}$ em termos de ξ e η).

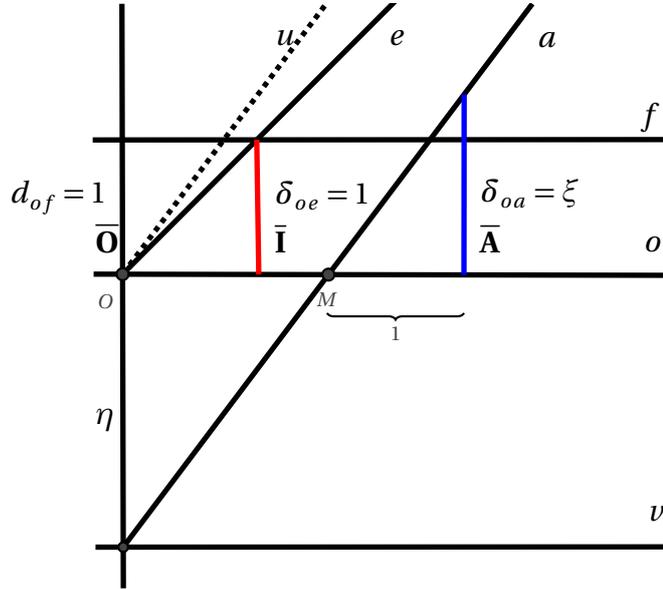


Figura 4.9: Coordenadas ξ e η do doublet $\bar{\mathbf{A}}$.

A decomposição (4.7) implica que os doublets satisfazem o axioma 1 do grupo 3, ou seja, dados os doublets $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$ e $\bar{\mathbf{C}}$ existem α, β e γ , nem todos nulos, tais que

$$\alpha\bar{\mathbf{A}} + \beta\bar{\mathbf{B}} + \gamma\bar{\mathbf{C}} = 0.$$

De fato, fazendo

$$\bar{\mathbf{A}} = \xi_1\bar{\mathbf{I}} + \eta_1\bar{\mathbf{O}},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \xi_2\bar{\mathbf{I}} + \eta_2\bar{\mathbf{O}},$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \xi_3\bar{\mathbf{I}} + \eta_3\bar{\mathbf{O}},$$

temos

$$\alpha\bar{\mathbf{A}} + \beta\bar{\mathbf{B}} + \gamma\bar{\mathbf{C}} = (\alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \gamma\xi_3)\bar{\mathbf{I}} + (\alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \gamma\eta_3)\bar{\mathbf{O}} = 0,$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \gamma\xi_3 = 0, \\ \alpha\eta_1 + \beta\eta_2 + \gamma\eta_3 = 0. \end{cases}$$

Note que o *sistema linear* acima possui uma infinidade de soluções. Dessa forma, existem α, β e γ , nem todos nulos, tais que $\alpha\bar{\mathbf{A}} + \beta\bar{\mathbf{B}} + \gamma\bar{\mathbf{C}} = 0$.

Além disso, como um doublet especial nunca é múltiplo de um doublet ordinário, temos que esses doublets são sempre *linearmente independentes*. Esse fato mostra que os doublets satisfazem o axioma 2 do grupo 3.

Observação 4.1. Seguindo a notação anterior temos que:

1. se $\bar{\mathbf{A}}$ tem coordenadas (ξ, η) , então $\alpha\bar{\mathbf{A}}$ tem coordenadas $(\alpha\xi, \alpha\eta)$;
2. $\bar{\mathbf{A}}(\xi, \eta) + \bar{\mathbf{B}}(\xi_1, \eta_1) = \bar{\mathbf{C}}(\xi + \xi_1, \eta + \eta_1)$.

De fato, pela definição de multiplicação,

$$\bar{\mathbf{A}} = \alpha\bar{\mathbf{A}} = \alpha(\xi, \eta) = (\alpha\xi, \alpha\eta).$$

Agora, pelas fórmulas $\xi = \delta_{oa}$ e $\eta = d_{OM} \cdot \delta_{oa}$, segue que para $\bar{\mathbf{A}} = \xi\bar{\mathbf{I}} + \eta\bar{\mathbf{O}}$ e $\bar{\mathbf{B}} = \xi_1\bar{\mathbf{I}} + \eta_1\bar{\mathbf{O}}$ temos

$$\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}} = \delta_{oa} \cdot \bar{\mathbf{I}} + \delta_{o_1a_1} \cdot \bar{\mathbf{I}} + d_{OM} \cdot \delta_{oa} \cdot \bar{\mathbf{O}} + d_{O_1M_1} \cdot \delta_{o_1a_1} \cdot \bar{\mathbf{O}} \quad (4.8)$$

$$= (\delta_{oa} + \delta_{o_1a_1}) \cdot \bar{\mathbf{I}} + (d_{OM} \cdot \delta_{oa} + d_{O_1M_1} \cdot \delta_{o_1a_1}) \cdot \bar{\mathbf{O}} \quad (4.9)$$

$$= (\xi + \xi_1)\bar{\mathbf{I}} + (\eta + \eta_1)\bar{\mathbf{O}} = \bar{\mathbf{C}}. \quad (4.10)$$

O produto escalar de doublets é definido pela fórmula

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \delta_{ab} \cdot \delta_{cd} \quad (4.11)$$

ou

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = |\bar{\mathbf{A}}| \cdot |\bar{\mathbf{B}}|, \quad (4.12)$$

onde o *valor absoluto* ou *módulo* $|\bar{\mathbf{A}}|$ do doublet ordinário $\bar{\mathbf{A}}$ é o seu ângulo e o módulo de um doublet especial é definido como zero. Segundo essa definição, o produto escalar dos doublets $\bar{\mathbf{A}}(\xi, \eta)$ e $\bar{\mathbf{B}}(\xi_1, \eta_1)$ é igual a

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = \xi \cdot \xi_1. \quad (4.13)$$

A equação (4.13) mostra que os doublets satisfazem os axiomas de 1 a 5 do grupo 4. De fato, dados os doublets $\bar{\mathbf{A}}(\xi, \eta)$, $\bar{\mathbf{B}}(\xi_1, \eta_1)$, $\bar{\mathbf{C}}(\xi_2, \eta_2)$ e o número real α temos

- $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = \xi \cdot \xi_1 = \xi_1 \cdot \xi = \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{A}}$;
- $(\alpha\bar{\mathbf{A}}) \cdot \bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = \xi' \cdot \xi_1 = \alpha\xi \cdot \xi_1 = \alpha(\xi \cdot \xi_1) = \alpha \cdot (\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}})$;
- $(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}) \cdot \bar{\mathbf{C}} = (\xi + \xi_1, \eta + \eta_1) \cdot (\xi_2, \eta_2) = (\xi + \xi_1) \cdot \xi_2 = \xi\xi_2 + \xi_1\xi_2 = \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{C}}$;
- $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{A}} = \xi \cdot \xi = \xi^2 = \bar{\mathbf{A}}^2 > 0$, para todo doublet ordinário $\bar{\mathbf{A}}$;
- $\bar{\mathbf{O}}^2 = 0$, para todo doublet especial $\bar{\mathbf{O}}$.

O axioma 6 é satisfeito devido à existência de um ângulo especial para cada doublet especial $\bar{\mathbf{O}}$. Temos então que cada doublet $\bar{\mathbf{O}}$ satisfaz $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{O}} = 0$ para todo doublet $\bar{\mathbf{A}}$ ordinário e, dessa maneira, podemos definir um produto escalar especial entre doublets especiais, a saber,

$$(\overline{\mathbf{ab} \cdot \mathbf{mn}}) = d_{ab} \cdot d_{mn} \quad (4.14)$$

onde $a \parallel b$ e $m \parallel n$.

Concluimos então que os doublets satisfazem todos os axiomas dos grupos 1, 2, 3, 4 e 5. Este fato implica que os axiomas duais são resultados válidos na geometria de Galileu, ou seja, o princípio da dualidade está estabelecido.

Dessa forma, mostramos que os axiomas da geometria de Galileu continuam válidos sob a substituição entre si dos termos "ponto" e "reta", "está sobre" e "passa por", "distância entre pontos" e "ângulo entre retas".

■

Capítulo 5

Teoremas clássicos e a dualidade

Este capítulo será dedicado ao estudo de grandes teoremas clássicos na perspectiva da geometria de Galileu e do princípio da dualidade.

O primeiro teorema a ser estudado será o Teorema de Menelaus (ca. 70-130 d.C), importante teorema sobre a colinearidade de pontos num triângulo.

Nosso segundo teorema é atribuído a Giovanni Ceva (1647-1734 d.C). Aqui é interessante citar que esses teoremas são frequentemente chamados de "*Teoremas Gêmeos*" [4] já que enquanto o teorema de Menelaus trata da colinearidade de três pontos, o teorema de Ceva aborda a concorrência de três retas. Giovanni Ceva estudou o teorema de Menelaus e em 1678 publicou um novo resultado importante hoje conhecido como o Teorema de Ceva.

O teorema proposto por Girard Desargues (1591-1661 d.C) será o terceiro a ser estudado na geometria de Galileu. Girard Desargues em seu livro *Brouillon Projet d'une atteinte aux événements des rencontres du Cône avec un Plan* de 1639, apresentou a *geometria projetiva*. O livro não foi bem aceito e recebeu várias críticas, mas em 1822 colaborou para os estudos de Poncelet [4].

Encerraremos o capítulo com o Teorema de Pappus, importante teorema provado primeiramente por Pappus de Alexandria (ca. 290-350 d.C). Pappus é conhecido como o último dos grandes geômetras da Antiguidade e seus trabalhos influenciaram o desenvolvimento da geometria projetiva.

As referências básicas utilizadas na elaboração do capítulo são: [1],[4], [5], [6], [7].

5.1 O teorema de Menelaus.

Para estudar o teorema de Menelaus segundo a geometria de Galileu, considere as seguintes convenções:

Convenção 1. Dados os pontos distintos X e Y do plano de Galileu, XY denota o segmento ordinário que une X e Y , **orientado** de X para Y . Em particular, escrevemos $XY = -YX$ pelo fato de os segmentos orientados XY e YX terem orientações opostas.

Convenção 2. Dados os pontos X, Y e Z , pertencentes a uma reta ordinária, denotamos $\frac{XY}{YZ} = \frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}}$, se XY e YZ têm a mesma orientação e, caso contrário, $\frac{XY}{YZ} = -\frac{\overline{XY}}{\overline{YZ}}$, onde \overline{XY} e \overline{YZ} indicam os comprimentos dos segmentos XY e YZ , respectivamente.

Teorema 5.1. (Teorema de Menelaus) Seja ABC um triângulo, X, Y e Z pontos sobre as retas suportes $BC, AB, e AC$, respectivamente, todos distintos dos vértices. Então

$$\frac{AY}{YB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1 \quad (5.1)$$

se, e somente se, X, Y e Z forem colineares.

Demonstração 5.1.

(\Leftarrow) Inicialmente, suponha que os pontos X, Y e Z estão sobre a mesma reta ordinária, em que $X \in BC, Y \in AB, Z \in AC$ (Figura 5.1). Marque o ponto $P \in XZ$ tal que $BP \parallel AC$. Então os pares de triângulos XBP, XCZ e BPY, AZY são semelhantes por uma semelhança de primeira espécie (Proposição 3.5).

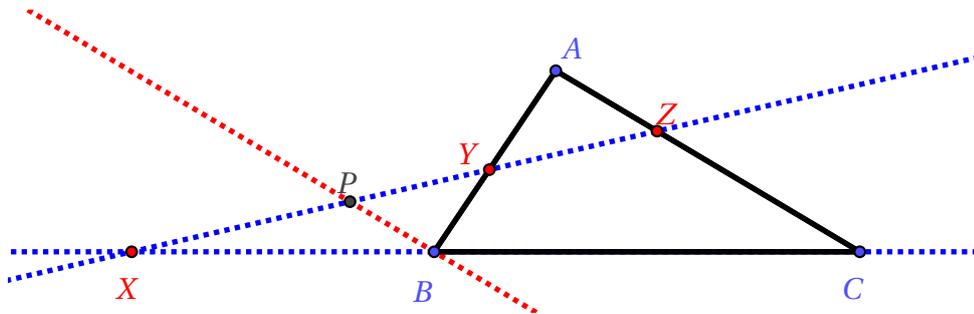


Figura 5.1: Volta do teorema de Menelaus.

Temos então que $\frac{BX}{XC} = -\frac{\overline{BP}}{\overline{CZ}}$ e $\frac{AY}{YB} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{BP}}$. Multiplicando membro a membro,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{AY}{YB} = -\frac{\overline{BP}}{\overline{CZ}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BP}}$$

E, dessa maneira,

$$\frac{AY}{YB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -\frac{\overline{AZ}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{CZ}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = -1.$$

(\Rightarrow) Suponha que X , Y e Z não são colineares com

$$\frac{AY}{YB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1. \quad (5.2)$$

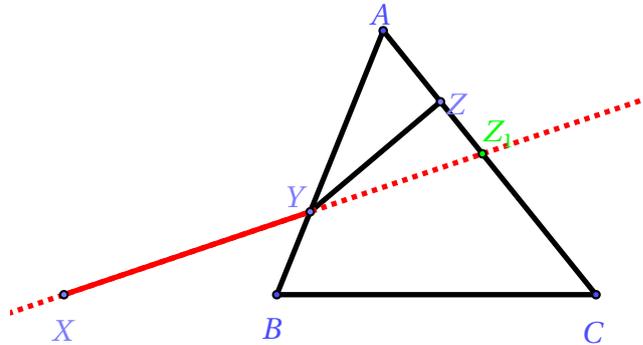


Figura 5.2: Ida do teorema de Menelaus.

Prolongando YX na Figura 5.2 obtemos $\{Z_1\} = YX \cap AC$ (Na **Observação 5.1** abaixo, mostra-se que não podemos ter $YX \parallel AC$). Pela demonstração anterior temos que

$$\frac{AY}{YB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CZ_1}{Z_1A} = -1. \quad (5.3)$$

Comparando (5.2) e (5.3) concluímos que

$$\frac{CZ}{ZA} = \frac{CZ_1}{Z_1A}. \quad (5.4)$$

Afirmção 5.1. Na equação (5.4), Z e Z_1 coincidem.

De fato, usando a distância de Galileu na equação (5.4), temos que

$$\frac{x_Z - x_C}{x_A - x_Z} = \frac{x_{Z_1} - x_C}{x_A - x_{Z_1}} \Rightarrow (x_Z - x_C) \cdot (x_A - x_{Z_1}) = (x_A - x_Z) \cdot (x_{Z_1} - x_C) \Rightarrow x_Z(x_A - x_C) = x_{Z_1}(x_A - x_C).$$

Como a reta AC é ordinária (lado do triângulo), $x_A - x_C \neq 0$, o que implica que $x_Z = x_{Z_1}$. Agora, como Z e Z_1 estão sobre AC , segue que $Z = Z_1$. Concluímos então que os pontos X , Y e Z são colineares. ■

Observação 5.1.

Se a igualdade (5.2) é válida, então não podemos ter $XY \parallel AC$ pois, caso contrário,

$\triangle BXY \sim \triangle BCA$ o que implicaria em

$$\frac{BX}{YB} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB \cdot BC - BX \cdot AB = AB \cdot BC - YB \cdot BC \quad (5.5)$$

$$\Rightarrow (BC - BX) \cdot AB = (AB - YB) \cdot BC \quad (5.6)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{(AB - YB)}{(BC - BX)} \Rightarrow \frac{YB}{BX} = \frac{AY}{XC}. \quad (5.7)$$

Substituindo a última igualdade em (5.2) obtemos $CZ = -ZA$ o que, pela distância de Galileu, implica que $x_A = x_C$, ou seja, AC é uma reta especial o que é um absurdo já que AC é lado do triângulo ABC .

