



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EMERSON DE SOUSA VEIGA

SEQUÊNCIAS: DO ENSINO BÁSICO À PÓS-GRADUAÇÃO

Belém - PA

2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EMERSON DE SOUSA VEIGA

SEQUÊNCIAS: DO ENSINO BÁSICO À PÓS-GRADUAÇÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Belém - PA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V426s Veiga, Emerson
 Sequências: do Ensino Básico à Pós-Graduação / Emerson Veiga. — 2018
 135 f. : il. color

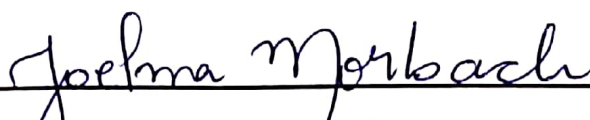
 Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional
 (PROFMAT) , Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém,
 2018.
 Orientação: Profa. Dra. Joelma Morbach

 1. Matemática. 2. Sequências. 3. Análise . I. Morbach, Joelma, orient. II. Título

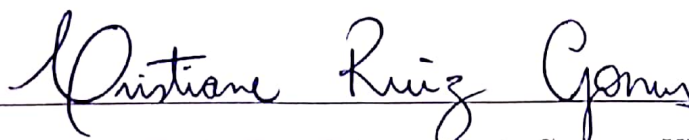
EMERSON DE SOUSA VEIGA

SEQUÊNCIAS: DO ENSINO BÁSICO À PÓS-GRADUAÇÃO

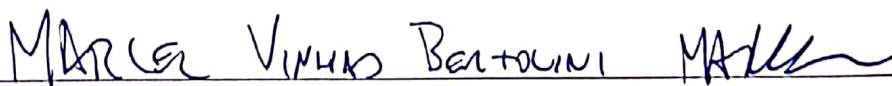
Esta Dissertação, apresentada ao Curso de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática, foi julgada e aprovada pela seguinte banca examinadora:



Prof^ª. Dr.^ª Joelma Morbach (Orientadora) - UFPA



Prof^ª. Dr.^ª Cristiane Ruiz Gomes - UFPA



Prof^º. Dr. Marcel Vinhas Bertolini - UFPA

APROVADA EM: 23/03/2018

À Deus, pois sem Ele eu nada seria.

*Aos meus pais, irmão e namorada, por suas
orações e amor.*

*Aos familiares e amigos em geral, pelo apoio e
companheirismo.*

AGRADECIMENTOS

Início meus agradecimentos por Deus, o único que é digno de toda honra e glória, pois sem Ele eu nem existiria. Ademais, agradeço por Ele ter colocado pessoas especiais em minha caminhada, sem as quais não seria possível ter chegado até aqui.

Aos meus pais, **Eliúde** e **Elizete**, meu muitíssimo obrigado pelo amor, dedicação e por sempre batalharem para me ver feliz, além de fazer dos meus objetivos os seus objetivos. Amo vocês.

Ao meu querido irmão, **Ederson**, meu muito obrigado por ser essa pessoa especial, ser meu amigo e por sempre torcer pelo meu sucesso.

Aos meus familiares em geral, meus agradecimentos. Todos vocês sempre estiveram presentes em minha vida e contribuíram, direta ou indiretamente, para que esta meta fosse alcançada. Em especial, agradeço à minha querida tia **Eliuda** que tanto me ajudou em todos esses anos.

À minha amada namorada, **Ewanise**, por todo amor e carinho que tens me dado desde o início de nossa história, o meu muito obrigado. Graças ao seu apoio, companheirismo, paciência, carinho e amor, mais esta etapa foi finalizada. Te amo.

Aos pais de minha namorada, **Evanildo** e **Joelza**, por suas preocupações com meu bem estar e por nunca medirem esforços e me ajudar em tudo. Muito obrigado.

À minha querida orientadora, Professora Doutora **Joelma Morbach**, por toda paciência, amizade e empenho para que este trabalho fosse realizado, meus infinitos agradecimentos e admiração. Muito obrigado por me motivar a continuar estudando desde a minha graduação, e por nunca medir esforços em me auxiliar.

Aos professores do PROFMAT pelos seus ensinamentos e aos funcionários, que durante esses anos contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional, o meu muito obrigado. Não deixando de agradecer aos professores e profissionais da Faculdade de Matemática pela contribuição.

Aos amigos da turma PROFMAT 2016, onde nesse período vivenciamos bons momentos, obrigado. Em especial, agradeço aos meus amigos **Haroldo** e **Marcelo**, pela contribuição, amizade e parceria, além das horas de estudos e conhecimentos compartilhados.

Ao “mestre dos mestres” e amigo, **Leandro**, meu muito obrigado pelas valiosas dicas nas resoluções dos problemas e nas dúvidas sanadas durante esses anos, além da amizade que esse período de mestrado gerou.

Aos meus amigos e amigas que se fizeram presentes em minha vida, direta ou indiretamente, muito obrigado.

Finalizo meus agradecimentos parafraseando o grande *Sir Isaac Newton*:

“Se cheguei até aqui, foi por estar apoiado em ombros de gigantes”.

Obrigado a todos.

“De que me irei ocupar no céu, durante toda a eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?”

Augustin Louis Cauchy

RESUMO

Diante da influência que a noção de sequências exerce em diversas áreas da Matemática, por constar na maior parte dos conteúdos matemáticos abordados nos variados níveis de ensino, além de estar presente em inúmeras situações cotidianas, este trabalho foi pensado visando realizar um estudo sobre sequências e seus principais resultados para o docente de Matemática e leitores em geral, abordando o modo em que este conceito é trabalhado desde Ensino Básico ao Ensino Superior. A teoria contida neste trabalho é acompanhada de vários exemplos que contribuem para o embasamento do leitor. Ademais, são mostrados alguns problemas, dos mais variados níveis, com suas respectivas soluções, extraídos de provas de vestibulares, referências bibliográficas e olimpíadas matemáticas de vários países, com o intuito de proporcionar aprofundamento ao leitor sobre o que foi dissertado.

Palavras-chave: Matemática, Sequências, Ensino Básico, Ensino Superior, Vestibulares, Olimpíadas Matemáticas.

ABSTRACT

In view of the influence that the notion of sequences exerts in several areas of Mathematics, since it is present in most of the mathematical contents approached in the different levels of education, besides being present in innumerable daily situations, this work was conceived to carry out a study on sequences and his main results for the Mathematics teacher and readers in general, addressing the way in which this concept is worked from Basic Education to Higher Education. The theory contained in this work is accompanied by several examples that contribute to the foundations of the reader. In addition, some problems are presented, from the most varied levels, with their respective solutions, extracted from vestibular tests, bibliographical references and mathematical olympiads from various countries, in order to provide the reader with more depth about what has been said.

Keywords: Mathematics, Sequences, Basic Education, Higher Education, Vestibular, Mathematical Olympiads.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Gráfico de uma Progressão Aritmética.	27
1.2	Carl Friedrich Gauss (1777-1855).	29
1.3	Representação dos Números Triangulares e Quadrangulares.	31
1.4	Gráfico de uma Progressão Geométrica.	35
1.5	Quadrados Inscritos e Circunscritos em Circunferências.	40
1.6	Leonardo Fibonacci (1170 - 1250).	42
1.7	Espiral de Fibonacci.	50
1.8	Casos Iniciais do Preenchimento dos Tabuleiros.	52
1.9	Etapas Iniciais da Construção do Triângulo de Sierpinski.	60
1.10	Primeiros Níveis da Curva de Koch.	61
1.11	Redução da Área de cada Triângulo nas Etapas da Construção.	61
3.1	Distância Entre as Funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$	107
3.2	Alguns termos da Sequência (f_n)	112

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
1 SEQUÊNCIAS NO ENSINO BÁSICO	17
1.1 Representação dos Números Reais	18
1.1.1 Representação Decimal	19
1.2 Noções Iniciais de Sequências de Números Reais	23
1.3 Progressão Aritmética (PA)	24
1.3.1 Termo Geral de uma Progressão Aritmética	25
1.3.2 Interpretação Geométrica das Progressões Aritméticas	27
1.3.3 Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética	29
1.4 Progressão Geométrica (PG)	32
1.4.1 Termo Geral de uma Progressão Geométrica	33
1.4.2 Interpretação Geométrica das Progressões Geométricas	34
1.4.3 Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Finita	35
1.4.4 Soma de uma Progressão Geométrica Infinita	38
1.5 Sequência de Fibonacci	42
1.5.1 Sequências Definidas Recursivamente	44
1.5.1.1 Recorrências Lineares de Segunda Ordem	45
1.5.2 Algumas Propriedades da Sequência de Fibonacci	47
1.6 Problemas de Embasamento e Aprofundamento	53

2	SEQUÊNCIAS NA GRADUAÇÃO	67
2.1	Sequências de Números Reais	69
2.2	Limites de Sequências	70
2.3	Propriedades Aritméticas dos Limites	79
2.4	Sequências de Cauchy	85
2.5	Problemas de Embasamento e Aprofundamento	90
3	SEQUÊNCIAS NA PÓS-GRADUAÇÃO	100
3.1	Espaços Métricos	100
3.1.1	Um Espaço de Funções	105
3.2	Sequências em Espaços Métricos	108
3.2.1	Sequências de Cauchy	110
3.2.2	Espaços Métricos Completos	115
3.3	Espaços Normados	117
3.3.1	Espaços Vetoriais	117
3.3.2	Espaços Vetoriais Normados	120
3.3.3	Espaços de Banach	123
	CONCLUSÃO	128
	A Princípio da Indução	129
	B Desigualdade de Bernoulli	131
	C Desigualdade Triangular	132
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	133

INTRODUÇÃO

Ao falarmos sobre base em educação, a Matemática é uma das mais importantes ciências, sendo abordada desde as séries iniciais. Apesar de sua relevância, é notório que muitos alunos possuem dificuldades de aprendizagem quanto à mesma. Em diversos casos pode ser observado que alguns estudantes adquirem certo preconceito com o tempo, levando-os a imaginar que os conhecimentos matemáticos adquiridos em sala de aula não se fazem presentes em seus cotidianos. Vários fatores levam os discentes a pensarem desta forma, desde fatores históricos aos de caráter político/social.

Em contrapartida, o professor é o canal de comunicação entre os conteúdos e o aluno, e portanto precisa estar preparado, conhecer sua disciplina de maneira sólida e aprofundada, além de buscar investir em sua formação para poder transmitir ao aluno o conhecimento necessário. Muito embora saber o conteúdo não seja o bastante, quanto maior for o domínio do professor de Matemática sobre o conteúdo ministrado, maior será sua capacidade de envolver os alunos nos temas e tornar suas aulas mais interessantes.

É importante observar que o professor não deve se tornar um “animador de circo” e fugir de ensinar o conteúdo de forma objetiva e amistosa. O mesmo deve trabalhar os conhecimentos específicos de sua disciplina buscando aplicá-los de forma a instigar o aluno a desenvolver seus pensamentos críticos, contribuindo para sua formação não apenas específica, mas também para sua formação enquanto cidadão.

Fazendo referência aos conteúdos matemáticos abordados do Ensino Básico ao Superior, as noções de sequências se fazem presentes em grande parte destes. Embora as progressões

aritméticas e geométricas sejam os assuntos mais estudados do Ensino Básico relacionados às sequências, várias abordagens importantes com sequências podem ser trabalhadas, como por exemplo, a relação entre alguns fenômenos naturais e a sequência de Fibonacci, os fractais, o cálculo do volume de sólidos, etc. Na Graduação e na Pós-Graduação, as sequências e suas principais características, sobretudo a noção de convergência, se fazem constantemente presentes em diversas áreas, como na Análise, no Cálculo, etc. Além disso, o estudo de sequências traz consigo uma gama de aplicações cotidianas, o que é muito bem visto no cenário do ensino atual.

Segundo [30], “vivemos em um universo de padrões”. Padrões esses que podem ter relação com conceitos geométricos, movimento, números, etc. Por isso, é muito comum se observar certos padrões em diversas situações do cotidiano, desde a numeração das casas de uma determinada rua até a padronização do caminhar (direita, esquerda, direita, esquerda).

O que o matemático faz é examinar “padrões” abstratos - padrões numéricos, padrões de forma, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Esses padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais recreativo. Podem surgir a partir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das atividades mais ocultas da mente humana [12].

Existem inúmeros padrões a serem observados no universo e é interessante notar que esses padrões podem ser transformados ou relacionados à sequências, em geral numéricas, que é o objeto matemático a ser estudado neste trabalho.

Com base nessas premissas, com esse trabalho buscamos colaborar com a formação do professor de Matemática, onde o mesmo poderá utilizar os conceitos aqui estudados para seu embasamento teórico, além de utilizar esses conhecimentos na tentativa de proporcionar aos seus alunos o entendimento necessário a respeito de alguns dos padrões supracitados. Ademais, iremos tratar o estudo do tema de acordo com suas abordagens vistas no Ensino Básico, Graduação e Pós-Graduação, dando uma visão mais abrangente sobre sequências.

Com este trabalho também pretendemos fornecer um material instrucional para fins acadêmicos, com o intuito de abordar o conteúdo estudado apresentando sua teoria, além de vários problemas de variados níveis. Por isso o trabalho não visa somente cooperar com professores, mas também com os leitores interessados em alicerçar seus conhecimentos.

No capítulo preliminar faremos uma abordagem sobre as principais noções de sequências estudadas no Ensino Básico (representação dos reais, progressões aritméticas e geométricas, sequência de Fibonacci, dentre outras) mostrando suas características e diversos exemplos, além de apresentarmos uma série de problemas de vestibulares, olímpicos, etc., trazendo enriquecimento à pesquisa.

No capítulo seguinte traremos um resumo teórico das principais ideias de sequências estudadas na Graduação, trabalhando conceitos importantes como limite de sequências, sequências de Cauchy, Teorema de Bolzano-Weierstrass, etc. Também traremos problemas diversos que complementarão os conceitos trabalhados.

No capítulo final realizaremos um breve estudo de sequências de acordo com as ideias estudadas na Pós-Graduação, abordando noções de espaços métricos, espaços vetoriais e espaços normados, culminando no importante conceito de espaços de Banach. Ademais, apresentaremos alguns resultados que divergem dos discutidos no capítulo anterior, mostrando que alguns resultados válidos para sequências de números reais não são válidos em outros espaços.

CAPÍTULO 1

SEQUÊNCIAS NO ENSINO BÁSICO

No Ensino Básico o conceito de sequências já é abordado, de forma implícita ou explícita, desde as séries iniciais, quer seja por meio da introdução aos números reais, no método da exaustão para o cálculo de áreas e volumes, no estudo propriamente dito de sequências de números reais, etc. Por isso se faz importante o estudo e aprofundamento dos principais conceitos de sequências e aplicações.

Em geral, quando a noção de sequências numéricas é trabalhada, basicamente o foco se dá na investigação de algumas propriedades das progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG), em um roteiro quase sempre definido como: apresentar a expressão do termo geral e a expressão da soma de seus termos, além da resolução de alguns problemas, contextualizados ou não. Algumas vezes é apresentada, também, a soma dos infinitos termos de PG cuja razão esteja compreendida entre -1 e 1 .

As progressões possuem papel fundamental na grade curricular do Ensino Básico, até pela sua grande aplicabilidade em diversas situações cotidianas, porém o estudo de sequências não deveria se resumir a estas. Outras sequências poderiam (e deveriam) ser trabalhadas, trazendo um maior enriquecimento relativo ao conhecimento matemático de professores e alunos. A sequência de Fibonacci, por exemplo, junto às suas propriedades e relação com fenômenos naturais, quase não é abordada. Algumas vezes é vista a título de curiosidade, ou através de questões que não exploram suas principais características.

Neste capítulo faremos uma abordagem expositiva das principais ideias de sequências na representação dos números reais, no estudo das progressões aritméticas e geométricas, além da sequência de Fibonacci e resolução de problemas que permitam destacar e aprofundar os conceitos trabalhados. Alguns dos problemas que serão apresentados buscam, entre outros objetivos, exibir algumas outras sequências que são praticamente desconhecidas por parte dos professores e estudantes do Ensino Básico.

Em alguns resultados trabalhados neste capítulo, assim como no decorrer de todo texto, utilizaremos o *Princípio da Indução*, o qual enunciaremos no Apêndice A. Ademais, abordaremos alguns resultados (que podem ser omitidos numa primeira leitura) onde utilizaremos algumas ideias de limites de sequência, ideias essas que serão melhor exploradas no próximo capítulo.

1.1 Representação dos Números Reais

Em geral, a introdução aos números reais no Ensino Básico é acompanhada de certos contratempos, tendo em vista que ao se iniciar a abordagem de um determinado conjunto, nota-se algumas limitações algébricas referentes ao conjunto anterior. Por exemplo, o motivo para a construção de \mathbb{Z} é o fato de não ser possível resolver subtrações em \mathbb{N} , e a razão pela qual se constrói \mathbb{Q} é por não ser possível efetuar divisões em \mathbb{Z} . Essas construções geralmente são feitas por meio de aplicações concretas relacionadas ao cotidiano do aluno.

Entretanto, diante à real necessidade de se introduzir o conjunto \mathbb{R} , o problema cresce consideravelmente, pois a extensão de \mathbb{Q} para \mathbb{R} é um salto onde raramente são encontradas aplicações cotidianas que justifiquem a necessidade dessa expansão.

Diante deste quadro, comumente os livros didáticos escapam dos problemas supracitados desviando-se deles através de abordagens onde se introduzem os números reais a partir da suposição de sua própria existência. Esta forma de abordagem não responde aos problemas matemáticos que tornam a expansão dos racionais para os reais necessária.

É claro que não se pode aspirar que um aluno, no final do ciclo do Ensino Básico, absorva o conceito de números reais com o rigor matemático formal. Porém é importante que o mesmo entenda, pelo menos, os problemas matemáticos que induzem à criação dos reais, e para isso é fundamental que o professor tenha amplo conhecimento desses problemas.

Com base nessas premissas, apresentaremos algumas ideias da representação dos reais, cuja descrição mais simples consiste em dizer que este é um **corpo ordenado completo**. Os detalhes dessa caracterização são, a rigor, estudados na Análise Matemática (Ver [22]).

É bem verdade que há algumas maneiras de formular matematicamente a afirmação de que os reais é um corpo ordenado completo, mas em todas elas, direta ou indiretamente, se presencia a ideia de aproximação ou limite.

Esta abordagem nos interessa devido a sua estreita relação com as noções básicas de sequências e limite de sequências, que é o objeto estudado neste trabalho. Inicialmente as ideias aqui trabalhadas relacionadas à limites de sequências se darão de maneira intuitiva, pois suas definições formais serão deixadas para capítulos posteriores.

1.1.1 Representação Decimal

Trataremos da representação dos reais por meio de expressões decimais, que é o modo mais comum de ser apresentado. Realizaremos esse processo trabalhando apenas com os reais positivos, pois para os negativos basta que acrescentemos o sinal de menos. Deste modo, enunciaremos então a seguinte definição:

Definição 1.1.1. *Uma **expressão decimal** é um símbolo da forma*

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n \dots,$$

em que a_0 é um número inteiro positivo e $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ são **dígitos**, ou seja, números inteiros tais que $0 \leq a_n < 10$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se um dígito a_n , chamado o **n -ésimo dígito** da expressão decimal α . O número natural a_0 chama-se a **parte inteira** de α .

Os símbolos $\alpha = 2,5431111\dots$ e $\beta = 31,543543543\dots$ são exemplos de expressões decimais nos quais é fácil saber como se obtém os dígitos que não estão explicitados. O símbolo $\pi = 3,14159265\dots$ (quociente entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro) também é um exemplo de expressão decimal, porém o que está expresso não nos permite saber a regra para encontrar os dígitos omitidos pelas reticências, mas sabemos que existem processos bem definidos para calculá-los. Atualmente, com o auxílio dos supercomputadores e algoritmos especiais, é possível determinar trilhões de dígitos de π .

Uma sequência de dígitos, precedida de um inteiro, representa o número real (que iremos representar como α para não carregar de notação) abaixo:

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

Deste modo fica claro a ideia de representarmos o número real α através de uma sequência de racionais. Em verdade, a expressão acima significa que o real α tem por valores aproximados os números racionais

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quando fazemos a substituição α por α_n , o erro cometido não é superior a $\frac{1}{10^n}$. Deste modo, temos que a_0 é o maior natural contido em α , a_1 é o maior dígito tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha,$$

a_2 é o maior dígito tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \alpha, \text{ etc.}$$

Portanto, obtemos uma sequência de números racionais obedecendo

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \dots,$$

onde esses valores se aproximam cada vez mais do número real α . Daí, dizemos que o número real α é o **limite** desta sequência de números racionais.

O fato de sempre existir um número real que é limite desta sequência é a maneira que adotaremos para dizer que o corpo dos reais é completo. Portanto, podemos enunciar o seguinte axioma (fato cuja veracidade é admitida sem demonstração):

Axioma 1 (Axioma da Completeza). *Toda expressão decimal representa um número real e todo número real pode ser representado por uma expressão decimal.*

Quando, a partir de um certo ponto, todos os dígitos a_n de uma expressão decimal se tornam iguais a zero, como observado em

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n 000 \dots,$$

temos que

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$$

é um número racional, mais precisamente uma fração decimal.

Em geral, por mais que a expressão $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ não termine em zeros, a mesma pode representar um número racional se for **periódica**.

Definição 1.1.2. *Uma expressão decimal $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_p \dots$ chama-se uma **dízima periódica simples**, de período $a_1 a_2 \dots a_p$, se os primeiros p dígitos após a vírgula repetem-se indefinidamente na mesma ordem. Para indicarmos de forma mais precisa o período, empregamos também a notação $\alpha = \overline{a_1 a_2 \dots a_p}$.*

O exemplo mais simples, e sem dúvidas o mais intrigante, trata-se da dízima periódica simples $\alpha = 0, \overline{9}$, isto é,

$$\alpha = 0,999\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$$

Esta expressão representa o número real $\alpha = 1$. De fato, os valores aproximados de α formam a sequência de racionais

$$\alpha_1 = 0,9, \alpha_2 = 0,99, \alpha_3 = 0,999, \text{ etc.}$$

Notemos que $1 - \alpha_1 = 0,1$, $1 - \alpha_2 = 0,01$, $1 - \alpha_3 = 0,001$ e, em geral, $1 - \alpha_n = 10^{-n}$. Deste modo vemos que, tomando n suficientemente grande, a diferença $1 - \alpha_n$ pode tornar-se tão pequena quanto se deseje. Em outras palavras, os números racionais $\alpha_n = 0,99\dots99$ são valores cada vez mais aproximados de 1, ou seja, têm 1 como limite.

Observação: Mesmo com a argumentação acima, nem sempre é fácil convencer os alunos a respeito da validade da igualdade $0,999\dots = 1$. Em sala de aula, algumas perguntas podem ajudar nesse convencimento. Por exemplo, se fosse verdade que $0,999\dots < 1$, então teria que existir um outro número real, diferente de $0,999\dots$ e de 1, que ficasse entre eles. Você seria capaz de exibir tal número?

Devido ao fato de que

$$0,999\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = 1,$$

segue que

$$0,111\dots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = \frac{1}{9}.$$

Deste modo, para todo dígito a , temos

$$0,aaa\dots = \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \frac{a}{1000} + \dots = \frac{a}{9}.$$

Um exemplo básico que ilustra esse fato é $0,555\dots = \frac{5}{9}$.

Este raciocínio pode ser generalizado para todos os dígitos $a_1a_2\dots a_p$ do período de uma dízima periódica simples. Por exemplo,

$$0,\overline{68} = 0,686868\dots = \frac{68}{99} \quad \text{e} \quad 0,\overline{5678} = 0,56785678\dots = \frac{5678}{9999}.$$

Este processo nos leva a conclusão de que toda dízima periódica simples representa um número racional, que se chama sua **fração geratriz**, ou simplesmente sua **geratriz**. Daí, podemos utilizar a regra que antigamente (em alguns casos até hoje) os alunos eram obrigados a memorizar:

“A geratriz de uma dízima periódica simples é a fração cujo numerador é o período e o denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período”.

Além das dízimas periódicas simples, existem as ditas **compostas**, que são as dízimas que possuem, depois da vírgula, uma parte que não se repete, seguida de uma parte periódica.

Para encontrarmos a geratriz de uma dízima periódica composta, realizamos o processo como no exemplo a seguir:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,25343343\dots \\ 100\alpha &= 25,343343\dots = 25 + 0,343343\dots = 25 + \frac{343}{999} \\ &= \frac{25 \times 999 + 343}{999} = \frac{25(1000 - 1) + 343}{999} \\ &= \frac{25000 + 343 - 25}{999} = \frac{25343 - 25}{999}, \end{aligned}$$

e assim,

$$\alpha = \frac{25343 - 25}{99900}.$$

Deste modo chegamos à outra regra clássica que conhecemos:

“A geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é igual à parte não-periódica, seguida de um período menos a parte não-periódica, e cujo denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não-periódica”.

Desta forma, concluímos que toda expressão decimal periódica (simples ou composta) representa um número racional e, reciprocamente, todo número racional é representado por uma dízima periódica finita (que acaba em zeros) ou periódica.

De fato, a recíproca da afirmação acima é verdadeira, pois uma expressão decimal finita é periódica de período 0, além de que sempre podemos obter a expressão decimal de um racional $\frac{p}{q}$ pelo conhecido processo da “divisão continuada” de p por q .

Lembrando que os números *irracionais* são os números reais que não são racionais, temos que os números irracionais são aqueles que **não possuem representação decimal periódica**.

Finalizamos esta seção apresentando a seguir duas importantes propriedades dos números reais que se deduzem a partir do axioma da completeza que adotamos.

Propriedade Arquimediana. Dado um número real α , sempre existe um número natural n tal que $n > \alpha$. De fato, pois se não existisse n satisfazendo $n > \alpha$ significaria que o conjunto \mathbb{N} dos números naturais seria finito.

Densidade dos Racionais e Irracionais. Todo intervalo (não-degenerado) da reta real contém números racionais e irracionais. De fato, seja o intervalo (a, b) . Assim $b - a > 0$. Tomando um natural $n > \frac{1}{b-a}$, temos que $b - a > \frac{1}{n}$. Deste modo os números racionais $0, \pm\frac{1}{n}, \pm\frac{2}{n}, \dots$ varrem toda a reta real, sendo a distância entre cada um deles para os outros dois próximos igual a $\frac{1}{n}$, e portanto $< b - a$. Logo, não é possível se ter $\frac{k}{n} < a < b < \frac{k+1}{n}$, ou seja, pelo menos um dos números racionais $\frac{k}{n}$, com $k \in \mathbb{Z}$, pertence ao intervalo (a, b) . Para obtermos um irracional em (a, b) basta tomarmos n natural de modo que $b - a > \frac{\sqrt{2}}{n}$. Desta forma os intervalos $\left(\frac{k\sqrt{2}}{n}, \frac{(k+1)\sqrt{2}}{n}\right)$ de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{n}$ varrem toda a reta \mathbb{R} , e assim um de seus extremos é um número irracional que pertence ao intervalo (a, b) .

1.2 Noções Iniciais de Sequências de Números Reais

Definição 1.2.1. Uma sequência de números reais é uma função que possui como domínio o conjunto \mathbb{N} dos números naturais e que toma valores no conjunto \mathbb{R} dos números reais, isto é, $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

O valor $a(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por a_n , o qual chamaremos de *termo de ordem n* , ou *n -ésimo termo*.

Usualmente, sequências são representadas pela notação $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, que pode ser abreviada como: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou, simplesmente, (a_n) . Isto significa que a sequência dada é a função $1 \mapsto a_1, 2 \mapsto a_2, \dots, n \mapsto a_n, \dots$, que associa o número real a_n a cada natural n .

Podemos classificar uma sequência em relação à sua quantidade de termos da seguinte forma: a sequência é dita **finita** se possui número limitado de termos, isto é, para algum n natural, a sequência é do tipo (a_1, a_2, \dots, a_n) , e dizemos que a sequência é **infinita** se possui uma quantidade ilimitada de termos, isto é, a sequência será da forma $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

Por exemplo, $(1, 4, 34, 3, 17, 427)$ e $(24, 17, \sqrt{2}, \pi^2, 0, 14)$ são sequências finitas, já que ambas possuem seis termos cada, enquanto que $(1, 2, 3, 4, \dots)$ é uma sequência infinita (dos números naturais).

