Cássia Gonçalves D'Avila

Uma estratégia didática para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Março, 2018

Cássia Gonçalves D'Avila

Uma estratégia didática para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por Cássia Gonçalves D'Avila junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. Cristiana Andrade Poffal

Coorientador: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Março, 2018

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande

http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física

http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática

http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

http://www.capes.gov.br

Ficha catalográfica

D259e D’Avila, Cássia Gonçalves.
Uma estratégia didática para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas / Cássia Gonçalves D’Avila. – 2018.
98 p.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-graduação em Matemática, Rio Grande/RS, 2018.
Orientadora: Drª. Cristiana Andrade Poffal.
Coorientadora: Drª. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez.

1. Situações problema 2. Tecnologias da informação e comunicação 3. História da Matemática 4. Material concreto 5. Régua de cálculo 6. Funções exponenciais 7. Funções logarítmicas I. Poffal, Cristiana Andrade II. Rodriguez, Bárbara Denicol do Amaral III. Título.

CDU 574

Catalogação na Fonte: Bibliotecário Me. João Paulo Borges da Silveira CRB 10/2130

Cássia Gonçalves D'Avila

Uma estratégia didática para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por Cássia Gonçalves D'Avila junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 15 de março de 2018

Dra. Cristiana Andrade Poffal
(Orientador - FURG)

Nome do Co-orientador
(Co-orientadora - FURG)

Lúcia Andréia de Souza Rocha
(Avaliador - IFRS/Rio Grande)

Cinthya Maria Schneider Meneghetti
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Março, 2018

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que desde o início de minha caminhada esteve comigo, iluminando o meu caminho e dando-me força e coragem para jamais desistir diante das dificuldades.

Agradeço aos meus pais, que me deram a vida e me ensinaram a vivê-la com dignidade, sempre iluminando os meus caminhos com afeto e dedicação. A vocês que se doaram inteiros e renunciaram aos seus sonhos para que eu pudesse realizar os meus, eu deixo o meu muitíssimo obrigado.

A minha irmã que esteve sempre ao meu lado, me dando apoio e força, quero dizer que sei o quanto foi difícil conviver com as caras feias, impaciências e falta de tempo. Quero dizer ainda como foi importante compartilhar com você minhas conquistas, alegrias e expectativas. Obrigada pela paciência e amor.

Ao meu cunhado que por inúmeras vezes me ajudou com as mais diversas situações, seja nos aspectos tecnológicos, seja com palavras de motivação ou simplesmente pela paciência e compreensão. Obrigada por me aguentar e me salvar sempre que pedia socorro.

Aos Mestres do PROFMAT que dedicaram seu tempo e compartilharam experiências e conhecimentos, para que minha formação fosse também um aprendizado de vida. Aqueles que souberam ser mestres e, acima de tudo, grandes amigos, deixo minha homenagem, meu carinho e minha eterna gratidão.

Aos colegas e amigos com quem compartilhei minhas angústias, minhas expectativas, êxitos e frustrações. Àqueles que caminharam durante estes dois anos junto comigo na busca de um mesmo objetivo deixo meu carinho e muito obrigado pelo companheirismo, pelas ajudas no grupo do WhatsApp, troca de exercícios e dúvidas sanadas nas vésperas das provas. Obrigada por tornarem, nos últimos dois anos, as manhãs e tardes de sexta-feira momentos de aprendizagens e alegrias.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), a professora Me. Lucia Andreia Rocha e aos estudantes que me acolheram e me oportunizaram a aplicação das atividades, deixo o meu eterno agradecimento pelo carinho com que fui recebida e a confiança depositada.

Por fim, as minhas orientadoras Dra. Cristiana Poffal e Dra. Bárbara Rodriguez, não posso deixar de registrar meu mais sincero agradecimento, por acreditarem em mim desde a graduação, por terem sido exemplos de profissionais, pelo incentivo e pelas injeções de ânimo. Obrigada pela paciência e compreensão mesmo quando não fui uma boa orientanda.

"Educar é provocar, é inspirar, educar é ter um caso de amor com o conhecimento."
(Augusto Cury)

Resumo

Esta dissertação busca voltar à atenção dos educadores para a utilização de quatro metodologias de ensino: Situações Problema, Tecnologias da Informação e Comunicação, História da Matemática e Material Concreto, tendo como objetivo apresentar atividades diferenciadas envolvendo o estudo de funções exponenciais e logarítmicas. Estas ferramentas visam despertar o interesse e a participação dos discentes no processo de ensino e aprendizagem. Com o intuito de verificar a eficiência de tais estratégias didáticas no ensino da Matemática, realizou-se uma pesquisa com alunos do primeiro ano do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS). Os resultados obtidos sugerem que os recursos didáticos utilizados são cativantes e capazes de aproximar o mundo matemático dos discentes.

Palavras-chaves: Situações Problema, Tecnologias da Informação e Comunicação, História da Matemática, Material Concreto, Régua de Cálculo, Funções exponenciais, Funções logarítmicas.

Abstract

This dissertation intends to show the use of four teaching methodologies: problem solving, information and communication technologies, History of Mathematics and manipulatives. This study aims to present differentiated activities involving the teaching of exponential and logarithmic functions. The use of these methodologies should enhance students' interest on the learning process. In order to verify the efficiency of the practice and the didactic strategies applied to build the activities, students of the first year of the Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS) were invited to solve them. The results obtained suggest that the didactic resources used are attractive and capable of bringing the mathematical world closer to the students.

Key-words: Problem Situations, Information and Communication Technologies, History of Mathematics, Concrete Material, Slide Rule, Exponential Functions, Logarithmic Functions.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

O processo educativo é amplo, ocorre na escola e também se desenvolve em casa com a família, na convivência com as demais pessoas e nas diversas atividades desenvolvidas durante a vida. De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) (BRASIL, 1996) no seu Artigo 1º: "A educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais".

A palavra educação muitas vezes não é bem compreendida. Algumas pessoas acreditam que educar, no contexto do ambiente escolar, é apenas ensinar um conteúdo a um aluno porém, a concepção de educação é muito mais ampla e complexa. Educar é possibilitar que os alunos desenvolvam o pensamento crítico fazendo com que se tornem pessoas ativas na sociedade, enfim é contribuir para que o educando se constitua como cidadão.

A escola tem papel fundamental na vida de cada aluno. Quando ela desenvolve nos estudantes suas capacidades, de forma a prepará-los para a vida e de torná-los cidadãos críticos, a educação então será compreendida em sua essência. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1997a), a escola deve contribuir na formação dos estudantes de modo que desenvolvam capacidades que lhes possibilitem a intervenção na realidade de modo que possam transformá-la.

No entanto, quando se fala no ensino de Matemática deve-se ter uma atenção maior, pois a disciplina geralmente é temida pela grande maioria dos estudantes. O fato de a Matemática possuir um caráter abstrato faz com que os alunos tenham certo receio ao conteúdo e muitas vezes nem tentem compreender os conceitos abordados nas aulas. Esse comportamento dos estudantes ocorre, em muitos casos, por acreditarem que a Matemática seja uma ciência compreendida por poucos. Isso se deve, de acordo com (RODRIGUES, 2005), em geral ao fato das aplicações matemáticas não serem fáceis de serem percebidas.

Pensando nas ideias de (RODRIGUES, 2005), pode-se analisar e compreender melhor o porquê de muitos alunos concluírem seus estudos no Ensino Médio sem compreender os conceitos de Matemática. Além disso, uma pesquisa realizada em 2017 pela Organização Não Governamental Todos pela Educação (FERNANDES; ROMBAUER, 2017) revela, que apenas cerca de $7,3\%$ dos estudantes que concluem o 3º ano do Ensino Médio atingem níveis satisfatórios de aprendizagem na disciplina de Matemática.

No entanto, a educação está passando por reformas, observam-se essas mudanças através da configuração de exames de seleção como é o caso do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que confirma a necessidade da inserção de métodos de ensino que aproximem a Matemática da realidade do aluno e nos levem a refletir sobre as aulas mecanizadas que acabam resultando na “decoreba” e aplicação de fórmulas. Além disso, há a proposta do Novo Ensino Médio que entrará em vigor no primeiro ano letivo subsequente a homologação da sua Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio. De acordo com o Ministério da Educação (BRASIL, 2017), a BNCC “é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica”. Este documento prevê todos os conhecimentos, habilidades e competências que os estudantes devem desenvolver durante a educação básica, visando proporcionar aos alunos uma educação igualitária em todo o território nacional.

O estudo de funções exponenciais e logarítmicas também vem passando por mudanças, na busca por uma melhoria no ensino de Matemática e tentando deixar para trás as aulas mecanizadas, alguns professores utilizam estratégias e recursos didáticos capazes de proporcionar aos alunos outras formas de aprender e fazer Matemática. Pode-se citar alguns trabalhos que abordam o estudo de funções exponenciais e logarítmicas através do uso de metodologias diferenciadas. (MIRITZ, 2015) estabelece a relação entre a Matemática e a Música através de Material Concreto e História da Matemática. O trabalho de (EINHARDT, 2016) propõe o estudo das funções através de Tecnologias da Informação e Comunicação pelo aplicativo MalMath e de Situações Problema. (PINTO, 2017) descreve a importância da utilização da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, buscando interligar a Matemática a diversas áreas de conhecimento. (SILVA, 2015) propõe uma atividade utilizando a Torre de Hanói como uma ferramenta facilitadora na aprendizagem de funções exponenciais. Estes recursos pedagógicos extrapolam a proposição de resolução de exercícios repetitivos e descontextualizados, ou seja, eles exigem habilidades e atitudes distintas e adequadas a cada situação diferenciada e estimulam a capacidade criativa de cada aluno.

Neste contexto, a proposta de atividades descrita neste trabalho vem problematizar o ensino de funções exponenciais e logarítmicas a partir da utilização de metodologias de ensino como Situações Problema, Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), História da Matemática e Material Concreto. Acredita-se que a utilização de cada um dos recursos pedagógicos escolhidos possibilita aos estudantes uma melhor aprendizagem, fugindo das aulas mecanizadas e repletas de definições e exercícios. A combinação das quatro metodologias proporciona aos alunos serem agentes ativos no processo de aprendizagem. Elas permitem aos educandos compreenderem onde podem aplicar no cotidiano os conceitos estudados e conhecerem a história que motivou o desenvolvimentos de teorias matemáticas. Além disso, o Material Concreto colabora para que os estudantes compreendam a evolução das tecnologias. Neste trabalho, eles manipulam a Régua de Cálculo, que é considerada a precursora das calculadoras, ao mesmo tempo em que trabalham com o aplicativo Graphing Calc, que é uma tecnologia pertencente à realidade deles. A diferença no espaço de tempo entre os dois recursos leva os discentes a perceberem que as tecnologias evoluem e/ou são desenvolvidas conforme as necessidades da humanidade e o momento histórico em que se está inserido.

As atividades propostas trazem, inicialmente, a resolução de problemas contextualizados. Foram selecionadas duas Situações Problema: a primeira referente a juros compostos e a segunda à desvalorização do valor de venda de um carro. As situações foram apresentadas, individualmente aos estudantes. Após a apresentação da primeira situação, foram realizados questionamentos. Conforme as perguntas eram realizadas, com o auxílio dos estudantes, o grupo chegava a uma resposta que era escrita pela pesquisadora no quadro. A partir das questões foi possível obter a lei da função que representa cada um dos problemas e, utilizando o aplicativo Graphing Calc, compreender o comportamento dos gráficos.

Na segunda Situação Problema foi realizada uma pergunta aos estudantes na qual era necessário calcular logaritmo de um número, como não permitiu-se o uso de calculadoras eletrônicas, ocorreu a impossibilidade de resolver esta questão. Neste momento, a pesquisadora realizou a apresentação de fatos históricos referente ao desenvolvimento da teoria dos logaritmos. A partir da história, é apresentado para os estudantes o Material Concreto Régua de Cálculo, que pode ser entendido como umas das primeiras tecnologias desenvolvidas para auxiliar na resolução de cálculos. Após os alunos compreenderem como calcular logaritmo com o auxílio da Régua de Cálculo, foi possível responder a questão que ficou anteriormente em aberto. Por fim, foi proposto aos estudantes a resolução de duas Situações Problema, nas quais deveriam utilizar a Régua de Cálculo como ferramenta na realização dos cálculos.

O trabalho está dividido em seis etapas. No primeiro capítulo apresentam-se os objetivos gerais e específicos, a seguir, no capítulo dois, abordam-se os conteúdos matemáticos que constituem essa dissertação: potência com expoente racional, funções, funções exponenciais, logaritmos e funções logarítmicas. A fundamentação teórica que permeia esse trabalho apresenta-se no terceiro capítulo. Em seguida, no capítulo quatro, apresentam-se as atividades propostas e no quinto capítulo relata-se a aplicação das atividades e se analisam os resultados obtidos. Por fim, no capítulo seis apresentam-se as considerações finais deste trabalho.

1 Objetivos

1.1 Objetivos Gerais

Para que este trabalho possa colaborar e possibilitar uma melhor aprendizagem dos estudantes no ensino de funções exponenciais e logarítmicas, destacam-se os objetivos que orientam a proposta de atividades:

- Destacar a importância do ensino de funções exponenciais e logarítmicas no Ensino Médio;
- Apresentar algumas aplicações de funções exponenciais e logarítmicas, tais como: o crescimento populacional de bactérias, juros compostos, a desvalorização de bens e a Escala Richter.
- Utilizar a metodologia de ensino resolução de Situações Problema;
- Mostrar a importância da utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação no ensino de Matemática, em especial a utilização do aplicativo Graphing Calc;
- Destacar o uso da História da Matemática como estratégia didática para aprimorar o ensino de Matemática;
- Apresentar o Material Concreto Régua de Cálculo e mostrar a importância da utilização de tal recurso para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas;
- Propor atividades diferenciadas e que estimulem a compreensão e não a memorização sem significado;
- Investigar a contribuição das atividades na aprendizagem dos alunos;
- Verificar a receptividade das atividades pelos estudantes.

1.2 Objetivos Específicos

Para as atividades sugeridas, destacam-se objetivos específicos, que juntamente com os objetivos gerais complementam esta proposta:

- Retomar os conceitos de funções exponenciais e logarítmicas;
- Oportunizar aos estudantes serem agentes ativos no processo de aprendizagem;

- Relacionar os saberes matemáticos com outras áreas do conhecimento;
- Despertar a curiosidade dos estudantes em relação ao conteúdo e suas aplicações no cotidiano;
- Desenvolver nos estudantes a capacidade de modelar um problema obtendo a lei de uma função;
- Promover o uso de representação gráfica a partir do aplicativo Graphing Calc;
- Estimular o interesse dos alunos pelos fatos históricos e compreender o que motivou as descobertas matemáticas;
- Realizar cálculos para resolver equações exponenciais redutíveis a mesma base;
- Resolver equações exponenciais que não são possíveis de reduzir a uma base comum, utilizando o conceito de logaritmo e as suas propriedades.

No próximo capítulo aborda-se a fundamentação matemática que norteia este trabalho, destacando conceitos importantes que são utilizados nas atividades propostas.

2 Fundamentação Matemática

Neste capítulo apresentam-se definições importantes referentes às funções exponenciais e logarítmicas para o desenvolvimento e aplicação das atividades propostas.

2.1 Potência com expoente racional

Segundo (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977), tem-se:

Dados $a > 0$ e $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}^*$) define-se potência de base a e expoente $\dfrac{p}{q}$ pela relação

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Se $a = 0$ e $\dfrac{p}{q} > 0$. Adota-se a definição especial

$$0^{\frac{p}{q}} = 0.$$

Observação 1: O símbolo $0^{\frac{p}{q}}$ com $\dfrac{p}{q} < 0$ não pode ocorrer, pois, $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $q \in \mathbb{N}^*$ o que implica em $p < 0$, logo 0^p não tem significado.

Observação 2: Toda potência de base positiva e expoente racional é um número real positivo, isto é,

$$a > 0 \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0.$$

2.1.1 Propriedades das potências

Para $a > 0$, $b > 0$ e $u, v \in \mathbb{Q}$, tem-se as propriedades, conforme sugere (LIMA et al., 2006).

1) Produto de potências de mesma base

Em um produto de potências de mesma base, conserva-se a base e somam-se os expoentes:

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v}. \tag{2.1}$$

2) Quociente de potências de mesma base

Em um quociente de potências de mesma base, conserva-se a base e subtraem-se os expoentes:

$$\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}. \tag{2.2}$$

3) Potência de um produto

Em uma potência de um produto, atribui-se a cada um dos fatores do produto o expoente:

$$(a \cdot b)^u = a^u \cdot b^u. \tag{2.3}$$

4) Potência de um quociente

Em uma potência de um quociente, deve-se elevar o numerador e o denominador ao expoente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}, \quad b \neq 0. \tag{2.4}$$

5) Potência de potência

Em uma potência de potência, conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes:

$$(a^u)^v = a^{u \cdot v}. \tag{2.5}$$

2.2 Funções

Considerando dois conjuntos A, B, uma função $f : A \to B$ (lê-se "uma função de A em B") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in A$ um elemento $y = f(x) \in B$. O conjunto A chama-se **domínio** e B é o **contra-domínio** da função f. Para cada $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ chama-se **imagem** de x pela função f, ou valor assumido pela função f no ponto $x \in A$ (LIMA et al., 2006).

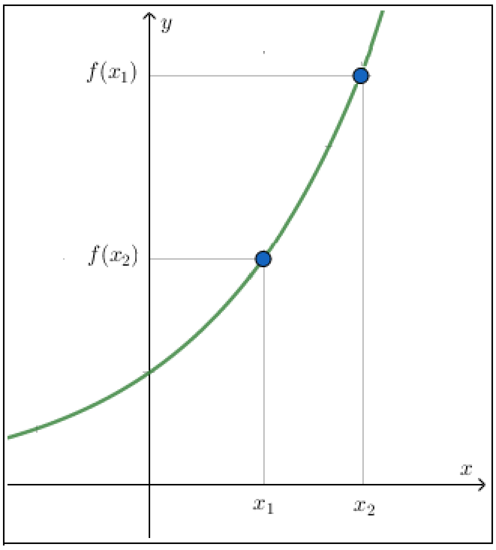
A seguir são apresentadas definições importantes relacionadas à monotocidade de funções, conforme sugerem (DEMANA et al., 2009) e (ÁVILA, 2001).

2.2.1 Funções monótonas

Uma função f é **crescente** sobre um intervalo I se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação positiva em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$, $\forall\ x_1,\ x_2 \in I$. Quando isso ocorre para todos os valores x do domínio f, diz-se que a função é estritamente crescente, conforme mostra a Figura 1.

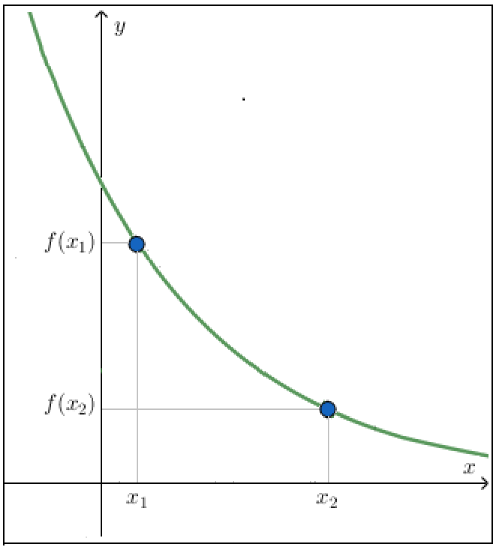
Uma função f é **decrescente** sobre um intervalo I se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação negativa em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$, $\forall\ x_1,\ x_2 \in I$. Quando isso ocorre para todos os valores x do domínio f, diz-se que a função é estritamente decrescente, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 1 – Representação gráfica de uma função estritamente crescente em seu domínio.



Fonte: Próprio autor

Figura 2 – Representação gráfica de uma função estritamente decrescente em seu domínio.

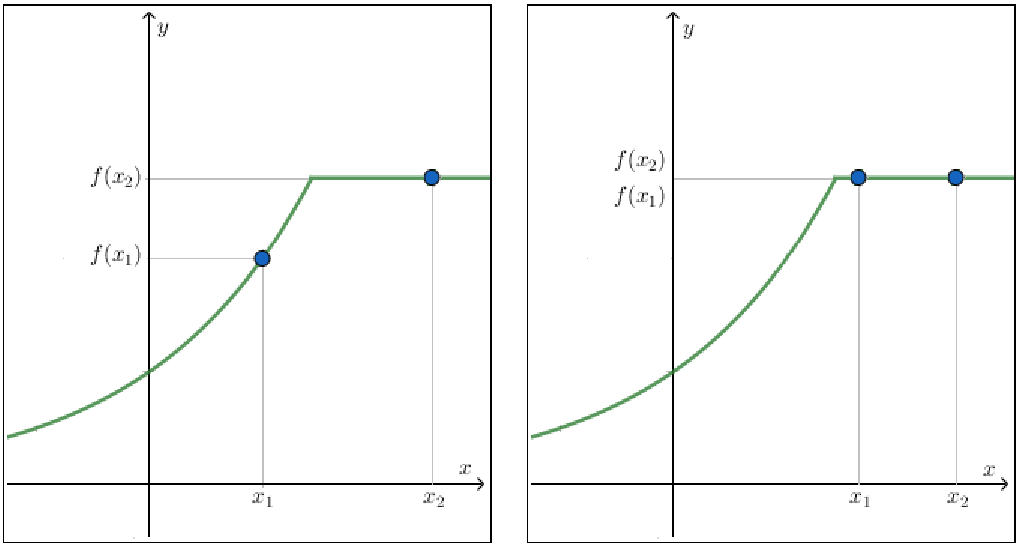


Fonte: Próprio autor

Uma função f é **não decrescente** sobre um intervalo I se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação positiva ou nula em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, $\forall\ x_1,\ x_2 \in I$. Conforme mostra a Figura 3.