Observação 5.2. *A reta que contém os pontos X , Y e Z é conhecida como reta de Menelaus.*

5.1.1 Dual do teorema de Menelaus

Para a demonstração do teorema dual de Menelaus considere a seguinte convenção:

Convenção 3. *Se a , b e c são retas concorrentes, então $\frac{\delta_{ab}}{\delta_{bc}} = \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{bc}}$ se δ_{ab} e δ_{bc} têm a mesma orientação e, caso contrário, $\frac{\delta_{ab}}{\delta_{bc}} = -\frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{bc}}$, onde δ'_{ab} e δ'_{bc} indicam as magnitudes dos ângulos δ_{ab} e δ_{bc} , respectivamente.*

Essa demonstração será realizada por meio da dualização dos passos adotados na volta do Teorema 5.1, o que mostra um aspecto interessante da dualidade nessa geometria.

Teorema 5.2. *(Dual do teorema de Menelaus) Seja ABC um triângulo, x , y , e z retas que passam, respectivamente, pelos vértices, C , B e A , mas não pelos lados. Se a , b e c são as retas suportes aos lados AB , BC e AC , respectivamente, então,*

$$\frac{\delta_{ay}}{\delta_{yb}} \cdot \frac{\delta_{bx}}{\delta_{xc}} \cdot \frac{\delta_{cz}}{\delta_{za}} = -1 \quad (5.8)$$

se, e somente se, x , y e z forem concorrentes.

Demonstração 5.2.

(\Leftarrow) Suponha que a reta x passa por C , a reta y por B e a reta z por A e que x , y e z são concorrentes em P (Figura 5.3). Seja $G \in b$, tal que A e G sejam paralelos, e seja $p = PG$. Temos então que $\triangle CPG \sim \triangle CPA$ e $\triangle BPG \sim \triangle BPA$, ambas semelhanças de 2ª espécie (3.6). Dessa maneira,

$$\frac{\delta_{bx}}{\delta_{xc}} = \frac{\delta'_{bp}}{\delta'_{cz}} \quad (5.9)$$

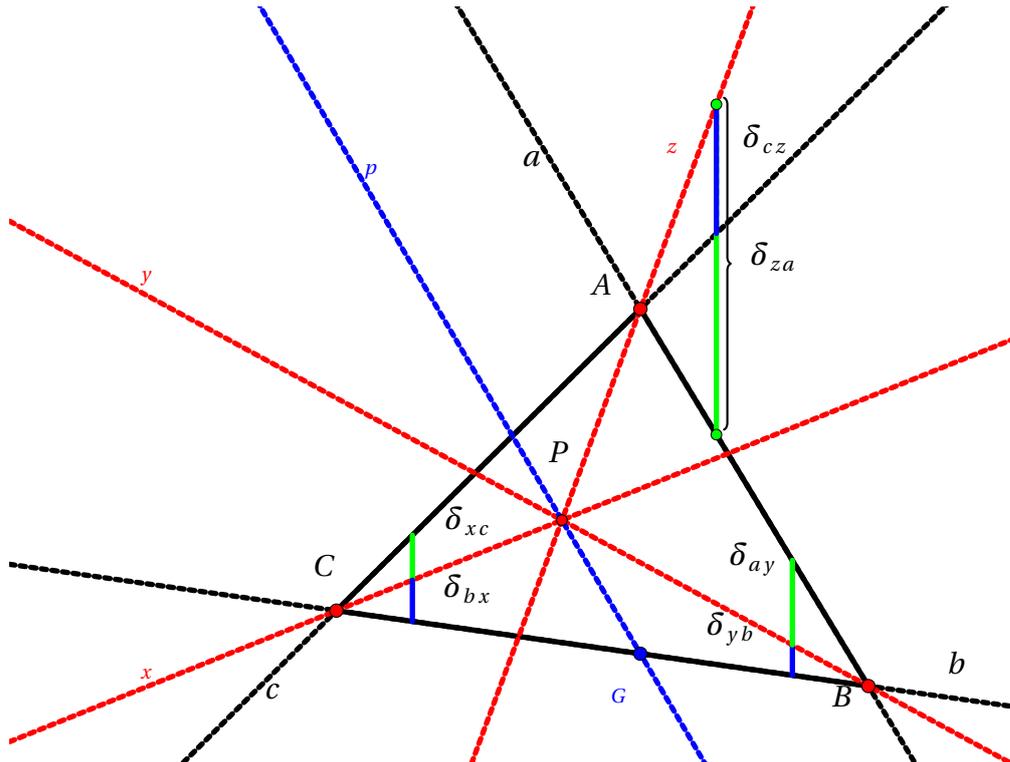


Figura 5.3: Volta do dual do teorema de Menelaus.

e

$$\frac{\delta_{ay}}{\delta_{yb}} = \frac{\delta'_{za}}{\delta'_{bp}}. \quad (5.10)$$

Multiplicando termo a termo,

$$\frac{\delta_{ay}}{\delta_{yb}} \cdot \frac{\delta_{bx}}{\delta_{xc}} \cdot \frac{\delta_{cz}}{\delta_{za}} = -\frac{\delta'_{za}}{\delta'_{bp}} \cdot \frac{\delta'_{bp}}{\delta'_{cz}} \cdot \frac{\delta'_{cz}}{\delta'_{za}} = -1.$$

(\Rightarrow) Suponha que $x \cap y$ não é vazia e que a reta z não passe pela interseção de x com y e que seja válida

$$\frac{\delta_{ay}}{\delta_{yb}} \cdot \frac{\delta_{bx}}{\delta_{xc}} \cdot \frac{\delta_{cz}}{\delta_{za}} = -1. \quad (5.11)$$

Trace z_1 passando pelo vértice A e concorrente às retas x e y conforme a Figura 5.4. Pela demonstração anterior temos que

$$\frac{\delta_{ay}}{\delta_{yb}} \cdot \frac{\delta_{bx}}{\delta_{xc}} \cdot \frac{\delta_{cz_1}}{\delta_{z_1a}} = -1. \quad (5.12)$$

Comparando (5.11) e (5.12) obtemos

$$\frac{\delta_{cz}}{\delta_{za}} = \frac{\delta_{cz_1}}{\delta_{z_1a}} \quad (5.13)$$

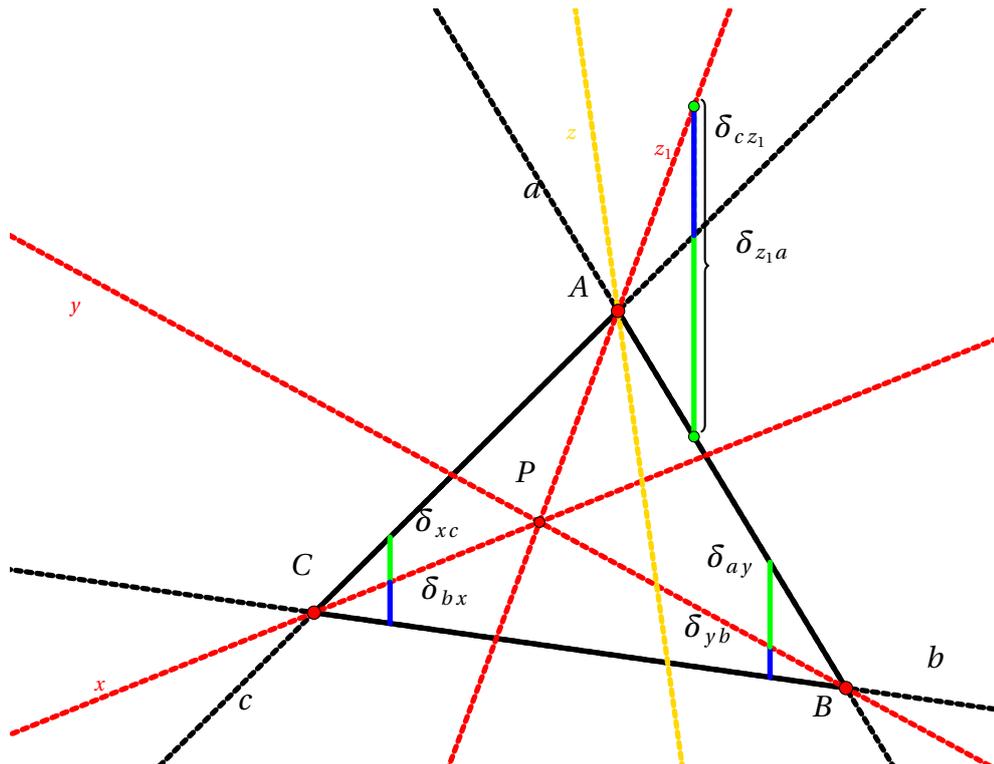


Figura 5.4: Ida do dual do teorema de Menelaus.

que ocorre somente se z e z_1 são retas coincidentes. Chegamos a essa conclusão usando as expressões das distâncias especiais para medir os ângulos da equação (5.13). Concluímos então que x , y e z são concorrentes¹. ■

Observação 5.3. Definiremos o ponto de concorrência entre as retas x , y e z como o ponto de Menelaus.

5.2 O teorema de Ceva.

Teorema 5.3. (Teorema de Ceva) Sejam ABC um triângulo qualquer e X, Y, Z pontos sobre as retas suportes aos lados BC, AC e AB , respectivamente. As retas AX, BY e CZ são concorrentes ou paralelas se, e somente se,

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$

Demonstração 5.3.

¹Se a igualdade $\frac{\delta_{ay}}{\delta_{yb}} \cdot \frac{\delta_{bx}}{\delta_{xc}} \cdot \frac{\delta_{cz}}{\delta_{za}} = -1$ é válida não podemos ter a reta z como especial pois o ângulo δ_{cz} não seria definido.

(\Rightarrow) Inicialmente, vamos supor que as retas AX , BY e CZ são concorrentes conforme a Figura 5.5, onde AX é suposto não especial; os demais casos de concorrência são análogos. Temos que o triângulo da Figura 5.5 pode ser decomposto conforme a Figura 5.6 e, dessa forma, é possível aplicar o Teorema 5.1.

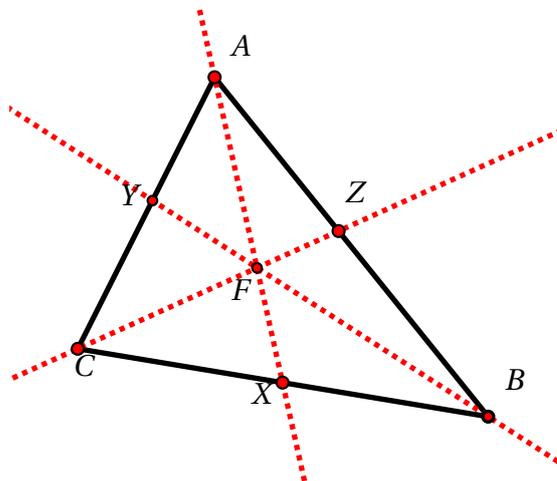


Figura 5.5: O teorema de Ceva.

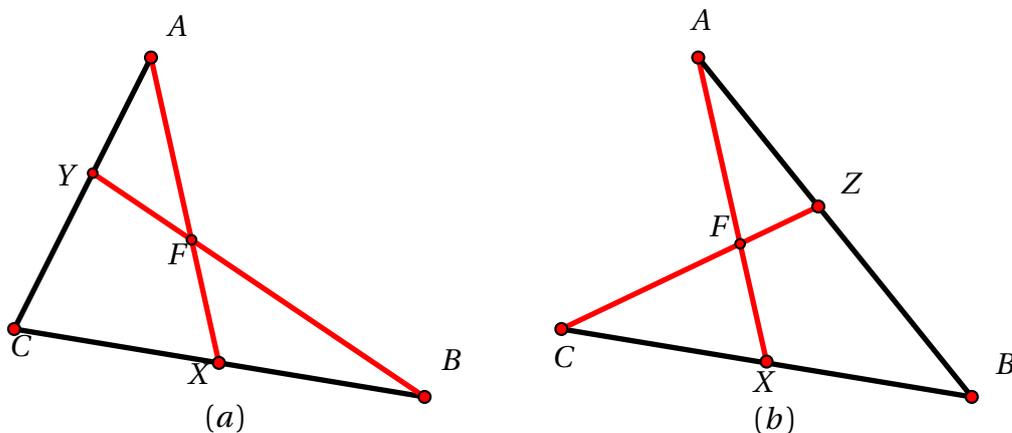


Figura 5.6: Decomposição do triângulo ABC.

Aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo ACX , temos que

$$\frac{CY}{YA} \cdot \frac{AF}{FX} \cdot \frac{XB}{BC} = -1. \quad (5.14)$$

Fazendo o mesmo para o triângulo ABX , temos que

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BC}{CX} \cdot \frac{XF}{FA} = -1. \quad (5.15)$$

Multiplicando (5.14) e (5.15) obtemos

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$

Suponha agora que AX , BY e CZ são paralelas (mas não são retas especiais) conforme a Figura 5.7. Desta maneira:

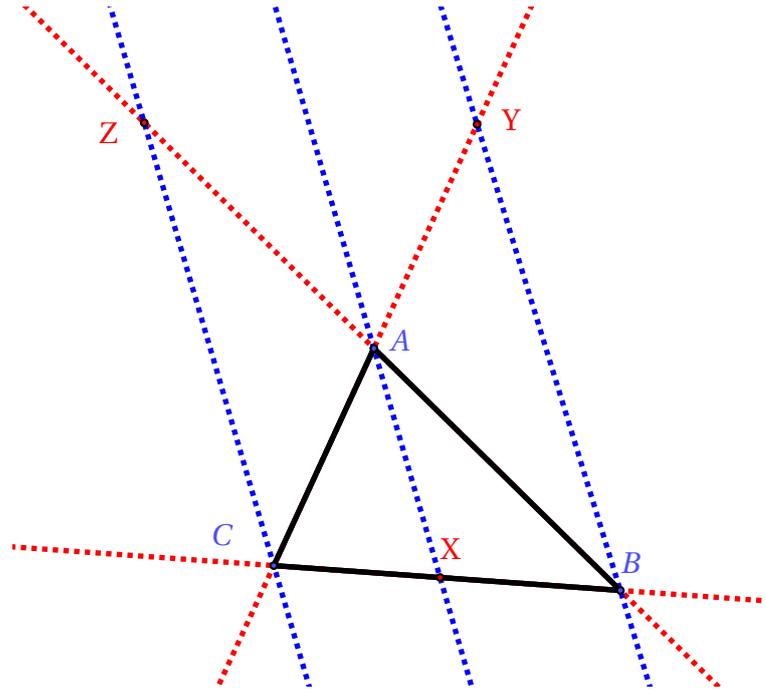


Figura 5.7: Teorema de Ceva com AX , BY e CZ paralelas.

- os triângulos ABY e AZC são semelhantes¹ e assim

$$\frac{AZ}{AB} = \frac{AC}{AY} = \frac{CZ}{YB};$$

- os triângulos CBY e CAX são semelhantes e assim

$$\frac{CB}{CX} = \frac{CY}{CA} = \frac{YB}{AX};$$

- os triângulos AXB e ZCB são semelhantes e assim

$$\frac{XB}{CB} = \frac{AB}{ZB} = \frac{AX}{CZ}.$$

¹As semelhanças aqui tratadas são todas de primeira espécie.

Temos,

$$\begin{aligned}
 \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} &= \\
 &= \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{AB}{AB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CB}{CB} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AC}{AC} \\
 &= \frac{AZ}{AB} \cdot \frac{AB}{ZB} \cdot \frac{CB}{XC} \cdot \frac{BX}{CB} \cdot \frac{AC}{YA} \cdot \frac{CY}{AC} \\
 &= \frac{AB}{ZB} \cdot \frac{ZB}{XC} \cdot \frac{CB}{YA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BX}{AX} \cdot \frac{CY}{YB} \\
 &= \frac{CZ}{YB} \cdot \frac{AX}{CZ} \cdot \frac{YB}{AX} \cdot \frac{CZ}{YB} \cdot \frac{YB}{AX} = 1,
 \end{aligned}$$

em que usamos as semelhanças anteriores na última igualdade¹.