Outros exemplos importantes de sequências são as progressões. A seguir faremos um estudo a respeito das principais sequências abordadas no Ensino Básico, que são as progressões aritméticas e geométricas.

1.3 Progressão Aritmética (PA)

Definição 1.3.1. *Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência de números reais onde cada termo, a partir do segundo, é obtido através da soma do termo anterior a uma constante. Essa constante é chamada de razão da PA e representada por r .*

Exemplo 1.3.1. *As sequências $(3, 7, 11, \dots)$ e $(\frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \dots)$ são progressões aritméticas cujas razões são, respectivamente, 4 e $-\frac{1}{2}$.*

A razão de uma PA pode ser um número positivo, negativo ou igual a zero. No caso em que $r > 0$, a PA é dita *crescente*, ou seja, $m < n \Rightarrow a_m < a_n$. Quando $r < 0$, a PA é dita *decrecente*, ou seja, $m < n \Rightarrow a_m > a_n$. Claramente, se $r = 0$ então a PA é constante: (a_1, a_1, a_1, \dots) .

Proposição 1.3.1. *Uma sequência (a_n) de números reais é uma PA se, e somente se,*

$$a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Por definição, a sequência (a_n) é uma PA se, e somente se, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = r$, isto é, se e só se, para todo $n \in \mathbb{N}$, tivermos $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} \Rightarrow a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n$. ■

O resultado acima obtido nos diz que, em uma PA, um certo termo (com exceção do primeiro termo e do último termo, no caso de uma PA finita) é a *média aritmética* de seus termos vizinhos. Isto facilita a resolução de diversos problemas envolvendo PA's, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 1.3.2. Se $3 - x, -x, \sqrt{9 - x}, \dots$ é uma PA, determine x e calcule o quinto termo.

Solução: Pela Proposição (1.3.1) temos que $-2x = 3 - x + \sqrt{9 - x}$, ou seja, $\sqrt{9 - x} = -(x + 3)$. Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos $x^2 + 7x = 0$ e as raízes desta última equação são $x = 0$ (que não satisfaz as condições do problema) e $x = -7$ (que satisfaz as condições do problema). Logo, a PA é $(10, 7, 4, 1, -2, \dots)$ e, portanto, o quinto termo da PA é -2 .

1.3.1 Termo Geral de uma Progressão Aritmética

Teorema 1.3.1. Se $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ é uma progressão aritmética de razão r , então $a_n = a_1 + (n - 1)r$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Pela definição de PA, temos que:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + r \\ a_n &= a_{n-1} + r. \end{aligned}$$

Somando as $n - 1$ igualdades acima e efetuando os cancelamentos necessários, obtemos

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

■

A equação (1.1) é chamada de *termo geral* da PA, que possibilita o cálculo de qualquer termo de uma PA sendo conhecidos o seu primeiro termo e sua razão.

O entendimento do termo geral de uma PA é imediato, sendo suficiente observar que para avançar um termo, basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas

vezes a razão, e assim por diante. Em geral, partindo do n -ésimo termo, para se avançar até o m -ésimo termo, com $n < m$, basta somar $(m - n)$ vezes a razão. Assim, sendo $n < m$, com $m, n \in \mathbb{N}$, temos

$$a_m = a_n + (m - n)r. \quad (1.2)$$

Exemplo 1.3.3. *Considere uma progressão aritmética onde o sétimo termo vale 34 e o vigésimo terceiro termo vale 114. Quanto vale o décimo quinto termo dessa progressão?*

Solução: Temos, por (1.2), que: $a_{23} = a_7 + 16r$. Assim $114 = 34 + 16r \Rightarrow r = 5$. Obtemos então $a_{15} = a_7 + 8r$, isto é, $a_{15} = 34 + 8 \cdot 5 \Rightarrow a_{15} = 74$.

Exemplo 1.3.4. *Se (a_n) é uma PA de razão r , prove que as sequências (b_n) e (c_n) , definidas por $b_n = a_{2n}$ e $c_n = a_{2n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, também são PA's, ademais de razões iguais a $2r$.*

Demonstração: Primeiro, analisando a sequência (b_n) , para mostrar o que se deseja, basta mostrar que $b_n - b_{n-1} = 2r$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ora, usando a definição de (b_n) e o fato de (a_n) ser uma PA de razão r , obtemos

$$\begin{aligned} b_n - b_{n-1} &= a_{2n} - a_{2(n-1)} \\ &= a_{2n} - a_{2n-2} \\ &= (a_{2n} - a_{2n-1}) + (a_{2n-1} - a_{2n-2}) \\ &= r + r \\ &= 2r. \end{aligned}$$

Agora, analisando a sequência (c_n) e trabalhando de modo análogo ao anterior, temos que

$$\begin{aligned} c_n - c_{n-1} &= a_{2n-1} - a_{2(n-1)-1} \\ &= a_{2n-1} - a_{2n-3} \\ &= (a_{2n-1} - a_{2n-2}) + (a_{2n-2} - a_{2n-3}) \\ &= r + r \\ &= 2r. \end{aligned}$$

■

1.3.2 Interpretação Geométrica das Progressões Aritméticas

Uma PA pode ser vista geometricamente como uma sequência (finita ou infinita) de pontos $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ igualmente espaçados na reta, ou seja, a razão $r = a_n - a_{n-1}$ independe de n , e como já sabemos

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = \dots$$

Podemos perceber que, sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim dada, por exemplo, por $f(x) = \alpha x + \beta$, e sendo a PA $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, então os pontos $y_n = f(a_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, também estão igualmente espaçados na reta, ou seja, estes pontos também formam uma PA, cuja razão é

$$y_n - y_{n-1} = (\alpha a_n + \beta) - (\alpha a_{n-1} + \beta) = \alpha(a_n - a_{n-1}) = \alpha r.$$

Logo, se tivermos uma reta que representa o gráfico de uma função afim e tomarmos sobre ela os pontos $(1, y_1), (2, y_2), \dots, (n, y_n), \dots$, onde as abscissas desses pontos são os números naturais, então as ordenadas $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ desses pontos formam uma PA. Assim, pode se dizer que uma função afim é capaz de transformar uma PA em outra PA.

É claro que podemos pensar na própria fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)r$ como sendo uma função afim, cujo domínio é o conjunto \mathbb{N} dos números naturais. Mais precisamente, a expressão $a_n = nr + a_1 - r$ será simplesmente a restrição aos naturais da função afim $a(x) = rx + a(1) - r$. Assim, o gráfico desta função é dado pelos pontos colineares do plano: $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n), \dots$, como pode ser observado na figura 1.1 a seguir.

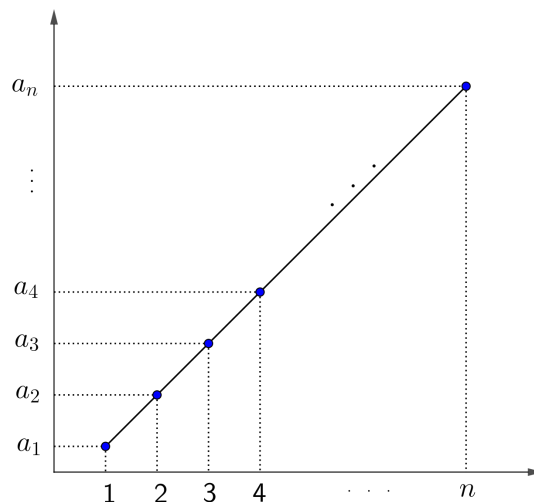


Figura 1.1: Gráfico de uma Progressão Aritmética.

Portanto, uma sequência numérica é uma PA se, e somente se, os pontos do plano que têm coordenadas $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n), \dots$ são colineares.

A seguir, veremos uma aplicação relacionada aos resultados obtidos acima.

Exemplo 1.3.5. *Dadas as progressões aritméticas*

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \text{ e } (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots),$$

mostre que existe uma, e somente uma, função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n, \dots$$

Demonstração: Sendo $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ e $(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ PA's, então ambas possuem razões, isto é, existem r_1 e r_2 tais que

$$a_n = a_1 + (n - 1)r_1 \quad \text{e} \quad b_n = b_1 + (n - 1)r_2.$$

Consideremos $f(x) = \alpha x + \beta$, tal que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$. Daí, temos que:

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta = b_1 \\ \alpha(a_1 + r_1) + \beta = b_1 + r_2 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos $\alpha = \frac{r_2}{r_1}$ e $\beta = b_1 - \alpha \frac{r_2}{r_1}$, de onde a função f será dada por $f(x) = \frac{r_2}{r_1}x + b_1 - \alpha \frac{r_2}{r_1}$. Logo,

$$\begin{aligned} f(a_n) &= f(a_1 + (n - 1)r_1) \\ &= \frac{r_2}{r_1}(a_1 + (n - 1)r_1) + \left(b_1 - \alpha \frac{r_2}{r_1}\right) \\ &= b_1 + (n - 1)r_2 = b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

que era o que desejávamos mostrar.

Para mostrarmos a unicidade de f , tomemos $g(x) = \alpha_1 x + \beta_1$ e assim obtemos que $g(a_n) = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, em particular, temos $g(a_1) = b_1$ e $g(a_2) = b_2$, e, portanto, a construção da função f acarreta $f = g$.

■

1.3.3 Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética

Uma interessante história a respeito do ilustre matemático alemão *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) é bem conhecida na comunidade matemática. Conta-se que, quando *Gauss* tinha dez anos de idade, ele resolveu um problema que seu exigente professor *J. G. Büttner* passou aos alunos, com o objetivo de manter sua classe ocupada. O professor solicitou a *Gauss* e seus colegas de classe que calculassem o resultado da soma $1+2+\dots+99+100$, tarefa que foi respondida rapidamente por *Gauss*, sem nenhum cálculo escrito em suas anotações. *Gauss* entregou ao professor a resposta correta: 5050 (Ver [9]).



Figura 1.2: Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

O que *Gauss* efetuou foi a soma dos termos da PA $(1, 2, \dots, 99, 100)$ de razão $r = 1$, observando que as somas $1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, \dots$ resultavam todas em 101. Logo, bastou a *Gauss* calcular o produto $101 \times 50 = 5050$ para encontrar a resposta correta.

Com base no raciocínio utilizado por *Gauss*, enunciaremos o resultado a seguir.

Teorema 1.3.2. *Se $(a_n), \forall n \in \mathbb{N}$, é uma PA de razão r , então*

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \quad (1.3)$$

Demonstração: Primeiro, observemos que

$$\begin{aligned} a_1 + a_n &= (a_2 - r) + (a_{n-1} + r) = a_2 + a_{n-1} \\ a_2 + a_{n-1} &= (a_3 - r) + (a_{n-2} + r) = a_3 + a_{n-2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

etc.

Agora, sendo $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, temos

$$\begin{aligned} 2S_n &= 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_n + a_1) \\ &= \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas}} \\ &= (a_1 + a_n)n, \end{aligned}$$

ou seja,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

■

Exemplo 1.3.6. Calcule a soma dos termos da progressão aritmética $2, 5, 8, 11, \dots$ desde o 25° até o 41° termo, inclusive.

Solução: Primeiro, calculando a_{25} e a_{41} , temos que:

$$\begin{aligned} a_{25} &= a_1 + 24r \Rightarrow a_{25} = 2 + 24 \cdot 3 \Rightarrow a_{25} = 74 \\ a_{41} &= a_1 + 40r \Rightarrow a_{41} = 2 + 40 \cdot 3 \Rightarrow a_{41} = 122. \end{aligned}$$

Agora, observe que do 25° termo, inclusive, ao 41° , inclusive, há $41 - 25 + 1 = 17$ termos. Logo, usando a equação (1.3), obtemos

$$S = \frac{(a_{25} + a_{41}) \cdot 17}{2} = \frac{(74 + 122) \cdot 17}{2} = 1666.$$

Exemplo 1.3.7. Prove que a soma de todos os inteiros positivos de n dígitos, $n > 2$, é igual ao número $494\underline{99} \dots 955\underline{00} \dots 0$, no qual há $n - 3$ dígitos sublinhados que são iguais a 9 e $n - 2$ dígitos sublinhados que são iguais a 0 .

Demonstração: Para melhor entendimento, primeiro faremos o caso particular $n = 3$.

Temos que os números de 3 dígitos são $100, 101, \dots, 999$ que é uma PA de $999 - 100 + 1 = 900$ termos e razão 1. Assim,

$$S = \frac{(100 + 999) \cdot 900}{2} = \frac{989100}{2} = 494550,$$

que é o que desejávamos.

Para o caso geral, note que a soma pedida é a soma de uma PA de razão 1, com primeiro termo igual a $\underbrace{100\dots0}_{n \text{ dígitos}} = 10^{n-1}$ e último termo igual a $\underbrace{999\dots9}_{n \text{ dígitos}} = 10^n - 1$, cuja quantidade de termos é $\underbrace{999\dots9}_{n \text{ dígitos}} - \underbrace{100\dots0}_{n \text{ dígitos}} + 1 = (10^n - 1) - (10^{n-1}) + 1 = 10^n - 10^{n-1}$. Logo,

$$\begin{aligned} S &= \frac{(10^{n-1} + 10^n - 1)(10^n - 10^{n-1})}{2} = \frac{(11 \cdot 10^{n-1} - 1)(90 \cdot 10^{n-2})}{2} \\ &= 45 \cdot 10^{n-2} (11 \cdot 10^{n-1} - 1) = 10^{n-2} (495 \cdot 10^{n-1} - 45) \\ &= 10^{n-2} (495000\dots000 - 45) \\ &= \underline{49499\dots95500\dots0}. \end{aligned}$$

Assim, temos $n - 3$ dígitos sublinhados que são iguais a 9 e $n - 2$ dígitos sublinhados que são iguais a 0, como queríamos mostrar. ■

Exemplo 1.3.8. O número triangular T_n é definido como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, \dots$. O número quadrangular Q_n é definido como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $1, 3, 5, 7, \dots$. Analogamente, são definidos números pentagonais, hexagonais, etc. A figura abaixo justifica essa denominação.

Determine o número j -gonal de ordem n .

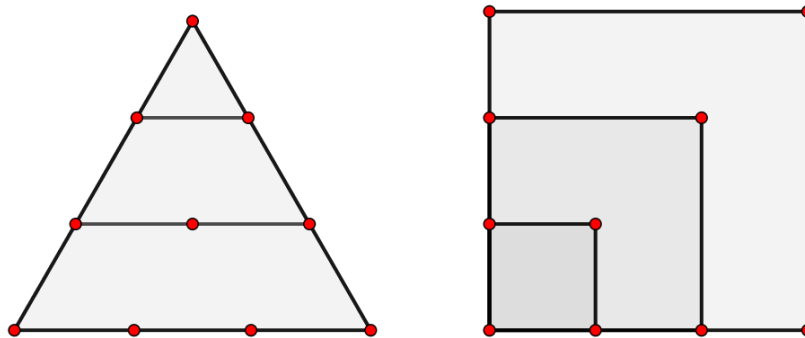


Figura 1.3: Representação dos Números Triangulares e Quadrangulares.

Solução: Observemos que a progressão aritmética cuja soma dos n primeiros termos é a definição do número j -gonal, possui razão $r = j - 2$ e é da forma

$$1, (j - 1), (2j - 3), (3j - 5), (4j - 7), \dots, [(n - 1)j - (2n - 3)].$$

Logo, a soma pedida é dada por

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + (j - 1) + (2j - 3) + (3j - 5) + (4j - 7) + \dots + [(n - 1)j - (2n - 3)] \\
 &= 1 + j [1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 1)] - [1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 3)] \\
 &= 1 + j \underbrace{[1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 1)]}_{\text{PA de } n - 1 \text{ termos e razão } 1} - \underbrace{[1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2(n - 1) - 1)]}_{\text{PA de } n - 1 \text{ termos e razão } 2} \\
 &= 1 + j \frac{n(n - 1)}{2} - (n - 1)^2,
 \end{aligned}$$

isto é,

$$S = \frac{n [j(n - 1) - 2(n - 2)]}{2}.$$

1.4 Progressão Geométrica (PG)

Definição 1.4.1. *Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência de números reais onde cada termo, a partir do segundo, é obtido através do produto do termo anterior a uma constante. Essa constante é chamada de razão da PG e representada por q .*

Exemplo 1.4.1. *As sequências $(4, 12, 36, 108, \dots)$ e $(32, 8, 2, \frac{1}{2}, \dots)$ são progressões geométricas cujas razões são, respectivamente, 3 e $\frac{1}{4}$.*

Observemos que, se $q = 0$, então $a_n = 0$ para todo $n \geq 2$. Por outro lado, se $q = 1$, então $a_n = a_1$ para todo n natural.

Proposição 1.4.1. *Uma sequência (a_n) de números reais é uma PG se, e somente se,*

$$a_{n+1} \cdot a_{n-1} = a_n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Por definição, a sequência (a_n) é uma PG se, e somente se,

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots,$$

isto é, se e só se, para todo $n \in \mathbb{N}$, tivermos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_{n+1} \cdot a_{n-1} = a_n^2$. ■

O resultado acima obtido nos diz que, em uma PG, um certo termo (com exceção do primeiro termo e do último termo, no caso de uma PA finita) é a *média geométrica* de seus termos vizinhos. Isto facilita a resolução de diversos problemas envolvendo PG's, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 1.4.2. O lado, o perímetro e a área de um triângulo equilátero, nesta ordem, são termos de uma progressão geométrica. Calcule a medida da altura desse triângulo equilátero em unidades de comprimento.

Solução: Chamando de ℓ o comprimento do lado deste triângulo, temos que seu perímetro é 3ℓ e sua área é $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$. Assim, pela Proposição (1.4.1), temos

$$\ell \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = (3\ell)^2 \Rightarrow \ell = \frac{9 \cdot 4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \ell = 12\sqrt{3}.$$

Portanto, a altura do triângulo será $\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 18$.

1.4.1 Termo Geral de uma Progressão Geométrica

Teorema 1.4.1. Se $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ é uma progressão geométrica de razão q , então $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Pela definição de PG, temos que:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} \cdot q \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q. \end{aligned}$$

Multiplicando as $n - 1$ igualdades acima, membro a membro, teremos

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} = q^{n-1},$$

e assim, efetuando a divisão de ambos os membros da igualdade acima por $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{n-1}$ (perceba que isso é possível, pois $a_i \neq 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$), obtemos

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$



A equação (1.4) é chamada de *termo geral* da PG, que possibilita o cálculo de qualquer termo de uma PG sendo conhecidos o seu primeiro termo e sua razão.

De modo análogo ao que foi observado nas progressões aritméticas, percebemos que, em uma PG, para avançar um termo, basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes a razão, e assim por diante.

Em geral, partindo do n -ésimo termo, para se avançar até o m -ésimo termo, com $n < m$, basta multiplicar $(m - n)$ vezes a razão. Assim, sendo $n < m$, com $m, n \in \mathbb{N}$, temos que

$$a_m = a_n \cdot q^{m-n}. \quad (1.5)$$

Exemplo 1.4.3. Em uma progressão geométrica, o sexto termo vale 4 e o nono vale $\frac{27}{2}$. Calcule o décimo terceiro termo dessa progressão.

Solução: Temos, por (1.5), que: $a_9 = a_6 \cdot q^3$. Assim, $\frac{27}{2} = 4 \cdot q^3 \Rightarrow q = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$. Logo, como $a_{13} = a_9 q^4$, obtemos $a_{13} = \frac{27}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{2187}{32}$.

Exemplo 1.4.4. Seja $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ uma PA de números naturais, de razão $r > 0$, e $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots)$ uma PG de números reais não nulos, de razão q . Considere a sequência $(c_n)_{k \geq 1}$ tal que $c_n = b_{a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que a mesma é uma PG de razão q^r .

Demonstração: Para provar o que se deseja, basta mostrar que a razão entre quaisquer dois termos consecutivos da sequência $(c_n)_{k \geq 1}$ é sempre igual a q^r . Assim, temos

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{b_{a_{n+1}}}{b_{a_n}} = \frac{b_1 q^{a_{n+1}-1}}{b_1 q^{a_n-1}} = q^{a_{n+1}-a_n} = q^r.$$

■

1.4.2 Interpretação Geométrica das Progressões Geométricas

Podemos pensar em uma progressão geométrica $a_n = a_1 q^n$ como uma função exponencial que associa a cada natural n o valor de a_n . Mais precisamente, $a_n = a_1 q^n$ é a restrição aos naturais da função exponencial $a(x) = a(1) \cdot q^x$. Assim, o gráfico dessa função será formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial, como observado no gráfico abaixo.

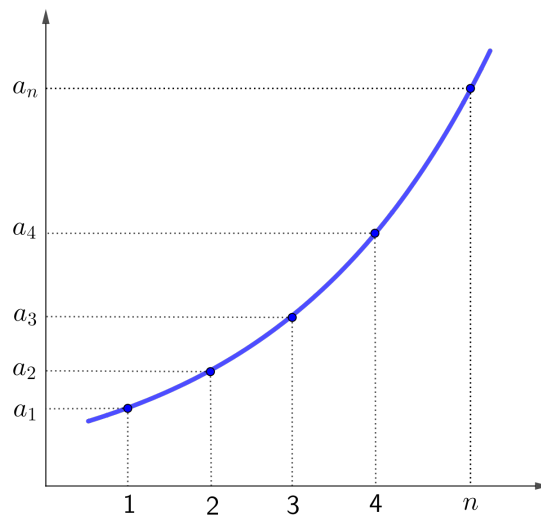


Figura 1.4: Gráfico de uma Progressão Geométrica.

1.4.3 Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica Finita

Teorema 1.4.2. Se $(a_n), \forall n \in \mathbb{N}$, é uma PG de razão q , com $q \neq 1$, então

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}. \quad (1.6)$$

Demonstração: Multiplicando $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ por q , e usando a definição de progressão geométrica, segue que

$$\begin{aligned} qS_n &= q(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) \\ &= qa_1 + qa_2 + \dots + qa_{n-1} + qa_n \\ &= a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Agora, subtraindo qS_n de S_n , obtemos

$$\begin{aligned} (q - 1)S_n = qS_n - S_n &= (a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) \\ &= a_{n+1} - a_1 \\ &= a_1q^n - a_1 \\ &= a_1(q^n - 1). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por $q - 1$ (o que é possível, pois $q \neq 1$) obtemos

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

■

Exemplo 1.4.5. *Reza a lenda que o inventor indiano do xadrez, mostrou o jogo ao rei Shirham, que ficou tão entusiasmado, que ofereceu ao inventor o que ele quisesse. Sissa, o sábio indiano, para dar uma lição de humildade ao soberano, pediu um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois pela segunda, quatro pela terceira, ... e assim sucessivamente, duplicando a cada casa a quantidade anterior até chegar à última. O rei estranhou um pouco, mas ordenou que lhe dessem o que pedia. Só quando seus contadores fizeram as contas, viram, assombrados, que não havia tanto trigo no reino, nem sequer em toda a terra, para juntar essa quantidade. Calcule a quantidade de grãos de trigo pedida.*

Solução: Como o tabuleiro de xadrez possui 64 casas, a quantidade pedida é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica $1, 2, 4, \dots$, de razão 2. Por (1.6), obtemos

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \\ &= \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1} \\ &= 2^{64} - 1. \end{aligned}$$

Calculando, teremos o surpreendente número: 18.446.744.073.709.551.615.

Exemplo 1.4.6. *Mostre que o número $444 \dots 488 \dots 89$, formado por n dígitos iguais a 4, $n - 1$ dígitos iguais a 8 e um dígito igual a 9, é um quadrado perfeito.*

Solução: Temos que:

$$\begin{aligned} 444 \dots 488 \dots 89 &= 4 \cdot 10^{2n-1} + 4 \cdot 10^{2n-2} + \dots + 4 \cdot 10^n + 8 \cdot 10^{n-1} + 8 \cdot 10^{n-2} + \dots + 8 \cdot 10 + 9 \\ &= 4 \underbrace{(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \dots + 10^n)}_{\text{PG de } n \text{ termos e razão } 10} + 8 \underbrace{(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10)}_{\text{PG de } n - 1 \text{ termos e razão } 10} + 9 \\ &= 4 \cdot \frac{10^n(10^n - 1)}{10 - 1} + 8 \cdot \frac{10(10^{n-1} - 1)}{10 - 1} + 9 \\ &= \frac{4 \cdot 10^{2n} - 4 \cdot 10^n + 8 \cdot 10^n - 80 + 81}{9} \\ &= \frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9} \\ &= \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

Agora, basta mostrar que $2 \cdot 10^n + 1$ é múltiplo de 3 para todo natural n . Provaremos este fato por indução em n .

Afirmção: $2 \cdot 10^n + 1$ é múltiplo de 3, para todo natural n .

Para $n = 1$ a afirmação é verdadeira, pois: $2 \cdot 10^1 + 1 = 21 = 3 \cdot 7$. Suponhamos, por hipótese de indução, que $2 \cdot 10^n + 1$ é múltiplo de 3 para um certo natural n , isto é, $2 \cdot 10^n + 1 = 3 \cdot k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Para $n + 1$, temos que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 10^{n+1} + 1 &= 2 \cdot 10^n \cdot 10 + 1 = 2 \cdot 10^n(9 + 1) + 1 = 2 \cdot 10^n \cdot 9 + 2 \cdot 10^n + 1 \\ &= 3 \cdot (6 \cdot 10^n) + \underbrace{(2 \cdot 10^n + 1)}_{\text{Hipótese de Indução}} \\ &= 3 \cdot (6 \cdot 10^n) + 3 \cdot k \\ &= 3 \cdot (6 \cdot 10^n + k), \text{ com } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Princípio da Indução, $2 \cdot 10^n + 1$ é múltiplo de 3, para todo natural n e, portanto, $444 \dots 488 \dots 89 = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2$ é um quadrado perfeito. ■

Exemplo 1.4.7. Calcule o valor da soma

$$2 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 12 \cdot 3^2 + 17 \cdot 3^3 + \dots + 497 \cdot 3^{99} + 502 \cdot 3^{100},$$

onde, da esquerda para a direita, a k^{a} parcela é igual ao produto do k^{o} termo da PA $2, 7, 12, \dots, 502$ pelo k^{o} termo da PG $1, 3, 3^2, \dots, 3^{100}$.

Solução: Vamos usar a ideia utilizada na demonstração do Teorema (1.4.2). Chamemos de S a soma pedida e calculemos $3S$ (o fator 3 é devido ao fato deste ser a razão da PG envolvida). Deste modo, obtemos

$$3S = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3^3 + 17 \cdot 3^4 + \dots + 497 \cdot 3^{100} + 502 \cdot 3^{101}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2S &= 3S - S \\ &= (502 \cdot 3^{101} - 2) - 5(3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}) \\ &= (502 \cdot 3^{101} - 2) - 5 \frac{3(3^{100} - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{1004 \cdot 3^{101} - 5 \cdot 3^{101} - 4 + 15}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S = \frac{999 \cdot 3^{101} + 11}{4}.$$

1.4.4 Soma de uma Progressão Geométrica Infinita

Além das progressões geométricas finitas, diversas situações cotidianas e inúmeros problemas matemáticos podem ser resolvidos através dos conceitos de progressões geométricas infinitas, sobretudo a ideia de somar termos deste tipo de progressão.

Em consideração a essas progressões, podemos observar que as mesmas se dividem, basicamente, em dois grupos: as que possuem razão satisfazendo $|q| \geq 1$ e as quais possuem razão que satisfaz $|q| < 1$.

Considerando o primeiro grupo, sendo sua razão $|q| \geq 1$ e $a_1 \neq 0$, não é possível dar sentido à soma infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Além disso, se $a_1 > 0$ e $q > 1$, então as somas finitas $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ficam tão grandes quanto queiramos, bastando tomar n suficientemente grande.

