UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

José Filho Ferreira Nobre

# PROGRESSÕES ARITMÉTICAS: Abordando as ordens superiores

PALMAS - TO
2017

José Filho Ferreira Nobre

# PROGRESSÕES ARITMÉTICAS: Abordando as ordens superiores

Dissertação apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha.

PALMAS - TO
2017

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins**

N754p Nobre, José Filho Ferreira.
PROGRESSÕES ARITMÉTICAS: Abordando as ordens superiores . / José Filho Ferreira Nobre. – Palmas, TO, 2018.
71 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2018.

Orientador: Rogério Azevedo Rocha

1. Progressão Aritmética de ordem superior . 2. Aplicações. 3. Formação de professores. 4. Ensino Médio. I. Título

**CDD 510**



**Elaborado pelo sistema de geração automatica de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).**

JOSÉ FILHO FERREIRA NOBRE

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS: Abordando as ordens superiores

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Dr. Rogério Azevedo Rocha

Aprovada em 05 / 03 / 2018

BANCA EXAMINADORA

Rogério Azevedo Rocha

Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (UFT)

Hellena Apolinário

Prof. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (UFT)

Prof. Dr. Antônio Rafael de Souza Alves Bôsso (IFTO)

*A Dulcielle Dias Fernandes Nobre.*
*A Pedro Henrick Fernandes Nobre.*
*A Thiago Fernandes Nobre.*
*A Eduardo Fernandes Nobre.*

# AGRADECIMENTOS

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela coordenação deste importante Programa de Mestrado.

À Universidade Federal do Tocantins (UFT) por aderir ao PROFMAT e proporcionar oportunidades de aperfeiçoamento.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, sem o qual seria impossível minha participação.

Ao meu orientador, pelo profissionalismo brilhante com o qual me guiou.

Aos familiares, pelo apoio e incentivo quando precisei me ausentar deles para dedicar aos estudos.

Aos amigos do curso, por me receberem e ampararem.

À professora Fabrícia Ferreira da Silva, pela disposição e carinho em colaborar com a revisão ortográfica.

*Um matemático que também não é um pouco poeta jamais será um matemático completo.*
*(Karl Weierstrass)*

# RESUMO

Neste trabalho abordamos as Progressões Aritméticas (PA's) de ordem superior, trazendo à luz conhecimentos que podem ser úteis na prática docente do ensino médio. Observamos a presença dessas PA's em importantes situações, desde os pitagóricos com os números figurados até a atualidade com o lançamento oblíquo de um corpo. No entanto, é notório que este conteúdo não vem sendo abordado de forma satisfatória no ensino público e privado. O objetivo desse trabalho é dar suporte aos professores de matemática do ensino médio, explorando o referencial teórico, fórmulas e aplicações relacionadas ao tema. Através de pesquisa, foi identificada a deficiência no ensino e aprendizagem da rede pública do extremo norte do Tocantins e, a partir da execução de uma formação com os professores foi possível propor atividades com o objetivo de sanar estas deficiências.



**Palavras-chave**: Progressão Aritmética de ordem superior; Aplicações; Formação de professores; Ensino Médio.

# ABSTRACT

In this work we approach the Arithmetic Progressions (PAs) of higher order, bringing to light knowledge that may be useful in teaching practice of high school. We observe the presence of these PAs in important situations, from the Pythagoreans to the figures figured up to the present time with the oblique launch of a body. However, it is notorious that this content has not been addressed satisfactorily in public and private education. The objective of this work is to support the teachers of high school mathematics, exploring the theoretical reference, formulas and applications related to the theme. Through research, it was identified the deficiency in the teaching and learning of the public network of the extreme north of Tocantins and, from the execution of a training with the teachers it was possible to propose activities with the objective of remedying these deficiencies.

**Keywords**: Arithmetic progression of higher order; Applications; Teacher training; High school.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES


Figura 1 – Papiro de Rhind . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18
Figura 2 – Manuscrito Medieval contendo Números Figurados . . . . . . . . . . . 19
Figura 3 – Triângulo Aritmético na China . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20
Figura 4 – Números Triangulares . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25
Figura 5 – Números Quadrados . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
Figura 6 – Números Quadrados em função dos Números Triangulares . . . . . . . 26
Figura 7 – Números Pentagonais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
Figura 8 – Números Hexagonais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27
Figura 9 – Números Retangulares . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
Figura 10 – Números Piramidais de Base Retangular . . . . . . . . . . . . . . . . 29
Figura 11 – Triângulo de Pascal e suas configurações . . . . . . . . . . . . . . . 29
Figura 12 – Arranjo triangular com os Números Ímpares . . . . . . . . . . . . . . 30
Figura 13 – Triângulo numérico com linha alternadas . . . . . . . . . . . . . . . 31
Figura 14 – Triângulo numérico com números ímpares . . . . . . . . . . . . . . . 36
Figura 15 – Castelo de Cartas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
Figura 16 – Arranjo hexagonal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38
Figura 17 – Decomposição da figura 16 em camadas . . . . . . . . . . . . . . . . 38
Figura 18 – Sequência da soma . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39
Figura 19 – Sequência dos números pentagonais . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40
Figura 20 – Números hexagonais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40
Figura 21 – Sequência piramidal de base quadrada . . . . . . . . . . . . . . . . . 41
Figura 22 – Triângulo de Pascal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
Figura 23 – Triângulo de Pascal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44
Figura 24 – Lançamento oblíquo à 45 graus. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46
Figura 25 – Extremo norte do Tocantins . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48
Figura 26 – Idade dos docentes pesquisados . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
Figura 27 – Formação dos professores pesquisados . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
Figura 28 – Atuação dos professores em 2017 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
Figura 29 – Tempo de docência em Matemática . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
Figura 30 – Progressões Aritméticas e os docentes . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
Figura 31 – Docência de Progressões Aritméticas eo 2017 . . . . . . . . . . . . . 51
Figura 32 – Progressões Aritméticas e Função afim . . . . . . . . . . . . . . . . 52
Figura 33 – Progressões Aritméticas e gráficos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
Figura 34 – Conhecimento de números figurados . . . . . . . . . . . . . . . . . 53
Figura 35 – Progressões Aritméticas e números figurados . . . . . . . . . . . . . 53

Figura 36 – Conhecimento de Progressões Aritméticas de ordem superior . . . . . . 54
Figura 37 – Aceitação da formação . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54

# LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Altura de uma planta em função do tempo . . . . . . . . . . . . . . . . . 22
Tabela 2 – Objeto em queda livre . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45
Tabela 3 – Dados dos testes de disparo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
Tabela 4 – Estrutura da formação de professores . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55
Tabela 5 – Percentual de acerto nas duas avaliações da formação. . . . . . . . . . . 55
Tabela 6 – Percentual de acerto nas duas avaliações da formação (continuação) . . 56
Tabela 7 – Estatística da formação de professores . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| ABNT | Associação Brasileira de Normas Técnicas |
| IMPA | Instituto de Matemática Pura e Aplicada |
| NBR | Norma Brasileira |
| SBM | Sociedade Brasileira de Matemática |
| SI | Sistema Internacional |
| UFT | Universidade Federal do Tocantins |

# SUMÁRIO


**1 INTRODUÇÃO** . . . . . . . . . . **15**

**2 BREVE HISTÓRICO SOBRE AS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS** . . . . . . . . . . **18**

**3 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS: ASPECTOS TEÓRICOS** . . . . **21**

**3.1 Progressão Aritmética de Primeira Ordem** . . . . . . . . **21**

**3.2 Progressão Aritmética de Ordem Superior** . . . . . . . . **23**

**3.3 Números Figurados** . . . . . . . . . . **25**

3.3.1 **Números Triangulares** . . . . . . . . . . 25

3.3.2 **Números Quadrados** . . . . . . . . . . 26

3.3.3 **Números Pentagonais** . . . . . . . . . . 27

3.3.4 **Números Hexagonais** . . . . . . . . . . 27

3.3.5 **Números Retangulares** . . . . . . . . . . 28

3.3.6 **Números Piramidais** . . . . . . . . . . 28

**3.4 O Triângulo de Pascal** . . . . . . . . . . **29**

**3.5 Termo geral das Progressões Aritméticas** . . . . . . . . **31**

**4 APLICAÇÕES DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS** . . . . **35**

**4.1 Pai e Filha** . . . . . . . . . . **35**

**4.2 Situações de arranjos numéricos em formato triangular** . . . . . **36**

**4.3 Castelo de cartas** . . . . . . . . . . **37**

**4.4 Arranjo hexagonal com moedas tangentes** . . . . . . . . **38**

**4.5 Números Pentagonais** . . . . . . . . . . **40**

**4.6 Números Hexagonais** . . . . . . . . . . **40**

**4.7 Números Piramidais** . . . . . . . . . . **41**

**4.8 Termo geral das colunas do Triângulo de Pascal** . . . . . . **42**

**4.9 Situações com o Triângulo de Pascal** . . . . . . . . **44**

**4.10 Queda Livre** . . . . . . . . . . **45**

**4.11 Lançamento Oblíquo** . . . . . . . . . . **46**

**5 PROPOSTA DE FORMAÇÃO PARA PROFESSORES** . . . . **48**

**6 CONCLUSÃO** . . . . . . . . . . **58**

**REFERÊNCIAS** . . . . . . . . . . **59**

APÊNDICE A – AVALIAÇÃO INICIAL APLICADA NA FORMAÇÃO DOS PROFESSORES . . . . . . . 60

APÊNDICE B – AVALIAÇÃO FINAL APLICADA NA FORMAÇÃO DOS PROFESSORES . . . . . . . 62

APÊNDICE C – AMOSTRA DE RESPOSTAS DAS AVALIAÇÕES APLICADAS NA FORMAÇÃO DOS PROFESSORES . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64

# 1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos tem havido um esforço conjunto para repensar o Ensino Médio no Brasil, de forma geral. A matemática, como uma ciência imprescindível à toda a humanidade tem sido repensada quanto a que conteúdos existirão no currículo do Novo Ensino Médio.

“A compreensão da Matemática é essencial para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional” (PCN, 1999, p. 251).

Segundo esse pressuposto, aprender matemática é fundamental para que o indivíduo tenha condições de tomar decisões mais acertadas, melhorando assim sua vida e a vida dos que o rodeiam.

Desse modo, está delegado à Matemática do Novo Ensino Médio, trazer novos conhecimentos e informações que serão necessários para que o indivíduo possa continuar aprendendo (PCN, 1999, p. 252).

Para tanto, é preciso reestruturar alguns dos temas tradicionais (PCN, 1999, p. 255). Desse modo, o currículo deve propor conteúdos que possibilite ao aluno o aprofundamento de seus conhecimentos sobre números e álgebra de forma conjunta com outras áreas do conhecimento.

