Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

As deficiências conceituais por trás dos erros

Por

Elson Nascimento Lima

Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Abril de 2013

Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Elson Nascimento Lima

As deficiências conceituais por trás dos erros

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito final para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT

Orientador: Prof^{o}. Dr. Eder Mateus de Souza

São Cristóvão - Sergipe
Abril de 2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

L732d
Lima, Elson Nascimento
As deficiências conceituais por trás dos erros / Elson Nascimento Lima; orientador Eder Mateus de Souza – São Cristóvão, 2013.
46 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ensino médio. 3. Aprendizagem. 4. Educação matemática. I. Souza, Éder Mateus de, orient. II. Título

CDU 51:37.01

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

As deficiências conceituais por trás dos erros

por

Elson Nascimento Lima

Aprovada pela Banca Examinadora:

Éder Mateus de Souza

Prof. Dr. Éder Mateus de Souza - UFS
Orientador

Ademakson Souza Araújo

Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo - UEFS
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Rodrigo Gondim Neves – UFRPE
Segundo Examinador

São Cristóvão, 12 de abril de 2013

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Sumário

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

- A Deus, criador de Tudo.
- Aos meus pais, por todo esforço que fizeram para que eu estudasse.
- Ao professor Dr. Eder Mateus de Souza, por sua orientação essecialmente prática.
- Aos professores Dr. Ademakson Araújo e Dr. Rodrigo Gondim por fazerem parte da banca examinadora.
- A Clewilson Soares, por ter me ouvido nos momentos mais críticos .
- Aos meus familiares: avós, tios e primos. Obrigado pela atenção!
- Aos grandes amigos: Silvia Bonfim e Rafael França, este por me fazer rir à toa.
- Aos professores: Kalasas Vasconcelos de Araújo, Éder Mateus de Souza, Fábio Santos, Danilo Felizardo, Almir Rogério e Naldisson Santos pelos ensinamentos.
- Aos meus colegas de mestrado, em particular a Carlos Alberto, Marcele Moreno e Evani Machado, esta por ter muitas vezes me colocado para estudar.
- A Aristela Arestides, por sua ajuda indispensável.
- Ao professor Dr. Milton Souza Ribeiro, Miltão, pelas ideias dadas.
- A Daniele Mendonça, pela companhia diária.

Resumo

O objetivo deste trabalho é fazermos uma análise das deficiências conceituais por trás dos erros cometidos pelos candidatos/professores na resolução da questão discursiva 2 do Exame Nacional de Acesso ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT 2013 em Sergipe, cujo enunciado é o seguinte:

QUESTÃO DISCURSIVA 2

Decida se cada uma das duas das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa, justificando sua decisão.

(A) "$|a - b| \leq ||a| - |b||$, para quaisquer números reais a e b"
(B) "$|a + b| \leq |a| + |b|$, para quaisquer números reais a e b"

Não se trata apenas de mera catalogação de erros, mas sim de uma reflexão sobre as deficiências em conceitos de conteúdos que fazem parte da matriz curricular dos ensinos fundamental e médio. Analisamos as 180 soluções dos candidatos/professores, catalogamos os principais erros, fizemos uma pesquisa sobre a teoria acerca do papel do erro na aprendizagem e a partir do que observamos verificamos, dentre outras coisas, que os discentes dos cursos de Licenciatura em Matemática em Sergipe apresentam formação deficiente.

Palavras Chaves: deficiências conceituais, erros

Abstract

This study aims to analyze the conceptual shortcomings through the mistakes made by the candidates/teachers in addressing the issue of discursive question 2 of the Exame Nacional de Acesso ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT 2013 in Sergipe, which statement is as it follows:

DISCURSIVE QUESTION 2

Decide whether each of the two following statements is true or false, explaining your reason for choosing it.

(A) "$|a-b| \leq ||a|-|b||$, for any real numbers a and b"
(B) "$|a+b| \leq |a|+|b|$, for any real numbers a and b"

It is not only the mere cataloging errors, but it is also a reflection on the shortcomings in content concepts that are part of the curriculum of the Elementary and High School levels. We analyzed the solutions of 180 candidates/teachers , we cataloged the major mistakes, we researched on the theory of the role of errors in learning process, and through what we observed, we realized, among other results, that the students of Teacher?s Degree in Mathematics (Licenciatura em Matemática) in Sergipe have an unsatisfactory training.

Key-words: conceptual shortcomings, errors.

Introdução

Neste trabalho, fizemos uma análise das deficiências conceituais por trás dos erros cometidos pelos candidatos/professores na resolução da questão discursiva 2 do Exame Nacional de Acesso ao Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT 2013 em Sergipe, cujo enunciado é o seguinte:

QUESTÃO DISCURSIVA 2

Decida se cada uma das duas das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa, justificando sua decisão.

(A) "$|a-b| \leq ||a|-|b||$, para quaisquer números reais a e b"
(B) "$|a+b| \leq |a|+|b|$, para quaisquer números reais a e b"

Não se trata de apenas mera catalogação de erros, mas sim de uma reflexão sobre as deficiências em conceitos de conteúdos que fazem parte da matriz curricular dos ensinos fundamental e médio. Na medida em que o PROFMAT tem como público alvo, principalmente, os professores da rede pública seja nas esferas municipal, estadual e federal, a constatação de tais deficiências não deixa de ser um diagnóstico da atual situação da educacão matemática em Sergipe. Partindo do pressuposto de que só se ensina o que se sabe, não saber implica cometer erros grosseiros dos mais variados tipos.

A motivação para este trabalho surgiu do meu interesse em buscar o erro na resolução de alguns exercícios das disciplinas do primeiro ano do mestrado. Assim, quando o tema foi sugerido pelo professor Eder Mateus, naturalmente me interessei e me propus a lançar um novo olhar sobre o erro cometido pelos candidatos/professores ao resolver a questão discursiva 2 do Exame Nacional de Acesso ao PROFMAT 2013 em Sergipe.

Para tanto, analisamos a solução de todos os candidatos e separamos os erros em dois tipos: erros de conceito em relação a módulo, inequação modular e desigualdade triangular e erros de lógica. Para efeito de organização do material, numeramos as 180 provas uma vez que não havia identificação do autor da resolução.

Para fundamentar nossa análise, fizemos uma pesquisa sobre a literatura referente à questão do erro em artigos e livros de autores nacionais e estrangeiros, dentre os quais destacamos os trabalhos da professora Helena Noronha Cury e da pesquisadora italiana Rafaella Borasi. Em relação ao conteúdo de lógica, utilizei o livro do professor Daniel Cordeiro de Morais. Atualmente, há uma vasta literatura a cerca da questão do erro cometido pelos alunos ao resolver um problema matemático.

Analisamos cada solução da assertiva (A) de tal questão e catalogamos os principais erros cometidos. Aqui verificamos que alguns candidatos tiraram conclusões precipitadas quanto ao valor lógico da alternativa e acabaram errando por isso. Tal assertiva era falsa e portanto bastava explicitar um contraexemplo. Alguns candidatos exibiram apenas casos onde a alternativa era verdadeira e não perceberam, por imaturidade talvez, que havia casos onde alternativa era falsa. Acreditamos que o erro ocorreu simplesmente por que não visualizaram um contraexemplo e não por desconhecerem o seguinte fato lógico: se uma proposição é falsa, basta exibir um exemplo satisfazendo a hipótese e contrariando a tese para mostrar que ela é falsa.

Analisamos cada solução da assertiva (B) e catalogamos os principais erros cometidos. Neste item, observamos erros conceituais em relação a módulo ou valor absoluto de um número real, a inequação modular e a desigualdade triangular em $\mathbb{R}$. Todavia, o principal erro cometido foi de lógica no que diz respeito ao seguinte entendimento: se uma proposição for verdadeira, é preciso fazer uma demonstração e não exibir casos particulares que evidentemente verificam a validade da proposição.

O último resultado do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa, na sigla em inglês), realizado a cada três anos pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) mostra que o Brasil melhorou, mas não há motivos para comemorar. O País, dentre as 65 nações avaliadas, ficou abaixo dos 400 pontos em matemática ocupando 54º posição. Metade dos jovens brasileiros não consegue passar do nível mais básico de compreensão. A mais recente edição da Prova Brasil mostra que o conhecimento dos alunos de nível médio nas escolas públicas é menor do que o dos alunos do último ano do ensino fundamental das escolas privadas. O que fazer para mudarmos esta situação? Qual o nosso papel dentro deste contexto? Promover uma melhora na qualidade da educação e uma maior equidade do sistema educacional é um grande desfio que se impõe.

Capítulo 1

Fundamentação teórico-pedagógica

Avaliar as respostas dos alunos faz parte do cotidiano dos professores em qualquer nível de ensino. Logo, analisar os erros que os alunos cometem na resolução dos exercícios é uma das principais tarefas dos professores de matemática. Mas o que significa avaliar os erros? Quais fatores estão por trás desta ação? Para responder a estes questionamentos nos utilizaremos de um referencial teórico básico, o qual faz inferência direta ao erro como um espaço de reflexão da condição atual da aprendizagem do aluno ou de avaliação das metodologias utilizadas para o ensino.

Cury (1995) defendeu que a forma de avaliar os erros varia, de professor para professor. Para ela, alguns estão preocupados, unicamente, em detectar os erros, sem discuti-los com os alunos; outros aproveitam os erros encontrados e retomam o conteúdo em questão permitindo que os alunos identifiquem suas dificuldades e tentem superá-las; outros, ainda, exploram os erros com os alunos, questionando os limites de validade da resposta dada ou, mesmo, tentando entender como os alunos raciocinam ao resolver a questão. Ainda conforme a autora, independentemente das formas de considerar os erros dos alunos, os professores estão agindo, em geral, de acordo com suas concepções e crenças sobre a natureza da Matemática, sobre a melhor forma de ensiná-la e sobre o que significa aprender Matemática.

Percebe-se que, quando se trata de avaliação de aprendizagem, a maioria dos professores utiliza provas escritas e, ao corrigi-las, apenas eliminam o erro, priorizando os acertos. O erro aqui é visto como algo negativo, sinônimo de fracasso, em contraposição ao acerto. O erro é o atestado da incompetência do aluno.

Nesta perspectiva, Cury (2007) defendeu que o erro geralmente é abominável, e por isso o aluno, temeroso à reação do professor, o esconde. Para ela, esse comportamento possibilita uma reação em cadeia, pois o professor provoca ciladas aos estudantes, que por sua vez, tentam escapar das mesmas para não serem punidos. A autora adverte que essa cadeia deve ser quebrada, o professor deve utilizar o erro como objeto de conhecimento, explorando as dificuldades de seus alunos para que eles as superem.