Por outro lado, para o segundo grupo, enunciamos o próximo resultado (cuja demonstração pode ser omitida numa primeira leitura) onde utilizaremos as ideias de limite de seqüências, conceito este que será melhor explorado no próximo capítulo. Porém, antes de apresentarmos o resultado, observe que em progressões geométricas onde $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos destas progressões tem um limite finito quando $n \rightarrow \infty$, pois nesse caso $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ (o que pode ser comprovado no resultado a seguir e no próximo capítulo), e assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 \cdot \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Proposição 1.4.2. *Seja (a_1, a_2, a_3, \dots) uma PG infinita de razão $|q| < 1$, é válido que:*

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1}{1 - q}. \quad (1.7)$$

Demonstração: Primeiro, note que para mostrarmos este fato, basta por $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ e mostrar que a diferença entre S_n e $\frac{a_1}{1 - q}$ se aproxima cada vez mais de 0, à medida que n aumenta.

Se $q = 0$, não há o que demonstrar. Assim, suponhamos que $0 < |q| < 1$. De (1.6), segue que

$$\begin{aligned} \left| S_n - \frac{a_1}{1 - q} \right| &= \left| \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} - \frac{a_1}{1 - q} \right| = \left| \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} - \frac{a_1}{1 - q} \right| \\ &= \left| \frac{a_1 q^n}{1 - q} \right| = \left| \frac{a_1}{1 - q} \right| \cdot |q|^n. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Agora, perceba que $0 < |q| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1$, de modo que podemos escrever

$$\frac{1}{|q|} = 1 + a,$$

para algum $a > 0$. Assim, para $n > 1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|q|^n} &= (1 + a)^n = \underbrace{(1 + a) \dots (1 + a)}_{n \text{ vezes}} \\ &= 1 + na + (\text{soma de parcelas positivas}) \\ &> na, \end{aligned}$$

o que é equivalente a $|q|^n < \frac{1}{na}$.

Daí, obtemos de (1.8)

$$\left| S_n - \frac{a_1}{1 - q} \right| = \left| \frac{a_1}{1 - q} \right| \cdot |q|^n < \left| \frac{a_1}{1 - q} \right| \cdot \frac{1}{na}.$$

Desta forma, para n suficientemente grande, podemos tornar as somas S_n tão próximas de $\frac{a_1}{1 - q}$ quanto queiramos, isto é,

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{a_1}{1 - q}.$$

■

Exemplo 1.4.8. Sendo x positivo, calcule $\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots}}}}$.

Solução: Observe que:

$$\begin{aligned} \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots}}}} &= x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} \cdot x^{\frac{1}{16}} \cdot \dots \\ &= x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}. \end{aligned}$$

Assim, para determinarmos o que se pede, basta calcularmos $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$, que é a soma dos termos de uma PG infinita de razão $|q| = \frac{1}{2} < 1$. Logo, por (1.7), obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots}}}} &= x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots} \\ &= x^{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} \\ &= x. \end{aligned}$$

Exemplo 1.4.9. Uma P.G. infinita tem soma 2005 e razão $\frac{m}{n}$, com m e n primos entre si. Uma nova sequência é obtida ao elevar ao quadrado todos os os termos da PG original e a nova soma dos termos fica 10 vezes a soma inicial. Calcule o valor de $m + n$.

Solução: Sendo x o primeiro termo da PG original, temos que

$$\frac{x}{1 - \frac{m}{n}} = 2005 \Rightarrow x = 2005 \left(1 - \frac{m}{n}\right). \quad (1.9)$$

A nova sequência será uma PG de primeiro termo x^2 e razão $\left(\frac{m}{n}\right)^2$. Logo,

$$\frac{x^2}{1 - \left(\frac{m}{n}\right)^2} = 20050 \Rightarrow x^2 = 20050 \left[1 - \left(\frac{m}{n}\right)^2\right]. \quad (1.10)$$

Elevando ambos os membros da equação (1.9) ao quadrado e comparando com a equação (1.10), obtemos

$$\begin{aligned} x^2 = 2005^2 \left(1 - \frac{m}{n}\right)^2 &= 20050 \left[1 - \left(\frac{m}{n}\right)^2\right] \Rightarrow 2005 \left(1 - \frac{m}{n}\right) = 10 \left(1 + \frac{m}{n}\right) \\ 2005 \cdot \frac{m}{n} + 10 \cdot \frac{m}{n} &= 2005 - 10 \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{1995}{2015} = \frac{399}{403}. \end{aligned}$$

Como m e n são primos entre si, então $m = 399$ e $n = 403$ e, portanto, $m + n = 802$.

Exemplo 1.4.10. (IME) Dada uma circunferência de raio R , inscreve-se nela um quadrado. A seguir, inscreve-se uma circunferência neste quadrado. Este processo se repete indefinidamente para o interior da figura de maneira que cada quadrado estará sempre inscrito em uma circunferência e simultaneamente circunscrito por outra. Calcule, em função de R , a soma das áreas delimitadas pelos lados dos quadrados e pelas circunferências que os circunscrevem, conforme mostra a figura.

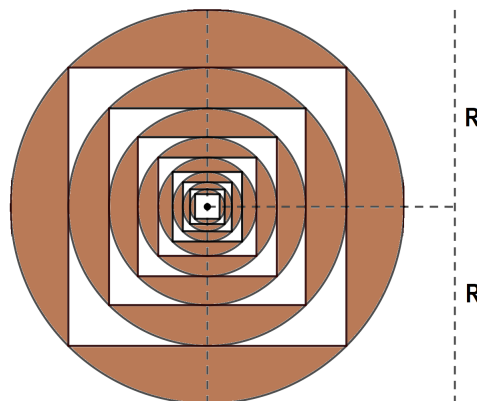


Figura 1.5: Quadrados Inscritos e Circunscritos em Circunferências.

Solução: A diagonal do quadrado é igual ao diâmetro da circunferência. Então, calculando a área do quadrado de lado l , obtemos

$$d = 2R \Rightarrow l^2 + l^2 = (2R)^2 \Rightarrow 2l^2 = 4R^2 \Rightarrow l^2 = 2R^2$$

Observemos que o que se pede é o somatório das áreas de várias figuras semelhantes, e notemos que essas áreas formam uma P.G. de primeiro termo

$$A_1 = \text{Área do 1º Círculo} - \text{Área do 1º Quadrado}$$

$$A_1 = \pi R^2 - (R\sqrt{2})^2$$

$$A_1 = R^2(\pi - 2)$$

A segunda circunferência possui raio igual a metade do lado do primeiro quadrado, $R_2 = \frac{l}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, e área

$$A_2 = \pi R_2^2 \Rightarrow A_2 = \pi \left(\frac{R\sqrt{2}}{2} \right)^2 \Rightarrow A_2 = \frac{\pi R^2}{2}.$$

O segundo quadrado possui a diagonal igual ao diâmetro da segunda circunferência, e como a diagonal do quadrado é igual ao diâmetro da circunferência, temos

$$d_2 = 2R_2 \Rightarrow 2l_2^2 = (R\sqrt{2})^2 \Rightarrow l_2^2 = R^2.$$

Assim,

$$A_2 = \frac{\pi R^2}{2} - R^2 \Rightarrow A_2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) R^2.$$

Logo, a razão da PG é dada por:

$$q = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) R^2}{(\pi - 2) R^2} \Rightarrow q = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a soma pedida é

$$S = A_1 + A_2 + \dots = \frac{A_1}{1 - q} = \frac{R^2(\pi - 2)}{1 - \frac{1}{2}},$$

isto é,

$$S = 2R^2(\pi - 2).$$

1.5 Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa (ou Leonardo Pisano) (1170 - 1250), nascido em Pisa na Toscana (Itália), filho *Guilielmo Bonnacci*, ficou conhecido como Leonardo Fibonacci devido ao fato de Fibonacci ser um diminutivo de *fillius Bonacci*, que queria dizer filho de Bonacci. Seu pai era um próspero mercador, e Fibonacci acompanhou as atividades de seu pai no porto de Pisa, que mantinha grande influência no comércio do Mediterrâneo. Através das atividades de comércio alfandegário realizadas por seu pai, Fibonacci viajou pelo Mediterrâneo (Egito, Síria, Grécia, Sicília, Provença) e tomou contato com a matemática hindu e árabe, praticada no comércio oriental. Quando Fibonacci regressou a sua terra natal, escreveu diversos trabalhos utilizando os conhecimentos adquiridos em suas viagens, dos quais destacamos: **Liber Abbaci** (1202), **Pratica Geometrae** (1220) e **Liber Quadratorum** (1225). O **Liber Abbaci** (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo), responsável pela disseminação dos números hindu-arábicos na Europa, refere-se ao estudo do cálculo aritmético e é considerado por muitos matemáticos o melhor tratado sobre Aritmética e Álgebra da época (Ver [9]).



Figura 1.6: Leonardo Fibonacci (1170 - 1250).

Dentre os problemas contidos no **Liber Abbaci**, destaca-se o conhecido “problema dos coelhos” que diz: *Qual o número de pares de coelhos que serão gerados num ano, a partir de um casal de coelhos jovens, considerando, que nenhum coelho morre durante o ano, cada casal de coelhos gera outro casal de coelhos mensalmente e cada coelho (fêmea) fica fértil após dois meses?*

Fixando como mês um o início do processo, neste mês só há um único casal jovem. No segundo mês, esse casal será adulto. Como um par adulto produz um novo par a cada mês, no início do terceiro mês existirão dois pares de coelhos, sendo um par adulto e outro recém-nascido.

No início do quarto mês o par adulto produzirá mais um par, enquanto que o outro par ainda não estará apto a reproduzir. Assim, existirão três pares de coelhos, sendo um par adulto, um par com um mês de idade e mais um par recém-nascido. Já no começo do quinto mês existirão dois pares adultos, sendo que cada um já reproduziu um novo par e mais um par que completou um mês de vida. Logo, existirão cinco pares.

No início do sexto mês existirão três pares adultos, sendo que cada um já produziu um novo par e mais dois pares que completam um mês de vida. Logo, existirão oito pares. Assim, seguindo o mesmo raciocínio para os outros meses, obtemos a famosa *sequência de Fibonacci*, cujos primeiros termos são:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Observemos que, para cada novo par de coelhos dar à luz, há uma espera de dois meses. Assim, cada par de coelhos que já existia há dois meses dará à luz um novo par de coelhos, isto é, o número de novos pares de coelhos de cada mês, é igual ao número de coelhos nascidos dois meses antes. Além disso, o número de pares de coelhos que estavam vivos antes dos novos nascerem é o mesmo número de pares de coelhos existentes no mês anterior. Portanto, o número de pares de coelhos em um determinado mês, é a soma dos pares de coelhos existentes nos dois meses anteriores a este.

Em termos matemáticos, tomando F_n como a quantidade de pares de coelhos em um certo mês n , com $n \geq 2$, temos a seguinte expressão:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geq 2. \quad (1.11)$$

Antes de darmos continuidade ao estudo da sequência de Fibonacci, abordaremos alguns resultados importantes sobre sequências definidas recursivamente, dando ênfase às **recorrências lineares de segunda ordem**.

1.5.1 Sequências Definidas Recursivamente

Dizemos que uma sequência é definida recursivamente se ela for dada por uma regra (recorrência) que permite calcular um termo qualquer por meio de um ou mais termos anteriores. Por exemplo, as próprias progressões aritméticas e geométricas são definidas por recorrência.

Exemplo 1.5.1. A sequência $(x_n) = (1, 4, 10, 22, 46, \dots)$ é uma recorrência onde o primeiro termo é $x_1 = 1$ e cada termo a partir do segundo é dado por $x_n = 2x_{n-1} + 2$.

As recorrências podem ser classificadas de acordo com a sua ordem, com a homogeneidade e linearidade.

Definição 1.5.1. A ordem de uma recorrência é a diferença entre o maior e o menor dos índices dos termos de sua equação.

Por exemplo, a equação $x_n = \frac{x_{n-4}}{x_{n-5}}$, com $n \geq 5$, representa uma recorrência de 5ª ordem, pois $n - (n - 5) = 5$.

Definição 1.5.2. Uma recorrência é dita “homogênea” quando cada termo depende exclusivamente dos anteriores. Em contrapartida, uma recorrência é dita “não-homogênea” quando além de depender dos termos anteriores, cada elemento da sequência também está em função de um termo independente.

Por exemplo, a equação dada por $x_{n+3} = x_{n+2} - 2x_{n+1} + 3x_n$ representa uma recorrência homogênea, e $x_{n+1} = 2x_n + 3$ representa uma recorrência não-homogamia.

Definição 1.5.3. Uma sequência (x_n) possui equação de recorrência linear de ordem k se estiver escrita na forma:

$$x_{n+k} = f_1(n)x_{n+k-1} + f_2(n)x_{n+k-2} + \dots + f_k(n)x_n + f_{k+1}(n),$$

onde $f_i(n)$ é uma função em n com $i \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq k + 1$, e ainda $f_k \neq 0$.

Por exemplo, as equações $x_{n+2} = nx_{n+1} - 4x_n$ e $x_{n+1} = 2x_n + n$ representam recorrências lineares, e as equações $x_{n+2} = \frac{2x_{n+1}}{x_n}$ e $x_{n+1} = 2(x_n)^2$ representam recorrências não-lineares.

A seguir abordaremos as recorrências lineares de segunda ordem mostrando alguns resultados importantes que darão base ao estudo de uma relevante propriedade da sequência de Fibonacci.

1.5.1.1 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Trataremos das recorrências lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, isto é, recorrências da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0.$$

Assim, consideraremos que $q \neq 0$, pois caso $q = 0$ teríamos uma recorrência linear de primeira ordem.

Associaremos a cada recorrência do tipo descrito acima, uma equação do segundo grau do tipo $r^2 + pr + q = 0$, a qual chamaremos de *equação característica*. Observemos que, como $q \neq 0$, então 0 não é raiz da equação característica.

Teorema 1.5.1. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .*

Demonstração: Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e agrupando convenientemente os termos, obtemos

$$C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) = C_1 r_1^n 0 + C_2 r_2^n 0 = 0.$$

■

Exemplo 1.5.2. *A equação $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 10x_n = 0$ possui como equação característica $r^2 + 3r - 10 = 0$. Como as raízes da equação característica são 2 e -5, pelo Teorema anterior, todas as sequências da forma $a_n = C_1 2^n + C_2 (-5)^n$ são soluções da recorrência.*

Teorema 1.5.2. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2 , com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração: Seja y_n uma solução qualquer da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determinemos as constantes C_1 e C_2 que são as soluções do sistema

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1 \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2 \end{cases}.$$

Efetuada os cálculos necessários, obtemos:

$$C_1 = \frac{r_2^2 y_1 - r_2 y_2}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)},$$

o que é possível, pois $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Assim, basta mostrar que $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, para todo n natural, para terminarmos a demonstração do Teorema, ou, equivalentemente, considerando $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$ basta mostrar que $z_n = 0$, para todo n natural. Note que

$$z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = (y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n) - C_1 r_1^n (r_1^2 + p r_1 + q) - C_2 r_2^n (r_2^2 + p r_2 + q).$$

Perceba que o primeiro parêntese do lado direito da equação acima é 0, pois y_n é solução de $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$, e os dois últimos parênteses são iguais a 0 devido ao fato de r_1 e r_2 serem raízes de $r^2 + p r + q = 0$. Portanto, $z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = 0$.

Ademais, sendo $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ e $C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$. Mas, sendo $z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo n natural. ■

Observação: Em geral, as raízes da equação característica podem até ser complexas. Neste caso, a solução $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes, pode ser reescrita com o objetivo de evitar cálculos com números complexos. Para isto, ponhamos as raízes na forma trigonométrica:

$$r_1 = \rho (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad \text{e} \quad r_2 = \rho (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta),$$

e daí,

$$r_1^n = \rho^n [\cos (n\theta) + i \operatorname{sen} (n\theta)] \quad \text{e} \quad r_2^n = \rho^n [\cos (n\theta) - i \operatorname{sen} (n\theta)].$$

Deste modo, obtemos

$$C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = \rho^n [(C_1 + C_2) \cos (n\theta) + i (C_1 - C_2) \operatorname{sen} (n\theta)],$$

e fazendo $C'_1 = C_1 + C_2$ e $C'_2 = i (C_1 - C_2)$, a solução pode ser escrita como

$$a_n = \rho^n [C'_1 \cos (n\theta) + C'_2 \operatorname{sen} (n\theta)].$$

Observação: No caso de as raízes da equação característica $r^2 + p r + q = 0$ serem iguais, isto é, $r = r_1 = r_2$, temos que $a_n = C_1 r_1^n + C_2 n r_1^n$ é solução da equação $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$,

quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 . De fato, sendo as raízes iguais, então $r = -\frac{p}{2}$, e substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 n r_1^n$ na recorrência, obtemos, agrupando convenientemente os termos,

$$\begin{aligned} C_1 r^n (r^2 + pr + q) + C_2 n r^n (r^2 + pr + q) + C_2 r^n r (2r + p) \\ = C_1 r^n 0 + C_2 n r^n 0 + C_2 r^n r 0 = 0. \end{aligned}$$

Em verdade, quando $r_1 = r_2$, todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 n r_1^n$. A demonstração deste resultado e outros resultados relevantes sobre recorrências podem ser encontrados em [11], os quais não abordaremos neste trabalho.

1.5.2 Algumas Propriedades da Sequência de Fibonacci

Podemos observar que, da discussão que resultou na expressão (1.11) e das propriedades sobre sequências definidas recursivamente, a sequência de Fibonacci é uma recorrência linear de segunda ordem. Lembremos que a mesma é dada por:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

com $n \geq 2$ e $F_1 = F_2 = 1$. Diremos que esta é a definição da referida sequência.

Propriedade 1.5.1. *Quaisquer dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci são primos entre si, isto é, $\text{mdc}(F_n, F_{n+1}) = 1$, para todo n natural.*

Demonstração: Utilizando a definição da sequência e o *Algoritmo de Euclides* para o cálculo do mdc (um tratado sobre este algoritmo pode ser encontrado em [15]), obtemos:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= 1.F_n + F_{n-1} \\ F_n &= 1.F_{n-1} + F_{n-2} \\ &\vdots \\ F_4 &= 1.F_3 + F_2 \\ F_3 &= 1.F_2 + \underbrace{F_1}_{=F_2} = 2.F_2 + 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{mdc}(F_{n+1}, F_n) = \text{mdc}(F_n, F_{n-1}) = \dots = \text{mdc}(F_3, F_2) = \text{mdc}(F_2, 0) = F_2 = 1.$$

■

Propriedade 1.5.2. *A soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é dada por:*

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Demonstração: Pela definição da sequência, obtemos:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2 \\ F_2 &= F_4 - F_3 \\ &\vdots \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}. \end{aligned}$$

Somando as equações acima, membro a membro, e efetuando os cancelamentos necessários, obtemos

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

■

Propriedade 1.5.3. *A soma dos quadrados dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci é dada por:*

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Demonstração: Provaremos por indução em n . Para $n = 1$ a propriedade é verdadeira, pois: $1^2 = F_1^2 = F_1 \cdot F_2 = 1 \cdot 1$. Suponhamos que a propriedade seja verdadeira para um certo n natural, isto é,

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Para $n + 1$, temos que:

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 + F_{n+1}^2 &= F_n \cdot F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1} \cdot F_{n+2}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução, a propriedade é verdadeira para todo n natural.

■

Observemos que, até aqui, para calcularmos um certo termo da sequência de Fibonacci precisamos conhecer os dois termos imediatamente anteriores a ele. Porém, para determinarmos esses dois termos anteriores, precisamos, também, conhecer os dois termos imediatamente anteriores a estes. Seguindo o raciocínio, para calcularmos um certo termo da sequência, precisaremos conhecer todos os termos anteriores a ele.

A seguinte propriedade, também conhecida como *Fórmula de Binet*¹, nos permite encontrar qualquer termo da sequência de Fibonacci sem, necessariamente, calcular todos os termos anteriores a ele. Ou seja, a propriedade apresentará o termo geral desta sequência.

Propriedade 1.5.4. *A sequência de Fibonacci definida por $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, para todo $n \geq 2$, com $F_1 = F_2 = 1$, possui termo geral dado por:*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \quad (1.12)$$

Demonstração: Como $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ é uma recorrência linear de segunda ordem, extraindo as soluções de sua equação característica $r^2 - r - 1 = 0$, encontramos

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Daí, pelo Teorema (1.5.2), obtemos

$$F_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Para determinarmos as constantes C_1 e C_2 , basta usar $F_1 = F_2 = 1$. Assim, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \\ C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 2 \end{cases},$$

obtemos

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Portanto, o termo geral da sequência de Fibonacci é dado por:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

¹Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856), matemático francês e precursor no estudo da teoria matricial.

A sequência de Fibonacci pode ser encontrada em diversos contextos, desde situações relacionadas à natureza (como no crescimento das plantas, nas espirais de semente e frutas, etc.), passando pela arquitetura e arte (como na sua relação com a Razão Áurea), até a economia (como na sua relação com alterações das bolsas de valores). Ver [1], [7] e [20].

A seguir, veremos algumas exemplos importantes de aplicações da sequência de Fibonacci, nos quais faremos uso de algumas das propriedades estudadas sobre a mesma.

Exemplo 1.5.3. *Justapondo dois quadrados de lado igual a 1, obtém-se um retângulo do tipo 2×1 , sendo a medida de comprimento do maior lado igual à soma das medidas dos comprimentos dos lados dos quadrados iniciais. Justapondo agora outro quadrado com medida de comprimento de lado igual a 2 (a medida de comprimento do maior lado do retângulo 2×1), teremos um retângulo 3×2 . Continuando a justapor quadrados com medidas de comprimento de lados iguais à maior das medidas dos comprimentos dos lados dos retângulos obtidos no passo anterior e unindo-se os arcos (quartos) de circunferência que se obtêm dos quadrados unindo adequadamente vértices opostos destes, constrói-se uma espiral, designada por **Espiral de Fibonacci**, como ilustrado abaixo. Calcule a medida do comprimento da Espiral de Fibonacci, construída a partir dos n primeiros quadrados (com medidas de comprimento de lados iguais aos primeiros n números de Fibonacci).*

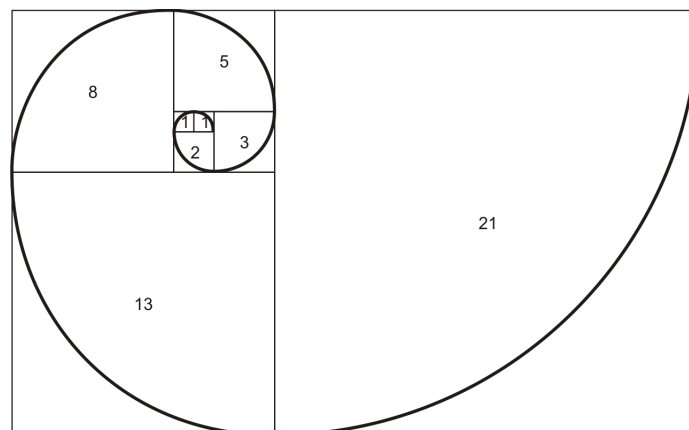


Figura 1.7: Espiral de Fibonacci.

Solução: Observe que, para calcular o comprimento total da Espiral basta somar os comprimentos dos quartos de circunferências contidos em cada quadrado. Assim, sendo C

o comprimento total da Espiral, obtemos

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 5 + \dots + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot F_n \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot (1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \dots + F_n). \end{aligned}$$

Observe que a soma $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \dots + F_n$ já foi calculada na Propriedade (1.5.2), e resulta em $F_{n+2} - 1$. Portanto,

$$C = F_{n+2} - 1.$$

Exemplo 1.5.4. *De quantas maneiras um tabuleiro $2 \times n$ pode ser preenchido com dominós 2×1 ?*

Solução: Seja x_n o número de maneiras de preenchermos o tabuleiro $2 \times n$. Primeiro, vamos analisar alguns casos particulares.

Para $n = 1$, é imediato que só há um modo de preenchermos o tabuleiro 2×1 . Logo, $x_1 = 1$.

Para $n = 2$, temos dois modos de preencher o tabuleiro 2×2 , pois podemos distribuir os dois dominós na horizontal ou na vertical. Logo, $x_2 = 2$.

Para $n = 3$, podemos iniciar o preenchimento do tabuleiro 2×3 colocando um dominó na vertical ou dois dominós na horizontal. No primeiro caso, para preenchermos o restante do tabuleiro (que será um tabuleiro 2×2 cujas possibilidades já foram contadas anteriormente), temos duas maneiras. No segundo caso, para preenchermos o restante do tabuleiro (que será um tabuleiro 2×1 cujas possibilidades já foram contadas anteriormente), temos uma maneira. Portanto, $x_3 = 2 + 1 = 3$.

Para $n = 4$, analogamente ao caso anterior, podemos iniciar o preenchimento do tabuleiro 2×4 colocando um dominó na vertical ou dois dominós na horizontal. No primeiro caso, o preenchimento do restante do tabuleiro se reduz ao caso $n = 3$, isto é, teremos três possibilidades. No segundo caso, o restante do tabuleiro será preenchido como no caso $n = 2$, ou seja, temos duas possibilidades. Portanto, $x_4 = 3 + 2 = 5$.

Observe a figura 1.8 com os casos analisados até aqui.

Utilizando o raciocínio anterior, podemos perceber que para preencher um tabuleiro $2 \times n$, basta somar as possibilidades de preenchimento dos tabuleiros $2 \times n - 2$ e $2 \times n - 1$. Isto é,

$$x_n = x_{n-2} + x_{n-1}, \text{ para } n \geq 3. \quad (1.13)$$

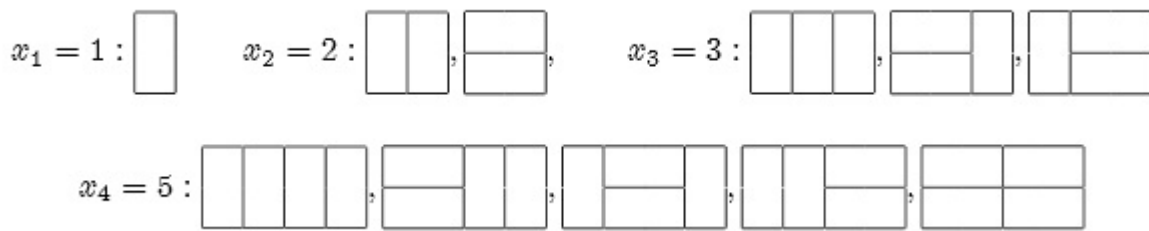


Figura 1.8: Casos Iniciais do Preenchimento dos Tabuleiros.

Observemos que esta relação recursiva, junto aos casos iniciais $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, resulta nos termos $(1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$, que são os termos da sequência de Fibonacci (a partir do segundo termo).

Assim, usando raciocínio análogo ao utilizado na demonstração da Propriedade (1.5.4) e o Teorema (1.5.2), podemos encontrar o termo geral da relação de recorrência (1.13), onde $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, e assim obteremos que o número de possibilidades de se preencher um tabuleiro $2 \times n$ com dominós 2×1 , que será dado por:

$$x_n = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Exemplo 1.5.5. A razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci converge para ϕ quando n tende ao infinito, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi,$$

onde ϕ é o conhecido **Número de Ouro**, dado por $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Demonstração: Pela Fórmula de Binet (1.12), temos

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

e

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Assim, temos que

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}} \right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} \right]}.$$

Note que, como $-1 \leq \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \leq 1$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} = 0,$$

e portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}} \right]}{\left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} \right]} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

■

1.6 Problemas de Embasamento e Aprofundamento

Nesta seção apresentaremos alguns problemas que darão suporte ao conteúdo trabalhado até aqui, além de serem apresentadas algumas outras sequências numéricas, como as progressões harmônica e aritmético-geométrica.

Os problemas abordados são extraídos de provas de vestibulares, referências bibliográficas e olimpíadas de matemática, contendo vários níveis de dificuldade, e poderão proporcionar um melhor embasamento e aprofundamento ao leitor. Alguns destes problemas podem ser encontrados em [24] e [28].

Problema 1. (*Canadá*) Mostre que os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ não são todos termos de uma mesma PA.

Demonstração: Suponhamos que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são termos de uma mesma PA de razão r . Assim, existem naturais p e q tais que $\sqrt{3} = \sqrt{2} + pr$ e $\sqrt{5} = \sqrt{2} + qr$.