Essa pesquisa mostra uma nova abordagem para o ensino de Progressões Aritméticas, indo das comumente já estudadas até as de ordem superior e mostrando sua aplicabilidade. Temos o seguinte questionamento: até que ponto os professores de matemática conhecem as progressões aritméticas de ordem superior e as ensinam em suas escolas?

Estudar sequências numéricas e geométricas sempre foi divertido e instigador devido à necessidade do uso da lógica para encontrar o padrão existente, a partir do qual será possível estruturar a teoria que norteará o estudo a partir daí. Atualmente no ensino médio são estudadas dois tipos de sequências: Progressões Geométricas (PG’s) e Progressões Aritméticas (PA’s).

A busca pelo padrão existente na sequência observada é o que motiva o observador, que sai à procura de conhecimentos prévios sobre geometria, contagem, posicionamento, simetria, dentre outros a fim de descobrir o que está acontecendo de uma etapa para a outra da sequência, ou seja, o que mudou de um termo para o outro, como foi essa mudança, que parâmetros influenciaram a mudança, enfim, buscam um padrão lógico, que possibilite o rastreamento das pistas deixadas em sua estrutura.

A escola tem o dever de mostrar o rumo para os alunos seguirem na busca do conhecimento matemático básico. No que diz respeito às Progressões Aritméticas, só estamos indo até a metade do caminho, pois estamos deixando de ensinar aquelas de ordem superior, talvez supondo que os estudantes ainda não tenham maturidade suficiente para absorver esse conhecimento.

No entanto, se as Progressões Aritméticas de ordem superior forem introduzidas em consórcio com Função Quadrática, Polinômios e Triângulo de Pascal, os alunos terão pré-requisitos importantes que serão facilitadores para compreensão do tema.

É sempre cobrado do estudante que ele use todos os conhecimentos adquiridos para prestarem exames, quer seja para concursos, vestibulares ou em pós- graduação e empregos. Os mais variados testes são preparados a fim de averiguarem os candidatos com maiores conhecimentos sobre diversas áreas da matemática e vários desses testes se configuram como Progressões Aritméticas de ordem superior, mais geralmente de ordem dois ou três.

Além disso, quão frustrado um jovem estudante ficará depois de vários anos de estudo e não ter recurso suficiente para resolver um problema como o seguinte: "Um homem suficientemente rico faz uma proposta para sua única filha a fim de animá-la a fazer um curso superior de dois anos de duração. A proposta é a de que ele, o pai, dará à filha uma quantia todos os dias do curso, seguindo a seguinte norma: 1,00 no primeiro dia, 2,00 no segundo dia, 4,00 no terceiro dia, 7,00 no quarto dia, 11,00 no quinto dia e assim por diante. Pergunta-se: a) quanto essa filha receberá no 400º dia do curso? b) quanto ela terá recebido quando finalizar o curso, supondo que os dois anos do curso não são bissextos?"

Pior será a frustração se ao invés de um jovem estudante, for um professor de matemática do Ensino Médio que ao se deparar com o problema citado perceber que não sabe como resolvê-lo.

Os administradores do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) já perceberam a oportunidade e incorporaram o tema no currículo do curso.

Por perceber que grandes lacunas no conhecimento matemático básico podem ser preenchidas, e por saber que a capacidade de raciocínio e resolução de problemas podem ser aumentadas consideravelmente, é que propomos este trabalho.

Observamos que existe uma pequena quantidade de trabalhos na literatura abordando as PA's de ordem superior, dentre os quais destacamos: Dlab (2011) e Lima (2015). É importante salientar que o nosso manuscrito fornece ao leitor uma abordagem distinta destes trabalhos.

Nosso objetivo é proporcionar material bibliográfico consistente para auxiliar na disseminação do conhecimento das PA's de ordem superior no ensino médio, apresentar aplicações ao resolver problemas de temas relevantes da matemática e propor um plano de capacitação para os professores da rede pública de ensino do extremo norte do Tocantins (Bico do Papagaio).

Para alcançar esse objetivo, iremos aplicar um questionário aos professores para obter informações sobre o conhecimento prévio dos professores sobre PA's de ordem superior com vistas em preparar uma formação para os mesmos.

No capítulo 2 mostraremos um breve histórico das PA's de ordem superior e os pesquisadores que se dedicaram ao seu estudo. Desse modo, faremos uma ponte entre épocas, observando os avanços alcançados.

No capítulo 3 apresentaremos a teoria necessária para a compreensão das PA's de ordens superiores. Usaremos os Números Figurados para exemplificar PA's de 2ª, 3ª, e 4ª ordens. O Triângulo de Pascal é também muito importante para esta pesquisa e será utilizado para exemplificar as PA's de ordens superiores. O capítulo finaliza mostrando a fórmula geral das PA's.

No capítulo 4 trataremos das aplicações das PA's de ordem superior, mostrando a relevância de seu estudo.

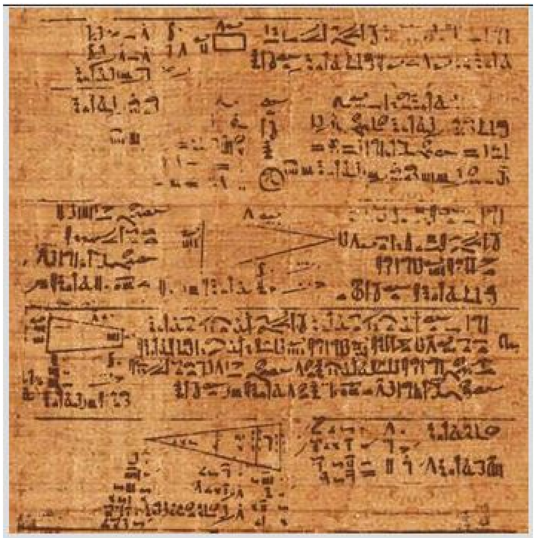
No capítulo 5 trataremos da proposta e execução de uma formação para os professores de matemática do extremo norte do Tocantins sobre as PA's de ordens superiores.

# 2 BREVE HISTÓRICO SOBRE AS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

A história mostra que as sequências numéricas fazem parte da trajetória humana desde o momento em que se começou a ideia de contagem, pois o próprio conjunto dos números naturais é uma Progressão Aritmética (PA), embora não houvesse necessidade de estudá-las com rigor matemático.

Com a evolução do conhecimento alguns registros mostram evidências de que diversos pesquisadores se interessaram por elas. Por exemplo: no Papiro de Rhind [1] consta o seguinte problema: "Divida 100 pães entre cinco homens de modo que as partes recebidas estejam em PA e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores". Percebe-se que as Progressões Aritméticas (PA's) foram estudadas pelos povos antigos (GEORGE, 2012).

Figura 1 – Papiro de Rhind



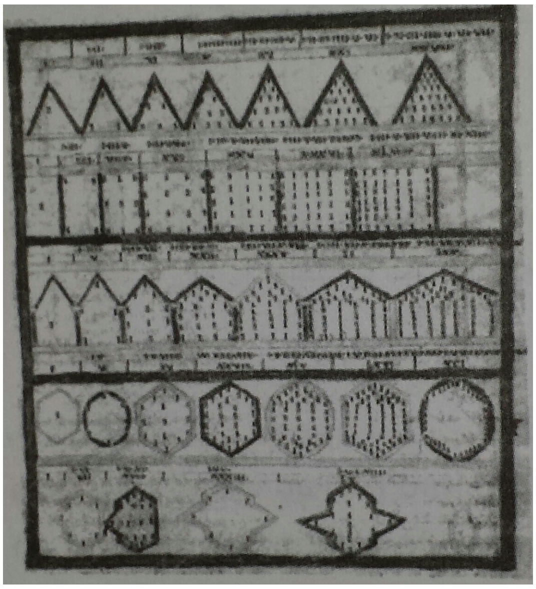
FONTE: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=41049 em 08/01/2018

Diofanto (século III d.c.) também se interessou por elas e deixou registrado em um de seus livros a seguinte situação: "Encontre três números em PA sabendo que a soma de dois qualquer deles é um quadrado". Nesse problema, Diofanto trata um número como sendo parte dos racionais positivos (LIMA, 2008).

[1] Papiro de Rhind ou papiro de Ahmes é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria.

Dos tempos da Escola Pitagórica vêm registros dos números figurados. Os pitagóricos tratavam os números como “coisas” e construíam as sequências usando pedrinhas dispostas em formato geométrico. Surgem nessa época os números triangulares, quadrados, pentagonais, Hexagonais, etc. Os números figurados podem ter sido a primeira manifestação de PA’s de segunda ordem (ROQUE, 2012). A figura 2 mostra um desenho medieval retratando números poligonais.

Figura 2 – Manuscrito Medieval contendo Números Figurados



FONTE: (CONTADOR, 2007)

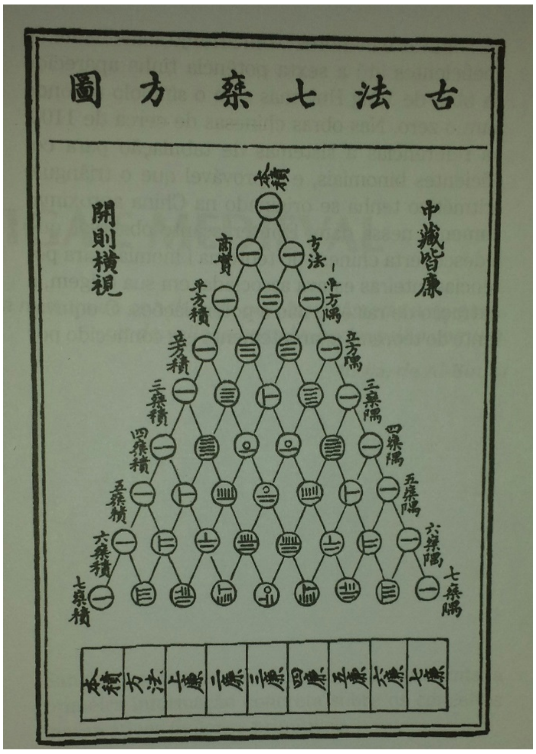
Os matemáticos do passado usavam os “gnomons”, que são figuras em formato de L formada por pontos que eram utilizadas para a realização de cálculos. Esses Gnomons, além de produzirem as sequências dos números quadrados também produzem os números retangulares. Cada termo dessas sequências geométricas eram constituídos de pontos (pedrinhas) que hoje podem ser associadas aos números e assim, relacioná-los às PA’s de segunda ordem.