Cury (2007) concluiu que a análise de erros será uma abordagem de pesquisa e também uma metodologia de ensino, se for empregada em sala de aula com o objetivo de levar os alunos a questionarem suas próprias soluções.

> A análise de erros é uma abordagem de pesquisa com fundamentações teóricas variadas, objetivos distintos e participação de todos os níveis de ensino nas amostras, mas também é uma metodologia de ensino, podendo ser empregada quando se detecta dificuldades na aprendizagem dos alunos e se quer explorá-las em sala de aula. (CURY, 2007, p. 91).

Cury (2004), aponta algumas premissas básicas que devem ser consideradas para análise das soluções:

1. Devolver ao aluno a análise feita e discutir os resultados, aproveitando a oportunidade de fazê-los pensar sobre seus próprios pensamentos;
2. Planejar estratégias para trabalhar com os tópicos onde houve maior incidência de erros;
3. Aproveitar os recursos disponíveis em sala de aula para retomar o conhecimento.

De acordo com a autora, ao analisar a resolução de um problema não somente pelo produto final mas especialmente pelo processo de solução, podemos verificar como o aluno raciocinou, que estratégias usou, detectando suas dificuldades e tecendo hipóteses sobre os erros.

Quando fazemos a correção de uma prova de matemática, o que antecede nossa ação, como professor, é o princípio do terceiro excluído, separando de um lado os "acertos"e de outro os "erros", não existindo um terceiro componente na avaliação. Em seguida, realizamos a contabilidade dos acertos e, atribuímos o merecido valor à prova. Essa atitude docente exclui qualquer possibilidade de refletir sobre os "erros". Estes são simplesmente descartados e ignorados por não dizer respeito à verdade, naquele contexto.

Para Correia (2009), é fundamental observar que o erro é um processo de “indução”do raciocínio lógico matemático, um encadeamento do pensamento que conduz a uma falsa conclusão.

Silva e Buriasco (2006) defendem a idéia do erro, na perspectiva da reflexão da aprendizagem, como um “acerto a ser atingindo”, modificado e melhorado pelos alunos.

> [...] a atitude de analisar constantemente a produção escrita dos alunos contribui para que o professor possa refletir sobre o planejamento, desenvolvimento e avaliação de sua prática pedagógica. Assim evidencia-se a relevância de uma prática avaliativa que se configure, não só, pela identificação de dificuldades, mas prioritariamente pelo reconhecimento da existência de conhecimento, tanto nos erros quanto nos acertos dos alunos. (p. 3)

Nessa discussão, podemos identificar o erro do aluno como uma saber que ele possui, construído de alguma forma, tornando-se necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem suas certezas, levando-o a um questionamento sobre suas respostas. Assim, a análise de erros também pode ser entendida como uma metodologia de ensino, se forem elaboradas atividades de sala de aula em que os erros dos alunos sejam explorados e aproveitados como ferramentas para a aprendizagem. (Cury)

Desta forma, Raffaella Borasi, pesquisadora italiana radicada nos Estados Unidos, propõe alternativas para o uso dos erros no processo de ensino e aprendizagem. Segundo ela, pode-se remediar “falhas”detectadas nas respostas dos alunos, descobrir novos conceitos a partir do aprofundamento de estudos sobre erros cometidos ou pesquisar processos cognitivos dos estudantes a partir de suas respostas.

Borasi (1985) defendeu que a análise das respostas, além de ser uma metodologia de pesquisa, pode ser, também, enfocada como metodologia de ensino, se for empregada em sala de aula, como “trampolim”para a aprendizagem.

Para a pesquisadora italiana, ao analisar os erros temos dois objetivos: eliminá-los ou explorar suas potencialidades. Em ambos os casos, estamos focalizando o conteúdo técnico-matemático do erro, a natureza da Matemática ou o processo de aprendizagem dessa disciplina.

Ainda de acordo com esta estudiosa, pesquisas utilizando esta interpretação da função dos erros têm fornecido valiosas contribuições à educação matemática, tais como o aumento da consciência das diferenças individuais, as dificuldades da aprendizagem matemática e a percepção da ineficiência de solucionar esses erros por uma simples explicação do mesmo tópico novamente ou designando a prática de exercícios adicionais.

A autora nos escreve sobre o uso que os matemáticos fazem dos próprios erros em suas pesquisas diárias. Conjecturas incorretas, palpites injustificados e resultados parciais são todos necessários e inestimáveis passos na criação de novos resultados matemáticos e propõe que não só matemáticos profissionais e gênios façam uso do potencial dos erros matemáticos como trampolins para solução e representação de problemas e para o pensamento crítico da natureza da Matemática. Os estudantes de Matemática em seus próprios níveis, tratando com as mais elementares áreas da matemática, podem beneficiar-se de uma interpretação dos erros como motivação e meio de investigação matemática.

Macedo (1994) discute o erro no contexto escolar, fazendo uso da teoria de Piaget como referencial principal. Duas formas de funcionamento do erro são analisadas: a dimensão formal (do adulto) e a dimensão natural (da criança). No nível formal, o erro opõe-se ao acerto. Todavia, a escola contempla duas formas antagônicas de lidar com o erro: "uma que não perdoa o erro e outra que é generosa com o erro"(Macedo, 1994, p. 67).

Segundo esse autor, tanto o erro quanto o acerto fazem parte do processo de invenção e descoberta. Na dimensão formal, o erro é algo "ruim"que precisa ser evitado ou punido. Preocupada apenas com os resultados da criança, no culto ao acerto, a escola estimula o "apagamento"do erro. Esse autor afirma ainda que este quase sempre foi tratado como um fracasso e, por causa disso, conduzido a alguma espécie de punição. Na escola tradicional, o erro deve ser eliminado, apagado para escrever o correto no lugar. Esse autor ainda traz a questão do erro associado à idéia de "pecado", vindo da formação religiosa: fazer algo errado e ser punido porque errou.

Na perspectiva construtivista, a cultura do erro enquanto fracasso, tem aos poucos cedido espaço para uma cultura que o admite como elemento que pode ajudar na construção do conhecimento. De acordo com Macedo (1994, p. 70), para Piaget o erro é um elemento possível e até necessário, erro construtivo, que faz parte do processo onde está se construindo um conceito, uma noção; erro observável; tomar o erro como um objeto o qual a criança seja capaz de refletir sobre o mesmo. Defendeu que a escola tradicional rejeita a resposta não correta e a apaga, o professor é tido como dono do saber, enquanto que na perspectiva construtivista, deve-se atuar na raiz desse erro, no processo que produz esse erro, no qual o professor deixa de ser o "dono do saber"para adotar uma postura de investigador da sua prática pedagógica à luz das teorias que surgem.

Segundo Pinto (2000), os erros dos alunos não são mais considerados possíveis de serem eliminados por uma simples repetição, ou por atenção por parte do professor. Pelo contrário, os erros não têm mais um papel marginal na Didática, pois eles passaram para o centro de reflexão teórica da Didática e da sua prática experimental.

Indo de encontro ao que prega as didáticas tradicionais, em que o erro servia, geralmente, como indicador do fracasso do aluno, nas novas teorias ele se apresenta como um reflexo do pensamento da criança, sendo percebido como manifestação positiva e de grande valor pedagógico.

Assim entendeu Pinto (2000),

> Se numa avaliação seletiva, o erro tem um papel delimitado pelos resultados, ao perder sua função controladora, ele passa a ocupar um papel relevante na aprendizagem: o erro é um conhecimento; ele mostra o caminho do acerto que já está ali implícito. Nesta dialética, o erro aparece como um divisor de águas de duas tendências fortes na educação. Se na pedagogia tradicional, centrada no professor, o relevante era saber o que se ensina, na pedagogia nova a preocupação do professor é saber como as crianças aprendem. (PINTO, 2000, p. 12).

Pinto (2000) afirma que, aos erros dos alunos em Matemática, outrora eram dados tratamentos sentenciosos, além de uma total ausência de discussão, pelos agentes da escola, da função do erro na construção do conhecimento do aluno. Isso evidencia a participação da escola na produção do fracasso escolar.

De acordo com Buriasco (2000), a excessiva preocupação com o produto da avaliação leva ao mito da nota verdadeira. Para a autora, esse problema só se resolve se deixarmos de dar tanta atenção para o produto e centrarmos nosso interesse no processo de produção para conhecer e melhorá-la e ajudar o produtor. A avaliação tem se desviado de sua função diagnóstica e se voltado, quase exclusivamente, para a função classificatória, pela competição incentivada pelo modo de vida da sociedade. Assim, tem frequentemente definido a trajetória escolar do aluno, às vezes pela sua retenção, pela sua eliminação da escola, e até pela escolha do tipo de profissão que exercerá no futuro.

Capítulo 2

Conteúdos e erros cometidos

Vamos inicialmente explicitar as definições de módulo ou valor absoluto de um número real, de inequação modular e de desigualdade triangular à luz do módulo. Exibiremos exemplos com resolução a partir das definições e em seguida mostraremos algumas soluções dos candidatos/professores evidenciando o erro cometido. Falaremos sobre a Lógica Formal de Proposições, seus conceitos e princípios, e também exibiremos exemplos para, em seguida, mostrar algumas soluções dos candidatos/professores evidenciando o erro cometido.

2.1 Erros do Tipo 1

Para analisar a questão discursiva 2 do Exame Nacional de Acesso 2013, entendemos que a mesma está inserida no tema da matemática denominado "desigualdade modular". Tal tema se fundamenta a partir das seguintes assertivas:

Definição 2.1.1. *O módulo ou valor absoluto de um número real x é o próprio x se $x \geq 0$ e é o oposto de x se $x < 0$; assim,*

$$|x| = x, se\ x \geq 0\ e\ |x| = -x, se\ x < 0 \tag{2.1}$$

Decorrem da definição:

1. $|x| \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $|x|^2 = x^2$

4. $|x| = max\{x, -x\}$

Definição 2.1.2. *Uma inequação modular é toda expressão matemática da forma* $|x| < a, |x| \leq a, |x| > a$ *ou* $|x| \geq a$*, com* $a > 0$*.*

Solução de uma inequação modular.

$|x| < a$ e $a > 0 \Leftrightarrow -a < x < a$

$|x| > a$ e $a > 0 \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$

Exemplo 2.1.1.

