**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**
**PROFMAT**

Ezequiel Onedi Debortoli

# TEORIA DA PROBABILIDADE: UMA MODELAGEM APLICADA AO JOGO DE POKER

Florianópolis

2018

Ezequiel Onedi Debortoli

# TEORIA DA PROBABILIDADE: UMA MODELAGEM APLICADA AO JOGO DE POKER

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em rede nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Debortoli, Ezequiel Onedi
/ Ezequiel Onedi Debortoli ; orientador, Prof.
Dr. Gilles Gonçalves de Castro, 2018.
114 p.

Dissertação (mestrado profissional) -
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós
Graduação em Matemática, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Probabilidade. 3. Texas
Hold'em. 4. Esperança Matemática. I. Castro, Prof.
Dr. Gilles Gonçalves de. II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em
Matemática. III. Título.

Ezequiel Onedi Debortoli

**TEORIA DA PROBABILIDADE: UMA MODELAGEM APLICADA AO JOGO DE POKER**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional de Matemática em rede nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial.

Florianópolis, 20 de fevereiro de 2018.

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Coordenador

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Orientador

Prof. Dr. Leandro Batista Morgado
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. Marcelo Sobottka
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Dr. Milton Kist
Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

**AGRADECIMENTOS**

A Deus, por todas as bençãos recebidas.

Aos meus pais, Onedi Antonio Debortoli e Jovilde Marmentini Debortoli, pelo apoio e amor incondicional.

À minha esposa Daiane da Silva Debortoli, pela paciência, pela compreensão durante os períodos de ausência, pelo incentivo e pelo carinho de sempre.

Aos meus irmãos, Ederson Antonio Debortoli e Luan Gabriel Debortoli, pelo apoio, amizade e carinho sempre demonstrados.

Ao professor doutor Gilles Gonçalves de Castro, por ter me orientado durante a elaboração deste trabalho, prestando esclarecimentos, apontando correções e dando oportunas sugestões.

Aos professores do Profmat-UFSC, pelas contribuições e auxílio durante todo o curso.

Aos professores que compõem a banca examinadora, pela sua disposição em avaliar e contribuir com este trabalho.

A todos os colegas da turma Profmat-2016, em especial a André Walter, Luiz Arthur Dornelles Júnior e Waldir de Souza, pelos momentos que passamos juntos, de aprendizado e compartilhamento de conhecimentos.

**RESUMO**

Neste trabalho buscaremos analisar os principais conceitos da Teoria da Probabilidade de uma maneira não usual: utilizando o jogo de cartas Poker, em sua mais popular modalidade, o Texas Hold'em. As principais regras e terminologias deste jogo também serão explanadas, visando facilitar a compreensão das abordagens que serão feitas em seguida, quando jogadas reais ocorridas no Texas Hold'em servirão de modelo para a exemplificação de diversos conceitos desta teoria. Espaço amostral, eventos, variáveis aleatórias e valor esperado serão alguns dos tópicos explanados, sendo também destacados importantes resultados, como a regra geral do produto e o Teorema de Bayes, todos eles ilustrados com situações relacionadas ao famoso jogo de cartas.
**Palavras-chave:** Matemática. Probabilidade. Texas Hold'em. Esperança Matemática.

## ABSTRACT

In this work we will try to analyze the main concepts of Probability Theory in an unusual way: using the card game Poker, in its most popular modality, Texas Hold'em. The main rules and terminologies of this game will also be explained, in order to facilitate the understanding of the approaches that will be made next, when real plays in Texas Hold'em will serve as a model for the exemplification of several concepts of this theory. Sampling space, events, random variables and expected value will be some of the topics explained, and important results are also highlighted, such as the general product rule and Bayes' Theorem, all of which are illustrated with situations related to the famous card game.
**Keywords:** Mathematics. Probability. Texas Hold'em. Mathematical Hope.

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Os esforços para determinar, com certo grau de exatidão, o possível desfecho de eventos cujos resultados são incertos ou imprevisíveis têm desafiado e instigado a mente humana há muito tempo. Sua direta relação com as mais diversas situações da vida cotidiana fez com que o homem buscasse, ao longo do tempo, mecanismos e artifícios para encontrar alguma lógica em meio ao aparente acaso, entendendo seus princípios e enunciando diversos resultados gerais que fossem úteis na tomada de decisões diante de situações aparentemente aleatórias e imprevisíveis. Ao longo da história, foi possível observar que saber identificar esses padrões ou semelhanças em experimentos aleatórios concedeu significativa vantagem aos detentores deste conhecimento, bem como gerou graves inconvenientes aos que deles se afastaram.

Assim, conhecer as nuances e compreender os princípios gerais que regem a aleatoriedade, sabendo analisar de forma correta as diversas possibilidades existentes, permite ao homem aumentar sua chance de sucesso em determinado evento, bem como lhe afastar de situações condenadas ao fracasso. E, da mesma forma que ocorre com outros talentos, saber tomar a melhor decisão diante da incerteza é uma habilidade que pode ser aprimorada. "A capacidade de tomar decisões e fazer avaliações sábias diante da incerteza é uma habilidade rara. Porém como qualquer habilidade, pode ser aperfeiçoada com a experiência." [MLODINOW, 2008]. E um dos instrumentos que podem auxiliar positivamente no processo de tomada de decisão que envolvem a aleatoriedade é o conhecimento da Teoria da Probabilidade.

Em geral, boa parte das abordagens pedagógicas relacionadas a esta teoria utilizam quase que somente exemplos relacionados a lançamentos de dados ou de moedas, simples extrações de cartas de um baralho ou extrações de bolas coloridas de urnas. Apesar de auxiliarem na construção do conhecimento citado, tais exemplos não possuem relação direta com a realidade vivenciada pela maior parte das pessoas e, por isso, tendem a não ofertar nenhum novo estímulo ou motivação ao seu aprendizado.

Buscamos então encontrar algo contemporâneo que estimulasse e atraísse a atenção das pessoas para a construção dos conhecimentos relacionados à Teoria da Probabilidade, e vislumbramos em um famoso jogo de cartas, o Poker, algo possivelmente motivador. Tal escolha não ocorreu ao acaso: o Poker é atualmente um dos jogos online mais praticados no mundo, atraindo a atenção e a curiosidade de pessoas de todas as idades. Além disso, o sucesso no jogo tende a exigir dos jogadores uma série de habilidades intelectuais e comportamentais, despertando assim nos seus praticantes o interesse pelo estudo aprofundado de diversos atística e lógica, e também de outras áreas do conhecimento, como psicologia, por exemplo.

Assim, o objetivo principal deste trabalho é compreender os principais conceitos e resultados matemáticos relacionados a Teoria da Probabilidade, modelando-os através do jogo de cartas que tem atraído a atenção de muitas pessoas pelo mundo, o Poker, em uma de suas mais famosas modalidades: o Texas Hold'em. Veremos que, apesar da aleatoriedade estar presente nesse tipo de jogo, existem diversas possibilidades que, se bem compreendidas, podem otimizar a chance de sucesso ao longo do tempo.

O primeiro capítulo será dedicado aos aspectos teóricos da Teoria da Probabilidade. Na primeira parte relataremos, de forma breve e superficial, o processo histórico de construção da Teoria da Probabilidade e sua íntima relação com os jogos de azar. Em seguida enunciaremos e demonstraremos diversas proposições relacionadas à probabilidade, que apesar de sua aparente simplicidade escondem avançados e complexos conhecimentos. Todos os conceitos abordados serão acompanhados de exemplos, relacionando a teoria apresentada com situações práticas do cotidiano social. Serão abordados conceitos como probabilidade condicional, independência entre eventos, regra geral do produto, teorema da probabilidade total e o teorema de Bayes, sendo também demonstrados os principais resultados. O capítulo inicial será finalizado com a explanação de algumas características e propriedades das variáveis aleatórias discretas e a Esperança Matemática.

No segundo capítulo falaremos sobre o Poker. Na parte inicial abordaremos um pouco da história e algumas das principais modalidades deste jogo. Em seguida detalharemos as regras e formas de aposta de seu principal estilo, o Texas Hold'em No Limit, e abordaremos as mais importantes características relacionadas a esta modalidade. O capítulo será finalizado com a exposição do ranking de mão do Poker, conjunto hierárquico de combinações formadas por cinco dentre as 52 cartas do baralho que define o jogador vencedor em uma rodada de Texas Hold'em. Toda essa construção teórica fornecerá uma familiarização com parte da terminologia utilizada no Poker e será útil para o entendimento e desenvolvimento da parte mais importante do trabalho:

a exemplificação de diversos conceitos da Teoria da Probabilidade com a utilização de jogadas reais do Texas Hold'em.

No último capítulo faremos a conexão entre as duas primeiras partes do trabalho: utilizaremos situações reais relacionadas ao jogo de Poker para abordar os conceitos da Teoria da Probabilidade. Iniciaremos analisando as probabilidades associadas ao ranking de mãos do Poker, mostrando a íntima relação deste ranking com a possibilidade de ocorrência de cada uma das mãos. Em seguida, apresentaremos variadas situações e mãos que podem ocorrer (ou que ocorreram, de fato) em jogos de Poker, que servirão de molde para a aplicação dos conceitos da Teoria da Probabilidade elencados no capítulo inicial.

Concluiremos este trabalho mostrando que é possível compreender e exemplificar os conceitos e resultados da Teoria da Probabilidade exclusivamente com jogadas de Texas Hold'em, fornecendo assim subsídios para possíveis novas apresentações para áreas do conhecimento matemático como probabilidade, estatística e análise combinatória, por exemplo. Também destacaremos o nosso entendimento sobre o fato de que o conhecimento (ou não) da Teoria da Probabilidade pode fazer alguma diferença no jogo do Poker.

Destacamos que o objetivo deste trabalho não é o de ensinar alguém a jogar e nem mesmo o de criar algum tipo de "algoritmo vencedor" para o jogo de Poker. Pelo contrário, buscaremos conhecer e compreender, mesmo que de forma introdutória, a magia existente na Teoria da Probabilidade, utilizando para isso um conhecido jogo de cartas. Além disso, buscamos trazer outros exemplos relacionados à probabilidade que poderão ser utilizados com os alunos do Ensino Médio, dando outras alternativas aos recorrentes e tradicionais exemplos tão comumente abordados pelos livros didáticos.

Conhecimentos prévios sobre conjuntos e relações De Morgan, funções, princípio da indução finita e teoria da contagem, em especial de análise combinatória, podem auxiliar na compreensão deste trabalho, mas não são requisitos indispensáveis.

# 1 A TEORIA DA PROBABILIDADE

O primeiro capítulo deste trabalho será dedicado à Teoria da Probabilidade. Serão apresentadas definições, conceitos e propriedades diversas relacionadas a essa teoria. Inúmeros exemplos, em boa parte adaptados das obras citadas na bibliografia, mostrarão algumas aplicações dos conceitos abordados.

A parte inicial, que traz um breve relato histórico da construção da Teoria da Probabilidade, teve como referências principais as informações contidas em [GADELHA, 2004] e [CALABRIA, 2013]. As seções seguintes, que abrangem algumas das principais definições, teoremas e resultados relacionados à Teoria da Probabilidade foram embasadas, principalmente, nos resultados e informações encontrados em [SERRACOSTA, 1981], [DANTAS, 2008], [MAGALHAES, 2011], [ACTION, 2017] e [FARIAS, 2006], ainda que outras obras citadas na bibliografia também tenham sido utilizadas, direta ou indiretamente, na elaboração do presente capítulo.

### 1.0.1 Um pouco da história

Desde as épocas mais antigas da humanidade o homem já lidava com a incerteza. Previsões sobre o tempo, sobre o cultivo do campo ou mesmo sobre a vida e a morte já eram feitas, mesmo que baseadas apenas em crenças ou em suposições que não apresentavam uma dedução lógica mais apurada. Por muito tempo as pessoas tentaram compreender esses fenômenos que ocorriam de modo aleatório, buscando assim obter algum tipo de vantagem ou evitar perdas provenientes de fatores imprevisíveis.

Até meados do século 17, algumas considerações filosóficas sobre a casualidade haviam sido redigidas e algumas investigações sobre eventos sujeitos ao acaso, em especial aos jogos de azar, haviam sido criadas de forma esparsa, mas sem um maior rigor ou formalismo.

A sistematização de uma teoria, com o estabelecimento de algumas regras gerais que pudessem estimar uma medida da chance de ocorrência de um experimento aleatório teve um grande impulso em 1654, com os resultados obtidos por Pierre de Fermat (1601–1665) e Blaise Pascal (1623–1662), em resposta a um problema proposto 160 anos antes por Luca Paccioli (1445–1514), um monge franciscano. O problema, novamente relacionado a um jogo, que ficou conhecido por problema dos pontos, era o seguinte: "Suponha uma partida entre dois jogadores, que é vencida pelo primeiro que fizer seis pontos. Se ambos os jogadores têm a mesma habilidade no jogo, como deve ser distribuída a premiação caso a partida seja interrompida quando um dos jogadores tiver quatro pontos e outro três pontos?".

À época, tal problema era de difícil resolução, já que não existiam artifícios matemáticos eficientes para resolvê-lo. Utilizando algumas ideias de outros precursores desta área de conhecimento, como Gerolamo Cardano (1501–1576), Niccolo Tartaglia (1499–1557) e Galileo Galilei (1564–1642), a troca de cartas entre Pascal e Fermat levou à resolução daquele problema, mostrando de maneira precisa como a premiação poderia ser distribuída proporcionalmente às chances (probabilidades) que cada jogador tinha de vencer o jogo. (Para mais informações sobre a resolução deste problema, recomendamos a leitura do artigo "O problema dos pontos e o início da Teoria da Probabilidade", disponível em [ORM/SC, 2016]).

Essa teoria foi sendo ampliada e recebeu contribuições importantes de outros matemáticos memoráveis, como Jacques Bernoulli (1654–1705), Leonhard Euler (1707–1783), Abraham DeMoivre (1667–1754), Carl Friedrich Gauss (1777–1855) e Pierre Simon de Laplace (1749–1827), dentre outros, até Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987) sistematizar, em 1931, de forma matematicamente rigorosa, a partir de uma axiomática consistente, a Teoria da Probabilidade.

Importante destacar que muitos outros matemáticos, filósofos e estudiosos foram partícipes do processo de construção desta teoria, e que boa parte dos avanços obtidos foram originados de discussões relacionadas aos jogos de azar, com destaque para jogos de envolvendo moedas ou cartas, tão comuns em todas as eras da humanidade. Os conceitos e resultados obtidos passaram a ser utilizados nas mais diversas áreas do conhecimento, como medicina, economia e engenharia, por exemplo, maximizando as possibilidades de acerto nas ações desenvolvidas, o que tem impactado significativamente na qualidade de vida das pessoas.

## 1.1 PROBABILIDADE

### 1.1.1 Definições e propriedades

Para que possamos falar em probabilidade, precisamos conhecer a natureza do processo que estamos avaliando. Nesse contexto, podemos classificar os experimentos ou fenômenos em dois tipos: os não aleatórios (também chamados de determinísticos) e os aleatórios (ou chamados de estocásticos).

Os ***experimentos determinísticos*** são aqueles em que o resultado já é conhecido antes mesmo do fato ocorrer, como por exemplo o fato de que a luz, no vácuo, independentemente do ponto de onde é emitida, se deslocará a uma velocidade de 299.792.458 m/s, ou o fato de que a água, aquecida a 100 °C, sob pressão normal, entrará em ebulição. Neste caso, sabe-se de antemão exatamente o que acontecerá se o experimento ocorrer.

Já os ***experimentos aleatórios*** são aqueles que, mesmo se repetidos nas mesmas condições, podem produzir resultados diferentes, como por exemplo determinar qual será o naipe de uma carta retirada de um baralho, qual será o tempo de vida útil de uma lâmpada incandescente ou quais serão os seis números sorteados na Mega Sena. Estas são situações em que, embora saibamos quais são todos os possíveis resultados, não temos como afirmar, com certeza, *a priori*, o que irá ocorrer.

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é denominado ***espaço amostral*** e será representado por $S$. Quando o espaço amostral é finito ou infinito enumerável, é chamado de espaço amostral discreto. Caso contrário, isto é, quando $S$ é infinito não enumerável, é chamado de espaço amostral contínuo. Neste trabalho assumiremos que o espaço amostral é finito (a menos que digamos o contrário).

**Exemplo 1.1.** Ao considerarmos o experimento aleatório "lançamento de um dado", temos que o espaço amostral referente ao valor numérico da face do dado que fica voltada para cima é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sendo, portanto, um espaço discreto.

**Exemplo 1.2.** Seja o experimento aleatório que consiste em quantificar, em decibéis, diariamente, durante um mês, o nível de ruído proveniente das decolagens e aterrissagens de aviões em um aeroporto. O espaço amostral associado a este experimento aleatório é formado pelos números reais, ou seja, $S = \mathbb{R}$, sendo, portanto, um espaço amostral contínuo.

**Exemplo 1.3.** Três pilhas são retiradas, uma na sequência da outra, de uma caixa. Cada pilha é classificada como nova (N) ou usada (U). O espaço amostral associado a esse experimento aleatório é

$$S = \{(NNN), (NNU), (NUN), (NUU), (UNN), (UNU), (UUN), (UUU)\},$$

onde a tripla $(P_1P_2P_3)$ representa a classificação da pilha obtida na retirada $i$, para $i = 1, 2, 3$.

Qualquer coleção de possíveis resultados de um espaço amostral, isto é, qualquer subconjunto de $S$, é denominado de ***evento*** e será denotado por uma letra maiúscula. Eventos que contém apenas um elemento do espaço amostral, ou seja, que são um conjunto unitário, são chamados de ***eventos simples*** e serão denotados por $\omega$. Note que o próprio espaço amostral é também um evento, chamado de evento certo. O conjunto de todos os eventos possíveis de $S$, também chamado de ***espaço de eventos***, é o conjunto das partes do espaço amostral.

**Exemplo 1.4.** *(Espaço de eventos)* Consideremos o espaço amostral $S = \{1, 2, 3\}$. Então o espaço de eventos de $S$, denotado por $\beta$, é

$$\beta = \{\varnothing, \underbrace{\{1, 2, 3\}}_{S}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

**Exemplo 1.5.** Para o experimento aleatório "lançamento de um dado", temos que os eventos simples são $\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{4\}$,$\{5\}$,$\{6\}$. Outros exemplos de eventos associados ao espaço amostral $S$ são, por exemplo, "Face par"$= \{2, 4, 6\}$, "Face ímpar"$= \{1, 3, 5\}$, e "Face par maior que 2"$= \{4, 6\}$, dentre outros.

**Exemplo 1.6.** Do Exemplo 1.3, consideremos os eventos $A$: "duas pilhas são novas" e $B$: "quatro pilhas são usadas". Temos que

$$A = \{(NNU), (NUN), (UNN)\} \quad \text{e} \quad B = \varnothing,$$

pois nas condições dadas o evento $B$ é impossível de ser concretizado.

Perceba que cada evento possui uma chance de ocorrer ou não. O peso que atribuímos a essa possibilidade de ocorrência de um evento específico é chamado de ***probabilidade***.

Para refletir esse grau de confiança que associamos a possibilidade de ocorrência de um evento $A$, utilizaremos um número real, contido no intervalo $[0, 1]$, sendo que 1 representará absoluta certeza da ocorrência do evento. Esse número será encontrado através da *função probabilidade* (ou medida de probabilidade), que é axiomaticamente definida assim:

**Definição 1.7.** ***(Função probabilidade)***
*Seja $S$ um espaço amostral. Uma* função probabilidade*, que denotaremos por $P$, é uma função que tem domínio em $\beta$, o conjunto das partes de $S$, e contradomínio em $\mathbb{R}$, satisfazendo os seguintes axiomas:*

1. *$P(S) = 1$ e $P(\varnothing) = 0$;*

2. *$0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento $A \subset S$; e*

3. *Se $A_i, i = 1, 2, \cdots, n$, é uma sequência finita de eventos mutuamente exclusivos, isto é, eventos em que $A_i \cap A_j = \varnothing$ sempre que $i \neq j$ (com $i, j \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$), então*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Qualquer função que tenha como domínio o espaço de eventos e contradomínio em $\mathbb{R}$, atendendo aos axiomas 1, 2 e 3 da definição acima será uma *função probabilidade*. A imagem de um evento $A \subset S$ gerada pela função de probabilidade $P$ é chamada de *probabilidade do evento* $A$ e será denotada por $P(A)$. A trinca $(S, \beta, P)$ é chamada de *espaço de probabilidade*.

**Exemplo 1.8.** Dizemos que uma moeda é honesta quando, após ser lançada e observada a face voltada para cima, a possibilidade de ocorrência de cada uma das duas faces distintas da moeda (cara (K) ou coroa (C)) é a mesma, sendo estes também os dois únicos resultados possíveis no lançamento. Seja o experimento aleatório "lançamento de uma moeda honesta". Veja que $S = \{K, C\}$ e que, neste caso, podemos dizer que a probabilidade do evento simples K= "o resultado do lançamento foi cara", que denotaremos por $P(K)$, é a mesma do evento simples C= "o resultado do lançamento foi coroa", que denotamos por $P(C)$, ou seja, $P(K) = \frac{1}{2}$ (ou 50%) e $P(C) = \frac{1}{2}$ (ou 50%) - que atende ao Axioma 2. Veja que, da forma como definimos as probabilidades para os eventos simples de $S$, temos uma função de probabilidade: temos a certeza que o lançamento resultará em cara ou em coroa, isto é, que $P(S) = 1$, e que a probabilidade de que o lançamento não resulte em cara nem em coroa é nula, ou seja, que $P(\varnothing) = 0$, já que o resultado do lançamento é necessariamente um dos dois eventos simples, cara ou coroa - atendendo assim ao Axioma 1. Ainda, observando que $\beta = \{\varnothing, \{K\}, \{C\}, \{K, C\}\}$, se tomarmos qualquer sequência finita de eventos mutuamente exclusivos de $\beta$, teremos que a probabilidade da união destes eventos é a soma das probabilidades de cada um deles, que atende ao Axioma 3. De fato, fixemos uma sequência qualquer de eventos de $\beta$ :

- Se um dos eventos da sequência for $S = \{K, C\}$, todos os demais eventos terão que ser o vazio, já que $S \cap \varnothing = \varnothing$ e $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, e

$$P(S\cup\varnothing\cup\cdots\cup\varnothing) = P(S)+P(\varnothing)+\cdots+P(\varnothing) = 1+0+\cdots+0 = 1.$$

- Caso contrário, podemos ter que
  - Todos os elementos são $\varnothing$, e
    $P(\varnothing \cup \cdots \cup \varnothing) = P(\varnothing) + \cdots + P(\varnothing) = 0 + \cdots + 0 = 0$; ou
  - Um dos elementos da sequência é $K$ e os demais são $\varnothing$, e
    $P(K \cup \varnothing \cdots \cup \varnothing) = P(K) + P(\varnothing) + \cdots + P(\varnothing)$
    $= \frac{1}{2} + 0 + \cdots + 0 = \frac{1}{2}$; ou
  - Um dos elementos da sequência é $C$ e os demais são $\varnothing$, e
    $P(C \cup \varnothing \cdots \cup \varnothing) = P(C) + P(\varnothing) + \cdots + P(\varnothing)$
    $= \frac{1}{2} + 0 + \cdots + 0 = \frac{1}{2}$; ou
  - Um dos elementos é $K$, outro é $C$, e os demais são $\varnothing$, e
    $P(K \cup C \cup \varnothing \cdots \cup \varnothing) = P(K) + P(C) + P(\varnothing) + \cdots + P(\varnothing)$
    $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + \cdots + 0 = 1$.

Como todos os axiomas da Definição 1.7 foram atendidos, podemos afirmar que a função probabilidade está bem definida neste exemplo.

**Observação 1.9.** Em um espaço amostral finito, basta definir a probabilidade dos eventos simples. Ou seja, no exemplo anterior, tomando $S = \{K, C\}$, bastaria termos definido que $P(K) = \frac{1}{2}$ e $P(C) = \frac{1}{2}$. Isso porque qualquer evento $A \subset S$ será formado por uma união finita de eventos simples de $S$, tendo como valor máximo de probabilidade 1, que é a probabilidade do próprio espaço amostral.

Mais tarde veremos uma forma simples de calcular a probabilidade de eventos de um espaço amostral em que os eventos simples tem a mesma chance de ocorrência. Agora, apresentaremos algumas propriedades da probabilidade que são consequências imediatas dos axiomas da Definição 1.7.