Provavelmente os pitagóricos conheciam a expressão do termo geral bem como da soma dos termos das sequências de números figurados (BOYER; MERZBACH, 2012). Se isso for verdade, então temos que admitir que os pitagóricos também conheciam as PA’s de terceira ordem. Ainda segundo Boyer e Merzbach (2012, p. 133), Nicômaco de Gerasa também desenvolveu pesquisa com os número ímpares e conseguiu observar que os números cúbicos poderiam ser obtidos a partir deles fazendo-se as somas descritas a seguir: $1; 3+5; 7+9+11; 13+15+17+19; ...$ A sequência formada por essas somas é uma PA de ordem 3 dada por $(1,\ 8,\ 27,\ 64,\ ...)$. Boyer (2012, p. 149) menciona um trabalho chinês chamado “Precioso Espelho”, onde têm registrado algumas somas, dentre as quais estão:

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2 \; e \; 1+8+30+80+...+n^2(n+1)\frac{(n+2)}{3!}.$$

A estas somas, temos associadas duas sequências, a dizer: $(1,\ 4,\ 9,\ 16,...)$ e $(1,\ 8,\ 30,\ 80,...)$, que são PA's de ordem 2 e 4 , respectivamente. Além das somas polinomiais, o "Precioso Espelho" ainda traz o triângulo aritmético que no ocidente ficou amplamente difundido com o nome de Triângulo de Pascal como mostra a figura 3.

Figura 3 – Triângulo Aritmético na China




FONTE: (BOYER; MERZBACH, 2012)

O triângulo aritmético contém uma coleção de infinitas PA's, tendo uma representante de cada ordem dispostas em suas colunas, da ordem zero até a ordem $n$.

Historicamente percebe-se que não apenas as PA's tradicionais eram conhecidas dos povos antigos, mas também as de ordem 2, 3 e 4.

# 3 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS: ASPECTOS TEÓRICOS

Neste capítulo vamos definir, apresentar alguns resultados e expor diversos exemplos a respeito das Progressões Aritméticas de primeira ordem e de ordem superior. Mais detalhes podem ser encontrados em diversos livros, tais como, (PAIVA, 2005) e (BARROSO, 2008).

## 3.1 Progressão Aritmética de Primeira Ordem

As PA's de primeira ordem são bastante comuns e podem ser utilizadas para resolver problemas que possua uma grandeza com variação constante em relação a outra grandeza.

**Definição 3.1.** *Uma PA de primeira ordem é uma sequência numérica* $(a_n), n \in \mathbb{N}$ *definida recursivamente por* $a_{n+1} = a_n + r;\ n \geqslant 1$ *, onde o primeiro termo* $a_1$ *é um número dado. O número* $r$ *é chamado razão da progressão.*

É fácil verificar que se $r$ é positivo então, a progressão é crescente; se $r$ é negativo então, a progressão é decrescente e, se $r$ é nulo então, a progressão é constante.

**Exemplo 3.1.** *As sequências* $(1, 11, 21, 31, ...)$ *e* $(7, 11, 15, 19, ...)$ *são PA's crescentes de razão* $10$ *e* $4$*, respectivamente. As sequências* $(41, 31, 21, 11, ...)$ *e* $(-22, -25, -28, -31, ...)$ *são PA's decrescentes de razão* $-10$ *e* $-3$*, respectivamente. As sequências* $(-5, -5, -5, ...)$ *e* $(6, 6, 6, ...)$ *são PA's constantes, isto é, PA's de razão* $0$*.*

O próximo resultado nos fornece uma expressão para o termo geral $a_n$ de uma PA.

**Proposição 3.1.** *Se* $(a_n)$ *é uma PA de razão* $r$*, então* $a_n = a_1 + (n-1)r$*, para todo* $n$ *inteiro e positivo.*

**Prova:** Pela definição de PA temos: $a_2 - a_1 = r,\ a_3 - a_2 = r, ...,\ a_n - a_{n-1} = r$. Então, somando as $n-1$ igualdades, obtemos $a_n - a_1 = (n-1)r$ e, portanto $a_n = a_1 + (n-1)r$.

□

**Observação 3.1.** *Estas progressões aritméticas são conhecidas como PA's de* $1^a$ *ordem devido ao fato de seu termo geral ser um polinômio de grau 1 em* $n$*.*

Em seguida, apresentamos um exemplo contextualizado envolvendo PA's de 1ª ordem.

**Exemplo 3.2.** *Uma equipe de pesquisadores estava estudando o impacto da temperatura sobre o crescimento de uma espécie de feijão em função do tempo e obtiveram a seguinte tabela, a partir do momento em que a ponta da planta saiu do solo:*

Tabela 1 – Altura de uma planta em função do tempo

| **Desenvolvimento da planta** | |
|---|---|
| **Tempo (dias)** | **Altura (cm)** |
| 1 | 1,00 |
| 2 | 1,75 |
| 3 | 2,50 |
| 4 | 3,25 |
| 5 | 4,00 |

FONTE: Autor (2017)

Se a planta continuar crescendo seguindo o padrão dos cinco primeiros dias, qual será sua altura no 10º dia?

**Solução:**

Com os dados da tabela, percebe-se que a altura descreve uma sequência onde a diferença $a_n - a_{n-1} = 0,75$. Isto caracteriza uma PA de primeira ordem. Sendo assim, a proposição 3.1 se aplica. Logo teremos: $a_n = a_1 + (n-1)r$, isto é, $a_{10} = 7,75$. Portanto, depois de 10 dias, a planta estará com 7,75 cm de altura. □

Tão importante quanto a expressão do termo geral de uma PA, é a expressão da soma dos seus $n$ primeiros termos, denotada por $S_n$.

**Proposição 3.2.** *Seja $(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_n)$, uma PA de razão $r$. Então a soma dos $n$ primeiros termos será dada por $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.*

**Prova:** Escrevendo $S_n$ de dois modos diferentes:
$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$
$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$
somando membro a membro as duas equações tem-se
$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$ observando que de uma parênteses para o seguinte, a primeira parcela da soma cresce de $r$ unidades, ao passo que a segunda parcela decresce de $r$ unidades. Isso faz com que dentro de cada parênteses a soma seja a mesma. Então, $2S_n = (a_1 + a_n)n$, de onde se tem

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

□

Abaixo, enunciamos uma importante proposição que mostra a relação entre a soma dos termos de uma PA de primeira ordem e polinômios do 2 grau. Conferir, por exemplo, (MORGADO; CARVALHO, 2015)

**Proposição 3.3.** *Todo polinômio do segundo grau (na variável n), desprovido do termo independente é a expressão da soma dos termos de alguma PA de primeira ordem.*

**Prova:** De fato,

$$\begin{aligned} S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} &= \frac{[a_1+a_1+(n-1)r]n}{2} \\ &= \frac{2a_1n+rn^2-rn}{2} \\ &= \frac{r}{2}n^2+(a_1-\frac{r}{2})n \end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.3.** *Dada a PA (6, 10, 14, 18, ...) determine:*
*(a) o valor da soma dos 30 primeiros termos usando a proposição 3.2.*
*(b) o valor da soma usando a expressão polinomial dada pela proposição 3.3.*

***Solução:***

***(a)*** *Para usar a proposição 3.2, precisamos também da proposição3.1. Como* $a_1 = 6$ *e* $r = 4$*, teremos* $a_{30} = 122$*.*
*Então* $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{(6+122)30}{2} = 1920.$
*(b) Como a proposição 3.3 diz, a representação polinomial da soma dos termos de uma PA é*

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{r}{2}n^2+(a_1-\frac{r}{2})n \\ &= \frac{4}{2}n^2+(6-\frac{4}{2})n \\ &= 2n^2+4n. \end{aligned}$$

*Como* $n = 30$*, teremos* $S_{30} = 2.30^2+4.30 = 2.900+120 = 1920$

□

Acreditamos que os exemplos dados são suficientes para esclarecer a teoria básica que envolve as PA's de primeira ordem.

## 3.2 Progressão Aritmética de Ordem Superior

Nesta seção, será evidenciada a existência de PA's de ordem superior em algumas situações do cotidiano da matemática, como por exemplo, o triângulo de Pascal e as sequências dos números figurados. Além disto, será enunciado e demostrado o método para se identificar a ordem de uma PA.

A partir de uma sequência $(a_n)$ define-se o chamado operador diferença $(\Delta a_n)$, que constitui uma nova sequência, definida por $(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n)$. Desde que $(\Delta a_n)$ forma uma nova sequência, podemos novamente encontrar o operador diferença, isto é, $(\Delta[\Delta a_n])$ $= (\Delta^2 a_n)$, e assim por diante, $(\Delta^3 a_n), (\Delta^4 a_n), ..., (\Delta^k a_n)$, etc...

**Definição 3.2.** *Uma sequência $(a_n)$ será uma PA de ordem $k$ se o operador diferença $(\Delta^k a_n)$ for uma PA constante, ou seja, uma sequência $(a_n)$ será uma PA de ordem 1, se o operador diferença $(\Delta a_n)$ for uma PA constante; será uma PA de ordem 2, se o operador diferença $(\Delta^2 a_n)$ for uma PA constante, e assim por diante.*

**Observação 3.2.** *a) Decorre da definição acima que uma sequência $(a_n)$ é uma PA de ordem 2 se $(\Delta a_n)$ for uma PA de primeira ordem; é uma PA de ordem 3 se $(\Delta^2 a_n)$ for uma PA de primeira ordem, e assim por diante; b) Temos: $\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$.*

**Exemplo 3.4.** *De acordo com a observação 3.2, sequência $b_n = (3, 7, 13, 21, 31, ...)$ é uma PA de segunda ordem, pois $(\Delta b_n) = (a_{n+1} - a_n) = (7-3,\ 13-7,\ 21-13,\ 31-21, ...) = (4, 6, 8, 10, ...)$ é uma PA de primeira ordem cuja razão $r$ é 2.*

**Exemplo 3.5.** *A sequência $(a_n) = (2, 8, 20, 40, 70, 112, 168...)$ é uma PA de terceira ordem, pois $(\Delta a_n) = (6, 12, 20, 30, 42, 56, ...)$, $(\Delta^2 a_n) = (6, 8, 10, 12, 14, ..)$, $(\Delta^3 a_n) = (2, 2, 2, 2, 2, ...)$.*

**Exemplo 3.6.** *A sequência $(a_n) = (1, 6, 20, 50, 105, 196, ...)$ é uma PA de quarta ordem, pois, $(\Delta a_n) = (5, 14, 30, 55, 91, ...)$, $(\Delta^2 a_n) = (9, 16, 25, 36, ...)$, $(\Delta^3 a_n) = (7, 9, 11, ...)$ e $(\Delta^4 a_n) = (2, 2, ...)$*

A proposição a seguir fornece uma importante relação entre Progressões Aritméticas e Funções Polinomiais. Sua demonstração pode ser encontrada em Morgado et al.(2005).