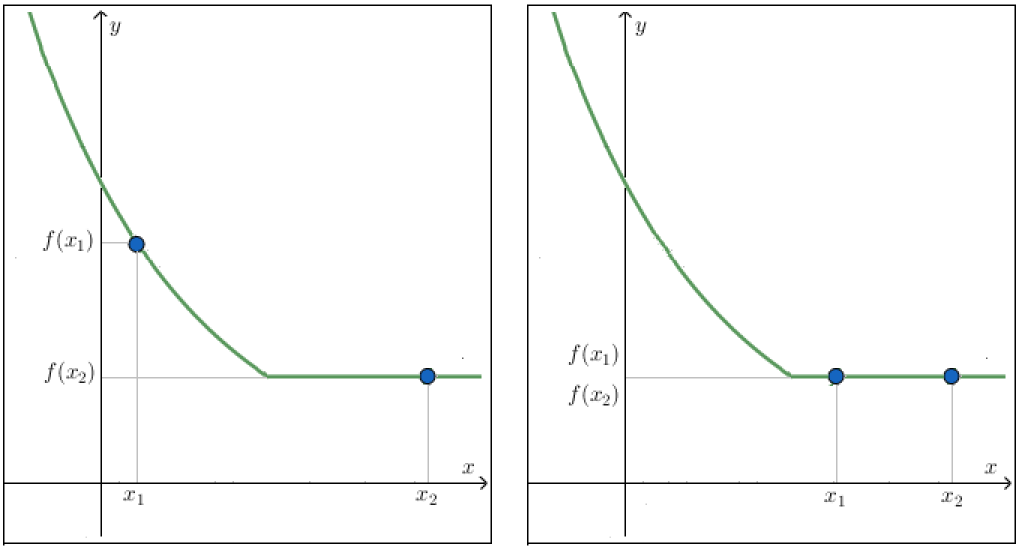
Uma função f é **não crescente** sobre um intervalo I se, para quaisquer dois valores de x no intervalo, uma variação positiva em x resulta em uma variação negativa ou nula em $f(x)$. Isto é, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \geqslant (x_2)$, $\forall\ x_1,\ x_2 \in I$. Conforme ilustra a Figura 4.

Figura 3 – Representação gráfica de uma função não decrescente.



Fonte: Próprio autor

Figura 4 – Representação gráfica de uma função não crescente.



Fonte: Próprio autor

Em todos esses casos, f é chamada **função monótona**.

Pode-se definir função injetora, sobrejetora e bijetora, segundo (DEMANA et al., 2009).

2.2.2 Função injetora, sobrejetora e bijetora

Uma função $f : A \to B$ é **injetora** se quaisquer dois elementos distintos do domínio de f (que é o conjunto A) possuem imagens diferentes em B.

Uma função $f : A \to B$ é **sobrejetora** se seu conjunto imagem for igual ao seu contradomínio B.

Uma função $f : A \to B$ é **bijetora** se for injetora e sobrejetora.

2.2.3 Função limitada

De acordo com (DEMANA et al., 2009), pode-se definir função limitada:

Uma função é **limitada inferiormente** se existe algum número b que seja menor ou igual a todo número da imagem de f. Qualquer que seja o número b, este é chamado de **limite inferior** de f.

Uma função é **limitada superiormente** se existe algum número B que seja maior ou igual a todo número da imagem de f. Qualquer que seja o número B, este é chamado de limite superior de f.

Uma função f é **limitada** se é limitada das duas formas, superiormente e inferiormente.

Seja $f(x)$ uma função e a é um número real. A expressão $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se aproxima tanto de L, fazendo x suficientemente próximo de a (mas não igual a a). Diz-se que o limite de $f(x)$, à medida que x se aproxima de a, é L.

2.2.4 Função contínua

Uma função f é contínua num ponto a de seu domínio quando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Quando f é contínua em cada ponto de seu domínio, diz-se que f é **contínua** (DEMANA et al., 2009).

2.3 Função exponencial

Definição 2.3.1. Seja a um número real positivo, que supõe-se sempre diferente de 1. A **função exponencial de base** a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer x, $y \in \mathbb{R}$, de acordo com (LIMA et al., 2006):

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

2) $a^1 = a$;

3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$;

4) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente. Se $a > 1$ então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande. E se $0 < a < 1$, então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$ tem valor absolutamente grande.

5) A função exponencial é contínua;

6) A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(x) = a^x, a \neq 1$, é sobrejetora.

2.3.1 Domínio e imagem

De acordo com (DEMANA et al., 2009), o **domínio** de uma função exponencial da forma $f(x) = a^x$, é o conjunto dos números reais, isto, é $D(f) = \mathbb{R}$.

Se $a \in \mathbb{R}_+^*$, então $a^x > 0$ para todo x real, logo a **imagem** da função exponencial é $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$, conforme define (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977).

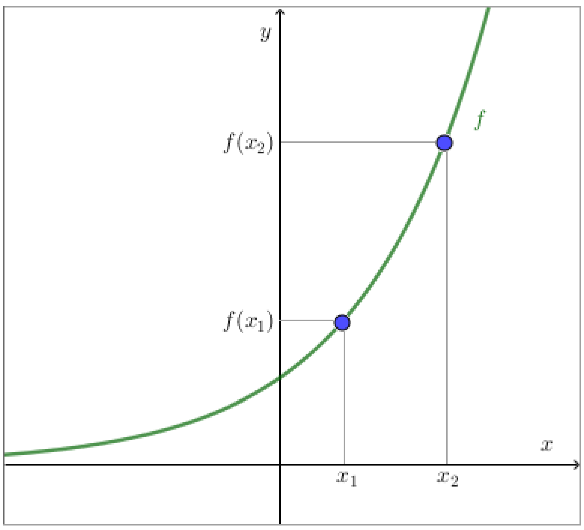
2.3.2 Crescimento e decrescimento

Segundo (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977), seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = a^x$.

Quando $a > 1$, observa-se: $\forall\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ tem-se $x_1 < x_2$ se, e somente se, $a^{x_1} < a^{x_2}$. Isto é, a função é dita **estritamente crescente**, conforme mostra a Figura 5.

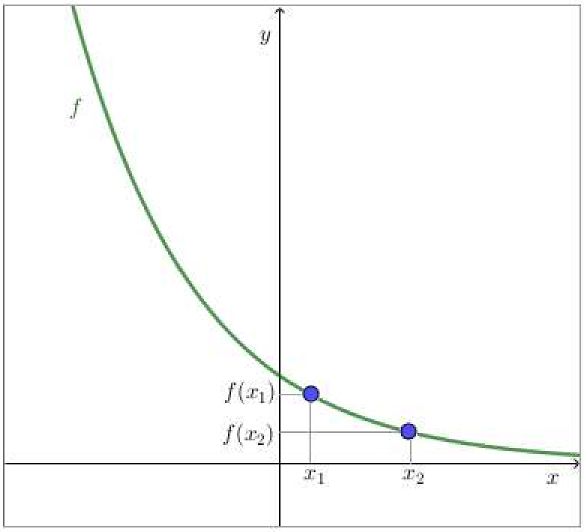
Quando $0 < a < 1$, nota-se: $\forall\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ tem-se $x_1 < x_2$ se, e somente se, $a^{x_1} > a^{x_2}$. Isto é, a função é dita **estritamente decrescente**, conforme ilustrado na Figura 6.

Figura 5 – Gráfico de $f(x) = a^x$, para $a > 0$.



Fonte: Próprio autor

Figura 6 – Gráfico de $f(x) = a^x$, para $0 < a < 1$.



Fonte: Próprio autor

2.3.3 Caracterização da função exponencial

As funções exponenciais são, em conjunto com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas. Normalmente as dúvidas surgem na escolha do instrumento matemático que descreve cada problema. Para que essa escolha possa ser feita corretamente, é preciso saber quais são as características de cada tipo de função. De acordo com (LIMA et al., 2006), veja as características das funções exponenciais.

Teorema 2.3.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). Para caracterizar a função exponencial, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

(3) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: A prova é realizada pelas implicações $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

a) Mostrando que (1) implica (2).

Observa-se inicialmente que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = \dfrac{m}{n}$ (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, como $nr = m$, pode-se escrever

$$f(rx) = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

logo $f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r$.

Assim, pondo-se $f(1) = a$, tem-se $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Suponha, a fim de fixar as ideias, que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admite-se, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$.

Diz-se, por exemplo, que $f(x) < a^x$. (O caso $f(x) > a^x$ é tratado analogamente.) Então, em todo intervalo $\mathbb{R}_+$ existe uma potência a^r, com r racional tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$.

Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ pode-se concluir que $x < r$. Por outro lado, tem-se também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Desta contradição, obtém-se que (1) implica (2).

b) Mostrando que (2) implica (3).

Supondo que $f(x) = a^x$ de (2). Escreve-se $f(x+y) = a^{x+y}$.

Aplicando-se a propriedade 1 das potências, equação (2.1) , tem-se que $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

Pela hipótese, tem-se $a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$, ou seja, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.

Portanto, obtém-se que (2) implica (3).

c) Mostrando que (3) implica (1).

Note que $f(0) = f(x-x)$, de (3) tem-se $f(0) = f(x-x) = f(x) \cdot f(-x)$.

Observe que $f(0) = f(0+0)$, de (3) obtém-se $f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0) = (f(0))^2$.

Tem-se $f(0) - (f(0))^2 = 0$ se, e somente se, $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Por hipótese $f(0) \neq 0$. Logo, obtém-se:

$$f(0) = f(x) \cdot f(-x) = 1 \Leftrightarrow f(-x) = (f(x))^{-1}.$$

Portanto, $f(-nx) = (f(x))^n = (((f(x))^{-1})^n = (f(x))^{-n}$. Tem-se que (3) implica (1).

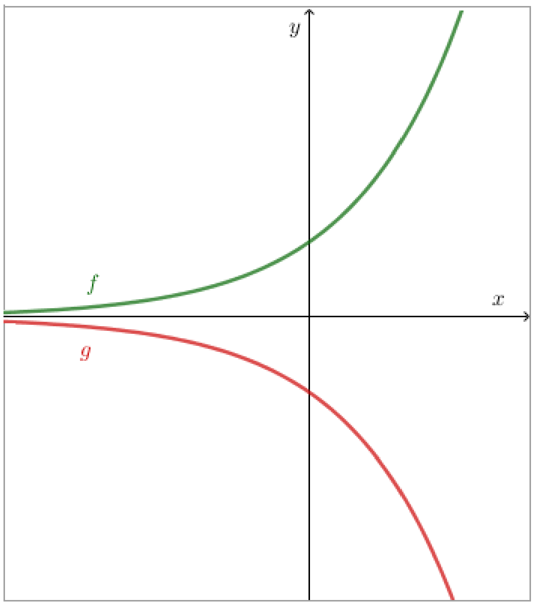
Logo prova-se a caracterização das funções exponenciais.

2.3.4 Caracterização das funções de tipo exponencial

De acordo com (LIMA et al., 2006), seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para x, $h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\frac{[g(x+h)-g(x)]}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = \frac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seja $f(x) = b \cdot a^x$ com $a > 1$, se $b < 0$, obtém-se uma reflexão em relação ao eixo x, conforme sugere a representação gráfica na Figura 7.

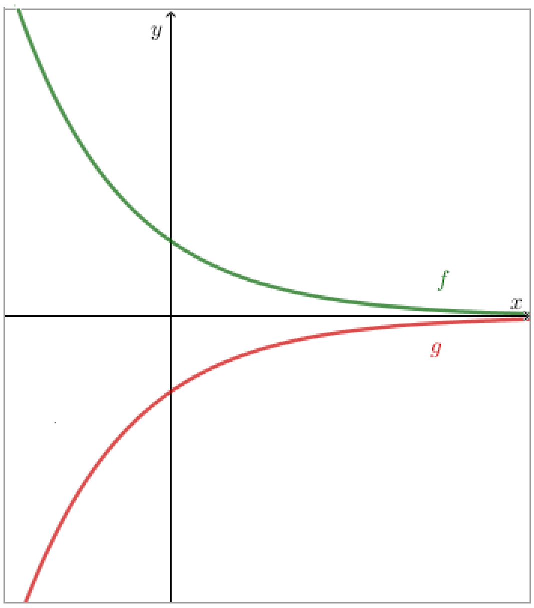
Figura 7 – Gráfico de $f(x) = b \cdot a^x$ com $a > 1$ para $b > 0$ e $g(x) = b \cdot a^x$ com $a > 1$ para $b < 0$.



Fonte: Próprio autor

Seja $f(x) = b \cdot a^x$ com $0 < a < 1$, se $b < 0$, obtém-se uma reflexão em relação ao eixo x, conforme ilustra a representação gráfica na Figura 8.

Figura 8 – Gráfico de $f(x) = b \cdot a^x$ com $0 < a < 1$ para $b > 0$ e $g(x) = b \cdot a^x$ com $0 < a < 1$ para $b < 0$.



Fonte: Próprio autor

2.3.5 O número de Euler: e

Na Matemática existe um importante número irracional denominado e. Um valor aproximado de e com 12 algarismos decimais exatos é $e = 2,718281828459$ (LIMA et al., 2006). Esta notação foi escolhida pelo matemático suíço Leonhard Euler $(1707-1783)$ em 1727, provavelmente porque é o primeiro caractere da palavra exponencial (STEWART, 2013).

Segundo (MAOR, 2008), o número e é apresentado como o limite da expressão $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao infinito, veja Tabela 1.

Tabela 1 – Limite de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, quando n tende ao infinito

n	$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	$2,25$
3	$2,37037$
10	$2,59374$
100	$2,70481$
1.000	$2,71692$
10.000	$2,71815$
100.000	$2,71827$
1.000.000	$2,71828$
10.000.000	$2,71828.$

Fonte: (MAOR, 2008)

Isto é,

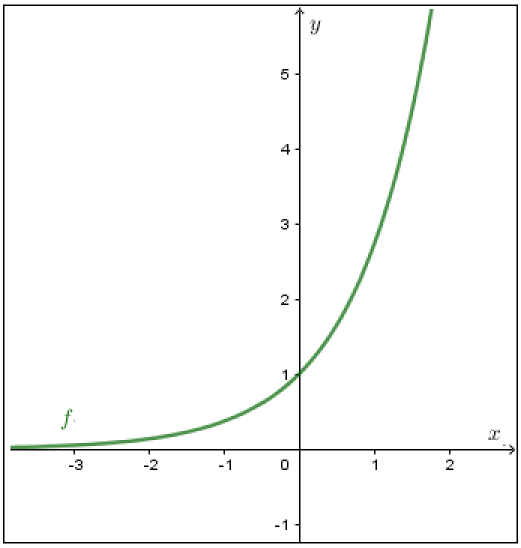
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

O número e representa uma das mais importantes constantes matemáticas, é utilizado para o desenvolvimento de cálculos em diversas áreas do conhecimento, como a Matemática, a Biologia, a Física, a Economia e as Engenharias, dentre outras.

2.3.6 A função exponencial $f(x) = e^x$

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = e^x$, cuja a base é o número e chama-se função exponencial natural. A função f é crescente, pois $e > 1$, conforme representação gráfica na Figura 9.

Figura 9 – Gráfico de $f(x) = e^x$.



Fonte: Próprio autor

2.3.7 Equação exponencial

De acordo com (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977), equações exponenciais são equações com incógnitas no expoente.

Existem dois métodos para resolução de equações exponenciais. O primeiro é apresentado nesta seção e o segundo, na seção 2.4, após o estudo de logaritmo.

2.3.7.1 Resolvendo equações exponenciais com potências de mesma base

O método de redução a uma base comum, segundo (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977), é utilizado quando, ambos os membros da equação, com as devidas transformações baseadas nas propriedades de potências, forem redutíveis a potências de mesma base. Como a função exponencial $f(x) = a^x$ é injetiva, pode-se concluir que potências iguais e de mesma base possuem expoentes iguais, ou seja,

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \ (0 < a \neq 1).$$

2.4 Logaritmo

Conforme sugere (LIMA et al., 2006), o logaritmo de um número pode ser definido como:

Definição 2.4.1. Dado um número real $0 < a \neq 1$, o logaritmo de um número $b > 0$ na base a é o expoente x a que se elevar a de tal modo que $a^x = b$. Escreve-se $x = \log_a(b)$ e lê-se x é o logaritmo de b na base a, ou seja,

$$\log_a(b) = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

2.4.1 Propriedades dos logaritmos

Para $0 < a \neq 1$, seja $u, v \in \mathbb{R}_+^*$, têm-se as propriedades, conforme sugere (SOUZA, 2013).

1) Logaritmo do produto

Em uma mesma base, o logaritmo do produto de dois ou mais números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números:

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v). \tag{2.6}$$

2) Logaritmo do quociente

Em uma mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença dos logaritmos de cada um desses números:

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v). \tag{2.7}$$

3) Logaritmo da potência

O logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência:

$$\log_a(u)^n = n \cdot \log_a(u). \tag{2.8}$$

2.4.2 Resolvendo equações exponenciais com potências de bases diferentes

A resolução de equações exponenciais onde não é possível reduzir ambos os lados da igualdade a potências de mesma base, de acordo com (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977), baseia-se na definição de logaritmo, isto é, se $0 < a \neq 1$ e $b > 0$ tem-se:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b).$$

2.5 Função inversa

Definição 2.5.1. Se f é uma função bijetora com domínio A e imagem B, então a função inversa de f, denotada por f^{-1}, é a função com domínio B e a imagem A definida por, de acordo com (DEMANA et al., 2009),

$$f^{-1}(b) = a \text{ se e somente se } f(a) = b.$$

Segundo (DEMANA et al., 2009), uma função exponencial $f(x) = a^x$ tem uma inversa. Essa inversa é a função logarítmica de base a, denotada por $\log_a(x)$, isto é, se $f(x) = a^x$ com $0 < a \neq 1$, então $f^{-1}(x) = \log_a(x)$. Conforme ilustra a Figura 10.

Demonstração:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, função crescente e bijetora, por hipótese $f(x)$ admite inversa, logo pela definição de função inversa, tem-se:

$$y = a^x \text{ implica em } x = a^y.$$

Aplicando $\log_a$ em ambos lados da igualdade, obtém-se:

$$\log_a(x) = \log_a(a^y).$$

Utilizando a propriedade 3 dos logaritmos, equação (2.8), chega-se a:

$$\log_a(x) = y \cdot \log_a(a),$$

Como $\log_a(a) = 1$, tem-se que $y = \log_a(x)$.

Portanto a inversa da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definida por $f(x) = a^x$ é a função $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x) = \log_a(x)$, denota-se f^{-1} de função logarítmica, cuja **domínio** é $D(f^{-1}) = \mathbb{R}_+^*$ e a **imagem** é $Im(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

2.6 Função logarítmica

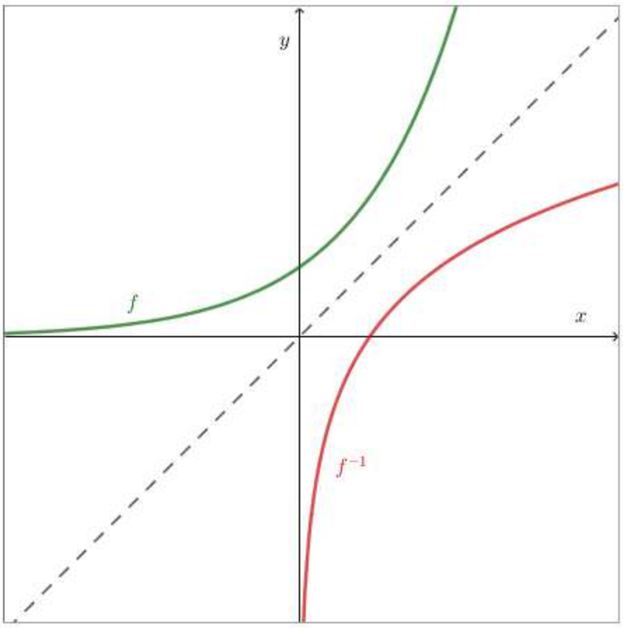
Definição 2.6.1. Uma função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a(x)$, com $0 < a \neq 1$, é chamada de função logarítmica de base a (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977).

2.6.1 Domínio e imagem

O **domínio** de uma função logarítmica é o $D(f) =]0, +\infty[$.

Segundo (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977), se $0 < a \neq 1$ então a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a(x)$ admite a função inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$. Se f é bijetora então f possui inversa pela definição 2.5.1, portanto, a **imagem** da função logarítmica é $Im(f) = \mathbb{R}$.

Figura 10 – Gráfico de $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a(x)$, para $a > 0$.