(\Leftarrow) Para a recíproca, suponha que as retas ordinárias AX , CZ , BY não são concorrentes ou paralelas, com $AX \cap CZ = \{F\}$, (Figura 5.8) e que

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$

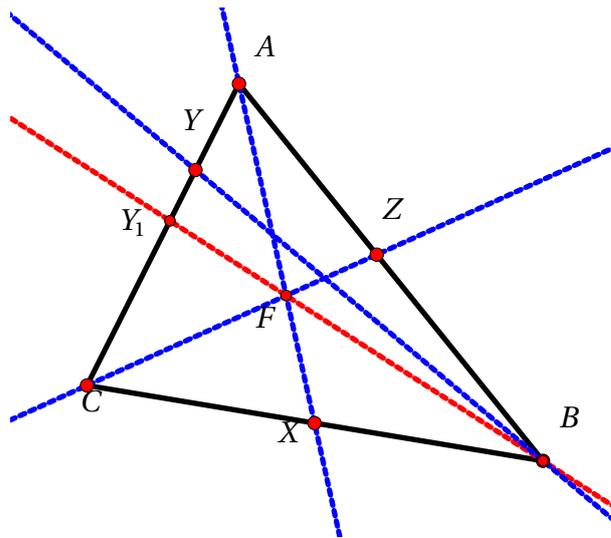


Figura 5.8: Recíproca do teorema de Ceva.

Ao prolongar BF encontramos $Y_1 \in AC$ e então

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY_1}{Y_1A} = 1.$$

Dessa forma,

$$\frac{CY}{YA} = \frac{CY_1}{Y_1A},$$

e, procedendo como na afirmação 5.1, concluimos o resultado.

¹Se AX , BY e CZ forem retas especiais, o resultado é imediato já que teríamos $AZ = XC$, $BX = YA$ e $CY = ZB$.

Na demonstração anterior, temos que BF intercepta AC . De fato, supondo $BF \parallel AC$, $AX \cap CZ = \{F\}$ e $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$, temos que a reta AXF é reta de Menelaus do triângulo ZBC (considerando CZ não especial). Assim,

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CF}{FZ} \cdot \frac{ZA}{AB} = -1$$

e

$$\frac{BX \cdot ZA}{XC} = -\frac{AB \cdot FZ}{CF}.$$

Pela hipótese podemos escrever

$$\frac{BX \cdot ZA}{XC} = -\frac{YA \cdot ZB}{CY}, \quad (5.16)$$

o que leva a

$$\frac{AB}{ZB} \cdot \frac{FZ}{CF} \cdot \frac{CY}{YA} = 1 \Rightarrow \frac{AB}{BZ} \cdot \frac{ZF}{FC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1, \quad (5.17)$$

ou seja, BFY é reta de Menelaus do triângulo AZC , mas isso é absurdo pois $AY = AC \parallel BF$. Portanto, se CZ não for especial, BF intercepta AC .

Se CZ é especial, então é necessário considerar dois casos: AX é especial ou AX intercepta CZ em F . Para o primeiro caso, segue que

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1 = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BA}{AC} \cdot \frac{CY}{YA} \Rightarrow \frac{BA}{YA} = \frac{CB}{CY}, \quad (5.18)$$

e então, pela distância de Galileu,

$$(x_A - x_B)(x_Y - x_C) = (x_B - x_C)(x_A - x_Y) \Rightarrow (x_A - x_C)x_Y = (x_A - x_C)x_B.$$

Como $x_A \neq x_C$, segue que $x_Y = x_B$ o que implica que BY é especial.

Se CZ é especial e AX intercepta CZ em F , então, de acordo com o que foi mostrado anteriormente, BY intercepta também CZ e, portanto, AX e BY são ordinárias. Neste caso ZFC é reta de Menelaus de ABX e GZC é reta de Menelaus de ABY , onde $\{G\} = BY \cap CZ$. Devemos mostrar agora que $G = F$. Do fato de ZFC ser reta de Menelaus de ABX , temos

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BC}{CX} \cdot \frac{XF}{FA} = -1,$$

mas $XF = XG$ e $FA = GA$ pois F e G estão sobre a mesma reta especial. Portanto, segue que

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BC}{CX} \cdot \frac{XG}{GA} = -1,$$

mas isso implica que ZGC é reta de Menelaus de ABX e portanto $G \in XA$, logo $G = F$. ■

5.2.1 Dual do teorema de Ceva

Teorema 5.4. (Dual do teorema de Ceva) *Seja ABC um triângulo qualquer e a, b, c as retas suportes aos lados AC, AB e BC , respectivamente. Se x, y, z são retas que passam pelos vértices, B, C e A , respectivamente, mas não pelos lados, então*

$$\frac{\delta_{az}}{\delta_{zb}} \cdot \frac{\delta_{bx}}{\delta_{xc}} \cdot \frac{\delta_{cy}}{\delta_{ya}} = 1$$

se, e somente se, $\{X\} = a \cap x$, $\{Y\} = b \cap y$ e $\{Z\} = c \cap z$ forem colineares ou paralelos.

Demonstração 5.4.

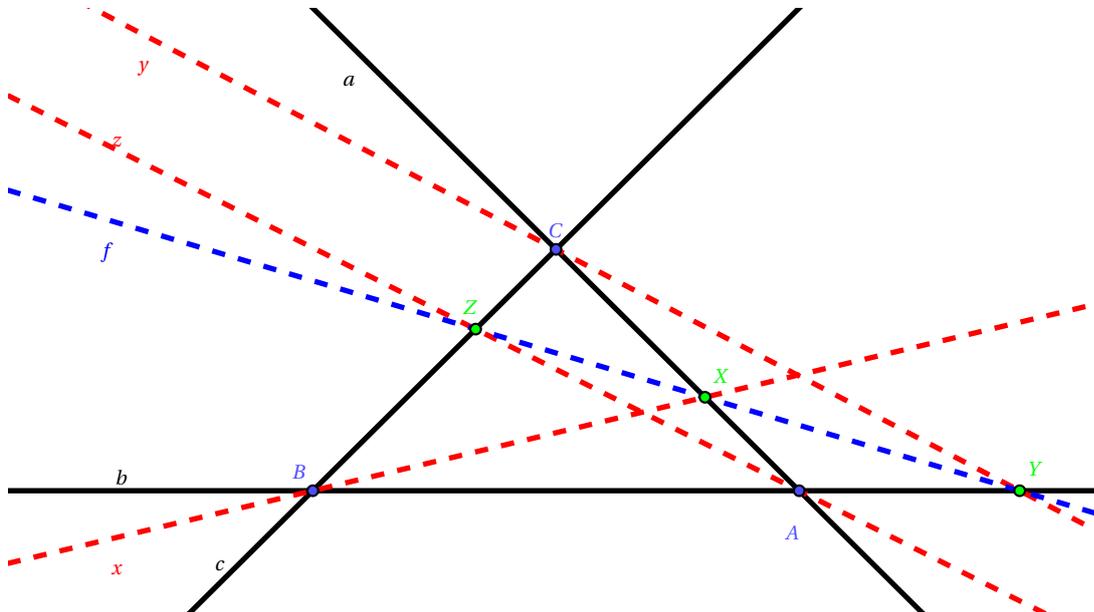


Figura 5.9: Dual do teorema de Ceva com pontos colineares.

(\Leftarrow) Suponha, inicialmente, que X, Y e Z são colineares (Figura 5.9) ou paralelos (Figura 5.10). Podemos decompor a Figura 5.9 conforme as Figuras 5.11 (a) e 5.11 (b) (a decomposição da Figura 5.10 é análoga) e então aplicar o teorema dual de Menelaus demonstrado anteriormente.

Note que se X, Y e Z forem colineares ou paralelos devemos ter y, b e f concorrentes em Y^1 e c, z e f concorrentes em Z^2 .

Pelo teorema dual de Menelaus para o triângulo BCX da figura 5.11 (a), o primeiro

¹De fato, não podemos ter $f \parallel b \parallel y$ pois, por hipótese $y \cap b = \{Y\}$. Além disso, se $f \parallel b$, X, Y e Z não seriam colineares já que teríamos Z e X em f , mas Y em b . De forma semelhante verificamos que f e y não podem ser paralelas.

²Argumentação análoga à anterior.

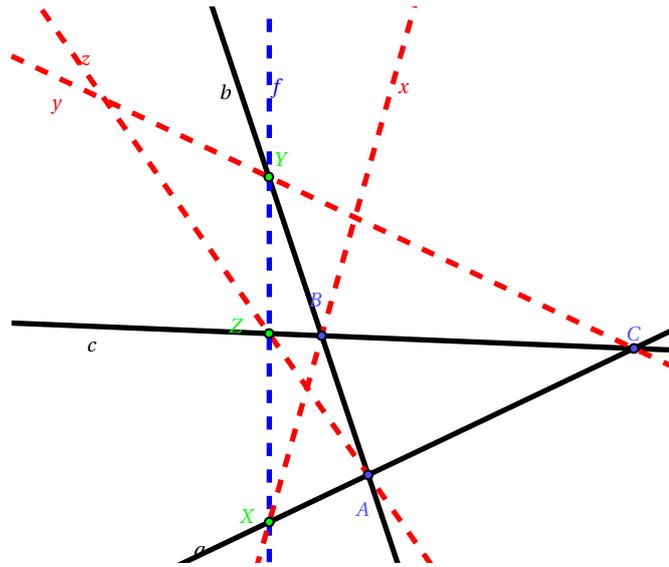


Figura 5.10: Teorema dual de Ceva com pontos paralelos.

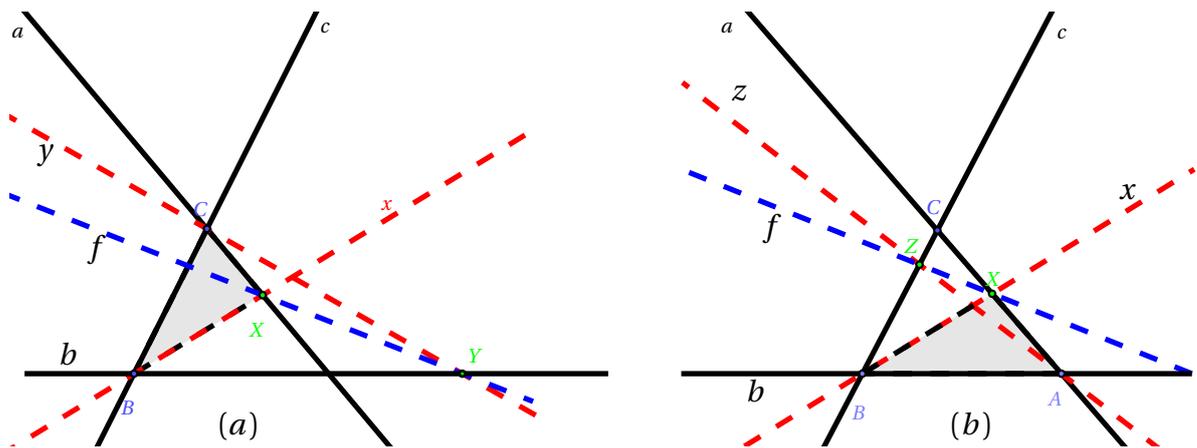


Figura 5.11: (a) Decomposição no $\triangle BCX$. (b) Decomposição no $\triangle BXA$.

caso ocorre se, e somente se,

$$\frac{\delta_{cy}}{\delta_{ya}} \cdot \frac{\delta_{af}}{\delta_{fx}} \cdot \frac{\delta_{xb}}{\delta_{bc}} = -1. \quad (5.19)$$

Fazendo o mesmo para o triângulo BXA da Figura 5.11 (b), o segundo caso ocorre, se e somente se,

$$\frac{\delta_{az}}{\delta_{zb}} \cdot \frac{\delta_{bc}}{\delta_{cx}} \cdot \frac{\delta_{xf}}{\delta_{fa}} = -1. \quad (5.20)$$

Multiplicando (5.19) e (5.20), concluímos que X , Y e Z são concorrentes ou paralelos se, e somente se,

$$\frac{\delta_{az}}{\delta_{zb}} \cdot \frac{\delta_{bx}}{\delta_{xc}} \cdot \frac{\delta_{cy}}{\delta_{ya}} = 1.$$

■

5.3 O teorema de Desargues.

Teorema 5.5. (Teorema de Desargues) Sejam $A, B, C, A', B', C', X, Y, Z$ pontos do plano de Galileu e os triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que $BC \cap B'C' = \{X\}$, $AC \cap A'C' = \{Y\}$ e $AB \cap A'B' = \{Z\}$. As retas ordinárias¹ AA', BB' e CC' são concorrentes ou paralelas se, e somente se, os pontos X, Y e Z forem colineares (Figura 5.12).

Demonstração 5.5.

(\Leftarrow) Inicialmente suponha que X, Y e Z são colineares e que AA' e CC' concorrem no ponto V . Vamos mostrar que $V \in BB'$, ou seja, que V, B e B' são colineares. Para isso, basta mostrar que o teorema de Menelaus é válido para o triângulo $AA'Z$, ou seja,

$$\frac{ZB'}{B'A'} \cdot \frac{A'V}{VA} \cdot \frac{AB}{BZ} = -1.$$

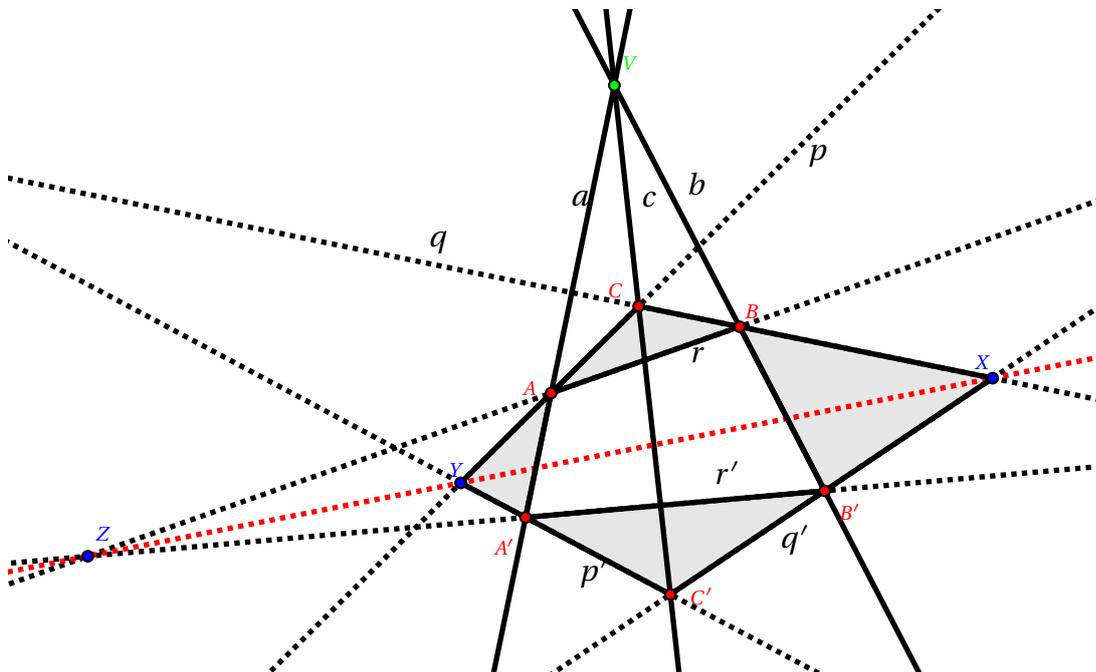


Figura 5.12: O teorema de Desargues.

De fato, aplicando o teorema de Menelaus aos triângulos YAA' , YZA e YZA' obte-

¹Os casos em que AA', BB' e CC' são retas especiais não serão tratados.