**Proposição 3.4.** *Toda sequência na qual o termo de ordem $n$ é um polinômio em $n$, de grau $k$, é uma Progressão Aritmética de ordem $k$ e, reciprocamente, se $(a_n)$ é uma Progressão Aritmética de ordem $k$, então $a_n$ é um polinômio de grau $k$ em $n$.*

O exemplo a seguir confirma a proposição 3.4.

**Exemplo 3.7.** *A sequência $a_n = (5, 8, 13, 20, ...)$ é uma PA de segunda ordem e seu termo geral é $a_n = n^2 + 4$.*

Aqui foi exemplificado exemplos de PA's de ordem 1, 2, 3 e 4. Naturalmente percebe-se que não há limite para a ordem de uma PA, porém há mais ocorrências em fenômenos matemáticos e físicos, das de grau 1, 2 e 3.

As PA's de ordem 2 são bastante presentes na matemática básica. Outras manifestações interessantes desse tipo de PA são as sequências dos números figurados que estarão em foco a seguir.

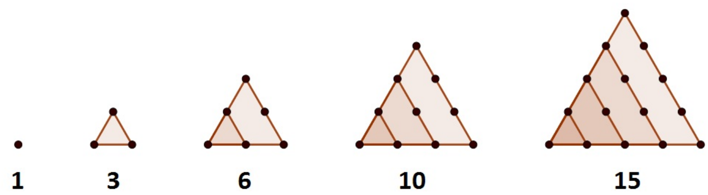
## 3.3 Números Figurados

Os números figurados são representações geométricas formadas por pontos e associados a um número $F$, de modo que $F$ é a quantidade de pontos necessários para formar tal figura. Mais precisamente, nesta seção apresentaremos os **Números Triangulares, Quadrados, Pentagonais, Hexagonais, Retangulares e Piramidais**.

### 3.3.1 Números Triangulares

Os números triangulares são bem antigos e remontam à época dos pitagóricos. Sua estrutura pode ser vista na figura 4.

Figura 4 – Números Triangulares




Fonte: Autor (2017)

Note que os números triangulares formam a sequência $(T_n) = (1,3,6,10,15,...)$. Aplicando o operador diferença a $(T_n)$, obtém-se $(\Delta T_n) = (2,3,4,5,...)$. Portanto, de acordo com a definição 3.2, a sequência dos números Triangulares é uma PA de segunda ordem.

A proposição a seguir define o termo geral da sequência dos números triangulares.

**Proposição 3.5.** *Seja* $(T_n) = (1,3,6,10,15,...)$ *a sequência dos números triangulares, então* $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

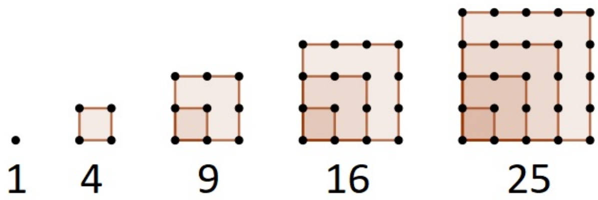
**Prova:** Seja $(b_n) = (1, 2, 3, 4, ..., n)$ a sequência dos números naturais. Note que: $T_1 = b_1$, $T_2 = b_1 + b_2$, $T_3 = b_1 + b_2 + b_3$, ..., $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ... + b_n$. Como $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ... + b_n$ é a soma dos $n$ primeiros números naturais, usando a proposição 3.2 temos $T_n = \frac{(b_1 + b_n)n}{2} = \frac{(1+n)n}{2}$. □

Esse resultado é muito importante e será usado no processo de obtenção do termo geral de uma PA de ordem superior. Conferir seção 3.5.

### 3.3.2 Números Quadrados

Assim como os número triangulares, os números quadrados também são sequências bem antigas no meio matemático e sua particularidade mais interessante é que cada termo desta sequência pode ser adquirido a partir dos termos da sequência dos números triangulares.

Figura 5 – Números Quadrados



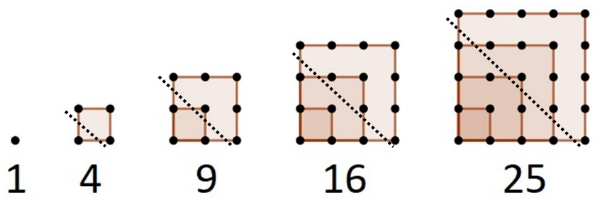

Fonte: Autor (2017)

Os Números Quadrados estão relacionados com a sequência $(q_n) = (1, 4, 9, 16, ...)$. Aplicando o operador diferença, temos $(\Delta q_n) = (3, 5, 7, 9, ...)$, o que garante que os números quadrados é uma PA de segunda ordem.

**Proposição 3.6.** *Dada a sequência* $(q_n) = (1,\ 4,\ 9,\ 16, ...)$, *então* $q_n = n^2$; $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

**Prova:** Observando a figura 5, vemos que $q_n = T_n + T_{n-1}$, a partir do segundo termo. Daí vem que $q_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = n^2$. □

Figura 6 – Números Quadrados em função dos Números Triangulares



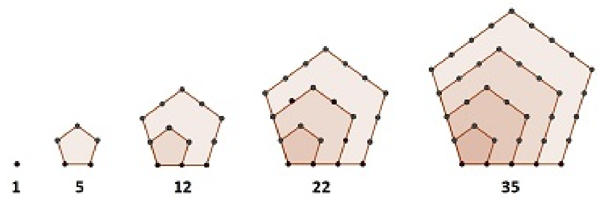

Fonte: Ciryno, (2006)

Essa relação entre os Números Triangulares e os Números Quadrados pode ser conferida em (CYRINO, 2006).

### 3.3.3 Números Pentagonais

Os Números Pentagonais dá prosseguimento à lista de números figurados. Seu formato geométrico pode ser observado na figura 7.

Figura 7 – Números Pentagonais




Fonte: Autor (2017)

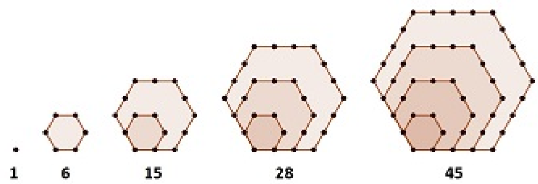
Esta sequência geométrica está associada à sequência $(p_n) = (1, 5, 12, 22, 35, ...)$. de onde vem $(\Delta p_n) = (4, 7, 10, 13, ...)$ e $(\Delta^2 p_n) = (3, 3, 3, 3, ...)$, que é uma PA estacionária, portanto a sequência dos números pentagonais é uma PA de segunda ordem.

No capítulo 4 iremos deduzir a expressão do termo geral e da soma dos $n$ primeiros números pentagonais.

### 3.3.4 Números Hexagonais

Do mesmo grupo que os triangulares, quadrados e pentagonais, são os números hexagonais cuja representação geométrica pode ser vista na figura 8.

Figura 8 – Números Hexagonais




Fonte: Autor (2017)

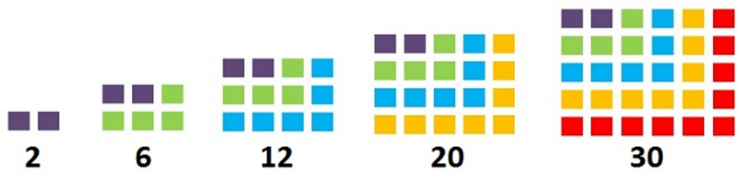
Os Números hexagonais estão associados à sequência $(h_n) = (1, 6, 15, 28, 45, ...)$. Assim, $(\Delta h_n) = (5, 9, 13, 5, ...)$ e então $(\Delta^2 h_n) = (4, 4, ...)$. Portanto, os Números Hexagonais formam uma PA de 2ª ordem.

No capítulo 4 será determinada a expressão do termo geral dessa sequência.

### 3.3.5 Números Retangulares

O Gnomon (figuras em forma de L) é a principal ferramenta para a construção dos Números Retangulares (figura 9), bastando apenas que seja definido a quantidade inicial de pontos da primeira figura. A partir dela conhece-se a forma do Gnomon a ser usado para construir os próximos elementos da sequência.

Figura 9 – Números Retangulares




Fonte: Autor (2017)

Se o primeiro elemento tiver um ponto, os gnomons terão formato $n$ x $n$ e a sequência gerada é a dos Números Quadrados, da figura 5.

Se o primeiro elemento tiver dois pontos, os gnomons terão a forma $n$ x $(n+1)$ e a sequência formada será a da figura 9 e será associada à sequência $(r_n) = (2, 6, 12, 20, 30, ...)$, cujas diferenças formam a sequência $(\Delta r_n) = (4, 6, 8, 10, ...)$, $(\Delta^2 r_n) = (2, 2, 2, 2, ...)$. Portanto, a sequência dos números retangulares do tipo $n$ x $(n+1)$ é uma PA de segunda ordem.

**Proposição 3.7.** *Toda sequência de números retangulares está associada a uma PA de $2^a$ Ordem.*

**Prova:** Um número retangular possui base medindo $(n+i)$ e altura $(n+j)$, o que fornece o total $R$ de pontos definido por $R_n = (n+i)(n+j) = n^2 + nj + ni + ij = n^2 + (i+j)n + ij$. Como $R_n$ é de segundo grau em $n$, pela proposição 3.4, a prova fica completa. □

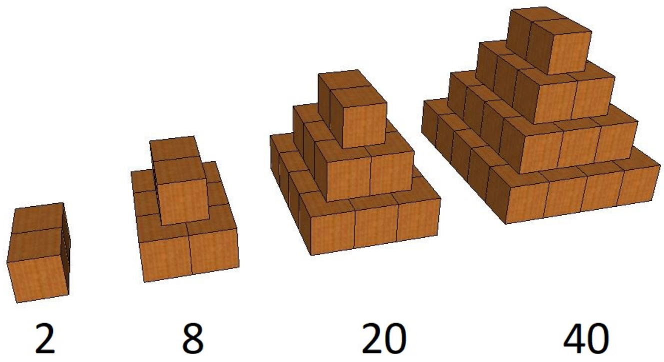
**Observação 3.3.** *Os números triangulares, quadrados, retangulares, pentagonais, hexagonais, ..., n-gonal, descritos como figurados, produzem Progressões Aritméticas de segunda ordem.*

### 3.3.6 Números Piramidais

A definição de número piramidal é a seguinte: “Chama-se número piramidal de base triangular, quadrada, pentagonal e assim por diante, ao número obtido pela soma dos $n$ primeiros números poligonais respectivamente triangulares, quadrados, pentagonais, retangulares e assim por diante” (PEREIRA, 2014).