**Proposição 1.10.** *Se $A^c$ é o complementar do evento $A$, então*

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

*Demonstração.* $A$ e $A^c$ são eventos mutuamente exclusivos, cuja reunião é $S$, ou seja, $A \cap A^c = \varnothing$ e $A \cup A^c = S$ . Pelo Axioma 1 da Definição 1.7

temos que $P(S) = 1$ e pelo Axioma 3 da mesma definição, temos que $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$. Assim, temos que

$$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

e, portanto, $P(A) + P(A^c) = 1$. Finalmente, subtraindo-se $P(A)$ em ambos membros desta última igualdade, obtemos que $P(A^c) = 1 - P(A)$. ■

**Proposição 1.11.** *Sejam $A$ e $B$ dois eventos quaisquer do espaço amostral $S$, tais que $A \subset B$. Então*

$$P(A) \leq P(B).$$

*Demonstração.* Como $A \subset B$, temos que $B = A \cup (B \setminus A)$ e, portanto, utilizando o Axioma 3 da Definição 1.7 e o fato de que $A$ e $(B \setminus A)$ são disjuntos, temos que $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Como $P(B \setminus A) \geq 0$, temos que $P(B) \geq P(A)$, ou seja, $P(A) \leq P(B)$. ■

**Proposição 1.12.** *Sejam $A$ e $B$ dois eventos quaisquer do espaço amostral $S$. Então*

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$

*Demonstração.* Observe que $A$ pode ser escrito como a união de dois conjuntos disjuntos: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Assim, pelo Axioma 3 da Definição 1.7, temos que

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B). \tag{1.1}$$

Então, subtraindo $P(A \cap B)$ de ambos os lados da igualdade 1.1, obtemos que $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$. ■

**Proposição 1.13.** *Sejam $A$ e $B$ dois eventos quaisquer do espaço amostral $S$. Temos que*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

*Demonstração.* $A \cup B$ pode ser escrito como a reunião de dois eventos mutuamente exclusivos: $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, e pelo Axioma 3 da Definição 1.7 temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A). \tag{1.2}$$

Pela Proposição 1.12, temos que $P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A)$ e, portanto, obtemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. ■

### 1.1.2 Eventos equiprováveis

Considere um experimento aleatório que tem como espaço amostral um conjunto $S$ com um número finito de elementos. Dizemos que os eventos simples pertencentes a $S = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ são ***equiprováveis*** se cada um deles possui a mesma probabilidade de ocorrer. Neste caso, considerando os $n$ resultados possíveis para o experimento, temos que para todo $1 \leq i \leq n$,

$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}.$$

Assim, podemos definir a probabilidade de um evento $A = \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_m}\}$ com $m \leq n$ elementos, como sendo

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.3}$$

onde $m$ é o número de casos favoráveis ao evento $A$ (também denotado por $n(A)$) e $n$ é o número total de casos possíveis no experimento aleatório (também denotado por $n(S)$). A expressão (1.3), definida nas condições acima, é conhecida como *definição clássica de probabilidade.*

**Exemplo 1.14.** Ao lançarmos um dado honesto e observarmos o número da face voltada para cima, observamos que os elementos do espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ são equiprováveis, pois cada um deles tem a mesma possibilidade de ocorrer, ou seja, a chance de sair um número é a mesma chance de sair outro. Como temos seis diferentes resultados possíveis, a probabilidade de cada evento simples $\omega \in S$ é $P(\omega) = \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$, ou seja,

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

**Exemplo 1.15.** Denotando por K o evento "cara" e por C o evento "coroa" aos resultados obtidos em cada um de dois lançamentos de uma moeda honesta, teremos o espaço amostral equiprovável $S = \{KK, KC, CK, CC\}$. O evento A="pelo menos um dos lançamentos resulta em cara" possui três casos favoráveis, pois $A = \{KK, KC, CK\}$. Logo, utilizando a expressão (1.3), a probabilidade do evento A ocorrer é o número total de casos favoráveis a A (3), dividido pelo total de casos possíveis no experimento aleatório (4), ou seja, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$.

**Exemplo 1.16.** Considere um baralho usual composto de 52 cartas divididas em quatro naipes: ouro $\diamondsuit$, copas $\heartsuit$, paus $\clubsuit$ e espadas $\spadesuit$, cada naipe com 13 cartas. As cartas dos dois primeiros naipes são vermelhas e as dos dois últimos naipes são pretas. Em cada naipe, as cartas podem ser A (Ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (Valete), Q (Dama) e K (Rei). Essas três últimas são figuras que representam a realeza. Retirando-se ao acaso uma carta desse baralho:
(a) Qual é a probabilidade de que ela seja uma figura?
(b) Qual é a probabilidade que a carta retirada seja vermelha?
*Solução:* (a) Seja F o evento "a carta retirada é uma figura". Em cada um dos quatro naipes há três figuras: J, Q e K. Logo, o número total de figuras é $4 \cdot 3 = 12$, ou seja, $n(F) = 12$. Ainda, como o baralho é composto por 52 cartas, temos que $n(S) = 52$. Como a probabilidade de retirar uma carta é a mesma da retirada de outra qualquer, temos que os eventos são equiprováveis e, portanto, a probabilidade de retirarmos uma figura é $P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.
(b) Denotemos por V o evento "a carta retirada é vermelha". Dos quatro naipes de cartas, dois são de cor vermelha. Assim, metade das cartas é de cor vermelha e, como o total de cartas no baralho é 52, temos que o número de casos favoráveis ao evento V é 26, ou seja, $n(V) = 26$. Portanto, a probabilidade de que a carta retirada seja vermelha é $P(V) = \frac{n(V)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

### 1.1.3 Independência entre eventos

Dizemos que dois ou mais eventos são independentes quando a ocorrência de um não exerce nenhuma influência na probabilidade de ocorrência do outro. Se eles forem independentes, então a probabilidade de que eles ocorram simultaneamente é igual ao produto de suas probabilidades individuais. Formalmente, temos a seguinte definição:

**Definição 1.17.** *Dois eventos $A$ e $B$ de um espaço amostral $S$ são independentes se*
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

**Exemplo 1.18.** São lançados simultaneamente um dado e uma moeda honestos. Qual é a probabilidade de obtermos como resultado cara e o número 5?

*Solução:* O resultado obtido no lançamento da moeda não interfere no resultado do lançamento do dado e, portanto, os eventos são independentes. Como a probabilidade de obtermos cara (que denotaremos por $K$) no lançamento de uma moeda honesta é $P(K) = \frac{1}{2}$ e a probabilidade de obtermos 5 no lançamento de um dado é $P(5) = \frac{1}{6}$, temos que a probabilidade de obtermos cara **e** 5 como resultado no lançamento simultâneo de uma moeda e um dado é

$$P(K \cap 5) = P(K) \cdot P(5) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

**Exemplo 1.19.** Considere um baralho tradicional de 52 cartas. Retirando-se ao acaso e com reposição duas cartas (isto é, após retirar a primeira carta, ela é recolocada no baralho para a segunda retirada), qual a probabilidade da primeira carta retirada ser um 8 e a segunda carta retirada ser um J vermelho?
*Solução:* Seja A o evento "a primeira carta retirada é um 8"e B o evento "a segunda carta retirada é um J vermelho". Existem quatro cartas "8" dentre as 52 cartas do baralho e, portanto, a probabilidade que a primeira carta retirada seja um 8 é $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Para a segunda retirada, que é feita com a reposição da primeira carta, temos que existem quatro cartas "J"no baralho, das quais duas são vermelhas. Assim, a probabilidade que a segunda carta retirada seja um "J vermelho" é $P(B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$. O que ocorre na primeira retirada não influencia no que irá ocorrer na segunda retirada (pois a primeira carta retirada é recolocada no baralho) e, portanto, os eventos são independentes. Logo, a probabilidade que a primeira carta retirada seja um 8 **e** a segunda carta retirada seja um J vermelho é

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{13} . \frac{1}{26} = \frac{1}{338}.$$

**Proposição 1.20.** *Sejam $A$ e $B$ eventos independentes em um espaço amostral $S$. São também independentes os eventos*
1)$A^c$ *e* $B$.
2)$A^c$ *e* $B^c$.

*Demonstração.* 1) Veja que $A^c \cap B = B \setminus A$ e, portanto, $P(A^c \cap B) = P(B \setminus A)$. Pela Proposição 1.12, temos que $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$, de onde $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$. Como A e B são independentes,

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Logo,

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(B)[1 - P(A)]. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.10, temos que $1 - P(A) = P(A^c)$ e, portanto, $P(A^c \cap B) = P(B) \cdot P(A^c)$. Logo, os eventos $A^c$ e $B$ são independentes.

2) O resultado é imediato: no item $a$, vimos que dados dois eventos independentes, são também independentes um destes eventos e o complementar do outro. Assim, considerando independentes os eventos $A$ e $B^c$, temos que também são independentes os eventos $A^c$ e $B^c$. ■

**Exemplo 1.21.** Utilizando as informações do Exemplo 1.19, determine a probabilidade de que a primeira carta retirada não seja um 8 e a segunda não seja um J vermelho.
*Solução:* Os eventos $A$ e $B$ são independentes e, pela proposição anterior, os eventos $A^c$ e $B^c$ também são independentes. Observe que, para a primeira retirada, 48 casos são desfavoráveis ao evento A e, portanto, $P(A^c) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$. De modo análogo, para a segunda retirada, 50 das cartas não são "J vermelho"e, portanto, $P(B^c) = \frac{50}{52} = \frac{25}{26}$. Logo, a probabilidade de que a primeira carta retirada não seja um 8 **e** a segunda não seja um J vermelho é

$$P(A^c \cap B^c) = \frac{12}{13} \cdot \frac{25}{26} = \frac{150}{169}.$$

**Exemplo 1.22.** Uma pesquisa feita com alunos que cursam o Profmat em uma determinada universidade apresentou o seguinte resultado:

| **Resultado da pesquisa** | | Recebe bolsa? | | Total |
|---|---|---|---|---|
| | | Sim | Não | |
| Atua na docência? | Sim | 7 | 4 | 11 |
| | Não | 0 | 6 | 6 |
| Total | | 7 | 10 | 17 |

Seja o experimento aleatório que consiste em escolher, ao acaso e de modo equiprovável, um dos alunos que participou da pesquisa. Consideremos os eventos A="aluno recebe bolsa"e B="aluno atua na docência". Estes dois eventos são independentes?
*Solução:* Dos 17 alunos participantes da pesquisa, 7 recebem bolsa e,

portanto, a probabilidade que o aluno escolhido receba bolsa é $P(A) = \frac{7}{17}$. Ainda, 11 dos discentes atuam na docência e, portanto, $P(B) = \frac{11}{17}$. O resultado da pesquisa mostra também que 7 dos alunos recebem bolsa *e*, ao mesmo tempo, atuam na docência. Assim, temos que $P(A \cap B) = \frac{7}{17}$. Como $P(A) \cdot P(B) = \frac{7}{17} \cdot \frac{11}{17} = \frac{77}{289} \neq \frac{7}{17}$, temos que os eventos não são independentes.

### 1.1.4 Probabilidade condicional

Quando trabalhamos com probabilidades, muitas vezes nos deparamos com situações onde queremos saber a probabilidade de algo ocorrer quando já dispomos de uma informação parcial sobre o resultado do experimento. Por exemplo, consideremos o lançamento de um dado não viciado. Sejam $S = \{1, 2, \cdots, 6\}$ e os eventos $A = \{1, 2, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$. Veja que $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Esta é a probabilidade de A ocorrer. Imaginemos agora que, uma vez realizado o experimento, sejamos informados que o resultado foi um número par, isto é, que $B$ ocorreu. Com essa informação, nossa opinião sobre a ocorrência de $A$ se modifica, já que $A$ só ocorre caso o resultado tenha sido 2. Neste caso, a probabilidade de A é alterada para $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}$, onde $P(A|B)$ representa "a probabilidade de A, sabendo que ocorreu B". Isso é o que chamamos de probabilidade condicional.

Quando calculamos $P(A|B)$, estamos calculando $P(A)$ com relação ao espaço amostral reduzido B, em lugar do espaço amostral original $S$.

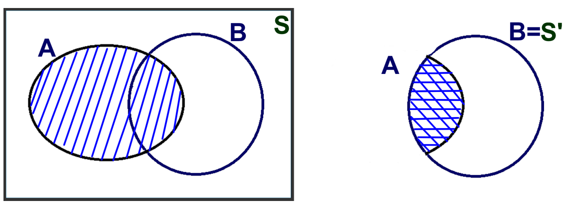



Figura 1: Diagrama de Venn associado à $P(A)$ e $P(A|B)$.

Na primeira parte da Figura 1 observamos o espaço amostral original $S$ e o evento $A$. Quando sabemos da ocorrência do evento $B$, temos uma mudança no nosso espaço amostral, que é reduzido ao próprio $B$. Então, a probabilidade de ocorrer o evento $A$ passa a ser a probabilidade de ocorrer $A$, sabendo que estamos em $B = S^{'}$.

**Definição 1.23.** ***Probabilidade Condicional***
*Sejam $A$ e $B$ eventos de um espaço amostral $S$. A* probabilidade condicional *do evento $A$ dado que ocorreu $B$, denotada por $P(A|B)$, é definida por:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; se \quad P(B) \neq 0$$

*e não está definida para $P(B) = 0$.*

**Observação 1.24.** Esta definição nos fornece uma maneira de encontrar a probabilidade da interseção de eventos, ou seja, de eventos simultâneos ou sucessivos. Veja que o resultado direto da Definição 1.23 é que $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$ (expressão válida também quando $P(A)$ e $P(B)$ forem nulas). Esse resultado é conhecido como *Regra do Produto* e será visto com mais detalhes à frente.

**Observação 1.25.** Quando os eventos são independentes, a ocorrência de um evento não altera o espaço amostral para que o próximo evento ocorra. Então, neste caso, $P(A|B) = P(A)$ (e $P(B|A) = P(B)$).

Veja que a probabilidade do evento $A^c$ dado que o evento B ocorreu, isto é, $P(A^c|B)$, é expressa por $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$. De fato, pela Definição 1.23, temos que $P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)}$. Como $A^c \cap B = B \backslash A$, e utilizando os fatos de que $P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$ (Proposição 1.12) e que $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$, temos que

$$\begin{aligned} P(A^c|B) &= \frac{P(B) - [P(B)P(A|B)]}{P(B)} \\ &= \frac{P(B)[1 - P(A|B)]}{P(B)} = 1 - P(A|B). \end{aligned}$$

**Exemplo 1.26.** Dois dados são lançados simultaneamente, sendo observado o número da face superior de cada um deles. Qual é a probabilidade que o número obtido em uma das faces observadas seja 3, dado que a soma dos números obtidos nas faces dos dois dados foi 7?
*Solução:* O resultado obtido no lançamento de um dado não interfere no resultado do outro e, portanto, os resultados são independentes. Assim, temos um total de $6 \cdot 6 = 36$ pares de resultados possíveis. Seis casos são favoráveis ao evento A= "a soma obtida é 7", ou seja, $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$. Assim, $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Destes, temos dois casos onde uma das faces obtidas é 3. Então, denotando por T o evento "uma das faces obtidas é 3", temos que a probabilidade que a soma obtida seja 7 *e* uma das faces seja 3 é $P(A \cap T) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Portanto, a probabilidade condicional de que uma das faces seja 3, dado que a soma obtida no lançamento dos dois dados foi 7, é

$$P(T|A) = \frac{P(A \cap T)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

**Exemplo 1.27.** Escolhe-se aleatoriamente um número entre 1 e 50. Qual é a probabilidade que ele seja ímpar, sabendo que ele é primo?
*Solução:* Seja S o espaço amostral e denotemos por A o conjunto dos números primos entre 1 e 50. Existem 15 números primos no conjunto A, dos quais 14 são ímpares. Assim, temos que $n(S) = 50$, $n(A) = 15$ e $n(A \cap I) = 14$, onde I representa que o número é ímpar. Temos que $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$ e $P(A \cap I) = \frac{n(A \cap I)}{n(S)} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$. Assim, dado que o número escolhido é primo, a probabilidade que ele seja ímpar é

$$P(I|A) = \frac{P(A \cap I)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{3}{10}} = \frac{70}{75} = \frac{14}{15}.$$

Em geral, o cálculo das probabilidades condicionadas pode ser facilitado com a utilização de um espaço amostral reduzido, que contém apenas os eventos simples relacionados a um evento que sabemos ter ocorrido. Por exemplo, no caso anterior, sabemos que o número escolhido era primo, ou seja, que era um dos 15 casos favoráveis ao evento $A$. Como 14 deles atendem deles ao evento $I$, temos que $P(I|A) = \frac{14}{15}$.

**Exemplo 1.28.** Um teste sanguíneo desenvolvido por uma empresa farmacêutica detecta se uma pessoa está infectada com uma determinada doença com 99% de precisão. Se a pessoa não estiver doente, o exame tem uma probabilidade de 2% de acusar a doença, o chamado "falso positivo". Vamos assumir que a probabilidade de uma pessoa estar doente seja de 5%.
a) Nestas condições, qual é a probabilidade que o exame de uma pessoa sadia seja um falso positivo?
b) Qual a probabilidade de que a pessoa esteja doente, mas o exame dê negativo?
*Solução:* a) Seja D o evento "a pessoa está doente", com $P(D) = 0,05$ e $P(D^c) = 0,95$. Ainda, seja o evento E = "o exame acusa a doença" e $E^c$ o seu complementar. Pelo enunciado, a probabilidade de que

o exame detecte a doença, dado que uma pessoa não esteja doente, é $P(E|D^c) = 0,02$ e, portanto, $P(E^c|D^c) = 0,98$. Ainda, a probabilidade de que o exame detecte a infecção em uma pessoa doente é $P(E|D) = 0,99$ e, portanto, $P(E^c|D) = 0,01$.
Queremos saber qual é a probabilidade de um falso positivo, isto é, qual a probabilidade da pessoa não estar doente *e* o exame acusar a doença. Pela Probabilidade Condicional, temos que $P(E|D^c) = \frac{P(D^c \cap E)}{P(D^c)}$ e, portanto, a probabilidade desejada pode ser obtida pela probabilidade da pessoa não estar doente, multiplicada pela probabilidade do exame acusar a doença dado que a pessoa não esteja doente, isto é,

$$P(D^c \cap E) = P(E|D^c)P(D^c) = 0,02 \cdot 0,95 = 0,019.$$

b) Temos que $P(E^c|D) = \frac{P(E^c \cap D)}{P(D)}$ e, portanto, a probabilidade de que o exame não acuse a doença *e* a pessoa esteja doente é dada pela probabilidade da pessoa estar doente, multiplicada pela probabilidade do exame não acusar a doença dado que a pessoa esteja doente, isto é,

$$P(E^c \cap D) = P(E^c|D)P(D) = 0,01 \cdot 0,05 = 0,0005.$$

Uma forma conveniente e prática para se representar e encontrar as probabilidades em geral é através da "árvore de probabilidades", nas quais representamos as probabilidades das partes e probabilidades condicionais em ramos, conforme a Figura 2.

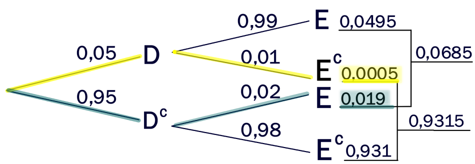



Figura 2: Árvore de probabilidades para o Exemplo 1.28.

Nesse esquema, as probabilidades conjuntas (das intersecções) são obtidas percorrendo-se os ramos e multiplicando-se as probabilidades. Destacamos em azul a probabilidade da primeira parte e, em amarelo, a probabilidade da segunda parte do exemplo anterior. O número $0,0685$ representa a probabilidade do exame acusar a presença da doença, enquanto o número $0,9315$ representa a probabilidade que a doença não seja registrada pelo exame, em ambos os casos considerando a soma das probabilidades do exame detectar a doença ou não, tanto em pessoas sadias quanto nas realmente infectadas.

### 1.1.5 Regra Geral do Produto

No exemplo anterior utilizamos o resultado imediato da Definição 1.23, calculando a probabilidade da interseção de eventos. Esse resultado pode ser generalizado de modo a exprimir a probabilidade da interseção de eventos aleatórios que têm caráter sequencial, isto é, que são executados em etapas sucessivas, por meio das probabilidades condicionais sucessivas.

**Teorema 1.29.** ***Regra Geral do Produto***
*Considere um conjunto finito de eventos* $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$*, tais que os eventos* $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{i-1}$*, com* $i = \{1, 2, \cdots, n\}$*, tenham probabilidades não nulas. Então*

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

*Demonstração.* Por hipótese, todos os condicionamentos do lado direito são feitos com probabilidade positiva, já que eles contém interseções de eventos com probabilidades não nulas.
Vamos provar por indução sobre $n$. Para $n = 1$, o resultado é trivial: $P(A_1) = P(A_1)$. Agora, suponhamos que o resultado seja válido para algum $k \in \mathbb{N}^*$, ou seja,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1}). \tag{1.4}$$

Vamos verificar se a validade da proposição para $k$ implica na validade para $k + 1$. Temos que

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1}) = P[(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) \cap A_{k+1}]$$

e, utilizando o resultado direto da Definição 1.23 aos eventos $A_{k+1}$ e $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k$, temos que

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1}) \quad = \quad P(A_1 \cap \cdots \cap A_k)P(A_{k+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_k).$$

Finalmente, substituindo nesta última igualdade o resultado da expressão 1.4, obtemos que

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1}) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_k|A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}) \cdot P(A_{k+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$$

e, portanto, pelo Princípio da Indução Finita, a proposição está demonstrada. ∎

Em particular, se os eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forem dois a dois independentes, então $P(\cap_{i=1}^n A_i) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$.

**Exemplo 1.30.** Qual é a probabilidade de conseguirmos retirar consecutivamente quatro ases de um baralho de 52 cartas?
*Solução:* Temos no baralho um total de quatro ases (A) e estamos interessados na probabilidade de que os quatro sejam retirados sucessivamente (interseção). Logo, a probabilidade desejada é

$$\begin{aligned} P(\cap_{i=1}^4 A_i) &= P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot P(A_4|A_1\cap A_2\cap A_3) \\ &= \frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}\cdot\frac{2}{50}\cdot\frac{1}{49} = \frac{1}{270725}, \end{aligned}$$

onde $A_i$ representa que um Ás foi retirado na $i$-ésima extração.

**Exemplo 1.31.** Uma urna contém 7 bolas azuis e 5 bolas brancas. Extraem-se sequencialmente 3 bolas dessa urna, sem reposição. Qual é a probabilidade de que as 3 bolas sejam da mesma cor?
*Solução:* Seja E o evento "as três bolas retiradas são da mesma cor". Observe que a probabilidade de ocorrência deste evento é a soma de duas probabilidades: a de que as três bolas retiradas sejam azuis e a de que as três bolas retiradas sejam brancas. Assim, podemos dizer que P(E)=P(A)+P(B), onde P(A) é a probabilidade de que "as três bolas retiradas sejam azuis"e P(B) é a probabilidade de que "as três bolas retiradas sejam brancas".
Em ambos os eventos A e B temos casos de probabilidades condicionadas, já que, por exemplo, queremos saber a probabilidade da primeira bola ser da cor azul ***e*** a segunda bola ser azul dado que a primeira foi azul ***e*** a terceira bola for azul dado que a primeira e a segunda bolas foram azuis.
Assim, utilizando a Regra Geral do Produto, temos que a probabilidade de que as três bolas retiradas sequencialmente da urna sejam azuis é

$$\begin{aligned} P(A) = P(\cap_{i=1}^3 A_i) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2) \\ &= \frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10} = \frac{210}{1320} = \frac{7}{44} \end{aligned}$$

e a probabilidade de que as três bolas retiradas sequencialmente da urna sejam brancas é

$$\begin{aligned} P(B) = P(\cap_{i=1}^3 B_i) &= P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_1\cap B_2) \\ &= \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} = \frac{60}{1320} = \frac{1}{22}, \end{aligned}$$

onde $A_i$ e $B_i$ representam que a bola retirada na $i$-ésima extração tem a cor azul ou branca, respectivamente. Assim, a probabilidade de que as três bolas retiradas sejam da mesma cor é

$$P(E) = P(A) + P(B) = \frac{7}{44} + \frac{1}{22} = \frac{9}{44}.$$

### 1.1.6 Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Outros dois importantes resultados da Teoria da Probabilidade são o Teorema da Probabilidade Total e o Teorema de Bayes. Eles são obtidos da definição de probabilidade condicional e das propriedades vistas para a probabilidade.

**Definição 1.32.** ***Partição do espaço amostral***
Dizemos que uma sequência de eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forma uma *partição do espaço amostral* $S$ se os eventos $A_i$ são disjuntos dois a dois, isto é, se $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j$, e sua união é o próprio espaço amostral $S$, isto é, $\cup_{i=1}^{n} A_i = S$.

A Figura 3 representa uma partição do espaço amostral $S$.

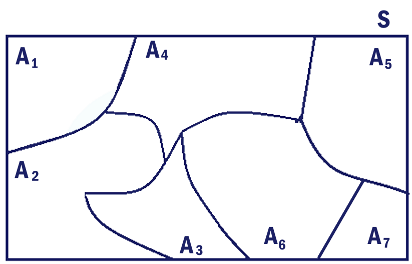



Figura 3: O espaço amostral $S$ particionado pelos eventos $A_1, \cdots, A_7$.

**Teorema 1.33.** ***Teorema da Probabilidade Total***
*Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ eventos que formam uma partição do espaço amostral $S$ e suponha que $P(A_i) > 0 \ \forall \ i \in \{1, \cdots, n\}$. Então, para qualquer evento $B$, temos que*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i).$$

*Demonstração.* A sequência $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forma uma partição de $S$, isto é, $S = \cup_{i=1}^{n} A_i$. Assim, como os eventos $A_i$ são disjuntos dois a dois, temos que $B \cap A_i$ também são disjuntos dois a dois e, portanto,

$$B = (A_1 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B).$$

O fato de alguns desses termos serem o conjunto vazio (por exemplo, $B \cap A_2 = \varnothing$) não invalida o resultado, uma vez que $A \cup \varnothing = A$. Pelo Axioma 3 da Definição 1.7 temos que

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B),$$

ou seja,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B).$$

Reescrevendo cada uma das interseções $P(A_i \cap B)$ como $P(B|A_i) \cdot P(A_i)$ (da Definição 1.23) e utilizando a Regra do Produto, temos que

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \cdots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$$

e, portanto, $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$. ■

Esse teorema nos mostra como calcular a probabilidade de um evento que pode ocorrer sob várias circunstâncias. Neste caso, quando as circunstâncias formam uma partição do espaço amostral, a probabilidade de um evento $B$ pode ser encontrada se tivermos informações sobre a probabilidade de cada um dos eventos que particiona o espaço amostral e as probabilidades condicionais do evento $B$ em cada uma dessas partições. A Figura 4 ilustra o Teorema da Probabilidade Total.