Fonte: Próprio autor

2.6.2 Crescimento e decrescimento

Segundo (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 1977), seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a(x)$.

Quando $a > 1$, observa-se: $\forall\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tem-se $x_1 < x_2$ se, e somente se, $\log_a(x_1) < \log_a(x_2)$. Isto é, a função será dita **estritamente crescente**, conforme mostra a Figura 11.

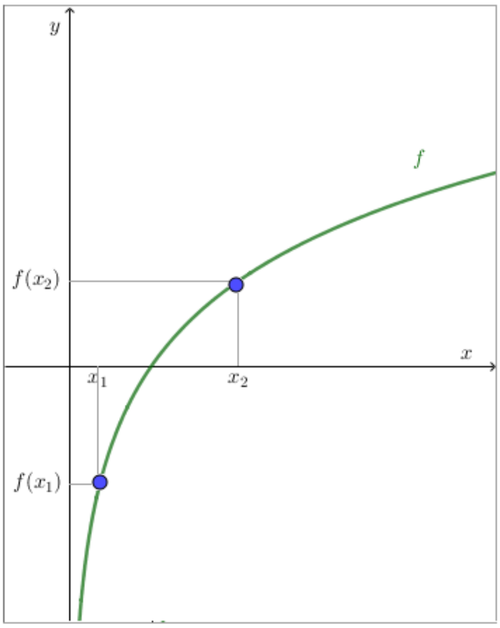
Quando $0 < a < 1$, nota-se: $\forall\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ obtém-se $x_1 < x_2$ se, e somente se, $\log_a(x_1) > \log_a(x_2)$. Isto é, a função será dita **estritamente decrescente**, conforme ilustrado na Figura 12.

2.6.3 Caracterização da função logarítmica

As funções logarítmicas são muito importantes na Matemática e em suas aplicações. Sendo considerada a inversa da função exponencial, a função logarítmica está ligada a um grande número fenômenos e situações naturais. Dentre as funções monótonas e injetivas, somente as funções logarítmicas podem transformar produtos em somas, conforme sugere (LIMA et al., 2006).

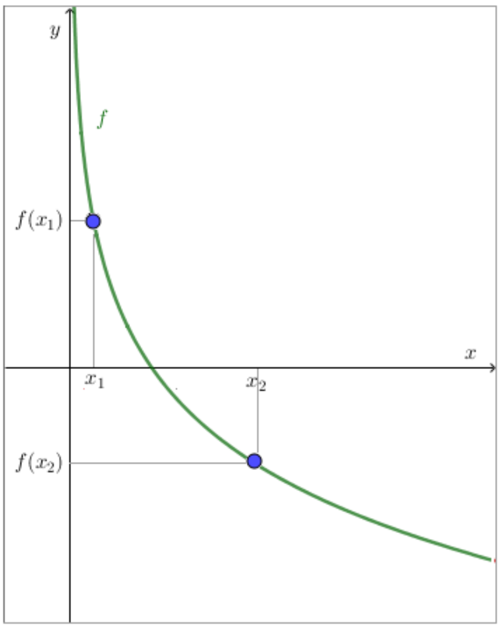
Teorema 2.6.1. Seja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x)+f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+$. Então existe $0 < a \neq 1$ tal que $f(x) = \log_a(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$.

Figura 11 – Gráfico de $f(x) = \log_a(x)$, para $a > 0$.



Fonte: Próprio autor

Figura 12 – Gráfico de $f(x) = \log_a(x)$, para $0 < a < 1$.



Fonte: Próprio autor

A demostração será omitida, mas está diponível no livro (LIMA et al., 2006).

2.6.4 Função logarítmica na base 10

Segundo (DEMANA et al., 2009), quando a base do logaritmo é 10, não é necessário escrever o número e denota-se a função logarítmica por $f(x) = \log(x)$. Lembre-se que essa função é a inversa da função exponencial $f(x) = 10^x$. Logo

$$y = \log(x) \text{ se e somente se } 10^y = x.$$

2.6.5 Função logarítmica na base e

De acordo com (STEWART, 2013), o logaritmo na base e é chamado logaritmo natural e tem uma notação especial:

$$\log_e(x) = \ln(x).$$

Essa função é inversa a função exponencial $f(x) = e^x$. Assim,

$$y = \ln(x) \text{ se e somente se } e^y = x.$$

No próximo capítulo é apresentado o referencial teórico que permeia este trabalho.

3 Fundamentação teórica

Neste capítulo discute-se a importância da inserção de metodologias de ensino nas aulas de Matemática, que podem contribuir para melhorar o processo de aprendizagem dos estudantes. Destaca-se a utilização de quatro recursos pedagógicos que podem colaborar para uma melhor aprendizagem e estimular os alunos a participar das aulas, a serem ativos, criativos e críticos.

Atualmente, a realidade de algumas escolas ainda aponta para a falta de um espaço apropriado para o aluno vivenciar a Matemática. Segundo (KAMII, 1994), o ambiente social e as situações que os professores criam são cruciais no desenvolvimento lógico-matemático.

Um ambiente adequado para "experimentar a Matemática" deve ser constituído de desafios e construções, onde o professor auxilia o aluno a utilizar da melhor forma todas as possibilidades que esse espaço oferece. Ensinar Matemática é mais que explicar um conteúdo, é estimular o aluno a desenvolver o pensamento crítico, a expressar-se com clareza, a aprimorar a habilidade de estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. É fazê-lo perceber que o importante não é apenas saber aplicar um conteúdo, mas sim, compreendê-lo de forma que possa utilizá-lo em sua vida.

As escolas de Ensino Médio são responsáveis não apenas pela formação conceitual de seus alunos, mas também devem ser capazes de proporcionar um ambiente onde seja desenvolvida a sua criticidade, a criatividade, bem como a capacidade de aplicação na vida diária de alguns conceitos aprendidos na escola, tornando-os cidadãos ativos e críticos, conforme sugerem os PCNs (BRASIL, 2000).

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. (BRASIL, 2000, p.6)

De acordo com os PCNs, é necessário que a escola perceba a importância de se trabalhar no Ensino Médio os conteúdos de forma que estejam relacionados com a realidade dos estudantes e com o seu cotidiano, mas sem perder o caráter científico que a escola deve dar ao conhecimento.

A metodologia de resolução de Situações Problema é um dos métodos matemáticos mais utilizados para o desenvolvimento do raciocínio. Este recurso pedagógico possibilita ao aluno uma maior compreensão dos conteúdos matemáticos, a oportunidade de mostrar a aplicação dos conceitos, além de estimular o aprimoramento do seu entendimento. Em (DANTE, 2003) definem-se as Situações Problema como sendo problemas que fazem parte do dia-a-dia do estudante e que para serem resolvidos necessitam dos conhecimentos matemáticos. Atualmente, é possível perceber que os alunos estão cada vez mais questionadores sobre "o porquê de estudar determinados conteúdos". Buscar mostrar, sempre que possível, aos estudantes as aplicações dos conteúdos através da utilização de Situações Problema, possibilita desenvolver o racícinio, ao mesmo tempo em que se pode despertar o interesse dos alunos para o que é ensinado durante as aulas.

Outra estratégia didática que vem sendo objeto de estudo de pesquisadores interessados nas questões metodológicas da educação é o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação. Conforme sugere (LEITE; RIBEIRO, 2012), "a inserção das TICs na educação pode ser uma importante ferramenta para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem". Este recurso pedagógico está cada vez mais presente no dia-a-dia dos alunos e não se deve ignorar a necessidade de conhecê-lo e utilizá-lo sempre que possível. A tecnologia pode e deve estar presente na sala de aula, porém é preciso ter um cuidado, em especial: saber escolher o momento adequado e a melhor maneira de utilizá-la, pois tal recurso deve contribuir de um modo significativo para o aprendizado e não apenas servir como substituto dos recursos tradicionais (quadro e giz). De acordo com os PCNs (BRASIL, 1998), "a tecnologia deve servir para enriquecer o ambiente educacional propiciando a construção de conhecimentos por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte de alunos e professores".

A tecnologia está disponível para ser usada, e não se pode negá-la, pois o mundo está cada vez mais tecnológico e informatizado. O professor pode aliar-se a tal ferramenta pedagógica e saber empregá-la como um instrumento para despertar o interesse do aluno. Uma tecnologia que está alcance de quase todos os estudantes é o smartphone, um aparelho versátil e que possibilita a instalação de vários aplicativos, incluindo os voltados para o aprendizado. Aliar o uso de dispositivos móveis à educação é uma nova tendência no âmbito da educação, em especial na Educação Matemática. Na fala de (KIRSCH, 2015) constata-se o quanto pode ser importante os professores se apropriarem das tecnologias móveis ao invés de ignorá-las, pois as mesmas podem ser um recurso muito atrativo por fazer parte da realidade das novas gerações de educandos.

No ensino de Matemática, destaca-se a utilização do aplicativo Graphing Calc, que pode ser instalado nos celulares dos estudantes gratuitamente e contribui para o processo de aprendizagem. É importante salientar que a utilização do aplicativo nos smartphones dos estudantes é válida, como um recurso pedagógico facilitador da aprendizagem, quando há uma conexão entre os recursos que o mesmo disponibiliza com o objetivo pretendido pelo professor ao longo do seu planejamento. Além disso, o aplicativo deve ser um instrumento que possibilite ao estudante ser atuante no seu processo de aprendizagem de forma ativa e não passiva, através das ferramentas que o mesmo disponibiliza. De acordo com (DULLIUS; QUARTIERI, 2015),

> Os recursos tecnológicos têm um papel importante durante a aula, quando os alunos são incentivados a trabalhar autonomamente, procurando resolver problemas e questões que lhes são propostos, lidando com ideias e relações matemáticas, pensando, raciocinando, aplicando e desenvolvendo conceitos. O sucesso da aprendizagem dos alunos, nesse tipo de aulas, depende da concretização de uma estratégia de ensino que pressupõe diversos momentos, mas em que o trabalho dos alunos com tarefas matemáticas, apoiado por recursos didáticos, ocupa uma posição central. (DULLIUS; QUARTIERI, 2015, p.14)

Dessa forma, ao utilizar esta ferramenta, o professor possibilita ao aluno um aprendizado de forma diferenciada, tornando sua aula menos previsível e consequentemente motivando o mesmo a aprender e a interagir com o espaço educacional.

Aliado aos recursos tecnológicos, o professor pode ainda se apropriar da História da Matemática como um importante instrumento de instigação da curiosidade dos estudantes. Estudos recentes indicam que a História da Matemática é uma importante ferramenta de auxílio nesta nova proposta de ensino. Segundo (CURY, 2017), os professores de Matemática, Fisíca ou qualquer outra área exata de conhecimento não deveriam ensinar fórmulas sem mostrar como surgiram, quem as determinou e sua utilidade. Com a inserção de fatos históricos relacionados aos conteúdos ministrados, as atividades rotineiras de sala de aula, destinadas a memorização de fórmulas, sem nenhuma curiosidade ou atividade diferenciada, são deixadas de lado. Isso possibilita uma abertura para a criação de um espaço que torne possível a criatividade dos alunos e o desenvolvimento de suas opiniões críticas. (D'AMBROSIO, 2003) sugere que:

> As práticas educativas se fundam na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições, e a história compreende o registro desses fundamentos. Portanto, é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses e a interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas. Em especial da Matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade. (D'AMBRÓSIO, 2003, p.1)

As palavras de (D'AMBROSIO, 2003) nos levam a perceber a importância que deve ser dada aos fatos históricos ligados aos conceitos matemáticos como uma ferramenta de formação e informação dos alunos. A História da Matemática está diretamente ligada ao processo evolutivo da humanidade. Na Matemática, como nas demais ciências, nada surgiu por acaso, mas sim a partir de uma necessidade. Ao contrário do que muitos pensam, a Matemática nem sempre esteve nos livros, ela aos poucos foi sendo criada para suprir às necessidades das civilizações. Estudar a História da Matemática permite compreender o conhecimento matemático como criação humana. De acordo com os PCNs

(BRASIL, 1997b), os alunos devem ter o entendimento de que os conceitos matemáticos foram construídos ao longo da história e continuam evoluindo. A compreensão do cenário histórico permite visualizar a matemática através dos prismas de sua aplicação filosófica, científica e social.

É interessante que as etapas da evolução do conhecimento sejam passadas para os estudantes. As aulas de Matemática podem se tornar mais atrativas para os alunos se eles puderem acompanhar, no decorrer do estudo das teorias, um pouco da história. Poder entender como surgiram, o porquê da necessidade do desenvolvimento das teorias matemáticas e quem foram os personagens envolvidos em tais estudos pode aguçar o interesse dos estudantes acerca do que está sendo ensinado.

Uma tendência que também pode complementar atuação do professor em suas aulas de Matemática é o Material Concreto, possibilitando ao aluno a oportunidade de manipular e visualizar a Matemática, permitindo assim a ampliação de seus conhecimentos matemáticos. Segundo (RÊGO; RÊGO, 2006),

> O Material Concreto tem fundamental importância, pois, a partir de sua utilização adequada os alunos ampliam sua concepção sobre o que é, como e para que aprender Matemática, vencendo os mitos e preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de ideias e modelos. (REGO e REGO; 2006, p.43)

Da mesma forma (SILVEIRA, 2012) enfatiza que os materiais concretos se configuram em uma "possibilidade de recurso pedagógico que parte da prática para problematizar e construir conceitos, a fim de minimizar as rupturas dos saberes e favorecer a articulação do cotidiano com o saber escolar".

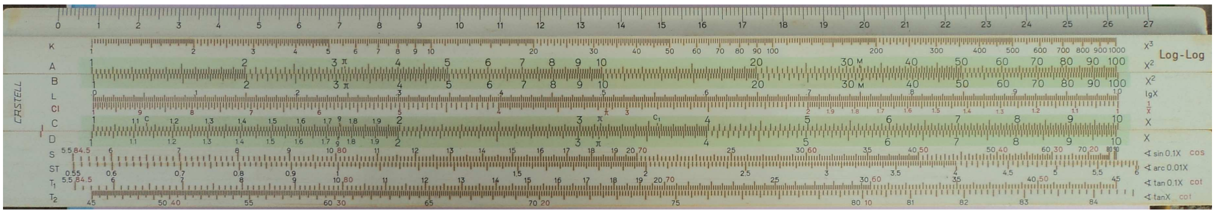
Para se trabalhar com o Material Concreto é necessário que o professor planeje suas aulas de forma que conheça o recurso que vai utilizar, para que assim a atividade desenvolvida consiga colaborar para a construção do conhecimentos dos estudantes. De acordo com (MENDES, 2009),

> Ao selecionar o recurso didático, o professor deve considerar, além dos seus objetivos e os dos alunos, a qualidade, a atualidade, o conteúdo, a adequabilidade, a continuidade, a criatividade, entre outros aspectos que tornem o material, um aliado do professor e do aluno durante todo o processo. (MENDES, 2009, p.157)

Baseado nas ideias de (MENDES, 2009), a escolha pelo recurso didático deve ser cuidadosa, deve-se realizar um planejamento inicial, baseados nos objetivos que pretende-se alcançar, se é interessante para o público que realizará as atividades e se fará com que se sintam desafiados e interessados a participar ativamente da atividade proposta.

Foi escolhido como Material Concreto a Régua de Cálculo, instrumento que possibilita aos estudantes poder calcular logaritmos de base 10. A Régua de Cálculo foi escolhida, pois ela é uma das primeiras tecnologias desenvolvidas para auxiliar na resolução de problemas que envolvem logaritmos. Pela impossibilidade de se obter réguas originais, pois não são mais comercializadas, optou-se pela construção de 10 réguas artesanais. As dicas de como construir uma Régua de Cálculo encontram-se no Apêndice F.

Figura 13 – Régua de Cálculo Faber Castell.



Fonte: Próprio autor

Partindo das ideias apresentadas, foi construída uma proposta de atividades para serem desenvolvidas em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio. Os conteúdos a serem abordados durante as atividades foram funções exponenciais e logarítmicas, que muitas vezes são conceitos temidos pelos alunos, pois geralmente são apresentados de forma teórica, com muitas definições e sem significado algum. Partindo desta conjectura, que se entendeu a necessidade de utilizar recursos como Situações Problema, tecnologias (a partir do aplicativo Graphing Calc), a História da Matemática e o Material Concreto, (no caso a Régua de Cálculo), buscando a compreensão do conteúdo e superando a memorização sem significado.

No próximo capítulo apresentam-se as atividades propostas seguidas de suas respectivas soluções.

4 Atividades Propostas

As atividades propostas abordam os conteúdos de funções exponenciais e logarítmicas. A proposta pode ser aplicada com a finalidade de introduzir os conceitos ou após os conteúdos terem sido trabalhados, como uma atividade complementar. O objetivo inicial é que os alunos compreendam os conceitos estudados a partir de aplicações ao cotidiano e com o uso de recursos didáticos.

As atividades são compostas por Situações Problema. Inicialmente trabalham-se dois problemas contextualizados, para os quais são realizados questionamentos, que podem ser resolvidos por cálculos e/ou com o aplicativo Graphing Calc. A partir de uma pergunta e a impossibilidade de resolvê-la, apresentam-se aos alunos fatos sobre a história dos logaritmos e a Régua de Cálculo. Após aprenderem a usar a Régua de Cálculo, então é possível responder à questão que ficou em aberto. A seguir, sugere-se que os alunos resolvam mais duas Situações Problema com o auxílio da Régua de Cálculo.

Todas as atividades estão resolvidas e, nos apêndices deste trabalho, encontram-se disponíveis sem soluções para impressão, permitindo que o professor que assim deseja, possa aplicá-las em sua sala de aula.

4.1 Objetivos das atividades

Nessa seção destacam-se alguns objetivos das atividades, que juntamente com os objetivos gerais e específicos complementam a proposta do trabalho:

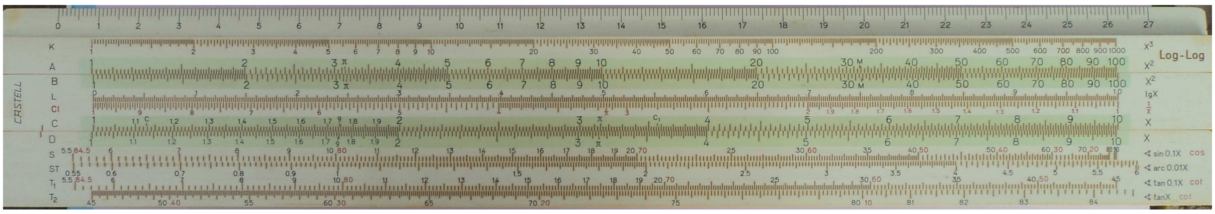
- Compreender a definição de potências e suas propriedades;
- Reconhecer a definição de função exponencial e sua condição de existência;
- Descrever a lei da função a partir de uma Situação Problema;
- Resolver equações exponenciais reduzindo as potências a uma base comum ou utilizando logaritmo e suas propriedades;
- Construir o gráfico que representa uma função exponencial utilizando o aplicativo Graphing Calc;
- Analisar a representação gráfica da função exponencial e relacionar com a lei da função;
- Entender como foi desenvolvida a teoria dos logaritmos;

- Compreender que a História da Matemática está diretamente ligada ao processo evolutivo da sociedade;
- Compreender a definição de logaritmo;
- Calcular logaritmo utilizando a Régua de Cálculo;
- Aplicar as propriedades dos logaritmos;
- Relacionar que a função inversa da função exponencial é a função logarítmica;
- Compreender a definição de função logarítmica e sua condição de existência.

4.2 Aprendendo a utilizar a Régua de Cálculo

A Régua de Cálculo, segundo (COELHO, 2015), é um dispositivo inventado pelo matemático inglês William Oughtred (1592 – 1635), em 1622, tendo como base a tábua de logaritmos criada por Napier. A Régua de Cálculo foi considerada a precursora das calculadoras eletrônicas, sendo aperfeiçoada com o passar dos anos, perdendo espaço por volta dos anos 1970, quando foi criada a primeira calculadora eletrônica. É importante salientar que a Régua de Cálculo não apresenta resultados exatos, mas sim aproximados.

Figura 14 – Régua de Cálculo.



Fonte: Próprio autor

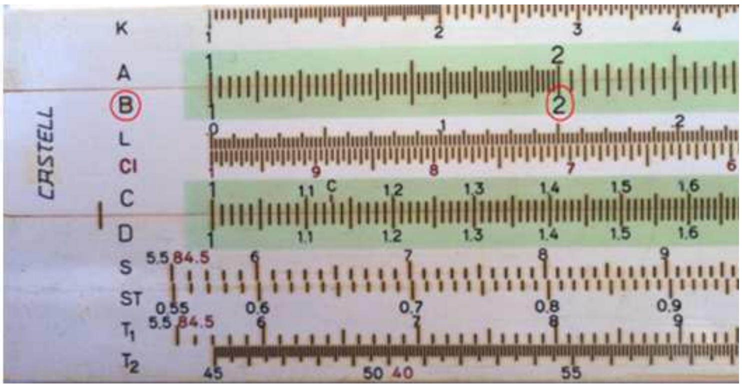
Nesta seção ensina-se como calcular logaritmo na base 10 utilizando a Régua de Cálculo. Vale ressaltar que a Régua possbilita apenas o cálculo de logaritmo na base 10. Caso seja necessário calcular logaritmo em outras bases, deve-se utilizar mudança de base.