Então,

$$\frac{BA}{B'A'} \cdot \frac{ZB'}{ZB} = \frac{AC}{A'C'} \cdot \frac{C'Y}{CY}. \quad (5.21)$$

Por hipótese $BB' \parallel CC'$ e assim

$$\frac{XB}{XC} = \frac{XB'}{XC'} = \frac{BB'}{CC'}.$$

Agora, para os triângulos XBZ e $XB'Z$

$$\frac{XC}{CB} \cdot \frac{BA}{AZ} \cdot \frac{ZY}{YX} = -1 \quad \text{e} \quad \frac{XC'}{C'B'} \cdot \frac{B'A'}{A'Z} \cdot \frac{ZY}{YX} = -1,$$

e assim,

$$\frac{XC}{CB} \cdot \frac{BA}{AZ} = \frac{XC'}{C'B'} \cdot \frac{B'A'}{A'Z} \Rightarrow \frac{BA}{B'A'} = \frac{XC'}{C'B'} \cdot \frac{AZ}{A'Z} \cdot \frac{CB}{XC}. \quad (5.22)$$

Da mesma maneira, para os triângulos CXY e $C'XY$

$$\frac{XB}{BC} \cdot \frac{CA}{AY} \cdot \frac{YZ}{ZX} = -1 \quad \text{e} \quad \frac{XB'}{B'C'} \cdot \frac{C'A'}{A'Y'} \cdot \frac{YZ}{ZX} = -1,$$

e então,

$$\frac{XB}{BC} \cdot \frac{CA}{AY} = \frac{XB'}{B'C'} \cdot \frac{C'A'}{A'Y'} \Rightarrow \frac{CA}{C'A'} = \frac{XB'}{XB} \cdot \frac{AY}{A'Y'} \cdot \frac{BC}{B'C'}. \quad (5.23)$$

Substituindo (5.22) e (5.23) em (5.21),

$$\frac{AZ}{A'Z} \cdot \frac{ZB'}{ZB} = \frac{AY}{A'Y'} \cdot \frac{C'Y}{CY}. \quad (5.24)$$

Note que para os triângulos ZAA' e ZBB' , temos, respectivamente,

$$\frac{\hat{A}}{A'Z} = \frac{\hat{Z}}{AA'} = \frac{\hat{A}'}{AZ} \Rightarrow \frac{AZ}{A'Z} = \frac{\hat{A}'}{\hat{A}}$$

e

$$\frac{\hat{B}}{ZB'} = \frac{\hat{Z}}{BB'} = \frac{\hat{B}'}{ZB} \Rightarrow \frac{ZB'}{ZB} = \frac{\hat{B}}{\hat{B}'},$$

o que implica em

$$\frac{\hat{B} \cdot BB'}{ZB'} = \frac{\hat{A} \cdot AA'}{A'Z} \Rightarrow \frac{ZB'}{A'Z} = \frac{BB'}{AA'} \cdot \frac{\hat{B}}{\hat{A}}. \quad (5.25)$$

Substituindo (5.25) em (5.24),

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BB'}{AA'} \cdot \frac{\hat{B}}{\hat{A}} = \frac{AY}{A'Y'} \cdot \frac{C'Y}{CY}. \quad (5.26)$$

Da mesma forma, para os triângulos AYA' e CYC' , temos, respectivamente¹,

$$\frac{\hat{A}_*}{YA'} = \frac{\hat{A}'_*}{YA} = \frac{\hat{Y}}{AA'} \Rightarrow \frac{YA}{YA'} = \frac{\hat{A}'_*}{\hat{A}_*}$$

¹Os ângulos em A e A' serão denotados por \hat{A}_* e \hat{A}'_* .

e

$$\frac{\hat{C}}{YC'} = \frac{\hat{C}'}{YC} = \frac{\hat{Y}}{CC'} \Rightarrow \frac{YC'}{YC} = \frac{\hat{C}}{\hat{C}'},$$

o que implica em

$$\frac{\hat{A}' \cdot AA'}{YA} = \frac{\hat{C}' \cdot CC'}{YC} \Rightarrow \frac{YA}{YC} = \frac{AA'}{CC'} \cdot \frac{\hat{A}'}{\hat{C}'} \quad (5.27)$$

e então¹

$$\frac{YC'}{YA'} = \frac{CC'}{AA'} \cdot \frac{\hat{C}}{\hat{A}_*}. \quad (5.28)$$

Substituindo (5.28) em (5.26) e usando a hipótese inicial, isto é,

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BB'}{AA'} \cdot \frac{\hat{B}}{\hat{A}} = \frac{AY}{CY} \cdot \frac{CC'}{AA'} \cdot \frac{\hat{C}}{\hat{A}_*} \Rightarrow \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{\hat{B}}{\hat{A}} = \frac{\hat{C}}{\hat{A}_*} \Rightarrow \frac{\hat{B}}{\hat{A}} = \frac{\hat{C}}{\hat{A}_*}. \quad (5.29)$$

Na igualdade (5.29) usamos a convenção 1 para escrever $AY = -YA$ e então obter a igualdade $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$. Além disso, $\frac{BB'}{CC'} = \frac{BX}{XC}$ pois, $\triangle BB'X \sim \triangle CC'X$. Para concluir, note que $\hat{A} = \hat{A}_* - \alpha$ e $\hat{C} = \hat{B} + \alpha$ já que por hipótese $BB' \parallel CC'$. Nesse contexto,

$$\frac{\hat{B}}{\hat{A}} = \frac{\hat{B} + \alpha}{\hat{A} + \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{\alpha}{\hat{A}} = 1 + \frac{\alpha}{\hat{B}} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}, \quad (5.30)$$

ou seja, $AA' \parallel BB'$.

(\Rightarrow) A recíproca é obtida por meio de raciocínio análogo. Basta considerar o teorema de Menelaus para os triângulos VCB , VAB e VAC da Figura 5.12, obtendo, respectivamente, que

$$\frac{CX}{XB} \cdot \frac{BB'}{B'V} \cdot \frac{VC'}{C'C} = -1,$$

$$\frac{VB'}{B'B} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AA'}{A'V} = -1,$$

e

$$\frac{AY}{YC} \cdot \frac{CC'}{C'V} \cdot \frac{VA'}{A'A} = -1.$$

Multiplicando, novamente, membro a membro e cancelando os termos correspondentes obtemos,

$$\frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = -1,$$

ou seja, o teorema de Menelaus é válido para o triângulo ABC e este fato implica na colinearidade dos pontos X , Y e Z .

Para o caso em que $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ (Figura 5.14), o resultado é obtido pelas seguintes semelhanças (de primeira espécie) de triângulos:

¹Fazendo $\hat{A}' = \hat{A}_* \cdot \frac{YA}{YA'}$ e $\hat{C}' = \hat{C} \cdot \frac{YC}{YC'}$

$$\begin{aligned} \cdot \Delta AZA' \sim \Delta ZBB' &\Rightarrow \frac{AZ}{ZB} = -\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}, \\ \cdot \Delta XBB' \sim \Delta XCC' &\Rightarrow \frac{BX}{XC} = -\frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}}, \\ \cdot \Delta YAA' \sim \Delta YCC' &\Rightarrow \frac{CY}{YA} = -\frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}}. \end{aligned}$$

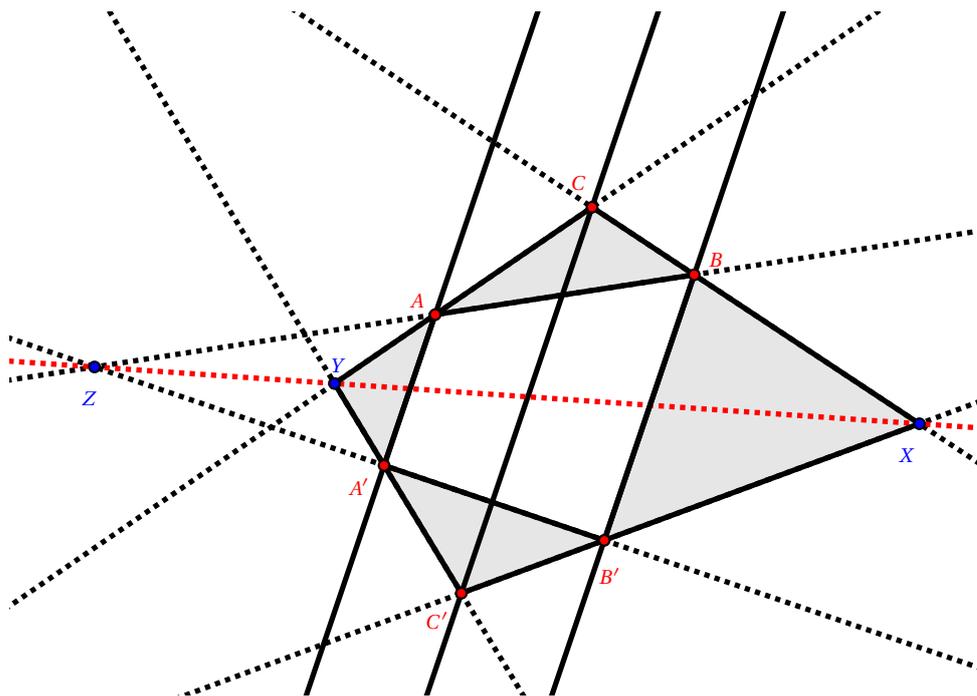


Figura 5.14: Teorema de Desargues com $AA' \parallel BB' \parallel CC'$.

Multiplicando termo a termo,

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{AA'}} = -1.$$

■

5.3.1 Dual do teorema de Desargues

Teorema 5.6. (Dual do teorema de Desargues) Sejam $a, b, c, a', b', c', x, y, z$ retas ordinárias do plano de Galileu e os triângulos delimitados pelas retas a, b, c e a', b', c' tais que x passa por $b \cap c$ e $b' \cap c'$, y passa por $a \cap c$ e $a' \cap c'$ e z passa por $a \cap b$ e $a' \cap b'$. Os pontos $a \cap a', b \cap b'$ e $c \cap c'$ são colineares ou paralelos se, e somente se, as retas x, y e z forem concorrentes.

Afirmção 5.2. O teorema de Desargues coincide com o seu teorema dual, ou seja, é um teorema auto dual.

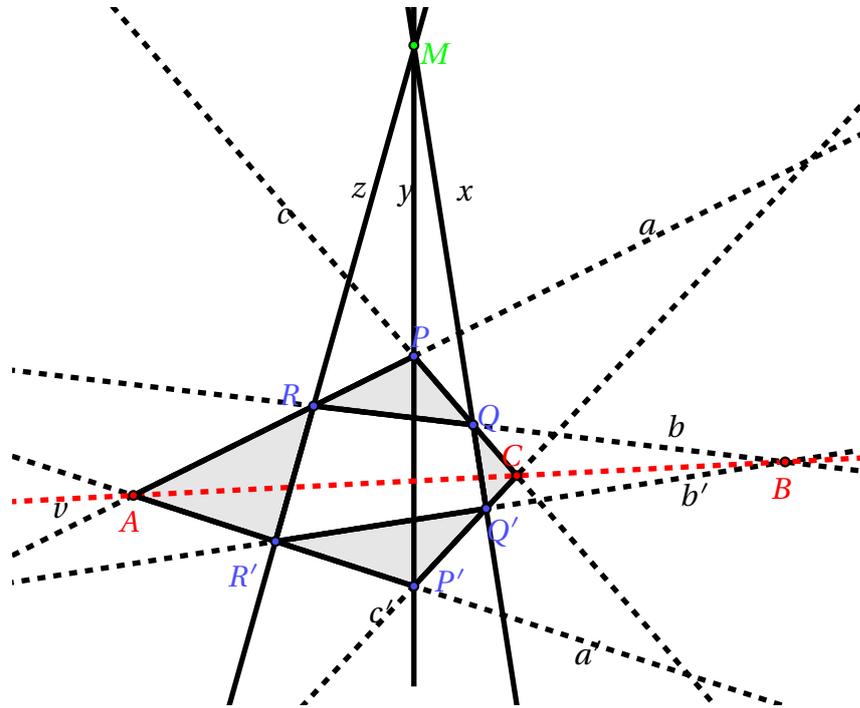


Figura 5.15: Dualidade no teorema de Desargues.

De fato, os dois teoremas podem ser descritos pela mesma redação: *dados dois triângulos, as interseções das retas que ligam lados correspondentes são colineares se e só se as retas que unem os vértices correspondentes concorrem*. Fato este que mostra a auto dualidade do teorema de Desargues.

Além disso, veja que, ao dualizar os elementos da Figura 5.12 obtemos a Figura 5.15 que também pode ser obtida de acordo com o Teorema 5.6.

5.4 O teorema de Pappus.

Teorema 5.7. (Teorema de Pappus) Se A, B, C, A', B', C' são seis pontos tais que A, B', C estão sobre a reta u e os pontos A', B, C' estão sobre a reta v , $AB \cap A'B' = \{L\}$, $BC \cap B'C' = \{M\}$, $CA' \cap C'A = \{N\}$, então os pontos L, M e N são colineares.

Demonstração 5.7.

Sejam P, Q e R pontos tais que $AB \cap CA' = \{P\}$, $CA' \cap B'C' = \{Q\}$, $AB \cap B'C' = \{R\}$ ¹ (Figura 5.16).

¹Para o caso em que $AB \parallel B'C'$, faça $A'B' \cap AC' = \{P\}$, $AC' \cap BC = \{Q\}$, $A'B' \cap BC = \{R\}$ com u, v, a, a' e b' retas de Menelaus. Se tivermos $AB \parallel B'C' \parallel A'C$, faça $AC' \cap BC = \{P\}$, $BC \cap A'B' = \{Q\}$, $AC' \cap A'B' = \{R\}$ com u, v, a, a' e b' retas de Menelaus.

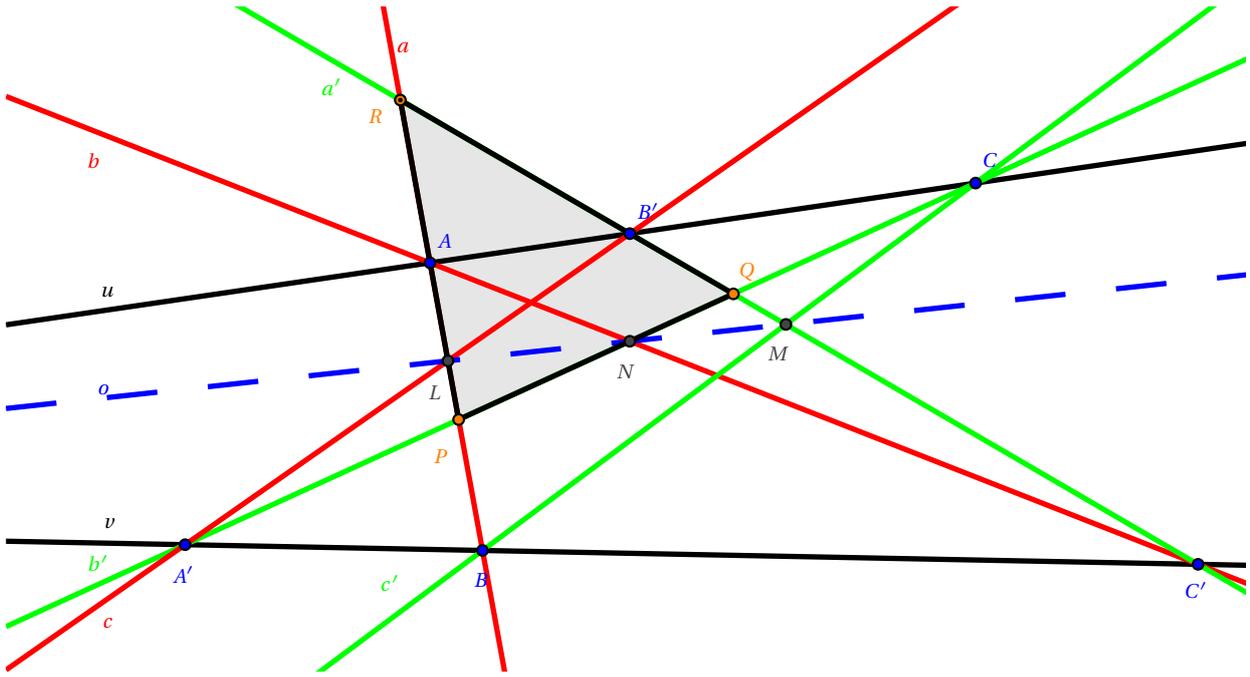


Figura 5.16: Teorema de Pappus.