1. *Resolva em* $\mathbb{R}$*:* $|2x + 1| < 3$
Solução:
$|2x + 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x + 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 1$

2. *Resolva em* $\mathbb{R}$*:* $|2x - 3| \geq 1$
Solução:
$|2x - 3| \geq 1 \Leftrightarrow 2x - 3 \geq 1$ *ou* $2x - 3 \leq -1 \Rightarrow x \geq 2$ *ou* $x \leq 1$

Teorema 2.1.1. *Se* a *e* b *são números reais, então* $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(Desigualdade Triangular em* $\mathbb{R}$*)*

Demonstração: $|a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2 \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$ ∎

O objetivo da questão discursiva 2 no Exame Nacional de Acesso 2013 ao PROFMAT é avaliar, ao nosso ver, a capacidade de compreensão dos candidatos em relação a:

- resolução de inequações modulares;
- quando é necessário usar um contraexemplo e quando usar uma demonstração dada uma proposição;
- compreensão do tema "módulo";
- compreensão de Lógica Formal de Proposições.

Ao observarmos a figura (2.1), podemos inferir algumas considerações sobre a resposta dos candidatos. Tal figura (2.1) é uma resposta representativa da amostra que escolhemos. Nela, apresentamos a solução de um candidato e percebemos o seu desconhecimento em relação ao conceito de módulo de um número real. Poderemos levantar as seguintes indagações: o candidato/professor não entendeu a definição de módulo de um número real mesmo tendo visto tal conceito na sua graduação ou nem viu tal conceito ou ainda, não achou que era importante e portanto negligenciou em compreendê-lo. Do total de candidatos, 29, 44% apresentaram deficiência em relação ao conceito de módulo.

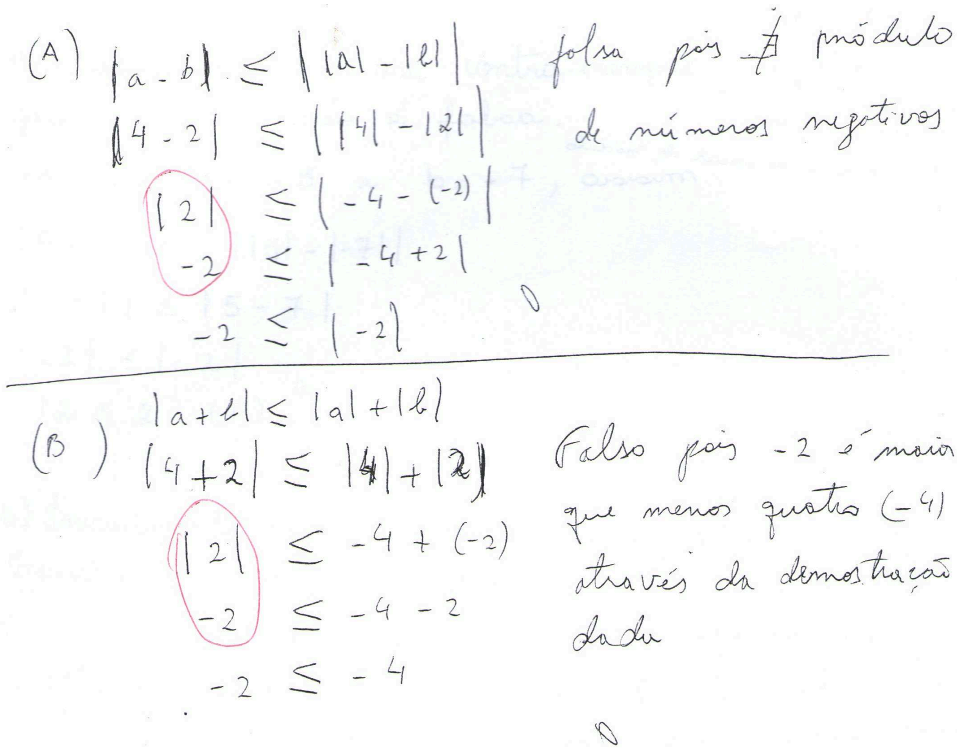


Figura 2.1: O candidato mostra deficiência no conceito de módulo de um número real.

Na figura (2.2), que é outra resposta representativa da nossa amostra, podemos observar outra classe de erro, o erro por falta. O erro do candidato foi considerar apenas uma das condições da definição de módulo. No caso, $|a| = a$, sem especificar a condição $a \geq 0$.

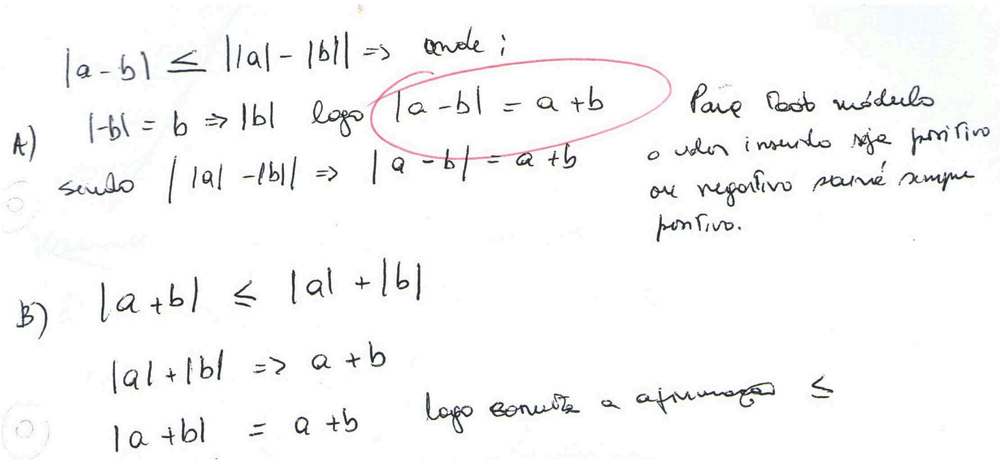


Figura 2.2: Em (B), o candidato considerou $|a| = a$.

2.2 Erros do Tipo 2

Nesta seção discorreremos sobre Lógica Formal de Proposições, suas definições, propriedades, exibiremos exemplos e mostraremos algumas soluções apresentadas pelos candidatos com seu respectivo erro.

Definição 2.2.1. *Uma **sentença** ou **proposição** é uma frase expressa em linguagem matemática, podendo conter apenas símbolos matemáticos, que cumpre as condições:*

1. *Apresenta-se estruturada como uma oração, com sujeito e predicado, incluindo o verbo.*

2. *É afirmativa declarativa*

3. *Satisfaz os seguintes princípios:*

3.1 ***Princípio do Terceiro Excluído**: uma proposição ou é verdadeira ou é falsa, nunca um 3º caso.*

3.2 ***Princípio da Não-contradição**: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa simultaneamente.*

Exemplo 2.2.1.

1. *2 é o único primo par*

2. $2 \geq 3$

3. *O número 14 não é maior do que ou igual a 15*

Não são proposições lógicas:

- Orações interrogativas. Exemplo: 2 é o único primo par?
- Orações exclamativas. Exemplo: Ufa!
- Frases imperativas. Exemplo: Corra.
- Frases sem verbo. Exemplo: o caderno de Maria
- Frases que indicam juizo de valor. Exemplo: Este livro é bom.
- Sentençãs abertas. Exemplo: $x + 2$

Definição 2.2.2. *Chama-se proposição simples aquela que não contém mais de uma proposição em sua formação.*

Exemplo 2.2.2.

1. *p: 1 é primo.*

2. *q:* $2 + 2 = 4$.

Negação de uma proposição simples

Seja p uma proposição simples. A negação de p é denotada por $\sim p$ e tem valor lógico contrário ao de p.

Exemplo 2.2.3.

1. $p : 2 \geq 0$ *(Proposição verdadeira)*
$\sim p : 2 < 0$ *(Proposição falsa)*

2. $p : 2 + 1 = 7$ *(Proposição falsa)*
$\sim p : 2 + 1 \neq 7$ *(Proposição verdadeira)*

Definição 2.2.3. *Chama-se proposição composta aquela que é formada por proposições simples unidas por conectivos lógicos.*

Exemplo 2.2.4.

1. $p : 2 \geq 0$ *e* $3 \neq 1 + 2$.

2. $p : 2 \geq 0$ *ou* $3 \neq 1 + 2$.

3. *Se um número é par, então é divisível por 2.*

4. $5^2 = 25$ *se, e somente se,* $3^0 = 1$.

Assim, temos os seguintes conectivos lógicos: "e", "ou", "se...então" e "se, e somente se".

Definição 2.2.4. ***(Conjunção)*** *Sejam p e q proposições simples. A proposição composta formada por estas proposições unidas pelo conectivo "e", é chamada conjunção das sentenças p e q. Denota-se a proposição conjuntiva por* $p \wedge q$ *(lê-se: p e q).*

Exemplo 2.2.5. *Sejam as proposições*

p: Existe $x \in \mathbb{R}$*, tal que* $x - 2 > 3$
q: Para todo $y \in \mathbb{R}$*, tem-se* $y^4 > 1$

Podemos construir a proposição:

$p \wedge q$: Existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $x - 2 > 3$ e para todo $y \in \mathbb{R}$, tem-se $y^4 > 1$

Definição 2.2.5. ***(Valor lógico de uma proposição conjuntiva)*** *Uma proposição conjuntiva* $p \wedge q$ *é verdadeira se as duas proposições forem verdadeiras. Logo, basta que uma das proposições seja falsa para que* $p \wedge q$ *seja falsa.*

Exemplo 2.2.6.

1. $p : 5 > 1$ *(Proposição verdadeira)*
$q : -1 > 0$ *(Proposição falsa)*
$p \wedge q$*:* $5 > 1$ *e* $-1 > 0$ *(Proposição falsa, pois uma das sentenças é falsa).*

2. $p : 5 > 1$ *(Proposição verdadeira)*
$q : 1 + 1 = 2$ *(Proposição verdadeira)*
$p \wedge q$*:* $5 > 1$ *e* $1 + 1 = 2$ *(Proposição verdadeira, pois as duas proposições são verdadeiras).*

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 2.1: Tabela-verdade da conjunção

Definição 2.2.6. ***(Disjunção)*** *Sejam p e q proposições simples. A proposição composta formada por estas proposições unidas pelo conectivo "ou", é chamada disjunção das sentenças p e q. Denota-se a proposição disjuntiva por $p \vee q$ (lê-se: p ou q).*

Sejam as proposições

p: Existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $x - 2 > 3$
q: Para todo $y \in \mathbb{R}$, tem-se $y^4 > 1$

Podemos construir a proposição:

$p \vee q$: Existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $x - 2 > 3$ ou para todo $y \in \mathbb{R}$, tem-se $y^4 > 1$

Definição 2.2.7. ***(Valor lógico de uma proposição disjuntiva)*** *Uma proposição disjuntiva $p \vee q$ é verdadeira quando pelo menos uma das proposições for verdadeira.*

Exemplo 2.2.7.