Questão 1: Calcular logaritmo de 2 na base 10.

☞ Procure na régua a linha B e nela, localize o número 2, conforme mostrado na Figura 15.

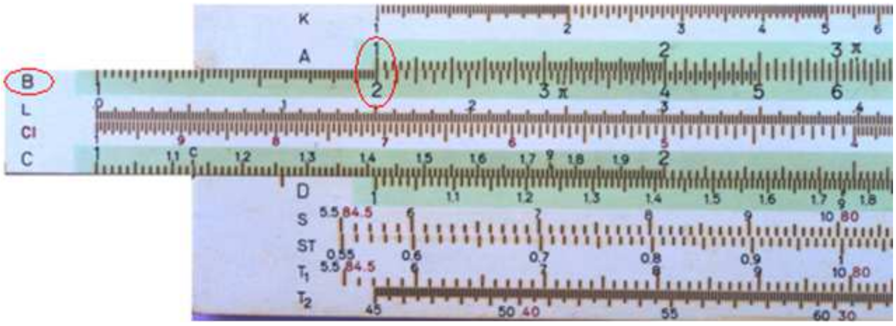
☞ Procure a linha A e localize o número 1. A seguir procure o número 2 na linha B, pois pretende-se calcular log(2). Deslize a régua central para a esquerda até o número 2 (linha B) ficar alinhado ao número 1 da linha A, conforme a Figura 16.

Figura 15 – Calculando log(2) utilizando a Régua de Cálculo (primeira etapa).



Fonte: Próprio autor

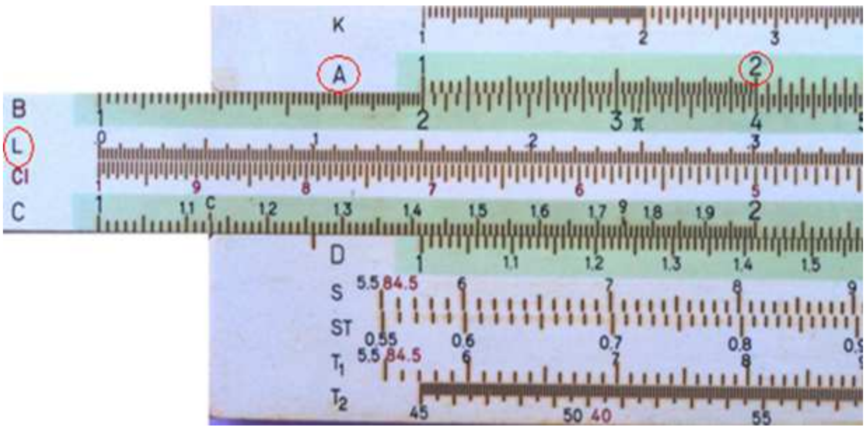
Figura 16 – Calculando log(2) utilizando a Régua de Cálculo (segunda etapa).



Fonte: Próprio autor

☞ Procure o número 2 na linha A, em seguida localize a linha L, como mostrado na Figura 17.

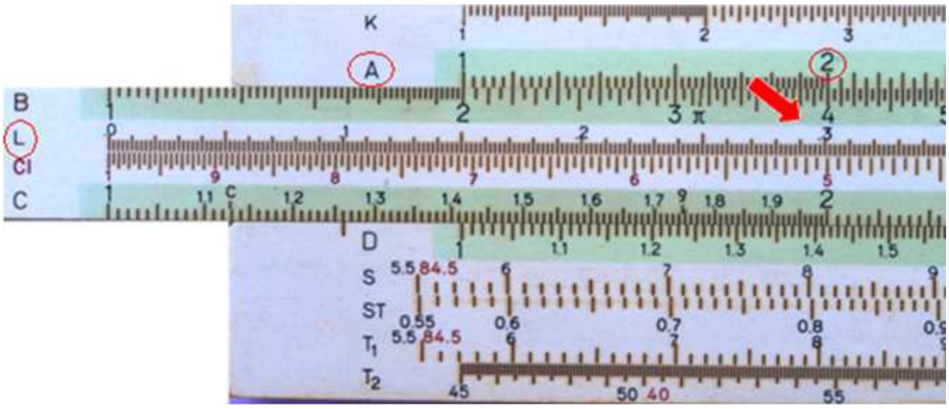
Figura 17 – Calculando log(2) utilizando a Régua de Cálculo (terceira etapa).



Fonte: Próprio autor

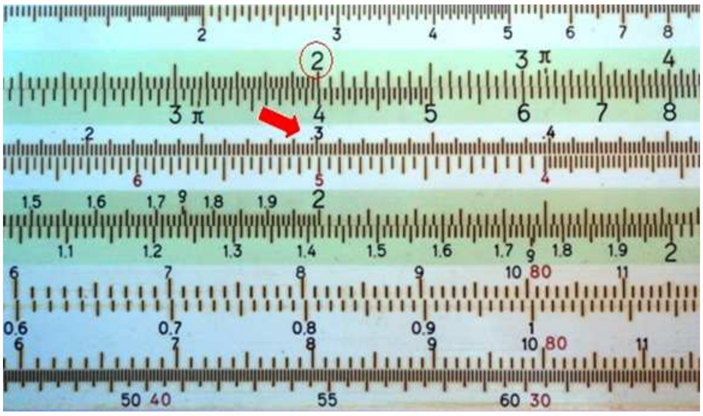
☞ O logaritmo de 2 está na linha L, abaixo do número 2 da linha A, como ilustrado na Figura 18.

Figura 18 – Calculando log(2) utilizando a Régua de Cálculo (quarta etapa).



Fonte: Próprio autor

Figura 19 – Calculando log(2) utilizando a Régua de Cálculo (resultado ampliado).



Fonte: Próprio autor

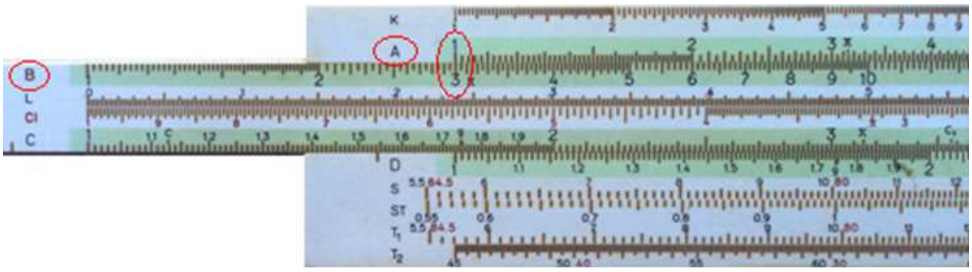
Logo, $\log(2) \cong 0,3$.

Questão 2: Calculando log(3):

☞ Procure na régua a linha B, em seguida procure o número 3 (na linha B), como mostrado na Figura 20.

☞ Na linha A, procure o número 1. Na sequência, procure o número 3 na linha B. Deslize a régua central para a esquerda até o número 3 (linha B) ficar alinhado ao 1 da linha A, conforme Figura 20.

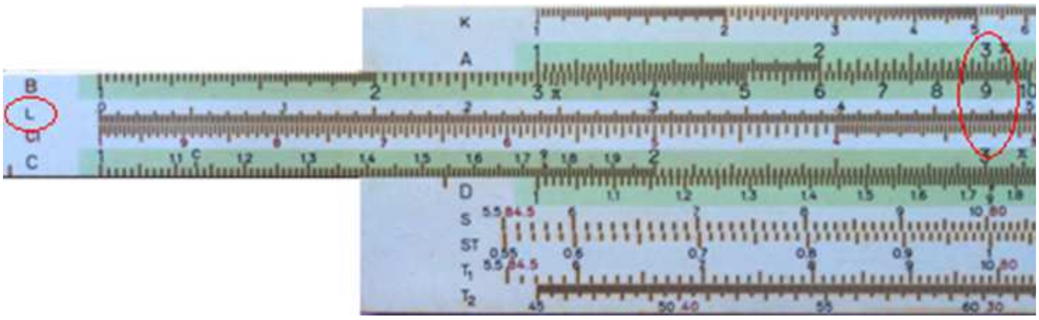
Figura 20 – Calculando log(3) utilizando a Régua de Cálculo (primeira e segunda etapas).



Fonte: Próprio autor

☞ Procure o número 3 na linha A, em seguida localize a linha L, conforme mostrado na Figura 21.

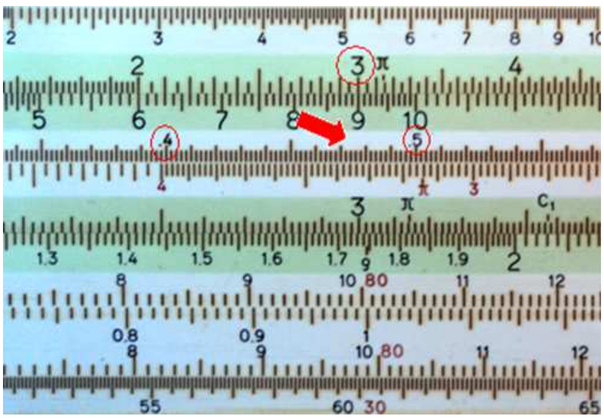
Figura 21 – Calculando log(3) utilizando a Régua de Cálculo (terceira e quarta etapas).



Fonte: Próprio autor

☞ O logaritmo de 3 está na linha L, abaixo do número 3 da linha A, conforme ilustrado na Figura 22.

Figura 22 – Calculando log(3) utilizando a Régua de Cálculo (resultado ampliado).



Fonte: Próprio autor

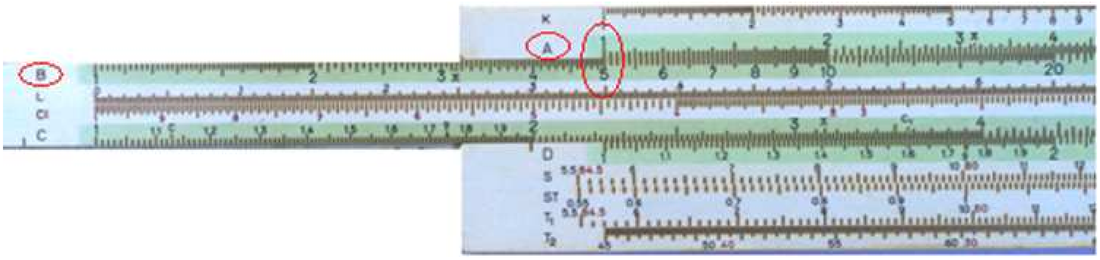
Portanto, tem-se que $\log(3) \cong 0,47$.

Questão 3: Calculando log(5):

☞ Procure na régua a linha B, em seguida procure o número 5 (na linha B), como mostrado na Figura 23.

☞ Na linha A, procure o número 1. Na sequência, procure o número 5 na linha B. Deslize a régua central para a esquerda até o número 5 (linha B) ficar alinhado ao 1 da linha A, conforme Figura 23.

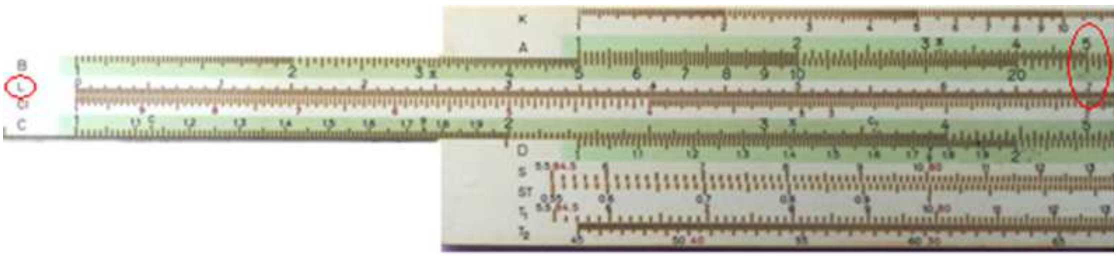
Figura 23 – Calculando log(5) utilizando a Régua de Cálculo (primeira e segunda etapas).



Fonte: Próprio autor

☞ Procure o número 5 na linha A, em seguida localize a linha L, conforme mostrado na Figura 24.

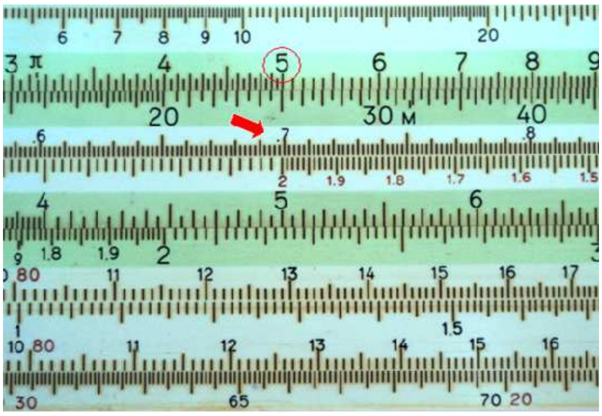
Figura 24 – Calculando log(5) utilizando a Régua de Cálculo (terceira e quarta etapas).



Fonte: Próprio autor

☞ O logaritmo de 5 está na linha L, abaixo do número 5 da linha A, conforme ilustrado na Figura 25.

Figura 25 – Calculando log(5) utilizando a Régua de Cálculo (resultado ampliado).



Fonte: Próprio autor

Logo, tem-se que $\log(5) \cong 0,7$.

Questão 4: Calculando log(15):

Para calcular log(15) não é possível utilizar a Régua de Cálculo imediatamente, pois a mesma é restrita ao cálculo de no máximo log(10). No entanto é possível aplicar as propriedades dos logaritmos 1, 2 e 3, com respectivas equações (2.6), (2.7) e (2.8) e utilizar a Régua de Cálculo.

Note que $15 = 3 \cdot 5$, logo pode-se escrever $\log(15) = \log(3 \cdot 5)$.

Aplicando a propriedade 1 dos logaritmos, equação (2.6), chega-se a:

$$\log(15) = \log(3 \cdot 5) = \log(3) + \log(5).$$

Utilizando os resultados obtidos anteriormente $\log(3) \cong 0,47$ e $\log(5) \cong 0,7$, obtém-se:

$$\log(15) \cong 0,47 + 0,7 \cong 1,17.$$

Portanto, $\log(15) \cong 1,17$.

4.3 Atividade 1: Juros compostos

Sugere-se que os alunos sejam desafiados a resolver uma Situação Problema que aborda o tema de juros compostos. Inicialmente são apresentados alguns questionamentos. Conforme são respondidos, é possível determinar a lei da função que representa a situação, construir seu gráfico com a utilização do aplicativo Graphing Calc e analisar o comportamento da função.

Enunciado: O que são juros compostos? No regime de juros compostos, o rendimento obtido, ao final de cada período de aplicação, é incorporado ao capital inicial, dando origem ao montante. Desta forma, calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior, o que chama-se de "juro sobre juro". Montante (M) é a soma do capital (C) com o juro (J), conforme sugere (BARROSO, 2010).
Considere que você irá aplicar um capital de R\$ $100\,000,00$ à taxa de juros compostos de 8% ao ano.

Questionamentos:

Após a apresentação da Situação Problema realizam-se alguns questionamentos como:

(a) Qual é o valor do montante após um ano?

Solução:

Sabendo que o valor inicial do montante é de $M_0 = 100\,000$ e a taxa de juros é de $8\% = \dfrac{8}{100} = (0,08)$, tem-se:

$$M_1 = M_0 + M_0 \cdot 0,08.$$

Colocando M_0 em evidência, obtém-se:

$$M_1 = M_0 \cdot (1 + 0,08),$$

ou seja,

$$M_1 = M_0 \cdot (1,08). \tag{4.1}$$

Substituindo $M_0 = 100\,000$ na equação (4.1), tem-se:

$$M_1 = 100\,000 \cdot (1,08) = 108\,000.$$

Portanto, o valor do montante após um ano é de R\$ $108\,000,00$.

(b) Qual é o valor do montante após dois anos?

Solução:

Considerando que o montante é $M_1 = 108\,000$, tem-se:

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot 0,08.$$

Colocando M_1 em evidência, obtém-se:

$$M_2 = M_1 \cdot (1 + 0,08),$$

isto é,

$$M_2 = M_1 \cdot (1,08). \tag{4.2}$$

Substituindo (4.1) em (4.3), chega-se a:

$$M_2 = M_0 \cdot (1,08) \cdot (1,08),$$

que equivale a

$$M_2 = M_0 \cdot (1,08)^2. \tag{4.3}$$

Substituindo $M_0 = 100\,000$ na equação (4.3), tem-se:

$$M_2 = 100\,000 \cdot (1,08)^2 = 116\,640.$$

Após dois anos o valor do montante é de R\$ $116\,640,00$.

(c) E depois de três anos?

Solução:

Considerando que o montante é $M_2 = 116\,640$, tem-se:

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot 0,08.$$

Colocando M_2 em evidência, obtém-se:

$$M_3 = M_2 \cdot (1 + 0,08),$$

ou seja,

$$M_3 = M_2 \cdot (1,08). \tag{4.4}$$

Substituindo (4.3) em (4.4), chega-se a:

$$M_3 = M_0 \cdot (1,08)^2 \cdot (1,08),$$

assim

$$M_3 = M_0 \cdot (1,08)^3. \tag{4.5}$$

Substituindo $M_0 = 100\,000$ na equação (4.5), tem-se:

$$M_3 = 100\,000 \cdot (1,08)^3 = 125\,971,2.$$

Depois de três anos o montante é de R\$ $125\,971,20$.

(d) Após n anos, qual é o montante?

Solução:

Analisando-se o que foi realizado nos itens (a), (b) e (c), percebe-se que:

$$M_n = M_0 \cdot (1,08)^n.$$

Substituindo $M_0 = 100\,000$, chega-se a:

$$M_n = 100\,000 \cdot (1,08)^n.$$

O montante após n anos é obtido por $M_n = 100\,000 \cdot (1,08)^n$.

(e) É possível relacionar o valor do montante com o número de anos?

Solução:

É possível relacionar o montante, $(M(x))$, com o número de anos, (x), a partir da função exponencial $M(x) = 100\,000 \cdot (1,08)^x$.

(f) Esses dados podem ser representados em um gráfico? Utilizando o aplicativo Graphing Calc, esboce o gráfico.

Metodologia

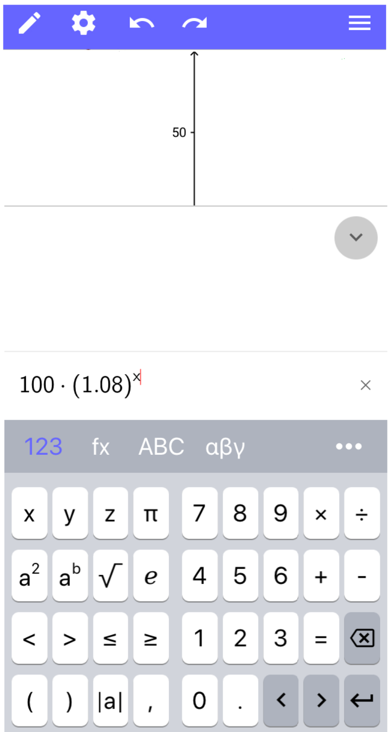
- ☞ Solicite que os alunos abram o aplicativo Graphing Calc.
- ☞ Mostre aos estudantes a caixa de entrada onde se deve inserir a lei da função.
- ☞ Destaque que não se deve colocar vírgula nos números decimais, mas sim, ponto.
- ☞ Após inserir a lei da função, instrua os estudantes a diminuírem o zoom da tela para visualizar o gráfico, pois os valores são altos.
- ☞ Instrua os alunos a salvar o arquivo ao final de cada atividade.

Optou-se por usar $M(x) = 100 \cdot (1,08)^x$ para uma melhor visualização do gráfico.

Primeiro passo: Inserir a lei da função na caixa de entrada, conforme a Figura 26.

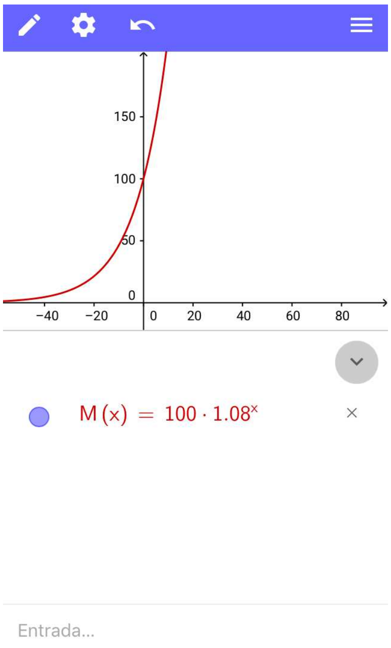
Segundo passo: Gerar o gráfico da função, conforme Figura 27.

Figura 26 – Inserindo lei da função $M(x) = 100 \cdot (1,08)^x$.



Fonte: Próprio autor

Figura 27 – Gráfico da função $M(x) = 100 \cdot (1,08)^x$.



Fonte: Próprio autor

(g) A função resultante é crescente ou decrescente?

Solução:

A partir da análise do comportamento do gráfico da função é possível perceber que o eixo x representa o tempo e o eixo y o valor do montante, ao analisar o gráfico nota-se que conforme o tempo passa o valor do montante aumenta, logo a função é estritamente crescente.