Vamos mostrar que os pontos L, M, N estão sobre uma reta de Menelaus referente ao triângulo PQR . Para isso, considere, no triângulo PQR , as retas de Menelaus u, v, b, c, c' . Temos então que para a reta u

$$\frac{PA}{AR} \cdot \frac{RB'}{B'Q} \cdot \frac{QC}{CP} = -1, \quad (5.31)$$

para a reta v

$$\frac{RC'}{C'Q} \cdot \frac{QA'}{A'P} \cdot \frac{PB}{BR} = -1, \quad (5.32)$$

para a reta b

$$\frac{QN}{NP} \cdot \frac{PA}{AR} \cdot \frac{RC'}{C'Q} = -1, \quad (5.33)$$

para a reta c

$$\frac{PL}{LR} \cdot \frac{RB'}{B'Q} \cdot \frac{QA'}{A'P} = -1, \quad (5.34)$$

para a reta c'

$$\frac{QC}{CP} \cdot \frac{PB}{BR} \cdot \frac{RM}{MQ} = -1. \quad (5.35)$$

Multiplicando as equações em (5.31)-(5.35) obtemos

$$\frac{PL}{LR} \cdot \frac{RM}{MQ} \cdot \frac{QN}{NP} \cdot \frac{PA}{AR} \cdot \frac{RB'}{B'Q} \cdot \frac{QC}{CP} \cdot \frac{RC'}{C'Q} \cdot \frac{QA'}{A'P} \cdot \frac{PB}{BR} \cdot \frac{PA}{AR} \cdot \frac{RB'}{B'Q} \cdot \frac{QC}{CP} \cdot \frac{RC'}{C'Q} \cdot \frac{QA'}{A'P} \cdot \frac{PB}{BR} = -1. \quad (5.36)$$

Desta forma,

$$\frac{PL}{LR} \cdot \frac{RM}{MQ} \cdot \frac{QN}{NP} = -1 \quad (5.37)$$

como queríamos. Concluimos então que os pontos L, M, N são colineares. ■

5.4.1 Dual do teorema de Pappus

Teorema 5.8. (Dual do teorema de Pappus) *Sejam a, b, c, a', b', c' seis retas ordinárias tais que a, b, c concorrem no ponto U , e as retas a', b', c' concorrem no ponto V . Se l é a reta que passa por $\{A\} = a \cap b$ e $\{C\} = b' \cap a'$, n a reta que passa por $\{B\} = a \cap c'$ e $\{B'\} = c \cap a'$ e m a reta que passa por $\{A'\} = c' \cap b'$ e $\{C'\} = b \cap c$ então as retas l, n e m são concorrentes (Figura 5.17).*

Demonstração 5.8.

Realizaremos, novamente, a dualização dos passos da demonstração anterior para concluir o resultado.

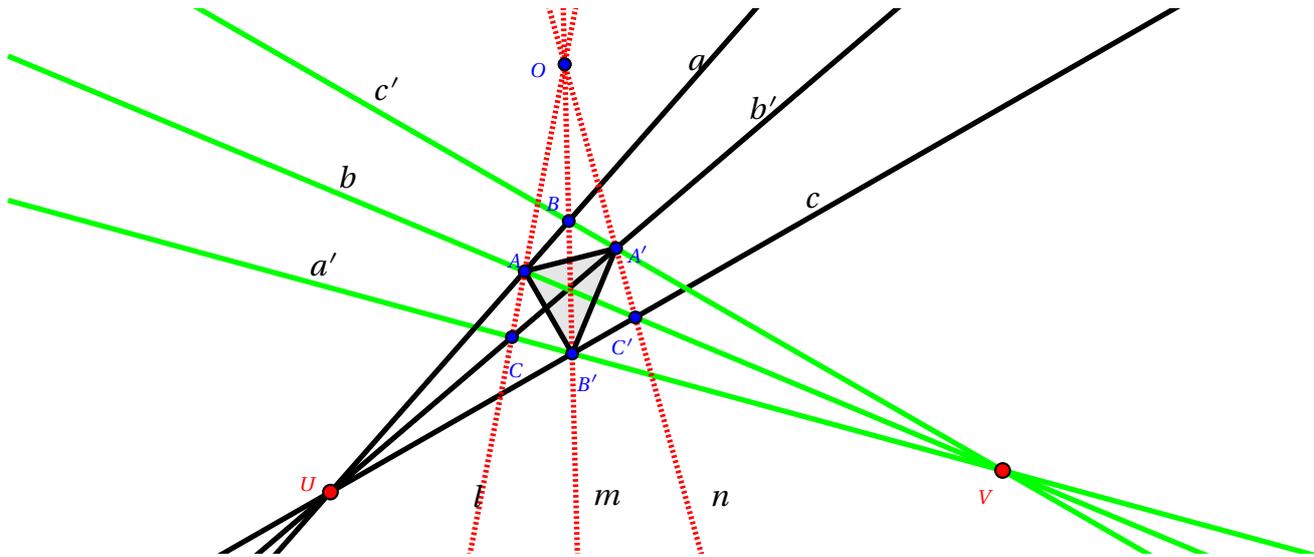


Figura 5.17: Dual do teorema de Pappus.

Sejam p, q e r retas ordinárias tais que p passa por A e B' , q por B' e A' e a reta r passa por A e A' . Vamos mostrar que as retas l, m e n satisfazem o teorema dual de Menelaus referente ao triângulo $AA'B$ determinado por p, q e r . Considere, nesse triângulo, os pontos de Menelaus U, V, B, C e C' . Temos então que para o ponto U

$$\frac{\delta_{pa}}{\delta_{ar}} \cdot \frac{\delta_{rb'}}{\delta_{b'q}} \cdot \frac{\delta_{qc}}{\delta_{cp}} = -1, \quad (5.38)$$

para o ponto V ,

$$\frac{\delta_{rc'}}{\delta_{c'q}} \cdot \frac{\delta_{qa'}}{\delta_{a'p}} \cdot \frac{\delta_{pb}}{\delta_{br}} = -1, \quad (5.39)$$

para o ponto B

$$\frac{\delta_{qn}}{\delta_{np}} \cdot \frac{\delta_{pa}}{\delta_{ar}} \cdot \frac{\delta_{rc'}}{\delta_{c'q}} = -1, \quad (5.40)$$

para o ponto C

$$\frac{\delta_{pl}}{\delta_{lr}} \cdot \frac{\delta_{rb'}}{\delta_{b'q}} \cdot \frac{\delta_{qa'}}{\delta_{a'p}} = -1, \quad (5.41)$$

para o ponto C'

$$\frac{\delta_{qc}}{\delta_{cp}} \cdot \frac{\delta_{pb}}{\delta_{br}} \cdot \frac{\delta_{rm}}{\delta_{mq}} = -1. \quad (5.42)$$

Multiplicando as equações em (5.38)-(5.42) obtemos

$$\frac{\delta_{pl}}{\delta_{lr}} \cdot \frac{\delta_{rm}}{\delta_{mq}} \cdot \frac{\delta_{qn}}{\delta_{np}} = -1, \quad (5.43)$$

que mostra que O é ponto de Menelaus do triângulo $AA'B$, ou seja, l , m e n são concorrentes. ■

Capítulo 6

Sugestões de atividades

Neste capítulo será apresentado um conjunto de sugestões de atividades para o estudo da geometria euclidiana a partir das ideias e conceitos da geometria de Galileu. Aqui reforçamos a ideia de que o estudo de geometrias não euclidianas pode ser uma ferramenta que colabora para o aprendizado e compreensão dos conceitos da geometria de Euclides. O aluno é levado ao estudo comparativo dos elementos e propriedades em ambas as geometrias com objetivo de aplicar e analisar os conceitos e definições estudados [15].

6.1 Atividades

6.1.1 Distância na geometria de Galileu

Nesta seção discutiremos alguns conceitos iniciais da geometria de Galileu com auxílio de papel quadriculado ou Geogebra. Para responder às questões considere, primeiramente, as seguintes definições:

Definição 6.1. *Uma reta r é dita especial se for paralela ao eixo Oy , caso contrário, r é chamada de reta ordinária.*

Definição 6.2. *A distância entre os pontos A e B do plano de Galileu é dada por*

$$d_{AB} = |x_B - x_A|.$$

Definição 6.3. *A distância δ_{AB} entre os pontos A e B de uma reta especial é dada por*

$$\delta_{AB} = |y_B - y_A|.$$

Atividade 1. (Conceitos Iniciais)

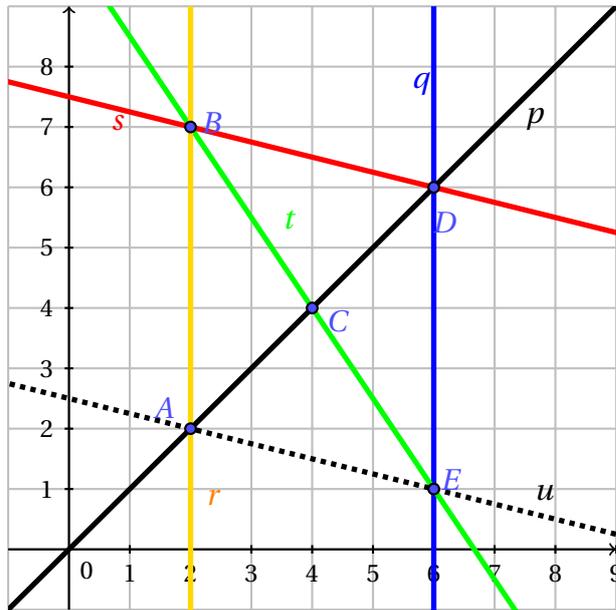


Figura 6.1: Retas no plano de Galileu.

1. Escreva as coordenadas dos pontos A, B, C, D e E da Figura 6.1.
2. Classifique as retas p, q, r, s, t e u em ordinária ou especial de acordo com a Figura 6.1.
3. Quais pontos estão sobre retas especiais?
4. Determine a distância de Galileu entre os pontos A e D , A e E , A e B .
5. O que afirmar sobre as distâncias d_{AD} e d_{AE} ? No plano euclidiano ocorreria o mesmo?
6. Calcule o perímetro do triângulo ACE usando a distância de Galileu.
7. Repita o item anterior usando a distância euclidiana.

6.1.2 Ângulo entre retas e equação da reta

Nestas atividades trabalharemos com os conceitos de ângulo entre retas e equação da reta.

Atividade 2. (Circunferência e ângulo)

1. Qual é a definição de circunferência segundo a geometria euclidiana?

- Usando a mesma definição do item anterior, esboce o gráfico de uma circunferência de centro A e raio $r=1$ no plano de Galileu.
- Na geometria euclidiana, o ângulo α entre as retas l_1 e l_2 que se intersectam no ponto A é definido como o comprimento do arco circular \widehat{PQ} determinado pela circunferência S de raio unitário centrada em A (Figura 6.2).

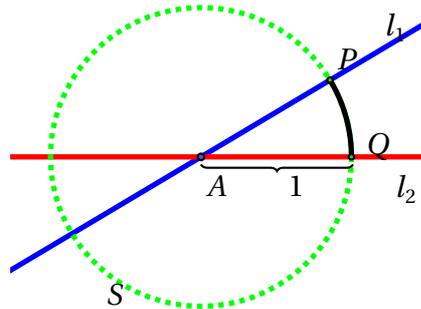


Figura 6.2: Ângulo euclidiano.

De acordo com essa definição e com o item anterior, represente, no plano de Galileu, o ângulo $\delta_{l_1 l_2}$ entre as retas ordinárias l_1 e l_2 que se intersectam no ponto A .

- Determine o ângulo, na geometria de Galileu, entre as retas da Figura 6.3 com base na definição anterior. Qual distância deve ser usada para medir os ângulos dados?

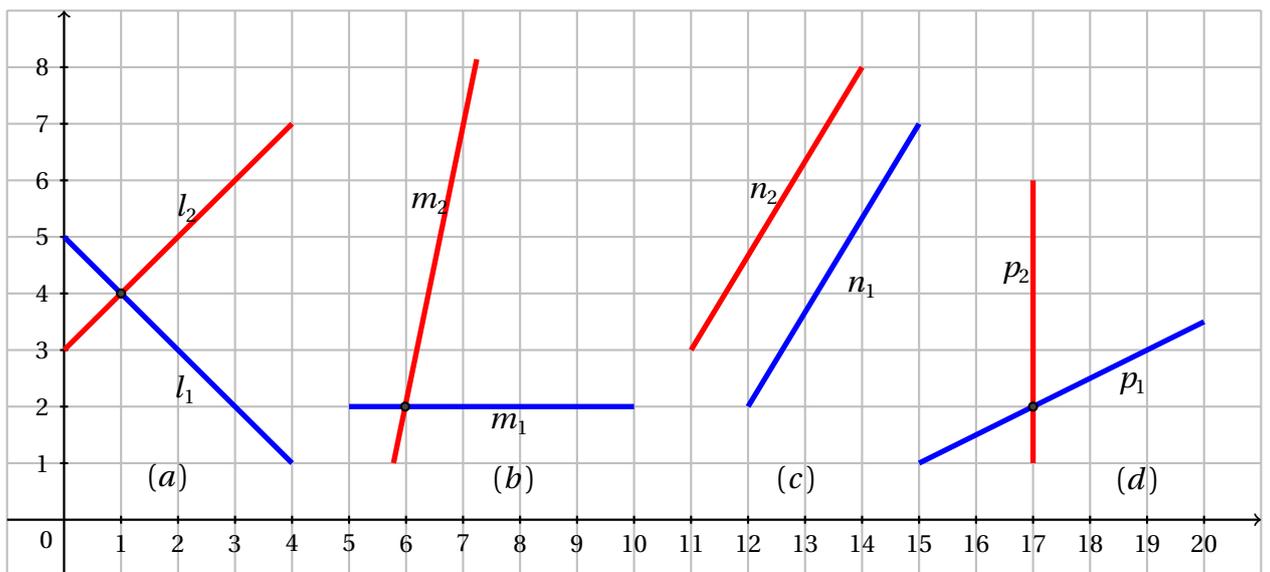


Figura 6.3: Ângulo entre retas.

Atividade 3. (Retas e ângulos)

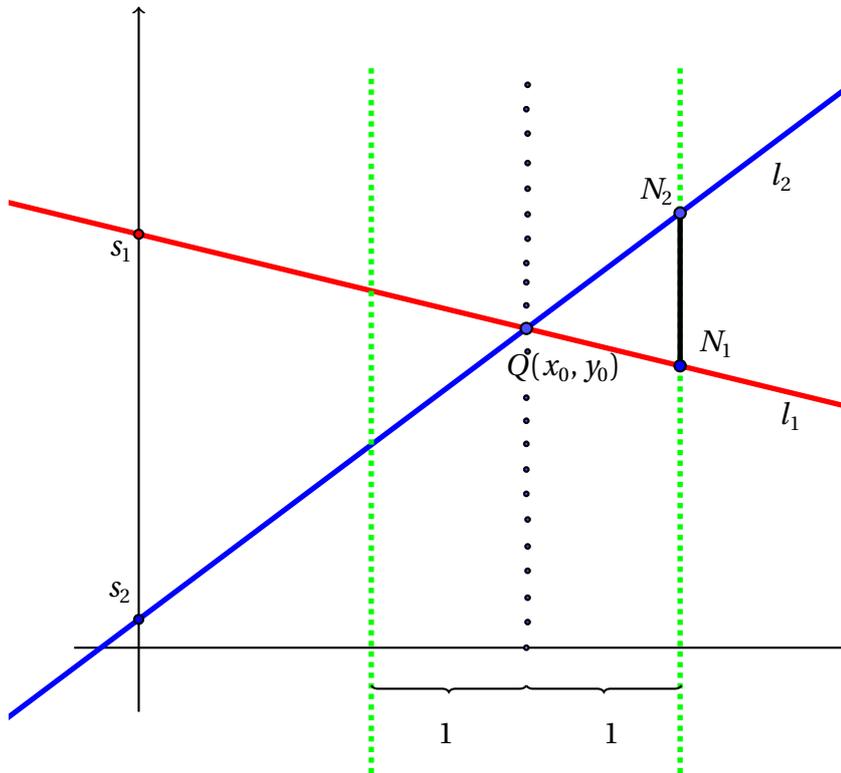


Figura 6.4: Ângulo e equação da reta.

Responda às questões de acordo com a Figura 6.4.