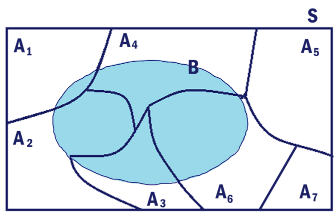



Figura 4: Uma partição do espaço amostral $S$ e o evento $B \subset S$.

**Exemplo 1.34.** Uma caixa contém quatro moedas. As moedas 1 e 2 são honestas, a moeda 3 possui duas caras e a moeda 4 é defeituosa, de modo que a probabilidade de cara é duas vezes maior que a de coroa. Uma moeda é escolhida ao acaso e lançada. Qual é a probabilidade de que a face obtida seja cara?
*Solução:* Denotemos K= "cara", C="coroa" e por $M_i$, com $1 \leq i \leq 4$, a moeda escolhida. Temos que

$$P(K|M_1) = \frac{1}{2}, P(K|M_2) = \frac{1}{2}, P(K|M_3) = 1 \text{ e } P(K|M_4) = \frac{2}{3}.$$

Ainda, escolhendo-se uma moeda ao acaso, a probabilidade de que cada uma das moedas seja a escolhida é a mesma, ou seja,

$$P(M_1) = P(M_2) = P(M_3) = P(M_4) = \frac{1}{4}.$$

Veja que os eventos $M_1, M_2, M_3$ e $M_4$ são dois a dois disjuntos, cuja reunião é $S$. Assim, pelo Teorema da Probabilidade Total, a probabilidade de que a face obtida seja cara é de

$$\begin{aligned} P(K) &= P(M_1)P(K|M_1)+P(M_2)P(K|M_2)+P(M_3)P(K|M_3)+P(M_4)P(K|M_4) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.35.** Um piloto de Fórmula 1 tem 50% de probabilidade de vencer uma determinada corrida, caso esta seja realizada sob chuva, sendo essa probabilidade reduzida para 20% caso não chova. Se momentos antes da corrida, o serviço de meteorologia estimar que a probabilidade de chuva durante a corrida é de 35%, qual é a probabilidade que o piloto tem vencer a corrida?
*Solução:* Definindo os eventos V="piloto vence a corrida", C="chove durante a corrida"e $\text{C}^c$="não chove durante a corrida", temos que

$$P(\text{C}) = 0,35 \quad \text{e} \quad P(\text{C}^c) = 0,65.$$

Como o piloto pode vencer a corrida chovendo ou mesmo se não estiver chovendo, temos que

$$P(V|\text{C}) = 0,5 \quad \text{e} \quad P(V|\text{C}^c) = 0,2.$$

Os eventos $C$ e $C^c$ são mutuamente exclusivos e particionam o espaço amostral $S$. Assim, pelo Teorema da Probabilidade Total, temos que a probabilidade de vitória do piloto é

$$\begin{aligned} P(V) &= P(\mathrm{C})P(V|\mathrm{C}) + P(\mathrm{C}^c)P(V|\mathrm{C}^c) \\ &= 0,35 \cdot 0,5 + 0,65 \cdot 0,2 = 0,175 + 0,13 = 0,305 \text{ ou } 30,5\%. \end{aligned}$$

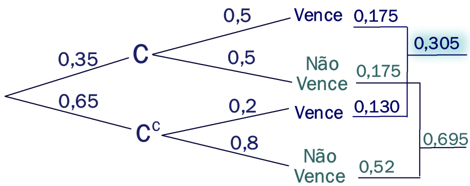



Figura 5: Árvore de probabilidades para o Exemplo 1.35.

E se desejássemos saber qual a probabilidade de que tenha chovido durante a prova, sabendo que o piloto venceu a corrida? Ao contrário do que possamos intuitivamente supor, não podemos utilizar a informação inicial de que a probabilidade de chuva durante a prova era de 35%. Essa informação, a *probabilidade a priori*, era útil quando não tínhamos nenhuma informação adicional sobre o evento. Contudo, após sabermos que o piloto venceu a corrida, nosso espaço amostral foi modificado e, assim, podemos "revisar" a chance de ocorrência deste evento. Essa nova probabilidade, a *probabilidade a posteriori*, foi modificada pela nova informação recebida.

A relação de uma probabilidade condicional com a sua inversa, ou seja, a probabilidade de uma hipótese dada a observação de uma evidência e a probabilidade da evidência dada pela hipótese, pode ser encontrada através do *Teorema de Bayes.* A dedução deste teorema é relativamente simples, mas trouxe significativos avanços na Teoria da Probabilidade, sendo responsável pelo desenvolvimento de uma linha de fundamentos da estatística que hoje é conhecida como Bayesiana.

**Teorema 1.36.** ***Teorema de Bayes***
*Sejam $A_1, \cdots, A_n$ eventos não nulos com probabilidade positiva, dois a dois disjuntos, que formam uma partição do espaço amostral $S$ e seja $B$ um evento qualquer, com P(B)$\neq 0$. Então, para cada $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, temos que*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}.$$

*Demonstração.* Utilizando a definição de probabilidade condicional de ocorrência de um evento $A_i$ dado que ocorreu um evento $B$ (com $P(B) > 0$, temos que

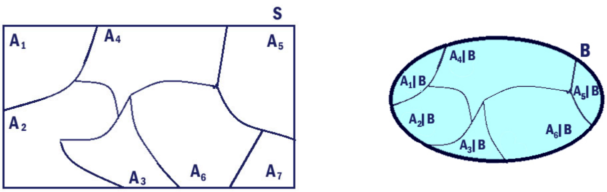
$$P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i) \quad \text{e} \quad P(A_i \cap B) = P(B)P(A_i|B),$$

ou seja,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)},$$

o que nos garante a primeira parte da igualdade. A segunda igualdade segue da aplicação o Teorema 1.33 para $P(B)$, da onde

$$\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}. \qquad \blacksquare$$




(a) Espaço amostral original (b) Espaço amostral após observar $B$

Figura 6: Probabilidades a *priori* e a *posteriori* dos eventos $A_i$.

Na parte (a) da Figura 6 temos uma partição de $S$, onde cada $A_i$ possui uma probabilidade *a priori*. Após observar a ocorrência de um evento $B$, temos uma atualização do espaço amostral de maneira que as probabilidades de ocorrência de cada partição $A_i$ se alteram, como pode ser visto na parte (b) da Figura 6. Perceba também que quanto maior a interseção de $B$ com um determinado $A_i$, maior será a probabilidade condicional desse $A_i$ ocorrer.

**Exemplo 1.37.** Utilizando as informações do Exemplo 1.35, determine qual a probabilidade de que tenha chovido durante a prova, sabendo que o piloto venceu a corrida.

*Solução:* O piloto venceu a corrida e queremos saber qual a probabilidade de que tenha chovido durante prova, ou seja, $P(\mathrm{C}|V)$. Vimos que

$$P(\text{C})P(V|\text{C}) = 0,35 \cdot 0,5 = 0,175 \quad \text{e}$$

$$P(\text{C}^c)P(V|\text{C}^c) = 0,65 \cdot 0,2 = 0,13.$$

Assim, utilizando o Teorema de Bayes, temos que

$$\begin{aligned} P(\text{C}|V) &= \frac{P(C)P(V|C)}{P(V)} \\ &= \frac{P(\text{C})P(V|\text{C})}{P(\text{C})P(V|\text{C}) + P(\text{C}^c)P(V|\text{C}^c)} \\ &= \frac{0,175}{0,175+0,13} = \frac{0,175}{0,305} \approx 57,37\%. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.38.** Utilizando as informações do Exemplo 1.34 e sabendo que o resultado do lançamento foi cara, determine a probabilidade de que a moeda lançada tenha sido a $M_3$.
*Solução:* Sabemos que o resultado do lançamento foi cara e desejamos saber qual a probabilidade de que a moeda lançada tenha sido a $M_3$, ou seja, $P(M_3|K)$. Vimos que

$$P(M_3)P(K|M_3) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad P(K) = \frac{2}{3}.$$

Assim, utilizando o Teorema de Bayes, temos que

$$P(M_3|K) = \frac{P(M_3)P(K|M_3)}{P(K)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{8}.$$

**Exemplo 1.39.** Uma empresa do setor automobilístico é responsável pela produção e distribuição de uma determinada peça, que é produzida por três máquinas distintas. A máquina A, a mais antiga, produz 25% das peças, e as máquinas B e C, mais novas, produzem respectivamente 35% e 40% das peças. Com base nas informações repassadas pelos fabricantes e pelo histórico registrado pelos operadores das máquinas, estima-se que a proporção de peças defeituosas produzidas pelas máquinas A, B e C sejam, respectivamente, de 5%, 4% e 3%. Todas as peças produzidas seguem para o setor de armazenamento, onde são embaladas, sem distinção da máquina que as produziu, para serem posteriormente vendidas.
(a) Qual é a probabilidade que uma peça colocada a venda seja defeituosa?
(b) Se um cliente adquire uma peça defeituosa, qual é a probabilidade

que ela tenha sido produzida pela máquina A? E pela máquina B? E pela máquina C?
*Solução:* (a) Pelos dados do enunciado, podemos estimar as probabilidades *a priori* da produção das peças por cada uma das máquinas:

$$P(A) = 0,25, \quad P(B) = 0,35 \quad \text{e} \quad P(C) = 0,40.$$

Ainda, sabemos a proporção de peças defeituosas (que denotaremos por $D$) produzidas por cada uma das máquinas. Essa proporção se traduz na probabilidade condicional, ou seja,

$$P(D|A) = 0,05, \;\; P(D|B) = 0,04 \;\; \text{e} \;\; P(D|C) = 0,03.$$

Veja que A, B e C produzem todas as peças desse modelo pela empresa, ou seja, formam uma partição do espaço amostral. Assim, pelo Teorema da Probabilidade Total, temos que a probabilidade de que uma peça produzida seja defeituosa é a soma das probabilidades de que ela seja produzida pela máquina A, ou pela B, ou pela C, ou seja,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) \cup P(D \cap B) \cup P(D \cap C) \\ &= P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) \\ &= 0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,40 \cdot 0,03 \\ &= 0,0125 + 0,014 + 0,012 = 0,0385. \end{aligned}$$

(b) Agora, dado que uma peça é defeituosa, queremos saber qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida por cada uma das máquinas. Para isso, utilizamos o Teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D|A)}{P(D)} = \frac{0,0125}{0,0385} \approx 0,3247, \\ P(B|D) &= \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D|B)}{P(D)} = \frac{0,014}{0,0385} \approx 0,3636, \text{e} \\ P(C|D) &= \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D|C)}{P(D)} = \frac{0,012}{0,0385} \approx 0,3117. \end{aligned}$$

Observe que, inicialmente, poderíamos ser levados a crer que se escolhêssemos uma peça defeituosa ao acaso, haveria maior probabilidade de que ela tivesse sido produzida pela máquina A, já que 5% das peças produzidas por esta máquina são defeituosas, o maior percentual dentre os três equipamentos. Contudo, a análise pela condicionalidade inversa nos mostrou que a máquina que proporcionalmente apresenta a maior probabilidade de produzir uma peça defeituosa é a máquina B. Tal resultado poderia influenciar diretamente na tomada de decisão caso a empresa desejasse substituir uma das máquinas, objetivando maximizar seu lucro e diminuir a probabilidade de que peças defeituosas fossem produzidas.

## 1.2 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Em alguns experimentos aleatórios os resultados obtidos são descritos numericamente, como no Exemplo 1.1, onde os valores obtidos pelo lançamento de um dado são números inteiros de 1 a 6 e no Exemplo 1.2, que quantificava em decibéis o nível de ruído emitido por uma aeronave. Contudo, em grande parte dos casos, os elementos do espaço amostral não são expressos por números. No Exemplo 1.3, que consistia em retirar três pilhas de uma caixa e verificar se cada uma delas era nova (N) ou usada (U), obtivemos o seguinte espaço amostral: $S = \{(NNN), (NNU), (NUN), (NUU), (UNN), (UNU), (UUN), (UUU)\}$. Ao invés de listarmos todas essas possibilidades, poderíamos relacionar os pontos desse espaço amostral com um subconjunto de $\mathbb{R}$, através de uma função que associasse os resultados possíveis das retiradas com, por exemplo, o número de pilhas usadas obtidas. Este processo de relacionar valores reais com resultados de experimentos é feito através da noção de *variável aleatória*.

Dado um experimento e seu respectivo espaço amostral $S$, uma variável aleatória associa cada um dos resultados de $S$ a um número real. Formalmente, temos a seguinte definição:

**Definição 1.40.** ***(Variável aleatória)***
*Uma variável aleatória, ou simplesmente v.a., é qualquer função $X$ definida em um espaço amostral $S$, que associa os eventos simples do espaço amostral a um número real $\mathbb{R}$.*

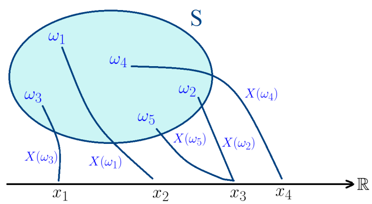



Figura 7: A v.a. $X : S \to \mathbb{R}$.

O resultado de uma variável aleatória é o elemento da imagem de $X$ gerado pela observação do resultado do experimento. Por exemplo, na Figura 7, se o resultado do experimento foi $\omega_1 \in S$, então o resultado da v.a. é $x_2 = X(\omega_1)$. Assim, a *imagem de uma v.a.* pode ser representada pelo conjunto

$$R(X) = \{x \in \mathbb{R} : x = X(\omega), \omega \in S\}.$$

As variáveis aleatórias são classificadas em discretas e contínuas. Uma v.a. discreta é aquela cuja imagem admite um número finito de valores ou que possui uma quantidade enumerável de valores, como por exemplo a quantidade de dias em um determinado mês do ano, ou o próprio conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$. Já a v.a. contínua é aquela que assume valores em intervalos de números reais, mensurados em uma escala contínua, como por exemplo a altura, em metros, de uma pessoa, ou os valores pertencentes ao intervalo $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.
Neste trabalho desenvolveremos apenas o estudo das variáveis aleatórias discretas.

**Exemplo 1.41.** Consideremos o Exemplo 1.15, em que uma moeda é lançada duas vezes. Seja $X$ uma função definida no espaço amostral que é igual ao número de caras (K) obtidas nos dois lançamentos. Veja que o espaço amostral é $S = \{KK, CK, KC, CC\}$. Então, a correspondência entre os pontos do espaço amostral e os valores da variável X pode ser expressa da seguinte maneira: $X(KK) = 2, X(CK) = 1, X(CK) = 1, X(CC) = 0$. Neste exemplo, temos que $R(X) = \{0, 1, 2\}$.

**Exemplo 1.42.** No Exemplo 1.3, seja $X$ a função que representa a quantidade de pilhas usadas retiradas de cada um dos eventos do espaço amostral. Temos, neste caso,

| Eventos | $X$ |
|---|---|
| NNN | 0 |
| NNU, NUN, UNN | 1 |
| NUU, UNU, UUN | 2 |
| UUU | 3 |

Neste exemplo, $R(X) = \{0, 1, 2, 3\}$.

**Exemplo 1.43.** Uma pessoa lança uma moeda honesta até obter a primeira cara ou até fazer 3 lançamentos, o que ocorrer primeiro. Assim, temos que $S = \{K, CK, CCK, CCC\}$. Denote por $X$ o número de lançamentos realizados. $X$ é uma variável aleatória tal que $X(K) = 1$, $X(CK) = 2$, $X(CCK) = 3$ e $X(CCC) = 3$.

### 1.2.1 Distribuição de Probabilidade de v.a. Discretas

Para conhecermos uma variável aleatória discreta, além de conhecermos seus valores, é preciso que conheçamos também as probabilidades associadas a cada valor da v.a. $X$. A distribuição de probabilidade associa uma probabilidade a cada resultado numérico de um experimento, ou seja, dá a probabilidade de cada valor de uma variável aleatória.

**Definição 1.44.** ***(Distribuição de probabilidade de uma v.a. discreta)***
*Se $X$ é uma v.a. discreta que assume valores distintos $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, então a função de distribuição de probabilidade (fdp) de $X$, denotada por $p_X$, é uma função definida por*

$$p_X(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & \textit{se } x = x_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

A notação $X = x_i$ representa o conjunto $\{\omega \in S : X(\omega) = x_i\}$, onde $\omega$ é um evento simples do espaço amostral $S$. Ou seja,

$$P(X = x_i) = \sum_{\omega \in S : X(\omega) = x_i} P(\omega).$$

Por exemplo, no Exemplo 1.42, temos que a probabilidade que a v.a. $X$ assuma o valor 1 é $\frac{3}{8}$, já que uma pilha usada pode ser encontrada nos eventos simples equiprováveis NNU, NUN e UNN (cada um deles com probabilidade $\frac{1}{8}$), ou seja,

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \sum_{\omega \in S : X(\omega) = 1} P(\omega) \\ &= P(NNU) + P(NUN) + P(UNN) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Outros nomes comumente dados à $p_X(x)$ são função densidade, função massa de probabilidade e função de frequência discreta. A notação $p_X(x)$ também é usada para diferenciar quando se trata de uma variável aleatória discreta, já que usualmente usa-se a notação $f_X(x)$ para as v.a. contínuas.

As duas regras a seguir se aplicam a qualquer distribuição de probabilidades:

a) $0 \leq p_X(x) \leq 1, \quad \forall \quad x \in \mathbb{R};$

b) $\sum\limits_i p_X(x_i) = 1.$

Assim, qualquer função que satisfaça as regras do item anterior será uma distribuição de probabilidade de uma v.a..

**Exemplo 1.45.** Do lançamento de uma moeda honesta, seja a v.a. $X$ uma função definida no espaço amostral que é igual ao número de caras (K) obtidas. Assim, temos que $X(K) = 1$, caso o resultado seja cara, e $X(C) = 0$, caso o resultado seja coroa. Ainda, como a probabilidade de obter cara ou coroa é a mesma, temos que

$$p_X(0) = P(X = 0) = P(\{\omega \in S : X(\omega) = 0\}) = P(\{C\}) = 0,5 \text{ e}$$

$$p_X(1) = P(X = 1) = P(\{\omega \in S : X(\omega) = 1\}) = P(\{K\}) = 0,5.$$

Por simplicidade, podemos escrever simplesmente $P(X = 0) = 0,5$.

**Exemplo 1.46.** Vamos determinar a probabilidade da variável aleatória $X$ do Exemplo 1.41. Para cada valor de $X$, que representa a quantidade de caras (K) obtidas em dois lançamentos de uma moeda, agrupamos os eventos do espaço amostral que possuem $X$ igual a esse valor.

| X | Eventos | Probabilidade |
|---|---|---|
| 0 | CC | 1/4 |
| 1 | KC | 1/4 |
| 1 | CK | 1/4 |
| 2 | KK | 1/4 |

Assim, os valores das v.a, pela tabela acima, são:

$$\begin{aligned} p_X(0) = P(X = 0) &= P(CC) = 1/4 \\ p_X(1) = P(X = 1) &= P(CK) + P(KC) = 1/2 \\ p_X(2) = P(X = 2) &= P(KK) = 1/4. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.47.** Considere o experimento que consiste em jogar dois dados equilibrados e observar a face voltada para cima de cada um deles. Sejam $i$ e $j$ a face de cada um dos dados, respectivamente. O espaço amostral será dado por $S = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$. Vamos definir a variável aleatória que representa a soma obtida pelas faces observadas: $x = X((i,j)) = i + j$, para $(i,j) \in S$. Considerando que são equiprováveis os eventos $\omega = (i,j)$ de $S$, podemos estabelecer a seguinte correspondência entre os resultados de $X$, os eventos de $S$ e as respectivas probabilidades:

| $X(\omega) = x$ | $B_x = \{\omega : X(\omega) = x, \omega \in S\}$ | $p_X(x) = P(B_x)$ |
|---|---|---|
| 2 | $\{(1,1)\}$ | 1/36 |
| 3 | $\{(1,2),(2,1)\}$ | 2/36 |
| 4 | $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ | 3/36 |
| 5 | $\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ | 4/36 |
| 6 | $\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$ | 5/36 |
| 7 | $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ | 6/36 |
| 8 | $\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$ | 5/36 |
| 9 | $\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$ | 4/36 |
| 10 | $\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$ | 3/36 |
| 11 | $\{(5,6),(6,5)\}$ | 2/36 |
| 12 | $\{(6,6)\}$ | 1/36 |

A imagem da v.a. $X$ é $R(X) = \{2,3,\ldots,12\}$, que representa a coleção de imagens dos pontos $(i,j) \in S$ pela função $x = X((i,j)) = i + j$, que representa a soma das faces observadas nos dois dados.

As probabilidades dos possíveis resultados da v.a. $X$ são dados por $p_X(x) = P(B_x)$, onde $B_x$ é a coleção de imagens inversas de $x$, ou seja, os pontos $\omega_i$ do espaço amostral tais que $X(\omega_i) = x$.

Se desejamos, por exemplo, obter a probabilidade de um evento $x \in A = \{5, 11\}$, então

$$P_X(A) = \sum_{x \in A} p_X(x) = p_X(5) + p_X(11) = \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{6}.$$

Se $A = \{12\}$, então teremos $P_X(A) = \sum_{x\in A} p_X(x) = p_X(12) = \frac{1}{36}$.

Outro conceito relevante é o de função de distribuição acumulada. A função acumulada de $X$ é a função que calcula a probabilidade de $X$ assumir valores menores ou iguais a um valor específico $x$. Para tanto, ela avalia os eventos $\omega$ do espaço amostral tais que $X(\omega)$ é menor ou igual que $x$.

**Definição 1.48.** ***(Função de distribuição acumulada de uma v.a. discreta)***
*A função de distribuição acumulada (fda) de uma variável aleatória $X$, denotada por $F_X$, é uma função com domínio em $\mathbb{R}$ e contradomínio no intervalo fechado $[0,1]$ que satisfaz, para todo número real $x$,*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}).$$

O conhecimento da função de distribuição acumulada é suficiente para entendermos o comportamento de uma variável aleatória. De fato, se $x_1, x_2, \cdots, x_n$ forem as imagens da v.a. $X$, ordenadas de forma crescente, basta tomar $p_X(x_1) = F_X(x_1)$ e $p_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}), \forall i \geq 2$. Por simplicidade, escreveremos $F$ ao invés de $F_X$.

Mesmo que a variável aleatória assuma valores apenas num subconjunto dos reais, a função de distribuição acumulada é definida em toda a reta. Ela é chamada de função de distribuição acumulada, pois acumula as probabilidades dos valores inferiores ou iguais a x.

**Exemplo 1.49.** Uma moeda honesta é lançada três vezes. Vamos encontrar a função de distribuição acumulada de $X$: "número de caras obtidas nos três lançamentos".
*Solução:* O espaço amostral associado a este evento é

$$S = \{CCC, CCK, CKC, KCC, CKK, KKC, KCK, KKK\}.$$

Os valores que $X$ pode assumir são $0, 1, 2$ e $3$. Temos que

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(\{CCC\}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\ P(X=1) &= P(\{KCC\}) + P(\{CKC\}) + P(\{CCK\}) = \frac{3}{8} \\ P(X=2) &= P(\{KKC\}) + P(\{KCK\}) + P(\{KKC\}) = \frac{3}{8} \\ P(X=3) &= P(\{KKK\}) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Portanto,
se $x < 0 \Rightarrow P(X \leq x) = 0$,

se $0 \leq x < 1 \Rightarrow P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$, se $1 \leq x < 2 \Rightarrow P(X \leq x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$,

se $2 \leq x < 3 \Rightarrow P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ e

se $x \geq 3, \Rightarrow P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$.

Desta forma, temos que a função de distribuição acumulada de $X$ é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0; \\ 1/8, \text{ se } 0 \leq x < 1; \\ 1/2, \text{ se } 1 \leq x < 2; \\ 7/8, \text{ se } 2 \leq x < 3; \\ 1, \text{ se } x \geq 3. \end{cases}$$

**Exemplo 1.50.** Seja a v.a. discreta $X$, com distribuição de probabilidade dada por:

| X | p(x) | F(x) |
|---|---|---|
| 0 | $0,15$ | $0,15$ |
| 1 | $0,28$ | $0,43$ |
| 2 | $0,26$ | $0,69$ |
| 3 | $0,18$ | $0,87$ |
| 4 | $0,08$ | $0,95$ |
| 5 | $0,05$ | $1,00$ |

Assim, temos, por exemplo:

a) $p_X(3) = P(X = 3) = 0,18$;

b) $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,69$;

c) $P(1 \leq X < 5) = \sum_{x=1}^{4} P(X = x) = 0,28 + 0,26 + 0,18 + 0,08 = 0,80$;

d) $P(2 \leq X \leq 4) = F(4) - F(1) = 0,52$.

### 1.2.2 Esperança Matemática

Outro conceito relevante na Teoria da Probabilidade é o de Esperança Matemática. Assim como as raízes da Teoria da Probabilidade, o conceito de Esperança Matemática foi historicamente desenvolvido com o objetivo de tentar maximizar as possibilidades de ganhos em jogos. Ele traz, numa perspectiva a longo prazo, qual é a expectativa média geral esperada de um experimento aleatório.