1. $p : 10 = 10$ *(Proposição verdadeira)*
$q : 10 > 10$ *(Proposição falsa)*
$p \vee q$*:* $10 = 10$ *ou* $10 > 10$ *(Proposição verdadeira, pois uma das sentenças é verdadeira).*

2. $p : 1 > 5$ *(Proposição falsa)*
$q : 4^2 = 8$ *(Proposição falsa)*
$p \vee q$*:* $1 > 5$ *ou* $4^2 = 8$ *(Proposição falsa, pois as duas proposições são falsas).*

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 2.2: Tabela-verdade da disjunção

Na figura (2.3), vemos a solução de um candidato que apresenta deficiência em relação a disjunção.

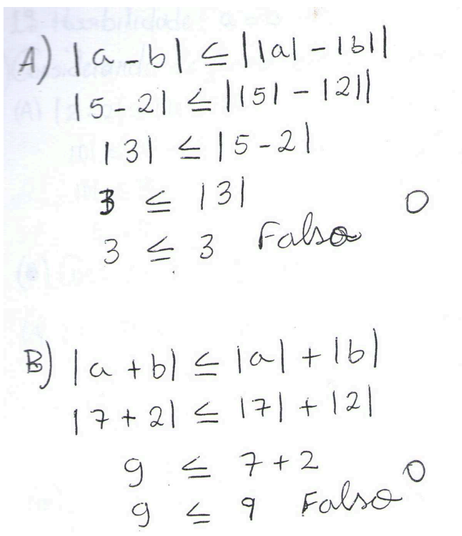


Figura 2.3: O candidato mostra desconhecer o valor lógico da disjunção ou não compreende o símbolo $\leq$.

Definição 2.2.8. ***(Condicional Simples)*** *Na Lógica Formal, a duas proposições dadas, p e q, é possível associar uma outra proposição, $p \to q$, chamada* ***sentença condicional da Lógica Formal****, que é lida como "Se p, então q".*

Definição 2.2.9. ***(Valor lógico de uma sentença condicional)***

Como exemplo motivador, vamos tomar a seguinte sentença condicional

Se eu ganhar na loteria, vou comprar um apartamento novo.

Essa sentença é formada pelas sentenças
p: Eu ganhar na loteria
q: Eu vou comprar um apartamento novo.
Analisemos como os valores lógicos de p e q determinam o valor lógico da sentença condicional $p \to q$:

Se eu ganhar na loteria, vou comprar um apartamento novo.

Observe que a sentença será falsa, apenas no caso de quem a disser estiver mentindo. Vamos à análise:

1. Eu ganhei na loteria (p é V) e comprei uma apartamento novo (q é V). Então eu disse a verdade e, portanto, a sentença *Se eu ganhar na loteria, vou comprar um apartamento novo* é verdadeira ($p \to q$ é V).

2. Eu ganhei na loteria (p é V) e não comprei uma apartamento novo (q é F). Então eu menti e, portanto, a sentença *Se eu ganhar na loteria, vou comprar um apartamento novo* é falsa ($p \to q$ é F).

3. Eu não ganhei na loteria (p é F) mas eu comprei uma apartamento novo (q é V).Ninguém pode me acusar que eu menti ao assegurar que *Se eu ganhar na loteria, vou comprar um apartamento novo.* Eu não falei o que ocorreria se *não* ganhasse na loteria. Logo, eu não menti ao assegurar que *Se eu ganhar na loteria, vou comprar um apartamento novo*, ou seja, essa ultima sentença é verdadeira ($p \to q$ é V).

4. Eu não ganhei na loteria (p é F) e não comprei uma apartamento novo (q é F). Ninguém pode me acusar que eu menti ao assegurar que *Se eu ganhar na loteria, vou comprar um apartamento novo.* Mais uma vez, eu não falei o que ocorreria se *não* ganhasse na loteria. Logo, eu não menti ao assegurar que *Se eu ganhar na loteria, vou comprar um apartamento novo*, ou seja, essa ultima sentença também é verdadeira ($p \to q$ é V).

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 2.3: Tabela-verdade da sentença condicional

Nesse contexto, a proposição p chama-se **antecedente** e a proposição q **consequente**. Na Lógica Simbólica Formal, diz-se que a sentença composta $p(r_1, r_2, ..., r_k)$ **implica logicamente** (ou **implica materialmente**) uma sentença composta $q(r_1, r_2, ..., r_k)$ quando $p(r_1, r_2, ..., r_k) \to q(r_1, r_2, ..., r_k)$ é sempre verdade, independentemente dos valores lógicos das sentenças $r_1, r_2, ..., r_k$. Denota-se este fato por $p(r_1, r_2, ..., r_k) \Rightarrow q(r_1, r_2, ..., r_k)$, que é lido como "(A sentença) $p(r_1, r_2, ..., r_k)$ implica logicamente (a sentença) $q(r_1, r_2, ..., r_k)$."

Chamamos **sentença condicional válida** uma sentença condicional $p \to q$ na qual admitindo-se a validade de p, pode-se deduzir a sentença q. Caso contrário, falaremos em **sentença condicional inválida**.

Condição necessária e condição suficiente

A sentença "Se p, então q"pode ser lida das seguintes formas:

p é condição *suficiente* para q;

q é condição *necessária* para p.

Exemplo 2.2.8. *Se n é um número inteiro par, então n é divisível por 2.*

Nessa sentença vamos considerar:
p: n é um número inteiro par e
q: n divisível por 2
Portanto,

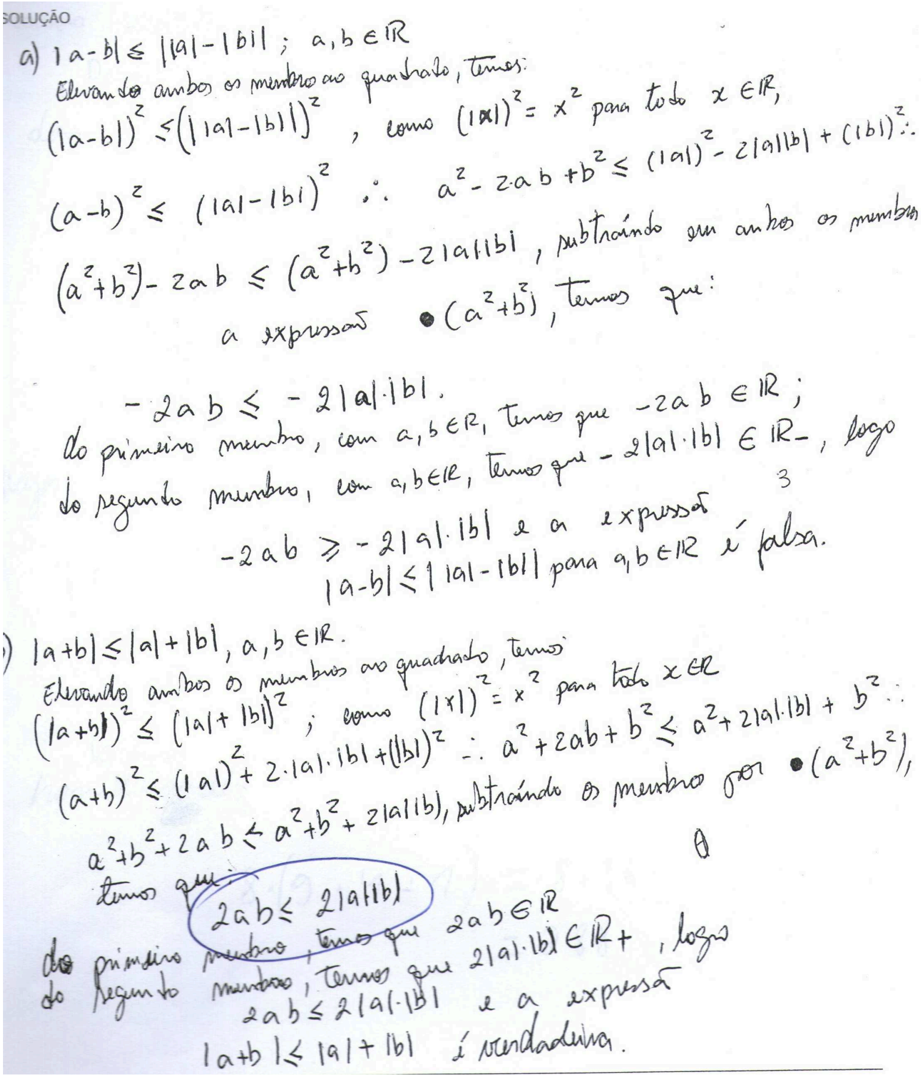
Um número inteiro n ser par é *condição suficiente* para n ser divisível por 2.
Um número inteiro n ser divisível por 2 é *condição necessária* para n ser par.

Outras formas não usuais do condicional:

1. p somente se q;
2. q se p;
3. Se p for verdadeira, então q será verdadeira;
4. p implica q;
5. q é implicada por p;

Importante: *Não se pode deduzir sentenças falsas de sentenças verdadeiras. Em outras palavras, verdade implica verdade.*

Observando a figura (2.4), temos a solução de um candidato que desenvolveu a tese e chegou a uma tautologia ao responder a assertiva (B). Aqui faltou maturidade do candidato uma vez que bastava fazer a volta para acertar a questão. Do total de candidatos, $3,88\%$ cometeram este erro.



SOLUÇÃO

a) $|a-b| \leq ||a|-|b||$; $a,b \in \mathbb{R}$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$(|a-b|)^2 \leq (||a|-|b||)^2$, como $(|x|)^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

$(a-b)^2 \leq (|a|-|b|)^2$ $\therefore$ $a^2 - 2ab + b^2 \leq (|a|)^2 - 2|a||b| + (|b|)^2 \therefore$

$(a^2+b^2) - 2ab \leq (a^2+b^2) - 2|a||b|$, subtraindo em ambos os membros a expressão (a^2+b^2), temos que:

$-2ab \leq -2|a|\cdot|b|$.

do primeiro membro, com $a,b \in \mathbb{R}$, temos que $-2ab \in \mathbb{R}$;

do segundo membro, com $a,b \in \mathbb{R}$, temos que $-2|a|\cdot|b| \in \mathbb{R}_-$, logo

3

$-2ab \geq -2|a|\cdot|b|$ e a expressão $|a-b| \leq ||a|-|b||$ para $a,b \in \mathbb{R}$ é falsa.

b) $|a+b| \leq |a|+|b|$, $a,b \in \mathbb{R}$.