O comportamento da função também pode ser analisado através da lei $M(x) = 100\,000 \cdot (1,08)^x$, nota-se que a base da função é $(1,08)$, como a base é maior que 1, logo a função é crescente.

4.4 Atividade 2: Desvalorização do valor de venda de um carro

A situação 2 é semelhante à 1, no entanto, sua solução envolve uma equação exponencial, na qual não é possível fatorar facilmente as bases da potência para resolvê-la. Utilizando os conhecimentos referentes às propriedades dos logaritmos, aplicando a propriedade 3, equação (2.8), é possível retirar a variável do expoente. No entanto, para determiná-lo é necessário saber o valor de alguns logaritmos, neste momento, apresenta-se aos alunos a Régua de Cálculo. É interessante salientar que o aluno pode resolver os problemas com o Graphing Calc ou efetuando cálculos. No entanto, o objetivo da atividade é trabalhar com a Régua de Cálculo.

Enunciado: Os valores dos carros sofrem desvalorização desde o momento que saem das concessionárias. Este fato ocorre por diversos fatores, como: o tempo de uso, a quilometragem, lançamento de novas versões do modelo, retirada do modelo de linha pela montadora, etc. Suponha que um carro zero quilômetro de R$ 50 mil reais foi comprado no ano de 2017. O carro sofre desvalorização anual de 10%.

Questionamentos:

Após a apresentação da Situação Problema realizam-se alguns questionamentos como:

(a) Qual é o valor do carro um ano após a compra?

Solução:

Sabendo que o valor inicial do carro é de $C_0 = 50\,000$ e a taxa de desvalorização é de $10\% = \dfrac{10}{100} = (0,1)$, tem-se:

$$C_1 = C_0 - C_0 \cdot 0,1.$$

Colocando C_0 em evidência, chega-se a:

$$C_1 = C_0 \cdot (1 - 0,1),$$

isto é,

$$C_1 = C_0 \cdot (0,9). \tag{4.6}$$

Substituindo $C_0 = 50\,000$ na equação (4.6), obtém-se:

$$C_1 = 50\,000 \cdot (0,9) = 45\,000.$$

Assim, o valor do carro um ano após a compra é de R\$ $45\,000,00$.

(b) Após dois anos, quanto valerá o carro?

Solução:

Considerando que o valor do carro é $C_1 = 45\,000$, tem-se:

$$C_2 = C_1 - C_1 \cdot 0,1.$$

Colocando C_1 em evidência, obtém-se:

$$C_2 = C_1 \cdot (1 - 0,1),$$

que é equivalente a

$$C_2 = C_1 \cdot (0,9). \tag{4.7}$$

Substituindo (4.6) em (4.7), chega-se a:

$$C_2 = C_0 \cdot (0,9) \cdot (0,9),$$

ou seja,

$$C_2 = C_0 \cdot (0,9)^2. \tag{4.8}$$

Substituindo $C_0 = 50\,000$ na equação (4.8), obtém-se:

$$C_2 = 50\,000 \cdot (0,9)^2 = 40\,500.$$

Portanto, o valor após dois anos é R\$ $40\,500,00$.

(c) E depois de três anos?

Solução:

Considerando que o valor do carro é $C_2 = 40\,500$, tem-se:

$$C_3 = C_2 - C_2 \cdot 0,1.$$

Colocando C_2 em evidência, chega-se a:

$$C_3 = C_2 \cdot (1 - 0,1),$$

isto é,

$$C_3 = C_2 \cdot (0,9). \tag{4.9}$$

Substituindo (4.8) em (4.9), obtém-se:

$$C_3 = C_0 \cdot (0,9)^2 \cdot (0,9),$$

que equivale a

$$C_3 = C_0 \cdot (0,9)^3.$$

Sabendo que $C_0 = 50\,000$, tem-se:

$$C_3 = 50\,000 \cdot (0,9)^3 = 36\,450.$$

O valor do carro após três anos é de R\$ $36\,450,00$.

(d) Após n anos, qual é o valor do carro?

Solução:

Após responder os itens anteriores, percebe-se que o valor do carro após n anos pode ser obtido por:

$$C_n = C_0 \cdot (0,9)^n.$$

Substituindo $C_0 = 50\,000$, chega-se a:

$$C_n = 50\,000 \cdot (0,9)^n.$$

O valor do carro após n anos é obtido por $C_n = 50\,000 \cdot (0,9)^n$.

(e) É possível relacionar o valor do carro com o tempo de uso?

Solução:

É possível relacionar o valor carro, $C(x)$, com o tempo de uso, (x), a partir da função exponencial $C(x) = 50\,000 \cdot (0,9)^x$.

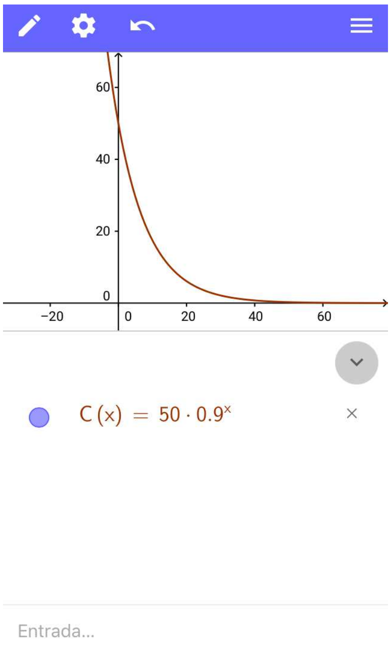
(f) Esses dados podem ser representados em um gráfico? Utilizando o aplicativo Graphing Calc, esboce o gráfico.

Solução:

De forma análoga a situação 1, é construído o gráfico no aplicativo Graphing Calc conforme mostra a Figura 28.

Optou-se por usar $C(x) = 50 \cdot (0,9)^x$ para uma melhor visualização do gráfico.

Figura 28 – Gráfico da função $C(x) = 50 \cdot (0,9)^x$.



Fonte: Próprio autor

(g) A função resultante é crescente ou decrescente?

Solução:

A partir da análise do comportamento do gráfico da função percebe-se que o eixo x representa o tempo de uso e o eixo y o valor do carro, ao analisar o gráfico nota-se que conforme o tempo passa o valor do carro diminui, logo a função é estritamente decrescente.

O comportamento da função também pode ser analisado através da lei $C(x) = 50\,000 \cdot (0,9)^x$, nota-se que a base da função é $(0,9)$, como a base é menor que 1, logo a função é decrescente.

h) Após quantos anos o carro valerá aproximadamente R\$ $21\,000,00$?

Solução:

Para responder o questionamento do item (h), é necessário que seja substituído na lei da função o valor de $21\,000$:

$$21000 = 50\,000 \cdot (0,9)^x. \tag{4.10}$$

Dividindo a equação (4.10) em ambos os lados por $1\,000$, tem-se:

$$21 = 50 \cdot (0,9)^x. \tag{4.11}$$

Dividindo ambos lados da equação (4.11) por 50, obtém-se:

$$\frac{21}{50} = (0,9)^x. \tag{4.12}$$

É preciso resolver a equação exponencial (4.12) para obter o valor de x. Como não é possível fatorar facilmente a base para resolvê-la, pode-se aplicar logaritmo na base 10 em ambos lados da equação (4.12):

$$\log\left(\frac{21}{50}\right) = \log(0,9)^x.$$

Aplicando as propriedades dos logaritmos 2 e 3, com as respectivas equações, (2.7) e (2.8), obtém-se:

$$\log(21) - \log(50) = x \cdot \log(0,9). \tag{4.13}$$

Note que: $21 = 3 \cdot 7$, $50 = 2 \cdot 5^2$ e $0,9 = \dfrac{9}{10} = \dfrac{3^2}{10}$, pode-se escrever a equação (4.13) da forma:

$$\log(3 \cdot 7) - \log(2 \cdot 5^2) = x \cdot \log\left(\frac{3^2}{10}\right).$$

Aplicando a equação (2.6), tem-se:

$$[\log(3) + \log(7)] - [\log(2) + \log(5^2)] = x \cdot \log\left(\frac{3^2}{10}\right).$$

Utilizando a equação (2.7), obtém-se:

$$[\log(3) + \log(7)] - [\log(2) + \log(5^2)] = x \cdot [\log(3^2) - \log(10)].$$

Aplicando a equação (2.8), chega-se a:

$$[\log(3) + \log(7)] - [\log(2) + 2 \cdot \log(5)] = x \cdot [2 \cdot \log(3) - \log(10)]. \tag{4.14}$$

É importante salientar que a atividade poderia ser resolvida utilizando o aplicativo Graphing Calc. Neste caso, prefere-se que o aluno desenvolva os cálculos, pois o objetivo da atividade consiste em apresentar a história dos logaritmos e utilizar a Régua de Cálculo como instrumento para desenvolver os cálculos.

Durante a atividade não é permitido o uso de calculadoras, no entanto para resolver a equação (4.14) é necessário calcular o log(2), log(3), log(5) e log(7), lembrando que $\log(10) = 1$. Antes de finalizar a resolução de (4.14), utiliza-se a Régua de Cálculo para calcular log(2), log(3), log(5) e log(7), conforme apresentado na seção 4.2.

Antes de trabalhar com a Régua de Cálculo, pode-se mostrar para os alunos algumas aplicações de funções exponenciais e logarítmicas no cotidiano, presentes em diversas áreas do conhecimento. Segundo (SOUZA, 2013), pode-se citar como exemplos de aplicações de funções exponenciais o crescimento populacional de bactérias, a divisão celular, na medicina através da radiação, na idade de fóssil, nas curvas de aprendizagem, no controle de temperatura, no setor financeiro, nas fábricas e até mesmo na lenda da criação do xadrez. Já as funções logarítmicas estão presentes no Índice de Desenvolvimento Humano (IDH), na música, na determinação do pH de substâncias, no degelo dos polos, na Escala Richter e até mesmo nas películas de controle solar.

Em seguida, apresenta-se um pouco sobre a história dos logaritmos. Segundo (MAOR, 2008), o matemático escocês John Napier ($1550-1617$), em 1614, a publicar sua obra *Marifice logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logartimos). O método desenvolvido por Napier teve grande aceitação pelos estudiosos do séculos XVII, por ser mais simples somar e subtrair números com muitas casas decimais do que multiplicar e dividir. Em 1622, o matemático inglês William Oughtred, tendo como base os estudos realizados por Napier, desenvolveu a primeira Régua de Cálculo. Com o passar dos anos a Régua de Cálculo foi sendo aperfeiçoada e só perdeu espaço por volta de 1970, quando as calculadoras eletrônicas obtiveram grande repercussão pela rapidez e precisão nos resultados.

Após aprender a calcular logaritmo utilizando a Régua de Cálculo, retorna-se para a equação (4.14), pois agora é possível resolvê-la.

Utilizando a Régua de Cálculo, chega-se a:

$\log(2) \cong 0,3$

$\log(3) \cong 0,47$

$\log(5) \cong 0,7$

$\log(7) \cong 0,84.$

Lembre-se que: $\log(10) = 1$.

Substituindo os valores dos logaritmos na equação (4.14), tem-se:

$$[0,47 + 0,84] - [0,3 + 2 \cdot 0,7] = x \cdot [2 \cdot 0,47 - 1].$$

Efetuando a multiplicações, obtém-se:

$$[0,47 + 0,84] - [0,3 + 1,4] = x \cdot [0,94 - 1].$$

Resolvendo as adições e subtrações, chega-se a:

$$[1,31] - [1,7] = x \cdot [-0,06],$$

que equivale a

$$[-0,39] = x \cdot [-0,06].$$

Multiplicando ambos os lados por (-1), tem-se:

$$(-1) \cdot [-0,39] = [-0,06] \cdot x \cdot (-1),$$

ou seja,

$$0,39 = 0,06 \cdot x.$$

Dividindo ambos os lados por $0,06$, obtém-se:

$$x = \frac{0,39}{0,06},$$

que é equivalente a

$$x = 6,5.$$

Portanto, obtém-se a resposta do item (h). Após 6,5 anos, ou seja, 6 anos e 6 meses depois da compra o valor do carro é de R\$ $21\,000,00$.

4.5 Atividade 3: Escala Richter

Nesta atividade sugere-se que se desenvolva uma Situação Problema sobre Escala Richter.

Situação: Escala Richter

A intensidade de um terremoto na escala Richter é definida por $I = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{-3}}\right)$, onde E é a energia liberada pelo terremoto, em quilowatt-hora (kWh).

Se um terremoto teve uma energia liberada de 10^3 kWh, verifique de acordo com a Tabela 2, se o terremoto causou ou não dano à cidade em que ocorreu. Utilize, se necessário, a Régua de Cálculo.

Tabela 2 – Escala Richter

Intensidade	Consequência
Menos de 3	Geralmente não é sentido, apenas registrado em sismógrafos.
3 a $5,4$	Normalmente é sentido, mas não costuma causar estragos.
$5,5$ a 6	Pequenos danos a prédios bem projetados. Danos maiores nos demais.
$6,1$ a $6,9$	Podem causar danos em áreas de até 100 km^2.
7 a $7,9$	Intenso. Pode causar destruição em grandes extensões.
8 ou mais	Muito intenso. Pode causar grande destruição.

Fonte: (SOUZA, 2013)

Observação: Atividade de (SOUZA, 2013).

Solução:

Considere $I = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{10^{-3}}\right)$, sabendo que $E = 10^3$, tem-se:

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{10^3}{10^{-3}}\right). \tag{4.15}$$

Aplicando a equação (2.2) na equação (4.15), chega-se a:

$$I = \frac{2}{3}\log(10^6).$$

Pela equação (2.8), obtém-se:

$$I = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \log(10).$$

Lembrando que para calcular $\log(10) = 1$, pode-se utilizar a Régua de Cálculo ou as propriedades, tem-se:

$$I = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 1,$$

que equivale a

$$I = 4.$$

A intensidade do terremoto I é 4, ou seja, o terremoto normalmente é sentido, mas não costuma causar estragos.

4.6 Atividade 4: Crescimento de uma cultura de bactérias

Nesta atividade sugere-se que se desenvolva uma Situação Problema sobre o crescimento de uma cultura de bactérias.

Situação: Crescimento de uma cultura de bactérias

Um dos perigos na alimentação humana são as bactérias, que podem causar diversas doenças e até levar ao óbito. Sabendo que a taxa de crescimento de uma certa bactéria é de 20%.

Utilizando a Régua de Cálculo, calcule em quantos dias, aproximadamente, uma população B_0 dessa bactéria triplica, se a taxa de crescimento se mantiver?

Observação: Atividade adaptada de (SOUZA, 2013).

Solução:

Para resolver o problema, constrói-se a Tabela 3 a partir das informações apresentadas. Sabendo que a população de bactérias inicial é B_0 e a taxa de crescimento é $20\% = \frac{20}{100} = 0,2$, tem-se

Tabela 3 – População de bactérias

Dia	População
Primeiro dia	$B_1 = B_0 + B_0 \cdot 0,2 = B_0 \cdot (1,2)$
Segundo dia	$B_2 = B_1 + B_1 \cdot 0,2 = \underbrace{B_1}_{B_0 \cdot (1,2)} \cdot (1,2) = B_0 \cdot (1,2) \cdot (1,2) = B_0 \cdot (1,2)^2$
Terceiro dia	$B_3 = B_2 + B_2 \cdot 0,2 = \underbrace{B_2}_{B_0 \cdot (1,2)^2} \cdot (1,2) = B_0 \cdot (1,2)^2 \cdot (1,2) = B_0 \cdot (1,2)^3$
...	...
n-ésimo dia	$B_n = B_0 \cdot (1,2)^n$

Fonte: (SOUZA, 2013)

O objetivo do problema consiste em calcular em quantos dias a população triplica, logo tem-se:

$$B_n = 3 \cdot B_0. \tag{4.16}$$

Substituindo $B_n = B_0 \cdot (1,2)^n$ na equação (4.16), chega-se a:

$$B_0 \cdot (1,2)^n = 3 \cdot B_0. \tag{4.17}$$

Dividindo ambos lados das equação (4.17) por B_0, pois supõe-se que a população inicial não é nula, obtém-se:

$$(1,2)^n = 3. \tag{4.18}$$

Aplicando logaritmo na base 10 em ambos lados da equação (4.18), tem-se:

$$\log(1,2)^n = \log(3). \tag{4.19}$$

Nota-se que: $1,2 = \dfrac{12}{10}$, logo pode-se reescrever a equação (4.19):

$$\log\left(\frac{12}{10}\right)^n = \log(3).$$

Aplicando a equação (2.8), tem-se:

$$n \cdot \log\left(\frac{12}{10}\right) = \log(3).$$

Pela equação (2.7), obtém-se:

$$n \cdot [\log(12) - \log(10)] = \log(3).$$

Como $12 = 3 \cdot 4$, tem-se:

$$n \cdot [\log(3 \cdot 4) - \log(10)] = \log(3).$$

Aplicando a equação (2.6), chega-se a:

$$n \cdot [\log(3) + \log(4)] - [\log(10)] = \log(3). \tag{4.20}$$

Utilizando a Régua de Cálculo é possível encontrar que $\log(3) \cong 0,47$ e $\log(4) \cong 0,6$, lembre-se que $\log(10) = 1$. Substituindo os valores dos logaritmos na equação (4.20), tem-se:

$$n \cdot [0,47 + 0,6] - [1] = 0,47.$$

Efetuando a adição e a subtração, tem-se:

$$n \cdot (1,07 - 1) = 0,47,$$

ou seja,

$$n \cdot (0,07) = 0,47. \tag{4.21}$$

Dividindo ambos os lados da equação (4.21) por $(0,07)$, obtém-se:

$$n = \frac{0,47}{0,07},$$

que equivale a

$$n = 6,7.$$

O valor de n é aproximadamente $6,7$. Portanto, a população bactérias triplica aproximadamente em $6,7$ dias, ou seja, 6 dias e 16 horas. É importante salientar que os valores encontrados na Régua de Cálculo são aproximados.

No próximo capítulo, relata-se a aplicação das atividades.

5 Relato da Aplicação das atividades

Neste capítulo apresentam-se o relato e os resultados referentes à aplicação das atividades propostas, que foi dividida em quatro momentos. Inicialmente foram aplicados dois questionários: um para avaliação do perfil dos participantes e outro de conhecimentos de logaritmos, cujos modelos estão disponíveis, respectivamente, nos Apêndices B e C. A seguir, foram desenvolvidas as atividades com a resolução de Situações Problema, construção de gráficos utilizando o aplicativo Graphing Calc e o cálculo de logaritmos com o auxílio do Material Concreto Régua de Cálculo. No terceiro momento, aplicou-se novamente o questionário de conhecimento de logaritmo, com o objetivo de verificar o quanto a atividade proposta contribuiu para a aprendizagem dos estudantes. Por fim, aplicou-se um questionário de avaliação da atividade, disponível no Apêndice D.

As atividades propostas foram realizadas no IFRS, Campus Rio Grande. Para a realização das atividades, entrou-se em contato com a professora Me. Lucia Andreia Rocha, que ministra aulas de Matemática na instituição e aceitou disponibilizar suas turmas para realização da pesquisa. A professora forneceu os procedimentos legais necessários para a instituição autorizar a aplicação das atividades. Encaminhou-se o planejamento completo para coordenação pedagógica e, após a aprovação, foi possível marcar a data. Além disso, foi necessário solicitar a autorização dos pais ou responsáveis para que os estudantes participassem da atividade através de um Termo de consentimento e livre esclarecimento. Juntamente com a autorização, foi entregue aos estudantes um bilhete que solicitava a instalação do aplicativo Graphing Calc em seus dispositivos móveis.

Após a organização e autorização, a pesquisa foi realizada com 14 alunos do primeiro ano do Ensino Técnico dos cursos de Geoprocessamento e Eletrotécnica, que se disponibilizaram a participar da pesquisa no turno inverso ao que estudam. Foi realizado um único encontro, com duração de 3 horas aulas de 45 minutos cada uma, no dia 16 de novembro de 2017. O conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas havia sido trabalhado pela professora durante as aulas da disciplina de Matemática no terceiro bimestre. No entanto, vale ressaltar que a proposta descrita pode também ser aplicada como uma atividade introdutória aos conceitos.

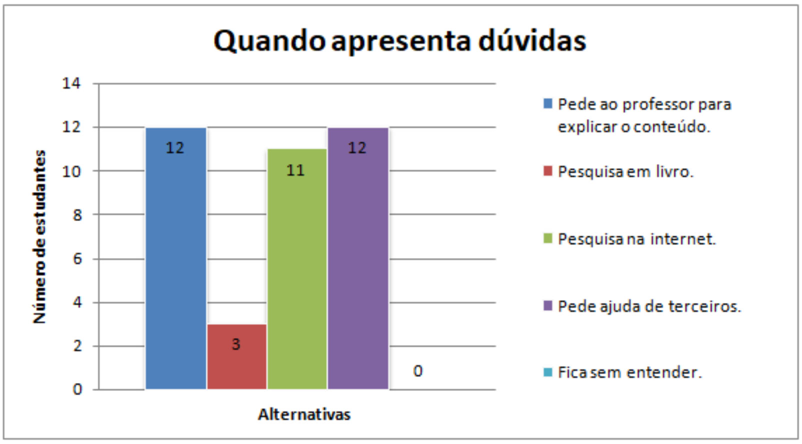
5.1 Questionário perfil do participante

O primeiro questionário aplicado foi o de perfil do participante, contendo perguntas em relação à idade, sexo, projeto em relação a continuação dos estudos após o Ensino Médio, ao ensino de Matemática e em particular ao ensino de funções exponenciais e logarítmicas. Ao analisar os resultados do questionário notou-se que metade da turma é do sexo feminino, dentre os quatorze participantes, cinco tinham 15 anos, oito com 16 anos e um com 17 anos.