**Definição 1.51.** ***(Esperança Matemática)***

*Seja $X$ uma v.a. discreta que assume os valores $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ e seja $p(x)$ a função de probabilidade de $X$, isto é, $p(x_i) = P(X = x_i)$. A* Esperança Matemática *de $X$, denotada por $E(X)$, é definida por*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i).$$

Este número também é denominado de valor médio, valor esperado ou expectância de $X$, e indica o valor médio que esperaríamos ter se pudéssemos repetir os experimentos infinitamente. O valor em si pode não ser esperado no sentido geral, podendo mesmo ser improvável ou impossível.

**Exemplo 1.52.** Do Exemplo 1.49, temos que o espaço amostral associado ao evento "número de caras obtidas após três lançamentos de uma moeda"é $S = \{KKK, CKK, KCK, KKC, CCK, CKC, KCC, CCC\}$. Temos que $R(X) = \{0, 1, 2, 3\}$ e as probabilidades associadas à função $X$ são $P(X = 0) = \frac{1}{8}, P(X = 1) = \frac{3}{8}, P(X = 2) = \frac{3}{8}$ e $P(X = 3) = \frac{1}{8}$. A Esperança Matemática associada a esse evento é

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p(x_i) = \sum_{x \in R(X)} x \cdot P(X = x) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} \\ &= 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Veja que $P(X = \frac{3}{2}) = 0$, já que é impossível obtermos $1,5$ caras após três lançamentos de uma moeda. O valor encontrado representa o valor médio que esperaríamos obter caso essa experiência fosse repetida muitas vezes.

**Exemplo 1.53.** As probabilidades associadas a v.a. $X$ no Exemplo 1.50 são $P(0) = 0,15, \quad P(1) = 0,28, \quad P(2) = 0,26, \quad P(3) = 0,18, \quad P(4) = 0,08$ e $P(5) = 0,05$. Assim, a Esperança Matemática associada a esse evento é

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,28 + 2 \cdot 0,26 + 3 \cdot 0,18 + 4 \cdot 0,08 + 5 \cdot 0,05 \\ &= 0 + 0,28 + 0,52 + 0,54 + 0,32 + 0,25 = 1,91. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.54.** Em um jogo com três moedas, o participante ganha R\$5,00 se ocorrerem três caras ou três coroas e perde R\$3,00 se apa-

recerem uma ou duas caras. Qual é o ganho médio esperado de um participante?
*Solução:* O espaço amostral associado a este evento é

$$S = \{KKK, CKK, KCK, KKC, CCK, CKC, KCC, CCC\}.$$

Seja $Y : S \to \mathbb{R}$, definida por

$$Y = \begin{cases} \ \ 5, & \text{caso o lançamento resulte em KKK ou CCC;} \\ -3, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Veja que

$$\begin{aligned} P(Y=5) &= P(\text{KKK}) + P(\text{CCC}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \text{ e} \\ P(Y=-3) &= P[(Y=5)^c] = 1 - P(Y=5) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Então, o ganho médio esperado pelo participante é a Esperança da v.a. $Y$, ou seja,

$$E(Y) = \sum_{Y_i \in \{5,-3\}} Y_i \cdot P(Y_i) = 5 \cdot \frac{1}{4} + (-3) \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{4} - \frac{9}{4} = -1.$$

Isso significa que, a longo prazo, o jogador pode esperar uma perda média de R$ 1,00 para cada partida disputada.

Observe que a v.a. poderia ter sido definida de outras formas. Por exemplo, poderíamos ter definido $Y_0 : \{\text{vitória, derrota}\} \to \{-3, 5\}$ ou então $Y_1 : \{0, 1, 2, 3\} \to \{-3, 5\}$, onde $0, \cdots, 3$ representam a quantidade de caras obtidas no lançamento. Veja que, nestes casos,

$$P(Y_0 = -3) = P(Y_1 = -3) = P(Y = -3) = \frac{3}{4} \text{ e}$$

$$P(Y_0 = 5) = P(Y_1 = 5) = P(Y = 5) = \frac{1}{4}$$

e, portanto, a Esperança Matemática associada a cada uma das definições distintas da v.a., para um mesmo exemplo dado, permanece a mesma. Nos três casos, as variáveis aleatórias associam pontos dos seus domínios com o conjunto $R(Y) = \{-3, 5\}$. Isso mostra que um mesmo experimento pode ser modelado por v.a. distintas (com domínios distintos) e que independentemente da escolha da função $Y$, a probabilidade associada a um mesmo evento não é alterada.

Outro resultado semelhante associado às variáveis aleatórias é a Esperança Condicional. Ele fornece o valor médio esperado de um evento, dada a certeza da ocorrência de outro.

**Definição 1.55.** ***(Esperança condicional)***
*Seja $X$ uma variável aleatória discreta e $A$ um evento em um espaço amostral $S$. A Esperança Condicional de $X$ dado $A$, denotada por $E(X|A)$, também chamada de valor esperado condicional, é dada por*

$$E(X|A) = \sum_{\omega \in S} X(\omega)P(\omega|A).$$

**Exemplo 1.56.** Considere o lançamento de um dado e seja $X$ o resultado obtido no lançamento. Qual é o valor esperado de $X$, sabendo que o resultado obtido no lançamento foi um número par?
*Solução:* Os eventos simples do espaço amostral $S = \{1, 2, \cdots, 6\}$ são equiprováveis e, portanto, possuem a probabilidade $\frac{1}{6}$ de ocorrência. Denotemos por $A$ o evento "o resultado do lançamento foi um número par", ou seja, $A = \{2, 4, 6\}$. Veja que $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Assim, as probabilidades condicionais associadas a esse experimento são

$$P(1|A) = \frac{P(1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\varnothing)}{P(A)} = 0$$

e, de modo análogo, $P(3|A) = 0$ e $P(5|A) = 0$, e

$$P(2|A) = \frac{P(2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

e, da mesma forma, $P(4|A) = \frac{1}{3}$ e $P(6|A) = \frac{1}{3}$. Assim, a Esperança Condicional de $X$, dado que ocorreu $A$, é

$$\begin{aligned} E(X|A) &= 1 \cdot P(1|A) + 2 \cdot P(2|A) + \cdots + 6 \cdot P(6|A) \\ &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4. \end{aligned}$$

Também é possível estabelecer a Esperança Condicional entre duas variáveis aleatórias.

**Definição 1.57.** ***(Esperança Condicional de duas v.a.)***
*Sejam $X$ e $Y$ variáveis aleatórias discretas que assumem valores $R(X) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ e $R(Y) = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$. A Esperança Condicional*

*de $X$ dado $Y$, denotada por $E(X|Y)$, é dada por*

$$E(X|Y=y) = \sum_{x \in R(X)} xP(X=x|Y=y), \quad y \in R(Y),$$

*ou seja, é a Esperança de que a v.a. $X$ assuma cada um dos valores $x_i \in R(X)$, dado que a v.a. $Y$ assumiu um determinado valor $y \in R(Y)$.*

**Exemplo 1.58.** Considere a soma obtida pelo lançamento de dois dados. Qual é o valor esperado associado a esse evento, considerando que o primeiro dado teve como resultado o valor 2?
*Solução:* Sejam $Y_1$ a v.a. do valor do primeiro dado, $Y_2$ a v.a. do valor do segundo dado, e $X$ a v.a. da soma dos resultados obtidos pelo lançamento dos dois dados. Temos que $R(Y_1) = R(Y_2) = \{1, 2 \cdots, 6\}$ e $R(X) = \{2, 3, 4, \cdots, 12\}$. Sabendo que $Y_1 = 2$, temos que a soma obtida pelos dois dados só pode ser um valor do conjunto $A = \{3, 4, \cdots, 8\}$. Ainda, dado que $Y_1 = 2$, a probabilidade de cada um dos eventos simples de $A$ é a mesma, $\frac{1}{6}$, já que cada um dos seis possíveis resultados para $Y_2$ são equiprováveis, e que $P(X = x|Y_1 = 2) = 0, \quad \forall \quad x \in B = R(X) \setminus A$. Assim, a Esperança Matemática associada ao evento é

$$\begin{aligned}
E(X|Y_1=2) &= \sum_{x \in R(X)} x \cdot P(X=x|Y_1=2) \\
&= 2 \cdot P(X=2|Y_1=2) + \cdots + 12 \cdot P(X=12|Y_1=2) \\
&= 2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{6} + \cdots 8 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot 0 + \cdots + 12 \cdot 0 \\
&= 0 + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} + \frac{7}{6} + \frac{8}{6} + 0 + \cdots 0 \\
&= \frac{33}{6} = \frac{11}{2} = 5,5.
\end{aligned}$$

### 1.2.3 Esperança Matemática e jogos

O conceito de Esperança Matemática está intimamente relacionado com os jogos, já que estima, a longo prazo, se a expectativa média geral é de fracasso ou de sucesso em um determinado evento. Assim, adaptando a Definição 1.51 para o espaço amostral formado pelos eventos complementares vitória e derrota, temos que a Esperança

Matemática pode ser dada pela expressão

$$E(x) = P(x) \cdot V - [1 - P(x)] \cdot a,$$

onde $P(x)$ é a probabilidade de vencer, V é o valor obtido em caso de vitória, $1 - P(x)$ é a probabilidade de perder, e $a$ é o valor apostado.

**Exemplo 1.59.** *(Mega-Sena)* O concurso 1937 da Mega-Sena, ocorrido em 07/06/2017, estimava em R$ 6,5 milhões a premiação para o vencedor. Cada aposta simples do jogo (escolha de seis dezenas distintas, de 01 a 60), custa R$ 3,50. A probabilidade de ganhar a Mega-Sena com uma simples aposta (ter as seis dezenas escolhidas dentre as sorteadas) é de:

$$P(V) = \frac{1}{C_{(60,6)}} = \frac{1}{50.063.860}$$

e a probabilidade de não ganhar é, consequentemente

$$P(V^c) = \frac{50.063.859}{50.063.860}.$$

Assim, definindo a v.a. $X$ como sendo o valor resultante da aposta após o sorteio, o valor esperado é de

$$\begin{aligned} E(X) &= 6.500.000 \cdot \frac{1}{50.063.860} - 3,5 \cdot \frac{50.063.859}{50.063.860} \\ &= \simeq 0,1298 - 3,5000 = -3,3702. \end{aligned}$$

Isso nos mostra que, nas condições gerais deste jogo, a cada aposta de R$3,50 o jogador pode esperar uma perda de aproximadamente R$3,37 (considerando apenas o prêmio principal, em que o jogador acerta as seis dezenas, e que o acertador seja único).

Veja que, pensando num jogo a longo prazo, se o valor esperado for positivo, então é conveniente ao jogador apostar ou realizar uma jogada; caso contrário, desistir é a melhor escolha. Assim, um jogador que usa o conceito de Esperança Matemática antes de cada decisão a ser tomada em um jogo, a longo prazo, tende a tomar mais decisões acertadas do que fadadas ao fracasso. Contudo, é importante destacar que o valor esperado e o resultado real podem sofrer enormes variações durante qualquer curto período de obervações. Conforme a quantidade de observações aumenta, tendendo ao infinito, a tendência é que a média dos valores aferidos se aproxime cada vez mais do valor esperado teórico.

Estes resultados serão abordados novamente no capítulo final, onde modelaremos algumas possibilidades relacionadas ao jogo de Poker, utilizando para isso os conceitos e propriedades relacionados à Teoria da Probabilidade expostos neste capítulo inicial.

# 2 O POKER

O Poker é uma família de jogos de cartas que combina jogo, estratégia e habilidade. Todas as suas variantes (ou modalidades) envolvem apostas, que são feitas principalmente com base na qualidade das cartas recebidas e no potencial de vitória estimado pelo jogador. As apostas feitas no decorrer da rodada são acumuladas em um pote, que é entregue ao vencedor da mão. Pelo menos algumas das cartas permanecem ocultas até o final da rodada, e o vencedor de cada mão é o jogador que tiver a melhor combinação de cartas dentre todos os jogadores envolvidos ou o jogador que permanecer no jogo caso os demais tiverem desistido.

Neste capítulo detalharemos diversos aspectos relacionados a este jogo e, em especial, a sua principal modalidade: o Texas Hold'em. Iniciaremos fazendo uma abordagem histórica do Poker, destacando a grande popularização que o jogo passou a ter a partir do ano 2000. Aspectos relacionados as regras, ranking das mãos e estrutura do jogo, dentre outros, serão utilizados para proporcionar um razoável entendimento do Poker - também necessários para a compreensão das abordagens seguintes. As principais referências utilizadas na construção desta seção foram [SKLANSKY, 2004], [POKERNEWS, 2017], [INTELIPOKER, 2017], [EFDESPORTES, 2017], [CBTH, 2017 ] e [WIKIPÉDIA, 2017]. Um glossário contendo os principais termos utilizados no Poker está disponibilizado no Anexo A, na parte final deste trabalho.

### 2.0.1 Aspectos históricos

A origem do jogo é difícil de ser precisada. Alguns atribuem-na à Dinastia Sung, na China, no século X, enquanto outros apontam o seu início com o jogo Persa chamado“As Nas”, do século XVI. Já outros historiadores do jogo dizem que sua origem está em uma palavra francesa, “poque”, que era o nome de um famoso jogo desse país. Segundo essa teoria, o jogo teria sido levado da França para os Estados Unidos através de um grupo de colonizadores franceses que teriam fundado a cidade de Nova Orleans, se difundindo durante o século XVIII e se popularizando nos Estados Unidos durante o século XIX, quando o país começou sua expansão até o oeste.

Independente de sua origem, é considerado como certo de que o jogo foi mudando e evoluindo ao longo do tempo, sendo jogado em suas origens, possivelmente, com 20 cartas, até chegar à quantidade de cartas do baralho atual, 52. Ao longo de sua história, o jogo recebeu novas variações, embora os conceitos básicos e a sequência hierárquica de valores das cartas tenham sido mantidos ao longo de sua evolução.

O jogo sempre manteve alguns adeptos, mas foi neste século que passou a se popularizar de uma forma mais intensa. Esse "boom"do Poker se deu principalmente depois do americano Christopher Bryan Moneymaker protagonizar, em 2003, uma das histórias mais fantásticas do Poker em todos os tempos: dispondo de 39 dólares, jogou um torneio online e ganhou como prêmio um bilhete para participar do evento de Poker mais importante do mundo, o *World Series of Poker (WSOP)*, sagrando-se o campeão do evento principal. Naquela oportunidade o jovem Moneymaker, então com 27 anos de idade, derrotou 13 ex-campeões mundiais e 36 jogadores do time profissional do PokerStars (famosa plataforma de Poker online), em uma competição com um total de 839 jogadores, recorde até então, garantindo o prêmio de 2,5 milhões de dólares. A vitória improvável fez explodir no mundo a imagem do Poker como um jogo em que o sucesso pode estar ao alcance de pessoas ditas normais, tornando-se um dos jogos online mais praticados do mundo.

Debates então se intensificaram quanto ao Poker ser um jogo de azar, o que o tornaria ilegal em muitos países, ou a um processo em que, apesar da sorte estar envolvida, prevalecem a habilidade, o raciocínio lógico matemático e a estratégia. Apesar de ainda não existir um consenso nessa questão, diversos laudos periciais, como por exemplo os emitidos pelo Instituto de Criminalística de São Paulo e pelo Laboratório de Perícias Dr. Ricardo Molina de Figueiredo, inferem que o jogo de cartas Texas Hold'em (principal modalidade do Poker) tem como requisito preponderante e indispensável a habilidade. Além disso, outros estudiosos e jogadores profissionais tem confirmado, com seus estudos e relatos de experiência, que o sucesso no Poker depende muito mais das habilidades mentais do que apenas da sorte.

Em 2010 o Poker foi reconhecido pela Associação Internacional de Esportes da Mente (*International Mind Games Association - IMSA*) como um esporte da mente, assim como o xadrez e o gamão. No Brasil, o Poker é regulamentado pela Confederação Brasileira de Texas Hold'em (CBTH), que desde 2012 é uma entidade cadastrada no Ministério dos Esportes.

## 2.1 TEXAS HOLD'EM: REGRAS GERAIS

Diversas são as variações existentes na prática do Poker, mas a que mais ganhou destaque e popularidade é o Texas Hold'em No Limit, chamada comumente apenas por Texas Hold'em. Como as outras variantes, o objetivo do Texas Hold'em é o de ganhar o pote, isto é, ganhar a soma apostada por todos os jogadores da mesa, a cada rodada. Um pote pode ser ganho quando, após encerradas as rodadas de apostas, um jogador tiver a melhor combinação formada por cinco dentre as sete cartas disponíveis, ou quando os outros jogadores desistirem da rodada por não julgarem conveniente pagar uma aposta.

Para o jogo, utiliza-se o tradicional baralho de 52 cartas, divididas em quatro grupos (ouro $\diamondsuit$, copas $\heartsuit$, paus $\clubsuit$ e espadas $\spadesuit$), chamados de naipes, cada um deles com 13 cartas, com valores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (Valete), Q (Dama), K (Rei) e A (Ás), assim ordenados da carta com valor mais fraco (2) para a carta com valor mais forte (A) - embora nas sequências o Ás também pode ser considerado como a carta de valor 1. Não existe hierarquia entre os naipes no Poker, tendo todos o mesmo valor.

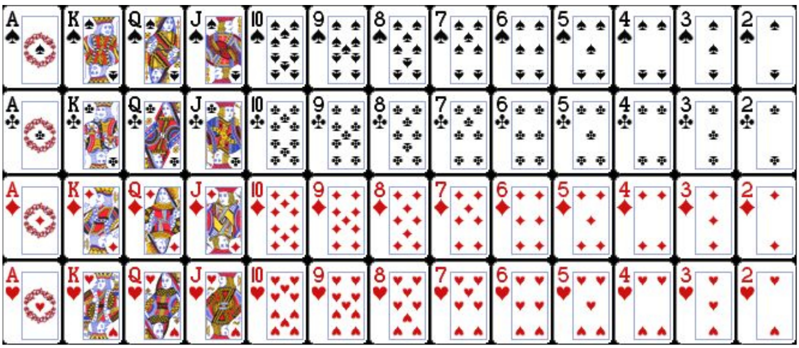


Figura 8: As 52 cartas que compõem um baralho.

A cada rodada, cada um dos jogadores recebe duas cartas, as quais somente ele tem acesso, chamadas de "cartas fechadas", e outras cinco serão abertas na mesa, visíveis e compartilhadas por todos, sendo por isso chamadas de "cartas comunitárias". Essas cinco cartas serão abertas sobre a mesa em três momentos: no primeiro deles, chamado de *flop*, três das cartas são expostas; em seguida, após uma rodada de apostas, é aberta a quarta carta, chamada de *turn*; e, finalmente, no *river*, é aberta a quinta e última carta comunitária. As rodadas de apostas ocorrem logo após as duas cartas fechadas serem distribuídas aos jogadores (chamadas de apostas *pré-flop*), após o *flop*, após o *turn* e após o *river*. O valor mínimo e máximo das apostas podem variar, conforme a estrutura de apostas do jogo: existem jogos com um limite fixo para as apostas *(Fixed Limit)*, que pré-definem o valor máximo de aposta em cada rodada; jogos que limitam o valor das apostas ao valor que já foi acumulado no pote (*Pot Limit*), e jogos que não limitam o valor da aposta (*No Limit*), sendo esta a estrutura mais comum nos torneios. Focaremos nosso estudo ao estilo Texas Hold'em No Limit e, por simplicidade, nos referiremos a ele simplesmente por Texas Hold'em.

### 2.1.1 Estrutura detalhada do Texas Hold'em

Nesta seção explanaremos, de forma breve, os principais elementos de uma rodada de Poker. Destacaremos boa parte dos termos utilizados no decorrer do jogo, terminologia que será utilizada com certa frequência no decorrer deste capítulo. Para informações mais detalhadas recomendamos a leitura de [INTELIPOKER, 2017] e [POKERNEWS, 2017].

#### 2.1.1.1 Os blinds

Uma mesa pode ser formada por 2 a 10 competidores, sendo o formato mais usual em torneios mesas iniciais com 9 participantes. Um indicador, chamado comumente de "botão", é colocado sobre a mesa e serve para indicar o jogador que será o *dealer*, o "carteiro"da rodada. Antes das cartas serem distribuídas, seguindo no sentido horário, o primeiro jogador ao lado do dealer deve colocar na mesa o *small blind (SB)*, e o segundo jogador o *big blind (BB)*. Essas apostas pré-flop são conhecidas como *blinds*: o big blind é a aposta mínima referência para a rodada, sendo o small blind metade deste valor. Uma aposta comunitária, conhecida como *ante*, também pode ser utilizada em conjunto com os blinds, principalmente após várias rodadas de um torneio. Os valores dos blinds aumentam a cada certo período tempo, e são disponibilizados previamente para todos os participantes do jogo através da "tabela de estrutura do jogo". Por exemplo, os jogadores podem iniciar um torneio com 3000 fichas, sendo os valores iniciais de 5 fichas para o small blind e de 10 fichas para o big blind. A cada 15 minutos o jogo muda de nível e os blinds aumentam de valor, passando para 10 e 20, 15 e 30, 25 e 50, etc., seguindo a tabela de estrutura do jogo. Então, após o 15º nível, quando os blinds estiverem em 1000 e 2000, pode começar a ser cobrado também um *ante* de 100 fichas de cada jogador.

#### 2.1.1.2 O jogo pré-flop

Os dois primeiros jogadores à esquerda do dealer depositam na mesa o small blind e o big blind e, em seguida, é feita a distribuição das duas cartas fechadas para cada um dos jogadores. Inicia-se então a primeira rodada de apostas, chamadas de apostas *pré-flop*. Seguindo sempre no sentido horário, cada um dos jogadores, iniciando pelo primeiro jogador à esquerda do big blind, deve tomar uma das três atitudes: desistir de pagar o valor da última aposta e descartar suas cartas (dar *fold*); pagar o valor da última aposta e continuar no jogo (dar *call*) ou aumentar o valor da aposta (dar um *raise*). Cada jogador tem como base o último valor apostado na rodada: essa é a aposta mínima que ele deve fazer para permanecer no jogo. Ainda, um jogador pode re-aumentar uma aposta, ato conhecido como *re-raise* ou *3-bet* (terceiro aumento), podendo haver outros re-aumentos (*4-bet*, *5-bet*, etc). Um jogador também pode fazer uma aposta de todas as suas fichas (ato chamado de *all-in*). As apostas seguem até que não ocorra mais nenhum aumento depois que houve o último raise, ou quando todos os jogadores da mesa estiverem em all-in. Caso nenhum jogador aumente a aposta até o dealer, o jogador que apostou o small blind pode simplesmente completar a aposta para o valor do BB, e o jogador na posição do big blind também dispõe da opção de dar *check* - que representa já ter pago o valor da aposta e permanecer no jogo. As duas cartas individuais que cada jogador recebe só serão mostradas quando todos os jogadores estiverem em all-in, ou quando acabarem todas as rodadas de apostas, após a abertura do river. As cartas dos jogadores desistentes nunca são mostradas. Em qualquer momento do jogo, caso um jogador faça uma aposta e os outros desistam, o jogador remanescente ganha o pote e não precisa mostrar suas cartas.

#### 2.1.1.3 As rodadas de apostas e o showdown

Encerradas as apostas pré-flop, considerando que pelo menos dois jogadores permanecem na mesa, o dealer mostra o flop, que consiste em três cartas comunitárias. A seguir é feita a segunda rodada de apostas, valendo a mesma ordem de apostas da primeira rodada (iniciando pelo jogador na posição do SB). Após as apostas do flop é mostrada a quarta carta comunitária, o turn, seguida da terceira rodada de apostas. A última carta comunitária, o river, é então mostrada, ocorrendo então a última rodada de apostas. Caso restem pelo menos dois jogadores, ocorre o *showdown*: os jogadores que permaneceram no jogo mostram suas duas cartas fechadas para ver qual deles vence a rodada. Nesse momento é observada a melhor combinação de cinco cartas, escolhidas dentre as suas duas individuais e as cinco cartas comunitárias. Se dois ou mais jogadores tiverem uma mão semelhante (com mesma hierarquia no ranking de mãos) ocorre o empate e o valor acumulado no pote é dividido.

Uma **mão de Poker** é um conjunto de cinco cartas que representa a melhor combinação possível dentre as sete cartas disponíveis. Essa combinação pode ser formada por duas cartas da mão e três da mesa, por uma carta da mão e quatro cartas da mesa, ou mesmo pelas cinco cartas da mesa, estas cinco partilhadas por todos os jogadores. A escolha da melhor combinação possível de cada jogador é feita por um ranking de mãos, sendo indispensável para um bom entendimento do jogo que o participante conheça a hierarquia deste ranking.

#### 2.1.1.4 O ranking de mãos

Quando dois os mais jogadores permanecem na mesa para o showdown, as cartas são analisadas para definir quem possui a melhor combinação de cartas. A escolha da melhor combinação não é aleatória: ela segue um ranking hierárquico, que define a melhor mão dentre os jogadores que permanecem no jogo. O conhecimento das combinações que formam o ranking é fundamental para um jogador, já que oportuniza uma avaliação sobre a mão que possui (e que seus adversários podem ter), melhorando a possibilidade de tomada da melhor decisão. Veremos agora, em detalhes, da combinação mais forte para a mais fraca, quais são as combinações que formam o ranking de mãos do Poker.