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos

$(|a+b|)^2 \leq (|a|+|b|)^2$; como $(|x|)^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$

$(a+b)^2 \leq (|a|)^2 + 2\cdot|a|\cdot|b| + (|b|)^2 \therefore a^2+2ab+b^2 \leq a^2 + 2|a|\cdot|b| + b^2 \therefore$

$a^2+b^2+2ab \leq a^2+b^2+2|a||b|$, subtraindo os membros por (a^2+b^2),

temos que:

$2ab \leq 2|a||b|$

do primeiro membro, temos que $2ab \in \mathbb{R}$

do segundo membro, temos que $2|a|\cdot|b| \in \mathbb{R}_+$, logo

$2ab \leq 2|a|\cdot|b|$ e a expressão $|a+b| \leq |a|+|b|$ é verdadeira.

Figura 2.4: Em (B), o candidato desenvolveu a tese e chegou a uma tautologia.

Definição 2.2.10. ***(Sentenças equivalentes)*** *Duas sentenças compostas* $p(r_1, r_2, ..., r_k)$ *e* $q(r_1, r_2, ..., r_k)$ *são ditas* ***equivalentes*** *quando possuirem a mesma tabela-verdade, independentemente dos valores lógicos das sentenças simples* $r_1, r_2, ..., r_k$.

Exemplo 2.2.9. $p \to q$ *é equivalente a* $\sim q \to \sim p$ *(Contrapositiva)*

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \to \sim p$
V	V	**V**	F	F	**V**
V	F	**F**	V	F	**F**
F	V	**V**	F	V	**V**
F	F	**V**	V	V	**V**

Tabela 2.4: $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

Exemplo 2.2.10. $p \to q \equiv \sim p \vee q$

Definição 2.2.11. ***(Bicondicional)*** *Na Lógica Formal, a duas proposições dadas, p e q, é possível associar uma outra proposição,* $p \leftrightarrow q$*, chamada* ***sentença bicondicional da Lógica Formal****, que é lida como "p se, e somente se q". Temos que:* $p \leftrightarrow q \equiv p \to q \wedge q \to p$.

Definição 2.2.12. ***(Valor lógico de uma sentença bicondicional)*** *A sentença bicondicional* $p \leftrightarrow q$ *será verdadeira se as proposições p e q forem ambas verdadeiras ou ambas falsas.*

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 2.5: Tabela-verdade da bicondicional

Definição 2.2.13. ***(Leis de Morgan da Lógica: negação de proposições conjuntivas e disjuntivas)***

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

A negação da conjunção (de duas sentenças) é a disjunção das negações (dessas sentenças)

$$e$$

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

A negação da disjunção (de duas sentenças) é a conjunção das negações (dessas sentenças)

Exemplo 2.2.11. *A negação de* $p_1 : 2 \geq 0$ *e* $3^2 = 9$ *é* $\sim p_1 : 2 < 0$ *ou* $3^2 \neq 9$.

Exemplo 2.2.12. *A negação de*

$$p_2 : \sqrt{3} + \sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} \ ou \ \sqrt{3} + \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$$

é

$$\sim p_2 : \sqrt{3} + \sqrt[3]{2} \leqslant \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} \ e \ \sqrt{3} + \sqrt{2} \geqslant \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$$

Definição 2.2.14. ***(Negação do condicional)***

$$\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

Exemplo 2.2.13. *Se* $2 = 1 + 1$, *então 3 é par. A negação é:* $2 = 1 + 1$ *e 3 é impar.*

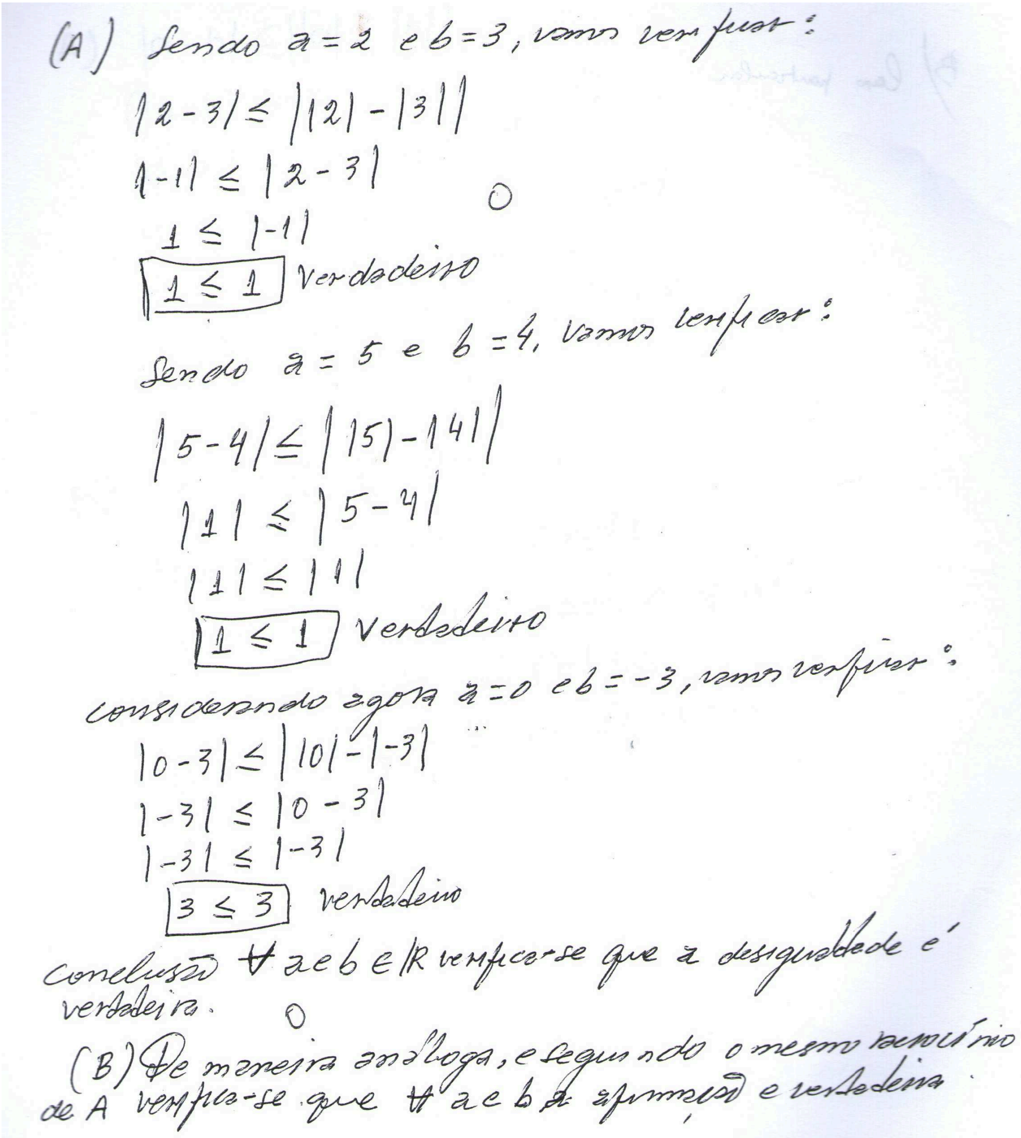
Definição 2.2.15. ***(Contraexemplo)*** *É um exemplo que satisfaz a hipótese mas contraria a tese de uma sentença condicional. Sempre que uma proposição não for válida, basta exibir um contraexemplo para concluir sua falsidade.*

Exemplo 2.2.14. *Assertiva (A) da questão discursiva.*

(A) "$|a - b| \leq ||a| - |b||$*, para quaisquer números reais a e b"*

Tome $a = 1$ *e* $b = -2$. *Temos, então* $|1 - (-2)| \leq ||1| - |-2|| \Rightarrow 3 \leq 1$. *(falso)*

Observando a figura (2.5), temos a solução de um candidato que citou casos particulares com valor lógico verdadeiro e concluiu que a assertiva (A) era verdadeira. Portanto, não percebeu que havia contraexemplos a serem dados. Do total de candidatos, 6, 11% cometeram este erro.


(A) Sendo $a=2$ e $b=3$, vamos verificar:

$|2-3| \leq ||2|-|3||$

$|-1| \leq |2-3|$

$1 \leq |-1|$

$\boxed{1 \leq 1}$ Verdadeiro

Sendo $a=5$ e $b=4$, vamos verificar:

$|5-4| \leq ||5|-|4||$

$|1| \leq |5-4|$

$|1| \leq |1|$

$\boxed{1 \leq 1}$ Verdadeiro

considerando agora $a=0$ e $b=-3$, vamos verificar:

$|0-3| \leq |0|-|-3|$

$|-3| \leq |0-3|$

$|-3| \leq |-3|$

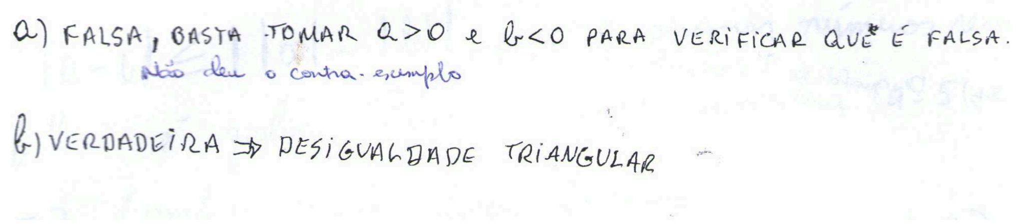
$\boxed{3 \leq 3}$ verdadeiro

conclusão $\forall$ a e b $\in \mathbb{R}$ verifica-se que a desigualdade é verdadeira.

(B) De maneira análoga, e seguindo o mesmo raciocínio de A verifica-se que $\forall$ a e b a afirmação é verdadeira.

Figura 2.5: O candidato não exibiu um contraexemplo.