1. Identifique os elementos geométricos da Figura 6.4.
2. Se k_1 e k_2 são os coeficientes angulares das retas l_1 e l_2 , respectivamente, escreva as equações dessas retas. De acordo com a Figura 6.4, como comparar k_1 e k_2 ? Justifique.
3. O que afirmar sobre as retas l_1 e l_2 no ponto $Q(x_0, y_0)$? Escreva uma relação que justifique essa afirmação.
4. Expresse as coordenadas de N_1 e N_2 em termos de k_1 , k_2 , x_0 , y_0 e das ordenadas dos pontos s_1 e s_2 .
5. Usando os itens anteriores e as ideias da atividade 2, determine o ângulo $\delta_{l_1 l_2}$ entre as retas l_1 e l_2 . Conclua como definir o ângulo entre duas retas ordinárias na geometria de Galileu a partir das equações dessas retas.
6. Compare sua resposta ao anterior com a forma usual para determinar ângulos entre retas na geometria euclidiana.

Atividade 4. (*Ângulos do triângulo*)

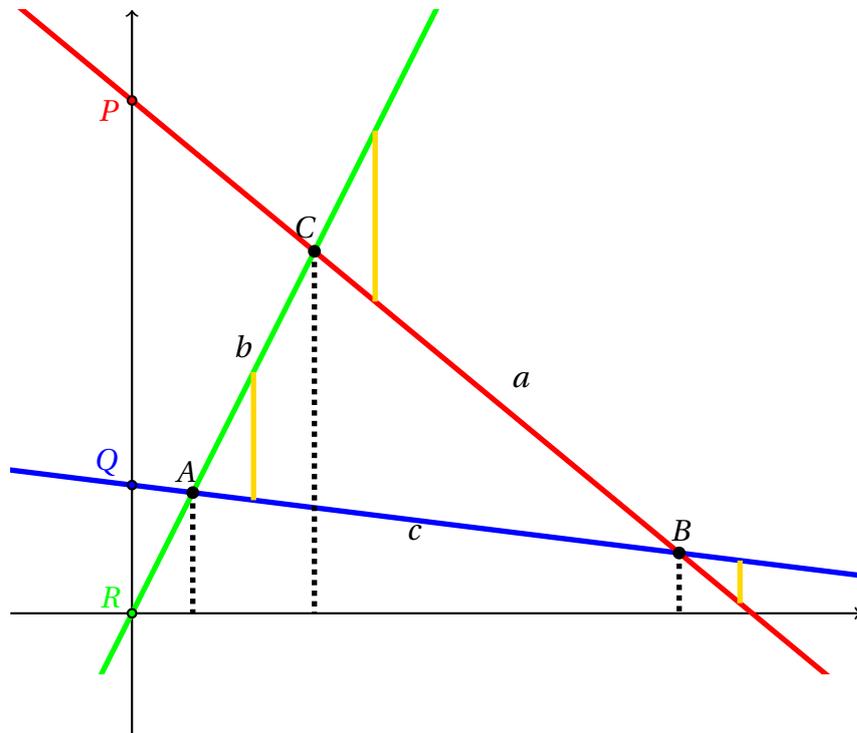


Figura 6.5: Ângulos do triângulo.

Definição 6.4. Na geometria de Galileu, um triângulo ABC é o polígono formado por três pontos A , B e C não colineares e três segmentos de retas ordinárias AB , AC e BC .

Na Figura 6.5, ABC é um triângulo da geometria de Galileu e $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$. Sabendo que k_1 , k_2 e k_3 são os coeficientes angulares das retas BC , AC e AB , respectivamente, responda os itens abaixo no contexto da geometria de Galileu.

1. De acordo com o gráfico, qual é a relação entre as medidas dos lados a , b e c ? Essa relação vale para qualquer triângulo do plano de Galileu?
2. Escreva as equações das retas ordinárias presentes na Figura 6.5.
3. Determine as medidas dos ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} do triângulo ABC .
4. Como relacionar os ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} do triângulo ABC ?

6.1.3 Cônicas e a geometria de Galileu

Nas atividades seguintes é recomendado o uso de papel quadriculado ou software Geogebra.

Atividade 5. (Circunferência)

A circunferência do plano de Galileu da Figura 6.6 possui equação da forma $(x-a)^2 = r^2$ onde a é a abscissa dos centros e r é o seu raio.

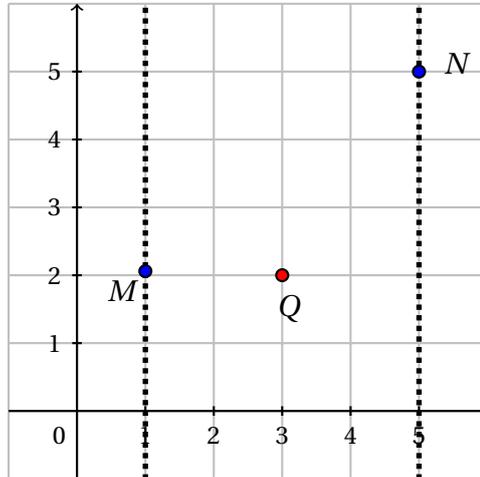


Figura 6.6: Circunferência centrada em Q.

1. Qual é o diâmetro dessa circunferência?
2. Escreva a equação dessa circunferência de acordo com as informações da Figura 6.6.
3. Esboce a circunferência correspondente no plano euclidiano.
4. Qual é a equação da circunferência do item anterior?
5. Compare as equações encontradas nos itens 2 e 4.

Atividade 6. (Parábola)

1. Escreva a definição de parábola na geometria euclidiana.
2. Usando a definição anterior, esboce o gráfico de uma parábola no plano de Galileu de foco F e reta diretriz d quando essa reta é:
 - a) uma reta especial.
 - b) uma reta ordinária não paralela ao eixo Ox .
 - c) uma reta ordinária paralela ao eixo Ox .
3. Escreva as equações das parábolas encontradas no item anterior no contexto da geometria de Galileu.

Atividade 7. (Elipse)

1. Escreva a definição de elipse na geometria euclidiana.
2. Usando a definição do item 1, esboce, no plano de Galileu, o gráfico de uma elipse de focos F_1 e F_2 , centro C , distância focal $2c = 4$ e constante $2a = 6$ quando F_1F_2 é:
 - a) uma reta ordinária.
 - b) uma reta especial.
3. Escreva a equação da elipse em que F_1F_2 é uma reta ordinária.

Atividade 8. (Hipérbole)

1. Escreva a definição de hipérbole na geometria euclidiana.
2. Usando a definição do item 1, esboce o gráfico de uma hipérbole no plano de Galileu de focos F_1 e F_2 , centro C , distância focal $2c = 4$ e constante $2a = 2$ quando F_1F_2 é:
 - a) uma reta ordinária.
 - b) uma reta especial.

6.1.4 O princípio da dualidade na geometria de Galileu

O objetivo destas atividades é compreender o que é o princípio da dualidade, verificar sua validade na geometria de Euclides, além de aplicá-lo em resultados válidos na geometria de Galileu. Primeiramente vamos conhecer o que diz este princípio, que é válido na geometria de Galileu.

*"O princípio da dualidade estabelece que a troca entre si dos termos **pontos** e **retas**, **distância** e **ângulo**, está sobre e passa por, em qualquer teorema da geometria de Galileu, resulta num novo teorema também válido nessa geometria"*[1].

Atividade 9. (Primeiros passos)

Nesta atividade, considere que as sentenças estão no contexto da geometria de Galileu.

1. Aplique o princípio da dualidade para o resultado: *dois pontos determinam uma única reta.*
2. Qual é o dual da sentença *"retas concorrentes"*?

3. Dualize o resultado: *as retas a , b e c concorrem no ponto P .*
4. Defina ponto médio do segmento AB e dualize sua definição.
5. No triângulo da Figura 6.7, a é a reta suporte ao lado BC , b é a reta suporte ao lado AC e c é a reta suporte ao lado AB . Determine a figura dual a este triângulo. O que afirmar sobre esta figura?

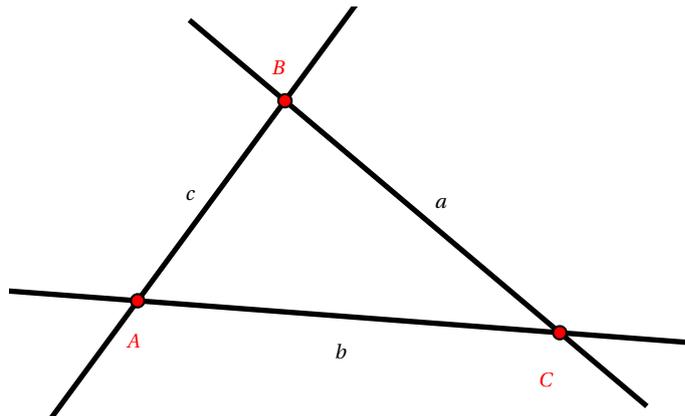


Figura 6.7: Triângulo do plano de Galileu.

Atividade 10. *(O princípio da dualidade na geometria euclidiana)*

O princípio da dualidade é válido numa geometria quando a analogia entre pontos e retas é completa, ou seja, a troca desses termos num resultado válido numa geometria gera um novo resultado também válido nesta geometria. Responda os itens no contexto da geometria de Euclides.

1. Considere a definição : *retas paralelas são aquelas que não possuem pontos em comum.* Qual é o dual dessa definição? É um resultado válido na geometria euclidiana? Por quê?
2. O dual da distância entre os pontos A e B é interpretado como o ângulo entre as retas duais de A e B , a e b , respectivamente. A distância entre os pontos A e B pode ser tão grande quanto se deseja, o mesmo pode ocorrer com o ângulo entre as retas a e b ? Justifique.
3. O que os itens anteriores sugerem a respeito do princípio da dualidade na geometria euclidiana?

Atividade 11. *(O cotrapezóide)*

1. Na geometria de Galileu, um quadrilátero que possui apenas dois lados paralelos é chamado de trapézio. O quadrilátero dual é chamado de *cotrapezoide*. Esboce um cotrapezoide no plano de Galileu.

Desafio 1. (O teorema da bissetriz interna)

1. No contexto da geometria euclidiana, enuncie o teorema da bissetriz de um ângulo interno de um triângulo.
2. Com auxílio de papel quadriculado ou Geogebra, construa a Figura 6.8 e verifique a validade do teorema anterior segundo a geometria de Galileu para o triângulo da figura construída.

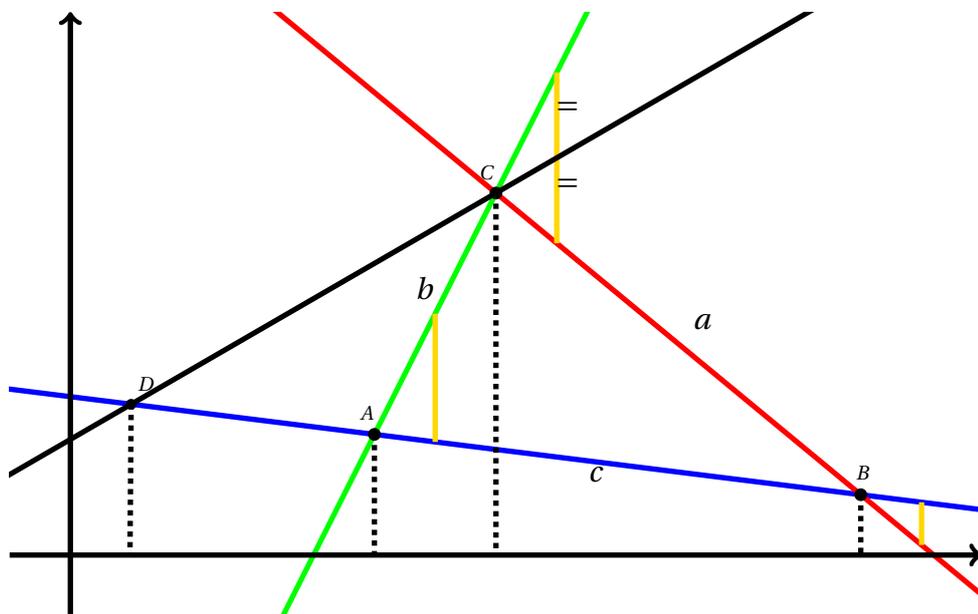


Figura 6.8: O teorema da bissetriz de um ângulo interno.

3. No contexto da geometria de Galileu, aplique o princípio da dualidade à Figura 6.8 para construir uma figura dual com auxílio de papel quadriculado ou Geogebra.

Desafio 2. (O teorema de Pappus e a dualidade)

(O teorema de Pappus) "Sejam A, B, C, A', B', C' seis pontos tais que A, B, C estão sobre a reta u e os pontos A', B, C' estão sobre a reta v . Se $AB \cap A'B' = \{L\}$, $BC \cap B'C' = \{M\}$, $CA' \cap C'A = \{N\}$, então os pontos L, M e N são colineares.

1. Dualize a redação do teorema de Pappus enunciado acima.

2. A Figura 6.9 ilustra o teorema de Pappus no plano de Galileu. Aplique o princípio da dualidade para esta figura. Dica: comece pelos pontos colineares das retas u e v .

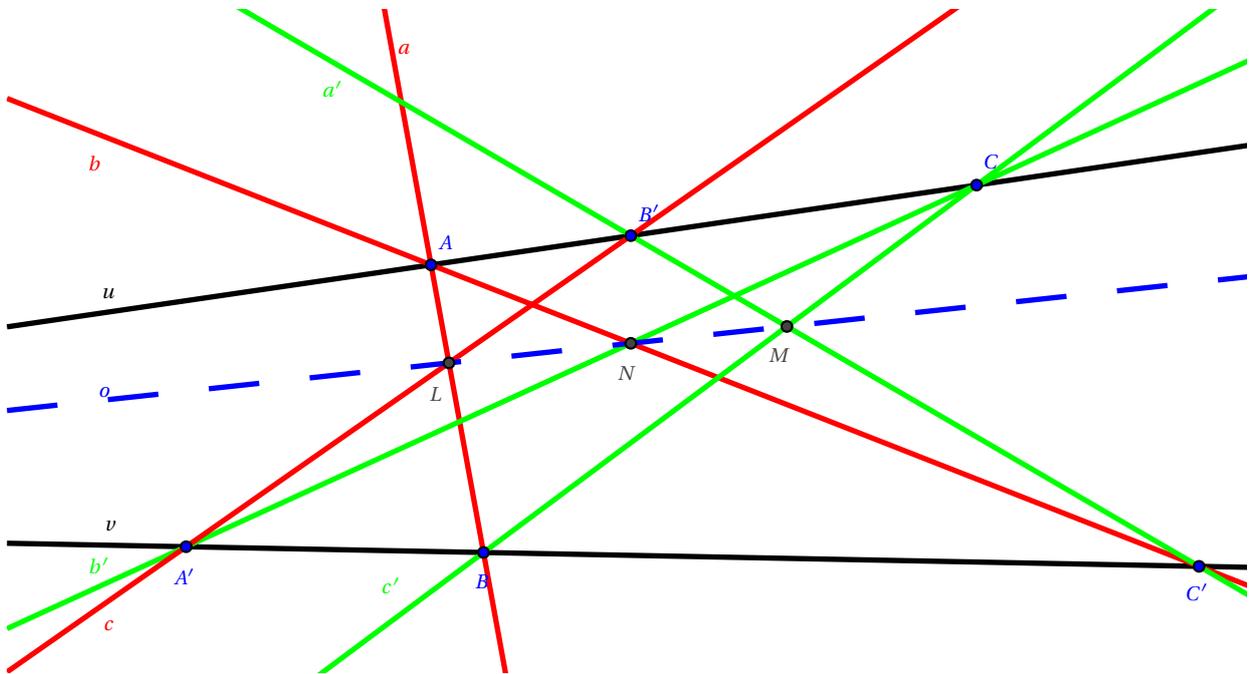


Figura 6.9: O Teorema de Pappus na geometria de Galileu.