### 1) Royal Straight Flush (Sequência Real)

Figura 9: Royal Flush.

Esta é a mão mais forte no Texas Hold'em, sendo também a única que dá ao jogador a certeza de ter a melhor combinação. Consiste em uma sequência do 10 ao Ás, com todas as cartas do mesmo naipe.

### 2) Straight Flush (Sequência Naipada)

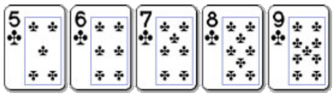


Figura 10: Straight Flush.

São cinco cartas ordenadas, todas do mesmo naipe, desde que a maior delas não seja um Ás. Caso dois jogadores tenham um *straight flush*, vence o que tiver a sequência finalizada com a carta mais alta.

### 3) Quadra (Four of a Kind)

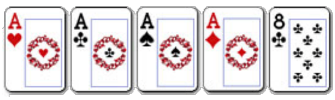


Figura 11: Quadra.

São combinações onde quatro das cartas possuem o mesmo valor. Caso dois jogadores tenham feito uma quadra, vence o que tiver a quadra formada pelas cartas de valores mais altos. Caso os dois jogadores possuam a mesma quadra (quando a quadra está exposta na mesma), vence o jogador que tiver a carta sobressalente mais alta, ocorrendo o empate caso esta carta também seja do mesmo valor.

**4) Full House**

Figura 12: Full House.

São sequências representadas por uma trinca e um par, onde três das cartas possuem o mesmo valor e as outras duas também possuem o mesmo valor (diferente das três primeiras). Quando dois ou mais jogadores conseguem um *full house*, vence aquele que tiver a trinca formada pelas cartas de maior valor e, caso a igualdade persista, pela dupla formada pelas cartas de maior valor. Caso os *full houses* sejam formados por cartas de mesmo valor, ocorre o empate.

**5) Flush**

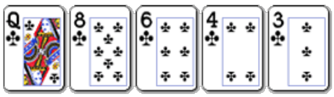


Figura 13: Flush.

São sequências não ordenadas de cinco cartas de um mesmo naipe. Caso dois ou mais jogadores tenham um *flush*, vence aquele que tiver as cartas mais altas na sequência, ocorrendo o empate caso estas cartas sejam as mesmas.

**6) Straight (Sequência)**

Figura 14: Sequência.

São sequências ordenadas de cartas, não sendo todas elas de um mesmo naipe. Caso dois ou mais jogadores tenham um *straight*, vence aquele que tiver a sequência finalizada com a carta de maior valor, ocorrendo o empate caso esta seja igual.

**7) Trinca (Three of a Kind)**

Figura 15: Trinca.

São sequências em que três das cartas tem o mesmo valor, e as duas restantes não formam um par. Quando mais de um jogador possui uma trinca, vence aquele que tiver a trinca formada pelas cartas mais altas. Caso estas sejam de mesmo valor, vence aquele que tiver as outras duas cartas de maior valor.

**8) Dois pares (Two pairs)**

Figura 16: Dois pares.

São sequências compostas por dois pares, cada um deles formados por cartas de valores distintos, acompanhados de uma carta que também difere em seu valor dos valores das cartas de ambos os pares. Quando dois ou mais jogadores possuem dois pares, vence aquele que tiver o par formado pelas cartas de maior valor (chamado de par maior). Caso este seja igual, vence o que tiver o segundo pair maior e, persistindo a igualdade, é observado o valor da carta sobressalente. Caso os valores das cartas sejam iguais, ocorre o empate.

**9) Um par (One pair)**

São sequências formadas por um par e três outras cartas de va-

Figura 17: Um par.

lores distintos. Quando mais de um jogador tem um par, vence aquele que tiver o par mais alto e, caso este seja o mesmo, vão sendo observados os valores das cartas sobressalentes restantes, vencendo aquele que tiver, dentre elas, a de maior valor. Caso as cartas sejam de mesmo valor, ocorre o empate.

**10) Carta alta (High Card)**

Figura 18: Carta Alta.

São sequências em que as cinco cartas não formam nenhuma das nove primeiras combinações listadas. Neste caso, vence o jogador que tiver a carta de maior valor, sendo observadas também as outras, em sequência, caso os valores sejam iguais. Se todas as cartas tiverem o mesmo valor ocorre o empate.

Esses dez tipos de combinação formam o ranking de mãos do Poker. A figura abaixo resume, graficamente, cada uma das combinações:


Figura 19: Ranking de mãos do Poker.

Com a apresentação do ranking de mãos encerramos esta seção. Embora superficiais, sem qualquer investigação mais profunda relacionada a estratégia ou outros fatores envolvidos no jogo, as informações apresentadas neste capítulo fornecem subsídios para uma razoável compreensão do Poker, importantes para o entendimento das abordagens que serão feitas em seguida. Na próxima seção, veremos que a determinação do ranking de mãos do Poker tem relação direta com a probabilidade de cada uma das combinações. Além disso, utilizaremos diversas situações do jogo do Poker (sempre que possíveis reais, ocorridas em algum evento) para modelar e exemplificar os diversos conceitos da Teoria da Probabilidade abordados no primeiro capítulo.

# 3 TEXAS HOLD'EM: APLICANDO A TEORIA DA PROBABILIDADE

Este capítulo será dedicado à conexão entre os capítulos iniciais: situações reais e fictícias do Texas Hold'em servirão de molde para a exemplificação dos conceitos já apresentados da Teoria da Probabilidade.

## 3.1 PROBABILIDADES ASSOCIADAS AO RANKING DE MÃOS

A determinação do ranking de mãos do Poker, listado no final do capítulo anterior, não foi feita de maneira aleatória: ela tem relação direta com a probabilidade de ocorrência de cada mão. Quanto mais improvável o aparecimento de uma determinada sequência de cartas, mais força ela tem no jogo. Veremos agora quantos são os casos favoráveis a cada um dos dez tipos de combinações possíveis no Texas Hold'em e as probabilidades envolvidas. Para todos os casos seguintes são válidas as informações de que cada uma das combinações é equiprovável, e que o número total de casos possíveis é a combinação das 52 cartas tomadas cinco a cinco, ou seja,

$$C_{(52,5)} = \frac{52!}{(52-5)! \cdot 5!} = 2598960.$$

**1) Royal Straight Flush (Sequência Real)**

Apenas quatro combinações representam um *royal straight flush*, já que só existe uma combinação dessas em cada um dos quatro naipes do baralho. Assim, temos que

$$P(Royal\ Straight\ Flush) = \frac{4}{2598960} = \frac{1}{649740} \approx 0,0001539\%.$$

**2) Straight Flush (Sequência Naipada)**

Em cada um dos quatro naipes do baralho temos nove sequências ordenadas de cartas, cujos valores mínimos são A(1), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (esta última sequência tendo como carta mais alta o K). Assim, temos um total de $4 \cdot 9 = 36$ casos possíveis e, portanto,

$$P(Straight\ Flush) = \frac{36}{2598960} = \frac{3}{216580} \approx 0,001385\%.$$

**3) Quadra (Four of a Kind)**

Temos 13 valores de carta e, portanto, 13 possibilidades distintas para as quadras. Uma vez escolhidas as quatro cartas, restam $52 - 4 = 48$ cartas para compor a sequência. Temos, portanto, $13 \cdot 48 = 624$ combinações possíveis, e

$$P(Quadra) = \frac{624}{2598960} = \frac{39}{162435} \approx 0,024\%.$$

**4) Full House**

Uma trinca pode ser formada escolhendo-se um dos 13 valores de carta e, em seguida, escolhendo-se três dentre as quatro cartas que possuem esse mesmo valor. Assim, temos $13 \cdot C_{(4,3)} = 13 \cdot \frac{4!}{3!1!} = 13 \cdot 4 = 52$ possibilidades de escolha de uma trinca no baralho. A dupla pode ser escolhida de qualquer um dos outros 12 valores de carta, pela combinação de duas dentre as quatro cartas com esse mesmo valor, ou seja, são $12 \cdot C_{(4,2)} = 12 \cdot \frac{4!}{2!1!} = 12 \cdot 6 = 72$ duplas distintas para cada um dos valores de carta. Temos portanto $52 \cdot 72 = 3744$ combinações distintas formadas por uma trinca e uma dupla, de onde

$$P(Full\ House) = \frac{3744}{2598960} = \frac{234}{162435} \approx 0,144\%.$$

**5) Flush**

Temos $C_{(13,5)} = \frac{13!}{8!5!} = 1287$ possibilidades distintas de escolha de cinco cartas de um mesmo naipe, das quais 10 são ordenadas (9 *straigth flushes* e 1 *royal straight flush*). Assim, observando os quatro naipes, temos um total de $4 \cdot (1287 - 10) = 5108$ combinações distintas para um *flush* e, portanto,

$$P(Flush) = \frac{5108}{2598960} = \frac{1277}{649740} \approx 0,1965\%.$$

**6) Straight (Sequência)**

Uma sequência ordenada pode ter como a carta de menor valor qualquer uma das cartas de A ao 10, existindo, portanto, dez tipos distintos de sequências ordenadas. Cada uma das cartas que compõe uma sequência desta forma pode ser de qualquer um dos quatro naipes do baralho. Assim, temos $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$ possibilidades distintas para cada tipo de sequência. Contudo, 4 destas 1024 sequências possuem todas as cartas do mesmo naipe, que devem ser desconsideradas. Assim, temos um total de $10 \cdot (1024 - 4) = 10200$ possibilidades distintas de formação de sequências *straight*, de onde

$$P(Straight) = \frac{10200}{2598960} = \frac{255}{64974} \approx 0,3925\%.$$

**7) Trinca (Three of a Kind)**

Para cada um dos 13 valores de carta, podemos formar $C_{(4,3)} = 4$ trincas distintas. Escolhida uma trinca, as outras duas cartas podem ser uma das $52 - 4 = 48$ cartas restantes, desde que não formem um par (veja que excluímos a quarta carta de mesmo valor da trinca, pois caso contrário estaríamos incluindo também combinações que formariam uma quadra). Assim, podemos formar $C_{(48,2)} = 1128$ duplas distintas de cartas, mas devemos descontar aquelas que formam um par: são 12 valores de carta, em cada um deles tendo $C_{(4,2)} = 6$ combinações possíveis para os pares. Ou seja, a quarta e a quinta cartas podem ser combinadas de $1128 - (12 \cdot 6) = 1056$ formas. Logo, podemos formar uma trinca de $13 \cdot 4 \cdot 1056 = 54912$ formas distintas, de onde

$$P(Trinca) = \frac{54912}{2598960} = \frac{1144}{54145} \approx 2,1128\%.$$

**8) Dois pares (Two pairs)**

Podemos escolher os dois valores de carta que formarão os dois pares de $C_{(13,2)} = 78$ formas e, para cada um dos valores, as cartas podem ser combinadas de $C_{(4,2)} = 6$ maneiras distintas. A quinta carta poderá quer qualquer uma das $52 - 4 - 4 = 44$ cartas restantes. Assim, temos um total de $78 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 44 = 123552$ maneiras de obter dois pares e, portanto,

$$P(Dois\ pares) = \frac{123552}{2598960} = \frac{2574}{54145} \approx 4,7539\%.$$

**9) Um par (One pair)**

Temos 13 valores de carta para escolher o par, que podem ser combinadas de $C_{(4,2)} = 6$ formas distintas. Como as outras três outras cartas devem ser de valores distintos, os valores podem ser escolhidos de $C_{(12,3)} = 220$ formas. Cada uma dessas três cartas pode ser de qualquer um dos quatro naipes do baralho. Assim, temos um total de $13 \cdot 6 \cdot 220 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$ formas distintas de formar um par, e

$$P(Um\ par) = \frac{1098240}{2598960} = \frac{22880}{54145} \approx 42,2569\%.$$

**10) Carta alta (High Card)**

Os cinco valores de carta podem ser escolhidos de $C_{(13,5)} = 1287$ maneiras. Destas, temos 10 tipos de combinações que formam um *Straight* e, portanto, devem ser excluídas. Cada uma das cinco cartas pode ser de qualquer um dos quatro naipes do baralho, o que nos dá $4^5$ possibilidades. Destas, temos quatro casos em que as cinco cartas são do mesmo naipe (formando portanto um *flush*), devendo também ser desconsideradas. Assim, temos um total de $(1287-10)\cdot(4^5-4) = 1277 \cdot 1020 = 1302540$ formas da combinação ser do tipo Carta Alta e, portanto,

$$P(Carta\ Alta) = \frac{1302540}{2598960} = \frac{21709}{43316} \approx 50,1177\%.$$

Observe que, para este último caso, poderíamos ter utilizado o Axioma 3 da Definição 1.7 e a Proposição 1.10. De fato, denotando por $A_i$ o evento "ocorreu a sequência $i$", com $i = 1, 2, \cdots, 9$ (representando as combinações de 1 a 9 listadas acima) e por $B$ o evento "ocorreu uma das nove primeiras sequências", temos que

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_9) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_9) \\
&= \tfrac{4+36+624+3744+5108+10200+54912+123552+1098240}{2598960} \\
&= \frac{1296420}{2598960}.
\end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 1.10, a probabilidade que não tenha ocorrido nenhuma das nove primeiras sequências é

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1296420}{2598960} = \frac{1302540}{2598960}.$$

A tabela abaixo resume as probabilidades de cada uma das mãos do Poker:

| **Ordem** | **Nome** | **Combinações possíveis** | **Probabilidade Aproximada** |
|---|---|---|---|
| 1 | Sequência Real | 4 | 0,0001539% |
| 2 | *Straight Flush* | 36 | 0,001385% |
| 3 | Quadra | 624 | 0,024% |
| 4 | *Full House* | 3744 | 0,144% |
| 5 | *Flush* | 5108 | 0,1965% |
| 6 | *Straight* | 10200 | 0,3925% |
| 7 | Trinca | 54912 | 2,1128% |
| 8 | Dois Pares | 123552 | 4,7539% |
| 9 | Um Par | 1098240 | 42,2569% |
| 10 | Carta Alta | 1302540 | 50,1177% |

Tabela 1: Mãos do Poker: Ranking e Probabilidades

É importante destacar que esse ranking de mãos serve de parâmetro para aferição do vencedor em diversas modalidades do Poker, e foi criado analisando todas as combinações possíveis formadas por cinco dentre as 52 cartas do baralho. Contudo, se avaliássemos as probabilidades de cada uma das mãos do ranking considerando as combinações formadas por sete dentre as 52 cartas do baralho (já que um jogador de Taxas Hold'em forma sua melhor mão escolhendo cinco cartas dentre as suas duas cartas fechadas e as cinco cartas expostas na mesa), as probabilidades associadas seriam alteradas, sendo inclusive mais provável que um jogador acerte dois pares do que não acerte nada, dependendo apenas da carta mais alta. Nesta situação, o espaço amostral é formado por $C_{(52,7)} = 133.784.560$ combinações distintas.

A próxima tabela mostra o número de casos favoráveis a cada uma das sequências que formam o ranking de mãos do Poker e as probabilidades associadas, considerando as combinações formadas por sete cartas. (Informações detalhadas sobre essas probabilidades, considerando as sete cartas, podem ser obtidas em [PEOPLE.MATH, 2018] e [MATH FORUM, 2018]).

| **Ordem** | **Nome** | **Combinações possíveis** | **Probabilidade Aproximada** |
|---|---|---|---|
| 1 | Sequência Real | 4.324 | 0,00323% |
| 2 | *Straight Flush* | 37.260 | 0,02785% |
| 3 | Quadra | 224.848 | 0,16807% |
| 4 | *Full House* | 3.473.184 | 2,5961% |
| 5 | *Flush* | 4.047.644 | 3,0255% |
| 6 | *Straight* | 6.180.020 | 4,6194% |
| 7 | Trinca | 6.461.620 | 4,82987% |
| 8 | Dois Pares | 31.433.400 | 23,4955% |
| 9 | Um Par | 58.627.800 | 43,8225% |
| 10 | Carta Alta | 23.294.460 | 17,412% |

Tabela 2: Probabilidades das mãos de Poker, considerando sete cartas.

Na próxima seção utilizaremos diversas informações do ranking de mãos, que serão úteis para calcular probabilidades relacionadas a jogadas ocorridas em situações reais de Poker.

## 3.2 A TEORIA DA PROBABILIDADE ILUSTRADA PELO TEXAS HOLD'EM

Nesta seção ilustraremos inúmeros conceitos da Teoria da Probabilidade com situações relacionadas ao jogo de Poker. Iniciaremos apresentando uma jogada, ocorrida no World Series of Poker (WSOP) de 2006. Os seus possíveis desdobramentos fornecem uma fonte riquíssima para inúmeras considerações, servindo de molde para diversos conceitos relacionados à probabilidade, sendo por isso retomada diversas vezes durante o texto.

*É a mesa final do evento principal do WSOP de 2006. Dos 8.773 participantes que iniciaram o torneio, apenas três restam na disputa dos 12 milhões de dólares destinados ao vencedor - até hoje a maior premiação já paga em um evento de Poker e, na época, o valor mais alto entregue em um esporte individual. Jamie Gold é o chip leader com 60 milhões em fichas, Paul Wasicka tem 18 milhões e Michael Binger tem 11 milhões. As blinds são 200.000/400.000, com um ante de 50.000. Gold dá call com 4♠ 3♣, Wasicka dá call com 8♠ 7♠ e Binger aumenta a aposta para 1,5 milhão de fichas com A♡ 10♡. Gold e Wasicka pagam a aposta. O flop mostra 10♣ 6♠ 5♠. Wasicka dá* *check, Binger faz um raise de 3,5 milhões de fichas e Gold vai all-in. É a vez de Wasicka agir.*

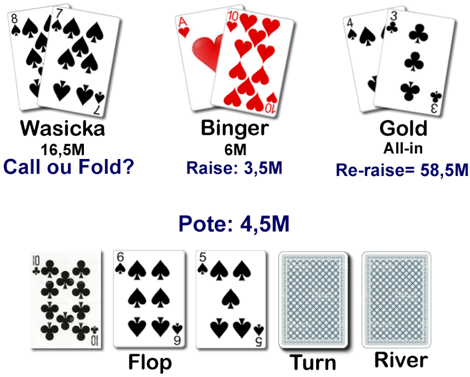



Figura 20: Mão da mesa final do WSOP 2006.

Diante dessas informações, qual seria a melhor ação para Paul Wasicka: desistir da jogada ou pagar a aposta, indo também all-in? Em outras palavras, dadas as cartas dos jogadores e o flop, e supondo que os três jogadores permaneçam no jogo, é mais provável que Wasicka não melhore sua mão e seja eliminado ou que vença a mão e melhore seu stack? As respostas para essas perguntas envolvem a análise das diversas possibilidades para o turn e para o river, que serão abordadas no decorrer desta seção.

Destacamos que diversas probabilidades serão calculadas tendo como base o ponto de vista de um expectador, que dispõe de informações sobre algumas cartas de outros participantes, e que as cartas descartadas pelos jogadores (desde que não sejam expressamente descritas) serão consideradas como se estivessem dentre as cartas restantes do baralho. Jogadores que desistiram da mão também serão desconsiderados (já que a probabilidade de vencerem a mão é nula).

### 3.2.1 Eventos equiprováveis e propriedades da Probabilidade

Desconsiderando os casos envolvendo um baralho viciado ou defeituoso (com cartas repetidas, por exemplo), o cálculo de probabilidades envolvendo as mãos do Poker referem-se a eventos com igual possibilidade de ocorrência. Isso porquê, para qualquer combinação formada por $n$ cartas, a probabilidade de uma determinada combinação ser retirada é a mesma que a de qualquer outra e, portanto, os eventos simples são sempre equiprováveis.

**Exemplo 3.1.** No heads-up da mesa final do evento principal do WOSP em 2017, quando os blinds estavam em 1,5M/3M (M representando milhões) com um ante de 500K (K representando mil) fichas, Dan Ott (que estava com cerca de 64 milhões de fichas), aumentou a aposta pré-flop para 8 milhões de fichas e seu conterrâneo, o americano Scott Blumstein (que tinha quase 300 milhões em fichas), re-aumentou a aposta para 64 milhões. Após pensar por algum tempo, Dan pagou a aposta, indo all-in. Dan tinha A♢ 8♢ e Scott tinha A♡ 2♢. O board trouxe J♠ 6♠ 5♡ 7♡. Nesta situação, qual é a probabilidade de que Scott vença a mão (e o torneio) no river?
**Resposta:** Das 52 cartas do baralho, oito foram expostas. Nas condições dadas, é razoável supor que as 44 cartas restantes tenham a mesma possibilidade de aparecerem no river, ou seja, são equiprováveis. Apenas três das 44 cartas dão a vitória para Scott: 2♡, 2♣ e 2♠. Assim, a probabilidade de que Scott vença a mão é de $\frac{3}{44}$ ou aproximadamente $6,82\%$. (Na sequência do jogo, o river trouxe o 2♡ e Scott venceu o torneio, levando para casa o sonhado bracelete de campeão mundial e mais de 8 milhões de dólares de prêmio).

**Exemplo 3.2.** Na mesa final da 3ª etapa do Brazilian Series of Poker (BSOP), em 2014, restando cinco jogadores de um total inicial de 1150, Victor Sbrissa (que era o chip leader da mesa, com mais de 9,3M em fichas), recebeu A♢ 9♡ e aumentou a aposta para 500k (os blinds eram 100/200k). Caio Hey (que era o short stack da mesa, com 2,6M em fichas), fez um 3-bet, indo all-in com Q♢ J♡. Os demais jogadores foldaram e e Sbrissa pagou a aposta. O flop trouxe 3♡ 8♡ 4♢ e o turn 2♣. Com base nessas informações, qual a probabilidade que Caio vença a mão e não seja eliminado do torneio?
**Resposta:** Oito das 52 cartas do baralho estão expostas sobre a mesa. Das 44 cartas restantes, apenas seis podem dar a vitória para Caio: Q♡, Q♣, Q♠, J♢, J♣ ou J♠. Cada um das 44 cartas tem a mesma possibilidade de aparecer no river e, assim, a probabilidade de que Caio vença a mão é $\frac{6}{44} = \frac{3}{22}$, cerca de $13,64\%$. (Na sequência desta jogada, o river trouxe Q♣, carta que garantiu a permanência de Caio no torneio).

**Exemplo 3.3.** Na primeira mão da mesa final do evento principal do BSOP Millions, em 2015, com oito jogadores restantes, os blinds estavam em 100/200K com um ante de 25k. Ricardo Santana (7M em fichas), que ocupava a posição inicial, ao lado do big blind, aumentou a aposta para 500 mil fichas. Ciro Gomez (11M em fichas) foi o próximo a agir e fez um 3-bet para 1,05 milhão de fichas. Os demais jogadores foldaram e Santana completou a aposta. Mais tarde as cartas foram mostradas e Gomez tinha o par K♠ K♣ na sua mão. Nessas condições, desconsiderando outras informações, como as cartas que foram descartadas pelos outros jogadores da mesa, qual era a probabilidade de que Santana tivesse uma mão inicial melhor que a de Gomez?

**Resposta:** Das 52 cartas do baralho, temos informações apenas sobre as cartas de Gomez. A única mão inicial que deixaria Santana à frente de Gomez seria um par de ases. Das 50 cartas disponíveis, os quatro ases podem ser combinados para fornecer uma mão inicial melhor que um par de reis, ou seja, das $C_{(50,2)} = 1225$ combinações possíveis, $C_{(4,2)} = 6$ favoreceriam Santana. Veja que cada uma das 1225 combinações iniciais têm a mesma possibilidade de ocorrer, ou seja, são equiprováveis e, portanto, a probabilidade que a mão de Gomez seja pior que a de seu adversário é $\frac{6}{1225}$, inferior a $0,5\%$. (Mais tarde as cartas foram mostradas e Santana tinha A♡ A♢ como suas cartas fechadas).

**Exemplo 3.4.** Na continuidade da jogada do exemplo anterior, o flop trouxe 4♢ 3♠ K♢. Os dois jogadores deram check. O turn mostrou um A♠ (perceba que, neste momento, os dois jogadores possuíam uma trinca). Santana fez uma aposta de 900 mil fichas, recebendo um 3-bet de Gomez, que aumentou para 1,950 milhões de fichas. Santana então apostou todas as suas fichas, 6,15 milhões, sendo instantaneamente pago pelo adversário. O showdown mostrou A♡ A♢ na mão de Santana, contra o K♠ K♣ de Gomez. Restando apenas o river para ser aberto, qual é a probabilidade de que Gomez vença essa mão?

**Resposta:** Com base nas informações sabemos que, das 52 cartas do baralho, 44 permanecem ocultas. Como cada carta tem a mesma possibilidade de ser retirada e apenas uma delas, o K♡, causaria a derrota de Santana, a probabilidade de que Gomez vença essa mão é de $\frac{1}{44}$, cerca de $2,27\%$. (Para delírio dos expectadores, o river trouxe o K♡, eliminando Santana do torneio).

**Exemplo 3.5.** No Texas Hold'em, em especial quando jogadores se enfrentam no heads-up, possuir um ás na mão pode representar significativa vantagem já que, como mostramos anteriormente, a probabilidade de que nenhuma das sequências registradas no ranking de mãos do Poker ocorra é de mais de 50% e, assim, ter a carta mais alta pode garantir a vitória. Levando isso em consideração, qual é a probabilidade de que, em um heads-up, os dois jogadores tenham pelo menos um ás na mão?