Assim, temos

$$\frac{q}{p} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2.$$

Como p e q são naturais, então $\frac{q}{p}$ é racional. Mas isto é um absurdo, pois $\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2$ não é racional. De fato, sendo $a = \sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6}$, suponhamos que a é racional. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \sqrt{15} + \sqrt{10} = a + \sqrt{6} &\Leftrightarrow (\sqrt{15} + \sqrt{10})^2 = (a + \sqrt{6})^2 \\ &\Leftrightarrow 25 + 10\sqrt{6} = a^2 + 2a\sqrt{6} + 6 \\ &\Leftrightarrow (2a - 10)\sqrt{6} = 19 - a^2 \end{aligned}$$

Agora, temos duas possibilidades:

(i) Se $2a - 10 = 0$, então $a = 5$. Assim, teremos o absurdo $0 \cdot \sqrt{6} = 19 - 5^2$.

(ii) Se $2a - 10 \neq 0$, então $\sqrt{6} = \frac{19 - a^2}{2a - 10}$.

Mas isto também é um absurdo, pois $\sqrt{6}$ é irracional e $\frac{19 - a^2}{2a - 10}$ é racional (já que supomos que a é racional).

Portanto, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ não são termos de uma mesma PA. ■

Problema 2. Os lados de um triângulo formam uma progressão aritmética de razão 1, e o seu maior ângulo é o dobro do menor. Determine o valor dos lados desse triângulo.

Solução: Sejam a , b e c as medidas dos lados desse triângulo, com $a < b < c$, e α o menor dos seus ângulos. Como os lados estão em PA de razão 1, temos que

$$b = a + 1 \quad \text{e} \quad c = a + 2. \tag{1.14}$$

Pela *Lei dos Senos*, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{c}{\operatorname{sen}(2\alpha)} &= \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} \\ \frac{c}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} &= \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} \\ \cos \alpha &= \frac{c}{2a}.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Agora, aplicando a *Lei dos Cossenos* e usando (1.14), (1.15), obtemos:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ a^2 &= (a+1)^2 + (a+2)^2 - 2(a+1)(a+2) \cdot \frac{(a+2)}{2a} \\ a^3 &= a \cdot (a+1)^2 + a \cdot (a+2)^2 - (a+1)(a+2)^2 \\ 0 &= a^2 - 3a - 4,\end{aligned}$$

que resulta em $a = -1$, que não convém, e $a = 4$. Portanto, temos $a = 4$, $b = 5$ e $c = 6$.

Problema 3. (IME) *A soma dos termos de uma progressão aritmética é 244. O primeiro termo, a razão e o número de termos formam, nessa ordem, outra progressão aritmética de razão 1. Determine a razão da primeira progressão aritmética.*

Solução: Consideremos a PA (a_1, a_2, \dots, a_n) com n termos e razão r . Pelo enunciado, (a_1, r, n) é uma outra PA, de razão 1, assim

$$a_1 = r - 1 \quad \text{e} \quad n = r + 1.\tag{1.16}$$

Desde que a soma dos n termos da primeira PA é 244, temos

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = 244 \Leftrightarrow 488 = [2a_1 + (n-1)r]n.\tag{1.17}$$

Substituindo (1.16) em (1.17), obtemos

$$\begin{aligned}[2(r-1) + (r+1-1)r](r+1) &= 488 \Leftrightarrow (r^2 + 2r - 2)(r+1) = 488 \\ &\Leftrightarrow r^3 + 3r - 490 = 0.\end{aligned}$$

Como o polinômio acima possui coeficientes inteiros, podemos utilizar o *Teorema das Raízes Racionais* (Ver [17]) para pesquisar as possíveis raízes racionais deste polinômio. Assim, por inspeção, 7 é uma raiz desse polinômio. Logo, por *Briot-Ruffini*, obtemos:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -490 & 7 \\ \hline 1 & 10 & 70 & 0 & \end{array}$$

Portanto, o polinômio fica fatorado como $(r-7)(r^2+10r+70) = 0$. Como $r^2+10r+70 = 0$ possui determinante $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 70 = -180 < 0$, temos que a única raiz real do polinômio é $r = 7$, sendo esta a razão da primeira PA.

Problema 4. (Romênia) *Uma soma finita de (pelo menos dois) inteiros ímpares e consecutivos é igual a 7^3 . Encontre esses números.*

Solução: Observemos que uma lista finita de números ímpares e consecutivos é uma PA (a_1, a_2, \dots, a_n) de razão 2. Assim:

$$\begin{aligned} 7^3 &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{[2a_1 + 2(n-1)] \cdot n}{2} \\ &= n(a_1 + n - 1). \end{aligned}$$

Como $7^3 = n(a_1 + n - 1)$, então 7^3 é divisível por n , logo $n = 1$, $n = 7$, $n = 7^2$ ou $n = 7^3$. Vamos analisar os casos:

(i) Se $n = 1$, temos $a_1 = 7$. Como só temos um termo, este caso não nos serve.

(ii) Se $n = 7$, temos $a_1 = 43$.

Logo, os números pedidos serão $(43, 45, 47, 49, 51, 53, 55)$.

(iii) Se $n = 7^2$, temos $a_1 = -41$.

Logo, os números pedidos serão $(-41, -39, -37, \dots, 53, 55)$.

(iv) Se $n = 7^3$, temos $a_1 = -341$.

Logo, os números pedidos serão $(-341, -339, \dots, 339, 341, 343)$.

Problema 5. *Se a sequência (a_n) é uma progressão aritmética, prove que a sequência $(b_n) = e^{a_n}$ é uma progressão geométrica, onde e denota o número de Euler.*

Demonstração: Consideremos r a razão da PA (a_n) . Observemos que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{e^{a_{n+1}}}{e^{a_n}} = e^{a_{n+1} - a_n} = e^r.$$

Logo, (b_n) é uma PG de razão e^r .

■

Problema 6. Se a sequência (a_n) é uma progressão geométrica, prove que a sequência $(b_n) = \log a_n$ é uma progressão aritmética.

Demonstração: Consideremos q a razão da PG (a_n) . Observemos que

$$b_{n+1} - b_n = \log a_{n+1} - \log a_n = \log \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log q.$$

Logo, (b_n) é uma PA de razão $\log q$. ■

Problema 7. Prove que não existe uma PG que tenha os números 2, 3 e 5 como três de seus termos.

Demonstração: Suponhamos que (a_n) seja uma PG de razão q , tal que $a_m = 2$, $a_n = 3$ e $a_p = 5$, para m , n e p naturais distintos dois a dois. Assim, temos

$$a_1 q^{m-1} = 2, \quad a_1 q^{n-1} = 3 \quad \text{e} \quad a_1 q^{p-1} = 5.$$

Dividindo membro a membro a primeira e a segunda igualdades acima, assim como a primeira e a terceira igualdades, obtemos, respectivamente,

$$q^{m-n} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad q^{m-p} = \frac{2}{5}.$$

Elevando os membros da primeira igualdade acima a $m-p$, e os membros da segunda igualdade a $m-n$, obtemos

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{m-p} = q^{(m-n)(m-p)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{m-n},$$

o que é equivalente a

$$2^{n-p} \cdot 5^{m-n} = 3^{m-p}.$$

Podemos perceber que a última igualdade acima contradiz o *Teorema Fundamental da Aritmética* (Ver [15]), que nos afirma que todo número natural maior que 1 admite apenas uma fatoração como produto de potências de primos. Portanto, os números 2, 3 e 5 não são termos da PG (a_n) . ■

Problema 8. (Macedônia) Em uma PA não constante de números reais, o quociente entre o primeiro termo e a razão é um número irracional. Prove que não há três termos dessa PA que estejam em PG.

Demonstração: Seja (a_n) uma PA não constante de razão r , tal que $\frac{a_1}{r} \notin \mathbb{Q}$. Suponhamos, por contradição, que existam três termos dessa PA que estão em PG. Denotemos esses termos por a_m , a_n e a_p , com m , n e p naturais tais que $m < n < p$. Assim, temos que

$$a_n^2 = a_m \cdot a_p.$$

Daí, segue que:

$$\begin{aligned} [a_1 + (n-1)r]^2 &= [a_1 + (m-1)r] \cdot [a_1 + (p-1)r] \\ \implies 2a_1(n-1)r + (n-1)^2r^2 &= a_1(m-1)r + a_1(p-1)r + (m-1)(p-1)r^2 \\ \xrightarrow{\div r^2} \frac{a_1}{r}(2n-2) + (n-1)^2 &= \frac{a_1}{r}(m-1+p-1) + (m-1)(p-1) \\ \implies \frac{a_1}{r}(2n-m-p) &= (m-1)(p-1) - (n-1)^2. \end{aligned}$$

Da última igualdade acima, consideremos os casos:

(i) Se $2n - m - p \neq 0$, então

$$\frac{a_1}{r} = \frac{(m-1)(p-1) - (n-1)^2}{2n-m-p} \in \mathbb{Q},$$

o que é uma contradição à hipótese de que $\frac{a_1}{r} \notin \mathbb{Q}$.

(ii) Se $2n - m - p = 0$, então

$$n = \frac{m+p}{2} \implies 2a_n = a_m + a_p,$$

de onde segue que (a_m, a_n, a_p) também é uma PA.

Neste ponto, vamos provar que: se (x_1, x_2, x_3) é uma PA de razão r' e uma PG de razão q' , então $x_1 = x_2 = x_3$. De fato, a sequência, sendo uma PA, pode ser representada por $(x_2 - r', x_2, x_2 + r')$ e, sendo a mesma uma PG, temos $x_2^2 = x_1 \cdot x_3$. Logo,

$$\begin{aligned} x_2^2 &= x_1 \cdot x_3 \\ &= (x_2 - r')(x_2 + r') \\ &= x_2^2 - r'^2 \\ \implies r' &= 0. \end{aligned}$$

Assim, sendo $r' = 0$, obtemos $x_1 = x_2 + r' = x_2 + 0 = x_2$ e $x_3 = x_2 - r' = x_2 - 0 = x_2$. Portanto, $x_1 = x_2 = x_3$.

Como, por hipótese, (a_m, a_n, a_p) é uma PG e chegamos ao fato desta sequência também ser uma PA, então $a_m = a_n = a_p$, e assim $r = 0$, o que contraria o fato de que a PA é não constante. Portanto, não há três termos dessa PA que estejam em PG. ■

Problema 9. (ITA) A soma dos cinco primeiros termos de uma PA de razão r é 50 e a soma dos termos de uma PG infinita de razão q é 12. Suponha que as progressões têm o mesmo termo inicial e que esse termo é menor do que 10. Supondo, ainda, que $q = r^2$, calcule a soma dos quatro primeiros termos da PG.

Solução: Seja (a_n) a PA e (b_n) a PG. Das hipóteses do problema, obtemos:

$$\frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} = 50 \Rightarrow a_1 = 10 - 2r \quad \text{e} \quad \frac{b_1}{1 - q} = 12 \Rightarrow b_1 = 12 - 12q.$$

Como $a_1 = b_1$ e $q = r^2$, segue que

$$10 - 2r = 12 - 12q \Rightarrow 6r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ r = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Notemos que, se $r = -\frac{1}{3}$ então $a_1 = 10 + 2 \cdot \frac{1}{3} > 10$, o que seria uma contradição à hipótese de que o termo inicial das progressões é menor que 10. Logo,

$$r = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad q = r^2 = \frac{1}{4}.$$

Assim, obtemos $b_1 = 12 - 12 \cdot \frac{1}{4} = 9$. Portanto, a soma dos quatro primeiros termos da PG é:

$$b_1 + \dots + b_4 = \frac{9 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^4 \right]}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{765}{64}.$$

Problema 10. (Triângulo de Sierpinski) Seja, inicialmente, um triângulo equilátero de lado ℓ , totalmente preenchido. Marcando os pontos médios de cada lado desse triângulo e traçando os segmentos formados por estes pontos, obtém-se quatro triângulos equiláteros internos ao triângulo original. Retirando-se o triângulo central, obtido após o passo anterior, e repetindo indefinidamente a etapa anterior a cada um dos triângulos não removidos,

obtem-se uma figura geométrica denominada *Triângulo de Sierpinski*, em homenagem ao matemático polonês *Waclaw Sierpinski* (1882-1969). A figura abaixo descreve as quatro primeiras etapas do processo descrito. Denotando por A_n a área obtida após a n -ésima etapa, calcule A_n e $\lim A_n$.



Figura 1.9: Etapas Iniciais da Construção do Triângulo de Sierpinski.

Solução: Consideremos A_0 como o estágio inicial do processo, isto é, $A_0 = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

Observemos que na 1ª etapa da construção, os três triângulos não removidos possuem o comprimento de seus lados iguais a metade do comprimento do lado do triângulo original. Logo, $A_1 = \frac{3}{4} \cdot A_0$.

Na 2ª etapa, os nove triângulos não removidos possuem o comprimento de seus lados iguais a metade do comprimento do lado do triângulo não removidos na etapa anterior. Logo, $A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot A_0$.

Continuando a construção, observamos que as áreas, em cada etapa, formam uma PG de razão $\frac{3}{4}$, com primeiro termo igual a A_0 . Assim,

$$A_n = A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{3^n \ell^2 \sqrt{3}}{4^{n+1}}.$$

Também, como a razão desta PG pertence ao intervalo $(-1, 1)$, então:

$$\lim A_n = \lim A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

Problema 11. A *Curva de Koch* é obtida em estágios pelo processo seguinte:

- (i) No estágio 0, ela é um triângulo equilátero de lado ℓ .
- (ii) O estágio $n+1$ é obtido a partir do estágio n , dividindo cada lado em três partes iguais, construindo externamente sobre a parte central um triângulo equilátero e suprimindo então a parte central (ver figura abaixo).

Sendo P_n e A_n , respectivamente, o perímetro e a área do n -ésimo estágio da Curva de Koch, determine:

(a) P_n (b) A_n (c) $\lim P_n$ (d) $\lim A_n$



Figura 1.10: Primeiros Níveis da Curva de Koch.

Solução:

(a) Observemos que cada segmento dá origem a novos quatro segmentos de tamanho $\frac{1}{3}$ do segmento original. Assim, no primeiro estágio, temos 12 segmentos de tamanho $\frac{\ell}{3}$ cada. Logo, $P_1 = 3 \cdot \frac{4}{3}\ell$.

No segundo estágio, temos 48 segmentos de tamanho $\frac{\ell}{9}$ cada. Logo, $P_2 = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^2 \ell$. Seguindo o raciocínio, podemos observar que os perímetros de cada estágio da *Curva de Koch* formam uma PG de razão $\frac{4}{3}$. Como o processo inicia-se do estágio 0, temos que:

$$P_n = 3\ell \left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

(b) Podemos observar que área de cada triângulo, formado nos sucessivos passos de construção, sofre uma redução de $\frac{1}{9}$, uma vez que pode ser dividido em nove triângulos geometricamente iguais (ver figura abaixo).

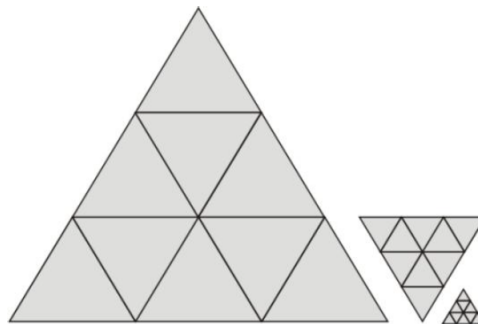


Figura 1.11: Redução da Área de cada Triângulo nas Etapas da Construção.

Assim, a área da figura de um certo estágio obtém-se adicionando à área da figura do estágio anterior o número de triângulos que se acrescentam nesse passo, multiplicado pela área de um triângulo equilátero cujo valor sofre uma redução por um fator de $\frac{1}{9}$ do valor da figura do estágio anterior.

Sendo $A_0 = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ a área da figura do estágio inicial, no primeiro estágio teremos 3 novos triângulos de área $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9}$ cada. Logo,

$$A_1 = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} + 3 \times \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9} = \ell^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \right).$$

No segundo estágio teremos $12 = 3 \times 4$ novos triângulos (como observado no item (a)) de área $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^2$ cada. Logo,

$$A_2 = \ell^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \right) + 3 \times 4 \times \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \ell^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{4}{9} \right).$$

No terceiro estágio teremos $48 = 3 \times 4^2$ novos triângulos (como observado no item (a)) de área $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^3$ cada. Logo,

$$\begin{aligned} A_3 &= \ell^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{4}{9} \right) + 3 \times 4^2 \times \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^3 \\ &= \ell^2 \left[\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Seguindo o raciocínio, no n -ésimo estágio teremos $3 \times 4^{n-1}$ novos triângulos de área $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n$ cada. Logo,

$$\begin{aligned} A_n &= \ell^2 \left[\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \right] + \dots + 3 \times 4^{n-1} \times \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n \\ &= \ell^2 \left[\frac{\sqrt{3}}{4} + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}_{\text{PG de } n \text{ termos e razão } 4/9} \right] \\ &= \ell^2 \left[\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} \right] = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n. \end{aligned}$$

(c) Como $\frac{4}{3} > 1$, então P_n cresce indefinidamente. De fato,

$$\lim P_n = \lim \left[3\ell \left(\frac{4}{3}\right)^n \right] = \infty.$$

ou seja, o perímetro da *Curva de Koch* é infinito.

(d) Como $-1 < \frac{4}{9} < 1$, então $\lim \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$. Portanto,

$$\lim A_n = \lim \left[\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{12} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n \right] = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Problema 12. A sequência $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ é uma **progressão harmônica** se, e somente se, a sequência $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots\right)$ é uma progressão aritmética. Mostre que, para $n > 2$, o termo geral da progressão harmônica é dado por:

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}.$$

Demonstração: Seja $b_n = \frac{1}{a_n}$ o termo geral de uma PA de razão r . Assim,

$$r = b_2 - b_1 = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2},$$

de onde segue, do termo geral de uma PA, que:

$$b_n = b_1 + (n-1)r = \frac{1}{a_1} + (n-1) \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} = \frac{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2}.$$

Como $b_n = \frac{1}{a_n}$, então, para $n > 2$,

$$\frac{1}{a_n} = \frac{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}{a_1 a_2} \Rightarrow a_n = \frac{a_1 a_2}{a_2 + (n-1)(a_1 - a_2)}.$$

■

Problema 13. Uma progressão **aritmético-geométrica** é uma sequência (a_n) tal que a_1 , q e r são números reais dados, com q diferente de 1, e, para todo n inteiro, $n > 0$, tem-se que:

$$a_{n+1} = qa_n + r. \quad (1.18)$$

(a) Mostre que

$$a_n = a_1 q^{n-1} + r \frac{(q^{n-1} - 1)}{q - 1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Se $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, mostre que

$$S_n = r \frac{q^n - q}{(1-q)^2} - a_1 \frac{q^n - 1}{1-q} + r \frac{n-1}{1-q},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

(a) Vamos mostrar por indução em n .

Para $n = 1$, é imediato que a afirmação é verdadeira. Suponhamos que, para um certo n , é verdade que

$$a_n = a_1 q^{n-1} + r \frac{(q^{n-1} - 1)}{q - 1}.$$

Vamos verificar se a afirmação é verdadeira para $n + 1$.

Usando a definição da sequência, dada em (1.18), obtemos

$$\begin{aligned} a_{n+1} = qa_n + r &= q \left(a_1 q^{n-1} + r \frac{(q^{n-1} - 1)}{q - 1} \right) + r \\ &= a_1 q^n + r \frac{(q^n - q)}{q - 1} + r \\ &= a_1 q^n + r \frac{q^n - q + q - 1}{q - 1} \\ &= a_1 q^n + r \frac{q^n - 1}{q - 1}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Logo, a afirmação é verdadeira para $n + 1$. Portanto, pelo Princípio da Indução, a afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mais uma vez, mostraremos por indução em n .

Para $n = 1$, a afirmação é verdadeira, pois

$$S_1 = r \frac{q^1 - q}{(1 - q)^2} - a_1 \frac{q^1 - 1}{1 - q} + r \frac{1 - 1}{1 - q} = a_1.$$

Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para um certo n . Para $n + 1$, temos que:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{\text{Hipótese de Indução}} + \underbrace{a_{n+1}}_{(1.19)} \\ &= r \frac{q^n - q}{(1 - q)^2} - a_1 \frac{q^n - 1}{1 - q} + r \frac{n - 1}{1 - q} + a_1 q^n + r \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ &= r \frac{q^n - q}{(1 - q)^2} - a_1 \frac{q^n - 1 - q^n + q^{n+1}}{1 - q} + r \frac{n}{1 - q} - r \frac{1}{1 - q} - r \frac{q^n}{1 - q} + r \frac{1}{1 - q} \\ &= r \frac{q^n - q - q^n + q^{n+1}}{(1 - q)^2} - a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{1 - q} + r \frac{n}{1 - q} \\ &= r \frac{q^{n+1} - q}{(1 - q)^2} - a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{1 - q} + r \frac{n}{1 - q}. \end{aligned}$$

Assim, a afirmação é verdadeira para $n + 1$. Portanto, pelo Princípio da Indução, a afirmação é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Problema 14. (ITA) Seja (a_1, a_2, a_3, \dots) a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2} , que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.

II. a_7 é número primo.

III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s)

(a) apenas II.

(b) apenas I e II.

(c) apenas I e III.

(d) apenas II e III.

(e) I, II e III.

Solução: Primeiro, observemos que a sequência que satisfaz as condições do problema é a sequência de Fibonacci, a saber $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$.

I. Se existissem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2} , em PG, teríamos $a_{p+1} = q \cdot a_p$ e $a_{p+2} = q^2 \cdot a_p$. Pela definição da sequência, $a_{p+2} = a_{p+1} + a_p$. Assim, obteríamos

$$q^2 \cdot a_p = q \cdot a_p + a_p \Leftrightarrow q^2 - q - 1 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Podemos perceber que isto não é possível, pois os termos da sequência de Fibonacci são inteiros e não nulos, logo, o quociente entre os seus termos é racional. Portanto, a afirmação I é falsa.

II. O sétimo termo da sequência é $a_7 = 13$, que é primo. Logo, a afirmação II é verdadeira.

III. Provaremos por indução que toda sequência $(a_{3k-2}, a_{3k-1}, a_{3k})$ é da forma $(\text{ímpar}, \text{ímpar}, \text{par})$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para $k = 1$, a afirmação é verdadeira, pois $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 2)$, que é da forma $(\text{ímpar}, \text{ímpar}, \text{par})$.

Suponhamos que a afirmação é verdadeira para um certo k . Para $k + 1$, usando a definição da sequência, temos que:

$$\begin{cases} a_{3k+1} = a_{3k-1} + a_{3k} \Rightarrow a_{3k+1} = \text{ímpar} + \text{par} \Rightarrow a_{3k+1} = \text{ímpar} \\ a_{3k+2} = a_{3k+1} + a_{3k} \Rightarrow a_{3k+2} = \text{ímpar} + \text{par} \Rightarrow a_{3k+2} = \text{ímpar} \\ a_{3k+3} = a_{3k+2} + a_{3k+1} \Rightarrow a_{3(k+1)} = \text{ímpar} + \text{ímpar} \Rightarrow a_{3(k+1)} = \text{par} \end{cases} .$$

Assim, a afirmação é verdadeira para $k + 1$ e, pelo Princípio da Indução, a afirmação é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$.

Logo, a afirmação III é verdadeira.

Problema 15. *Mostre que todo o número inteiro positivo pode ser expresso como uma soma de números de Fibonacci distintos.*

Demonstração: Mostraremos por indução.

É imediato que afirmação é verdadeira para 1, pois $1 = F_1$. Suponhamos, por hipótese de indução, que todo inteiro positivo menor do que um certo k pode ser escrito como soma de números de Fibonacci distintos. Queremos mostrar que k pode ser escrito como soma de números de Fibonacci distintos.

Seja, então, F_m o maior número de Fibonacci menor do que ou igual a k . Assim,

$$F_m \leq k < F_{m+1}. \quad (1.20)$$

Se $k = F_m$, não haverá mais o que mostrar. Por outro lado, se $F_m < k$, tomemos $A = k - F_m$ e observemos que, como $A < k$, A pode ser escrito como soma de números de Fibonacci distintos, pela hipótese de indução. Além disso, lembrando da definição da sequência de Fibonacci em (1.11), obtemos

$$A = k - F_m \underbrace{<}_{1.20} F_{m+1} - F_m = F_{m-1} < F_m,$$

ou seja, nenhum dos números de Fibonacci, que somados resultam em A , pode ser F_m .

Assim, $k = A + F_m$ é soma de números de Fibonacci distintos e, pelo Princípio da Indução, todo natural pode ser escrito como soma de números de Fibonacci distintos. ■

CAPÍTULO 2

SEQUÊNCIAS NA GRADUAÇÃO

Neste capítulo estudaremos alguns conceitos de sequências de números reais, tomando por base o modo como este conteúdo é abordado nos cursos de Graduação de Matemática, em geral. Mais especificamente, estudaremos os limites de sequências de números reais, que possuem papel fundamental na Análise Matemática.

Todos os conceitos e resultados importantes da Análise Matemática se referem, quer explícita quer indiretamente, a limites. Daí o papel central que esta noção desempenha [22].

Os limites mais básicos da Análise são os limites de sequências. A partir do entendimento destes, será possível que o leitor progrida ao estudo de limites mais sofisticados, como derivadas, integrais, sequências de funções, etc.

De maneira intuitiva, podemos pensar numa sequência $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ de números reais como uma sequência de pontos da reta e no seu limite como um ponto do qual os pontos a_n se tornam e permanecem arbitrariamente próximos, desde que se tome um índice n suficientemente grande.

Para iniciarmos o estudo de sequências e limite de sequências, do ponto de vista da Análise Matemática, julgamos necessário que o leitor esteja familiarizado com algumas importantes definições e resultados, as quais enunciamos abaixo:

1. Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ diz-se *limitado* quando existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq p$ seja qual for $n \in X$.
2. Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ diz-se *ilimitado* quando não é limitado. Ou seja, dado qualquer $p \in \mathbb{N}$, existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > p$.
3. Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, é ilimitado.

Quando um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é infinito, dizemos que o mesmo contém naturais arbitrariamente grande, ou seja, dado qualquer $n_0 \in X$ existe $n \in X$ tal que $n > n_0$.

4. Um subconjunto X de \mathbb{R} chama-se *limitado superiormente* (respec. *limitado inferiormente*) quando existe $s \in \mathbb{R}$ (respec. $r \in \mathbb{R}$) tal que $x \leq s$ (respec. $r \leq x$) para todo $x \in X$. Sendo este o caso, dizemos que cada $s \in \mathbb{R}$ (respec. $r \in \mathbb{R}$) com esta propriedade chama-se uma *cota superior* (respec. *cota inferior*) de X .

Se um subconjunto X de \mathbb{R} for limitado superior e inferiormente, dizemos que X é *limitado*.

5. Um elemento $b \in \mathbb{R}$ chama-se *supremo* de um subconjunto X de \mathbb{R} quando b é a menor das cotas superiores de X . Assim, $b = \sup X$ deve satisfazer as seguintes condições

$$S1. x \in X \Rightarrow x \leq b;$$

$$S2. x \leq c \text{ para todo } x \in X \Rightarrow b \leq c;$$

$$S2'. \text{ Se } c < b \text{ então existe } x \in X \text{ tal que } c < x.$$

sendo as condições S2 e S2' equivalentes.

6. Um elemento $a \in \mathbb{R}$ chama-se *ínfimo* de um subconjunto X de \mathbb{R} quando a é a maior das cotas inferiores de X . Assim, $a = \inf X$ deve satisfazer as seguintes condições

$$I1. x \in X \Rightarrow a \leq x;$$

$$I2. c \leq x \text{ para todo } x \in X \Rightarrow c \leq a;$$

$$I2'. \text{ Se } a < c \text{ então existe } x \in X \text{ tal que } x < c.$$

sendo as condições I2 e I2' equivalentes.

7. Dados os números a , x , ε , com $\varepsilon > 0$, temos:

$$x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x - a| < \varepsilon.$$

Para intervalos fechados o resultado é análogo.

As definições e resultados acima são algumas das importantes propriedades a respeito de conjuntos de números naturais e reais, as quais utilizaremos no decorrer de nosso estudo. Resultados como os dos itens 3 e 7 são simples e indispensáveis para nossa abordagem e podem ser facilmente demonstrados. Não daremos enfoque à essas demonstrações, porém o leitor pode encontrá-las, assim como outras definições e propriedades importantes para nosso estudo, em [22].