6.2 Sugestões de mediação das atividades propostas

6.2.1 Atividade 1

Esta questão inicial tem o objetivo de apresentar novos conceitos dentro da geometria de Galileu. De posse de uma nova classificação de retas no plano e de uma nova maneira de medir distâncias o aluno é levado ao estudo do plano de Galileu. Aqui recomenda-se algumas questões complementares aos itens apresentados com objetivo de aprofundar a discussão:

- Os pontos do plano de Galileu são representados de maneira diferente que no plano de Euclides?
- Como comparar, no quesito simplicidade, as distâncias de Galileu e de Euclides?
- O perímetro de um polígono na geometria de Galileu é interpretado da mesma maneira que na geometria euclidiana?

6.2.2 Atividade 2

O objetivo desta questão é a internalização da definição de circunferência e de ângulo no plano euclidiano. A partir da definição de circunferência euclidiana, o aluno deve representar a figura equivalente no plano de Galileu aplicando a definição de distância discutida na atividade 1. É interessante verificar que, no plano de Galileu, a circunferência possui infinitos centros. A representação correta da circunferência no plano de Galileu indica que o aluno é capaz de reconhecer os elementos da circunferência tanto na geometria euclidiana quanto na geometria de Galileu.

Uma questão interessante que pode ser debatida é se a Figura 6.10 representa uma circunferência no plano de Galileu. Aqui espera-se que o aluno seja capaz de perceber que a resposta é negativa pois a distância entre o ponto A e os pontos sobre as retas da figura não é constante.

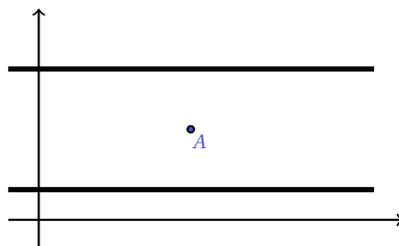


Figura 6.10: Figura que não representa uma circunferência no plano de Galileu.

Além disso, é apresentada uma maneira geométrica sobre como medir ângulos entre retas na geometria de Galileu. No item (c) da questão 4, questione o aluno sobre o porque da inexistência do ângulo entre as retas n_1 e n_2 , já no item (d) o questionamento é se o ângulo não existe ou se é infinito. Use a definição de ângulo na geometria de Galileu para conduzi-lo à resposta: não existe. É importante que o aluno se familiarize com essa maneira de medir ângulos pois ela é pré-requisito para algumas atividades posteriores.

6.2.3 Atividade 3

Na atividade anterior foi discutida uma maneira geométrica para medir ângulos entre retas na geometria de Galileu. O objetivo desta atividade é introduzir uma forma algébrica para determinar o ângulo entre retas nesta geometria.

Aqui espera-se reforçar o conceito e as propriedades do coeficiente angular de uma reta euclidiana já que a equação da reta (não vertical) nas duas geometrias pode ser representada da mesma maneira. No item 1, por "elementos geométricos" conduza o

aluno a entender, caso haja dúvida, que se trata das retas ordinárias e da circunferência unitária centrada no ponto $Q(x_0, y_0)$.

No item 2 é esperado que o aluno indique a resposta correta a partir da análise da declividade das retas l_1 e l_2 . No item 3, perceba que a reta especial que contém os pontos N_1 e N_2 dista uma unidade do ponto Q e para determinar as ordenadas é necessário usar as equações das retas l_1 e l_2 encontradas no item 2.

No item 5, o aluno deve calcular o ângulo usando a distância especial entre os pontos N_1 e N_2 e, a partir da relação encontrada do item 4, determinar uma expressão que indica o ângulo entre as retas l_1 e l_2 .

Discuta se ao medir o ângulo $\delta_{l_1 l_2}$ em sentidos opostos haveria diferença no valor encontrado. Como justificar isso usando a distância especial? A comparação realizada no item 6 leva o aluno a perceber a simplicidade para medir ângulos na geometria de Galileu.

6.2.4 Atividade 4

Nesta atividade o aluno deve aplicar seus conhecimentos acerca da equação da reta na geometria euclidiana para obter propriedades singulares dos triângulos na geometria de Galileu. É importante frisar que é possível aplicar esses conhecimentos no plano de Galileu pois são equivalentes nas duas geometrias.

No item 3, use a forma algébrica para medir ângulos entre duas retas na geometria de Galileu. Para relacionar os ângulos do triângulo no item 4, sugira aos alunos, se necessário, adotar um sentido para medir os ângulos no item anterior.

6.2.5 Atividade 5

O conhecimento da equação euclidiana da circunferência é muito importante para o estudo dessa cônica. Nesta atividade o aluno deve ser capaz de representar uma circunferência euclidiana a partir de uma circunferência do plano de Galileu e, além disso, comparar as equações dessa cônica nas duas geometrias.

No item 3, verifique se o aluno indica corretamente a posição dos pontos M e N . Caso haja dificuldade, leve o aluno a compreender que esses pontos devem ser diametralmente opostos, pois é assim que se encontram na Figura 6.6. No item 4, é esperado que o aluno escreva corretamente a equação euclidiana usando as coordenadas do centro Q .

Observação 6.1. *Reconhecer uma cônica pela sua definição é muito relevante para o entendimento de suas propriedades. O objetivo das atividades 6, 7 e 8 é reforçar a definição dessas cônicas na geometria euclidiana usando o plano de Galileu.*

6.2.6 Atividade 6

Para o item *a*), espera-se que o aluno encontre as representações da Figura 6.11, onde p é a parábola, F é o foco e d a reta diretriz.

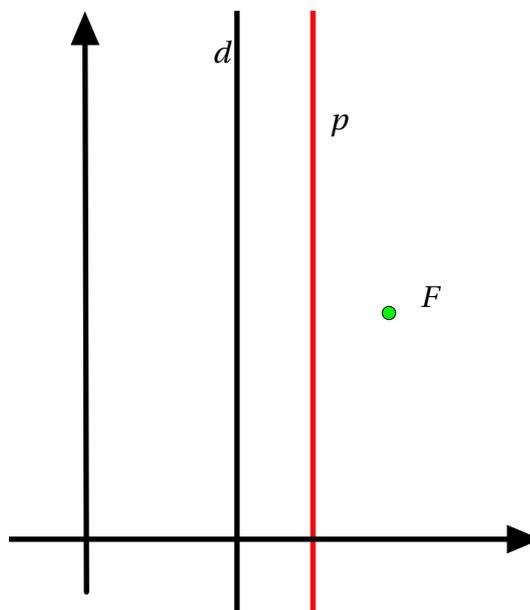


Figura 6.11: Parábola p com reta especial d como diretriz.

Em relação às equações, é necessário aplicar a definição de parábola do item 1 para o plano de Galileu. Tome x_p , x_F e x_D as abscissas de um ponto da parábola, do foco e da reta diretriz, respectivamente. Teremos então que:

$$|x_p - x_F| = |x_p - x_D|. \quad (6.1)$$

E assim,

$$x_p = \frac{x_D + x_F}{2}$$

é a equação da parábola para o item *a*).

Para o item *b*), um resultado possível está ilustrado na Figura 6.12. Para este caso aplicaremos a definição de parábola considerando a igualdade entre distância e distância especial, tomando $P(x_p, y_p)$ um ponto da parábola, x_F abscissa do foco e y_D ordenada de um ponto da reta diretriz. Dessa maneira, a equação pode ser obtida por meio de

$$|x_p - x_F| = |y_p - y_D|, \quad (6.2)$$

onde, $y_D = kx_D + s$ é a equação da reta diretriz d . Note que ao calcular $|y_p - y_D|$ é im-

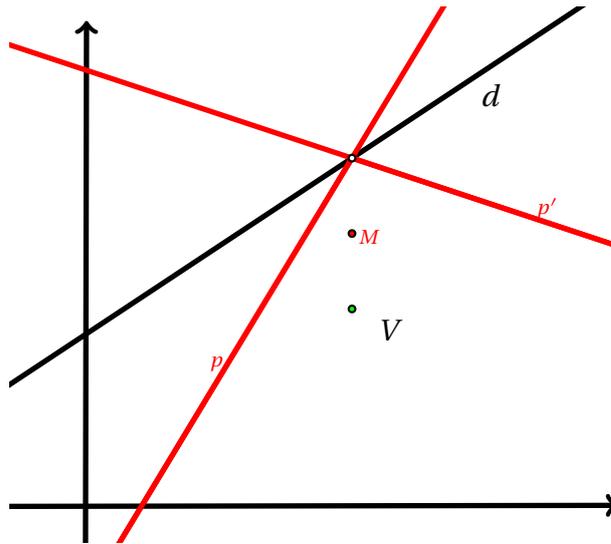


Figura 6.12: Parábola com reta ordinária d como diretriz.

portante perceber que $x_p = x_D$. Assim,

$$x_p - x_F = y_p - y_D \Rightarrow y_p = x_p - x_F + kx_p + s \Rightarrow y_p = (k+1)x_p - x_F + s \quad (6.3)$$

ou

$$x_p - x_F = y_D - y_p \Rightarrow y_p = -x_p + x_F + kx_p + s \Rightarrow y_p = (k-1)x_p - x_F + s. \quad (6.4)$$

Concluimos então que, na geometria de Galileu, a parábola do caso b) será representada pelo par de retas (6.3) e (6.4). Note que o ponto M também faz parte da parábola e, nesse caso, é necessário discutir com o aluno o que justifica este fato.

A parábola do caso c) é obtida de forma análoga à parábola b), o mesmo vale para a equação dessa parábola. Um resultado possível está indicado na Figura 6.13.

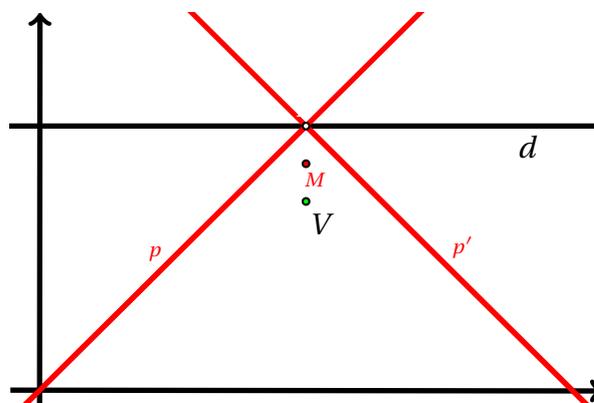


Figura 6.13: Parábola com reta diretriz d paralela ao eixo Ox .

6.2.7 Atividade 7

Na geometria euclidiana, elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano α cuja soma das distâncias aos pontos distintos F_1 e F_2 , com $d_{F_1F_2} = 2c$, é a constante $2a > 2c$ [8]. Seguindo essa definição, é esperado que o aluno encontre um resultado semelhante à Figura 6.14 (a) para o caso em que F_1F_2 é uma reta ordinária¹ e à Figura 6.14 (b) se F_1F_2 é uma reta especial. Vale ressaltar que as constantes $2a$ e $2c$ são, na geometria de Galileu, respectivamente, os correspondentes ao eixo maior e à distância focal na geometria euclidiana.

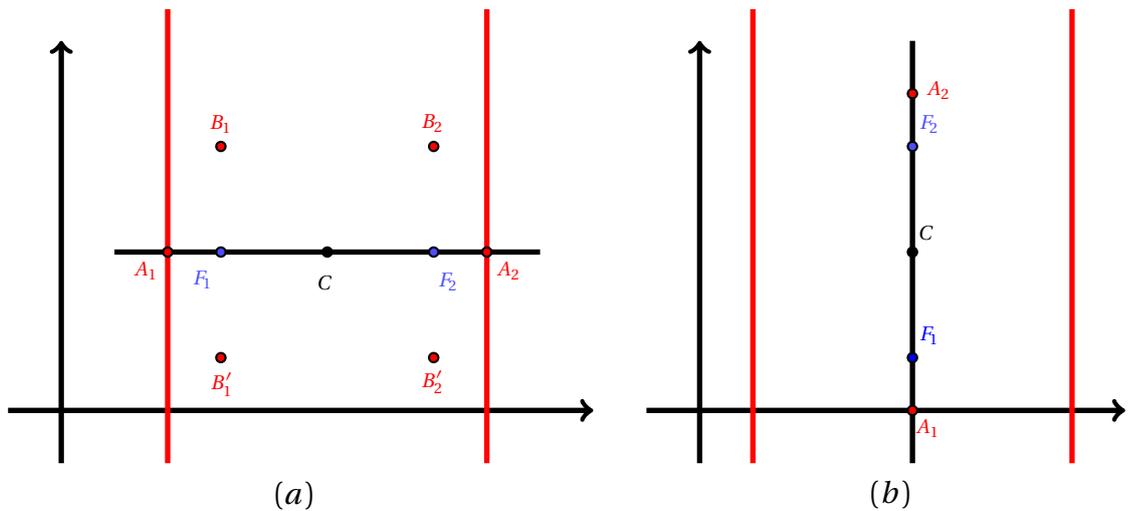


Figura 6.14: (a) Retas focais ordinárias, $2a=6$ e $2c=4$; (b) Retas focais especiais, $2a=6$ e $2c=4$.

A equação da elipse ξ do item a) é encontrada por meio da definição desta cônica, ou seja, dado $P(x, y)$ no plano de Galileu, $P \in \xi$ se

$$|x - x_{F_1}| + |x - x_{F_2}| = 2a. \quad (6.5)$$

Dessa maneira,

$$x - x_{F_1} + x - x_{F_2} = 2a \Rightarrow x = \frac{2a + x_{F_1} + x_{F_2}}{2} \quad (6.6)$$

ou

$$x_{F_1} - x + x_{F_2} - x = 2a \Rightarrow x = \frac{-2a + x_{F_1} + x_{F_2}}{2}. \quad (6.7)$$

Logo, as retas (6.6) e (6.7) compõem a elipse². Além disso, ao considerar $P(x, y)$ sobre

¹Por simplicidade, foi representada a elipse em que F_1F_2 é uma reta ordinária paralela ao eixo Ox . O caso em que F_1F_2 não é paralela ao eixo Ox é completamente análogo.

²Fazendo $x_M = \frac{x_{F_1} + x_{F_2}}{2}$, abscissa do ponto médio entre F_1 e F_2 , podemos indicar a equação da elipse

as retas especiais que passam por F_1 e F_2 temos que:

$$|y - y_{F_1}| + |x - x_{F_2}| = 2a. \quad (6.8)$$

E, assim,

$$y_{F_1} - y + 2c = 2a \Rightarrow y = -2a - 2c + y_{F_1} \quad (6.9)$$

e

$$y - y_{F_1} + 2c = 2a \Rightarrow y = 2a - 2c + y_{F_1}. \quad (6.10)$$

Os pontos B_1 e B'_1 são as intersecções da reta especial que passa por F_1 e da reta obtida em (6.9). De maneira semelhante, B_2 e B'_2 são as intersecções da reta especial que passa por F_2 e da reta obtida em (6.10).

É possível explorar ainda o caso em que F_1F_2 é uma reta especial (Figura 6.14 (b)). Para determinar as equações deve-se proceder de maneira análoga para obter o par de retas $x = -a + x_{F_1}$ e $x = a + x_{F_1}$. Os pontos A_1 e A_2 são encontrados ao se analisar as distâncias aos focos sobre a reta especial F_1F_2 .

6.2.8 Atividade 8

A definição euclidiana de hipérbole a ser considerada é a seguinte : é o lugar geométrico dos pontos do plano α cuja diferença das distâncias aos pontos distintos F_1 e F_2 , com $d_{F_1F_2} = 2c$, é a constante $2a$ ($0 < 2a < 2c$) [8]. É importante deixar claro para o aluno que as constantes $2a$ e $2c$ representam, no plano de Galileu, os correspondentes ao eixo real e à distância focal na geometria euclidiana, respectivamente.

O caso em que a reta focal é paralela ao eixo Ox está representado na Figura 6.15(a), se F_1F_2 é uma reta ordinária não paralela ao eixo Ox o gráfico pode ser obtido de maneira análoga.

Devido à definição de hipérbole usada, o caso em que F_1F_2 é uma reta especial gera um resultado bem curioso. Como F_1 e F_2 estão sobre a mesma reta especial, qualquer ponto do plano que não esteja em F_1F_2 será equidistante de F_1 e F_2 , ou seja, a diferença mencionada na definição será sempre nula.