A figura 10 mostra o exemplo de uma sequência de números piramidais de base retangular.

Figura 10 – Números Piramidais de Base Retangular




Fonte: Autor (2017)

Os Números Piramidais está associada à sequência $(P_n) = (2, 8, 20, 40, 70, ...)$. Assim, $(\Delta p_n) = (6, 12, 20, 30, ...)$, $(\Delta^2 p_n) = (6, 8, 10, ...)$ e $(\Delta^3 p_n) = (2, 2, 2, ...)$. Portanto, $(P_n)$ é uma PA de 3ª Ordem.

## 3.4 O Triângulo de Pascal

Um triângulo numérico muito interessante para o estudo das Progressões Aritméticas é o que atualmente é conhecido por Triângulo de Pascal. Ele é muito utilizado em vários ramos da matemática pois seus elementos podem ser escritos tanto na forma de números inteiros positivos quanto no formato de números binomiais. A figura 11 mostra as duas configurações modernas.

Figura 11 – Triângulo de Pascal e suas configurações

| | |
|---|---|
| $\binom{0}{0}$ | 1 |
| $\binom{1}{0}\binom{1}{1}$ | 1 1 |
| $\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$ | 1 2 1 |
| $\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$ | 1 3 3 1 |
| $\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$ | 1 4 6 4 1 |
| $\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$ | 1 5 10 10 5 1 |
| $\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$ | 1 6 15 20 15 6 1 |
| $\binom{7}{0}\binom{7}{1}\binom{7}{2}\binom{7}{3}\binom{7}{4}\binom{7}{5}\binom{7}{6}\binom{7}{7}$ | 1 7 21 35 35 21 7 1 |
| $\binom{8}{0}\binom{8}{1}\binom{8}{2}\binom{8}{3}\binom{8}{4}\binom{8}{5}\binom{8}{6}\binom{8}{7}\binom{8}{8}$ | 1 8 28 56 70 56 28 8 1 |

Fonte: Autor (2017)

Aqui temos o triângulo de Pascal escrito até a linha 8, porém ele possui infinitas linhas e faremos estudos sobre as PA's existentes nele.

Na configuração da direita, podem ser observadas PA's de primeira ordem e de ordens superiores, nas suas colunas.

O Triângulo de Pascal, que sempre fascinou o mundo da matemática por sua beleza, simplicidade de construção, propriedades e aplicabilidade, terá mais uma vez lugar de destaque.

Em minhas pesquisas, não encontrei nenhuma publicação que utilizasse a estrutura do Triângulo de Pascal para a exploração e o ensino de PA em alguma de suas ordens.

Cada uma das colunas é uma Progressão Aritmética de uma referida ordem, de modo que percorrendo as colunas da esquerda para a direita vamos encontrando PA's cuja ordem é uma unidade a mais que a anterior.

No capítulo 4 usaremos a fórmula para encontrarmos o termo geral das PA's existentes nas colunas do triângulo.

Outras variações de arranjos com números inteiros no formato triangular surgiram como exercícios, como mostra o exemplo 3.8.

**Exemplo 3.8.** *No triângulo da figura 12, determine:*
*(a) O primeiro elemento da 31ª linha.*
*(b) a soma dos elementos da 31ª linha.*

Figura 12 – Arranjo triangular com os Números Ímpares

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 3 | 5 | | | | |
| 7 | 9 | 11 | | | |
| 13 | 15 | 17 | 19 | | |
| 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | |
| 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 |

Fonte: Morgado et al. (2005)

**Exemplo 3.9.** *Dividem os números naturais em blocos do modo seguinte:* $(1)$, $(2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9,10)$, $(11,12,13,14,15),...$. *Em seguida, suprimem-se os blocos que contêm um número par de elementos, formando-se o quadro:*

Figura 13 – Triângulo numérico com linha alternadas

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 4 | 5 | 6 | | |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

Fonte: Morgado et al. (2005)

Determine:

**a)** o primeiro elemento da linha $k$.

**b)** a soma dos elementos da linha $k$.

**c)** a soma dos elementos das $k$ primeiras linhas.

Na seção 3.5, vamos propor algumas fórmulas para o termo geral de PA's de primeira ordem e de ordens superiores, que serão úteis para resolver prolemas como os que estão nos exemplos 3.8 e 3.9. Estes exemplos serão resolvidos como aplicação da fórmula geral das PA's no capítulo 4.

## 3.5 Termo geral das Progressões Aritméticas

Atualmente em problemas que envolvem PA's são usadas basicamente duas fórmulas: $a_n = a_1 + (n-1)r$ e $s_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$. Estas fórmulas são suficientes para resolver qualquer problema de PA's de primeira ordem porém, não são tão eficientes para as PA's de ordens superiores.

Nesta seção, iremos seguir uma sequência lógica de procedimentos que culminará com a dedução de uma fórmula que utiliza coeficientes binomiais e se mostrará de grande utilidade na resolução de problemas que envolvam PA's de qualquer ordem.

A partir de agora vamos inserir uma notação que irá regulamentar os procedimentos na utilização das fórmulas com coeficientes binomiais.

**Proposição 3.8.** *Se* $(a_n) = (a_1,\ a_2, ..., a_n, ...)$ *é uma PA de primeira ordem de razão* $r$ *então,* $a_n = \binom{n-1}{0}a_1 \ + \ \binom{n-1}{1}r$.

**Prova:** Tomando a fórmula usual do termo geral $a_n = a_1 \ + \ (n-1)r$, podemos substituir os coeficientes de $a_1$ e $r$ pelos coeficientes binomiais $\binom{n-1}{0}$ e $\binom{n-1}{1}$, respectivamente. O que nos dá

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 \; + \; \binom{n-1}{1} r.$$

□

É verdade que para as PA's de primeira ordem, será muito mais cômodo utilizar a fórmula que já está popularizada. No entanto, é importante que esse novo formato seja demonstrado para todos os casos, visto que queremos uma fórmula geral.

A proposição a seguir fornece uma expressão para o termo geral de uma PA de segunda ordem.

**Proposição 3.9.** *Seja* $(b_n) = (b_1, b_2, ..., b_n, ...)$ *uma PA de segunda ordem e considere os operadores diferenças* $(\Delta b_n) = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ *e* $(\Delta^2 b_n) = (r, r, ..., r, ...)$ *associados a* $(b_n)$*. Então:*

$$b_n = \binom{n-1}{0} b_1 \; + \; \binom{n-1}{1} a_1 \; + \; \binom{n-1}{2} r.$$

.

**Prova:** Como $(\Delta b_n) = (a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1,\ a_1 + r,\ a_1 + 2r,\ a_1 + 3r, ..., a_1\ +\ (n-1)r)$, temos $b_1 = b_1$, $b_2 = b_1 + a_1$, $b_3 = b_1 + 2a_1 + r$, $b_4 = b_1 + 3a_1 + 3r$, $b_5 = b_1 + 4a_1 + 6r$, $b_6 = b_1 + 5a_1 + 10r$, ...
Assim, desde que pela proposição 3.5, o termo geral da sequência $(T_n) = (1, 3, 6, 10, 15, ...)$ é dado por $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, temos: $b_n = b_1 + (n-1)a_1 + (T_{n-2})r$, onde

$T_{n-2} = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2} = \binom{n-1}{2}$, portanto,

$$b_n = \binom{n-1}{0} b_1 + \binom{n-1}{1} a_1 + \binom{n-1}{2} r.$$

□

Essa fórmula fornece o termo geral de uma PA de segunda ordem em função apenas de $n$ e dos primeiros termos das sequências $(b_n)$, $(\Delta b_n)$ e $(\Delta^2 b_n)$.

O próximo resultado será fundamental para a demonstração do termo geral da PA de 3ª ordem.

**Lema 3.1.** *Seja* $(Q_n) = (1, 4, 10, 20, 35, 56, ...)$*. Então,* $Q_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

**Prova:** Usando o fato de que toda PA de ordem k possui o termo geral como sendo um polinômio de grau k em $n$, vamos primeiro descobrir a ordem de $Q_n$ e em seguida usar as teorias de polinômios para encontrar o termo geral. $(Q_n) = (1, 4, 10, 20, 35, 56, ...)$, $(\Delta Q_n) = (3, 6, 10, 15, 21, ...)$, $(\Delta^2 Q_n) = (3, 4, 5, 6, ...)$ e $(\Delta^3 Q_n) = (1, 1, 1, 1, ...)$, concluímos que a ordem de $(Q_n)$ é 3 e, consequentemente, seu termo geral é representado por um polinômio $Q(n)$ de 3º grau. Isto é: $Q_n = an^3+bn^2+cn+d$, de modo que $Q(1)=1,\ Q(2)=4,\ Q(3)=10$ e $Q(4)=20$. Teremos então as seguintes equações: $a+b+c+d=1,\ \ 8a+4b+2c+d=4,\ \ 27a+9b+3c+d=10$ e $64a+16b+4c+d=20$. Resolvendo o sistema, encontram-se: $a=\dfrac{1}{6},\ b=\dfrac{1}{2},\ c=\dfrac{1}{3}$ e $d=0$. Portanto,

$$Q_n = \frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3} = \frac{n.(n+1).(n+2)}{6}.$$

. $\square$

Com o objetivo de chegar na fórmula do termo geral de uma PA de ordem $k$, o resultado a seguir apresenta o termo geral da PA de ordem 3.

**Proposição 3.10.** *Seja* $(c_n)=(c_1,\ c_2,\ c_3,\ ...,\ c_n,...)$ *é uma progressão Aritmética de terceira ordem e* $(\Delta c_n)=(b_1,\ b_2,\ b_3,\ ...,\ b_n,...)$, $(\Delta^2 c_n)=(a_1,\ a_2,\ a_3,...\ ,\ a_n,...)$ *e* $(\Delta^3 c_n)=(r,\ r,\ r,\ r,...)$, *então*

$$c_n \ = \ \binom{n-1}{0}c_1 \ + \ \binom{n-1}{1}b_1 \ + \ \binom{n-1}{2}a_1 \ + \ \binom{n-1}{3}r.$$

**Prova:** Vamos escrever recursivamente os elementos de $(c_n)$.
$c_1 = c_1$
$c_2 = c_1+b_1$
$c_3 = c_1+2b_1+a_1$
$c_4 = c_1+3b_1+3a_1+r$
$c_5 = c_1+4b_1+6a_1+4r$
$c_6 = c_1+5b_1+10a_1+10r$
$c_7 = c_1+6b_1+15a_1+20r$
$c_8 = c_1+7b_1+21a_1+35r$
.......................................
$c_n = c_1+(n-1).b_1+T_{n-2}.a_1+Q_{n-3}.r$,
onde $T_n$ é um número triangular e $Q_n$ é o resultado apresentado através do lema 3.1. Desse modo,

$c_n = c_1 \ + \ (n-1)b_1 \ + \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}a_1 \ + \dfrac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6}r$. Como, $1=\binom{n-1}{0}$, $(n-1)=\binom{n-1}{1}$, $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}=\binom{n-1}{2}$ e $\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}=\binom{n-1}{3}$, temos

$$c_n = \binom{n-1}{0}c_1+\binom{n-1}{1}b_1+\binom{n-1}{2}a_1+\binom{n-1}{3}r.$$

. $\square$

Poderíamos continuar demonstrando as expressões do termo geral de PA's de ordem 4, 5, 6, etc, no entanto, este não é o objetivo deste trabalho. De qualquer forma, seguindo a regularidade das fórmulas do termo geral das PA's de segunda e terceira ordem demonstradas acima (Proposições 3.9 e 3.10), podemos intuir o resultado seguinte (que poderá ser justificado em um trabalho futuro).