Um outro tipo de erro foi o candidato citar condições para a e b, mas não exibir um contraexemplo. Do total de candidatos, $6,66\%$ cometeram este erro. Na figura (2.6), segue a solução de um candidato com este erro. Podemos inferir que o candidato/professor conseguiu enxergar o valor lógico correto da alternativa mas ao não exibir um contraexemplo mostra desconhecer a seguinte assertiva lógica: se uma proposição for falsa, é suficiente mostrar um exemplo que satisfaz a hipótese mas contraria a tese.


a) FALSA, BASTA TOMAR $a>0$ e $b<0$ PARA VERIFICAR QUE É FALSA.
Não deu o contra-exemplo

b) VERDADEIRA $\Rightarrow$ DESIGUALDADE TRIANGULAR

Figura 2.6: O candidato não exibiu um contraexemplo.

Se o candidato tomasse $a > 0$ e $b < 0$ e desenvolvesse encontraria $|a - b| > ||a| - |b||$, a qual é verdadeira. Logo, $|a - b| \leq ||a| - |b||$ é falsa.

Com efeito,

$a > 0$ e $b < 0 \Rightarrow ab < |ab| \Rightarrow -2ab > -2\,|ab| \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 > |a|^2 - 2\,|a|\,|b| + |b|^2 \Rightarrow (a-b)^2 > (|a| - |b|)^2 \Rightarrow |a - b| > ||a| - |b||$.

Como $|a - b| > ||a| - |b||$ é verdade, então $|a - b| \leq ||a| - |b||$ é falsa.

Definição 2.2.16. ***(Demonstração)*** *Uma demonstração de que uma proposição T é deduzida de uma outra proposição H é uma cadeia de argumentações lógicas, válidas, que usam H para concluir os resultados apresentados em T. Nesse processo, H chama-se **hipótese** e T chama-se **tese**.*

Se uma proposição for válida, não basta exibir exemplos que satisfaçam tal proposição, é necessário apresentar uma demonstração.

Exemplo 2.2.15. *Assertiva (B) da questão discursiva.*

(B) "$|a + b| \leq |a| + |b|$, para quaisquer números reais a e b"

Demonstração: *Como o $|a| = max\,\{a, -a\}$, temos:*

$a \leq |a|$ *e* $b \leq |b| \Rightarrow a + b \leq |a| + |b|$ (i)

$-a \leq |a|$ *e* $-b \leq |b| \Rightarrow -(a + b) \leq |a| + |b| \Rightarrow -(|a| + |b|) \leq a + b$ (ii)

De (i) *e* (ii)*, temos:*

$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$ ∎

O objetivo desta assertiva no Exame Nacional de Acesso 2013 ao PROFMAT é avaliar, ao nosso ver, a capacidade de escrever uma demonstração correta de uma proposição matemática verdadeira usando os saberes adquiridos na graduação. Pelo que observamos, podemos concluir que existem cursos de Licenciatura em Matemática que não estão preparando seus alunos adequadamente.

Na figura (2.7), temos a solução de uma candidato que citou casos particulares e concluiu que a alternativa (B) era verdadeira. Havia necessidade de demonstração. Do total de candidatos, 36% cometeram este erro.

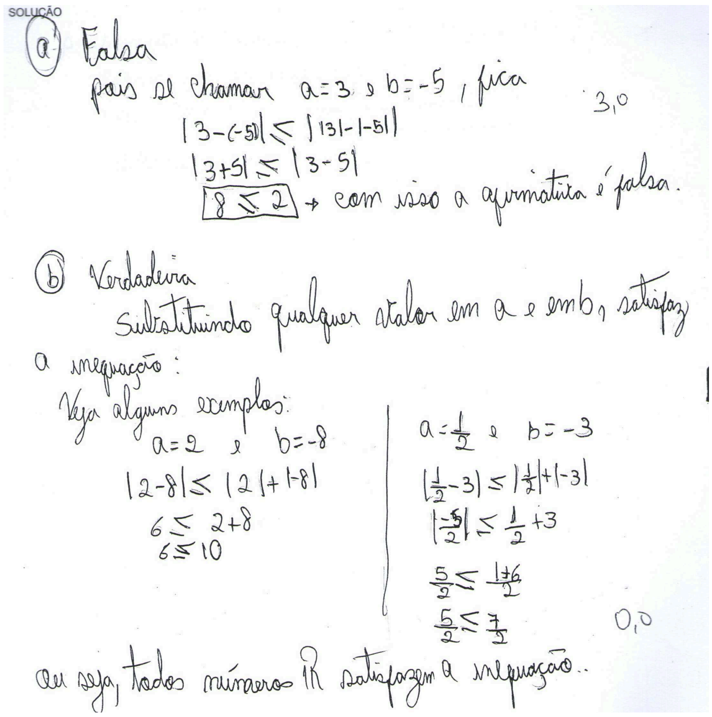
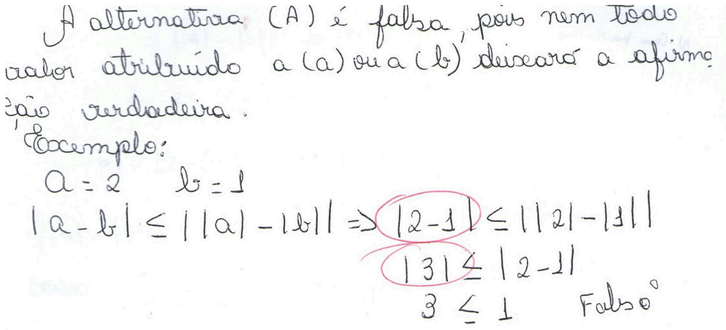


Figura 2.7: Em (B), o candidato citou casos particulares.

Observe a figura (2.8) que mostra um lapso de atenção do candidato/professor. Verificamos que $7,77\%$ dos candidatos tiveram algum lapso de atenção.


A alternativa (A) é falsa, pois nem todo valor atribuído a (a) ou a (b) deixará a afirmação verdadeira.

Exemplo:

$a = 2 \quad b = 1$

$|a - b| \leq ||a| - |b|| \Rightarrow |2-1| \leq ||2| - |1||$

$|3| \leq |2-1|$

$3 \leq 1$ Falso.

Figura 2.8: Em (A), o candidato apresentou um lapso de atenção.

Definição 2.2.17. *(**Demonstração por absurdo**) Para demonstrar uma sentença condicional "Se H, então T"por absurdo, admite-se que H e $\sim T$ ocorram. Com essa suposição, deve-se deduzir uma sentença contraditória qualquer $\sim Q \wedge Q$, chamada **absurdo** ou **contradição**. A hipótese adicional $\sim T$ chama-se **hipótese de absurdo**.*

Exemplo 2.2.16. *Se $n \in \mathbb{N}$ e n^2 for par, então n é par.*

Suponha que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que n^2 seja par e n não seja par, isto é, n seja ímpar. Então n é da forma $2k+1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 = 2m + 1$, onde $m = (2k^2 + 2k)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo, n^2 é ímpar. Chegamos a um absurdo pois, por hipótese, n^2 é par. Logo, n é par.

Capítulo 3

Catalogação dos erros

Neste capítulo faremos a catalogação dos erros cometidos pelos candidatos ao resolverem a questão discursiva 2 do Exame Nacioanal de Acesso ao PROFMAT-2013 levando em consideração o que observamos no capítulo 2. Destacaremos também os conteúdos matemáticos por tras de tais erros.

QUESTÃO DISCURSIVA 2

Decida se cada uma das duas das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa, justificando sua decisão.

(A) "$|a - b| \leq ||a| - |b||$, para quaisquer números reais a e b"
(B) "$|a + b| \leq |a| + |b|$, para quaisquer números reais a e b"

Ao analisar as 180 soluções dos candidatos ao PROFMAT-2013 em Sergipe, constatamos que:

3.1 Em relação a assertiva (A)

- 86 candidatos acertaram completamente;
- 10 candidatos não responderam;
- 78 candidatos erraram;

- 6 candidatos acertaram parcialmente.

Os dois principais erros cometidos neste item foram:

- Os candidatos citaram casos particulares com valor lógico verdadeiro e concluíram que a assertiva era verdadeira. Portanto, não perceberam que havia contraexemplos a serem dados. Procederam desta forma 11 candidatos.
- Os candidatos citaram algumas condições para a e b, mas não explicitaram um contraexemplo. Uma das condições mais citadas foi $a > 0$ e $b < 0$. Procederam desta forma 12 candidatos.

3.2 Em relação a assertiva (B)

- 7 candidatos acertaram completamente;
- 9 candidatos não responderam;
- 156 candidatos erraram;
- 8 candidatos acertaram parcialmente.

Os principais erros cometidos neste item foram:

- Os candidatos citaram casos particulares com valor lógico verdadeiro e concluíram que assertiva era verdadeira. O erro aqui consiste no seguinte: como a assertiva é verdadeira, não se prova com casos particulares. Procederam desta forma 65 candidatos.
- Os candidatos desenvolveram a tese e chegaram em uma tautologia. O erro aqui é consequência de desconhecimento lógico: verdade implica verdade. Procederam desta forma 7 candidatos.
- Os candidatos o julgaram verdadeiro argumentando que se tratava da desigualdade triangular. Procederam desta forma 6 candidatos.

Observamos ainda que:

- 3 candidatos acertaram as duas assertivas.
- 14 candidatos tiveram algum lapso de atenção.

- 12 candidatos fizeram suposições absurdas. Por exemplo, admitiram $a + b > 0$ com $a < 0$ e $b < 0$.

- Os candidatos citaram apenas uma das condições da definição de módulo e mesmo assim sem explicitar tal condição. Houve também candidatos que desconheciam completamente a definição de módulo. Procederam desta forma 53 candidatos.

- Os candidatos desconhecem lógica de proposições: Princípios da Não-contradição e do 3º Excluído, disjunção, conjunção, condicional simples, bicondicional e proposições tautológicas. Procederam desta forma 5 candidatos.

Vamos então classificar os erros em dois tipos:

- Erros do Tipo 1: são os erros conceituais. Aqui temos a definição de módulo ou valor absoluto, de inequação modular e de desigualdade triangular.

- Erros do Tipo 2: são os erros de lógica das proposições.

Seguem gráficos relativos às duas assertivas, mostrados nas figuras (3.1) e (3.2) .

Figura 3.1: Percentuais (A).

Figura 3.2: Percentuais (B).

3.3 Síntese da análise dos erros

De acordo com a teoria pedagógica apresentada no capítulo 1 sobre “aprendizagem a partir dos erros”, e da análise feita nas seções 3.1 e 3.2 podemos dizer que:

- Os candidatos/professores ao PROFMAT - 2013 em Sergipe, em sua maioria, não apresentam uma formação adequada para as habilidades e competências esperadas de um professor de matemática.