A seguir, vamos relembrar de algumas ideias iniciais sobre sequências, além de enunciarmos algumas outras importantes definições e resultados que darão suporte à nossa abordagem.

2.1 Sequências de Números Reais

Como visto em (1.2), uma *sequência de números reais* é uma função $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida em \mathbb{N} que toma valores em \mathbb{R} . Continuaremos representando o valor $a(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por a_n e chamando-o de *termo de ordem n* , ou *n -ésimo termo* da sequência.

Dizemos que o conjunto $a(\mathbb{N}) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ é o *conjunto dos termos da sequência* (a_n) . Não devemos confundir a sequência $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ com o seu conjunto de termos, pois este pode ser finito, ou até mesmo reduzir-se a um único elemento. Para exemplificar este fato, basta tomarmos, por exemplo, a sequência dada por $a_n = (-1)^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $(a_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$ e observarmos que o seu conjunto de termos é $a(\mathbb{N}) = \{-1, 1\}$.

Uma sequência (a_n) é dita *limitada* quando o conjunto dos seus termos é limitado, ou seja, quando existem reais r e s satisfazendo $r \leq a_n \leq s$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em termos equivalentes, uma sequência é limitada se, e somente se, existe um real $t > 0$ tal que $|a_n| \leq t$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, dizemos que uma sequência é *ilimitada* quando ela não é limitada.

Uma sequência (a_n) diz-se *limitada superiormente* (respec. *limitada inferiormente*) quando existe um real s (respec. r) tal que $a_n \leq s$ (respec. $r \leq a_n$), para todo $n \in \mathbb{N}$. É claro que, uma sequência é limitada se, e somente se, é limitada superior e inferiormente.

Dada uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definimos uma *subsequência* da mesma como a sequência obtida a partir de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, restringindo-nos a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ do conjunto de índices, a qual denotaremos por $(a_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ ou $a' = (a_n)_{n \in \mathbb{N}'}$. Notemos que, estritamente falando, uma subsequência a' não é uma sequência, já que seu domínio \mathbb{N}' não é necessariamente igual a \mathbb{N} . Porém, como a função $i \mapsto n_i$ entre \mathbb{N}' e \mathbb{N} é uma bijeção, podemos considerar que a subsequência a' é, de fato, uma sequência.

Uma sequência (a_n) é dita *crecente* quando $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se vale $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então (a_n) é dita *não-decrescente*. De modo análogo, uma sequência (a_n) é dita *decrescente* quando $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, se vale $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então (a_n) é dita *não-crecente*.

Chamamos as sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crecentes de sequências *monótonas*.

2.2 Limites de Sequências

Consideremos uma sequência (a_n) de números reais. Neste momento, nos interessaremos em reconhecer se os números reais a_n se aproximam *cada vez mais* de um certo número real L , à medida que n aumenta. Se assim o for, dizemos que L é um *limite* da sequência (a_n) . Para exemplificar, tomando $a_n = \frac{1}{n}$ é razoável dizermos, intuitivamente, que os números a_n se aproximam de 0 à medida que n aumenta, pois o resultado da divisão de 1 por n é cada vez menor à medida que n aumenta.

Dando um pouco mais de precisão ao raciocínio anterior: dizemos que L é um *limite* da sequência (a_n) se, ao estipularmos um “erro” através de um número real $\varepsilon > 0$, encontrarmos um índice n_0 de modo que todos os termos a_n da sequência (a_n) , que possuírem índice n maior que n_0 , sejam valores aproximados de L com erro inferior a ε . É claro que o índice n_0 deve depender de ε , sendo de se esperar que, para valores cada vez menores de ε , necessitaremos tomar n_0 cada vez maior.

Daí, temos a definição a seguir.

Definição 2.2.1. Dizemos que uma sequência (a_n) de números reais é **convergente**, ou que $L \in \mathbb{R}$ é **limite** de (a_n) , quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, existir um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$.

Escreve-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \quad \lim a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow L.$$

Por fim, uma sequência que não é convergente é dita **divergente**. Isto é, não existirá $L = \lim a_n$ se conseguirmos achar um número real $\varepsilon > 0$ tal que para todo n_0 exista $n > n_0$ com $|a_n - L| \geq \varepsilon$.

Com o objetivo de nos familiarizarmos com o conceito de limite de sequências, abordaremos a seguir alguns exemplos elementares de sequências convergentes e divergentes.

Exemplo 2.2.1. Sendo $a_n = \frac{1}{n}$, mostre que o limite de (a_n) é 0.

Demonstração: Podemos notar que, dado $\varepsilon > 0$,

$$|a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Assim, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$) tal que $|a_n - 0| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. E isto significa, pela Definição 2.2.1, que (a_n) converge para 0. ■

Exemplo 2.2.2. Mostre que a sequência

$$(a_n) = \left(\frac{n}{n+1} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right)$$

converge para 1.

Demonstração: Observemos que, dado qualquer $\varepsilon > 0$,

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Isto significa que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 (> \frac{1}{\varepsilon} - 1)$ tal que

$$\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon,$$

o que nos mostra que (a_n) converge para 1. ■

Exemplo 2.2.3. Se $a_n = (-1)^n$, mostre (a_n) é divergente.

Demonstração: Vamos supor que existe L tal que $L = \lim(-1)^n$, isto é, (a_n) é convergente. Assim, tomando $\varepsilon = 1$, existe n_0 natural tal que

$$\forall n > n_0 \Rightarrow |(-1)^n - L| < \varepsilon.$$

Se n for par, com $n > n_0$, então $|1 - L| < 1$, o que nos leva a $0 < L < 2$. Por outro lado, se n for ímpar, com $n > n_0$, então $|-1 - L| < 1$, o que nos leva a $-2 < L < 0$. Uma vez que L não pode satisfazer as duas desigualdades, a hipótese de que (a_n) é convergente nos leva a uma contradição. Portanto, (a_n) é divergente. ■

Exemplo 2.2.4. Mostre que $\lim a_n = 1$, onde $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

Demonstração: Uma vez que $|a_n - 1| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$|a_n - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Assim, tomando $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, para todo $n > n_0$ temos $|a_n - 1| < \varepsilon$. ■

Exemplo 2.2.5. Mostre que a sequência constante (a_n) , com $a_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ converge para c .

Demonstração: De fato, dado $\varepsilon > 0$, temos $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto (a_n) converge para c . ■

O importante exemplo a seguir foi abordado na demonstração da Proposição 1.4.2. Agora o trataremos utilizando, de fato, a definição de limites de sequência.

Exemplo 2.2.6. Se $a_n = q^n$, com $0 < |q| < 1$, mostre que $\lim a_n = 0$.

Demonstração: Perceba que $\frac{1}{|q|} > 1$. Daí, $\frac{1}{|q|} = 1 + \alpha$, com $\alpha > 0$. Logo, pelo *Binômio de Newton*, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|q|^n} &= (1 + \alpha)^n = \underbrace{(1 + \alpha) \dots (1 + \alpha)}_{n \text{ vezes}} \\ &= 1 + n\alpha + (\text{soma de parcelas positivas}) \\ &\geq 1 + n\alpha, \end{aligned}$$

o que é equivalente a $|q|^n \leq \frac{1}{1+n\alpha}$.

Assim, se quisermos $|a_n - 0| < \varepsilon$, basta impormos que $\frac{1}{1+n\alpha} < \varepsilon$ ou, equivalentemente, que $n > \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)$.

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 natural (com $n_0 > \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)$) tal que

$$\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - 0| = |q|^n < \varepsilon.$$

■

Observação: A desigualdade

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \text{ com } \alpha > -1,$$

é conhecida na literatura como *Desigualdade de Bernoulli*¹ e apresentaremos sua demonstração no Apêndice B.

Exemplo 2.2.7. Mostre que a sequência (a_n) , dada para $n \geq 1$ por $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, converge para 0.

Demonstração: Primeiro, notemos que:

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) \\ &= \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, obtemos $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ se, e somente se, $\frac{1}{n} < \varepsilon^2$, ou seja, $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Logo, tomando $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$, teremos $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Portanto, a sequência (a_n) converge para 0.

■

Podemos perceber que a definição de convergência de uma sequência não deixa claro se o limite de uma sequência convergente é único. Em princípio, poderia ocorrer de uma dada sequência convergir para mais de um limite. Porém, como mostra o próximo resultado, isto não ocorre. Além deste, veremos mais alguns resultados importantes sobre limites de sequências, com os quais poderemos analisar inteligentemente mais alguns exemplos à frente.

¹Jacques Bernoulli (1654-1705), matemático suíço que ajudou a desenvolver o cálculo infinitesimal.

De antemão, temos da *Desigualdade Triangular* (Ver Apêndice C) que, sendo a , b e c números reais, vale

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|.$$

Teorema 2.2.1. *Se a sequência (a_n) convergir, então seu limite é único.*

Demonstração: Suponhamos que existam L_1 e L_2 , com $L_1 \neq L_2$, tais que $L_1 = \lim a_n$ e $L_2 = \lim a_n$. Para isto, tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}|L_1 - L_2| > 0$. A Definição 2.2.1 nos garante que existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\forall n > n_1 \Rightarrow |a_n - L_1| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \forall n > n_2 \Rightarrow |a_n - L_2| < \varepsilon.$$

Daí, pela Desigualdade Triangular, obtemos

$$\forall n > \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow |L_1 - L_2| \leq |a_n - L_1| + |a_n - L_2| < 2\varepsilon = |L_1 - L_2|,$$

o que é um absurdo. Portanto, $L_1 = L_2$. ■

Teorema 2.2.2. *Se (a_n) é uma sequência com limite L , então toda subsequência de (a_n) converge para o limite L .*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim a_n = L$, existe n_0 natural de modo que $|a_n - L| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$.

Agora, seja $(a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_i}, \dots)$ uma subsequência de (a_n) . Como o conjunto de índices da subsequência é infinito, existe um índice $n_{i_0} > n_0$. Logo,

$$\forall n_i > n_{i_0} \Rightarrow n_i > n_0 \Rightarrow |a_{n_i} - L| < \varepsilon.$$

Portanto, $\lim a_{n_i} = L$. ■

Duas importantes observações a respeito dos Teoremas 2.2.1 e 2.2.2 devem ser feitas. A primeira é que, para mostrarmos que uma dada sequência (a_n) é divergente, basta que encontremos duas subsequências de (a_n) com limites distintos. A outra é que, para determinarmos o limite de uma sequência (a_n) que, de início, se sabe que converge, basta que determinemos o limite de alguma subsequência sua, onde este será o limite procurado. Mais à frente analisaremos alguns exemplos fazendo uso dessas observações.

A tarefa da última observação acima nem sempre é possível de ser efetuada. Quando não o for, precisaremos entender como é possível operar limites de sequências, problema que abordaremos na próxima seção. Porém, inicialmente, precisaremos de alguns resultados preliminares, os quais trataremos a seguir.

Teorema 2.2.3. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $L = \lim a_n$. Assim, tomando $\varepsilon = 1$, existe n_0 natural tal que

$$\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < 1 \Leftrightarrow a_n \in (L - 1, L + 1).$$

Agora, consideremos o conjunto finito $X = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, L - 1, L + 1\}$. Além disso, sejam r o menor e s o maior elemento de X . Deste modo, todos os termos da sequência (a_n) estarão contidos no intervalo $[r, s]$. Portanto, (a_n) é limitada. ■

É importante observarmos que a recíproca do Teorema acima não é verdadeira. De fato, considerando a sequência $(0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots)$, percebemos que a mesma é limitada, pois seu conjunto de termos é $\{0, 2\}$, porém não é convergente por possuir duas subsequências que convergem para limites distintos, a saber, $(0, 0, 0, \dots)$ e $(2, 2, 2, \dots)$. Além disso, o Teorema acima nos diz que se quisermos verificar se uma sequência é divergente, basta verificarmos que a mesma não é limitada.

O próximo resultado pode ser considerado como um “teste de convergência”, ou seja, ele nos permite concluir que uma sequência (a_n) é convergente, mesmo sem conhecermos, *a priori*, o seu limite.

Teorema 2.2.4. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Suponhamos que (a_n) é uma sequência monótona não-decrescente e limitada, isto é,

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots < K,$$

para algum $K > 0$ (os demais casos são análogos). Assim, K é uma cota superior do conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, o que nos diz que A admite supremo, digamos $L = \sup A$.

Agora, dado $\varepsilon > 0$, como $L - \varepsilon < L$, então o número $L - \varepsilon$ não é cota superior de A . Deste modo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < a_{n_0}$. Como a sequência é monótona não-decrescente,

então $n > n_0 \Rightarrow a_n \geq a_{n_0}$ e, portanto, $L - \varepsilon < a_n$. Além disso, como $L = \sup A$ então $a_n \leq L$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para todo $n > n_0$ temos

$$L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon,$$

o que significa que $L = \lim a_n$. ■

Observação: Podemos notar que se (a_n) fosse não-crescente, teríamos $\lim a_n = \inf A$.

Frisamos que, em alguns casos, não precisamos mostrar que uma dada sequência é convergente, mas somente garantir que ela possui uma subsequência convergente. Deste modo, apresentaremos a seguir um dos resultados mais importante sobre limites de sequências, conhecido na literatura como o **Teorema de Bolzano²-Weierstrass³**.

Teorema 2.2.5 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Seja (a_n) uma sequência limitada de números reais. Perceba que qualquer subsequência de (a_n) é limitada, já que (a_n) o é. Além disso, se mostrarmos que (a_n) possui uma subsequência monótona, podemos invocar o Teorema 2.2.4, mostrando assim que esta subsequência é convergente.

Para isso, consideremos o conjunto $A \subset \mathbb{N}$ dos índices n dado por:

$$A = \{n \in \mathbb{N}; \quad \forall p > n \Rightarrow a_n \geq a_p\}.$$

Temos dois casos a serem analisados:

- Se A é infinito, $A = \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots\}$, então podemos formar a subsequência (a_{n_i}) com $a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq a_{n_3} \geq \dots$

Logo, (a_{n_i}) é monótona não-crescente.

- Se A é finito, tomamos um $n_1 \in \mathbb{N}$ maior que todos elementos de A . Daí, a_{n_1} não está em A e, assim, existe $n_2 > n_1$ com $a_{n_2} > a_{n_1}$. Por sua vez, a_{n_2} não está em A , logo existe $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_3} > a_{n_2}$. Prosseguindo com este raciocínio, construiremos a subsequência crescente $a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3} < \dots$

²Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano, matemático da antiga Boémia (atual Republica Checa) do século XIX.

³Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, matemático alemão do século XIX.

Logo, em qualquer caso conseguiremos achar uma subsequência monótona limitada e, portanto, convergente. ■

A seguir, iremos estudar alguns exemplos de sequências de números reais, utilizando algumas das ideias e resultados obtidos até aqui.

Exemplo 2.2.8. *Estude a convergência da sequência $(1, 2, 3, \dots, n, \dots)$.*

Solução: Observemos que a sequência dada não é limitada. Portanto, pela observação feita em relação ao Teorema 2.2.3, concluímos que a sequência é divergente.

Exemplo 2.2.9. *Estude a convergência da sequência dada por (a^n) , com $a \in \mathbb{R}$.*

Solução: Quando $a = 0$ ou $a = 1$, a sequência é constante e, portanto, será convergente com limite 0 e 1, respectivamente. Se $a = -1$, a sequência é igual a $(-1, 1, -1, 1, \dots)$, logo é divergente por possuir duas subsequências convergentes com limites distintos.

Quando $a > 1$, multiplicando por a^n , obtemos $a^{n+1} > a^n$, assim a sequência é crescente. Além disso, sendo $\alpha > 0$, temos $a = 1 + \alpha$. Daí, pela Desigualdade de Bernoulli, temos $a^n \geq 1 + n\alpha$. Logo, dado $b \in \mathbb{R}$, sempre é possível tomarmos um $n (> \frac{b-1}{\alpha})$, tal que $a^n \geq 1 + n\alpha > b$. Logo, a sequência (a^n) é ilimitada superiormente e, portanto, divergente.

Quando $a < -1$ a sequência não é monótona pois seus termos são alternadamente positivos e negativos. Além disso, os termos de ordem par $a^{2n} = (a^2)^n$ formam uma subsequência monótona crescente e ilimitada superiormente, pois $a^2 > 1$. Também, os termos de ordem ímpar $a^{2n+1} = a(a^{2n})$ formam uma subsequência decrescente ilimitada inferiormente, pois $a < 0$ e (a^{2n}) é crescente e ilimitada superiormente. Portanto, a sequência (a^n) é divergente por ser ilimitada em qualquer caso.

Agora, se $-1 < a < 0$ ou $0 < a < 1$, o que equivale a dizer que $0 < |a| < 1$, já sabemos pelo Exemplo 2.2.6 que a sequência é convergente, com $\lim a^n = 0$.

Exemplo 2.2.10. *Sendo $c > 0$, mostre que a sequência $a_n = \sqrt[n]{c}$ possui limite igual a 1.*

Demonstração: Para o caso onde $c = 1$ não há o que mostrar, pois a sequência será igual a $(1, 1, 1, \dots)$ e convergirá para 1.

Agora, se $c > 1$ então $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > 1$, de sorte que, pelo Teorema 2.2.4, (a_n) é convergente. Desde que $c > 1$, temos $c^{1/n} > 1$, e daí $c^{1/n} = 1 + \alpha$, com $\alpha > 0$. Segue da

Desigualdade de Bernoulli que

$$c = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \Rightarrow \alpha \leq \frac{c-1}{n}.$$

Assim, temos que

$$|c^{1/n} - 1| = \alpha \leq \frac{c-1}{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, se quisermos $|c^{1/n} - 1| < \varepsilon$ basta impormos $\frac{c-1}{n} < \varepsilon$, o que equivale a $n > \frac{c-1}{\varepsilon}$.

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 (> \frac{c-1}{\varepsilon})$ tal que, para todo $n > n_0$, vale $|c^{1/n} - 1| < \varepsilon$, isto é, $\lim c^{1/n} = 1$ para $c > 1$.

Para o caso $0 < c < 1$, temos $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < 1$, de sorte que, pelo Teorema 2.2.4, (a_n) é convergente. Desde que $0 < c < 1$, temos $c^{1/n} = \frac{1}{1+\beta}$, com $\beta > 0$. Daí, pela desigualdade de Bernoulli, obtemos

$$c = \frac{1}{(1+\beta)^n} \leq \frac{1}{1+n\beta} < \frac{1}{n\beta},$$

de onde segue que $0 < \beta < \frac{1}{nc}$. Portanto, temos

$$0 < 1 - c^{1/n} = \frac{\beta}{1+\beta} < \beta < \frac{1}{nc},$$

e assim

$$|c^{1/n} - 1| < \frac{1}{nc}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, se quisermos $|c^{1/n} - 1| < \varepsilon$ basta impormos $\frac{1}{nc} < \varepsilon$, o que equivale a $n > \frac{1}{n\varepsilon}$.

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 (> \frac{1}{n\varepsilon})$ tal que, para todo $n > n_0$, vale $|c^{1/n} - 1| < \varepsilon$, isto é, $\lim c^{1/n} = 1$ para $0 < c < 1$. ■

Exemplo 2.2.11. Mostre que a sequência dada por $a_n = \sqrt[n]{n}$ possui limite igual a 1.

Demonstração: Primeiro, notemos que $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5}$. Assim, vamos verificar se a sequência é monótona a partir do seu terceiro termo. Para isto, observemos que $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$ é verdade se, e somente se, $n^{n+1} > (n+1)^n$ o que é verdade se, e somente se, $n > (1 + \frac{1}{n})^n$. Assim, basta mostrarmos que a última desigualdade obtida é verdadeira. De fato, observemos que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n}$$

e

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} < \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \end{aligned}$$

Assim, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, para todo $n \geq 3$, e, portanto, a sequência é monótona decrescente a partir do sei terceiro termo. Além disso, como trata-se de uma sequência de números positivos, temos que $(\sqrt[n]{n})$ é limitada. Logo, pelo Teorema 2.2.4, a sequência é convergente.

Mais tarde (Exemplo 2.3.2) mostraremos que $\lim a_n = 1$.

2.3 Propriedades Aritméticas dos Limites

Nessa seção estudaremos o comportamento dos limites de sequências de números reais referentes às operações (soma, multiplicação, divisão, etc.) e às desigualdades.

Teorema 2.3.1. *Se $\lim a_n = 0$ e (b_n) é uma sequência limitada, então $\lim a_n \cdot b_n = 0$ (mesmo que não exista $\lim b_n$).*

Demonstração: Sendo (b_n) limitada, existe $M > 0$ tal que $|b_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\lim a_n = 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Assim,

$$\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n \cdot b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon, \text{ ou seja, } \lim a_n \cdot b_n = 0. \quad \blacksquare$$

Um exemplo importante e conhecido na literatura é o enunciado a seguir.

Exemplo 2.3.1. *Se $x \in \mathbb{R}$, mostre que $\lim \frac{\text{sen}(nx)}{n} = 0$.*

Demonstração: De fato, como a sequência $\text{sen}(nx)$ é limitada, pois $|\text{sen}(nx)| \leq 1$, e $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, pelo Teorema 2.3.1, temos $\lim \frac{\text{sen}(nx)}{n} = \lim [\text{sen}(nx) \cdot \frac{1}{n}] = 0$. \blacksquare

Teorema 2.3.2. *Sejam (a_n) e (b_n) seqüências convergentes de números reais, tais que $\lim a_n = x$ e $\lim b_n = y$, e k um número real qualquer. Então:*

$$(a) \lim(k \cdot a_n) = k \cdot x;$$

$$(b) \lim(a_n \pm b_n) = x \pm y \text{ e } \lim(a_n \cdot b_n) = x \cdot y;$$

$$(c) \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{x}{y} \text{ se } y \neq 0.$$

Demonstração:

(a) Se $k = 0$, é imediato que $\lim k \cdot a_n = 0 = k \cdot x$. Assim, suponhamos que $k \neq 0$, e seja dado $\varepsilon > 0$. Deste modo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - x| < \frac{\varepsilon}{|k|}$. Daí,

$$n > n_0 \Rightarrow |ka_n - kx| = |k||a_n - x| < |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon,$$

o que nos mostra que $\lim(k \cdot a_n) = k \cdot x$.

(b) Vamos mostrar que $\lim(a_n + b_n) = x + y$ (provar que $\lim(a_n - b_n) = x - y$ é análogo).

Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad n > n_2 \Rightarrow |b_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto, tomando $n > \max\{n_1, n_2\}$, temos

$$|(a_n + b_n) - (x + y)| \leq |a_n - x| + |b_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que nos mostra que $\lim(a_n + b_n) = x + y$.

Para a segunda parte, primeiro notemos que

$$\begin{aligned} |a_n b_n - xy| &= |(a_n b_n - a_n y) + (a_n y - xy)| \\ &\leq |a_n(b_n - y)| + |y(a_n - x)| \\ &= |a_n||b_n - y| + |y||a_n - x|. \end{aligned}$$

Ora, sendo (a_n) convergente, pelo Teorema 2.2.3, (a_n) é limitada. Assim, existe $K > 0$ tal que $|a_n| < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, tomando $M = \max\{K, |y|\}$, temos que

$$|a_n b_n - xy| \leq M|b_n - y| + M|a_n - x|. \tag{2.1}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, das convergências de (a_n) e (b_n) , existem naturais n_1 e n_2 tais que para todo $n > n_1$ tem-se $|a_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$ e para todo $n > n_2$ tem-se $|b_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Portanto, para todo $n > \max\{n_1, n_2\}$ temos, de (2.1), que

$$\begin{aligned} |a_n b_n - xy| &\leq M|b_n - y| + M|a_n - x| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que nos mostra que $\lim(a_n b_n) = xy$.

(c) Primeiro, observemos que como $\lim b_n y = y^2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tem-se que $b_n y > \frac{y^2}{2}$. (Para isto, basta tomar $\varepsilon = \frac{y^2}{2}$ e achar o n_0 correspondente.) Assim, para todo $n > n_0$, $\frac{1}{b_n y}$ é um número (positivo) inferior a $\frac{2}{y^2}$. Logo, a sequência $\left(\frac{1}{b_n y}\right)$ é limitada.

Por outro lado, temos que

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{x}{y} = \frac{y a_n - x b_n}{b_n y} = (y a_n - x b_n) \cdot \frac{1}{b_n y}.$$

Como $\lim(y a_n - x b_n) = xy - xy = 0$, pelo Teorema 2.3.1, obtemos

$$\lim \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{x}{y} \right) = 0 \Rightarrow \lim \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{x}{y}.$$

■

Observação: No item (c), para formar a sequência $\frac{a_n}{b_n}$, limitamo-nos aos índices n suficientemente grandes de modo que $b_n \neq 0$. Isto é possível devido ao fato de $y \neq 0$, pois como $\lim b_n = b$, então, salvo um número finito de índices n , tem-se $b_n \neq 0$. Com efeito, sendo $y \neq 0$, podemos tomar um intervalo $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ de centro y , tal que $0 \notin (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$. (Basta tomarmos $\varepsilon = |y|$). Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0 \Rightarrow b_n \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$, isto é, $n > n_0 \Rightarrow b_n \neq 0$.

Ainda em relação ao Teorema anterior, podemos observar que resultados análogos aos itens (a) e (b) ainda valem para três ou mais sequências. Por exemplo, se $a_n \rightarrow x$, $b_n \rightarrow y$ e $c_n \rightarrow z$ então $(a_n + b_n + c_n) \rightarrow (x + y + z)$ e $a_n \cdot b_n \cdot c_n \rightarrow x \cdot y \cdot z$.

Exemplo 2.3.2. *Continuação do Exemplo 2.2.11.*

Demonstração: Agora mostraremos que $1 = \lim n^{1/n}$. Para isto, tomemos a sequência $b_n = \sqrt[n]{n} - 1$, com $n \geq 2$, e mostremos que $\lim b_n = 0$. Temos que

$$n = (1 + b_n)^n = 1 + \binom{n}{1} b_n + \binom{n}{2} b_n^2 + \dots > \frac{n(n-1)}{2} \cdot b_n^2,$$

de onde obtemos

$$0 < b_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Assim, se quisermos $|b_n| < \varepsilon$ basta impormos $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$, ou equivalentemente, $n > \frac{\varepsilon^2+2}{\varepsilon^2}$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \left(> \frac{\varepsilon^2+2}{\varepsilon^2} \right)$ tal que, para todo $n > n_0$ vale $|b_n| < \varepsilon$, isto é, $\lim b_n = 0$.

Portanto, como $b_n \rightarrow 0$ então $a_n = b_n + 1 \rightarrow 1$. ■

Teorema 2.3.3 (Permanência do Sinal). *Se $\lim a_n = L > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a_n > 0$.*

Demonstração: Seja $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$. Então, $(L - \varepsilon, L + \varepsilon) = \left(\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}\right)$. Deste modo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0 \Rightarrow a_n \in \left(\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}\right)$, ou seja, $a_n > \frac{L}{2}$. Portanto, para $n > n_0$ se tem $a_n > 0$. ■

Observação: De maneira análoga, podemos mostrar que se $\lim a_n = M < 0$ então, a partir de uma certa ordem, todos os termos a_n são negativos.

Corolário 2.3.1. *Sejam (a_n) e (b_n) sequências convergentes. Se $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim a_n \leq \lim b_n$.*

Demonstração: Com efeito, supondo por contradição que temos $\lim a_n > \lim b_n$, então teremos $0 < \lim a_n - \lim b_n = \lim(a_n - b_n)$ e, portanto, para todo n suficientemente grande, teremos $a_n - b_n > 0 \Rightarrow a_n \geq b_n$, o que é um absurdo. ■

Corolário 2.3.2. *Seja (a_n) convergente. Se $a_n \geq x$ para todo n , então $\lim a_n \geq x$.*

Demonstração: Com efeito, seja $L = \lim a_n$ e suponhamos por contradição que temos $L < x$. Assim, tomemos $\varepsilon = x - L > 0$ e, do fato de $a_n \rightarrow L$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Em particular, para $n > n_0$, temos $a_n < L + \varepsilon = L + (x - L) = x$, o que é um absurdo. ■

Teorema 2.3.4 (Teorema do Confronto). *Sejam $a_n \leq t_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim a_n = \lim b_n = L$, então $\lim t_n = L$.*

Demonstração: Das convergências de (a_n) e (b_n) , dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existem naturais n_1 e n_2 tais que $n > n_1 \Rightarrow a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ e $n > n_2 \Rightarrow b_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Agora, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que $L - \varepsilon < a_n \leq t_n \leq b_n < L + \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Portanto $\lim t_n = L$. ■

Exemplo 2.3.3. Mostre que a sequência $a_n = \frac{\cos n}{n}$ converge para 0.