**Proposição 3.11.** *Seja* $(a_n) = (a_1^{[0]}, a_2^{[0]}, ..., a_n^{[0]}, ...)$ *uma PA de ordem* $k$ *e considere os operadores diferença* $(\Delta^j a_n) = (a_1^{[j]}, a_2^{[j]}, a_3^{[j]}, ..., a_n^{[j]}, ...), j = 1, 2, ..., k$ *onde* $a_i^{[k]} = r$; $i = 1, 2, 3, ...$. *Então:*

$$\begin{aligned} a_n &= \binom{n-1}{0} a_1^{[0]} + \binom{n-1}{1} a_1^{[1]} + \binom{n-1}{2} a_1^{[2]} + \ ... \ + \binom{n-1}{k-1} a_1^{[k-1]} + \binom{n-1}{k} a_1^{[k]} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-1}{i} a_1^{[i]}. \end{aligned}$$

A notação $a_n^{[j]}$ é apenas para identificação da posição da sequência no conjunto de sequências das diferenças de $a_n$

**Observação 3.4.** ***a)*** *Se* $k = 1$, *então* $a_n = a_1 + (n-1)r$, *que é a fórmula conhecida para o termo geral de uma PA de 1ª ordem;* ***b)*** *Se* $a_n$ *é uma PA de ordem* $k$, *então a sequência das somas parciais de* $a_n$, *denotada por* $(S_n)$, *onde* $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, *é uma PA de ordem* $k+1$.

Em se tratando de sequências, a maioria dos problemas poderão ser resolvidos a partir da expressão do termo geral da mesma. As PA's de ordem superior, principalmente as de ordem maior que dois, sempre foram desafiadoras no sentido de encontrar essa expressão do termo geral. A proposição 3.11 vem suprir a necessidade de um direcionamento seguro para a obtenção do termo geral de uma PA de ordem qualquer.

Agora o professor, aluno ou pesquisador poderão lançar mão dessa fórmula para encurtar caminho e diminuir o tempo gasto na resolução de problemas que envolvam tais sequências.

# 4 APLICAÇÕES DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Neste capítulo, apresentaremos algumas das aplicações das PA's, tanto na própria matemática básica como também na física. O objetivo aqui não é cobrir todas as aplicações possíveis, mas mostrar a aplicabilidade da fórmula do termo geral das PA's de ordem superior. Iremos propor e resolver diversos problemas interessantes com o uso dessa fórmula.

## 4.1 Pai e Filha

**Problema 4.1.** *Um homem suficientemente rico faz uma proposta para sua única filha a fim de animá-la a fazer um curso superior de dois anos de duração. A proposta é a de que ele, o pai, dará à filha uma quantia todos os dias do curso, seguindo a seguinte norma: 1,00 no primeiro dia, 2,00 no segundo dia, 4,00 no terceiro dia, 7,00 no quarto dia, 11,00 no quinto dia e assim por diante. Pergunta-se: a) quanto essa filha receberá no 400º dia do curso? b) quanto ela terá recebido quando finalizar o curso, supondo que os dois anos do curso não são bissextos?*

**Solução:**

**a)** Percebe-se que a sequência envolvida é $(a_n) = (1, 2, 4, 7, 11, ...)$. Devemos determinar o valor do 400º termo. Aplicando sucessivamente o operador diferença temos $(\Delta a_n) = (1, 2, 3, 4, ...)$ e $(\Delta^2 a_n) = (1, 1, 1, 1, ...)$. Logo, $(a_n)$ é uma PA de segunda ordem. Então pela proposição 3.9 temos:

$$a_n = \binom{n-1}{0}1 + \binom{n-1}{1}1 + \binom{n-1}{2}1 \quad \Rightarrow \quad a_{400} = \binom{399}{0}1 + \binom{399}{1}1 + \binom{399}{2}1 = 79801.$$

Isto é, a filha receberá a quantia de R\$ 79.801,00 no 400º dia após ter iniciado o curso.

**b)** Supondo que o curso tenha duração de dois anos não bissextos, devemos entender que a filha receberá do pai 730 parcelas. Daí podemos pensar que a sequência $(S_n) = (1, 3, 7, 14, ...)$ coleciona as somas parciais de $a_n$. Aplicando sucessivamente o operador diferença à $(S_n)$ teremos: $(\Delta S_n) = (2, 4, 7, 11, ...)$, $(\Delta^2 S_n) = (2, 3, 4, ...)$ e $(\Delta^3 S_n) = (1, 1, ...)$. Logo, $(S_n)$ é uma PA de 3ª ordem e pela proposição 3.10 teremos:

$$S_n = \binom{n-1}{0}1 + \binom{n-1}{1}2 + \binom{n-1}{2}2 + \binom{n-1}{3}1 = \binom{729}{0}1 + \binom{729}{1}2 + \binom{729}{2}2 + \binom{729}{3}1 = 64571419.$$

Isto quer dizer que ao fim dos dois anos de curso, a filha terá recebido um montante de R\$ 64.571.419. $\square$

## 4.2 Situações de arranjos numéricos em formato triangular

**Problema 4.2.** *O triângulo numérico da figura 14 foi confeccionado organizando os números ímpares em linhas, de modo que na primeira linha tenha o número 1, na segunda linha tenha os números 3 e 5 e assim por diante.*

Figura 14 – Triângulo numérico com números ímpares

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| 3 | 5 | | | | |
| 7 | 9 | 11 | | | |
| 13 | 15 | 17 | 19 | | |
| 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | |
| 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 |

FONTE: Morgado et al. (2005)

***Com base na figura 14:***
*a) Determine o 1º elemento da 31ª linha.*
*b) Determine a soma dos elementos da 31ª linha.*

**Solução:**

**a)** Observe que a 1ª coluna é composta pelos elementos da sequência $(a_n) = (1, 3, 7, 13, ...)$. Aplicando sucessivamente o operador diferença temos $(\Delta a_n) = (2, 4, 6, ...)$ e $(\Delta^2 a_n) = (2, 2, ...)$. Logo, temos uma PA de segunda ordem. Então, pela proposição 3.9, temos:
$a_n = \binom{n-1}{0}1 + \binom{n-1}{1}2 + \binom{n-1}{2}2$, e então, $a_{31} = \binom{30}{0}1 + \binom{30}{1}2 + \binom{30}{2}2 = 931$.
Portanto, o primeiro elemento da 31ª linha é 931.

**b)** Vamos construir a sequência $S_n$ que representará a soma dos n primeiros termos procurados. Outra observação importante na resolução é que em cada linha há $i$ elementos, onde $i$ é o número da linha em questão. Desse modo, na 31ª linha haverá uma PA de 1ª ordem de razão 2, com 31 elementos. Assim, a sequência que compõe a 31ª linha será $(b_n) = (931, 933, 935, ...)$. Observe que a sequência das somas parciais é dada por $(S_n) = (931, 1864, 2799, 3736, ...)$. Aplicando sucessivamente operador diferença temos $(\Delta S_n) = (933, 935, 937, ...)$ e $(\Delta^2 S_n) = (2, 2, 2, ...)$. Assim, $(b_n)$ é uma PA de 2ª ordem. Portanto, pela proposição 3.9,

$$S_{31} = \binom{30}{0}931 + \binom{30}{1}933 + \binom{30}{2}2 = 29791.$$

□

**Observação 4.1.** *Nesta resolução, não foi buscado o caminho mais curto. A intenção foi mostrar uma outra alternativa para se resolver problemas de soma de termos de uma PA.*

O problema a seguir foi extraído do site da Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas (OBMEP).

## 4.3 Castelo de cartas

**Problema 4.3.** *A figura 15 mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. De quantos baralhos de 52 cartas precisamos, no mínimo, para formar um castelo de 10 andares?*

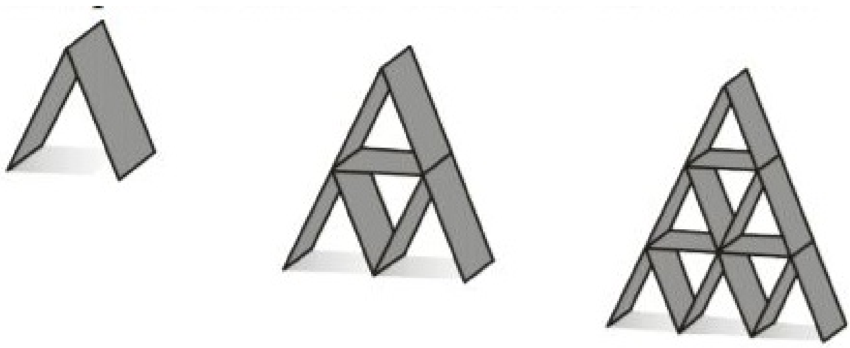


Figura 15 – Castelo de Cartas
FONTE: https://matemátia.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=79

**Solução:** A resolução do problema apresentado na figura 15 consiste basicamente em descobrir o décimo termo da sequência $(a_n) = (2,7,15,26,...)$. Aplicando sucessivamente o operador diferença temos $_n = (5,8,11,...)$ e $\Delta^2 a_n = (3,3,3,...)$. Logo temos uma PA de segunda ordem. Então, pela proposição 3.9 temos:

$$\begin{aligned} a_{10} &= \binom{9}{0}2+\binom{9}{1}5+\binom{9}{2}3 \\ &= 155. \end{aligned}$$

Como um baralho tem 52 cartas, serão necessários, no mínimo, 3 baralhos.