- Os candidatos/professores ao PROFMAT - 2013 em Sergipe, em sua maioria, apresentam deficiência em conceitos como módulo ou valor absoluto de uma número real, na resolução de inequações modulares, em lógica formal de proposições e, principalmente, em fazer uma demonstração de uma proposição verdadeira;

- Os cursos de Licenciatura em Matemática onde tais candidatos/professores se graduaram não estão conseguindo formar adequadamente seus alunos;

- Os docentes dos cursos de Licenciatura em Matemática não usam ou usam de forma incipiente a análise dos erros cometidos por seus alunos como metodologia de ensino;

- Uma parcela pequena dos alunos de graduação em Matemática faz uma reflexão sobre os seus erros e este comportamento tem como consequência a reprodução posterior dos mesmos na sala de aula ou na resolução de outras situações problemas.

Conclusão

Nesse trabalho fizemos algumas considerações sobre uma temática muito importante sobre o processo de ensino aprendizagem, especificamente sobre a "aprendizagem a partir dos erros".

Utilizamos como metodologia analisar todas as soluções catalogando os erros encontrados, pesquisar a literatura existente sobre a aprendizagem a partir dos erros e, por fim, tecemos algumas considerações finais resultantes do que observamos.

Além disso, para tal análise, usamos a "análise do discurso" na visão de FOUCAULT, pois tal análise considera aspectos históricos/sociais, os quais foram considerados no nosso trabalho, ao levarmos em consideração que "*um conjunto de regras anônimas, históricas, [são] sempre determinadas no tempo e no espaço, que definiram, em uma dada época e para uma determinada área*" (FOUCAULT , 1995, pag. 136).

Levamos em consideração **uma questão** do Exame Nacional de Acesso ao PROFMAT 2013, a qual a nosso ver, tinha por objetivo averiguar os conhecimentos dos candidatos em relação ao conceito de módulo ou valor absoluto de um número real, a inequação modular e a lógica formal de proposições.

Como sabemos, a lógica está na base de todo o conhecimento humano, visto que o nosso pensamento se estabelece logicamente.

O PROFMAT é importante pois visa melhorar a formação dos professores de matemática da rede pública de educação. Com isso, podemos compreender não só a formação dos professores de matemática (os alunos universitários) do ensino médio nos cursos de Licenciatura em Matemática, mas, também, a postura dos docentes universitários de matemática que ministram aulas nas licenciaturas.

Ao analisarmos as respostas dos candidatos ao PROFMAT - 2013 em Sergipe, tecemos as seguintes considerações:

1. O conjunto de professores/candidatos ao PROFMAT - 2013 em Sergipe não apresenta formação adequada para as habilidades e competências esperadas de um professor de matemática;
2. Os cursos de Licenciatura em Matemática onde tais candidatos/professores se graduaram não estão conseguindo formar adequadamente seus alunos;
3. Os docentes dos cursos de Licenciatura em Matemática não usam ou usam de forma incipiente a análise dos erros cometidos por seus alunos como metodologia de ensino;
4. O aluno da graduação raramente faz uma reflexão sobre os seus erros e este comportamento tem como consequência a reprodução posterior dos mesmos na sala de aula ou na resolução de outras situações problemas.

Com isso, podemos perceber a importância da proposta do PROFMAT na medida em que visa um maior aprofundamento de temas matemáticos utilizados pelos professores da educação básica na rede pública.

O PROFMAT é uma ação inovadora para melhorar a formação dos professores de matemática. Sugerimos que outras ações sejam tomadas pelo poder público com esta finalidade, a saber:

1. Implementação de programas de formação continuada para os professores da rede pública pelas Secretarias de Educação dos Estados e Municípios;
2. Valorização da remuneração do professor que se capacita como uma forma de reconhecimento de sua dedicação e estudo;
3. Redução da carga horária semanal do professor para que o mesmo tenha tempo para planejar melhor suas aulas, bem como refletir sobre sua prática pedagógica;
4. Melhorar a estrutura física das escolas uma vez que há muitas delas sem iluminação adequada, com problemas de ventilação, entre outras coisas;
5. Incentivar, inclusive com apoio financeiro, a participação dos professores em Congressos, Simpósios e Encontros ligados à Matemática e à Educação Matemática;
6. Melhorar a remuneração do professor para que o mesmo não tenha que trabalhar em vários lugares para compensar a baixa remuneração. É importante destacar que a qualificação não está separada de outras questões, como as condições de trabalho.

Em Sergipe, temos o Programa de Gestão de Aprendizagem Escolar (GESTAR II) para os professores da rede pública estadual e municipal. O programa oferece formação continuada em Língua Portuguesa e Matemática aos professores dos anos finais, do sexto ao nono ano, do ensino fundamental, em exercício nas escolas públicas. A formação tem uma carga horária de 300 horas/aula, sendo 104 presenciais e 196 a distância, com estudos individuais para cada área temática. O programa inclui discussões sobre questões prático-teóricas e busca contribuir para o aperfeiçoamento da autonomia do professor em sala de aula.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), antes responsável somente por cursos de pós-graduação, passou a receber o dobro de seu orçamento para assumir a responsabilidade pela formação do magistério a partir de 2009, quando o Ministério da Educação (MEC) lançou o Plano Nacional de Formação de Professores.

Entre os programas da Capes na Educação Básica, temos o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid); Observatório da Educação; e Programa de Consolidação das Licenciaturas (Prodocência), entre outros. Por meio da Capes, o MEC decidiu enfrentar o maior desafio, talvez, em sua história: graduar em Licenciatura, gratuitamente e com qualidade, cerca de 400 mil professores em exercício dos sistemas públicos de ensino até 2014, com a indispensável participação dos institutos de ensino superior do País.

Para sabermos quais as consequências para os alunos quando há deficiência conceitual por parte dos professores de Matemática, realizamos uma pesquisa por meio de um questionário no Instituto Federal de Sergipe/Campus São Cristóvão com os alunos do ensino médio. A partir da análise das respostas, concluímos que as consequências são:

1. Aprendizagem incorreta dos conceitos, o que pode prejudicar a compreensão de tópicos matemáticos futuros;
2. Falta de clareza na aprendizagem do conteúdo;
3. Não entendimento do conteúdo ministrado;
4. Reprovação na disciplina por não entender o conteúdo ministrado;
5. Falta de interesse pela aula;
6. Insegurança por parte do aluno;
7. Má aprendizagem (conteúdo incompleto, mal explicado);
8. Haverá lacunas na aprendizagem;
9. Comprometimento do andamento da disciplina;
10. Defasagem do conteúdo programático em virtude do não cumprimento daquilo que foi planejado para determinada série.

Referências Bibliográficas

[1] BORASI, R. Reconceiving mathematics Instruction: a Focus on Errors. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.)

[2] BURIASCO, R. L. C. de. Algumas considerações sobre avaliação educacional. Estudos em avaliação educacional, São Paulo, n. 22, p. 175 ? 178, jul/dez. 2000.

[3] CORREIA, C. E. F. Formação continuada de professores polivalentes: o potencial da análise de erros no processo ensino/aprendizagem da matemática. Dissertação de Mestrado. PPG Educação. Rio Claro: Unesp, 131f, 2009.

[4] CORREIA, C. E. F.Os Erros no Processo Ensino/Aprendizagem em Matemática. Nov. 2009 EDUCAÇÃO: Teoria e Prática - v. 20, n.34, jan.-jun.-2010, p. 169-186.

[5] CURY, H. N. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em Educação Mmatemática. In: Zetetikè, Campinas, v.3, n.4, p.39 ? 50, nov. 1995.

[6] CURY, H. N. Análise de erros em educação matemática. Veritati, Salvador, v.3, n.4, p 95-107, jun.2004

[7] CURY, H. N. Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Editora Autêntica. 2007.

[8] CURY, H. N. O papel do erro na aprendizagem de matemática. www.sbem.com.br

[9] FOUCAULT, M. A Arqueologia do saber. 4ª ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1995.

[10] MACEDO, L. de. Ensaios construtivistas. São Paulo: casa do psicólogo. 1994.

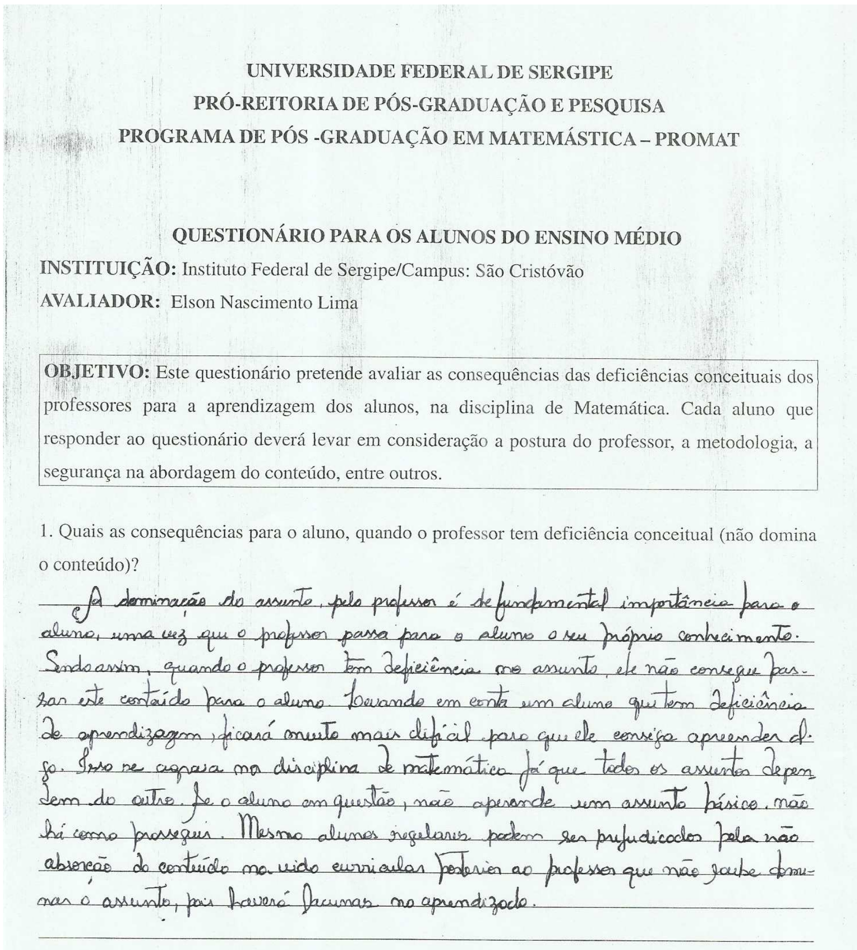
[11] MORAIS FILHO, D. C. de. Um convite à matemática: fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades/ Daniel Cordeiro de Morais Filho; 3º edição, totalmente voltada às técnicas de demonstração; Campina Grande, Edição do autor, Fábrica de Ensino, 2010.