**Resposta:** A resolução deste problema pode ser um tanto demorada, já que a situação pode ser desmembrada em inúmeros casos. Por exemplo, teríamos que encontrar a probabilidade do jogador A ter em sua mão um dos ases (por exemplo o A♣) e as diversas possibilidades para o jogador B: ter apenas um dos outros ases (A♡, A♠ ou A♢), ou possuir um par de ases (A♢A♠, A♢A♡ ou A♠A♡). Em seguida teríamos que encontrar as probabilidades do jogador A possuir um par de ases e probabilidade do jogador B possuir apenas um ou também um par de ases na mão. Tal resolução demandaria considerável tempo. Contudo, a resolução deste problema é facilitada de forma significativa com a utilização do Axioma 2 da Definição 1.7 e das Proposições 1.10 e 1.13. Denotando por A= "jogador A possui ao menos um ás", B= "jogador B possui ao menos um ás"e C= "cada um dos jogadores possui pelo menos um ás"os eventos associados ao problema, temos que

$$\begin{aligned}
P(C) &= 1 - P(C^c) \\
&= 1 - P(A^c \cup B^c) \\
&= 1 - [P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c)] \\
&= 1 - [C_{(48,2)}/C_{(52,2)} + C_{(48,2)}/C_{(52,2)} - C_{(48,4)}/C_{(52,4)}] \\
&= 1 - [\frac{2256}{2652} + \frac{2256}{2652} - \frac{4669920}{6497400}] \\
&= 1 - \frac{6384480}{6497400} = \frac{112920}{6497400} \approx 1,7379\%.
\end{aligned}$$

**Exemplo 3.6.** Ao jogar um torneio, você percebe que um jogador joga de forma *tight agressive*, ou seja, tende a jogar poucas mãos, mas de forma agressiva, sempre apostando forte. Você supõe que ele só fará uma aposta pré-flop com AA, AK ou KK (e que, sempre que apostar, terá de fato AA, AK ou KK). Supondo que em determinada mão ele faça um raise pré-flop, qual é a probabilidade que ele tenha nas mãos um AK?

**Resposta:** Erroneamente, podemos ser levados a crer que existem três possibilidades (AA, AK ou KK), das quais apenas uma delas é favorável e, portanto, a probabilidade de que o adversário possua um AK na mão é de $\frac{1}{3}$. Isso estaria correto se os eventos fossem equiprováveis, o que não ocorre neste caso, já que estas três possíveis mãos ocorrem em frequências diferentes. Um modo de resolver este problema é considerar todas duplas possíveis formadas por duas das cartas A ou K, formando um espaço amostral equiprovável. As oito cartas (quatro ases e dois

reis) podem ser combinadas de $C_{(8,2)} = 28$ modos distintos. Veja que os pares de reis (e de ases) podem ser formados de $C_{(4,2)} = 6$ modos distintos, mas o mesmo não ocorre com a dupla AK. Para estas, temos um total de 16 combinações distintas:
(A♡K♢), (A♡K♡), (A♡K♠), (A♡K♣), (A♢K♢), (A♢K♡), (A♢K♠), (A♢K♣), (A♠K♢), (A♠K♡),(A♠K♠), (A♠K♣), (A♣K♢), (A♣K♡), (A♣K♠) e (A♣K♣).
Assim, dos 28 casos equiprováveis possíveis, 16 deles correspondem à dupla AK e, portanto, $P(\mathrm{AK}) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$.

Os próximos quatro exemplos estão relacionados com a mão da mesa final do WSOP 2006 citada no início desta seção. Temos as informações que Wasicka tem 8♠ 7♠, Gold tem 4♠ 3♣, Binger tem A♡ 10♡ e o flop foi 10♣ 6♠ 5♠.

**Exemplo 3.7.** Qual é a probabilidade que Wasicka faça um straight flush no turn?
**Resposta:** Duas cartas podem dar um straight flush para Wasicka: 4♠ e 9♠. Contudo, Gold tem o 4♠ em suas mãos, eliminando a possibilidade de aparição desta carta. As 43 cartas restantes são equiprováveis e apenas uma delas, o 9♠, pode atender ao enunciado. Portanto, a probabilidade que Wasicka faça um straight flush no turn é $\frac{1}{43}$.

**Exemplo 3.8.** Qual é a probabilidade que Wasicka faça um straight flush no turn ou no river?
**Resposta:** Denotemos por A o evento "Wasicka faz straight flush no turn" e por B o evento "Wasicka faz straight flush no river". Pela Proposição 1.13, temos que $\mathrm{P}(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, ou seja, é a probabilidade que ele faça o straight flush no turn ou no river ou em ambos. Veja que a única carta que pode dar o straight flush para o jogador é o 9♠, que não pode aparecer simultaneamente no turn e no river. Assim, $P(A \cap B) = 0$. Do exemplo anterior, sabemos que $P(A) = \frac{1}{43}$ e, da mesma forma, a probabilidade que o 9♠ apareça no river é também $\frac{1}{43}$. Isso porquê, pelas condições apresentadas, cada uma das 43 cartas restantes tem a mesma probabilidade de aparecerem no river. Assim, a probabilidade que Wasicka faça um straight flush no turn ou no river é $\frac{1}{43} + \frac{1}{43} = \frac{2}{43}$.

Neste exemplo, poderíamos ter usado o fato de que se o 9♠ aparecer no turn, ele não poderá aparecer no river (e vice-versa) e, portanto, os eventos são mutuamente excludentes. Então, pelo Axioma 3 da Definição de Probabilidade, temos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{43} + \frac{1}{43} = \frac{2}{43}$.

**Exemplo 3.9.** Qual é a probabilidade que Wasicka acerte um flush no turn?
**Resposta:** Veja que cada uma das 43 cartas restantes possuem a igual probabilidade de $\frac{1}{43}$ de aparecerem no turn, sendo que oito delas darão um flush para o jogador: A, K, Q, J, 10, 9, 3 ou 2 - todas cartas de espadas. Assim, temos 8 casos favoráveis para que o jogador acerte um flush e, assim $P(\text{Wasicka acerta um flush no turn}) = \frac{8}{43}$.

**Exemplo 3.10.** Qual é a probabilidade que Wasicka acerte um flush no turn ou no river?
**Resposta:** Para este caso, podemos descrever três eventos distintos: A="o turn é uma carta de espadas e o river é uma carta de outro naipe"; B="o turn não é uma carta de espadas e o river é uma carta de espadas" e C="turn e river são cartas de espada". Como esses três eventos são mutuamente excludentes, poderíamos calcular a probabilidade de cada um deles, adicionando os resultados para encontrar a probabilidade desejada. Contudo, novamente podemos utilizar em nosso favor o resultado da Proposição 1.10. Das 43 cartas restantes, temos que 8 são de espadas e 35 são dos outros naipes. Wasicka não fará um flush no turn ou no river se nenhuma das duas cartas que completarão o board forem de espadas (o que pode ocorrer em $C_{(35,2)} = 595$ dos $C_{(43,2)} = 903$ casos igualmente possíveis). Assim, denotando por $P(F)$ o evento descrito no enunciado, temos que

$$\begin{aligned} P(F) &= 1 - P(F^c) \\ &= 1 - \frac{595}{903} \\ &= \frac{308}{905}, \text{ cerca de } 34\%. \end{aligned}$$

### 3.2.2 Independência entre eventos

No Poker, quando observamos rodadas distintas, podemos pensar nos eventos como sendo independentes. Contudo, na maior parte dos casos, quando buscamos estimar a probabilidade de algum evento em uma determinada mão, onde qualquer informação sobre alguma carta tende a alterar a probabilidade dos eventos relacionados aos demais eventos, é mais comum que os eventos sejam dependentes.

**Exemplo 3.11.** Qual é a probabilidade que um jogador receba, por duas rodadas consecutivas, um par de ases?
**Resposta:** Estamos analisando duas rodadas distintas. Perceba que o

que ocorre na primeira rodada não altera o espaço amostral relacionado à segunda rodada e, portanto, os eventos são independentes. Denotemos por A e B, respectivamente, os eventos “receber um par de ases na primeira rodada” e “receber um par de ases na segunda rodada”. A probabilidade que um jogador receba um par de ases na primeira mão é a mesma probabilidade que ele tem de receber um par de ases na segunda: das $C_{(52,2)} = 1326$ combinações distintas de duas dentre as 52 cartas do baralho, $C_{(4,2)} = 6$ correspondem a um par de ases e, portanto, $P(A) = P(B) = \frac{6}{1326} = \frac{1}{221}$. Assim, como os eventos são independentes, temos que a probabilidade que um jogador receba um par de ases por duas mãos seguidas é $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{221} \cdot \frac{1}{221} = \frac{1}{48841}$.

**Exemplo 3.12.** O americano Dan Harrington, jogador profissional e famoso autor de livros sobre estratégia de Poker, falou sobre a importância de mesclar o estilo de jogo, dificultando assim a leitura por seus adversários. No livro [HARRINGTON, 2006], Dan sugeriu uma forma de randomizar suas jogadas: cada vez que você receber AJ na primeira posição, você irá olhar para o seu relógio. Se o ponteiro dos segundos estiver no primeiro quadrante, você irá aumentar a aposta; caso contrário, desistirá. Nesta situação, considerando apenas as mãos recebidas na primeira posição da mesa, qual é a probabilidade que você receba um AJ e faça um raise?
**Resposta:** Esse é mais um caso em que os eventos são independentes: a posição dos ponteiros do relógio não influencia nas cartas que o jogador receberá (e nem as duas cartas recebidas exercem qualquer tipo de interferência na posição dos ponteiros do relógio). Dos $C_{(52,2)} = 1326$ pares distintos de duas cartas que o jogador pode receber, existem $4 \cdot 4 = 16$ combinações distintas que resultam em AJ (já que existem quatro ases e quatro J de naipes diferentes, e as cartas devem ser necessariamente um A e um J) e, portanto, a probabilidade que o jogador receba um AJ é de $\frac{16}{1326}$. Ainda, ao olhar para o relógio, probabilidade que o ponteiro esteja no primeiro quadrante é $\frac{1}{4}$. Como os dois eventos são independentes, a probabilidade que um jogador receba AJ e efetue um aumento na aposta é de $\frac{16}{1326} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{663}$, cerca de uma a cada 332 mãos jogadas na primeira posição.

**Exemplo 3.13.** Na mesa final do BSOP 2014, realizado em Natal, o catarinense Rodrigo Garrido fez um raise pré-flop para 190k (os blinds estavam em 40k/80k com ante 10k), com A♡10♣. Murilo Ruiz anunciou all-in de 985k, com A♢J♢, sendo pago por Garrido, que tinha um stack maior que o oponente (os outros três jogadores que estavam na mesa foldaram). Um flop surpreendente trouxe 10♡A♠10♠, dando um

full house para Garrido. Neste momento, Ruiz só poderia continuar no torneiro caso uma das duas cartas restantes fosse um A e a outra não fosse um 10 (empatando assim a mão, ambos com AAA1010), ou caso aparecessem dois valetes, vencendo assim a mão e levando o pote. Com essas informações, qual é a probabilidade que um J apareça no turn e outro J apareça no river, dando a vitória para Ruiz?
**Resposta:** Denotemos por $\mathrm{J}_t$ e $\mathrm{J}_r$ os eventos "saiu um J no turn" e "saiu um J no river", respectivamente. Veja que três cartas J permanecem disponíveis dentre as 45 cartas ainda ocultas do baralho. Das $C_{(45,2)} = 990$ combinações distintas para turn e river, apenas $3 = C_{(3,2)}$ correspondem a um J no turn e um J no river simultaneamente e, portanto, a probabilidade que saia um J no turn e um J no river é $P(\mathrm{J}_t \cap \mathrm{J}_r) = \frac{3}{990}$, pouco maior que $0,3\%$. Veja que os eventos $\mathrm{J}_t$ e $\mathrm{J}_r$ não são independentes, já que após o flop, nas condições dadas, a probabilidade que saia um J no turn é a mesma de que saia um J no river, $\frac{3}{45}$, e $P(\mathrm{J}_t) \cdot P(\mathrm{J}_r) = \frac{3}{45} \cdot \frac{3}{45} = \frac{3}{675} \neq \frac{3}{990} = P(\mathrm{J}_t \cap \mathrm{J}_r)$. (Na sequência da jogada, o board foi completado com J♠J♣, dando a memorável vitória da mão para Ruiz, que permaneceu no torneio).

### 3.2.3 Probabilidade Condicional

Boa parte das abordagens sobre probabilidade relacionadas ao Poker envolvem o conhecimento de alguma informação sobre as cartas (ou sobre o estilo de um jogador). Antes de iniciar uma mão, um jogador dispõe apenas de estimativas sobre a probabilidade, por exemplo, de que ele receba duas cartas quaisquer, como um 8♠J♢, que corresponde a um dentre os 1326 ($C_{(52,2)}$) pares distintos possíveis, ou sobre as probabilidades de ocorrência de uma determinada mão do ranking de mãos. As probabilidades relacionadas a determinados eventos são constantemente modificadas com as novas informações que vão surgindo. Assim, tendo informação sobre as cartas de sua mão, a probabilidade de ocorrência de algum evento no flop fica alterada, ocorrendo o mesmo com as novas informações que são expostas na mesa, no turn e no river. Mesmo com o board completo, o jogador pode estimar qual é a probabilidade que sua mão esteja vencendo (ou perdendo) para um adversário, probabilidade agora condicionada a ocorrência dos eventos anteriores.

**Exemplo 3.14.** Restavam apenas dois jogadores no evento principal do WSOP em 2016: Gordon Vayo e Qui Nguyen, ambos dos Estados Unidos. Vayo olha suas cartas e vê A♡ 9♡. Considerando apenas essas

informações, qual é a probabilidade de que o adversário de Vayo tenha nas mãos um par de ases?
**Resposta:** Desejamos saber qual a probabilidade de que Nguyen tenha um par de ases na mão, dado que Vayo tem A♡ 9♡. Denotemos por A o evento que Vayo possui A♡ 9♡ e por B o evento que o adversário possui um par de ases. As cartas dos dois jogadores podem ser distribuídas de $C_{(52,2)} \cdot C_{(50,2)}$ maneiras distintas, sendo que três delas atendem ao evento $A \cap B$ (A♡9♡ - A♢A♠, A♡9♡ - A♢A♣, A♡9♡ - A♠A♣). Assim, temos que $P(A \cap B) = \frac{3}{C_{(52,2)} \cdot C_{(50,2)}}$. Apenas uma das $C_{(52,2)} =$ 1326 equiprováveis combinações distintas formadas por duas dentre as 52 cartas atende ao evento A e, portanto, $P(A) = \frac{1}{C_{(52,2)}}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{C_{(52,2)} \cdot C_{(50,2)}}}{\frac{1}{C_{(52,2)}}} \\ &= \frac{3}{C_{(50,2)}} = \frac{3}{1225}, \text{ cerca de uma a cada 408 mãos.} \end{aligned}$$

Naquela jogada, Nguyen não tinha um par de ases: tinha A♣ 9♢. O board trouxe 8♣ 2♠ A♠ 5♠ 3♠, que daria um empate entre as mãos. Contudo, a forte aposta feita por Nguyen após a revelação do river fez com que Vayo foldasse, talvez supondo que seu adversário tivesse acertado um flush ou uma sequência. Nguyen venceu a mão e levou o enorme pote de fichas que estava acumulado na mesa, dando um passo importante para a conquista do título que viria algumas mãos depois.

Veja que, como tantas outras atividades relacionadas à matemática e, em particular, à probabilidade, o exemplo anterior poderia ter sido resolvido de um modo diferente. Sabendo da ocorrência de A, existem $C_{(50,2)} = 1225$ combinações distintas com as 50 cartas restantes. Destas, apenas os pares de cartas formados por dois dentre os três ases restantes atendem B, ou seja, $C_{(3,2)} = 3$ combinações. Assim, a probabilidade de que B ocorra, sabendo da ocorrência de A, é

$$P(B|A) = \frac{3}{1225}.$$

**Exemplo 3.15.** Restavam apenas quatro jogadores no evento 11 do European Poker Tour (EPT), realizado em Malta, em 2015. Valentin Messina, que tinha J♡ J♠, aumentou a aposta, recebendo um 3-bet de Dominik Panka, seu adversário que estava a esquerda, que tinha J♣ J♢. Os outros dois jogadores foldaram e após um 4-bet de Messina,

Dominik foi all-in, recebendo o call. Qual e a probabilidade disso ocorrer? Especificamente, suponha que você tenha J♡ J♠. Sabendo apenas desta informação, qual é a probabilidade de que outro jogador tenha o outro par de valetes nas mãos?
**Resposta:** Seja A o evento em que o jogador a sua esquerda tem um par de valetes nas mãos. Dado B, o evento que você tem J♡ J♠, cada uma das $C_{(50,2)} = 1225$ combinações igualmente prováveis de duas dentre as 50 cartas restantes tem probabilidade condicional $\frac{1}{1225}$. O evento A corresponde a exatamente uma destas combinações (J♣ J♢) e, portanto, $P(A|B) = \frac{1}{1225}$.

**Exemplo 3.16.** Retornemos à mão citada no início desta seção. Suponha que os três jogadores tenham permanecido no jogo e que Wasicka não tenha acertado um flush ou um straight no turn. Qual é a probabilidade que Wasicka acerte um flush ou uma sequência no river?
**Resposta:** Relembre que Wasicka tinha nas mãos 8♠ 7♠, Gold tem 4♠ 3♣, Binger tem A♡ 10♡ e o flop foi 10♣ 6♠ 5♠. Ainda, sabemos que o turn mostrou uma carta que não era de espadas, nem era um 4 ou um 9, já que o jogador não acertou um flush ou uma sequência. Agora, dada a nova informação sobre a carta do turn, temos informações sobre 10 das 52 cartas iniciais. Wasicka fará um flush se o river for uma das oito cartas de espadas ainda não exibidas (A, K, Q, J, 10, 9, 3 ou 2) e fará uma sequência se o river for um dos três noves (o de espadas já foi incluído no flush) ou um dos três quatros que ainda se encontram no baralho (já que o quatro de espadas está na mão de Gold). Assim, das 42 cartas igualmente prováveis, 14 favorecem ao evento citado no enunciado, e a probabilidade condicional que Wasicka acerte um flush ou uma sequência no river, dado que não acertou no turn, é $\frac{14}{42} = \frac{1}{3}$, cerca de 33%.

**Exemplo 3.17.** Suponha que Wasicka tenha imaginado que, dentre as quatro cartas de seus adversários, um deles tivesse o quatro de espadas e que as demais não diminuiriam as possibilidades que ele fizesse um flush ou uma sequência (ou seja, que não teriam cartas de espadas, noves ou quatros). Nestas condições, qual seria a probabilidade que Wasicka acertasse um flush ou uma sequência no turn ou no river?
**Resposta:** Wasicka simula uma condição, tendo assim informações (e suposições) sobre nove cartas do baralho: suas duas pocket cards, as três cartas do flop e as quatro cartas de seus adversários (umas delas desfavorável para o seu flush ou sequência). Das 43 cartas ainda disponíveis no baralho, 29 não ajudam e 14 dariam um flush ou uma sequência para Wasicka: 8 cartas de espadas (já que duas estão na sua

mão, duas no flop e o quatro supostamente com algum oponente) e outras seis que formarão a sequência (três noves e três quatros). Nessas condições, Wasicka não faria um flush ou uma sequência se tanto turn quanto river não mostrassem uma das 14 cartas favoráveis, o que ocorre em $C_{(29,2)} = 406$ dos $C_{(43,2)} = 903$ casos possíveis. Então, a probabilidade do evento A= "Wasicka acerta um flush ou uma sequência no turn ou no river"é $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{406}{903} = \frac{497}{903}$, cerca de 55%.

Claro que uma sequência ou um flush não garantiria a vitória para Wasicka, já que seu adversário poderia acertar uma mão mais forte, como full house ou uma quadra, como veremos à frente.

### 3.2.4 Regra Geral do Produto

Diversas probabilidades relacionadas ao Poker podem ser calculadas com a Regra Geral do Produto.

**Exemplo 3.18.** No dia 5 do evento principal do WSOP, em 2013, Sylvain Loosli, que tinha A$\heartsuit$ Q$\spadesuit$, recebeu um all-in de Brad Myers, que tinha A$\spadesuit$ 10$\clubsuit$, e pagou. O flop trouxe A$\diamondsuit$ 3$\clubsuit$ J$\spadesuit$. Nesse momento, o canal de televisão que efetuava a transmissão do evento mostrou que Loosli tinha 85% de chances de vencer, contra apenas 11% de Myers. O turn mostrou um 10$\heartsuit$ e o river um J$\heartsuit$, eliminando de forma dramática Myers (AAJJQ contra AAJJ10). Qual é a probabilidade disso ocorrer? Especificamente, dadas as cartas dos dois jogadores e o flop, qual é a probabilidade que Myers fique com uma mão melhor no turn, mas acabe perdendo o pote no river?
**Resposta:** Veja que, com as informações dadas, a única carta que colocaria Myers à frente de seu adversário seria um 10. Das 45 cartas que ainda estão ocultas, três são 10. Se o 10 sair no turn, dada essa informação, teremos 44 cartas igualmente prováveis para o river e apenas seis delas (Q$\heartsuit$ Q$\clubsuit$ Q$\diamondsuit$ J$\heartsuit$ J$\clubsuit$ J$\diamondsuit$) poderão fazer Mayers perder o jogo. Denotando por A o evento "10 saiu no turn"e por B o evento "Myers perde o jogo", temos que que

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= \frac{3}{45} \cdot \frac{6}{44} = \frac{1}{110}. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.19.** Durante o World Series of Poker Tournament of Champions, em 2010, uma mão envolvendo Antonio Esfandiari e Daniel Negreanu resultou num board com as cartas 2$\spadesuit$ A$\spadesuit$ 3$\spadesuit$ 5$\spadesuit$ 4$\spadesuit$, um belo

straight flush. Já sabemos que a probabilidade de que cinco dentre as 52 cartas formem um straight flush é de $\frac{3}{216580}$. E qual é a probabilidade que o board mostre um straight ordenado (não necessariamente um straight flush), da carta de menor para a carta de maior valor?
**Resposta:** Temos dez possibilidades distintas para um straight, tendo como carta inicial alguma do conjunto B={A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Denotemos por $A_i, i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, o evento "saiu a i-ésima carta da sequência", onde a primeira carta tem um dos valores do conjunto B, a segunda carta é próxima da sequência ordenada, e assim por diante. Temos um total de 10 sequências ordenadas distintas. Assim, a probabilidade que o board mostre uma sequência ordenada de cartas é

$$\begin{aligned}
& 10 \cdot P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cdot \\
& \cdot P(A_5|A_1 \cap \ldots \cap A_4) \\
= \; & 10 \cdot \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{48} \cdot \frac{4}{44} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{36} \\
= \; & 10 \cdot \frac{1}{154440} = \frac{1}{15444}.
\end{aligned}$$

**Exemplo 3.20.** Qual é a probabilidade que quatro ases sejam expostos sequencialmente, isto é, um ao lado do outro, no board de uma mão de Poker?
**Resposta:** No Exemplo 1.30 calculamos a probabilidade de que quatro ases fossem retirados sequencialmente de um baralho, sem reposição. Agora, queremos saber qual é a probabilidade que os quatro ases apareçam em sequência. Veja que, para a ocorrência deste evento, poderemos ter as primeiras quatro cartas sendo ases (que chamaremos de evento $B_1$), com a última sendo uma das 48 cartas restantes, ou a primeira carta diferente de Ás, com as outras quatro satisfazendo o enunciado (evento $B_2$). Assim, utilizado a Regra Geral do Produto, temos que

$$\begin{aligned}
P(B_1) &= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} \cdot \frac{48}{48} \\
&= \frac{1}{270725} \\
\text{e} & \\
P(B_2) &= \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{3}{50} \cdot \frac{3}{49} \cdot \frac{1}{48} \\
&= \frac{1}{270725}
\end{aligned}$$

e, portanto, a probabilidade que quatro ases sejam expostos sequencialmente é $\frac{1}{270725} + \frac{1}{270725} = \frac{2}{270725}$, uma em cada 135362,5 mãos jogadas.

### 3.2.5 Teorema da Probabilidade Total

O Teorema da Probabilidade Total é muito útil quando não conhecemos diretamente a probabilidade de um evento, mas conhecemos a sua ocorrência em vários cenários disjuntos (que cobrem todo o espaço amostral) e a probabilidade em cada um destes cenários. Em geral, as probabilidades relacionadas ao Poker são calculadas com base nesse teorema, já que comumente existe mais que uma possibilidade relacionada ao sucesso ou fracasso em uma determinada ação. Exemplificaremos este teorema com a análise da mão citada no início desta seção.