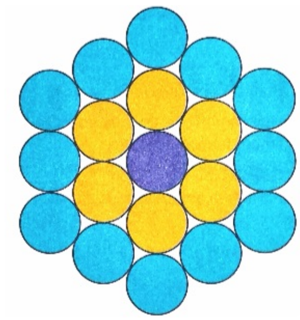
□

O problema a seguir foi usado em um exame vestibular pela UERJ e proposto como desafio por (BALESTRI, 2016) em um livro do ensino médio dentro do conteúdo de Progressões Aritméticas.

## 4.4 Arranjo hexagonal com moedas tangentes

**Problema 4.4.** *Moedas idênticas de 10 centavos de real foram arrumadas sobre uma mesa, obedecendo à disposição apresentada na figura 16; uma moeda no centro e as demais formando camadas tangentes. Considerando que a última camada é composta por 84 moedas, calcule a quantia, em reais, do total de moedas usadas nessa arrumação.*

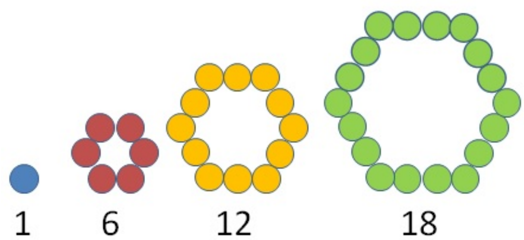
Figura 16 – Arranjo hexagonal



FONTE:Balestri, (2016)

**Solução:** Vamos decompor a figura em suas fases e relacionar com uma sequência numérica conforme a figura 17.

Figura 17 – Decomposição da figura 16 em camadas




FONTE: Autor (2017)

Analisando a sequência $(a_n)$ formada pelo total de moedas existentes em cada camada da figura, percebemos que a partir da segunda camada inicia uma PA de 1ª ordem que, como o enunciado informa, deverá ter o último termo valendo 84.

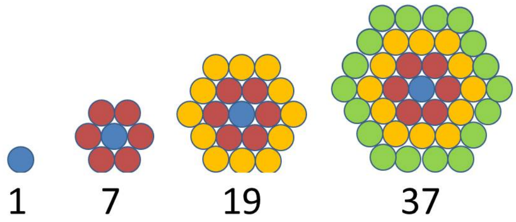
Aplicando a fórmula tradicional

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Leftrightarrow 84 = 1.6 + (n-1)6 \ \Leftrightarrow \ n = 14.$$

Isto quer dizer que o arranjo de moedas terá 15 camadas (adicionando a 1ª moeda). Agora, precisamos somar todas as camadas. Para tal feito, será dado duas versões equivalentes para a solução.

**(Método tradicional)** Na figura 18, podemos visualizar através das camadas coloridas, a seguinte soma:

Figura 18 – Sequência da soma




FONTE: Autor (2017)

$S_n = 1+(6+12+18+24+...+84) = 1+\dfrac{(a_1+a_n)n}{2} = 1+\dfrac{(6+84).14}{2} = 1+90.7 = 631$ isto é, no arranjo feito com as moedas existem 631 moedas de 10 centavos, o que totaliza $63,10$. Esta é a resposta do problema.

**Método dos coeficientes binomiais**

Observe que a sequência das somas parciais $(S_n)$ é dada por: $(S_n) = (1,7,19,37,...)$, onde $(\Delta S_n) = (6,12,18,...)$ e $(\Delta^2 S_n) = (6,6,6,...)$. Assim, $(S_n)$ é uma PA de ordem 2. Portanto, pela proposição 3.9, temos:

$$S_n = \binom{n-1}{0}1+\binom{n-1}{1}6+\binom{n-1}{2}6 = 3n^2-3n+1.$$

Como estamos querendo somar 15 termos, teremos: $S_{15} = 3.15^2-3.15+1 = 631$.

Logo o arranjo possui 631 moedas de 10 centavos, totalizando 63,10.

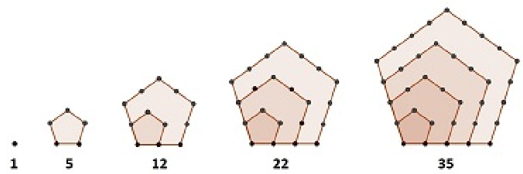
□

Usar esse processo para resolver somas de PAs de 1ª ordem pode parecer muito dispendioso (e é mesmo), no entanto é interessante apresentá-lo para que se comprove a funcionalidade da fórmula para PA's de 1ª ordem.

## 4.5 Números Pentagonais

**Problema 4.5.** *Considere a sequência dos números pentagonais mostrada na figura 19. a) Encontre a expressão do termo geral. b) Quantos pontos serão necessários para construir a sequência dos números pentagonais com 20 termos?*

Figura 19 – Sequência dos números pentagonais




FONTE: Autor (2017)

***Solução:***

***a)*** *Observe que a sequência associada aos números pentagonais* $(p_n) = (1,5,12,22,...)$ *é uma PA de ordem 2. De fato, basta observar que* $(\Delta p_n) = (4,7,10,...)$ *e* $(\Delta^2 p_n) = (3,3,...)$. *Portanto, pela proposição 3.9 temos:*

$$p_n = \binom{n-1}{0}1 + \binom{n-1}{1}4 + \binom{n-1}{2}3 \ = \frac{3n^2-n}{2} \ = \ \frac{n(3n-1)}{2}.$$

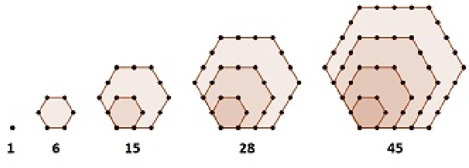
***b)*** *A figura 19 mostra a sequência dos números pentagonais e a sequência* $(S_n)$ *tal que* $S_n = p_1 + ... + p_n$, *fornece as somas parciais da sequência* $p_n$ *dos números pentagonais. Assim,* $(S_n) = (1,6,18,40,75,...)$, $(\Delta S_n) = (5,12,22,35,...)$, $(\Delta^2 S_n) = (7,10,13,...)$ *e* $(\Delta^3 S_n) = (3,3,3,...)$. *Portanto, pela proposição 3.10 temos:*

$$S_{20} = \binom{19}{0}.1 + \binom{19}{1}.5 + \binom{19}{2}.7 + \binom{19}{3}.3 = 420 \qquad \square$$

## 4.6 Números Hexagonais

**Problema 4.6.** *Considere a sequência dos números Hexagonais mostrada na figura 20.*

Figura 20 – Números hexagonais




FONTE: Autor (2017)

***a)*** *Determine a expressão do seu termo geral.*
***b)*** *Determine a expressão da soma dos n primeiros termos.*

***Solução:***

***a)*** *Os números hexagonais formam a sequência* $(h_n) = (1,6,15,28,...)$. *Consequentemente teremos* $(\Delta h_n) = (5,9,13,...)$ *e* $(\Delta^2 h_n) = (4,4,...)$. *Assim,* $(h_n)$ *é uma PA de ordem 2. Portanto, pela proposição 3.9, o termo geral é*

$$h_n = \binom{n-1}{0}1 + \binom{n-1}{1}5 + \binom{n-1}{2}4 \ = n(2n-1).$$

***b)*** *As somas parciais dos primeiros números hexagonais são dadas pelos termos da sequência* $(S_n) = (\ 1,\ 7,\ 22,\ 50,\ 95,\ ...\ )$. *Pela aplicação do operador diferença temos* $(\Delta S_n) = (6,15,28,45,...)$, $(\Delta^2 S_n) = (9,13,17,...)$ *e* $(\Delta^3 S_n) = (4,4,...)$. *Assim,* $(S_n)$ *é uma PA de ordem 3. Portanto, pela proposição 3.10, temos:*

$$S_n = \binom{n-1}{0}1 + \binom{n-1}{1}6 + \binom{n-1}{2}9 + \binom{n-1}{3}4 = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

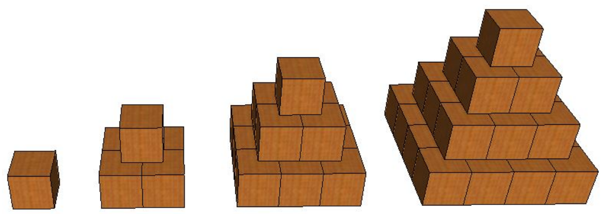
$\square$

O próximo problema envolve os números piramidais cuja sequência associada é uma PA de ordem 3.

## 4.7 Números Piramidais

**Problema 4.7** (Números Piramidais). *Uma indústria de brinquedos trabalha com blocos lógicos de madeira em forma de cubo. Os blocos são vendidos em caixas com 2500 peças. Uma criança ganhou uma caixa desses blocos e começou a construir a sequência dos números piramidais de base quadrada, como mostra a figura 21. Quantos cubos terá na base da maior pirâmide completa que ele poderá construir?*

Figura 21 – Sequência piramidal de base quadrada



FONTE: Autor (2017)

**Solução:** A sequência numérica relacionada à sequência dos Piramidais de base quadrada e correspondente ao número de quadrados é dada por $(P_n) = (1, 5, 14, 30, 55, 91, ...)$ e a sequência que fornece as somas parciais de $(P_n)$ é $(S_n) = (1, 6, 20, 50, 105, 196, ...)$. Pelo operador diferença teremos $(\Delta S_n) = (5, 14, 30, 55, 91, ...)$, $(\Delta^2 S_n) = (9, 16, 25, 36, ...)$, $(\Delta^3 S_n) = (7, 9, 11, ...)$ e $(\Delta^4 S_n) = (2, 2, ...)$. Assim, $(S_n)$ é uma PA de ordem 4. Portanto, pela proposição 3.11, teremos

$$S_n = \binom{n-1}{0}1 + \binom{n-1}{1}5 + \binom{n-1}{2}9 + \binom{n-1}{3}7 + \binom{n-1}{4}2 = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

Para resolver o problema, devemos ter $S_n \leqslant 2500$. Deste modo, teremos

$$\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} \leqslant 2500 \;\Leftrightarrow\; n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n \leqslant 30000,$$

assim, $n = 12$ (por inspeção). Logo, na base da maior pirâmide construída haverá um quadrado de 12 x 12, que resulta em 144 cubos. $\square$

O próximo problema nos levará a intuir o termo geral das colunas do triângulo de Pascal em função da ordem $k$ da PA que a forma. Este resultado será fundamental na resolução de problemas que envolvem o Triângulo de Pascal..

## 4.8 Termo geral das colunas do Triângulo de Pascal

**Problema 4.8.** *No Triângulo numérico da figura 22, determine o termo geral da sequência que forma a*

***a)*** *1ª coluna;* ***b)*** *2ª coluna;* ***c)*** *3ª coluna;* ***d)*** *4ª coluna;* ***e)*** *5ª coluna;* ***f)*** *jª coluna.*

Figura 22 – Triângulo de Pascal

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | |
| 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | |
| 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

FONTE: Autor (2017)

**Solução:**

**a)** Na 1ª coluna temos uma PA (constante) de ordem 0 e, portanto, $a_n^{[0]} = 1$; $n \geqslant 1$. Com foco em uma generalização, consideramos: $a_n^{[0]} = \binom{n-1}{0}$; $n \geqslant 1$.