É importante levar o aluno a concluir esse fato pois assim a construção da hipérbole será imediata já que, nessa situação, a hipérbole será formada apenas por dois pontos, a saber, A_1 e A_2 (Figura 6.15 (b)).

Em relação às equações, para o caso da hipérbole H representada na Figura 6.15 (a), temos que $P(x, y) \in H$ se

$$||x - x_{F_1}| - |x - x_{F_2}|| = 2a \quad (6.11)$$

pelo par de retas $x = \pm a + x_M$.

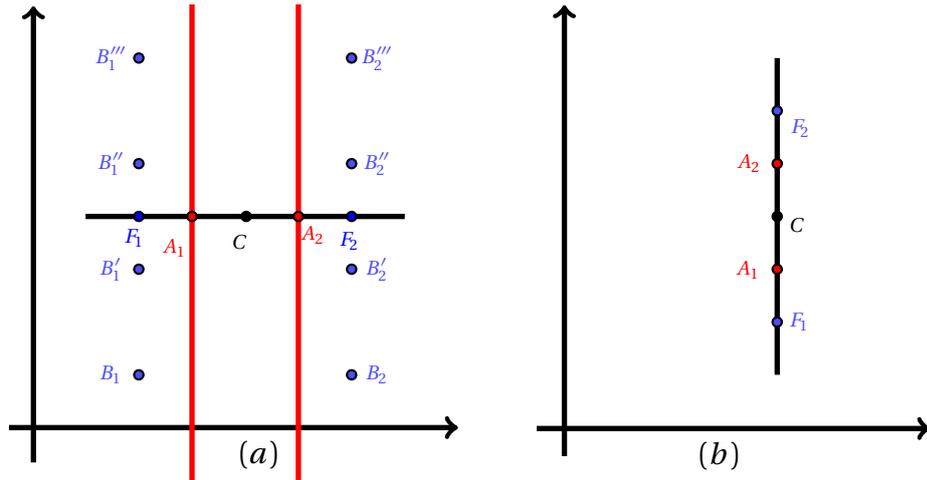


Figura 6.15: (a) Retas focal ordinária, $2a = 2$ e $2c = 4$; (b) Retas focal especial, $2a = 2$ e $2c = 4$.

Dessa maneira,

$$|x - x_{F_1}| - |x - x_{F_2}| = 2a \Rightarrow x = \frac{2a + x_{F_1} + x_{F_2}}{2} \quad (6.12)$$

e

$$|x - x_{F_1}| - |x - x_{F_2}| = -2a \Rightarrow x = \frac{-2a + x_{F_1} + x_{F_2}}{2}. \quad (6.13)$$

Logo, o par de retas (6.12) e (6.13) compõe a hipérbole H do plano de Galileu.¹ O debate sobre as condições em que a equação (6.11) possui solução, ou seja, $x > x_{F_1}$ e $x < x_{F_2}$, ou vice-versa, não pode deixar de ser realizado. Além disso, se $P(x, y)$ pertence à reta especial que passa por F_1 temos

$$\|y - y_{F_1}\| - \|x - x_{F_2}\| = 2a \quad (6.14)$$

e se $P(x, y)$ pertence à reta especial que passa por F_2 temos

$$\|y - y_{F_2}\| - \|x - x_{F_1}\| = 2a. \quad (6.15)$$

Resolvendo (6.14), obtemos as retas

$$y = 2a + 2c + y_{F_1},$$

$$y = -2a + 2c + y_{F_1},$$

$$y = -2a - 2c + y_{F_1},$$

¹Se $x_M = \frac{x_{F_1} + x_{F_2}}{2}$, abscissa do ponto médio entre F_1 e F_2 , a hipérbole é dada pelas retas $x = \pm a + x_M$.

e

$$y = 2a - 2c + y_{F_1}.$$

Resolvendo agora (6.15), obtemos

$$y = 2a + 2c + y_{F_2},$$

$$y = -2a + 2c + y_{F_2},$$

$$y = -2a - 2c + y_{F_2},$$

e

$$y = 2a - 2c + y_{F_2}.$$

Argumentando como no caso da elipse da Figura 6.14 (a) obtemos os pontos $B_1, B_1', B_1'', B_1''', B_2, B_2', B_2''$ e B_2''' .

6.2.9 Atividade 9

No item 1, o resultado esperado é "duas retas determinam um único ponto". A representação geométrica da sentença dada pode ajudar o aluno a concluir o que se pede.

A pura substituição dos termos mencionados no princípio da dualidade, levará o aluno ao resultado "*pontos concorrentes*". Essa sentença pode gerar certa confusão já que a concorrência é uma propriedade das retas. Peça para que o aluno represente geometricamente a sentença dada e use o resultado obtido no item 1 para concluir a sentença dual: "*pontos colineares*". A aplicação desses resultados auxiliará na resposta do item 3.

O ponto médio do segmento AB pode ser definido por "ponto M do segmento AB com $\overline{AM} = \overline{MB}$ [3]". É esperado que o aluno perceba que a definição dual do ponto médio é a reta que contém a bissetriz m do ângulo entre as retas a e b . O debate sobre o dual do segmento AB pode ajudar na conclusão do item.

A dualidade no triângulo do item 5 foi sugerida para que o aluno perceba que é possível aplicar o princípio da dualidade a uma figura e suas propriedades, habilidade que será exigida em atividades posteriores.

6.2.10 Atividade 10

Essa atividade foi sugerida para que o aluno conclua que o princípio da dualidade não se sustenta na geometria euclidiana já que ocorrem falhas, em alguns casos, na comparação entre as propriedades das retas e pontos nessa geometria.

No item 1, é esperado que o aluno conclua que o dual da definição dada exige o conceito de "*pontos paralelos*", fato que justifica a invalidade dessa definição na geometria de Euclides. Já no item 2, o que justifica essa invalidade é que o ângulo entre duas retas na geometria euclidiana não pode ser tão grande quanto se deseja, contrariamente à distância entre dois pontos.

Uma pergunta interessante a ser explorada é sobre a existência do conceito de pontos paralelos na geometria de Galileu. O que justifica a validade desse conceito nessa geometria? Essa discussão ajudará na conclusão da atividade seguinte.

6.2.11 Atividade 11

A aplicação do princípio da dualidade para o trapézio deve levar o aluno a perceber que a figura dual possui *pontos paralelos*. É indicado que o aluno use a figura de um trapézio para que a construção do cotrapezóide seja facilitada.

6.2.12 Desafio 1 e Desafio 2

Esses desafios são uma aplicação de grande parte do que foi discutido na seção 6.1.4 e pode ser sugerido como forma de aprofundar e enriquecer o estudo sobre o princípio da dualidade.

Para o primeiro desafio, é indicado o uso de papel quadriculado ou do software Geogebra. Inicialmente, relembre com o aluno o teorema da bissetriz de um ângulo interno de um triângulo na geometria euclidiana. Um enunciado possível é o seguinte: *num triângulo ABC , a bissetriz do ângulo \widehat{ACB} divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes, ou seja, $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC}$* [3].

Para verificar a validade desse teorema na geometria de Galileu, é necessário lembrar ao aluno como medir os lados do triângulo nessa geometria. No caso do último item, a orientação é dualizar primeiramente o triângulo e posteriormente a bissetriz do ângulo no vértice C . Um resultado possível é o da Figura 6.16.

Para finalizar, é apresentado o teorema de Pappus, um resultado geralmente não estudado no ensino médio. No item 1, o resultado esperado é o seguinte: *sejam a, b, c, a', b', c' seis retas tais que a, b', c concorrem no ponto U , e as retas a', b, c' concorrem no ponto V . Se l é a reta que passa por $\{A\} = a \cap b$ e $\{C\} = b' \cap a'$, n a reta que passa por $\{B\} = a \cap c'$ e $\{B'\} = c \cap a'$ e m a reta que passa por $\{A'\} = c' \cap b'$ e $\{C'\} = b \cap c$ então as retas l, n e m são concorrentes.*

No item 2, a estratégia sugerida é decompor a Figura 6.9 conforme a dica dada e aplicar a dualidade. Assim, o aluno pode se organizar de tal maneira a não se atrapalhar no processo de dualização da Figura 6.9.

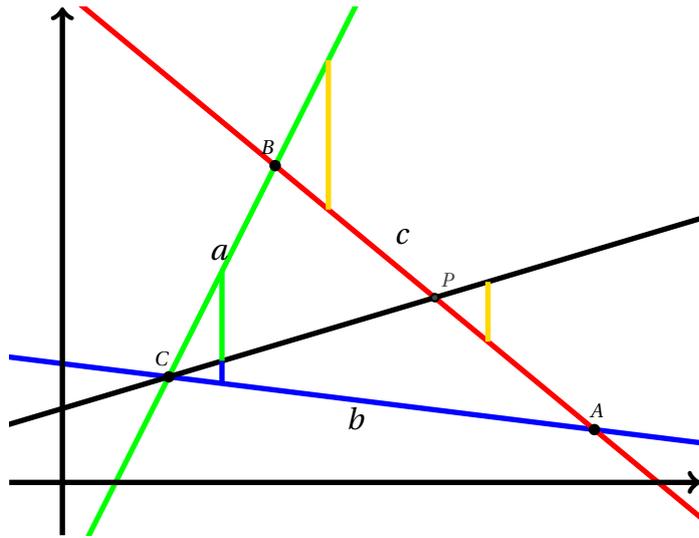


Figura 6.16: Dualidade no teorema da bissetriz de um ângulo interno.

Considerações finais

Segundo os PCNEM, o estudo de geometrias não euclidianas no ensino médio tem por objetivo reforçar os conceitos da geometria de Euclides além de apresentar aos alunos novas geometrias que também descrevem a realidade que nos cerca [17]. Nessa dissertação, seguindo a mesma linha dos PCNEM, comparamos uma geometria desenvolvida a partir do princípio de Galileu com a geometria euclidiana plana usualmente estudada no ensino básico.

A geometria de Galileu é não euclidiana. Ela possui maneira própria de medir distâncias; admite a existência de um princípio da dualidade; seu grupo de isometrias não é o mesmo que da geometria euclidiana plana.

Essa geometria, ao contrário de outras não euclidianas, admite o axioma das paralelas, além disso, diversos teoremas do plano euclidiano também são válidos no plano de Galileu. Essas características fazem da geometria de Galileu uma ferramenta bastante plausível para o estudo da geometria euclidiana visando reforçar as definições estudadas no ensino médio assim como sugerem os PCNEM ao tratarem do ensino de geometria não euclidiana [17].

No caso particular da geometria analítica do plano euclidiano, existe uma gama de definições e equações que nem sempre são assimiladas pelos alunos e, visto que a compreensão desses conhecimentos é fundamental para o entendimento dos objetos geométricos estudados, faz-se necessário o uso de ferramentas/abordagens, complementares ao estudo tradicional, que possam enriquecer o processo de ensino e aprendizagem desses conteúdos. É nesse sentido que o estudo da geometria de Galileu pode ser um facilitador desse processo por possuir muitas semelhanças com o modelo estudado no ensino básico.

A interpretação gráfica dos coeficientes da equação reduzida da reta, o entendimento das definições e das equações cartesianas da circunferência, da parábola, da elipse e da hipérbole bem como os seus elementos (vértice, reta diretriz, eixo focal e eixo maior, distância focal) podem ser adquiridas/aprofundadas com o estudo dessa geometria.

A aplicação das atividades propostas será objeto de um futuro trabalho. Essas atividades deverão ser trabalhadas com alunos do 3º ano do ensino médio paralelamente aos estudos de geometria analítica. As atividades, através da comparação entre conceitos correspondentes em ambas as geometrias, exploram tanto o manuseio de expressões analíticas tanto quanto a análise gráfica das situações apresentadas. Como consequência, espera-se que os resultados da aplicação dessas atividades sugiram uma melhora no aprendizado dos conceitos abordados em geometria analítica no 3º ano do ensino médio.

Entre os aspectos merecedores de estudo estão: o desenvolvimento da habilidade dos alunos no manuseio de expressões algébricas; a formação de imagens conceituais mais robustas relativas aos conceitos abordados em geometria analítica; o desenvolvimento do raciocínio crítico; como os alunos veem o princípio de dualidade? em que aspecto o fato de trabalhar atividades que usem este princípio ajuda o aluno a modificar suas imagens conceituais a respeito dos conceitos de geometria? Tal estudo certamente fornecerá dados que permitirão aprimorar o ensino de geometria no nível médio.

Referências bibliográficas

- [1] YAGLOM, ISAAK MOISEEVICH. *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*. Nauka, Moscow, 1969.
- [2] STRUVE, R. *The principle of duality in Euclidean and in absolute geometry*. J. Geom. doi:10.1007/s00022-016-0314-6 (2016).
- [3] DOLCE, OSVALDO; POMPEO, JOSÉ NICOLAU. *Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana, exercícios resolvidos, exercícios propostos com resposta, testes de vestibular com resposta.*, ed 7, São Paulo: Atual, 1993.
- [4] MARTIN, GEORGE E. *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [5] MUNIZ NETO, ANTONIO CAMINHA. *Geometria. Coleção Profmat*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [6] SILVA, JOSÉ CONSTANTINO. *Os Teoremas de Menelaus e Ceva*. Dissertação de mestrado, UFRPE, Recife, 2015. Disponível em:<<https://goo.gl/UzP8of>>. Acesso em 12/01/2018.
- [7] COXETER, H. S. M., GREITZER, S. L. *Geometry Revisited*. The Mathematical Association of America, Washington. 1967.
- [8] IEZZI, GELSON. *Fundamentos de matemática elementar 7: geometria analítica.*, ed 1, São Paulo: Atual, 1977.
- [9] ANTON, HOWARD. *Álgebra linear com aplicações.*, ed 10, Porto Alegre: Bookman, 2012.
- [10] BARBOSA, JOÃO LUCAS MARQUES. *Geometria Euclidiana Plana*, ed 4, Fortaleza: SBM, 1995.

- [11] LOPES DA LUZ, VICENTE. *Geometria de Galileu: proposta de atividades para o ensino básico*. Dissertação de mestrado, UnB, Brasília, 2016. Disponível em: <<https://goo.gl/ZuLeyj>>. Acesso em 22/01/2018.
- [12] CRESSER, J. D. *The special theory of relativity*. Department of Physics. Sidney: Macquaire University, 2003. Disponível em <<https://goo.gl/cH4EeJ>>. Acesso em 24/01/2018.
- [13] KITTEL, C., KNIGHT, W. D., RUDERMAN, M.A. *Mecânica - Curso de Física de Berkeley*. Vol 1, ed. Universidade de Brasília-Edgard Blucher Ltda, São Paulo.
- [14] DELGADO, JORGE. *Geometria analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013
- [15] CAMARGO, KEILA CRISTINA ARSIE. *A expressão gráfica e o ensino das geometrias não euclidianas* Dissertação de mestrado, UFPR, Curitiba, 2012. Disponível em: <<https://goo.gl/qaJkkN>>. Acesso em 29/01/2018.
- [16] KALEFF, A.M.; ROBAINA, D.T.; NASCIMENTO, R.S. *Geometrias não- Euclidianas: do caminhar nas cidades ao funcionamento do GPS*. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, IX., 2009, Belo Horizonte. Disponível em <<https://goo.gl/Khgq4a>>. Acesso em 01/02/2018.
- [17] BRASIL. *Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais+Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, MEC, 1999. Disponível em: <<https://goo.gl/he7mvq>>. Acesso em 01/02/2018.
- [18] BERRO, R. T. *Relações entre Arte e Matemática: um estudo da obra de Mauritus Cornelis Escher*. Dissertação de Mestrado. Itatiba: Universidade de São Francisco, 2008. Disponível em: <<https://goo.gl/qyd3H9>>. Acesso em 01/02/2018.
- [19] FRANCO, V. S.; DELAI, S. *Geometrias não Euclidianas*. 2010. Disponível em <<https://goo.gl/1f8SPw>>. Acesso em 01/02/2018.
- [20] LIMA, ELON LAGES. *Isometrias*. Rio de Janeiro: SBM, 1996.