**Exemplo 3.21.** Relembre que Wasicka tinha 8♠ 7♠, Binger tinha A♡ 10♡, Gold tinha 4♠ 3♣ e o flop foi 10♣ 6♠ 5♠. Com as informações disponíveis sobre as cartas dos jogadores e sobre o flop (e supondo que Binger também continuasse no jogo), qual seria a probabilidade que Wasicka vencesse a mão, caso pagasse a aposta?
**Resposta:** Temos informações sobre 9 das 52 cartas, restando portanto 43 cartas equiprováveis para o turn ou para o river, que correspondem a $C_{(43,2)} = 903$ duplas distintas de cartas. Com relação as combinações possíveis para turn e river, consideremos os eventos $A_1$="as duas cartas são de espadas", $A_2$ ="apenas uma das duas cartas é de espadas"e $A_3$ ="nenhuma das duas cartas é de espadas". Veja que os eventos $A_1, A_2$ e $A_3$ formam uma partição do espaço amostral. Denotemos por B o evento "Wasicka vence a mão". Pelo Teorema da Probabilidade Total, temos que $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$. Vamos analisar os diversos casos que dariam a vitória para Wasicka:

- **Duas cartas de espadas:** Oito das 43 cartas são de espadas. Elas podem ser combinadas de $C_{(8,2)} = 28$ maneiras e, portanto, $P(A_1) = \frac{28}{903}$. Apenas duas dessas combinações dariam a vitória para os adversários de Wasicka: A♠10♠ (full house para Binger) e 3♠2♠ (straight flush para Gold). Então, $P(B|A_1) = \frac{26}{28}$ e, portanto,
$$P(B|A_1) \cdot P(A_1) = \frac{26}{28} \cdot \frac{28}{903} = \frac{26}{903}.$$
- **Apenas uma das duas cartas é de espadas:** Cada uma das oito cartas de espadas pode ser combinada com uma das $43 - 8 = 35$ cartas restantes. Temos então um total de $8 \cdot 35 = 280$

possibilidades distintas e, portanto, $P(A_2) = \frac{280}{903}$. Veja que as cartas K, Q, J, 9, 3 e 2 de espadas garantem a vitória de Wasicka, mas as cartas A e 10 podem ser combinadas com outras, dando um full house para um dos adversários.

- *K, Q, J, 9, 3 ou 2 de espadas:* Cada uma destas seis cartas pode ser combinada com qualquer uma das 35 cartas disponíveis, garantindo o flush e a vitória para Wasicka. Aqui, temos $6 \cdot 35 = 210$ casos possíveis.
- *A de espadas:* Saindo o A de espadas, Wasicka teria um flush e Binger teria dois pares, de ases e dez. Assim, a quinta carta não poderia ser um dos outros dois ases restantes (A$\diamondsuit$ ou A$\clubsuit$) ou o 10$\clubsuit$, já que nestes casos Binger faria um full house. Ou seja, o A$\spadesuit$ poderia se combinar com $35 - 3 = 32$ das cartas restantes para dar a vitória para Wasicka.
- *10 de espadas:* Saindo o 10 de espadas, Wasicka teria um flush e Binger teria uma trica de 10. Binger ganharia o jogo se saísse qualquer carta de valor igual a uma das já expostas: 10$\diamondsuit$ (faria quadra) ou A$\diamondsuit$, A$\clubsuit$, 6$\diamondsuit$, 6$\heartsuit$, 6$\clubsuit$, 5$\diamondsuit$, 5$\heartsuit$ ou 5$\clubsuit$ (fazendo então full house). Assim, Wasicka venceria caso o 10 de espadas fosse combinado com uma das $35 - 9 = 26$ cartas restantes.

Portanto, $210 + 32 + 26 = 268$ das 280 combinações possíveis favorecem Wasicka. Assim, temos que $P(B|A_2) = \frac{268}{280}$ e

$$P(B|A_2) \cdot P(A_2) = \frac{268}{280} \cdot \frac{280}{903} = \frac{268}{903}.$$

- **Nenhuma das duas cartas é de espadas:** Das 45 cartas, 35 não são de espadas. Elas podem ser combinadas de $C_{(35,2)} = 595$ modos distintos e, portanto, $P(A_3) = \frac{595}{903}$. As cartas que favoreceriam Wasicka são os 9 e os 4 (sequência) e a dupla 88 (trinca). Vamos ver as possibilidades de vitória com cada uma destas cartas:
  - *Dois noves:* Temos três noves restantes, que podem ser combinados de $C_{(3,2)} = 3$ maneiras distintas.
  - *Um nove:* Cada um dos três noves noves pode ser combinado com uma das $35-3 = 32$ cartas restantes (veja que excluímos os tês noves dentre as cartas possíveis). Temos aqui $3 \cdot 32 = 96$ casos favoráveis.

- *Dois quatros:* Temos três quatros restantes, que podem ser combinados de $C_{(3,2)} = 3$ maneiras distintas.
- *Um quatro:* Temos ainda $32 - 3 = 29$ cartas disponíveis. Cada um dos três quatros pode ser combinado com qualquer uma destas 29 cartas, dando um straight e a vitória para Wasicka. Aqui, são $3 \cdot 29 = 87$ casos favoráveis.
- *Dois oitos:* Os três oitos restantes podem ser combinados de $C_{(3,2)} = 3$ maneiras distintas.

Assim, $3 + 96 + 3 + 87 + 3 = 192$ das 595 combinações distinas possíveis dão a vitória para Wasicka e, portanto, $P(B|A_3) = \frac{192}{595}$. Então,

$$P(B|A_3) \cdot P(A_3) = \frac{192}{595} \cdot \frac{595}{903} = \frac{192}{903}.$$

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) \\ &= \frac{26}{903} + \frac{268}{903} + \frac{192}{903} = \frac{486}{903}. \end{aligned}$$

Ou seja, nas condições dadas, caso Wasicka pagasse a aposta, teria aproximadamente $53,82\%$ de chances de vencer.

### 3.2.6 Teorema de Bayes

Utilizaremos inicialmente as informações do exemplo anterior para modelar o Teorema de Bayes com uma jogada do Poker.

**Exemplo 3.22.** Consideremos a situação descrita no exemplo anterior, supondo ainda que Wasicka tenha pago a aposta e vencido a mão. Com base nestas informações, qual é a probabilidade que exatamente uma das duas cartas (turn ou river) tenha sido uma carta de espadas?
**Resposta:** Utilizando os mesmos eventos e terminologias citados no exemplo anterior, queremos encontrar a probabilidade que exatamente uma das duas últimas cartas do board tenha sido de espadas, dado que Wasicka venceu a mão, isto é, $P(A_2|B)$. Pelo Teorema de Bayes, temos que $P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B)}$. Já sabemos que $P(B|A_2) \cdot P(A_2) = \frac{268}{903}$ e que $P(B) = \frac{486}{903}$ e, portanto, a probabilidade condicionada desejada é

$$P(A_2|B) = \frac{\frac{268}{903}}{\frac{486}{903}} = \frac{268}{486}, \text{ aproximadamente } 55,14\%.$$

Na sequência da jogada descrita no início desta seção, após pensar por algum tempo, Wasicka foldou. A ação surpreendeu muitos dos expectadores do evento, já que mesmo não tendo informações sobre as cartas de seus adversários e não tendo acertado nada no flop, Wasicka tinha uma boa possibilidade de acertar um flush ou uma sequência no turn ou no river (como citado nos Exemplos 3.16 e 3.17) e, assim, estar com uma mão forte na jogada. Binger, que era o chip leader e tinha top pair após o flop, não hesitou e pagou a aposta de Gold, mas viu o board ser completado com 7♣ e Q♠, cartas que deram uma sequência e a vitória para o adversário. Gold aumentou consideravelmente seu stack e poucas rodadas depois acabou vencendo também o torneio, levando para casa esse que até hoje é o maior prêmio já pago ao vencedor de um evento de Poker: 12 milhões de dólares. Veja que, se Wasicka tivesse pago a aposta, venceria a mão e eliminaria Gold, dando ainda um passo importante na busca pelo título.

**Exemplo 3.23.** É o terceiro dia do WSOP 2011. O nível 12 estava com blinds de 1k/2k e ante de 300 fichas, e os ainda quase mil participantes que permaneciam no jogo queriam estar entre as 693 posições que seriam premiadas. Sam Barnhart, com um stack de 260k, estava no BB e recebeu K♠K♣. Um jogador em posição inicial aumentou a aposta para 4,5k, recebendo um 3-bet do brasileiro Denilson Menezes, que estava no botão, para 11k. A ação chegou para Barnhart, que decidiu fazer um 4-bet para 30k. O jogador da posição inicial foldou e Menezes foi all-in, apostando 169,8k. Barnhart tinha uma difícil decisão para tomar: foldar K♠K♣ ou pagar a aposta. Suponha que Menezes iria all-in nessa situação 100% das vezes que tivesse AA, 50% das vezes que tivesse KK e 20% das vezes que tivesse AK ou QQ (e, para as demais mãos, foldaria). Nessas condições, desconsiderando as cartas dos jogadores que foldaram, qual é a probabilidade que Menezes tenha um par de ases, dado que ele foi all-in?
**Resposta:** Denotemos por $A_1$ o evento que o brasileiro tem nas mãos um par de ases, por $A_2$ o evento que ele tem KK, por $A_3$ o evento que ele tem AK e por $A_4$ o evento que Menezes tem QQ nas mãos. Temos informações apenas sobre as duas cartas de Barnhart, restando 50 cartas ocultas. Assim, temos que $P(A_1) = \frac{C_{(4,2)}}{C_{(50,2)}} = \frac{6}{1225}$, $P(A_2) = \frac{1}{C_{(50,2)}} = \frac{1}{1225}$, $P(A_3) = \frac{4 \cdot 2}{C_{(50,2)}} = \frac{8}{1225}$ e $P(A_4) = \frac{C_{(4,2)}}{C_{(50,2)}} = \frac{6}{1225}$. Ainda, denotando por B o evento que Menezes vai all-in, temos que $P(B|A_1) = 1$, $P(B|A_2) = 0,5$, $P(B|A_3) = 0,2$ e $P(B|A_4) = 0,2$.

Então, pelo Teorema da Probabilidade Total, temos que

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + P(A_3)\cdot P(B|A_3) \\ &\quad + P(A_4)\cdot P(B|A_4) \\ &= \frac{6}{1225}\cdot 1 + \frac{1}{1225}\cdot 0,5 + \frac{8}{1225}\cdot 0,2 + \frac{6}{1225}\cdot 0,2 = \frac{93}{12250}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando o Teorema de Bayes, temos que

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{1\cdot \frac{6}{1225}}{\frac{93}{12250}} = \frac{60}{93}, \text{ cerca de } 64{,}51\%.$$

Nesta jogada, após muito tempo pensando, Barnhart foldou. Menezes tinha A♠ A♡.

### 3.2.7 Variáveis Aleatórias Discretas

As abordagens relacionadas as variáveis aleatórias discretas e, em especial, a Esperança Matemática, podem ser amplamente discutidas utilizando-se jogadas de Poker, já que a quantidade de cartas no baralho e o número de combinações distintas possíveis são finitas. Além disso, a ocorrência de determinadas mãos com as respectivas possibilidades de sucesso ou fracasso em uma determinada jogada também são contabilizáveis e, assim, podem auxiliar na compreensão do conceito de variáveis aleatórias discretas.

Nas abordagens seguintes dessa seção, é coerente considerar que mãos de jogadas distintas de Poker são eventos independentes. Utilizaremos as abreviaturas fdp e fda para representar, respectivamente, a distribuição de probabilidade e a distribuição acumulada da v.a..

**Exemplo 3.24.** Consideremos a observação das mãos iniciais possíveis em uma jogada de Poker. Seja X a v.a. definida por X=1, caso um jogador receba um par na mão e por X=0, caso contrário. Qual é a distribuição de probabilidade? E a distribuição acumulada da v.a.?

**Resposta:** Do total de combinações possíveis para formar as duas cartas da mão ($C_{(52,2)} = 1326$), existem $13\cdot C_{(4,2)} = 78$ possibilidades distintas de receber um par, já que são 13 valores de carta e, em cada um deles, as quatro cartas de mesmo valor podem ser combinadas entre si. Então, a probabilidade de iniciar o jogo com um par é $\frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$. Então temos, para a fdp, $p_X(1) = \frac{1}{17}, p_X(0) = \frac{16}{17}$ e $p_X(a) = 0$, para qualquer outro valor $a$ assumido por X. Para a fda, temos

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0; \\ 16/17, \text{ se } 0 \leq x < 1; \\ 1, \text{ se } x \geq 1. \end{cases}$$

**Exemplo 3.25.** Seja X a v.a. definida como a quantidade de reis (K) expostos no board de uma jogada de Poker. Encontremos a fdp e fda associados.

**Resposta:** Um board de cinco cartas pode conter um, dois, três, quatro ou nenhum rei. Para formar o board, as cartas podem ser associadas de $C_{(52,5)} = 2598960$ maneiras distintas. Um rei não aparece em $C_{(48,5)} = 1712304$ boards distintos, aparece uma vez em $4 \cdot C_{(48,4)} = 4 \cdot 194580 = 778320$ combinações diferentes (pois cada um dos quatro reis pode ser associados às combinações de quatro dentre as 48 cartas restantes), duas vezes em $C_{(4,2)} \cdot C_{(48,3)} = 6 \cdot 17296 = 103776$ modos, três vezes em $C_{(4,3)} \cdot C_{(48,2)} = 4 \cdot 1128 = 4512$ combinações e quatro vezes em $1 \cdot 48 = 48$ boards distintos. Assim, a fdp associada é $p_X(0) = \frac{1712304}{2598960}$, $p_X(1) = \frac{778320}{2598960}$, $p_X(2) = \frac{103776}{2598960}$, $p_X(3) = \frac{4512}{2598960}$ e $p_X(4) = \frac{48}{2598960}$. Para a fda, temos

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0; \\ 1712304/2598960, \text{ se } 0 \leq x < 1; \\ 2490624/2598960, \text{ se } 1 \leq x < 2; \\ 2594400/2598960, \text{ se } 2 \leq x < 3; \\ 2598912/2598960, \text{ se } 3 \leq x < 4; \\ 1, \text{ se } x \geq 4. \end{cases}$$

**Exemplo 3.26.** Na mão citada no início da seção, o vencedor levaria o prêmio de 12 milhões de dólares, o segundo ficaria com 6,1 milhões e o terceiro com cerca de 4,1 milhões. Suponha que Jamie Gold, que tinha 60 milhões de fichas, contra as 18 milhões de Paul Wasicka e as 11 milhões de fichas de Michael Binger, estimasse que tinha 60% de chances de vencer o torneio, 30% de ficar em segundo e 10% em terceiro. Seja X a v.a. que denota o valor recebido por Gold, em milhões de dólares. Quais são as fdp e fda associadas?

**Resposta:** A distribuição de probabilidade da v.a. é $p_X(12) = 60\%$, $p_X(6,1) = 30\%$ e $p_X(4,1) = 10\%$. A distribuição acumulada é F(x)=0, se $x < 4,1$;
F(x)=0,1, se $4,1 \leq x < 6,1$;
F(x)=0,4, se $6,1 \leq x < 12$; e
F(x)=1, se $x \geq 12$.

**Exemplo 3.27.** Seja X o número de pares um jogador receberá, nas suas cartas de mão, nas próximas 10 rodadas. Encontre $P(X = 4)$.
**Resposta:** No Exemplo 3.24, vimos que a probabilidade de um jogador receber um par em uma mão inicial é $p = \frac{1}{17}$ e a probabilidade que não receba um par é $q = \frac{16}{17}$. Denotemos por 1 o fato que o jogador recebeu um par e por 0 que não recebeu um par. Podemos escrever {1,1,1,1,0,0,0,0,0,0} para representar o evento que um jogador recebeu pares nas quatro primeiras mãos e não recebeu pares nas seis últimas mãos. A probabilidade associada a este evento específico é $p^4 \cdot q^6$. Contudo, existem outras formas nas quais um jogador poderia receber exatamente quatro pares nas próximas dez rodadas, como por exemplo {1,0,1,1,0,0,1,0,0,0} ou {0,0,0,1,1,1,0,0,1,0}. Veja que a probabilidade de cada uma destas diferentes disposições é $p^4 \cdot q^6$, e existem $C_{(10,4)} = 210$ modos distintos para escolher quatro das dez mãos para receberem um par. Assim, temos que $P(X = 4) = C_{(10,4)} \cdot (1/17)^4 \cdot (16/17)^6$.

### 3.2.8 Esperança Matemática

O conceito de Esperança Matemática (ou valor esperado) é, talvez, um dos mais importantes para a análise do Poker. Livros de estratégia se debruçam sobre as consequências deste conceito, objetivando maximizar o valor esperado (em inglês *Expected Value*), comumente abreviado por EV, de uma determinada ação em uma jogada.

**Exemplo 3.28.** Um famoso tipo de disputa do Texas Hold'em são os torneios no formato *Sit and Go*. Nesta modalidade, a disputa é iniciada quando se atinge o número pré-fixado de jogadores. No PokerStars, famosa plataforma de Poker online, por exemplo, um dos torneio de Sit and Go é da forma Heads Up, onde dois jogadores pagam um buy-in de 1,5 dólar ($) e o vencedor leva o prêmio de $2,76. Suponha que você jogue um desses Heads Up e que você e seu adversário tenham a mesma probabilidade de vencer o torneio. Qual é o valor esperado da sua participação nesse torneio?
**Resposta:** Denotemos por X os ganhos no torneio. Você tem 50% de chances de vencer o torneio (levando a premiação de $2,76 e, portanto, ganhando $2,76-$1,50=$1,26) e 50% de probabilidade de perder

(perdendo \$1,50). Assim, o valor esperado é

$$\begin{aligned} E(X) &= P(X = 1,26) \cdot 1,26 + P(X = -1,50) \cdot (-1,50) \\ &= 0,5 \cdot 1,26 + 0,5 \cdot (-1,50) = -0,12. \end{aligned}$$

Veja que, em nenhum torneio desse formato, você perderá exatamente \$0,12. Isso significa que, a longo prazo, nas condições dadas, um jogador terá perdido uma média de 12 centavos de dólar para cada torneio que disputou.

**Exemplo 3.29.** Você joga um torneio de Sit and Go para nove jogadores que tem um buy-in de 1,5 dólar e garante a premiação de \$5,81, \$3,48 e \$2,32 ao primeiro, segundo e terceiro colocados, respectivamente. Suponha que todos os jogadores tenham a mesma probabilidade de ficar nas posições com premiação do torneio. Qual é o valor esperado de sua participação nesse Sit ando Go?
**Resposta:** Existem $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ maneiras distintas para formar a trinca ordenada dos jogadores premiados. Dessas, você fica em primeiro lugar em $1 \cdot 8 \cdot 7 = 56$ vezes, em segundo lugar $8 \cdot 1 \cdot 7 = 56$ vezes e, também, em 56 casos fica em terceiro. Caso vença, o jogador ganha \$5,81-\$1,50=\$4,31; se ficar em segundo, ganha \$3,48-\$1,50=\$1,98; se ficar em terceiro, lucra \$2,32-\$1,50=\$0,82, perdendo \$1,50 caso não fique na faixa de premiação. Denotemos por X os ganhos no torneios, ou seja, X={4,31; 1,98; 0,82; -1,50 }. Então, o EV da participação em um torneio nessas condições é

$$\begin{aligned} E(X) &= P(X = 4,31) \cdot 4,31 + P(X = 1,98) \cdot 1,98 + P(X = 0,82) \cdot \\ &\quad 0,82 + P(X = -1,50) \cdot (-1,50) \\ &= P(1^o \text{ lugar}) \cdot 4,31 + P(2^o \text{ lugar}) \cdot 1,98 + P(3^o \text{ lugar}) \cdot \\ &\quad 0,82 + P(Perder) \cdot (-1,50) \\ &= \frac{56}{504} \cdot 4,31 + \frac{56}{504} \cdot 1,98 + \frac{56}{504} \cdot 0,82 + \frac{336}{504} \cdot (-1,50) \\ &= -0,21. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.30.** É o quinto dia do Main Event do Europe Poker Tour (EPT) 2015. Doze jogadores, em duas mesas, continuam na disputa e almejam fazer parte da mesa final do evento. Já nos blinds de 12K/24K e ante de 3K, uma mão incrível foi disputada entre o argentino Juan Pastor, que estava em posição inicial, o alemão Christopher Frank, que estava no BB e o espanhol Andrian Mateos, que estava no dealer e era, dentre os três, o jogador com mais fichas. Após uma sequência de

raises, o três jogadores acabaram indo all-in pré-flop. O pote principal estava com 1,302M em fichas e o pote secundário, disputado por Mateos e Pastor, tinha 180K em fichas. O showdown mostrou A♢ A♠ para Pastor, K♡ K♠ para Frank e Q♢ Q♣ para Mateos. Nesse momento, consideradas apenas as cartas dos três jogadores, a emissora que transmitia o torneio mostrava que Pastor tinha 66% de chances de vencer, Frank tinha 18% e Mateos 15%, restando ainda 1% de chances de haver um empate (caso o board mostrasse, por exemplo, 34567). Qual é o número esperado de fichas de Mateos nesta mão?
**Resposta:** Denotemos por X o número de fichas que Mateos terá depois dessa mão. Ele tem 15% de chances de vencer a mão e levar o pote de 1,482M de fichas, 1% de chances de empatar a mão e levar metade do pote secundário (54K) e também um terço do pote principal (434k) e 84% de chances de perder a mão, ficando sem nenhuma ficha. Ou seja, X será 0 se Mateos perder a mão, 488 se ele empatar a mão e 1482 se ele vencer a mão. Para calcular E(X), multiplicamos cada possível valor de X por sua probabilidade e adicionamos os resultados:

$$\begin{aligned} E(X) &= P(X=0)\cdot 0 + P(X=488)\cdot 488 + P(X=1482)\cdot 1482 \\ &= 0,84\cdot 0 + 0,01\cdot 488 + 0,15\cdot 1482 = 227,18. \end{aligned}$$

Naquela mão, o board trouxe 2♢ 10♣ 4♠ Q♡ 7♢ e Mateos venceu a mão com uma trinca de damas, eliminado os dois adversários do torneio. Mais tarde, Mateos acabou vencendo também o torneio e levou para casa mais de 1 milhão de euros destinado ao primeiro lugar. Veja que, como nos dois exemplos anteriores, o valor esperado de X não é próximo de qualquer valor que X poderia assumir.

**Exemplo 3.31.** É a sua primeira mão de um torneio, em que os jogadores iniciam com 100BB. Você recebe A♠ A♡ e faz um raise pré-flop para 6BB. Seu oponente paga e ambos veem o flop: 9♢ 3♣ 6♡. Seu adversário diz que tem um par de reis (suponha que ele não está mentindo) e anuncia o all-in. Nesta situação, é favorável que você pague a aposta na tentativa de dobrar as suas fichas ou que folde, evitando o risco de ser eliminado prematuramente do torneio? Em outras palavras, qual é o EV de pagar sabendo que estamos especificamente jogando contra um par de reis?
**Resposta:** Denotemos por X a quantidade de fichas, em BB, que você receberá nessa jogada. Caso vença, receberá as 112BB que estão acumuladas no pote (contando com a aposta já feita pelo adversário) ou, caso pague a aposta e as cartas não sejam favoráveis, perderá as 94BB que terá que apostar. Na situação dada, você só perderá o jogo se

saírem dois reis ou se sair um rei e a outra carta não for um ás. Temos conhecimento de sete cartas do baralho, restando portando 45 cartas ainda ocultas. Para o turn e river, existem $C_{(45,2)} = 990$ combinações distintas possíveis. Para que você perca, devem sair dois reis (exatamente uma combinação atende a esta situação, já que os outros dois reis estão na mão do oponente) ou deve sair um rei e uma carta diferente de ás (ou seja, cada um dos dois reis pode ser combinado com uma das 45-2-2=41 cartas), o que dá um total de $1 + 41 + 41 = 83$ combinações desfavoráveis para você. Ou seja, das 990 combinações possíveis para turn e river, $990 - 83 = 907$ garantem a sua vitória e, portanto, a probabilidade que você vença mão é $\frac{907}{990} \approx 0,9162$ (e de que perca é $1 - 0,9162 = 0,0838$). Logo, o valor esperado é

$$E(X) = 0,9162 \cdot 112 + 0,0838 \cdot (-94) \approx 94,7.$$

Veja que a jogada apresenta uma Esperança Matemática positiva (+EV) e, assim, pode ser conveniente que você pague a aposta e vá para o showdown.

É importante destacar que o EV e o resultado real podem variar enormemente durante qualquer período de curto prazo. Contudo, para amostragens cada vez maiores, a tendência é que o valor aferido se aproxime cada vez mais do valor esperado teórico. A relação entre a Esperança Matemática e o Poker também é amplamente abordada por David Sklansky ( [SKLANSKY, 2004], p.12.), famoso jogador de Poker e teórico americano. Ele propôs um enunciado que, para ele, é o mais importante na Teoria do Poker, atribuindo a este resultado o nome de "Teorema Fundamental do Poker" (que não se trata de teorema no sentido matemático).

> "Toda vez que você joga uma mão diferente do que jogaria se pudesse ver as cartas de seu adversário, seu adversário lucra; e toda vez que você faz os mesmos movimentos que faria se tivesse visto as cartas de seus adversários, você terá lucro. Da mesma forma, toda vez que seu adversário joga diferente do que jogaria se tivesse visto suas cartas, você ganha, e toda vez que ele joga da mesma maneira que jogaria se visse as suas cartas, você perde."

Ou seja, para ter lucro no longo prazo você deve errar menos do que os jogadores que jogam contra você. Por isso, na teoria do Poker, mais importante do que efetivamente vencer uma determinada mão é ter tomado a decisão correta, ou seja, participar de jogadas com valor esperado positivo, já que a longo prazo a média de vitórias conquistadas estará próxima do valor esperado teórico.