Demonstração: Notemos que $-1 \leq \cos n \leq 1$, e daí $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Logo, do Teorema do Confronto, obtemos

$$\lim -\frac{1}{n} \leq \lim \frac{\cos n}{n} \leq \lim \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \leq \lim \frac{\cos n}{n} \leq 0 \Rightarrow \lim \frac{\cos n}{n} = 0.$$

Exemplo 2.3.4. Mostre que $\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0$.

Demonstração: Podemos perceber que

$$0 \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{(n+1) \text{ vezes}} = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Portanto, do Teorema do Confronto, obtemos que

$$\begin{aligned} 0 = \lim 0 &\leq \lim \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \leq \lim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 0 \\ &\Rightarrow \lim \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} = 0. \end{aligned}$$

Observação: Vale observar que no exemplo acima não podemos aplicar a propriedade de soma de limites, isto é, limite da soma é a soma dos limites, pois o número de parcelas aumenta quando n aumenta.

Exemplo 2.3.5. Mostre que $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

Demonstração: Primeiro, observemos que

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n^n} \leq \frac{\overbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n \cdot n \cdot n}^{(n-1) \text{ vezes}}}{n^n} = \frac{n^{n-1}}{n} = \frac{1}{n}.$$

Portanto, do Teorema do Confronto, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} &\Rightarrow 0 = \lim 0 \leq \lim \frac{n!}{n^n} \leq \lim \frac{1}{n} = 0 \\ &\Rightarrow \lim \frac{n!}{n^n} = 0. \end{aligned}$$

■

Concluiremos esta seção mostrando duas sequências que convergem para um dos números “transcendentais⁴” mais importantes da Matemática, a saber o conhecido *Número de Euler*⁵ (e), ficando sua relevância atrás apenas do número π . Este interessante exemplo utiliza algumas das ideias sobre as propriedades aritméticas de limites de sequências de números reais estudadas aqui.

Exemplo 2.3.6. Sendo $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ e $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\lim a_n = \lim b_n = e$.

Demonstração: Primeiro, observemos que a sequência (a_n) é claramente crescente e, além disso, é limitada, pois

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Também, podemos perceber que

$$\begin{aligned} b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

⁴Um número **transcendental** é um número real ou complexo que não é raiz de nenhuma equação polinomial de coeficientes inteiros. Um número real ou complexo é assim transcendental somente se ele não for algébrico. Esses números são irracionais.

⁵Leonhard Paul Euler (1707-1783), matemático e físico suíço de língua alemã que fez importantes descobertas em várias áreas da matemática como o cálculo e a teoria dos grafos, além de ser reconhecido por seus trabalhos na mecânica, dinâmica de fluidos, óptica, astronomia e teoria da música.

para todo n . E dessa última igualdade, temos que $b_n < a_n$, de onde segue que $\lim b_n \leq \lim a_n$.

Por outro lado, fixando arbitrariamente $p \in \mathbb{N}$, para todo $n > p$ temos

$$\begin{aligned} b_n \geq 1 + 1 &+ \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{p!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ (e mantendo p fixo) na desigualdade acima, o segundo membro tende para o limite a_p . Assim, o Corolário 2.3.1 nos dá $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq a_p$ para todo p . Novamente a mesma proposição nos permite concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \lim_{p \rightarrow \infty} a_p$. Portanto, obtemos então

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right).$$

■

2.4 Sequências de Cauchy

O conceito de sequência convergente possui um forte apelo geométrico, qual seja, a ideia de que os termos de uma determinada sequência convergente se aproximam mais e mais de um certo número real, à medida que seus índices aumentam. Mas, além disso, é razoável se esperar que, se os termos de uma dada sequência ficarem cada vez mais próximos uns dos outros, a sequência deva convergir.

A observação acima se faz importante, pois muitas sequências convergentes não são monótonas. Deste modo, o critério de convergência que o Teorema 2.2.4 nos deu não é o mais geral possível. Assim, veremos a seguir o critério de *Cauchy*⁶, que nos dará uma condição, não somente suficiente mas também necessária, para a convergência de uma sequência de números reais.

Definição 2.4.1. *Uma sequência (a_n) de números reais é dita uma **sequência de Cauchy** se, dado arbitrariamente um número real $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

⁶Augustin-Louis Cauchy, matemático e físico-matemático francês do século XVIII.

O resultado fundamental acerca de seqüências de Cauchy é o conteúdo do seguinte resultado.

Teorema 2.4.1. *Uma seqüência (a_n) de números reais é convergente se, e somente se, for de Cauchy.*

Demonstração: Consideremos que a seqüência (a_n) seja convergente, com limite L . Deste modo, dado $\varepsilon > 0$, a definição de convergência nos garante a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto, dados $m, n > n_0$, temos

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - L| + |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

e assim (a_n) é de Cauchy.

Reciprocamente, seja (a_n) uma seqüência de Cauchy. Assim, tomando $\varepsilon = 1$, pela Definição 2.4.1, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < 1$. Em particular, para todo $n > n_0$ se tem $|a_n - a_{n_0+1}| < 1$, e a seqüência tem todos os seus termos contidos em

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\} \cup (a_{n_0+1} - 1, a_{n_0+1} + 1),$$

de sorte que (a_n) é limitada. Portanto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass a seqüência (a_n) possui uma subsequência convergente, digamos $a_{n_k} \rightarrow L$. Vamos mostrar que, em verdade, $a_n \rightarrow L$.

Ora, sendo (a_{n_k}) convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_k > n_1 \Rightarrow |a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, como a seqüência é de Cauchy, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_2 \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, sendo $M = \max\{n_1, n_2\}$ e fixando $n_k > M$, temos

$$n > M \Rightarrow |a_n - L| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, $a_n \rightarrow L$. ■

A seguir, veremos alguns exemplos de aplicação do critério de convergência de Cauchy.

Exemplo 2.4.1. Mostre que a sequência $a_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy.

Demonstração: De fato, dado um número real $\varepsilon > 0$ arbitrário, é sempre possível acharmos um natural N tal que $N > \frac{2}{\varepsilon}$. Assim, para todo $m, n > N$ temos que $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ e similarmemente $\frac{1}{m} < \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto, para todo $m, n > N$ temos

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, concluímos que a sequência (a_n) é de Cauchy. ■

Exemplo 2.4.2. Seja (a_n) uma sequência de números reais tal que

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n},$$

para todo natural n . Mostre que (a_n) é de Cauchy.

Demonstração: De fato, podemos perceber da Desigualdade Triangular que

$$\begin{aligned} |a_{n+k} - a_n| &= |(a_{n+k} - a_{n+k-1}) + (a_{n+k-1} - a_{n+k-2}) + \dots + (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n)| \\ &\leq |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + |a_{n+k-1} - a_{n+k-2}| + \dots + |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+k-1}} + \frac{1}{2^{n+k-2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-2}} + \dots + \frac{1}{2} + 1}_{\text{PG de razão } 1/2} \right) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^k \right) \\ &< \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Portanto, se $m > n$, podemos fazer $m = n + p$ e daí

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ora, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, sempre é possível tomarmos um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon$. Logo, se $m, n > n_0$ (com $m > n$ sem perda de generalidade) temos que

$$|a_m - a_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon.$$

Portanto, a sequência (a_n) é de Cauchy. ■

Exemplo 2.4.3. *Mostre que a sequência (a_n) dada por*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, é divergente.

Demonstração: Para isto, basta mostrarmos que a sequência (a_n) não é de Cauchy. Ora, observemos que para $m > n$ temos

$$\begin{aligned} a_m - a_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Assim, como cada um dos $m - n$ termos acima são maiores que $\frac{1}{m}$, então $a_m - a_n > \frac{m-n}{m} = 1 - \frac{n}{m}$. Em particular, tomando $m = 2n$, temos que $a_{2n} - a_n > \frac{1}{2}$.

Logo, dado $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$ (por exemplo), segue que não existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > n_0$ temos $|a_m - a_n| < \varepsilon = \frac{1}{3}$. De fato, pois para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ se tomarmos $n > n_0$, para $m = 2n > n_0$ temos

$$|a_m - a_n| = |a_{2n} - a_n| > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \varepsilon,$$

e assim, a sequência (a_n) não é de Cauchy e, portanto, não é convergente. ■

Exemplo 2.4.4. *Seja (a_n) uma sequência de números reais tal que*

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq c \cdot |a_{n+1} - a_n|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $0 < c < 1$ é um real fixo. Mostre que tal sequência é convergente.

Demonstração: Primeiro, notemos que $|a_3 - a_2| \leq c|a_2 - a_1|$, $|a_4 - a_3| \leq c^2|a_2 - a_1|$, e, em geral, $|a_{n+1} - a_n| \leq c^{n-1}|a_2 - a_1|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sejam, agora, n e p naturais arbitrários. Temos que

$$\begin{aligned}
 |a_{n+p} - a_n| &= |a_{n+p} - a_{n+p-1} + \dots + a_{n+1} - a_n| \\
 &\leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \\
 &\leq (c^{n+p-2} + c^{n+p-3} + \dots + c^{n-1}) |a_2 - a_1| \\
 &= c^{n-1} \cdot (c^{p-1} + c^{p-2} + \dots + c + 1) |a_2 - a_1| \\
 &= c^{n-1} \cdot \frac{1 - c^p}{1 - c} |a_2 - a_1| \\
 &\leq \frac{c^{n-1}}{1 - c} \cdot |a_2 - a_1|.
 \end{aligned}$$

Assim, como $0 < c < 1$, então $\frac{c^{n-1}}{1-c} \cdot |a_2 - a_1| \rightarrow 0$. Daí, segue que para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tem-se que $\frac{c^{n-1}}{1-c} \cdot |a_2 - a_1| < \varepsilon$.

Logo, para $m, n > n_0$ temos que $|a_m - a_n| < \varepsilon$. (Pois podemos sempre supor $m \geq n$ e escrever $m = n + p$.) Portanto, (a_n) é de Cauchy, logo convergente. ■

Exemplo 2.4.5. *Mostre que a sequência*

$$(a_n) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

é de Cauchy.

Demonstração: Como já sabemos, (a_n) é crescente. Assim, sendo $m > n$ temos que $|a_m - a_n| = a_m - a_n$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
 |a_m - a_n| &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{m!} \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{(n+1)!}{m!} \right] \\
 &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left[\underbrace{1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}}_{\text{PG de razão } 1/(n+2)} \right] \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{n+2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{(n+2)^{m-n-1}} \right) \right] \\
 &< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{2(n+1)}{n+1} = \frac{2}{(n+1)!}.
 \end{aligned}$$

Assim, para $n \rightarrow \infty$ temos que $\frac{2}{(n+1)!} \rightarrow 0$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 natural tal que, para $n > n_0$, temos $\frac{2}{(n+1)!} < \varepsilon$.

Logo, para $m, n > n_0$ temos que $|a_m - a_n| < \frac{2}{(n+1)!} < \varepsilon$ e, portanto, (a_n) é de Cauchy. ■

O leitor atento pode perceber que poderíamos ter solucionado o Exemplo anterior utilizando o Exemplo 2.3.6, onde mostramos que

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \rightarrow e,$$

e como esta sequência de números reais é convergente, então a mesma é de Cauchy. Porém, o nosso interesse de solucionar o Exemplo anterior da maneira proposta se justificará no próximo capítulo, como o leitor poderá perceber.

2.5 Problemas de Embasamento e Aprofundamento

Nesta seção apresentaremos uma coleção de problemas, trabalhados em diversos níveis de dificuldade, que poderão proporcionar ao leitor um melhor embasamento e aprofundamento referente aos resultados tratados. Estes são retirados de provas de olímpicas, referências bibliográficas, etc., e alguns podem ser encontrados em [2], [3], [4], [13], [29], [21] e [22].

Problema 1. Considere uma sequência (a_n) definida por $a_1 = 0$, $|a_2| = |a_1 + 1|$, \dots , $|a_n| = |a_{n-1} + 1|$. Mostre que

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}.$$

Demonstração: Elevando ao quadrado as igualdades, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^2 = 0 \\ a_2^2 = (a_1 + 1)^2 \\ \vdots \\ a_n^2 = (a_{n-1} + 1)^2 \\ a_{n+1}^2 = (a_n + 1)^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 = 0 \\ a_2^2 = a_1^2 + 2a_1 + 1 \\ \vdots \\ a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} + 1 \\ a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n + 1 \end{array} \right. .$$

Somando as equações e efetuando os cancelamentos, obtemos

$$a_{n+1}^2 = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + n \geq 0 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq -\frac{1}{2}.$$

■

Problema 2. Seja $a \geq 0$, $b \geq 0$. Prove que $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

Demonstração: Sendo $c = \max\{a, b\}$, temos que $a \leq c$ e $b \leq c$, e assim $a^n + b^n \leq 2c^n$. Por outro lado, note que $c^n \leq a^n + b^n$, pois $c = a$ ou $c = b$. Portanto, temos que

$$c^n \leq a^n + b^n \leq 2c^n \Rightarrow c \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq c\sqrt[n]{2}.$$

Logo, fazendo $n \rightarrow \infty$ e usando o Teorema do Confronto, além de perceber que pelo Exemplo 2.2.10 obtemos $\lim \sqrt[n]{2} = 1$, concluímos que

$$\lim c \leq \lim \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \lim (c\sqrt[n]{2}) \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = c = \max\{a, b\}.$$

■

Problema 3. Considere duas sequências (a_n) e (b_n) de números reais. Mostre que estas sequências convergem para o mesmo limite t se, e somente se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [t_n a_n + (1 - t_n) b_n] = t$$

para qualquer sequência (t_n) no intervalo $[0, 1]$.

Demonstração: Inicialmente, suponhamos que as sequências (a_n) e (b_n) convergem para t , isto é,

$$\lim |a_n - t| = 0 \quad \text{e} \quad \lim |b_n - t| = 0.$$

Assim, pela Desigualdade Triangular, temos que

$$|t_n a_n + (1 - t_n) b_n - t| = |t_n(a_n - b_n) + b_n - t| \leq t_n |a_n - b_n| + |b_n - t|,$$

e como $t_n < 1 \forall n \in \mathbb{N}$ e $|a_n - b_n| \leq |a_n - t| + |b_n - t|$, obtemos que

$$0 \leq |t_n a_n + (1 - t_n) b_n - t| \leq |a_n - t| + 2|b_n - t|. \quad (2.2)$$

Passando o limite na desigualdade acima obtemos, pelo Teorema do Confronto, que

$$\lim |t_n a_n + (1 - t_n) b_n - t| = 0 \Leftrightarrow \lim |t_n a_n + (1 - t_n) b_n| = t.$$

Reciprocamente, podemos escolher adequadamente sequências (t_n) no intervalo $[0, 1]$. Para a sequência constante $t_n = 1$ a hipótese nos garante que $\lim a_n = t$, e para a sequência constante $t_n = 0$ que $\lim b_n = t$.

■

Problema 4. *Sejam (a_n) e (b_n) seqüências limitadas tais que $a_n + b_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam também as seqüências (z_n) e (t_n) com o mesmo limite a . Prove que*

$$\lim (a_n z_n + b_n t_n) = a.$$

Demonstração: Podemos perceber que

$$\begin{aligned} a_n z_n + b_n t_n &= a_n z_n + b_n z_n - b_n z_n + b_n t_n \\ &= z_n \underbrace{(a_n + b_n)}_{=1} + b_n (t_n - z_n) \\ &= z_n + b_n (t_n - z_n). \end{aligned}$$

Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim (a_n z_n + b_n t_n) &= \lim [z_n + b_n (t_n - z_n)] \\ &= a + \lim b_n (a - a) \\ &= a. \end{aligned}$$

■

Problema 5. *Mostre que, dados $k \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, com $|a| > 1$, temos $\frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Inicialmente, podemos notar que

$$\sqrt[n]{\frac{n^k}{|a|^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{|a|} \rightarrow \frac{1}{|a|} < 1$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Assim, fixado um real α de modo que $\frac{1}{|a|} < \alpha < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tem-se

$$\sqrt[n]{\frac{n^k}{|a|^n}} < \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{n^k}{|a|^n} < \alpha^n.$$

Mas, como $\alpha^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, então

$$\frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

■

Problema 6. *Seja (a_n) uma sequência não-crescente de números reais positivos que converge para 0. Prove que a soma $S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ é convergente.*

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots \pm a_n, \quad n \geq 1.$$

Devemos mostrar que a sequência (S_n) é convergente. Para isso, basta verificarmos se a sequência (S_n) é Cauchy. De fato, como (a_n) é não-crescente, isto é, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0$, esta condição nos garante facilmente que

$$S_1 \geq S_3 \geq S_5 \geq \dots \geq S_6 \geq S_4 \geq S_2. \quad (2.3)$$

Em contrapartida, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$|S_{2m-1} - S_{2m}| = a_{2m} \rightarrow 0,$$

o que garante, em conjunção com (2.3), que a sequência (S_n) é de Cauchy. Portanto, a sequência (S_n) é convergente

■

Problema 7. *Sejam $k > 1$ um inteiro fixado e t_0, t_1, \dots, t_k reais também fixados, tais que $t_0 + t_1 + \dots + t_k = 0$. Prove que a sequência (a_n) converge para 0, onde*

$$a_n = t_0\sqrt{n} + t_1\sqrt{n+1} + \dots + t_k\sqrt{n+k}.$$

Demonstração: Podemos notar que $t_k = -t_0 - t_1 - \dots - t_{k-1}$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} a_n &= t_0\sqrt{n} + t_1\sqrt{n+1} + \dots + (-t_0 - t_1 - \dots - t_{k-1})\sqrt{n+k} \\ &= t_0(\sqrt{n} - \sqrt{n+k}) + t_1(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+k}) + \dots \\ &\quad + t_{k-1}(\sqrt{n+k-1} - \sqrt{n+k}) \\ &= -\frac{t_0}{\sqrt{n} + \sqrt{n+k}} - \frac{t_1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+k}} - \dots - \frac{t_{k-1}}{\sqrt{n+k-1} + \sqrt{n+k}}. \end{aligned}$$

Logo, fazendo $n \rightarrow \infty$, cada parcela acima converge para 0, e portanto $a_n \rightarrow 0$.

■

Problema 8. Dado $a > 0$, defina indutivamente a sequência (x_n) tal que $x_1 = \sqrt{a}$ e $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. Prove que (x_n) é convergente e calcule seu limite

$$L = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}$$

Demonstração: Provaremos isto por indução em n que (x_n) é monótona limitada. Mais especificamente, mostraremos que $0 \leq x_n < x_{n+1} \leq L$. De antemão, podemos perceber que

$$L = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} \Rightarrow L = \sqrt{a + L}. \quad (2.4)$$

Temos, para $n = 1$, que a afirmação é verdadeira, pois $0 \leq x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a + \sqrt{a}} \leq L$. Supondo por hipótese de indução que $0 \leq x_n < x_{n+1} \leq L$ para um certo n natural, temos

$$\begin{aligned} 0 \leq x_n < x_{n+1} \leq L &\Rightarrow a \leq a + x_n < a + x_{n+1} \leq a + L \\ &\Rightarrow 0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + x_{n+1}} \leq \sqrt{a + L} \stackrel{(2.4)}{=} L \\ &\Rightarrow 0 \leq x_{n+1} < x_{n+2} \leq L. \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da Indução, a afirmação é verdadeira para todo natural n . Portanto a sequência (x_n) é monótona limitada, logo é convergente. Para calcularmos o seu limite, basta fazer $n \rightarrow \infty$ em $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$. Assim, o limite de (x_n) é a raiz positiva da equação $x^2 - x - a = 0$, e como L a satisfaz em (2.4), vemos $L = \lim x_n$, onde

$$L = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

■

Problema 9. Prove que a sequência

$$a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n}}}}, \quad n \geq 1,$$

é convergente.

Demonstração: Claramente a sequência é crescente, e deste modo só precisamos mostrar que a mesma é limitada para mostrarmos que ela é convergente. De fato, pondo o fator $\sqrt{2}$ em evidência em a_n , obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{4} + \sqrt{\frac{3}{16} + \dots + \sqrt{\frac{n}{2^{2^{n-1}}}}}}} \\ &< \sqrt{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}}. \end{aligned}$$

Agora, seja $b_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}}$, onde temos n radicais. Assim, temos que $b_{n+1} = \sqrt{1 + b_n}$. Deste modo, podemos observar que a sequência (b_n) é a mesma sequência abordada no problema anterior fazendo $a = 1$, de modo que obtemos (b_n) é convergente. Portanto, (a_n) é convergente. ■

Problema 10. Prove que

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Demonstração: Analisando o lado direito da igualdade, vemos que a sequência de frações satisfaz a recorrência $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$. Esta identidade satisfaz as seguintes condições:

(i) Para todo n , é válido que $a_n \geq 1$.

De fato, por indução, o resultado é verdadeiro para $n = 1$, e supondo verdadeiro para um certo n então vale para $n + 1$, pois $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

(ii) Para todo n , é válido que $\frac{1}{|a_{n+1}a_n|} \leq \frac{1}{2}$.

De fato, pois $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$, e portanto $a_{n+1}a_n = a_n + 1 \geq 2$, isto é, $\frac{1}{a_{n+1}a_n} \leq \frac{1}{2}$.

Agora, observemos que

$$\begin{aligned} |a_{n+2} - a_{n+1}| &= \left| \left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \right| = \left| \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right| \\ &= \left| \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}a_n} \right| \\ &\stackrel{(ii)}{\leq} \frac{1}{2} |a_{n+1} - a_n| \end{aligned}$$

Portanto, de $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|$ e do Exemplo 2.4.4, segue que a sequência (a_n) é convergente. Assim, sendo $L = \lim a_n$ e fazendo $n \rightarrow \infty$ em $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$, obtemos $L = 1 + \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 - L - 1 = 0$, cujas raízes são $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, e como trata-se de uma sequência de termos positivos, ficamos com a raiz positiva. Portanto $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. ■

Problema 11. *Sejam $0 < a < b$ números reais. Defina as seqüências (a_n) e (b_n) pondo $a_0 = a, b_0 = b$ e*

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \geq 0.$$

Prove que as duas seqüências são convergentes e possuem o mesmo limite.

Demonstração: Pela Desigualdade das Médias ($MA \geq MG$), temos que

$$\sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} \Rightarrow a_{n+1} \leq b_{n+1}, \forall n \geq 1.$$

Daí, temos que

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n = \sqrt{a_n} \left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n} \right) > 0,$$

e assim a seqüência (a_n) é crescente. Similarmente, temos que

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} < 0,$$

e assim a seqüência (b_n) é decrescente. Além disso, para todo n , temos que

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \stackrel{MA \geq MG}{<} b_n < \dots < b_2 < b_1 < b_0,$$

o que mostra que ambas as seqüências são limitadas. Logo, as seqüências são convergentes.

Fazendo $x = \lim a_n$ e $y = \lim b_n$, e fazendo $n \rightarrow \infty$ relação que define a seqüência (a_n) (ou na relação que define (b_n)), obtemos $a = \sqrt{ab}$, de onde segue que $a = b$.

■

Problema 12. (Vietnã) *Defina a seqüência x_1, x_2, x_3, \dots por $x_1 = a \geq 1$ e*

$$x_{n+1} = 1 + \ln \left(\frac{x_n(x_n^2 + 3)}{3x_n^2 + 1} \right).$$

Mostre que a seqüência converge e encontre o seu limite.

Demonstração: Podemos perceber que de $x \geq 1$ temos

$$(x-1)^3 \Rightarrow x^3 + 3x \geq 3x^2 + 1 \Rightarrow \frac{x(x+3)}{3x^2+1} \geq 1,$$

o que implica em

$$\ln \left(\frac{x(x^2+3)}{3x^2+1} \right) \geq \ln 1 = 0 \Rightarrow 1 + \ln \left(\frac{x(x^2+3)}{3x^2+1} \right) \geq 1,$$

e assim, indutivamente, cada termo da sequência é no mínimo 1. Também temos que

$$1 \leq x^2 \Rightarrow 2 \leq 2x^2 \Rightarrow x^2 + 3 \leq 3x^2 + 1 \Rightarrow \frac{x(x^2 + 3)}{3x^2 + 1} \leq x,$$

o que implica em

$$1 + \ln \left(\frac{x(x^2 + 3)}{3x^2 + 1} \right) \leq 1 + \ln x \leq x.$$

Logo, a sequência é monótona não-crescente, e como esta é limitada inferiormente, ela é convergente. O limite x deve satisfazer

$$x = 1 + \ln \left(\frac{x(x^2 + 3)}{3x^2 + 1} \right),$$

e, portanto, a segunda desigualdade acima torna-se igualdade, o que nos leva a $x = 1$. Logo o limite pedido é 1. ■

Problema 13. *Sejam $0 < a < \alpha$ números reais e a sequência (x_n) definida por $x_1 = a$ e*

$$x_n = \frac{(\alpha + 1)x_{n-1} + \alpha^2}{x_{n-1} + (\alpha + 1)}, \quad n \geq 2.$$

Prove que a sequência é convergente e encontre o seu limite.

Demonstração: Podemos notar que $0 < x_2 = \frac{(\alpha+1)x_1 + \alpha^2}{x_1 + (\alpha+1)} < \alpha$. De fato, a desigualdade da esquerda é óbvia. Já a desigualdade da direita é equivalente a $x_1 < \alpha$, e portanto é verdadeira. Sendo $0 < x_2 < \alpha$ obtemos, da mesma forma, que $0 < x_3 < \alpha$, e assim, indutivamente, obtemos $0 < x_n < \alpha$ para todo n . Portanto (x_n) é limitada.

Em contra partida, observemos que

$$x_n - x_{n-1} = \frac{(\alpha + 1)x_{n-1} + \alpha^2}{x_{n-1} + (\alpha + 1)} - x_{n-1} = \frac{\alpha^2 - x_{n-1}^2}{x_{n-1} + (\alpha + 1)} > 0,$$

e assim a sequência é crescente.

Sendo (x_n) crescente e limitada, a mesma é convergente. Sendo $L = \lim x_n$, e fazendo $n \rightarrow \infty$ na expressão da definição de x_n , obtemos

$$L = \frac{(\alpha + 1)L + \alpha^2}{L + (\alpha + 1)} \Rightarrow L = \alpha. \quad \blacksquare$$

Problema 14. (*Bulgária*) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$a_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^n}{n} \right).$$

Prove que a sequência definida é não-crescente, conclua sua convergência e calcule o limite correspondente.

Demonstração: Notemos que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n+2}{2^{n+2}} \left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^n}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+1} \right) \\ &= \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}} \left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^n}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+1} \right) \\ &= \frac{n+2}{2(n+1)} \left[\frac{n+1}{2^{n+1}} \left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^n}{n} \right) + 1 \right] \\ &= \frac{n+2}{2(n+1)} (a_n + 1). \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{n+3}{2(n+2)} (a_{n+1} + 1) - \frac{n+2}{2(n+1)} (a_n + 1) \\ &= \frac{(n^2 + 4n + 3)(a_{n+1} + 1) - (n+2)^2 (a_n + 1)}{2(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{((n+2)^2 - 1)(a_{n+1} + 1) - (n+2)^2 (a_n + 1)}{2(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+2)^2 (a_{n+1} - a_n) - (a_{n+1} + 1)}{2(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Como $a_n > 0$ para todo n , vemos da última igualdade acima que se para algum n tivermos $a_{n+1} - a_n \leq 0$, então $a_{n+2} - a_{n+1} \leq 0$. Mas, com alguns cálculos na expressão da definição de (a_n) , vemos que $a_3 = \frac{5}{3}$ e $a_4 = \frac{5}{3}$, e assim $a_4 - a_3 = 0$. Logo,

$$a_4 - a_3 = 0 \Rightarrow a_5 - a_4 \leq 0 \Rightarrow a_6 - a_5 \leq 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_{n+1} - a_n \leq 0,$$

e portanto a sequência (a_n) é não-crescente, e como ela é limitada inferiormente por 0, a mesma é convergente. Para calcularmos o seu limite $L = \lim x_n$, basta que façamos $n \rightarrow \infty$ em $a_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} (a_n + 1)$, de onde obtemos

$$L = \frac{1}{2}(L + 1) \Rightarrow L = 1.$$

■

Problema 15. (Romênia) Uma sequência $(x_n)_{n \geq 1}$ é tal que $\sqrt{x_{n+2} + 2} \leq x_n \leq 2$, para todo $n \geq 1$. Encontre todos os possíveis valores de x_{1986} .