As duas primeiras perguntas são referentes à pretensão da continuação dos estudos após o término do Ensino Médio. É interessante salientar que dos quatorze participantes, treze pretendem fazer ENEM e cursar o Ensino Superior. As questões três e quatro tinham como tema o ensino de Matemática, sendo que todos os alunos consideram a disciplina importante para sua vida e nove declararam possuir dificuldades.

Os alunos foram questionados sobre como agem quando possuem dúvidas em Matemática. Nesta questão havia a possibilidade de marcar mais de uma alternativa, doze estudantes declararam que procuram com frequência o professor e pedem explicações ou pedem ajuda de terceiros, onze participantes afirmaram utilizar a internet como fonte de pesquisa e apenas três revelaram procurar ajuda em livros. Veja a análise gráfica desta questão na Figura 29.

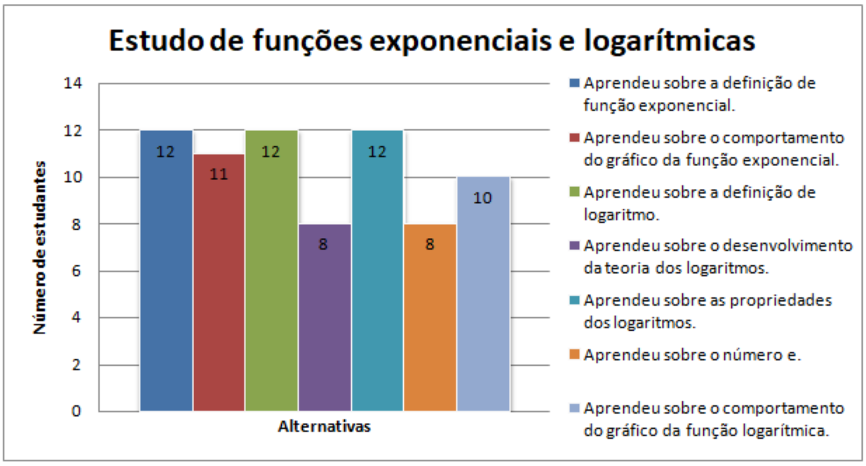
Figura 29 – Análise gráfica da questão 5 do questionário perfil dos participantes.



Fonte: Próprio autor

Na última questão, foi solicitado que os estudantes selecionassem os conteúdos que haviam sido ensinados em relação ao estudo das funções exponenciais e logarítmicas, sendo facultada a escolha de mais de uma alternativa. Dentre os quatorze discentes, doze afirmaram ter aprendido sobre a definição de função exponencial e onze em relação ao comportamento do gráfico. Quanto aos logaritmos, doze alunos declararam ter aprendido sobre a definição e as propriedades, enquanto dez estudantes afirmaram ter estudado o comportamento do gráfico e oito apontaram ter aprendido sobre o desenvolvimento da teoria dos logaritmos e o número e. Pode-se analisar as respostas dos estudantes na representação gráfica da Figura 30.

Figura 30 – Análise gráfica da questão 6 do questionário perfil dos participantes.



Fonte: Próprio autor

Foi solicitado aos estudantes que respondessem o questionário de conhecimento de logaritmo, contendo seis questões referentes ao conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas. O objetivo deste questionário é verificar o quanto o trabalho desenvolvido contribuiu com a aprendizagem dos discentes. As questões foram aplicadas duas vezes, a primeira no início da aula e a segunda ao final. As duas aplicações dos questionários de conhecimento de logaritmo serão analisadas em conjunto na seção 5.4 deste capítulo.

5.2 Aplicação das atividades 1 e 2

Após o preenchimento dos questionários, foi distribuído aos estudantes um material de apoio contendo um resumo dos conceitos de funções exponenciais e logarítmicas, disponível no Apêndice A. Em seguida, utilizando o projetor multimídia, foi apresentado aos alunos a situação 1, cujo o tema é juros compostos. A seguir, foram realizados questionamentos e, conforme eram respondidos, uma nova pergunta era realizada. Nesta etapa da atividade, a pesquisadora atuou como mediadora, pois os estudantes ao serem questionados buscavam as respostas a partir de discussões abertas, onde todos participavam e contribuíam para obter o resultado. Os educandos foram agentes ativos no processo de aprendizagem, através do diálogo e sugestões, sendo a pesquisadora quem escrevia no quadro e conduzia o processo.

Após obter os resultados dos itens (a), (b) e (c), os alunos conseguiram responder o item (d) sem muitas dificuldades e, neste momento, foi proposta a construção do gráfico que representava o problema utilizando o aplicativo Graphing Calc. Os alunos haviam previamente instalado o aplicativo em seus celulares pessoais. A pesquisadora instruiu os estudantes e, em conjunto com eles, construiu o gráfico em seu computador pessoal.

Os estudantes demonstraram bastante interesse em trabalhar com o aplicativo e relataram nunca terem trabalhado com softwares ou aplicativos matemáticos. Quando solicitados a analisar o comportamento do gráfico da função e classificarem em crescente e decrescente, souberam obter a classificação e justificar de forma correta. Vale ressaltar que a atividade desenvolvida com o Graphing Calc era de fácil compreensão e não exigia que o aplicativo fosse explorado nas suas diversas possibilidades.

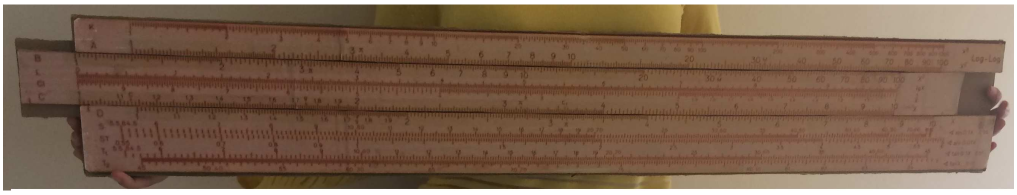
A seguir, foi apresentada a situação 2, que propõe questões acerca da desvalorização de um carro, conforme o tempo de uso. Foram realizados questionamentos similares aos da situação 1 e novamente os discentes não apresentaram dificuldades, obtendo sucesso ao determinar os valores do carro um ano após a compra, depois de dois anos e quanto valeria o veículo depois de três anos, encontrando a lei da função e construindo o gráfico com o uso do aplicativo Graphing Calc. Além disso, os estudantes foram desafiados a calcular qual o tempo de uso para um carro de R$ 50 mil ser vendido por R$ 21 mil, considerando uma taxa de desvalorização de 10% ao ano. Os discentes orientaram a pesquisadora a substituir o valor de 21 mil na lei da função (encontrada no item (f)), foram realizadas algumas operações de simplificação e chegou-se a equação (4.12).

A equação obtida é exponencial e para resolvê-la (a partir dos conceitos estudados até o momento), é necessário reduzir os dois membros a potências com mesma base. No entanto é possível perceber que este método não é recomendado para a resolução deste desafio. Neste momento um estudante sugeriu aplicar logaritmo em ambos os lados da equação, justificando tal procedimento da seguinte forma: "sempre que precisamos encontrar o valor do expoente devemos fatorar a base, mas como neste caso isso não é possível de se realizar facilmente, então deve-se aplicar logaritmo em ambos os lados da equação e utilizando as propriedades dos logaritmos, em especial a propriedade 3, pode-se retirar a variável do expoente e resolver a equação".

A pesquisadora atuando como mediadora, seguiu a orientação do estudante e utilizando o quadro como recurso pedagógico, aplicou logaritmo de base 10 em ambos os lados da equação (4.12), e obteve a equação (4.13). Os participantes sugeriram ainda utilizar as propriedades 1 e 2 dos logaritmos, com respectivas equações (2.6) e (2.7), para simplificar os cálculos, chegando-se à equação (4.14). No início da atividade, havia sido orientado que não seria permitido o uso de calculadoras eletrônicas. A pesquisadora começou então a questionar os estudantes: Havia alguma outra maneira de calcular o logaritmo (que não fosse a calculadora)? Como eram realizados os cálculos antes da criação das calculadoras? Os alunos relataram acreditar que existisse alguma maneira de realizar os cálculos sem o uso de calculadoras eletrônicas, mas que eles desconheciam.

A pesquisadora projetou aos estudantes uma apresentação sobre a história do desenvolvimento da teoria dos logaritmos e da criação da Régua de Cálculo. A seguir, foram distribuídas as Réguas de Cálculo confeccionadas de forma artesanal, e os estudantes foram ensinados a calcular logaritmo na base 10 de um número. Nesta etapa da atividade, os discentes apresentaram facilidade em compreender o processo para realizar os cálculos. Para auxiliar na explicação, a pesquisadora realizou uma apresentação com imagens e instruções e utilizou uma Régua de Cálculo em dimensões maiores, conforme mostra a Figura 31. Os estudantes se mostraram entusiasmados com a descoberta de uma nova ferramenta que poderia auxiliá-los a resolverem a equação (4.14). Nesta etapa da atividade os alunos foram orientados a tentar determinar o resultado sozinhos, e a pesquisadora circulou na sala auxiliando quem apresentava dúvidas, até que todos chegassem ao resultado esperado. Foi possível perceber que três estudantes apresentaram dificuldades em utilizar a Régua de Cálculo, no entanto com a ajuda da pesquisadora as dúvidas foram sanadas.

Figura 31 – Régua confeccionada em dimensões maiores.



Fonte: Próprio autor

5.3 Aplicação das atividades 3 e 4

Os discentes são desafiados a resolver dois problemas que envolvem os conteúdos de funções exponenciais e logarítmicas utilizando a Régua de Cálculo, disponível no Apêndice E. Os problemas deveriam ser resolvidos individualmente e entregues a pesquisadora para que fosse possível analisar o desempenho dos estudantes na atividade. A atividade 3 instigava a aplicação de logaritmos através da Escala Richter, amplamente utilizada para mensurar abalos sísmicos. A atividade 4 trazia aplicações no campo da Biologia abordando do crescimento exponencial de uma cultura de bactérias. O desenvolvimento das questões durou cerca de 30 minutos e os estudantes utilizaram as propriedades 1, 2 e 3 dos logaritmos, (que se encontravam no resumo dos conceitos entregue aos estudantes) e a Régua de Cálculo, conforme mostra Figura 32.

Analisando a correção do problema da Escala Richter, percebeu-se que dos quatorzes estudantes, oito acertaram toda a questão, quatro não conseguiram resolver a situação corretamente e dois alunos acertaram parcialmente, mostrando que haviam compreendido os conceitos de funções exponenciais e logarítmicas, no entanto acabaram cometendo erros de Matemática básica. Veja uma das soluções corretas obtida por um estudante na Figura 33.

Figura 32 – Participantes utilizando a Régua de Cálculo.

Fonte: Próprio autor

Figura 33 – Solução correta da questão Escala Richter realizada por um estudante.

Situação: Escala Richter

A intensidade de um terremoto na escala Richter é definida por $I = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{-3}}\right)$, onde E é a energia liberada pelo terremoto, em quilowatt-hora (kWh).

Se um terremoto teve uma energia liberada de $10^3\ kWh$, verifique de acordo com a Tabela 2, se o terremoto causou ou não dano à cidade em que ocorreu. Utilizando, se necessário, a Régua de Cálculo.

Tabela 2 – Escala Richter

Intensidade	Consequência
Menos de 3	Geralmente não é sentido, apenas registrado em sismógrafos.
3 a 5,4	Normalmente é sentido, mas não costuma causar estragos.
5,5 a 6	Pequenos danos a prédios bem projetados. Danos maiores nos demais.
6,1 a 6,9	Podem causar danos em áreas de até 100 km^2.
7 a 7,9	Intenso. Pode causar destruição em grandes extensões.
8 ou mais	Muito intenso. Pode causar grande destruição.

$I = \frac{2}{3} \log\left(\frac{10^3}{10^{-3}}\right)$

$I = \frac{2}{3} \log 10^6$

$I = \frac{2}{3} . 6$

$I = \frac{12}{3} \quad I = 4$

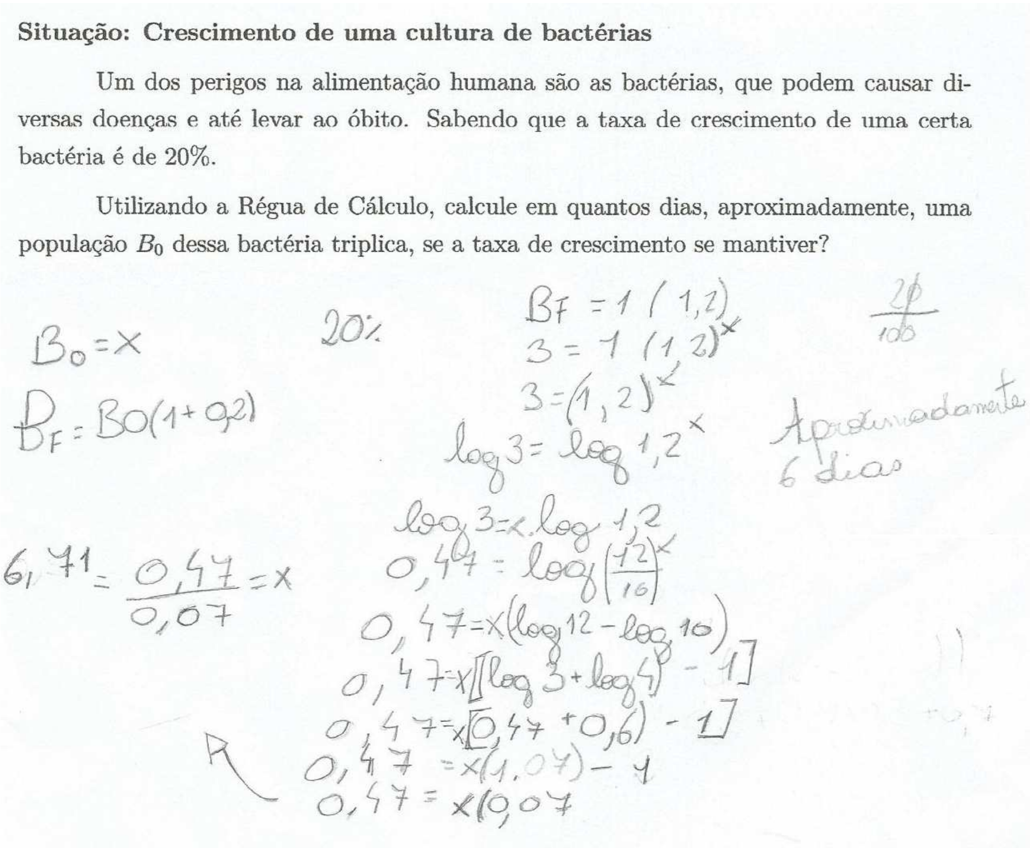
Fonte: Próprio autor

Em relação ao segundo problema, pode-se notar que os estudantes apresentaram mais dificuldades. Dentre todos os participantes, cinco acertaram na íntegra a Situação Problema, enquanto quatro acertaram parcialmente e cinco não concluíram de forma correta.

Acredita-se que a dificuldade neste problema ocorreu em função da ausência de um valor numérico para a população inicial B_0 de bactérias. No estudo da Matemática, o caráter abstrato muitas vezes causa certo receio, fazendo com que alguns estudantes não se sintam confiantes e acabem desistindo de tentar compreender os conceitos e resolver problemas abstratos. Dentre os estudantes que acertaram esta questão nota-se que todos atribuíram um valor qualquer para a população B_0, chegando a equação (4.18) e desenvolvendo os cálculos até obter o resultado correto.

Outro fator que pode ter influenciado nos resultados é o tempo, pois os alunos eram de duas turmas (8 do curso de Geoprocessamento e 6 da turma de Eletrotécnica). Os estudantes do curso de Eletrotécnica no dia da atividade tinham aula ao final da tarde, ocasionando um pouco de pressa na resolução das questões e no preenchimento dos questionários. Veja a solução desenvolvida por um estudante na Figura 34.

Figura 34 – Solução correta da questão crescimento de uma cultura de bactérias realizada por um estudante.



Situação: Crescimento de uma cultura de bactérias

Um dos perigos na alimentação humana são as bactérias, que podem causar diversas doenças e até levar ao óbito. Sabendo que a taxa de crescimento de uma certa bactéria é de 20%.

Utilizando a Régua de Cálculo, calcule em quantos dias, aproximadamente, uma população B_0 dessa bactéria triplica, se a taxa de crescimento se mantiver?

$B_0 = x$

20%

$\frac{20}{100}$

$B_F = B0(1+0{,}2)$

$B_F = 1\,(1{,}2)$

$3 = 1\,(1{,}2)^x$

$3 = (1{,}2)^x$

$\log 3 = \log 1{,}2^x$

$\log 3 = x.\log 1{,}2$

$0{,}47 = \log\left(\frac{12}{10}\right)^x$

$0{,}47 = x(\log 12 - \log 10)$

$0{,}47 = x[(\log 3 + \log 4) - 1]$

$0{,}47 = x[(0{,}47 + 0{,}6) - 1]$

$0{,}47 = x(1{,}07) - 1$

$0{,}47 = x(0{,}07$

$6{,}71 = \frac{0{,}47}{0{,}07} = x$

R

Aproximadamente 6 dias

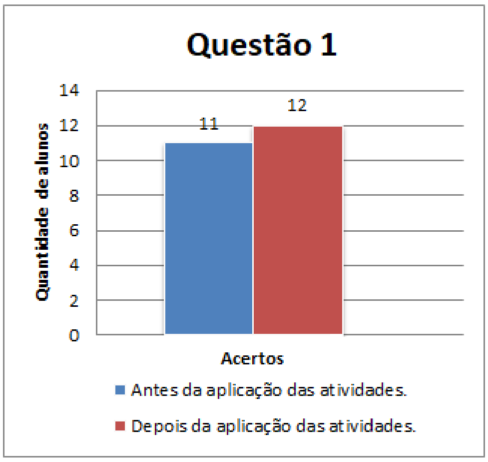
Fonte: Próprio autor

5.4 Questionário de conhecimento de logaritmo

O questionário de conhecimento de logaritmo possui seis questões referentes ao conteúdo de funções exponenciais e logaritmos. A aplicação foi realizada em dois momentos diferentes e nesta seção são comparados os resultados obtidos antes e depois das atividades propostas. Após os estudantes responderem ao questionário de perfil do participante, foi feita a primeira aplicação do questionário de conhecimento de logaritmo, cujo objetivo é analisar o conhecimento prévio dos alunos. Já a segunda aplicação ocorreu ao final da aula, tendo como finalidade verificar o quanto o trabalho realizado contribuiu para a aprendizagem dos participantes.

A primeira questão é sobre a definição de logaritmo e solicitava que fosse calculado $\log_2(8)$, inicialmente esta questão havia obtido onze acertos, chegando a doze questões respondidas corretamente na segunda aplicação, conforme ilustra representação gráfica na Figura 35.

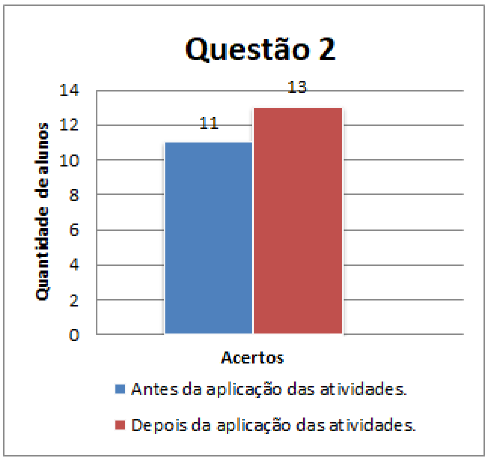
Figura 35 – Representação gráfica em relação à questão 1.



Fonte: Próprio autor

A pergunta número dois traz como tema as propriedades dos logaritmos, solicitando que fosse marcada a propriedade errada. Foram registrados primeiramente onze acertos, aumentando para treze após o desenvolvimento das atividades propostas, veja representação gráfica na Figura 36.

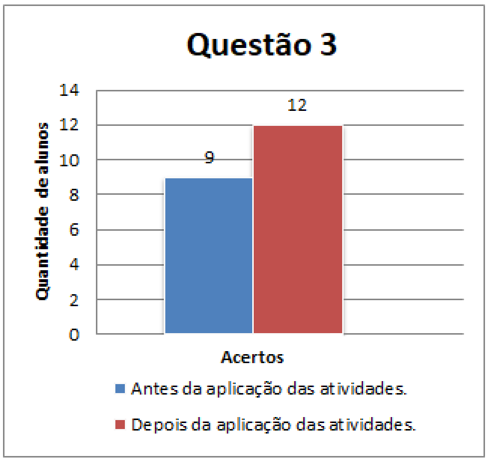
Figura 36 – Representação gráfica em relação à questão 2.