Uma forma de estimar a probabilidade de vitória e decidir se o pagamento de uma aposta é vantajosa ou não é feita através dos *outs*, que são as cartas ainda ocultas do baralho que podem melhorar a sua mão. O conceito de esperança matemática, adaptado para esta situação, pode ser descrito como

$$E(x) = P(x) \cdot A - [1 - P(x)] \cdot a,$$

onde $P(x)$ é a probabilidade de vencer a mão, $A$ é o total acumulado no pote; $1 - P(x)$ a probabilidade de perder a rodada; e $a$ é o valor da aposta. Para que a jogada seja lucrativa a longo prazo, o valor esperado deve ser positivo ($E(x) > 0$) e, portanto,

$$\begin{aligned} P(x) \cdot A - [1 - P(x)] \cdot a &> 0 \\ P(x) \cdot A &> [1 - P(x)] \cdot a \\ a &< \frac{P(x) \cdot A}{1 - P(x)}. \end{aligned}$$

Em geral, jogadores estimam a probabilidade de melhorar a sua mão (e possivelmente vencer a disputa) dividindo o número de outs favoráveis pelo total de cartas ainda ocultas, ou seja,

$$P(x) = \frac{o}{c},$$

onde "$o$" representa a quantidade de outs favoráveis e "$c$" é a quantidade de cartas ainda ocultas e, portanto,

$$a < \frac{\frac{0}{c} \cdot A}{1 - \frac{o}{c}} = \frac{\frac{0 \cdot A}{c}}{\frac{c - o}{c}} = \frac{o \cdot A}{c - o}.$$

Esse resultado é comumente utilizado por jogadores que estudam o Poker, já que otimiza os cálculos e auxilia o processo de tomada de decisão em uma determinada mão.

Finalizemos este capítulo explorando os conceitos de esperança matemática e esperança condicional com algumas situações relacionadas ao Texas Hold'em. O cálculo de algumas das probabilidades envolvidas poderá ser omitido, sendo feito com o auxílio de um software para cálculo de probabilidades de Poker, disponível em [POKERODDS, 2017], dando ênfase às abordagens relacionadas ao valor esperado.

**Exemplo 3.32.** Você recebe suas duas cartas em uma mão de Texas Hold'em. Seja X o número de cartas pretas em sua mão e Y a quantidade de cartas de paus em sua mão.
(a) Qual é o valor esperado de Y?
(b) Qual é $E(Y|X)$?
**Resposta:** (a) Um jogador pode receber nenhuma, uma ou duas cartas de paus. Assim,

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) \\ &= 0 + 1 \cdot 13 \cdot \frac{39}{C(52,2)} + 2 \cdot \frac{C(13,2)}{C(52,2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) Veja que se $X = 0$, então $Y = 0$. Logo, $E(Y|X = 0) = 0$. Se $X = 1$, ou seja, uma das duas cartas da mão é preta, então ou ela é de paus ou é de espadas e, então, $Y = 1$ ou $Y = 0$ (ambos com a mesma probabilidade, $\frac{1}{2}$), respectivamente. Logo, se $X = 1$, então $E(Y|X = 1) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Se as duas cartas forem pretas, ou seja, se $X = 2$, considerando que cada uma das combinações distintas de duas dentre as 26 cartas pretas é equiprovável, podemos analisar a probabilidade de ocorrência de 0, 1 ou 2 cartas de paus. Assim,

$$\begin{aligned} P(Y=0|X=2) &= \frac{C_{(13,2)}}{C_{(26,2)}} = 0,24, \\ P(Y=1|X=2) &= 13 \cdot \frac{13}{C_{(26,2)}} = 0,52, \text{ e} \\ P(Y=2|X=2) &= \frac{C_{(13,2)}}{C_{(26,2)}} = 0,24. \end{aligned}$$

Então, $E(Y|X = 2) = 0 \cdot 0,24 + 1 \cdot 0,52 + 2 \cdot 0,24 = 1$. Em resumo, $E(Y|X) = 0$ se $X = 0$, $E(Y|X) = \frac{1}{2}$ se $X = 1$ e $E(Y|X) = 1$ se $X = 2$.

**Exemplo 3.33.** É a mesa final do BSOP Millions 2017. Dois jogadores continuam na disputa pelo prêmio de R$ 1,06 milhões destinados ao campeão. Saulo Sabioni, com 68M em fichas, recebe 10♣ 9♣ completa o blind com 600k para continuar no jogo. Francisco Neto (14M em fichas), recebe J♣ J♢ e faz um raise para 2,4M, sendo pago por Sabioni. O flop mostra Q♢ J♠ 4♠. Neto, que acertou uma trinca, dá check, Sabioni aposta 1,2M e Neto 3-beta para 2,4M, sendo pago por Sabioni. O turn mostra 6♡. O pote está com 10M em fichas. Suponha que, nesse momento, Francisco Neto faça um all-in de 11M em fichas.

Qual é o valor esperado de Sabioni? Ele deve pagar a aposta?
**Resposta:** Neste momento, Sabioni não tem nenhuma formação de cinco cartas que pode lhe dar a vitória da mão. Ele precisa melhorar sua mão no river para poder vencer a rodada. Existem 8 outs que podem melhorar a sua mão: quatro reis e quatro oitos, com os quais fará uma sequência. Oito das 52 cartas já foram expostas e, portanto, a probabilidade que o turn traga uma das oito cartas que melhorariam a mão de Sabioni e lhe dariam a vitória é $\frac{8}{44} \approx 0,1818$. Neste caso, ele ganharia $10 + 11 = 21$M em fichas. Para ver o river, ele deve pagar a aposta de 11M, tendo uma probabilidade de perder de aproximadamente $1 - 0,1818 = 0,8182$. Então,

$$EV = 21 \cdot 0,1818 + (-11) \cdot 0,8182 = 3,8178 - 9,0002 = -5,1824.$$

O valor esperado seria negativo e, portanto, Sabioni deveria foldar. Contudo, na mão descrita, Neto não fez nenhuma aposta no turn e deixou Sabioni ver o river de graça. A última carta exposta foi um K$\diamondsuit$. Nesse momento Neto aposta 2,8M e Sabioni vai all-in, sendo pago por Neto e vencendo o torneio com uma sequência, levando para casa mais de R$ 1 milhão como prêmio.

**Exemplo 3.34.** Em determinada rodada de Texas Hold'em, os blinds estão 100/200. Você recebe 8♠ 9♠. Um de seus oponentes, que joga *tight agressive* e está no botão, aposta 600 fichas. Você, que está no BB, paga a aposta e os demais jogadores da rodada foldam. O flop mostra 6♠ 8♡ 7♠. Você dá check e seu adversário aposta 650, em um pote que havia acumulado 1300 fichas. Você supõe que seu adversário tem um jogo forte, como AA, KK ou QQ e que você precisa melhorar a mão para vencer. Qual a melhor ação para você: foldar, dar call ou aumentar a aposta?
**Resposta:** Analisaremos a situação de duas maneiras: utilizando a estimativa de outs favoráveis para a vitória (a) e através da probabilidade real de vitória (b), aferido pelo software citado anteriormente. Das 47 cartas ainda ocultas no baralho, você pode melhorar sua mão acertando uma trinca ou quadra de 8 (dois outs), fazendo um flush ou straight flush de espadas (9 outs), acertando o seu segundo par, de noves (dois outs, já que um 9 é de espadas), ou mesmo fazendo uma sequência (6 outs, sendo três 5 e três 10). Assim, das 47 cartas, 19 são outs favoráveis e, portanto, temos para (a) que

$$E(x) = \frac{19}{47} \cdot 1950 - \frac{28}{47} \cdot a.$$

Como a esperança deve ser positiva, devemos ter $\frac{19}{47} \cdot 1950 - \frac{28}{47} \cdot a > 0$, ou seja,

$$a < \frac{37050}{28} \approx 1343,21.$$

Assim, como o valor da aposta é 650, você deve pagar a aposta ou mesmo dar um raise para 1300 fichas.
Agora, para (b), utilizando o software e supondo que seu adversário tenha AA, KK ou QQ (com uma das duas cartas de espadas), temos que a probabilidades de vitória é 61,01%, contra 37,17% de derrota e 1,82% de empate. Neste caso, temos que

$$E(x) = 0,6101 \cdot 1950 + 0,0182 \cdot 975 - 0,3717 \cdot a.$$

Queremos uma esperança positiva, ou seja, $0,6101 \cdot 1950 + 0,0182 \cdot 975 - 0,3717 \cdot a > 0$ e, então,

$$a < \frac{1189,695 + 17,745}{0,3717} \approx 3248,43.$$

Portanto, você não só deve pagar como também aumentar a aposta.

Veja que apesar de ambos os casos apresentarem valor esperado positivo, existe uma grande variação nos resultados encontrados. Assim, embora a Teoria da Probabilidade forneça importantes subsídios que auxiliam sobremaneira a tomada de decisão em jogadas de Poker, o sucesso ou fracasso também está vinculado a outras variáveis. Uma delas é a aleatoriedade, que não pode ser controlada. Outras estão relacionadas ao estudo, a prática e a experiência, que podem ser aperfeiçoadas e lapidadas.

Assim, para saber qual a melhor decisão a ser tomada, cada um dos jogadores utiliza seu arsenal de informações disponíveis (tipo de adversário, posição na mesa, range do adversário, stack de fichas, condições psicológicas, tendências de ação do oponente, dentre outros) e sua experiência para tentar preencher, de maneira mais completa e correta possível, algumas lacunas nas informações incompletas que dispõe das suas cartas e das cartas expostas. Tudo isto para tentar tomar a melhor decisão (indo ao encontro do Teorema Fundamental do Poker) e, ao mesmo tempo, tentar impedir que seus adversários consigam mais informações (ou informações corretas) sobre ele e a sua mão.

# CONCLUSÃO

Apesar da Teoria da Probabilidade ter aplicação direta em diversas áreas, é perceptível que a maior parte das exemplificações de seus conceitos exploram somente situações como lançamento de dados ou moedas ou ainda a extração de cartas do baralho ou bolas de determinadas cores de uma urna. Apesar de serem úteis para o entendimento, geralmente os exemplos não apresentam relação direta com situações comumente vivenciadas pelas pessoas, transformando-se em algo um tanto desmotivador ou, pelo menos, não atrativo. Queríamos deixar de lado estas abordagens tão recorrentes nos materiais didáticos e modelar a Teoria da Probabilidade com outra aplicação concreta, que despertasse o interesse e que estimulasse a leitura e o entendimento, e vislumbramos no Poker uma oportunidade para tal.

No Texas Hold'em, modalidade de Poker que tem ganhado milhões de adeptos pelo mundo nos últimos anos, os jogadores participam de diversos experimentos aleatórios, nos quais devem avaliar as possibilidades e, a partir de informações incompletas, definir se o momento é apropriado para fazer uma aposta ou desistir. Assim, além das abordagens relacionadas ao jogo do Poker oferecerem um modelo eficiente de reprodução de situações reais e atuais do cotidiano, poderiam servir também como molde para estudo dos resultados associados não só com a probabilidade, mas também em outras áreas do conhecimento matemático, como lógica, estatística e análise combinatória, por exemplo.

Iniciamos então o nosso trabalho conceitualizando a Teoria da Probabilidade. Expusemos diversos resultados, propriedades e teoremas usualmente citados em obras bibliográficas, livros de Ensino Médio e em algumas disciplinas de cursos de graduação relacionados a probabilidade e também a estatística, exemplificando cada um dos conceitos elencados.

Em seguida abordamos as principais características do Poker. Buscamos aproximar leitores menos familiarizados com o jogo, apresentando alguns dos principais termos utilizados nas jogadas. Tentamos explicar também as regras gerais e como é o funcionamento de uma rodada de Poker, sem contudo apresentar detalhes mais avançados sobre torneios ou modalidades.

Então, de posse dos conceitos da Teoria da Probabilidade, dispendemos considerável tempo em pesquisas na internet e sites relacionados ao Poker, analisando torneios reais e centenas de mão que servissem de modelo para a exemplificação de todos os conceitos elencados na parte inicial exclusivamente com jogadas do Texas Hold'em.

Acreditamos que o propósito deste trabalho foi atingido: interconectamos a Teoria da Probabilidade com o jogo de Poker, utilizando este famoso jogo de cartas para modelar todos os resultados desta tão fascinante teoria, mostrando ainda, de modo paralelo, como o conhecimento dos resultados associados à aleatoriedade podem otimizar o processo de tomada de decisão em diversas situações da vida e, em particular, no Poker.

## REFERÊNCIAS

[1] CALABRIA, Angelica R. et al. R. A. **Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades**. X Seminário Nacional de História da Matemática, SBHM: Campinas, 2013.

[2] Confederação Brasileira de Texas Hold'em(CBTH). **História do Poker**. Disponível em: <http://www.cbth.org.br/texas-holdem/>. Acesso em: agosto de 2017.

[3] DANTAS, Carlos Alberto Barbosa. **Probabilidade: um curso introdutório**. São Paulo: Edusp, 2008.

[4] EF Desportes. **Poker: origem e evolução histórica**. Disponível em: <http://www.efdeportes.com/efd206/poker-origem-e-evolucao-historica.htm>. Acesso em: agosto de 2017.

[5] FARIAS, Ana M.L, LAURENCEL, Luiz C. **Probabilidade**. Rio de Janeiro: UFF, 2006.

[6] FIGUEIREDO, Ricardo Molina. **Laudo produzido pelo Laboratório de Perícias**. Disponível em: <www.cbth.org.br/cbth/public/?les/DrRicardoMolina.pdf>. Acesso em: junho de 2017.

[7] GADELHA, Augusto. **Uma pequena história da probabilidade**. Notas de Aula: Teoria da Probabilidade I. Curso de Pós-Graduação em Estatística, DME/IM/UFRJ, 2004.

[8] HARRINGTON, Dan, ROBERTIE, B. **Harrington on Hold'em: Expert Strategy for No Limit Tournaments**. Vol. 3. Henderson, NV: Two Plus Two Publishing, 2006.

[9] INTELI POKER. **Cursos de Poker**. Disponível em: <https://www.intelipoker.com/courses>. Acesso em: agosto de 2017.

[10] LAPLACE, Pierre S. **Ensaio filosófico sobre as probabilidades**. Tradução, introdução e notas Pedro Leite de Santana. Rio de Janeiro: Ed. PUC-Rio, 2010.

[11] LOPES, C. E. **O estudo da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores**. [Artigo], Unicamp: Campinas, 2008.

[12] MAGALHÃES, Marcos Nascimento. **Propriedades e Variáveis Aleatórias**. São Paulo: Edusp, 2011.

[13] MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado: Como o acaso determina nossas vidas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2008.

[14] MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

[15] NASCIMENTO, José R. A. **O Poker como ferramenta de ensino da Matemática na Educação Básica**. [Dissertação de mestrado], UFRPE, 2014.

[16] DICIONÁRIO DE POKER. **Dicionário de Poker: principais termos utilizados no jogo**. Disponível em: <http://pokernachapa.com.br/dicionario-do-poker/>. Acesso em: fevereiro de 2018.

[17] POKER ODDS CALCULATOR. **Calculador de probabilidade de Poker**. Disponível em: <https://br.pokernews.com/poker-tools/poker-odds-calculator.html>. Acesso em: dezembro de 2017.

[18] Poker News. **Regras de Poker: como jogar poker passo a passo**. Disponível em: <https://br.pokernews.com/regras-poker/>. Acesso em: agosto de 2017.

[19] PORTAL ACTION. **Probabilidades**. Disponível em: <https://www.portalaction.com.br/probabilidades>. Acesso em: julho de 2017.

[20] Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina/ Universidade Federal de Santa Catarina. Ed. 13. UFSC: Florianópolis, 2016.

[21] SERRA COSTA, José de Jesus da. **Elementos de Probabilidades**. Rio de Janeiro: Campus, 1981.

[22] SKLANSKY, D. **The theory of poker**. Online: Two Plus Two, 2004.

[23] WIKIPÉDIA. **Poker**. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Poquer>. Acesso em: agosto de 2017.

[24] PEOPLE.MATH. **7-Card Poker Hands**. Disponível em: <http://people.math.sfu.ca/ alspach/comp20/>. Acesso em: fevereiro de 2018.

[25] MATH FORUM. **Poker Probabilities with Seven Card Deal**. Disponível em: <http://mathforum.org/library/drmath/view/65306.html>. Acesso em: fevereiro de 2018.

# ANEXO A – Glossário com os principais termos utilizados no Poker

A relação abaixo, adaptada de [POKER, 2018], contém os principais termos utilizados no jogo de Poker.

- **Add-on:** Valor (opcional) pago pela compra de mais fichas ao final de um período pré-determinado.

- **All-in:** Ato de apostar todas as suas fichas em uma determinada mão.

- **Agressor:** É o jogador que fez o raise pré flop: ele é o “agressor”da mão.

- **Ante:** Um pequeno valor em fichas que os jogadores tem que pagar antes de começar a mão.

- **Ax:** Quando você tem um Ás com qualquer outra carta (A4, A5, A6 = Ax)

- **Backdoor:** Quando você ainda tem a possibilidade de acertar uma mão, caso turn e no river ragam as cartas necessárias. Exemplo: você tem A♡ 9♡ e o flop mostra 10♣ 5♡ 4♠. Caso o turn e o river tragam mais duas cartas de copas você acerta o flush. Logo, no flop, você tem um backdoor para o flush.

- **Bad beat:** Quando uma mão que é muito favorita de ganhar acaba perdendo para uma mão que é a menos favorita. Exemplo: você tem A♠ A♡ e seu adversário tem A♢ K♠. A sua probabilidade de vitória é de 92%, contra **7%** de seu adversário. Contudo, o board mostra J♠ K♢ K♣ 4♣ 2♡ e você acaba perdendo a mão.

- **Bankroll:** É a quantidade de dinheiro que você tem disponível para jogar.

- **Bet:** Aposta.

- **Big blind** É a pessoa que, obrigatoriamente, tem que pagar uma aposta cheia antes mesmo de começar a mão. Em geral, é o segundo jogador à esquerda do dealer.

- **Blind:** Os blinds são os jogadores qe devem pagar uma aposta inicial antes da mão começar. O Small Blind, primiero jogador à esquerda do dealer, paga metade do valor de referência da rodada; o Big blind, segundo jogado à esquerda do dealer, para a aposta cheia..

- **Bluff:** É o famoso blefe. Busca fazer com que seu adversário acredite que você tem uma mão melhor do que a dele quando na verdade você não tem.

- **Board:** São as cartas comunitárias que são viradas na mesa, ou seja, as cartas da mesa são o board. No Texas Hold'em, o board contém as três cartas do flop, o turn e o river.

- **Button (botão/dealer):** É o botão que fica na frente do jogador que está sentado na posição do dealer na mão. A cada rodada o botão é passado para o próximo jogador à esquerda, quando este então passa a ser o dealer da rodada. Serve também para identificar o último jogador a agir na mão.

- **Buy-in:** É a taxa de inscrição paga para se inscrever em um torneio ou para se sentar em uma mesa de cash game.

- **BSOP:** Abreviação para Brazilian Series Of Poker.

- **Cash game:** Tipo de jogo onde as fichas apostadas valem dinheiro real.

- **Call:** Pagar uma aposta.

- **Calling station;** É um tipo de jogador passivo, que gosta muito de sempre dar call.

- **Check:** Ocorre quando a ação chega ao jogador que, não existindo apostas anteriores, opta por também não fazer nenhuma aposta, passando a ação para o próximo jogador.

- **Chip leader:** É o jogador que possui mais fichas em um torneio ou um mesa de Poker.

- **Community cards (cartas comunitárias):** São as cartas viradas na mesa, que todos os jogadores as utilizam para formarem suas mãos. No Texas Hold'em, as cartas comunitárias são formadas pelas três que compõe o flop, pelo turn e pelo river.

- **Dealer:** Jogador que está sentado na posição do botão. É o "carteiro" da rodada, sendo o referencial para a distribuição de cartas, que é feita em sentido horário, iniciando pelo primeiro jogador à esquerda do dealer. É também o último jogador a agir na mão.

- **Draw:** Quando um jogador possui uma mão que não formou nada até o momento, mas que pode melhorar nas próximas rodadas. Você tem J♣ T♠ e o flop vem 8♢ 9♠ A♡. Você não tem nada, mas tem um draw de sequência, pois pode melhorar sua mão caso venha um 7 ou Q.

- **Early position:** São consideradas as duas primeiras posições depois dos blinds. Também conhecidas como posições iniciais.

- **Equity:** Sua parte "legítima" em um pote, considerando a sua probabilidade de vencer. Se o pote tem 80 e você tem 50% de chances de vencer a mão, sua equidade é de 40. Transmite uma ideia de quanto você ´´espera"levar em uma rodada.

- **Field:** Quantidade de jogadores em um torneio ou mesa.

- **Fish:** Denominação dada a um jogador considerado fraco, que não sabe muito bem como jogar.

- **Flop:** São as três primeiras cartas comunitárias que são distribuídas na mesa.

- **Flush draw:** Quando falta apenas uma carta para se completar o flush. Por exemplo, você tem 4♣ 5♣ e o flop mostra 2♣ 10♣ 8♠. Caso turn ou river tragam uma carta de paus, você acertará um flush.

- **Flush:** Quando um jogador acerta uma sequência com 5 cartas do mesmo naipe.

- **Fold:** Desistir da mão.

- **Fold equity:** É a chance que você tem de fazer seus oponentes darem fold quando você decide aumentar a aposta ou até mesmo dar um all-in.

- **Four of a kind (Quadra):** Sequência contendo quarto cartas com o mesmo número.

- **Freeroll:** Torneio com entrada gratuita e que mesmo assim garante algum tipo de premiação.

- **Final table (FT):** Mesa final de um torneio.

- **Full house:** Sequência formada por uma trinca e um par.

- **Heads up:** Quando apenas dois jogadores se enfrentam em uma determinada mão.
- **In the Money (ITM):** Momento em que todos os jogadores entram na zona de premiação de um torneio.
- **Kicker:** Carta de valor mais alto, utilizada para determinar qual mão é a melhor. Pertence ao conjunto das cinco cartas que formam a sequência de um jogador, que é comparada ao kicker de outro adversário caso os jogadores possuam uma sequência com mesma força.
- **Late position:** São os jogadores que são os últimos a falar em uma rodada de apostas. Normalmente são considerados late position o jogadores que estão no dealer, no small blind e no big blind.
- **Limp:** Entrar em uma rodada apostando apenas o valor mínimo de aposta da mesa.
- **Limper:** É o jogador que entra de limp.
- **Loose:** Tipo de jogador que gosta de jogar muitas mãos.
- **Middle position:** São as posições intermediárias de uma mesa, que estão entre as posições inicias e finais da mesa.
- **Miniraise:** Fazer o menor raise (aposta) possível no jogo.
- **Multi Table Tournament (MTT):** Torneio com várias mesas simultâneas em disputa.
- **No limit:** Tipo de jogo onde as apostas não tem um limite estipulado.
- **Odds:** É a probabilidade que um jogador tem de completar ou não uma mão.
- **Omaha:** Modalidade de jogo em que os jogadores recebem quarto cartas iniciais e cinco cartas comunitárias. Para fazer a sua mão, deve usar obrigatoriamente duas cartas que tem na mão e outras três da mesa.
- **Out:** São as cartas ainda ocultas que, se saírem, podem melhorar a mão de um jogador.

- **Overpair:** Um par na mão maior do que a maior carta da mesa. Exemplo: QQ em um flop 894.

- **Pocket pair:** Quando um jogador recebe um par como cartas iniciais.

- **Pot limit:** Modalidade de jogo em que a aposta máxima permitida é o valor acumulado no pote.

- **Pote:** Quantia acumulada na mesa, resultante dos valores pagos pelo small e big blind e das demais apostas feitas em uma determinada mão.

- **Pot odds:** É a quantidade de dinheiro que se tem no pote, em comparação com a quantidade de dinheiro que você tem que pagar para continuar jogando.

- **Range:** Conjunto de todas as combinações de mãos possíveis que você acredita que o seu oponente possa ter.

- **Raise:** Aumentar uma aposta.

- **Re-raise:** É quando se aumenta uma aposta, caso ela já tenha sido aumentada anteriormente.

- **River:** É a ultima carta comunitária a ser mostrada mesa.

- **Royal Straight Flush:** Sequência ordenada, do 10 ao A, com todas as cartas do mesmo naipe. É a melhor mão possível no poker.

- **Satélite:** Espécie de torneio qualificatório, onde o prêmio é a entrada para um torneio com buy-in mais caro.

- **Short stack:** Quando um jogador tem uma quantidade de fichas relativamente baixa em comparação com o valor do blind. Em geral, é considerado short stack um jogador com 10 big blinds ou menos.

- **Showdown:** No final da última rodada de apostas, os jogadores envolvidos na mão mostram as cartas para ver quem é o vencedor.

- **Small blind:** Jogador que paga metade da aposta inicial obrigatória. É o primeiro jogador à esquerda do dealer.

- **Split pot:** Quando se divide o pote entre dois ou mais jogadores.

- **Steal:** Quando um jogador decide dar raise com a intenção de apenas “roubar”os blinds (fazer uma aposta objetivando forçar os demais jogadores a fazer fold, para ficar com as fichas acumuladas no pote).
- **Straight:** Sequência formadas por cinco cartas ordenadas, não sendo todas elas do mesmo naipe.
- **Straight flush:** Sequência formada por cinco cartas em sequencia, todas do mesmo naipe.
- **Tree of a kind:** Quando se acerta uma trinca.
- **Tight:** Estilo de jogador conservador, que tende a jogar poucas mãos.
- **Tilt:** Jogador que começa a jogar de maneira errada após ter perdido uma mão anterior.
- **Top pair:** Quando se acerta o par de maior valor na mesa.
- **Turn:** É a quarta carta comunitária exposta na mesa.
- **WSOP:** Abreviação para World Series of Poker.