[12] PINTO, N. B. O erro como estratégia didática: o estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas: Papirus, 2000.

[13] SILVA, M.C.N.; BURIASCO, R.L.C. Produção escrita em matemática: algumas reflexões. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 3., 2006, Águas de Lindóia. Anais... São Paulo: SBEM, 2006.1 CD-ROM.

Anexos

Seguem algumas respostas dos alunos ao questionário aplicado no IFS/Campus São Cristóvão em dezembro de 2012.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS -GRADUAÇÃO EM MATEMÁSTICA – PROMAT

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

INSTITUIÇÃO: Instituto Federal de Sergipe/Campus: São Cristóvão

AVALIADOR: Elson Nascimento Lima

OBJETIVO: Este questionário pretende avaliar as consequências das deficiências conceituais dos professores para a aprendizagem dos alunos, na disciplina de Matemática. Cada aluno que responder ao questionário deverá levar em consideração a postura do professor, a metodologia, a segurança na abordagem do conteúdo, entre outros.

1. Quais as consequências para o aluno, quando o professor tem deficiência conceitual (não domina o conteúdo)?

A dominação do assunto, pelo professor é de fundamental importância para o aluno, uma vez que o professor passa para o aluno o seu próprio conhecimento. Sendo assim, quando o professor tem deficiência no assunto, ele não consegue passar este conteúdo para o aluno. Levando em conta um aluno que tem deficiência de aprendizagem, ficará muito mais difícil para que ele consiga apreender o-lo. Isso se agrava na disciplina de matemática já que todos os assuntos dependem do outro. Se o aluno em questão, não aprende um assunto básico, não há como proseguir. Mesmo alunos regulares podem ser prejudicados pela não absorção do conteúdo no ciclo curricular posterior ao professor que não soube dominar o assunto, pois haverá lacunas no aprendizado.

Figura 3.3: Lacunas no aprendizado.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

PROGRAMA DE PÓS -GRADUAÇÃO EM MATEMÁSTICA – PROMAT

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

INSTITUIÇÃO: Instituto Federal de Sergipe/Campus: São Cristóvão

AVALIADOR: Elson Nascimento Lima

OBJETIVO: Este questionário pretende avaliar as consequências das deficiências conceituais dos professores para a aprendizagem dos alunos, na disciplina de Matemática. Cada aluno que responder ao questionário deverá levar em consideração a postura do professor, a metodologia, a segurança na abordagem do conteúdo, entre outros.

1. Quais as consequências para o aluno, quando o professor tem deficiência conceitual (não domina o conteúdo)?

As consequências são as piores possíveis, o futuro deste aluno, vai ser sem base nos assunto de matemática, as noções bá-sicas ele não terá. Pois o professor é o que nos vai conduzir, a dá os primeiros passos no mundo da Matemática. Esse aluno pode até chegar a reprovação, sendo que a culpa da reprovação era o professor. Por não saber passar o assunto.

Figura 3.4: Reprovação.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

PROGRAMA DE PÓS -GRADUAÇÃO EM MATEMÁSTICA – PROMAT

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

INSTITUIÇÃO: Instituto Federal de Sergipe/Campus: São Cristóvão

AVALIADOR: Elson Nascimento Lima

OBJETIVO: Este questionário pretende avaliar as consequências das deficiências conceituais dos professores para a aprendizagem dos alunos, na disciplina de Matemática. Cada aluno que responder ao questionário deverá levar em consideração a postura do professor, a metodologia, a segurança na abordagem do conteúdo, entre outros.

1. Quais as consequências para o aluno, quando o professor tem deficiência conceitual (não domina o conteúdo)?

Isto pode gerar uma diversidade de problemas. Depende do aluno, do professor, mas, em geral causa uma insegurança extrema por parte do aluno, e em seguida extremo desinteresse, é claro. É possível também que uma má aprendizagem ocorra (conteúdo incompleto, mal explicado). Quanto mais tempo se passa com esse problema, pior a situação fica, pois mais desinteresse é gerado, mais rápido o professor tentará finalizar o processo. Um ciclo vicioso é criado e um quadro de deficiência educacional estará estabelecido.

Figura 3.5: Insegurança e desinteresse.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS -GRADUAÇÃO EM MATEMÁSTICA – PROMAT

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

INSTITUIÇÃO: Instituto Federal de Sergipe/Campus: São Cristóvão

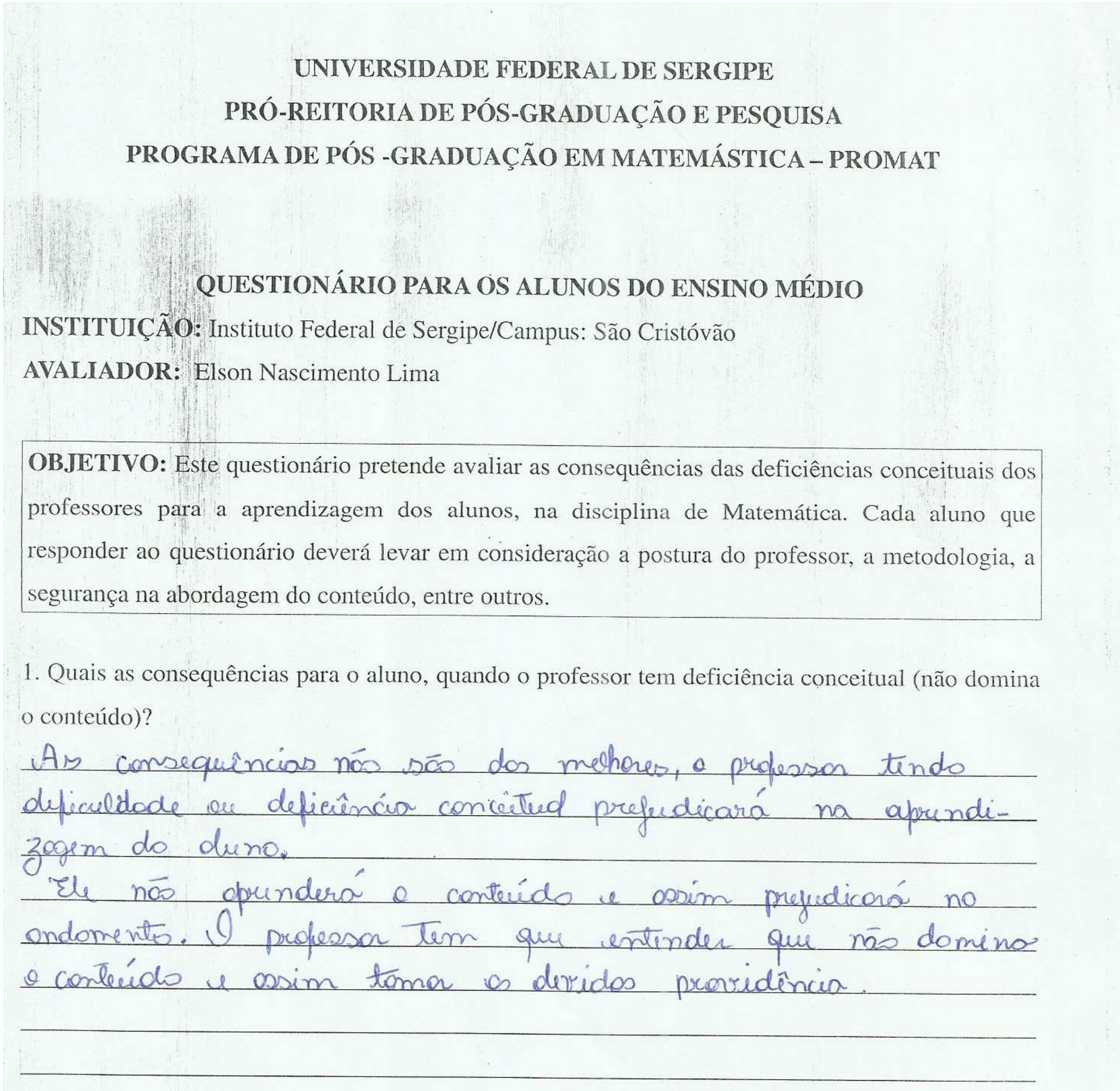
AVALIADOR: Elson Nascimento Lima

OBJETIVO: Este questionário pretende avaliar as consequências das deficiências conceituais dos professores para a aprendizagem dos alunos, na disciplina de Matemática. Cada aluno que responder ao questionário deverá levar em consideração a postura do professor, a metodologia, a segurança na abordagem do conteúdo, entre outros.

1. Quais as consequências para o aluno, quando o professor tem deficiência conceitual (não domina o conteúdo)?

Quando o professor não domina o conteúdo, ocorre uma série de fatores ruins os a alunos não aprendem com clareza o assunto porque não pode contar com o auxílio do professor o nível de aprendizagem será muito baixo nessa classe porque o professor é o mestre e tá na sala para ajudar o aluno a aprender o que ele já sabe se ele não dominar o conteúdo fica difícil.

Figura 3.6: Falta de clareza.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS -GRADUAÇÃO EM MATEMÁSTICA – PROMAT

QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

INSTITUIÇÃO: Instituto Federal de Sergipe/Campus: São Cristóvão

AVALIADOR: Elson Nascimento Lima

OBJETIVO: Este questionário pretende avaliar as consequências das deficiências conceituais dos professores para a aprendizagem dos alunos, na disciplina de Matemática. Cada aluno que responder ao questionário deverá levar em consideração a postura do professor, a metodologia, a segurança na abordagem do conteúdo, entre outros.

1. Quais as consequências para o aluno, quando o professor tem deficiência conceitual (não domina o conteúdo)?

As consequências não são dos melhores, o professor tendo dificuldade ou deficiência conceitual prejudicará na aprendizagem do aluno.
Ele não aprenderá o conteúdo e assim prejudicará no andamento. O professor tem que entender que não domina o conteúdo e assim tomar as devidas providência.

Figura 3.7: Andamento do conteúdo prejudicado.