Fonte: Próprio autor

Na questão três é necessário calcular $\log(6)$ utilizando as propriedades dos logaritmos e sabendo que $\log(2) = 0,3010$ e $\log(3) = 0,4771$. Dentre os quatorze participantes, nove acertaram a pergunta na primeira aplicação do questionário, enquanto ao final das atividades o número de acertos cresceu para doze, conforme mostra análise gráfica na Figura 37.

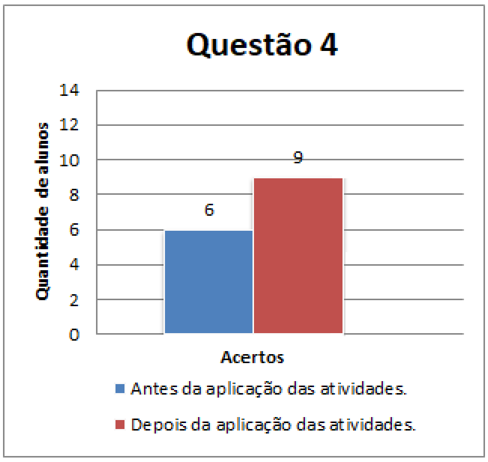
Figura 37 – Representação gráfica em relação à questão 3.



Fonte: Próprio autor

A quarta pergunta é sobre a definição dos logaritmos, sendo que seis participantes responderam corretamente no primeiro momento e depois o número de acertos passou para nove, conforme mostrado na Figura 38.

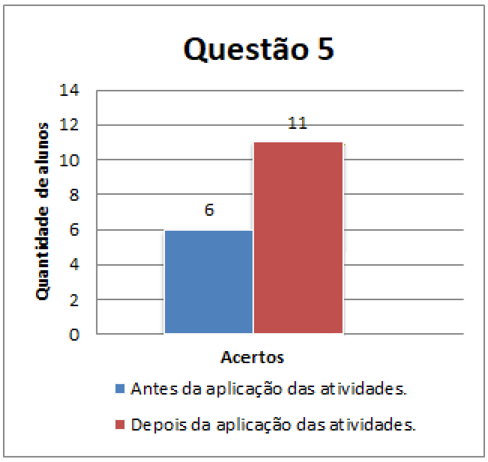
Figura 38 – Representação gráfica em relação à questão 4.



Fonte: Próprio autor

Para acertar a quinta questão é necessário resolver uma equação exponencial na qual não é possível reduzir as potências a uma mesma base. Para solucioná-la deve-se aplicar logaritmos em ambos lados da equação, e a seguir utilizar as propriedades 1, 2 e 3 dos logaritmos, com respectivas equações (2.6), (2.7) e (2.8). Após a correção, verifica-se que seis estudantes obtiveram sucesso ao marcar a alternativa correta na primeira aplicação do questionário, após a realização das atividades o número de acertos subiu para onze, sendo a pergunta com maior crescimento no índice de acertos, veja representação gráfica na Figura 39.

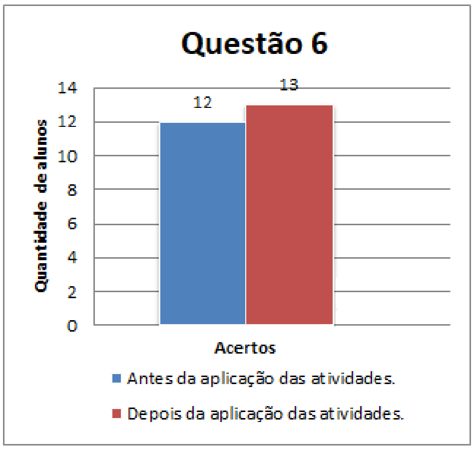
Figura 39 – Representação gráfica em relação à questão 5.



Fonte: Próprio autor

A sexta e última questão tem como tema a identificação das bases, sendo destacado o uso do logaritmo natural. Percebeu-se nesta pergunta o maior índice de precisão antes e depois da atividade, aumentando de doze para treze acertos, conforme ilustrado na representação gráfica da Figura 40.

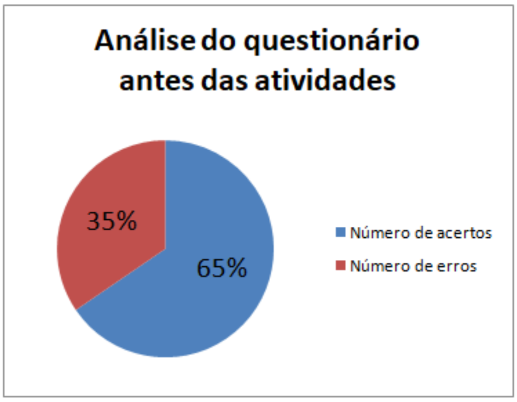
Figura 40 – Representação gráfica em relação à questão 6.



Fonte: Próprio autor

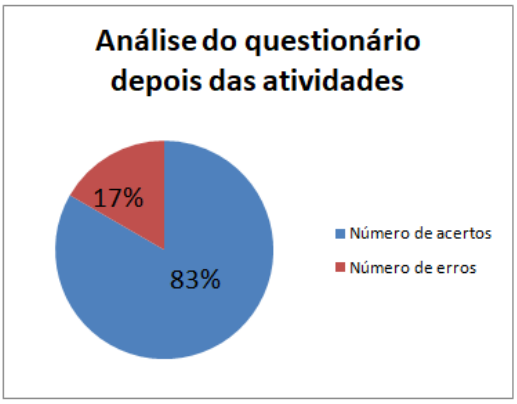
Ao analisar os resultados obtidos é possível perceber o crescimento em relação aos acertos, que inicialmente foram de cerca de 65%, e após a o desenvolvimento das atividades, aumentaram para aproximadamente 83%. Este aumento foi de cerca de 30%, um resultado positivo, que sugere que a atividade contribuiu para aprendizagem dos estudantes. Veja representação gráfica dos acertos e erros antes e depois da aplicação das atividades nas Figuras 41 e 42.

Figura 41 – Análise gráfica dos acertos e erros antes da aplicação das atividades.



Fonte: Próprio autor

Figura 42 – Análise gráfica dos acertos e erros depois da aplicação das atividades.



Fonte: Próprio autor

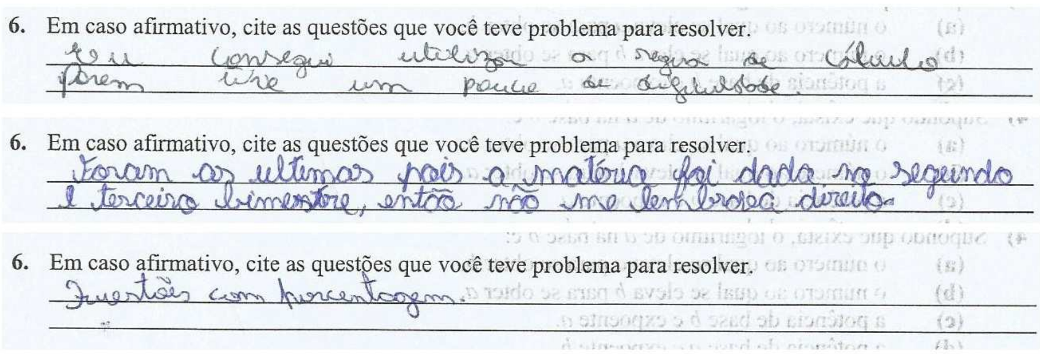
5.5 Questionário de avaliação das atividades

No último momento com a turma, pediu-se aos estudantes que avaliassem a atividade a partir de um questionário de Avaliação. Este, por sua vez, tem como objetivo conhecer a opinião dos participantes e sugerir melhorias para futuras aplicações.

A primeira questão é referente a avaliação da atividade, tendo como opções ótimo, bom, regular ou ruim. Dentre os quatorze participantes, dez avaliaram a atividade como sendo ótima e quatro a consideraram boa. Em relação ao quesito tempo, todos afirmaram ter sido suficiente. A questão três indaga a cerca da comunicação com a pesquisadora, se a mesma havia sido eficiente, e todos participantes afirmaram que sim.

A quarta questão solicita que seja avaliado o nível de dificuldade das atividades desenvolvidas e treze participantes avaliaram como médio e um considerou as atividades fáceis. Quando os estudantes foram questionados se tiveram dificuldades em resolver as atividades, cinco afirmaram ter apresentado dificuldades e três dos participantes identificaram suas dificuldades conforme pode-se analisar na Figura 43.

Figura 43 – Dificuldades apresentadas pelos estudantes.


6. Em caso afirmativo, cite as questões que você teve problema para resolver.
Eu consegui utilizar a regra de cálculo porém tive um pouco de dificuldade

6. Em caso afirmativo, cite as questões que você teve problema para resolver.
Foram as ultimas pois a matéria foi dada no segundo e terceiro bimestre, então não me lembrava direito.

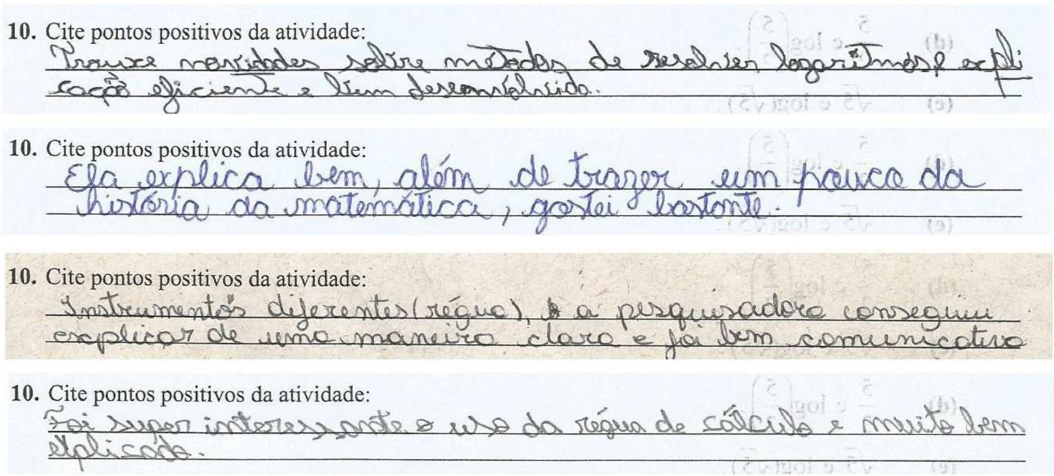
6. Em caso afirmativo, cite as questões que você teve problema para resolver.
Questões com porcentagem.

Fonte: Próprio autor

Todos os estudantes declararam acreditar que atividades práticas agregam conhecimentos práticos a sua formação. Quanto ao fato da utilização de atividades práticas tornarem o conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas mais atrativo, oito estudantes responderam que sim e cinco alegaram que as mesmas contribuem em parte. Em relação à pergunta nove, apenas um estudante declarou que não gostaria de participar de outras atividades como esta, justificando que o conteúdo já havia sido trabalhado anteriormente pela professora e que seria mais interessante se fossem apresentados conceitos novos.

A questão dez perguntava sobre os pontos positivos, dez participantes responderam esta questão e pode-se verificar algumas respostas na Figura 44. Cinco estudantes consideraram não haver pontos positivos.

Figura 44 – Pontos positivos da atividade.


10. Cite pontos positivos da atividade:
Trouxe novidades sobre métodos de resolver logaritmos e explicação eficiente e bem desenvolvida.

10. Cite pontos positivos da atividade:
Ela explica bem, além de trazer um pouco da história da matemática, gostei bastante.

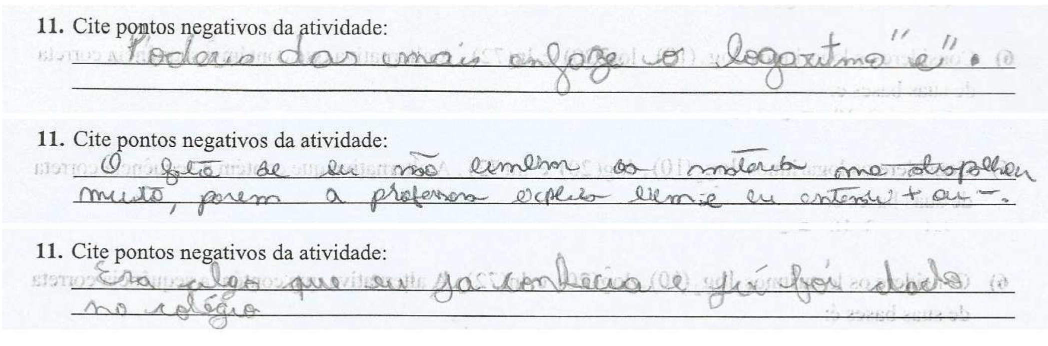
10. Cite pontos positivos da atividade:
Instrumentos diferentes (régua), e a pesquisadora conseguiu explicar de uma maneira clara e foi bem comunicativa

10. Cite pontos positivos da atividade:
Foi super interessante o uso da régua de cálculo e muito bem explicado.

Fonte: Próprio autor

A última pergunta abordava os pontos negativos, apenas três responderam a questão, conforme mostrado na Figura 45.

Figura 45 – Pontos negativos da atividade.


11. Cite pontos negativos da atividade:
Poderia dar mais enfoque o logaritmo "e".

11. Cite pontos negativos da atividade:
O fato de eu não lembrar do conteúdo me atrapalhou muito, porém a professora explicou bem e eu entendi + ou -.

11. Cite pontos negativos da atividade:
Era algo que eu já conhecia ou já foi dado no colégio

Fonte: Próprio autor

A atenção demonstrada pelos alunos durante as atividades foi surpreendente. Percebeu-se que o fato de ser um número reduzido de participantes proporcionou um ambiente agradável de discussões e análises. Os estudantes foram participativos e questionadores, desenvolvendo todas as atividades propostas. A utilização do aplicativo Graphing Calc possibilitou a eles utilizarem seus aparelhos celulares, um recurso que normalmente é proibido em sala de aula. Outro aspecto importante de se destacar foi como as aplicações dos conceitos chamou a atenção dos participantes, pois ao final das atividades, os estudantes solicitaram que fosse contada a lenda do xadrez e manifestaram-se curiosos em relação a outras aplicações. Além disso, notou-se alguns estudantes interessados com a história dos logaritmos e da criação da primeira Régua de Cálculo. Alguns alunos pediram para ficar com a régua utilizada, mostrando-se animados com o instrumento. No entanto, pelo grau de dificuldade em confeccionar o material, não foi possível presenteá-los. Acredita-se que a união das metodologias utilizadas durante as atividades proporcionou aos participantes um novo olhar sobre a Matemática.

6 Conclusões

Este trabalho apresentou a proposta e o relato da aplicação de atividades que envolvem o conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas. As atividades propõem, a partir da resolução de problemas contextualizados, a inserção de recursos pedagógicos que podem contribuir para a aprendizagem dos estudantes. A proposta foi desenvolvida em um único encontro com alunos do primeiro ano do Ensino Técnico do IFRS - Campus de Rio Grande. Os estudantes se disponibilizaram a participar de forma voluntária no turno inverso ao que estudam.

O encontro iniciou com a aplicação dos questionários de perfil do participante e de conhecimento de logaritmo. A seguir, trabalharam-se duas Situações Problema. Cada situação foi apresentada individualmente, sendo realizados questionamentos que eram respondidos através de discussões e análises do grupo, tendo a pesquisadora o papel de mediadora. Um dos questionamentos solicitava que fosse construído o gráfico que representava a situação. Neste momento foi apresentado o aplicativo Graphing Calc como recurso tecnológico e facilitador na construção de gráficos, o aplicativo já havia sido instalado anteriormente pelos alunos em seus dispositivos móveis. É interessante ressaltar que não era permitido o uso de calculadoras e, em função disso, não foi possível resolver uma das perguntas da segunda situação. A partir desta impossibilidade, foi contada a história dos logaritmos e a evolução das tecnologias, trazendo o Material Concreto (Régua de Cálculo) como recurso pedagógico para o desenvolvimento das atividades. A seguir, foi proposto aos estudantes que resolvessem mais duas Situações Problema também utilizando a Régua de Cálculo, estes problemas resolvidos foram entregues para a pesquisadora que pode corrigir e analisar os resultados obtidos.

Através da análise dos questionários, aplicados antes e depois das atividades, constatou-se que a utilização de Situações Problema, o uso de recursos tecnológicos como o aplicativo Graphing Calc, os fatos históricos apresentados e a utilização do material Régua de Cálculo colaboram para o aumento do interesse dos discentes pelo tema abordado. A partir do desenvolvimento das atividades propostas, foi possível confirmar a importância de se disponibilizar um maior espaço nas aulas de Matemática para o uso de metodologias de ensino que podem auxiliar o professor a despertar a atenção e o interesse dos alunos para a aula, proporcionando uma melhor compreensão do conteúdo estudado.

A utilização da contextualização torna as aulas de Matemática mais interessantes, uma vez que uma dúvida recorrente dos alunos é compreender onde irão aplicar em sua vida os conteúdos que aprendem na escola. Neste sentido utilizar situações reais no ensino de Matemática proporciona aos estudantes uma aprendizagem com significado, sendo capaz de reconhecer a importância e utilidade daquele conhecimento em situações fora do ambiente escolar. Os alunos mostraram-se surpresos durante o desenrolar das atividades, por existir aplicações de funções exponenciais e logarítmicas em diversas áreas do conhecimento, o que possibilitou uma aproximação da pesquisadora e dos discentes.

As Tecnologias de Informação e Comunicação, amplamente disponíveis atualmente, possibilitam a utilização de recursos que despertam o interesse dos alunos, podendo o professor aliar-se, sempre que possível, a tais ferramentas em prol da aprendizagem. O emprego de dispositivos móveis como os smartphones, através do uso de aplicativos matemáticos como o Graphing Calc, torna a aprendizagem mais leve e aproxima as aulas de Matemática da realidade dos estudantes. É interesante ressaltar, que a utilização das tecnologias não é exclusivamente para smartphones, caso os estudantes não tenham acesso a tecnologias móveis, pode-se adequar a atividade conforme a realidade dos alunos e/ou escola. A instalação nos laboratórios de informáticas de softwares matemáticos como o GeoGebra é gratuita, e não é necessário utilizar internet durante as atividades.

Na aplicação foi possível mostrar aos alunos o quanto a evolução das tecnologias contribui para o desenvolvimento da sociedade. Procurou-se demonstrar essa evolução a partir da história dos logaritmos e da real necessidade que motivou o desenvolvimento da teoria e a criação da Régua de Cálculo, considerada a precursora das calculadoras eletrônicas.

Entender como as necessidades da humanidade foram surgindo e como as respostas foram sendo trabalhadas pelos matemáticos até chegar a um resultado é fascinante, e faz com que os alunos se envolvam de tal forma que possam adquirir maior apreço pela matéria. Ao final, os estudantes relataram acreditar que é importante compreender a história dos conceitos que estudam na escola e o que motivou estudiosos dedicarem seus estudos em prol de uma descoberta.

A utilização do Material Concreto ofereceu aos alunos uma aula mais atrativa para o estudo de funções exponenciais e logarítmicas, possibilitando aos estudantes, de forma lúdica, compreender os conteúdos. Além disso, o Material Concreto (Régua de Cálculo) é um recurso pedagógico onde o aluno parte da prática para problematizar e construir o conceito. A atenção demonstrada pelos alunos durante as atividades, o fato de aprenderem a utilizar a Régua de Cálculo, questionarem-se e tentarem obter suas próprias conclusões, fez com que aula fosse diferente e possibilitou a obtenção de resultados positivos.

A utilização de tais instrumentos pedagógicos pode proporcionar uma maior aproximação entre o professor e os estudantes, uma vez que somente ministrar aulas mecanizadas, com inúmeros exercícios, pode afastar o aluno do aprendizado. O trabalho do professor como orientador e facilitador da aprendizagem é essencial para o desenvolvimento das aulas, independente do recurso utilizado. Trabalhar a Matemática com o auxílio das Situações Problema, Tecnologias da Informação e Comunicação, História da

Matemática, Material Concreto ou de outra estratégia didática é importante para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Desde que o professor não se esqueça que o giz e o quadro negro também são ferramentas fundamentais para a aprendizagem no ensino de Matemática.

Vale ressaltar que as metodologias apresentadas não se excluem, não são únicas e devem ser trabalhadas de acordo com a realidade que a escola está inserida. O objetivo deste trabalho não é prescrever metodologias prontas para serem aplicadas, mas fornecer sugestões, a partir das quais os docentes farão suas próprias escolhas de acordo com a realidade do ambiente escolar.

De acordo com os resultados obtidos e com intuito de complementar as ideias apresentadas nesta dissertação, propõe-se desenvolver trabalhos futuros, aplicando novamente as atividades. Acredita-se que a utilização de uma metodologia de ensino pode colaborar para a aprendizagem, no entanto a combinação de quatro ferramentas didáticas pode proporcionar aos estudantes uma aula diferenciada, ainda mais dinâmica e repleta de curiosidades. Sugere-se realizar as atividades durante o desenvolvimento do conteúdo, explorando com maior profundidade cada etapa, utilizando maior número de Situações Problema e complementando com a utilização de Jogos Didáticos.

Referências

BARROSO, J. M. *Conexões com a Matemática*. São Paulo: Moderna, 2010. v. 3. Citado na página 47.

BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB). Lei n 9.394/96*. Brasília, 1996. 7 p. Disponível em: <https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/70320/65.pdf>. Citado na página 14.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Apresentação dos temas transversais, ética*. Brasília, 1997. 24 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro081.pdf>. Citado na página 14.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, 1997. 19 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Citado na página 38.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília, 1998. 140 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Citado na página 36.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Parte III*. Brasília, 2000. 6, 43 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Citado na página 35.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2017. 7 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf>. Citado na página 15.

COELHO, P. *História dos Logaritmos e da Régua de Cálculo*. 2015. Disponível em: <http://www.engquimicasantossp.com.br/2015/09/historia-logaritmos-regua-de-calculo.html>. Acesso em: 02.12.2017. Citado na página 41.

CURY, A. *20 regras de ouro para educar filhos e alunos: como formar mentes brilhantes na era da ansiedade*. São Paulo: Planeta, 2017. Citado na página 37.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática*. 2003. Disponível em: <http://etnomatematica.org/articulos/boletin.pdf>. Acesso em: 16.01.2018. Citado na página 37.

DANTE, L. R. *Didática da Resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 2003. Citado na página 36.

DEMANA, F. et al. *Pré-cálculo*. São Paulo: Pearson, 2009. Citado 7 vezes nas páginas 20, 22, 23, 24, 30, 31 e 33.

DULLIUS, M. M.; QUARTIERI, M. T. *Explorando a matemática com aplicativos computacionais*. Lajeado: Univate, 2015. Disponível em: <https://www.univates.br/editora-univates/media/publicacoes/144/pdf_144.pdf>. Acesso em: 17.02.2018. Citado na página 37.

EINHARDT, I. F. B. *Aplicações das Funções Exponenciais e Logarítmicas Usando o Aplicativo MalMath*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, Agosto 2016. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94688>. Acesso em: 18.01.2018. Citado na página 15.

FERNANDES, C.; ROMBAUER, E. *Precisamos ouvir mais os jovens*. 2017. Disponível em: <https://www.todospelaeducacao.org.br//arquivos/biblioteca/olho_metas_2015_16_final.pdf>. Acesso em: 14.01.2018. Citado na página 14.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 1977. v. 2. Citado 6 vezes nas páginas 19, 24, 29, 30, 31 e 32.

KAMII, C. *Aritmética: Novas perspectivas implicações da teoria de Piaget*. São Paulo: Papiros, 1994. Citado na página 35.

KIRSCH, M. B. *O uso do smartphone como ferramenta pedagógica em sala de aula*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2015. Curso de Especialização em Mídias na Educação. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/134387/000986584.pdf?sequence=1>. Acesso em: 19.01.2018. Citado na página 36.

LEITE, W. S. S.; RIBEIRO, C. A. do N. *A inclusão das TICs na educação brasileira: problemas e desafios*. Revista Internacional de Investigación en Educación, 2012. Disponível em: <http://revistas.javeriana.edu.co/index.php/MAGIS/article/view/4172/3174f>. Acesso em: 25.02.2018. Citado na página 36.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Citado 9 vezes nas páginas 19, 20, 23, 25, 26, 28, 29, 32 e 33.

MAOR, E. *e: A história de um número*. Rio de Janeiro: Record, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 56.

MENDES, I. A. *Matemática e Investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. São Paulo: Livraria da Física, 2009. Citado na página 38.

MIRITZ, J. C. D. *Matemática e Música*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, Agosto 2015. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=82297>. Acesso em: 18.01.2018. Citado na página 15.

PINTO, V. D. *Funções Exponenciais, Logarítmicas via Resolução de Problemas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Junho 2017. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150290181>. Acesso em: 27.01.2018. Citado na página 15.

RÊGO, R. M. do; RÊGO, R. G. do. *Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática*. Campinas: Autores Associados, 2006. Citado na página 38.

RODRIGUES, L. L. *A matemática ensinada na escola e a sua relação com o cotidiano*. 2005. Disponível em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12005/LucianoLimaRodrigues.pdf>. Acesso em: 13.01.2018. Citado na página 14.

SILVA, C. A. da. *Torre de Hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem de funções exponenciais e resolução de problemas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Janeiro 2015. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=289>. Acesso em: 27.01.2018. Citado na página 15.

SILVEIRA, D. da S. *Professores dos Anos Iniciais: Experiências com o Material Concreto para o Ensino de Matemática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, Abril 2012. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências: Química da Vida e Saúde. Disponível em: <http://repositorio.furg.br/handle/1/2852>. Acesso em: 16.01.2018. Citado na página 38.

SOUZA, J. R. de. *Matemática: Novo Olhar*. São Paulo: FTD, 2013. v. 1. Citado 6 vezes nas páginas 30, 56, 57, 58, 59 e 94.

STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 34.

ÁVILA, G. S. de S. *Análise Matemática para a Licenciatura*. São Paulo: Edgard Blucher, 2001. Citado na página 20.

Apêndices

APÊNDICE A – Funções exponenciais e logarítmicas

Função Exponencial

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a^x$, em que a é constante positiva e diferente de 1, denomina-se função exponencial.

$$f(x) = a^x \ (a \in \mathbb{R}_+^*, \ a > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

O **domínio** de uma função exponencial da forma $f(x) = a^x$ é o conjunto dos números reais, isto é, $D(f) = \mathbb{R}$.

A **imagem** da função exponencial é $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

Quando $a > 1$, a função é dita **crescente**.

Quando $0 < a < 1$, a função é dita **decrescente**.

Veja ilustração gráfica na Figura 46.

Figura 46 – Representação gráfica de $f(x) = a^x$.

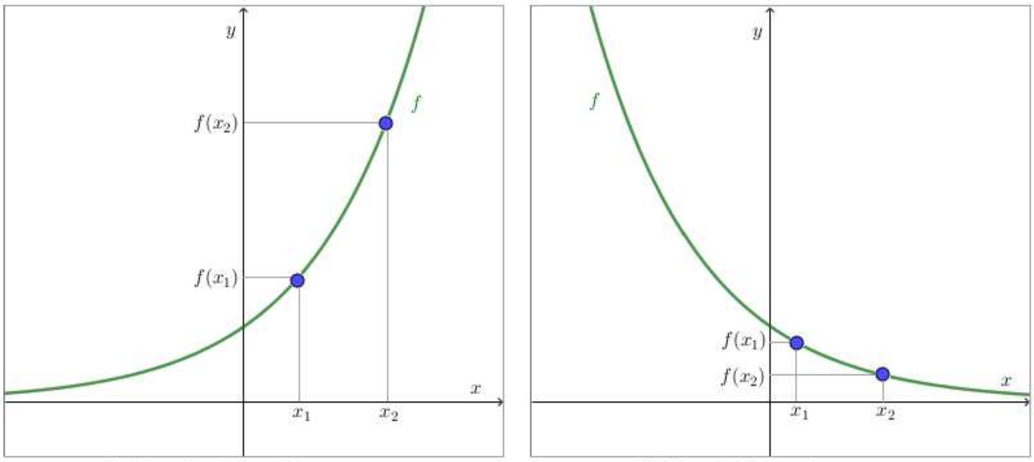


Gráfico de $f(x) = a^x$, *para* $a > 0$. *Gráfico de* $f(x) = a^x$, *para* $0 < a < 1$.

Fonte: Próprio autor

Logaritmos

Definição: O logaritmo de um número real e positivo b, na base a, positiva e diferente de 1, é o número x ao qual se deve elevar a para se obter b.

Exemplo:

(a) O número que se deve elevar 2 para se obter 32 é 5; portanto, 5 é o logaritmo de 32 na base 2.

(b) $\log_2(128) = 7 \Leftrightarrow 2^7 = 128$.

Tabela 4 – Forma logarítmica e forma exponencial

Forma Logarítmica	Forma exponencial
$\log_a(N) = x$	$a^x = N$
a = base do logaritmo	a = base da potência
N = logaritmando	N = potência
x = logaritmo	x = expoente

Fonte: Próprio autor

Observações:

- O sistema de logaritmos decimais, ou de base 10, indica-se por $\log_{10}(N)$ ou $\log(N)$.
- O sistema de logaritmos naturais, ou de base e, indica-se por $\log_e(N)$ ou $\ln(N)$.

Consequências da definição de logaritmo

1) Só é possível calcular o logaritmo de um número maior do que 0.

2) $\log_a(1) = 0$.

3) $\log_a(a) = 1$.

4) $\log_a(a^m) = m$.

5) $a^{\log_a(N)} = N$.

6) $\log_a(N) = \log(P) \Leftrightarrow N = P$.

Propriedades dos logaritmos

Para $0 < a \neq 1$, sejam $N, P \in \mathbb{R}_+^*$, têm-se as propriedades:

1) Logaritmo do produto

Em uma mesma base, o logaritmo do produto de dois ou mais números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números:

$$\log_a(N \cdot P) = \log_a(N) + \log_a(P).$$

2) Logaritmo do quociente

Em uma mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença dos logaritmos de cada um desses números:

$$\log_a\left(\frac{N}{P}\right) = \log_a(N) - \log_a(P).$$

3) Logaritmo da potência

O logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência:

$$\log_a(N)^m = m \cdot \log_a(N).$$

Função logarítmica

Denomina-se função logarítmica de base a, a função f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \log_a(x), \text{ (com } a \neq 1,\ a > 0 \text{ e } x > 0).$$

O **domínio** de uma função logarítmica da forma $f(x) = \log_a[g(x)]$ é a solução da inequação $g(x) > 0$.

A **imagem** de uma função logarítmica $f(x) = \log_a(x)$, (com $a \neq 1$, $a > 0$ e $x > 0$) é o conjunto dos números reais.

Quando $a > 1$, a função será dita **crescente**.

Quando $0 < a < 1$, a função será dita **decrescente**.

Veja ilustração gráfica na Figura 47.

Figura 47 – Representação gráfica de $f(x) = \log_a(x)$.

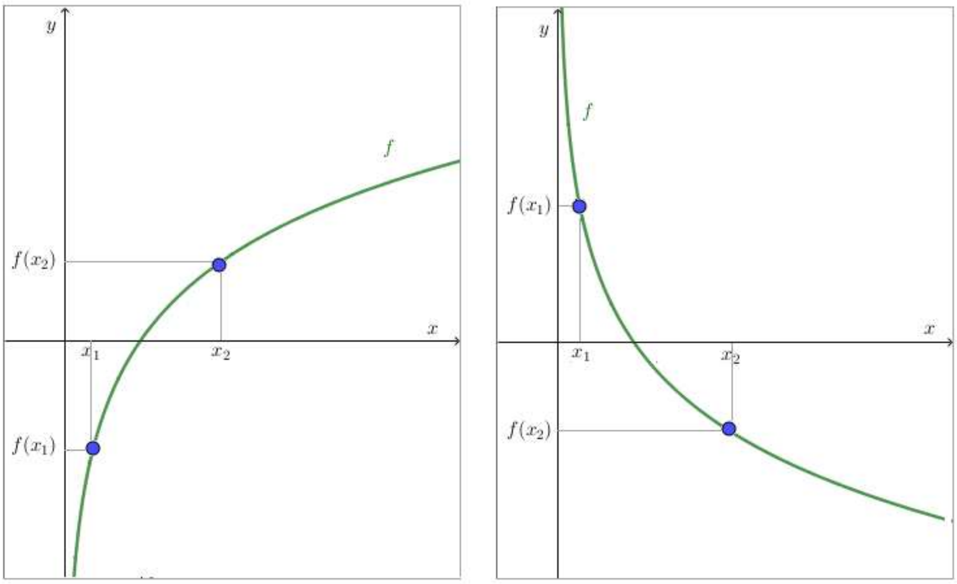


Gráfico de $f(x) = \log_a(x)$, para $a > 0$. *Gráfico de $f(x) = \log_a(x)$, para $0 < a < 1$.*

Fonte: Próprio autor

APÊNDICE B – Questionário perfil do participante

Idade: Sexo: ( ) F ( ) M

1) Você tem dificuldades em matemática no ensino médio? ( ) Sim ( ) Não

2) Você viu o conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas no ensino médio?

( ) Sim ( ) Não

3) Com relação ao conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas (marcar mais de uma se necessário):

( ) aprendeu sobre a definição de função exponencial.

( ) aprendeu sobre o comportamento do gráfico da função exponencial.

( ) aprendeu sobre a definição de logaritmo.

( ) aprendeu sobre o desenvolvimento da teoria dos logaritmos.

( ) aprendeu sobre as propriedades dos logaritmos.

( ) aprendeu sobre o número e.

( ) aprendeu sobre o comportamento do gráfico da função logarítmica.

4) Caso você tenha dúvidas, sobre conteúdos trabalhados em aula, você (marcar mais de uma se necessário):

( ) pede ao professor para explicar este conteúdo.

( ) pesquisa em livro.

( ) pesquisa na internet.

( ) pede ajuda de terceiros.

( ) fica sem entender.

5) Você acredita que a matemática é indispensável para a sua formação?

( ) Sim ( ) Não

6) Sobre a importância e a aplicação de funções exponenciais e logarítmicas, você:

( ) conhece pois seu professor falou.

( ) conhece pois viu na internet.

( ) não lembra.

( ) nunca ouviu falar.

7) Você considera a matemática importante para sua vida? ( ) Sim ( ) Não

APÊNDICE C – Questionário conhecimento de logaritmo

1) Segundo a definição de logaritmos, calcule $\log_2(8)$ e marque a alternativa correta:

(a) 4.

(b) 2.

(c) 8.

(d) 3.

(e) 16.

2) Existem propriedades que se destinam fundamentalmente a facilitar as operações que envolvem logaritmos. Consideramos, $M > 0$, $N > 0$ e $0 < a \neq 1$, qual das alternativas possui a propriedade **errada**?

(a) $\log_a(M \cdot N) = \log_a(M) + \log_a(N)$.

(b) $\log_a(M \cdot N) = \log_a(M) \cdot \log_a(N)$.

(c) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N)$.

(d) $\log_a(M^\alpha) = \alpha \cdot \log_a(M)$.

(e) $\log_a(\sqrt[q]{M^p}) = \frac{p}{q} \cdot \log_a(M)$, $(q \neq 0)$.

3) Sabendo que $\log(2) = 0,3010$ e $\log(3) = 0,4771$, calcule, utilizando as propriedades, $\log(6)$ e marque a alternativa correta:

(a) $0,1436071$.

(b) $0,7781$.

(c) $-0,1761$.

(d) $0,630894$.

(e) $0,1761$.

4) Supondo que exista, o logaritmo de a na base b é:

(a) o número ao qual se eleva a para se obter b.

(b) o número ao qual se eleva b para se obter a.

(c) a potência de base b e expoente a.

(d) a potência de base a e expoente b.

(e) a potência de base 10 e expoente a.

5) Um estudante quer resolver a equação $2^x = 5$, utilizando uma calculadora que possui a tecla $\log(x)$. Para obter um valor aproximado de x, o estudante deverá usar a calculadora para obter os seguintes números:

(a) $\log(2)$, $\log(5)$ e $\log(5) - \log(2)$.

(b) $\log(2)$, $\log(5)$ e $\log(5) \div \log(2)$.

(c) $\log(2)$, $\log(5)$ e $\log(25)$.

(d) $\frac{5}{2}$ e $\log\left(\frac{5}{2}\right)$.

(e) $\sqrt{5}$ e $\log(\sqrt{5})$.

6) Considere os logaritmos $\log_2(10)$, $\log(20)$ e $\ln(72)$. A alternativa que contém a sequência correta de suas bases é:

(a) 2, 10 e π.

(b) 10, 20 e 72.

(c) 2, 10 e e.

(d) 2, e e 10.

(e) 2, π e e.

APÊNDICE D – Questionário avaliação das atividades

1) Qual a avaliação geral que você faz destas atividades?

( ) Ótimo ( ) Bom ( ) Regular ( ) Ruim

2) O tempo foi suficiente para responder às perguntas?

( ) Sim ( ) Não

3) A comunicação com a pesquisadora foi eficiente?

( ) Sim ( ) Não

4) Você considera as atividades:

( ) Fáceis ( ) Medianas ( ) Difíceis

5) Você teve dificuldade para resolver as atividades?

( ) Sim ( ) Não

6) Em caso afirmativo, cite as questões que você teve problema para resolver.

____

____

7) Você acredita que atividades práticas como esta agregam conhecimentos práticos a sua formação?

( ) Sim ( ) Não

8) Você acredita que atividades práticas como esta podem tornar o conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas mais atrativo?

( ) Sim ( ) Não ( ) Em parte

9) Você gostaria de participar de outras atividades como estas?

( ) Sim ( ) Não

10) Cite pontos positivos das atividades:

____

____

11) Cite pontos negativos das atividades:

____

____

Obrigada pela sua participação.

APÊNDICE E – Situações Problema

Situação: Escala Richter

A intensidade de um terremoto na escala Richter é definida por $I = \dfrac{2}{3}\log\left(\dfrac{E}{10^{-3}}\right)$, onde E é a energia liberada pelo terremoto, em quilowatt-hora (kWh).

Se um terremoto teve uma energia liberada de 10^3 kWh, verifique de acordo com a Tabela 5, se o terremoto causou ou não dano à cidade em que ocorreu. Utilize, se necessário, a Régua de Cálculo.

Tabela 5 – Escala Richter

Intensidade	Consequência
Menos de 3	Geralmente não é sentido, apenas registrado em sismógrafos.
3 a $5,4$	Normalmente é sentido, mas não costuma causar estragos.
$5,5$ a 6	Pequenos danos a prédios bem projetados. Danos maiores nos demais.
$6,1$ a $6,9$	Podem causar danos em áreas de até 100 km^2.
7 a $7,9$	Intenso. Pode causar destruição em grandes extensões.
8 ou mais	Muito intenso. Pode causar grande destruição.

Fonte: (SOUZA, 2013)

Situação: Crescimento de uma cultura de bactérias

Um dos perigos na alimentação humana são as bactérias, que podem causar diversas doenças e até levar ao óbito. Sabendo que a taxa de crescimento de uma certa bactéria é de 20%.

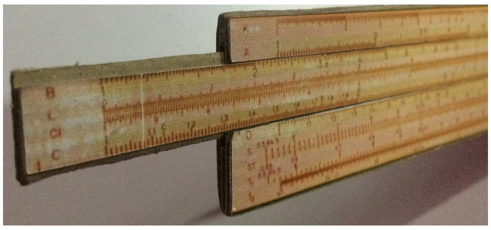
Utilizando a Régua de Cálculo, calcule em quantos dias, aproximadamente, uma população B_0 dessa bactéria triplica, se a taxa de crescimento se mantiver?

APÊNDICE F – Dicas de construção: Régua de Cálculo

Dicas para o professor

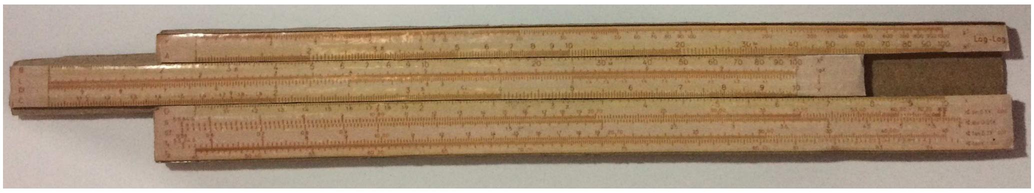
- ☞ Imprimir uma foto da régua original em um papel adesivo, Figura 50.
- ☞ Utilizando papelão construir a base para a régua.
- ☞ Colar a foto adesiva em um papelão para depois separar as partes.
- ☞ Na haste deslizante construir um recuo para que possa deslizar.
- ☞ Veja como fica a régua confeccionada nas Figuras 48 e 49.

Figura 48 – Régua construída.



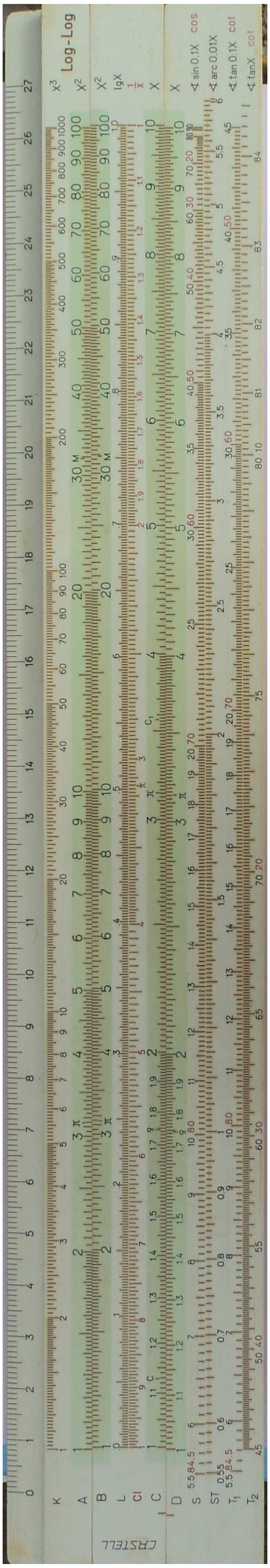
Fonte: Próprio autor

Figura 49 – Régua construída pela pesquisadora.



Fonte: Próprio autor

Figura 50 – Imagem para impressão em papel adesivo.



Fonte: Próprio autor