Solução: Podemos perceber que $0 \leq x_n \leq 2$ para todos os n , e assim podemos fazer a substituição trigonométrica $x_n = 2 \cos y_n$, com $0 \leq y_n \leq \frac{\pi}{2}$. Assim, usando a identidade $\cos 2\alpha + 1 = 2 \cos^2 \alpha$, obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{x_{n+2} + 2} \leq x_n &\Rightarrow \sqrt{2(\cos y_{n+2} + 1)} \leq 4 \cos y_n \\ &\Rightarrow \sqrt{4 \cos^2 y_{n+2}} \leq 4 \cos y_n \\ &\Rightarrow \cos y_{n+2} \leq 2 \cos y_n. \end{aligned}$$

Como a função cosseno é decrescente em $[0, \frac{\pi}{2}]$, segue que $\frac{y_{n+2}}{2} \geq y_n$ para todo n . Assim, podemos verificar que

$$y_n \leq \frac{y_{n+2}}{2} \leq \frac{y_{n+4}}{2^2} \leq \frac{y_{n+6}}{2^3} \leq \dots,$$

e, portanto, segue por indução que, para todos os n e k , é válido $y_n \leq \frac{y_{n+2k}}{2^k}$.

Deste modo, fazendo $k \rightarrow \infty$, obtemos $y_n = 0$ para todo n . Daí, segue que $x_n = 2$ para todo n , e portanto $x_{1986} = 2$.

CAPÍTULO 3

SEQUÊNCIAS NA PÓS-GRADUAÇÃO

Neste capítulo trataremos de estudar alguns conceitos e ideias relacionados à sequências que são abordados na *Análise Funcional*, que é o ramo da Matemática, e mais especificamente da Análise, que trata do estudo de espaços vetoriais de dimensão infinita (por exemplo, espaços de funções) e operadores lineares entre estes espaços (por exemplo, transformada de Fourier). Além disso, verificaremos que alguns resultados obtidos no capítulo 2, onde os conceitos estudados foram trabalhados no espaço dos números reais, podem não continuar válidos quando se trabalha em outros espaços.

De antemão, apresentaremos algumas noções fundamentais para o nosso estudo, como espaços métricos, espaços vetoriais e espaços normados, culminando nos espaços de Banach (espaços normados completos), além de apresentarmos, sempre que possível, exemplos que proporcionem um melhor entendimento sobre as ideias e resultados obtidos.

3.1 Espaços Métricos

Definição 3.1.1. Uma *métrica* em um conjunto M não vazio é uma função

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado de *distância* de x a y , de modo que, para quaisquer elementos $x, y, z \in M$ tem-se:

$$d1) \quad d(x, x) = 0;$$

$$d2) \quad d(x, y) \geq 0;$$

$$d3) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$d4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{Desigualdade Triangular}).$$

O par (M, d) é chamado **espaço métrico** formado por um conjunto não vazio M e uma métrica d em M .

A seguir veremos alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 3.1.1 (Métrica zero-um). *Todo conjunto X não vazio pode tornar-se um espaço métrico de maneira simples. Basta definirmos a métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y \end{cases}.$$

O leitor pode verificar facilmente que as condições d1), d2), d3) e d4) são satisfeitas. Logo (X, d) é um espaço métrico.

Exemplo 3.1.2. *A reta, isto é, o conjunto \mathbb{R} dos números reais, é o exemplo mais importante de espaço métrico. A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$. As condições d1), d2), d3) e d4) resultam imediatamente das propriedades elementares de valor absoluto de números reais. Esta métrica é conhecida como **métrica usual** de \mathbb{R} .*

Antes de apresentarmos o próximo exemplo, mostraremos uma importante desigualdade, conhecida na literatura como *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*¹.

Proposição 3.1.1. *Dados os números reais a_1, a_2, \dots, a_n e b_1, b_2, \dots, b_n é válido que*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right),$$

onde igualdade é válida se, e somente se, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

¹Essa desigualdade para somas foi publicada por *Augustin Cauchy* (1821), enquanto a correspondente desigualdade para integrais foi primeiro estabelecida por *Viktor Yakovlevich Bunyakovsky* (1859) e redescoberta por *Hermann Amandus Schwarz* (1888).

Demonstração: Consideremos o trinômio do segundo grau em t , dado por

$$f(t) = (a_1t - b_1)^2 + (a_2t - b_2)^2 + \dots + (a_nt - b_n)^2 = \sum_{i=1}^n (a_it - b_i)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado, obtemos

$$f(t) = \sum_{i=1}^n (a_i)^2 t^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i t + \sum_{i=1}^n (b_i)^2.$$

Perceba que, como $f(t)$ é uma soma de quadrados, então $f(t) \geq 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$, e assim o seu discriminante é menor do que ou igual a zero. Daí,

$$\Delta = 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0,$$

isto é,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Note que a igualdade é válida se, e somente se, $\Delta = 0$, ou seja, se existe um único $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(t_0) = 0$, isto é, se

$$\frac{1}{t_0} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

■

Exemplo 3.1.3 (O espaço euclidiano \mathbb{R}^n é um espaço métrico). *Este exemplo é uma generalização do exemplo anterior. Os elementos do espaço \mathbb{R}^n são as listas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real. Uma maneira natural de se definir a distância entre dois pontos em \mathbb{R}^n é a seguinte: dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n , ponhamos*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

*Mostre que d é uma métrica em \mathbb{R}^n , conhecida como **métrica euclidiana**.*

Demonstração: Podemos observar que as propriedades $d1)$, $d2)$ e $d3)$ são facilmente verificadas. Assim, basta verificarmos a validade da propriedade $d4)$ para todos $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, ou, equivalentemente,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}.$$

Ora, fazendo $x_i - z_i = a_i$ e $z_i - y_i = b_i$ na desigualdade acima, a mesma torna-se equivalente a

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i)^2},$$

e elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$\sum_{i=1}^n (a_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n (b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (a_i)^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i)^2} + \sum_{i=1}^n (b_i)^2,$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right),$$

o que é verdade (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).

Portanto a propriedade d_4) está satisfeita, e assim d é uma métrica em \mathbb{R}^n . ■

Observação: Podemos, também, definir outras métricas em \mathbb{R}^n , como, por exemplo, a *métrica da soma* e a *métrica do máximo*, dadas, respectivamente, por:

$$d' = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ e}$$

$$d'' = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Deixamos a cargo do leitor a tarefa de verificar que, de fato, d' e d'' são métricas em \mathbb{R}^n .

Exemplo 3.1.4. O espaço ℓ^∞ é o conjunto das sequências limitadas de números reais, isto é, se $x \in \ell^\infty$, onde $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, então existe um número real c tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale $|x_n| \leq c$. Definimos em ℓ^∞ a métrica

$$d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|,$$

com $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ em ℓ^∞ . Podemos notar que d está bem definida, pois se $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ estão em ℓ^∞ , existem constantes c e c' , respectivamente, tais que $|x_n| \leq c$ e $|y_n| \leq c'$. Daí, pela Desigualdade Triangular, obtemos

$$|x - y| = |x_n - y_n| \leq |x_n| + |y_n| \leq c + c' = C,$$

com C real.

Deixamos a cargo do leitor a tarefa de verificar que d , de fato, é uma métrica em ℓ^∞ .

Exemplo 3.1.5. O espaço $\ell = \{(x_n); x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\}$ das sequências de números reais é um espaço métrico cuja métrica é definida por

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

onde $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$.

Demonstração: Primeiro, podemos notar que as condições $d1)$, $d2)$ e $d3)$ são facilmente satisfeitas. Para mostrarmos a condição $d4)$, observemos que, para $a, b \in \mathbb{R}$, é verdade que

$$\begin{aligned} |a + b| \leq |a| + |b| &\Rightarrow |a + b| + |a + b||a| + |a + b||b| \leq |a| + |b| + |a + b||a| + |a + b||b| \\ &\Rightarrow |a + b| \cdot (1 + |a| + |b|) \leq |a| \cdot (1 + |a + b|) + |b| \cdot (1 + |a + b|) \\ &\Rightarrow |a + b| \cdot (1 + |a| + |b|) \leq (|a| + |b|) \cdot (1 + |a + b|) \\ &\Rightarrow \frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|} \\ &\Rightarrow \frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a| + |b|} + \frac{|b|}{1 + |a| + |b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|} \\ &\Rightarrow \frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}. \end{aligned}$$

Assim, fazendo $a = x_n - z_n$ e $b = z_n - y_n$ na última desigualdade acima, de onde $a + b = x_n - y_n$ e $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ e $z = (z_n)$, segue que

$$\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leq \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|}.$$

Multiplicando ambos os termos por $\frac{1}{2^n}$ e passando o somatório, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|}, \end{aligned}$$

isto é,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Portanto, d é uma métrica em ℓ . ■

3.1.1 Um Espaço de Funções

Vamos, agora, definir um importante caso particular de espaço métrico, denominado *Espaço de Funções*. De antemão, veremos o conceito de funções limitadas.

Definição 3.1.2. *Seja X um conjunto não vazio arbitrário. Uma função real $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **limitada** quando existe uma constante $k = k_f > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$.*

Proposição 3.1.2. *A soma, a diferença e o produto de funções limitadas são ainda funções limitadas.*

Demonstração: De fato, sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas. Assim, para todo $x \in X$, existem $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$ em X tais que

$$f(x) \leq k_1 \quad \text{e} \quad g(x) \leq k_2.$$

Assim, temos que:

$$i) |(f \pm g)(x)| = |f(x) \pm g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| = k_1 + k_2;$$

$$ii) |(f \cdot g)(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq k_1 \cdot k_2.$$

Portanto, $f \pm g$ e $f \cdot g$ são limitadas. ■

Indicaremos o conjunto $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ como o conjunto das funções limitadas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos definir uma métrica para $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ pondo, para $f, g \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ arbitrárias,

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Vamos mostrar que, de fato, d é uma métrica, chamada de *métrica do supremo* ou *métrica da convergência uniforme*, e assim mostraremos que o espaço $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ é um espaço métrico. Com efeito, sendo $f, g, h \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, verifiquemos se d satisfaz as condições da definição de métrica:

d1) Temos que

$$d(f, f) = \sup_{x \in X} |f(x) - f(x)| = \sup 0 = 0.$$

d2) Se $f \neq g$ existe (pelo menos um) $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, e daí obtemos $|f(x_0) - g(x_0)| > 0$. Assim, temos que

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \geq |f(x_0) - g(x_0)| > 0.$$

d3) Temos, de $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$, que

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| = d(g, f).$$

d4) Primeiro, como $|f(x) - h(x)| \geq 0$ e $|h(x) - g(x)| \geq 0$, é verdade que

$$\sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} \{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\}.$$

Por outro lado, pela Desigualdade Triangular, para todo $x \in X$, obtemos

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|.$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| &\leq \sup_{x \in X} \{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\} \\ &= \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x) - g(x)|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Portanto, $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ é um espaço métrico.

Uma observação importante é que se $X = [a, b]$, dadas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas, a distância $d(f, g)$ é o comprimento da maior corda vertical que se pode traçar ligando o gráfico de f ao gráfico de g . Assim, por exemplo, no espaço métrico $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$, a distância da função $f(x) = x$ à função $g(x) = x^2$ é $d(f, g) = \frac{1}{4}$ (Ver figura 3.1).

No caso em que $X = \{1, 2, \dots, n\}$, toda função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e se identifica a uma lista (x_1, x_2, \dots, x_n) , onde $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n)$. Deste modo, para $X = \{1, 2, \dots, n\}$, temos $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ e a métrica do supremo reduz-se à métrica d'' da observação do Exemplo 3.1.3.

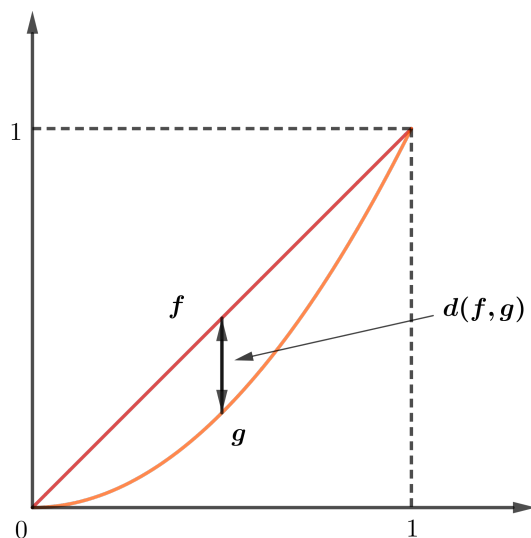


Figura 3.1: Distância Entre as Funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.

Observação: Podemos notar que, como uma sequência de números reais é uma função de \mathbb{N} em \mathbb{R} , então o espaço ℓ do Exemplo 3.1.4 é um caso particular do espaço $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.

Definição 3.1.3. Um subconjunto X de um espaço métrico M é **limitado** quando existe uma constante $c > 0$, tal que $d(x, y) \leq c$, para quaisquer $x, y \in X$. A menor dessas constantes c será chamada de **diâmetro** de X .

Definição 3.1.4. Seja a um ponto qualquer no espaço métrico M . Dado um número real $r > 0$ define-se:

- i) A **bola aberta** de centro a e raio r é o conjunto $B(a, r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r , ou seja,

$$B(a, r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

- ii) A **bola fechada** de centro a e raio r é o conjunto $B[a, r]$ dos pontos de M que estão a uma distância menor do que ou igual a r do ponto a , ou seja,

$$B[a, r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

- iii) A **esfera** de centro a e raio r é o conjunto $S(a, r)$ dos pontos de $x \in M$ tais que $d(x, a) = r$, ou seja,

$$S(a, r) = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

Notemos que os conjuntos bola aberta, bola fechada e esfera são conjuntos limitados.

3.2 Sequências em Espaços Métricos

Nesta seção definiremos sequências em espaços métricos, conceito este que muito se assemelha à ideia de sequência trabalhada no capítulo 2 deste trabalho, mas que se diferem em alguns pontos. Aqui, um dos nossos objetivos é abordar onde estes conceitos diferem, enfatizando ao leitor que alguns resultados, que são verdades no espaço dos números reais, não são verdadeiros em outros espaços.

Além disso, definiremos sequência de Cauchy em espaços métricos, e provaremos alguns resultados sobre tais sequências, necessários para que possamos definir os espaços métricos completos.

Iniciamos com as definições formais de sequências, subsequências, sequências limitadas e limites de sequências, conceitos estes que, como se pode observar, coincidem com os definidos no capítulo 2 onde se foi tomado \mathbb{R} como o espaço métrico em questão.

Definição 3.2.1. Uma **sequência** em um espaço métrico M é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um único elemento $x_n \in M$. Denotamos qualquer sequência por $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou, simplesmente, (x_n) . Em contrapartida, denotamos por $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ ou $x(\mathbb{N})$ o **conjunto dos termos** da sequência (x_n) .

Definição 3.2.2. Uma **subsequência** de (x_n) é uma restrição da função $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ de \mathbb{N} , geralmente denotada por $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots)$, $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}'}$ ou, simplesmente, (x_{n_k}) .

Definição 3.2.3. Uma sequência (x_n) no espaço métrico M chama-se **limitada** quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Definição 3.2.4. Dizemos que uma sequência (x_n) é **convergente** em M , e converge para um ponto $a \in M$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

O ponto $a \in M$ é chamado o **limite** de (x_n) e escreve-se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim x_n = a$, ou ainda, $x_n \rightarrow a$ quando $n \rightarrow \infty$.

Se não existe $\lim x_n$ em M , dizemos que a sequência (x_n) é **divergente** em M .

Dizer que $\lim x_n = a$ num espaço métrico M é equivalente a dizer que toda bola B de centro a e raio $\varepsilon > 0$ contém x_n para todo valor de n , com exceção de um número finito deles (que são no máximo os pontos x_1, x_2, \dots, x_{n_0}).

Teorema 3.2.1. *Toda sequência convergente em um espaço métrico M é limitada.*

Demonstração: Seja $\lim x_n = a$ em um espaço métrico M . Tomando, em particular, $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(a, 1)$, para todo $n > n_0$.

Deste modo, o conjunto dos valores da sequência (x_n) está contido em

$$\{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup B(a, 1),$$

logo é limitado e, portanto, (x_n) é limitada. ■

Teorema 3.2.2 (Unicidade do limite.). *Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes em um espaço métrico M .*

Demonstração: Consideremos (x_n) em M tal que $a = \lim x_n$ e $b = \lim x_n$, com $a, b \in M$. Assim, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad n > n_2 \Rightarrow d(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que

$$0 \leq d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

o que acarreta $d(a, b) = 0$, e assim $a = b$.

Portanto (x_n) não pode convergir para limites distintos em M . ■

Teorema 3.2.3. *Se $\lim x_n = a$ em um espaço métrico M , então toda subsequência de (x_n) converge para a .*

Demonstração: Sendo $\lim x_n = a$, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ temos $d(x_n, a) < \varepsilon$.

Seja $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ um subconjunto infinito de \mathbb{N} . Assim, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} > n_0$. Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$, com $k > k_0$ temos $n_k > n_{k_0} > n_0$, o que implica $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$, ou seja, $\lim x_{n_k} = a$. ■

3.2.1 Sequências de Cauchy

Neste momento definiremos o conceito de sequências de Cauchy em um espaço métrico qualquer e apresentaremos alguns resultados importantes sobre essa categoria de sequências.

Definição 3.2.5. *Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M chama-se **sequência de Cauchy** quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Podemos perceber que a ideia geométrica de uma sequência de Cauchy em um espaço métrico qualquer é a mesma discutida no capítulo anterior, ou seja, os termos da sequência se aproximam uns dos outros cada vez mais à medida que n cresce.

Ser de Cauchy é uma propriedade intrínseca da própria sequência, ou seja, depende apenas dos seus termos, mas não de outros pontos no espaços (contrastando com com a propriedade de ser convergente). Deste modo, se $M \subset N$, uma sequência de pontos $x_n \in M$ é de Cauchy em M se, e somente se, é de Cauchy em N .

Podemos notar, também, que se os termos de uma sequência se aproximam de um ponto fixado (isto é, se é convergente), é razoável imaginarmos que os seus termos se aproximam uns dos outros. De fato, este é o resultado que veremos a seguir.

Teorema 3.2.4. *Toda sequência convergente em um espaço métrico M é de Cauchy em M .*

Demonstração: Sendo (x_n) convergente em M , seja $a \in M$, onde $a = \lim x_n$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, tem-se $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Deste modo, para $m, n > n_0$, temos que

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

e assim, (x_n) é de Cauchy em M . ■

Neste momento, uma questão de fundamental importância que pode ser levantada é a seguinte: será válida a recíproca do Teorema anterior, isto é:

“será toda sequência de Cauchy em um espaço métrico M convergente em M ?”.

Essa questão se faz importante devido ao fato de que, sendo (x_n) uma sequência em um espaço métrico M , não sabemos a priori se (x_n) convergirá ou não, a menos que encontremos um elemento $a \in M$ com a propriedade desejada (dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$ para todo $n > n_0$). O problema é que nem sempre é fácil ou possível encontrar explicitamente tal a , e assim seria importante se possuíssemos uma espécie de **critério de convergência** baseado apenas em propriedades verificáveis da sequência (x_n) .

Como vimos, a propriedade de uma sequência ser de Cauchy é uma propriedade cuja validade ou não depende apenas dela mesma e, portanto, em face do Teorema anterior, é um ótimo candidato a ser um critério de convergência.

Porém, em geral, a resposta ao questionamento acima é negativa: existem espaços métricos nos quais há sequências de Cauchy que não convergem, o que contrasta com um dos resultados obtidos no capítulo 2 deste trabalho. Este fato é mostrado pelos seguintes exemplos, onde consideraremos o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais com a métrica usual $d(r, s) = |r - s|$, com $r, s \in \mathbb{Q}$. O leitor pode facilmente verificar que o par (\mathbb{Q}, d) é um espaço métrico.

Exemplo 3.2.1. *Considerando a sequência de números racionais*

$$(x_n) = (1; 1, 4; 1, 41; 1, 414; 1, 4142; 1, 41421 \dots)$$

que converge para $\sqrt{2}$, vemos pelo Teorema anterior que (x_n) é de Cauchy em \mathbb{R} e, portanto, é de Cauchy em \mathbb{Q} . Porém, (x_n) não é convergente em \mathbb{Q} , pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exemplo 3.2.2. *A sequência (x_n) de números racionais dada por*

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

como foi comprovado no Exemplo 2.4.5 do capítulo anterior, é de Cauchy em \mathbb{R} e, portanto, é de Cauchy em \mathbb{Q} . Porém, como foi visto no Exemplo 2.3.6 do capítulo em questão, esta sequência converge para o número $e \notin \mathbb{Q}$ (pois e é transcendental). Portanto, a sequência (x_n) não é convergente em \mathbb{Q} .

Para próximo exemplo sugerimos ao leitor que se familiarize com os conceitos e propriedades de **continuidade de funções, sequências de funções e integração**, que podem ser encontrados em [14] e [22], ou em outros livros de Cálculo ou Análise.

Exemplo 3.2.3. Seja o conjunto $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$. Este conjunto, com a métrica definida por

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt,$$

é um espaço métrico.

Seja a sequência de funções (f_n) definida por

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{se } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}.$$

Mostre que a sequência (f_n) é de Cauchy em \mathcal{C} mas não converge em \mathcal{C} .

Demonstração: De início, deixamos a cargo do leitor a tarefa de verificar que o par (\mathcal{C}, d) é, de fato, um espaço métrico.

Para um melhor entendimento a respeito do comportamento da sequência (f_n) , podemos observar a conduta de alguns de seus termos na figura abaixo.

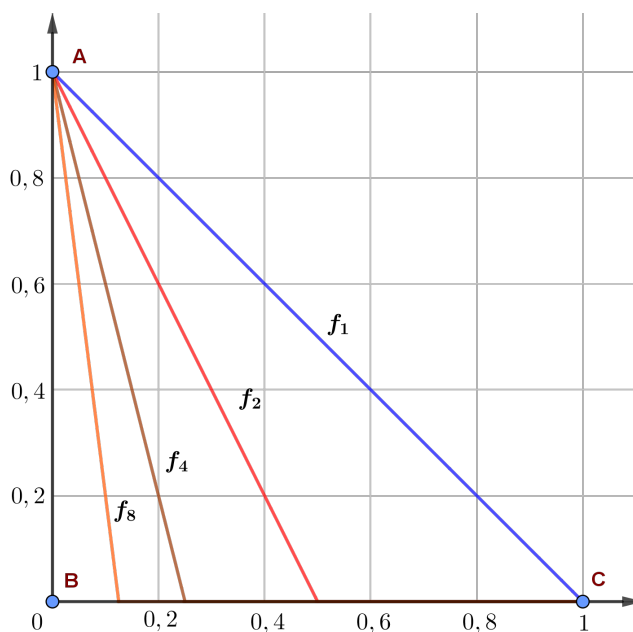


Figura 3.2: Alguns termos da Sequência (f_n) .

Para mostrarmos que (f_n) é de Cauchy, consideremos $m > n$ naturais. Assim, temos que $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ e também $|m - n| = m - n$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned}
 d(f_m, f_n) &= \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)| dt \\
 &= \int_0^{\frac{1}{m}} |f_m(t) - f_n(t)| dt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \underbrace{|f_m(t) - f_n(t)|}_0 dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 \underbrace{|f_m(t) - f_n(t)|}_0 dt \\
 &= \int_0^{\frac{1}{n}} |(1 - mt) - (1 - nt)| dt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} |0 - (1 - nt)| dt \\
 &= \int_0^{\frac{1}{n}} (m - n)t dt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (1 - nt) dt = \left[(m - n) \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[t - n \cdot \frac{t^2}{2} \right]_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \\
 &= \frac{m - n}{2} \cdot \frac{1}{m^2} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2m} - \frac{n}{2m^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \frac{1}{2n} + \frac{n}{2m^2} \\
 &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} \\
 &< \frac{1}{2n}.
 \end{aligned}$$

Assim, fazendo $n \rightarrow \infty$ temos $\frac{1}{2n} \rightarrow 0$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (com $n_0 > \frac{1}{2\varepsilon}$) tal que, para $m, n > n_0$ (sem perda de generalidade tomando $m > n$), temos que

$$d(f_m, f_n) < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n_0} < \varepsilon.$$

Portanto (f_n) é de Cauchy.

Agora, suponhamos que (f_n) é convergente em \mathcal{C} , isto é, suponhamos que existe $f \in \mathcal{C}$ (f contínua) tal que $f_n \rightarrow f$ quando $n \rightarrow \infty$, ou seja,

$$d(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Podemos notar que quando $t = 0$, temos que $f_n(t) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $f(t) = 1$, para $t = 0$. Em contrapartida, tomando $a \in (0, 1]$ arbitrário, temos que

$$\int_a^1 |f_n(t) - f(t)| dt \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

e tomando n suficientemente grande, com $\frac{1}{n} < a$, temos que

$$\int_a^1 |f_m(t) - f(t)| dt = \int_a^1 |0 - f(t)| dt \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

e como $f(t)$ não depende de n , obtemos

$$\int_a^1 |f(t)| dt = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0.$$

Ora, como $a \in (0, 1]$ foi tomado arbitrariamente, temos que $f(t) = 0$ para $t \in (0, 1]$. Deste modo, obtemos que

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t = 0 \\ 0, & \text{se } 0 < t \leq 1 \end{cases},$$

mas isto é um absurdo pois f não é contínua, contradizendo nossa hipótese de que $f \in \mathcal{C}$.

Portanto (f_n) não é convergente em \mathcal{C} . ■

Outros importantes resultados a respeito de sequências de Cauchy são os que seguem.

Teorema 3.2.5. *Toda sequência de Cauchy em um espaço métrico M é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M . Assim, em particular, para $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > n_0$ temos $d(x_m, x_n) < 1$. Logo o conjunto $A = \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ é limitado e tem diâmetro 1. Deste modo,

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\} \cup A$$

é limitado, e portanto (x_n) é limitada. ■

Observação: A recíproca do resultado acima não é válida. Basta notar que a sequência $(1, 0, 1, 0, \dots)$ na reta, embora limitada, não é de Cauchy, pois tem-se $d(x_n, x_{n+1}) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2.6. *Uma sequência de Cauchy em um espaço métrico M que possui uma subsequência convergente é convergente em M (e tem o mesmo limite que a subsequência).*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência convergente em um espaço métrico M , e consideremos (x_{n_k}) uma subsequência convergente para um ponto $a \in M$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n_k > n_1$ temos $d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por outro lado, como (x_n) é de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_2$ implica $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora, seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Assim, para todo $n > n_0$ existe $n_k > n_0$ tal que

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim x_n = a$. ■

Outro resultado estudado no capítulo 2, que não é válido em todo espaço métrico, é o Teorema de Bolzano-Weierstrass. O próximo exemplo nos esclarece que não podemos afirmar que, em todo espaço métrico, toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.

Exemplo 3.2.4. *Em um espaço métrico M , nem toda sequência limitada possui uma subsequência convergente. De fato, no Exemplo 3.2.3 podemos notar que, sendo $m > n$, temos*

$$d(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)| dt \leq (\text{Área do Triângulo } ABC) = 1.$$

Assim, a sequência (f_n) é limitada (o leitor atento pode notar que o Teorema 3.2.5 já nos garante isso) e não possui subsequência convergente, pois caso contrário, por (f_n) ser de Cauchy em \mathcal{C} , pelo Teorema 3.2.6, (f_n) seria convergente em \mathcal{C} , o que vimos que não é verdade.

3.2.2 Espaços Métricos Completos

Definição 3.2.6. *Dizemos que um espaço métrico M é **completo** quando toda sequência de Cauchy em M é convergente em M .*

Exemplo 3.2.5. *O espaço \mathbb{Q} dos números racionais não é completo. De fato, pois como vimos nos Exemplos 3.2.1 e 3.2.2, existem sequências de Cauchy em \mathbb{Q} que não convergem em \mathbb{Q} .*

Exemplo 3.2.6. *Todo espaço métrico com a métrica zero-um é completo.*

Demonstração: De fato, sejam M um espaço com a métrica zero-um e (x_n) uma sequência de Cauchy em M . Deste modo, dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) < 1$ qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$ (note que estamos tomando $m = n + p$ na definição de sequência de Cauchy, o que pode ser feito sem perda de generalidade). Como d é a métrica zero-um, nos resta $d(x_{n+p}, x_n) = 0$ e, assim, $x_{n+p} = x_n$ qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$, ou seja, a partir de um certo índice n_0 a sequência (x_n) é constante. Logo, existe $a \in M$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n = a$. Portanto, $\varepsilon > 0$ qualquer, temos que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) = 0 < \varepsilon$, ou seja, $\lim x_n = a$.



Exemplo 3.2.7. A reta \mathbb{R} é um espaço métrico completo. De fato, pois pelo Teorema 2.4.1 do capítulo anterior, toda sequência de Cauchy em \mathbb{R} é convergente em \mathbb{R} .

Exemplo 3.2.8. O espaço métrico $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$ com a métrica definida por

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt,$$

introduzido no Exemplo 3.2.3, não é completo. De fato, pois como vimos no Exemplo em questão, a sequência

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{se } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

é de Cauchy em \mathcal{C} mas não é convergente em \mathcal{C} .

Exemplo 3.2.9. Mostre que o espaço \mathbb{R}^n , com a métrica euclidiana $d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, com $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ e $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ em \mathbb{R}^n , é completo.

Demonstração: Seja (x_p) uma sequência de Cauchy arbitrária em \mathbb{R}^n , de modo que para cada $p \in \mathbb{N}$ teremos $x_p = (\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \dots, \xi_n^{(p)})$. Para ilustrar melhor os termos de (x_p) , observe

$$(x_p) = \begin{cases} x_1 = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}) \\ x_2 = (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)}) \\ \vdots \\ x_p = (\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \dots, \xi_n^{(p)}) \\ \vdots \end{cases}.$$

Assim, sendo (x_p) de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $p, q > n_0$, temos

$$d(x_p, x_q) = \left[\sum_{i=1}^n (\xi_i^{(p)} - \xi_i^{(q)})^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Daí, temos que

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i^{(p)} - \xi_i^{(q)})^2 < \varepsilon^2 \Leftrightarrow (\xi_i^{(p)} - \xi_i^{(q)})^2 < \varepsilon^2 \Leftrightarrow |\xi_i^{(p)} - \xi_i^{(q)}| < \varepsilon,$$

o que nos mostra que, para cada i fixo ($1 \leq i \leq n$), a sequência $(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \xi_i^{(3)}, \dots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais, e como \mathbb{R} é completo, esta sequência é convergente em \mathbb{R} , digamos que $\xi_i^{(p)} \rightarrow a_i$ quando $p \rightarrow \infty$.

Assim, usando estes n limites, definimos $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, e daí obtemos

$$\left(\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \dots, \xi_n^{(p)} \right) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

onde claramente a pertencerá ao espaço \mathbb{R}^n , por ter n coordenadas.

Logo, fazendo $q \rightarrow \infty$ em (3.1), para $p > n_0$ temos que

$$d(x_p, a) \leq \varepsilon,$$

o que nos mostra que $x_p \rightarrow a$ em \mathbb{R}^n . Portanto o espaço \mathbb{R}^n é completo. ■

O espaço \mathbb{C}^n também é completo, e sua demonstração é análoga ao do \mathbb{R}^n .

3.3 Espaços Normados

Para introduzirmos a noção de espaço normado é preciso, inicialmente, abordarmos alguns conceitos de espaços vetoriais, uma vez que um espaço normado é qualquer espaço vetorial que possui uma norma definida. Importantes exemplos de espaços vetoriais são os normados e os de Banach (espaço normado completo), que serão abordados nesta seção.

3.3.1 Espaços Vetoriais

Definição 3.3.1. *Um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) é uma quádrupla $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ em que V é um conjunto não vazio, cujos elementos são chamados de vetores, munido das operações algébricas de adição de vetores $(+)$ e multiplicação por escalar (\cdot) .*

Definimos a operação de **adição de vetores** da forma

$$\begin{aligned} (+) : V \times V &\rightarrow V \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

A1) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ (comutativa);

A2) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$ (associativa);

A3) Existe um vetor 0 em V , chamado de **vetor nulo**, tal que

$$u + 0 = u, \forall u \in V.$$

A4) Para cada vetor u de V existe um elemento $-u$ em V , chamado **elemento oposto**, tal que

$$u + (-u) = 0.$$

Também definimos a operação de **multiplicação por escalar** da forma

$$\begin{aligned} (+) : V \times \mathbb{K} &\rightarrow V \\ (u, \alpha) &\mapsto \alpha u \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

$$M1) (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u \in V;$$

$$M2) (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u \in V;$$

$$M3) \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u, v \in V;$$

$$M4) 1u = u, \forall u \in V.$$

Segue imediatamente da definição a unicidade do elemento neutro e do elemento oposto. De fato,

i. Sejam 0 e $0'$ em V satisfazendo A3), então pelas propriedades A1) e A3) segue que

$$0' = 0 + 0' = 0' + 0 = 0.$$

ii. Sendo $u \in V$, pela propriedade A4), $-u \in V$. Consideremos $v \in V$ tal que $u + v = 0$.

Assim, pelas propriedades A1), A2) e A3), obtemos

$$-u = -u + 0 = -u + (u + v) = (-u + u) + v = 0 + v = v.$$

Observação: Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dizemos que V é um espaço vetorial real, e quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dizemos que V é um espaço vetorial complexo.

A seguir veremos alguns exemplos de espaços vetoriais que deixaremos a cargo do leitor a tarefa de verificar que as oito propriedades da Definição 3.3.1 são satisfeitas, em cada caso.

Exemplo 3.3.1. O conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ das matrizes $m \times n$ com as operações usuais de adição de matrizes, dada por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K}),$$

onde $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, e produto de matrizes por escalar, dada por

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}), \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}),$$

é um espaço vetorial.

Exemplo 3.3.2. O conjunto $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, 2, \dots, n\}$ com as operações

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \forall x, y \in \mathbb{K}^n \text{ e}$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } x \in \mathbb{K}^n$$

é um espaço vetorial.

Exemplo 3.3.3. O conjunto $\mathbb{K}[t]$ é formado pelos polinômios na variável t cujos coeficientes estão em \mathbb{K} . Sendo $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_n t^n + \dots$ em $\mathbb{K}[t]$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que $\mathbb{K}[t]$ com as operações

$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \dots + (a_n + b_n)t^n \text{ e}$$

$$\lambda p(t) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + (\lambda a_2)t^2 + \dots + (\lambda a_n)t^n$$

é um espaço vetorial.

Exemplo 3.3.4. O conjunto $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ é função}\}$, sendo X um conjunto não vazio, com as operações usuais

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall f, g \in \mathcal{F} \text{ e}$$

$$(\alpha f) = \alpha f(x), \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}$$

é um espaço vetorial.

Exemplo 3.3.5. O conjunto $\ell = \{(x_n); x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}\}$ das sequências de números reais, com as operações usuais de adição e multiplicação, é um espaço vetorial.

Relembrando que uma sequência (x_n) é uma aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, temos que $\ell \subset \mathcal{F}$.

Exemplo 3.3.6. O conjunto $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$ com as operações usuais, como no Exemplo 3.3.4, é um espaço vetorial. Note que $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$.

3.3.2 Espaços Vetoriais Normados

Nesta seção abordaremos a ideia de norma em um espaço vetorial, além de definirmos espaços normados, apresentando alguns exemplos para um melhor entendimento. A noção de espaços normados é fundamental para introduzirmos a definição de espaços de Banach (espaços normados completos), que introduziremos mais adiante.

Definição 3.3.2. *Seja E um espaço vetorial real. Uma **norma** em E é uma função*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ E &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

que satisfaz

$$N1) \|x\| \geq 0, \forall x \in E \text{ e } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$N2) \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in E;$$

$$N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E \text{ (Desigualdade Triangular)}.$$

Dizemos que o par $(E, \|\cdot\|)$ é um **espaço vetorial normado** ou, simplesmente, **espaço normado**.

Exemplo 3.3.7. São exemplos clássicos de espaços vetoriais normados $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$ e $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|'')$ onde, para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}, \quad \|x\|' = \sum |x_i| \text{ e } \|x\|'' = \max |x_i|.$$

Demonstração: Mostraremos apenas que $\|x\|$, de fato, define uma norma em \mathbb{R}^n e deixaremos a cargo do leitor a verificação de $\|x\|'$ e $\|x\|''$. De fato, sendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que:

$$N1) \text{ De } \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \text{ temos que } \|x\| \geq 0 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = 0 &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

N2) Temos que

$$\begin{aligned}
 \|\lambda x\| &= \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2} \\
 &= \sqrt{\lambda^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \\
 &= |\lambda| \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \\
 &= |\lambda| \cdot \|x\|.
 \end{aligned}$$

N3) De fato, utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
 (\|x + y\|)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} + \sum_{i=1}^n y_i^2 \\
 &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
 &= (\|x\| + \|y\|)^2,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

■

Exemplo 3.3.8. O espaço $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, definido na seção 3.1.1, é um espaço normado onde definimos

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

com $\|f\|$ representando a norma da função f .

Demonstração: Mostraremos que $\|f\|$ satisfaz as condições de norma:

N1) Temos de $|f(x)| \geq 0$, para todo $x \in X$, que $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \geq 0$. Além disso,

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in X} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in X \Leftrightarrow f = 0.$$

N2) Temos que

$$\|\lambda f\| = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in X} |\lambda| \cdot |f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|.$$

N3) Pela Desigualdade Triangular, temos que

$$\begin{aligned}\|f + g\| &= \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in X} (|f(x)| + |g(x)|) \\ &= \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| \\ &= \|f\| + \|g\|.\end{aligned}$$

Portanto, $\|f\|$ é uma norma em $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. ■

Exemplo 3.3.9. O espaço de sequência ℓ^∞ , definido no Exemplo 3.1.4, com a norma definida por

$$\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|, \text{ onde } x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty,$$

é um espaço normado. A demonstração é semelhante à do exemplo anterior.

Exemplo 3.3.10. Seja $c_{00} = \{(x_i); x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N} \text{ e } \exists i_0 \text{ tal que } x_i = 0, \forall i \geq i_0\}$ o espaço das seqüências quase nulas, ou seja, uma seqüência pertence a c_{00} se possui apenas zeros em seus termos a partir de um certo índice. Este espaço com a norma

$$\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|, \text{ onde } x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in c_{00}$$

é um espaço métrico. A demonstração será deixada a cargo do leitor.

Exemplo 3.3.11. O espaço $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ das funções contínuas de $[a, b]$ em \mathbb{R} , com as normas

$$\|f\| = \int_a^b |f(t)| dt \quad \text{ou} \quad \|f\| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

é um espaço normado. A demonstração será deixada a cargo do leitor.

A seguir apresentamos uma importante relação entre espaços normados e espaços métricos.

Teorema 3.3.1. Todo espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço métrico (E, d) quando a métrica é definida por $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall x, y \in E$.

Demonstração: Para todo $x, y, z \in E$, temos que:

$$d1) \quad d(x, x) = \|x - x\| = 0;$$

$$d2) \quad d(x, y) = \|x - y\| \geq 0;$$

$$d3) \quad d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x);$$

$$d4) \quad d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

Portanto (E, d) é um espaço métrico. ■

De acordo com o resultado acima, se E é um espaço vetorial dotado de uma norma $\|\cdot\|$, podemos definir uma métrica em E , chamada *métrica induzida pela norma* $\|\cdot\|$, através da expressão $d(x, y) = \|x - y\|$, definida para todos $x, y \in E$. Por exemplo, as métricas d , d' e d'' do Exemplo 3.1.3 e de sua observação, são métricas induzidas pelas normas $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ do Exemplo 3.3.7, respectivamente. Também, a métrica do supremo de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ é uma métrica induzida pela norma $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ do Exemplo 3.3.8. Com isso em mente, introduzimos então importante definição da próxima subseção.

3.3.3 Espaços de Banach

Definição 3.3.3. *Um espaço normado é dito ser um **espaço de Banach**² se for um espaço métrico completo em relação à métrica induzida pela norma definida nesse espaço.*

Exemplo 3.3.12. *O espaço \mathbb{R}^n com a norma definida por*

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Banach. De fato, pois pelo Exemplo 3.2.9, \mathbb{R}^n é completo com a métrica euclidiana, que é induzida pela norma em questão.

O próximo resultado é de fundamental importância na teoria de espaços de Banach.

Teorema 3.3.2. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.*

Observação: O leitor pode consultar a demonstração do resultado acima em [10] ou [27]. Sugerimos que o leitor relembre os conceitos de combinação linear, dependência e independência linear, bases e dimensão de espaços vetoriais (Ver [8], [16] ou outras bibliografias de Álgebra Linear) para analisar a demonstração do resultado em questão

Os exemplos seguintes tratam de espaços normados de dimensão infinita.

²Stefan Banach (1892-1945), matemático polonês do século XIX cuja contribuição mais importante foi na moderna Análise Funcional.

Exemplo 3.3.13. O espaço ℓ^∞ com a norma $\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$ é Banach.

Demonstração: A métrica de ℓ^∞ , induzida pela norma dada, é

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i - \eta_i|, \text{ com } x = (\xi_i), y = (\eta_i) \in \ell^\infty.$$

Seja (x_p) uma sequência de Cauchy no espaço ℓ^∞ , com $x_p = (\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \xi_3^{(p)}, \dots)$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $p, q > n_0$ temos

$$d(x_p, x_q) = \|x_p - x_q\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(p)} - \xi_i^{(q)}| < \varepsilon.$$

Daí, para cada i fixo e $p, q > n_0$, temos que

$$|\xi_i^{(p)} - \xi_i^{(q)}| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Deste modo, para todo i fixo, a sequência $(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \xi_i^{(3)}, \dots)$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} , logo é convergente em \mathbb{R} , ou seja, para cada i fixo temos $\xi_i^{(p)} \rightarrow a_i$ com $p \rightarrow \infty$. Usando os infinitos limites a_1, a_2, a_3, \dots , consideremos a sequência $a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$. Agora, basta mostrar que $a \in \ell^\infty$ e que $x_p \rightarrow a$.

Ora, fazendo $q \rightarrow \infty$ em (3.2), para cada i fixo e $p > n_0$ temos que

$$|\xi_i^{(p)} - a_i| \leq \varepsilon. \quad (3.3)$$

Por outro lado, como $(x_p) \in \ell^\infty$, existe um real k_p tal que $|\xi_i^{(p)}| \leq k_p$ para todo i . Daí, pela Desigualdade Triangular, para cada i e $p > n_0$ obtemos

$$|a_i| = |a_i - \xi_i^{(p)} + \xi_i^{(p)}| \leq |a_i - \xi_i^{(p)}| + |\xi_i^{(p)}| \leq \varepsilon + k_p.$$

Podemos perceber que o lado direito da desigualdade acima não depende de i , e assim a sequência de números reais $a = (a_i)$ é limitada, e portanto $a \in \ell^\infty$.

Além disso, de (3.3) obtemos

$$d(x_p, a) = \|x_p - a\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\xi_i^{(p)} - a_i| \leq \varepsilon$$

com $p > n_0$, e isto nos mostra que $x_p \rightarrow a \in \ell^\infty$.

Portanto ℓ^∞ é Banach. ■

Exemplo 3.3.14. O espaço das funções contínuas $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ com a norma definida por $\|f\| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$, é Banach.

Demonstração: A métrica de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, induzida pela norma dada, é

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|, \text{ com } f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}).$$

Seja (f_n) uma sequência de Cauchy arbitrária em $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m, n > n_0$, temos que

$$d(f_m, f_n) = \|f_m - f_n\| = \sup_{t \in [a, b]} |f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Daí, para cada $t = t_0 \in [a, b]$ fixo temos

$$|f_m(t_0) - f_n(t_0)| < \varepsilon,$$

e isto nos mostra que a sequência $(f_n(t_0)) = (f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0), \dots)$ é uma sequência de Cauchy em \mathbb{R} , e portanto é convergente em \mathbb{R} , digamos $f_n(t_0) \rightarrow f(t_0)$ para $n \rightarrow \infty$. Desta forma, podemos associar a cada $t \in [a, b]$ um único número real $f(t)$ com

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t), \end{aligned}$$

e isto define uma **convergência pontual** da função f em $[a, b]$. Agora nos resta mostrar que $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ e $f_n \rightarrow f$.

Ora, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (3.4) obtemos

$$\sup_{t \in [a, b]} |f_m(t) - f(t)| \leq \varepsilon,$$

com $m > n_0$ e $t \in [a, b]$, e daí obtemos

$$|f_m(t) - f(t)| \leq \varepsilon,$$

para todo $t \in [a, b]$, com $m > n_0$.

Deste modo, vemos que (f_n) **converge uniformemente** para f , isto é, $f_n \rightarrow f$. Por outro lado, já que f_n é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é contínua. Portanto, $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ é um espaço de Banach. ■

Observação: A respeito de convergência pontual e convergência uniforme de sequências de funções, ver [22].

O próximo exemplo nos mostra que, dependendo da norma definida em um espaço normado de dimensão infinita, este pode ou não ser de Banach.

Exemplo 3.3.15. *O espaço de todas as funções contínuas $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, com a norma definida por $\|f\| = \int_a^b |f(t)| dt$, não é um espaço de Banach.*

Demonstração: De fato, tomando em particular $a = 0$ e $b = 1$, no Exemplo 3.2.8 vimos que o espaço $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, com a métrica

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$

que é induzida pela norma em questão, não é completo. Portanto $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ não é Banach. ■

Exemplo 3.3.16. *O espaço c_{00} das sequências quase nulas, com a norma definida por $\|x_n\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$, não é um espaço de Banach.*

Demonstração: Para mostrarmos que c_{00} não é Banach basta que exibirmos uma sequência de Cauchy em c_{00} que não convirja em c_{00} . Para isto, consideremos a sequência (x_n) definida por

$$(x_n) = \begin{cases} x_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots) \\ x_2 &= (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots) \\ x_3 &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots) \\ &\vdots \\ x_n &= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, 0, \dots) \\ &\vdots \end{cases} .$$

Podemos notar que, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (com $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$) tal que, para todo $m > n > n_0$ tem-se

$$\|x_m - x_n\| = \left\| \left(0, 0, \dots, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots \right) \right\| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

e portanto (x_n) é de Cauchy em c_{00} .

Em contrapartida, (x_n) não converge em c_{00} . De fato, supondo por absurdo que (x_n) convirja para $a = (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, \dots) \in c_{00}$ existe um certo $k \in \mathbb{N}$ tal que $a^{(i)} = 0$ para todo $i \geq k$. Assim, se $n \geq k$ temos

$$\|x_n - a\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - a| \geq \frac{1}{k},$$

o que contradiz o fato de (x_n) convergir para a .

Portanto o espaço c_{00} não é Banach. ■

Nos limitaremos até aqui no estudo dos espaços de Banach, porém o leitor interessado pode consultar [10], [19] ou [23] para verificar outros resultados e exemplos a respeito deste tópico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento deste trabalho, foi possível observar que o conteúdo de sequências é muito vasto, além de possuir extrema importância em cada nível de ensino. Acreditamos que foi possível destacar as principais características deste conteúdo e sua relação com outras áreas da Matemática, apresentando o modo que o mesmo geralmente é abordado, desde o Ensino Básico até o Ensino Superior.

Como frisamos, é necessário que o docente tenha amplo conhecimento a respeito do que o mesmo irá ensinar. Por isso resolvemos discursar sobre o tema em questão. Ademais, enfatizamos a importância dos diversos exemplos e problemas apresentados em cada etapa do trabalho, que trazem aplicações, embasamento e aprofundamento a respeito das ideias trabalhadas no decorrer do texto.

Ainda destacamos o capítulo 3 que, dentre outras coisas, nos proporcionou uma visão mais abrangente em relação a alguns resultados do universo das sequências. Alguns destes resultados nos mostraram que, dependendo do espaço em que se está trabalhando, alguns resultados não são absolutos. Também pudemos estudar algumas ideias trabalhadas na Análise Funcional, relacionados às ideias de sequências, o que acreditamos ser noções importantes a serem absorvidas pelo leitor.

Por fim, cremos que com este trabalho foi possível colaborar com os leitores em geral, através do que foi apresentado. Além disso, esperamos que o trabalho possa servir de fonte de inspiração para propostas vindouras, visto que ainda há muito o que se estudar relativo ao tema em questão e seu envolvimento com outras áreas e conteúdos da Matemática.

APÊNDICE A

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

É possível descrever precisamente o conjunto \mathbb{N} dos números naturais e elaborar toda sua teoria a partir de quatro fatos básicos, conhecidos atualmente como os **axiomas de Peano**, valendo-se da importante síntese feita pelo matemático italiano *Giuseppe Peano* (1858-1932). A seguir enunciamos estes axiomas:

- (a) Existe uma função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, chamado o sucessor de n .
- (b) A função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetiva.
- (c) Existe um único elemento 1 no conjunto \mathbb{N} , tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (d) (Princípio da Indução) Se um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e, para todo $n \in X$ tem-se também $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

O último dos axiomas de Peano é conhecido como o **axioma da Indução**, que pode ser reformulado da seguinte maneira:

Princípio da Indução: Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n . Suponhamos que

- (i) $P(1)$ é válida;
- (ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(s(n))$.

Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n .

Com efeito, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais n para os quais $P(n)$ é válida, veremos que:

- $1 \in X$ devido a (ii); e também
- $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$ devido a (ii).

Portanto, pelo axioma da indução, temos que $X = \mathbb{N}$.

Equivalente ao Princípio da Indução, podemos enunciar o seguinte resultado:

Princípio da Indução Generalizado: Seja P uma propriedade referente a números naturais, cumprindo as seguintes condições:

- (1) O número natural a goza da propriedade P ;
- (2) Se um número natural n goza da propriedade P então seu sucessor também goza de P .

Então todos os números naturais maiores do que ou iguais a a gozam da propriedade P .

APÊNDICE B

DESIGUALDADE DE BERNOULLI

Desigualdade de Bernoulli: Para todo número real $x \geq -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Demonstração: Mostraremos por indução em n .

(i) Para $n = 1$ o resultado é imediato, sendo satisfeita a igualdade.

(ii) Suponhamos que a desigualdade é válida para um certo n . Assim, multiplicando ambos os membros da desigualdade por $1 + x \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned}(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x.\end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade é verdadeira para todo n . ■

APÊNDICE C

DESIGUALDADE TRIANGULAR

Desigualdade Triangular: Se $x, y \in \mathbb{R}$ então é válido que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demonstração: Como, pela definição de módulo de um número real x é tal que $|x| = \max\{x, -x\}$, segue que $-|x| \leq x \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Daí, somando membro a membro as desigualdades $x \leq |x|$ e $y \leq |y|$ obtemos $x + y \leq |x| + |y|$. De modo análogo, de $-x \leq |x|$ e $-y \leq |y|$ segue que $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Portanto

$$\max\{x + y, -(x + y)\} = |x + y| \leq |x| + |y|.$$

■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALENCAR, M. E. G. de. **O Número ϕ e a Sequência de Fibonacci**. Física na Escola. v. 5, n. 2, 2004. Disponível em <<http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol15/Num2/v5n1a02.pdf>>. Acesso em: 09 de out. 2017.
- [2] ANDREESCU, T.; ANDRICA, D. **360 Problems for Mathematical Contests**. Ed. GIL. - Zalau, 2003.
- [3] ANDREESCU, T.; GELCA, R. **Mathematical Olympiad Challenges**. Ed. Birkhäuser: 2^a ed. - Boston, 2009.
- [4] ANDREESCU, T.; GELCA, R. **PUTNAM and BEYOND**. Ed. Springer. - New York, 2007.
- [5] BARATA, J. C. A. **Notas para um Curso de Física-Matemática**. Departamento de Física Matemática do IFUSP - São Paulo, 2018. Disponível em <http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html>. Acesso em: 12 de fev. 2018.
- [6] BARTLE, R. G; SHERBERT, D. R. **Introduction to Real Analysis**. Ed. John Wiley & Sons: 4^a ed. - New York, 2011.
- [7] BELMONT, D. F. S. **Teoria das Ondas de Elliott: Uma Aplicação ao Mercado de Ações de BM&FBOVESPA**. Dissertação de Mestrado - UFPB, João Pessoa, 2010. Disponível em <http://www.ccsa.ufpb.br/ppge/arquivos/dissertacoes/FERREIRA_2010.pdf>. Acesso em: 09 de out. 2017.

- [8] BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. Ed. HARBRA ltda: 3ª ed. - São Paulo, 1980.
- [9] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Ed. Edgar Blucher Ltda. - São Paulo, 1974.
- [10] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Ed. Springer. - New York, 2011.
- [11] CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. Ed. SBM: 2ª ed. - Rio de Janeiro, 2015.
- [12] DEVLIN, K. **Matemática - a Ciência dos Padrões**. Ed. Porto - Porto, 2002.
- [13] ENGEL, A. **Problem-Solving Strategies**. Ed. Springer. - New York, 1998.
- [14] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo Vol. 1**. Ed. LTC: 5ª ed. - São Paulo, 2001.
- [15] HEFEZ, A. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Ed. SBM: 1ª ed. - Rio de Janeiro, 2014.
- [16] HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à Álgebra Linear**. Coleção PROFMAT. Ed. SBM: 2ª ed. - Rio de Janeiro, 2016.
- [17] IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar: Complexos, Polinômios e Equações**. Ed. Atual: 2ª ed. - São Paulo, 1997.
- [18] JESUS, M. D. N. **Sucessão de Fibonacci e uma sua generalização**. Projeto Educacional I do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, 26 pág. Faculdade de Ciência e Tecnologia. Universidade de Coimbra. Disponível em: <[http://www.mat.uc.pt/~nep/PagWebEscola/ProjetoEI\(Final\).pdf](http://www.mat.uc.pt/~nep/PagWebEscola/ProjetoEI(Final).pdf)>. Acesso em: 15 de nov. de 2017.
- [19] KREYSZIG, E. O. **Introductory Functional Analysis with Applications**. John Wiley & Sons - New York, 1978.
- [20] LEOPOLDINO, K. S. M. **Sequência de Fibonacci e Razão Áurea: Aplicações no Ensino Básico**. 103 f. Dissertação de Mestrado - UFRN, Natal, 2016. Disponível em <<https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/21244>>. Acesso em: 10 de out. 2017.

- [21] LIMA, E. L. **Análise Real**, vol. 1. Coleção Matemática Universitária. Ed. IMPA: 11ªed. - Rio de Janeiro, 2011.
- [22] LIMA, E. L. **Curso de Análise**, vol. 1. Ed. IMPA: 14ª ed. - Rio de Janeiro, 2016.
- [23] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. Editora Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada: 4ª ed. - Rio de Janeiro, 2011.
- [24] LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT. Ed. SBM: 1ª ed. - Rio de Janeiro, 2013.
- [25] LOPES, L. B. R. **Manual de Sequências e Séries**, v 1. Ed. QED TEXTE - Rio de Janeiro, 2005.
- [26] LOPES, L. B. R. **Manual de Sequências e Séries**, v 2. Ed. QED TEXTE - Rio de Janeiro, 2005.
- [27] MACHADO, L. B. **Análise Funcional e Aplicações**. 204 f. Dissertação de Mestrado - UNESP, Rio Claro, 2012. Disponível em <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94370/machado_lb_me_rcla.pdf?sequence=1>. Acesso em: 17 de fev. 2018.
- [28] MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar: Números Reais**. Coleção Professor de Matemática. v. 1. Ed. SBM: 2ª ed. - Rio de Janeiro, 2013.
- [29] MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar: Introdução à Análise**. Coleção Professor de Matemática. v. 3. Ed. SBM: 2ª ed. - Rio de Janeiro, 2012.
- [30] STEWART, I. **Os Números da Natureza**. Ed. Rocco - Rio de Janeiro, 1996.