**b)** Na 2ª coluna temos a sequência dos números naturais, cuja razão é constante e, portanto, uma PA de ordem 1. Naturalmente percebemos que $a_n^{[1]} = n = \binom{n}{1}$; $n \geqslant 1$.

**c)** Na 3ª coluna temos a sequência dos números triangulares, que como já foi visto ( seção 3.3.1), é uma PA de 2ª ordem e seu termo geral já foi determinado na proposição 3.5. Vamos apenas escrevê-lo no formato de número binomial.
Assim, $a_n^{[2]} = \dfrac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$; $n \geqslant 1$.

**d)** Na 4ª coluna há a sequência $(a_n^{[3]}) = (1,4,10,20,35,56,...)$, que é uma PA de ordem 3 cujo termo geral já foi provado no lema 3.1 e é $a_n^{[3]} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}$; $n \geqslant 1$.

**e)** Na 5ª coluna há a sequência $(a_n^{[4]}) = (1,5,15,35,70,126,...)$. Pelo operador diferença temos $(\Delta a_n^{[4]}) = (4,10,20,35,56,...)$, $(\Delta^2 a_n^{[4]}) = (6,10,15,21,...)$, $(\Delta^3 a_n^{[4]}) = (4,5,6,...)$ e $(\Delta^4 a_n^{[4]}) = (1,1,...)$, portanto $(a_n^{[4]})$ é de ordem 4 e, pela proposição 3.11, seu termo geral é

$$\begin{aligned} a_n^{[4]} &= \binom{n-1}{0}1 + \binom{n-1}{1}4 + \binom{n-1}{2}6 + \binom{n-1}{3}4 + \binom{n-1}{4}1 \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} = \binom{n+3}{4};\ n \geqslant 1. \end{aligned}$$

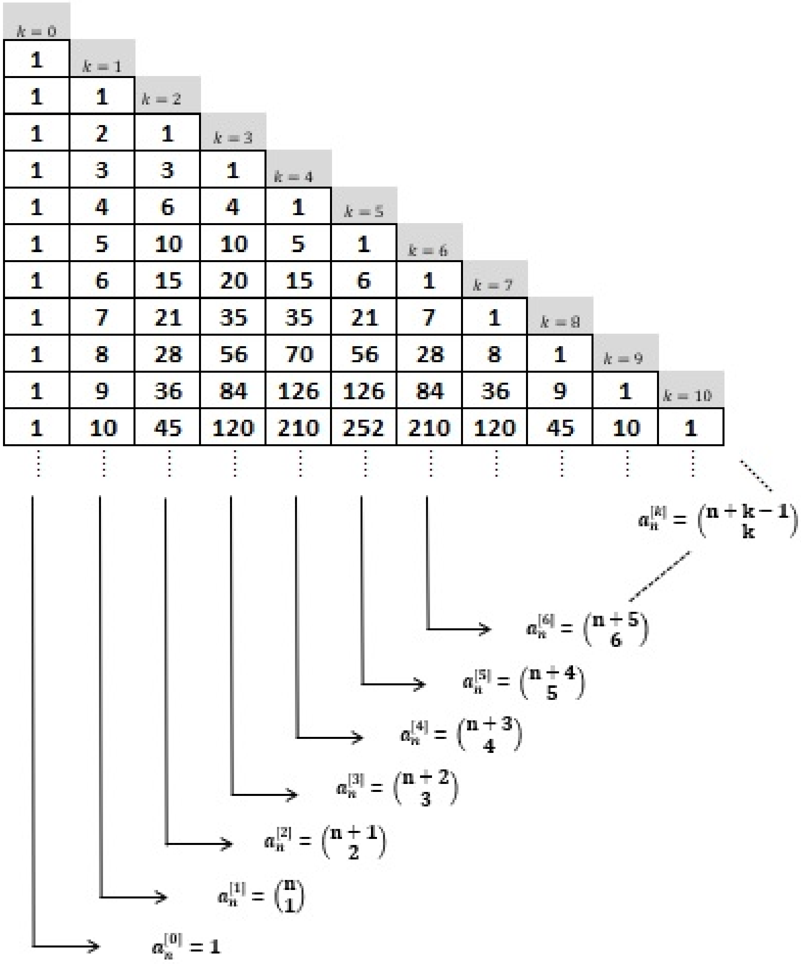
**f)** Observando os resultados obtidos nos itens anteriores podemos intuir que se $j$ é o número de uma coluna do Triângulo de Pascal, com $j \in \{1,2,3,...\}$ e $k$ a ordem da PA na coluna j. Temos $k = j-1$ e o termo geral da PA na coluna $j$ será

$$a_n^{[k]} = \binom{n+k-1}{k}.$$

□

Na figura 23 está explícita a ordem da PA existente na coluna (parte superior) e o termo geral no formato binomial (parte inferior).

Figura 23 – Triângulo de Pascal




FONTE: Autor (2017)

## 4.9 Situações com o Triângulo de Pascal

**Problema 4.9.** *Use o resultado do item f do problema 4.8 e*

**a)** *encontre o valor do o 18º termo da quarta coluna do Triângulo de Pascal.*

**b)** *indique o valor da soma do quinto termo da sétima coluna com o nono termo da quarta coluna do Triângulo de Pascal.*

**c)** *calcule a soma dos oitenta primeiros números da décima coluna do Triângulo de Pascal.*

**Solução:**

**a)**Para a quarta coluna, temos que a ordem $k$ da PA dessa coluna é $k = 4 - 1 = 3$. Logo,

$$a_{18}^{[3]} = \binom{18+3-1}{3} = \binom{20}{3} = 1140.$$

**b)** Para o referido problema temos que a ordem da sétima coluna é $k = 6$ e para a quarta coluna $k = 3$. Assim, a soma pedida é:

$$a_5^{[6]} + a_9^{[3]} = \binom{5+6-1}{6} + \binom{9+3-1}{3} = \binom{10}{6} + \binom{11}{3} = 210 + 165 = 375.$$

**c)** Podemos nos valer de uma propriedade do Triângulo de Pascal que diz que a soma de $n$ termos de uma coluna é igual ao n-ésimo termo da coluna imediatamente à direita (ver Morgado (2015),p.128). Desse modo, usando o resultado do item f do problema 4.8, a soma dos oitenta números da décima coluna será:

$$a_{80}^{[9]} = \binom{80+10-1}{10} = \binom{89}{10} = 5.085.018.206.136.$$

□

Muitos fenômenos físicos podem ser descritos matematicamente por funções polinomiais. Dentre eles, podemos citar o Movimento Retilíneo Uniforme, Movimento Retilíneo Uniformemente Variado e Lançamento Oblíquos. Portanto, pela proposição 3.4, esses fenômenos podem ser analisados com a teoria das PA's.

## 4.10 Queda Livre

**Problema 4.10.** *Um objeto foi solto de uma altura h,em queda livre. A partir do 3º segundo de queda um sistema começou a monitorar as alturas do objeto em relação ao tempo de queda. Uma parte dos dados monitorados estão mostrados na tabela 2.*

Tabela 2 – Objeto em queda livre

| **Queda livre** | |
|---|---|
| **Tempo (s)** | **Altura (m)** |
| 3 | 955 |
| 4 | 920 |
| 5 | 875 |
| 6 | 820 |

FONTE: Autor (2017)

**a)** De que altura o objeto foi solto?

**b)** Quanto tempo o objeto gastará para chegar ao solo?

**Solução:**

Como os tempos fornecidos são consecutivos, podemos analisar as respectivas alturas como termos de uma sequência. Assim, $(h_n) = (..., 955, 920, 875, 820, ...)$, o que nos fornece

$(\Delta h_n) = (..., -35, -45, -55, ...)$ e $(\Delta^2 h_n) = (..., -10, -10, -10, ...)$. Logo as alturas formam uma PA de 2ª ordem. Então, pela proposição 3.9 o termo geral de $(h_n)$ é

$$h_n = \binom{n-1}{0} 955 + \binom{n-1}{1}(-35) + \binom{n-1}{2}(-10) \Leftrightarrow h_n = -5n^2 - 20n + 980.$$

Uma vez encontrado o termo geral da PA, vamos apresentar as respostas solicitadas.

**a)** Neste caso, estamos procurando $h_{(-2)}$ (isto é possível pois consideramos o terceiro termo da sequência como o primeiro). Portanto $h_{(-2)} = -5.(-2)^2 - 20.(-2) + 980 = 1000\ m$. Ou seja, o objeto foi solto a uma altura de 1000 metros.

**b)** Neste caso, resolvemos a equação $-5n^2 - 20n + 980 = 0$. O que resulta em $n = 12,14\ s$. Isto é, o objeto levará aproximadamente 12,14 segundos para chegar ao solo.

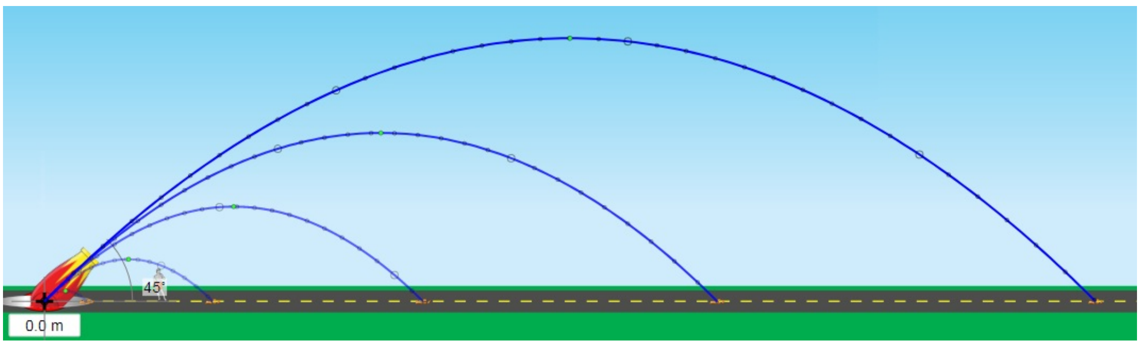
□

O problema a seguir é também uma aplicação da PA de 2ª ordem em física.

## 4.11 Lançamento Oblíquo

**Problema 4.11.** *Um canhoneiro (operador de canhão) está fazendo testes para medir a relação entre a quantidade de pólvora usada na explosão e a distância atingida pela bala quando o canhão está com inclinação de 45 graus. Ele já sabe que a cada meio quilo de pólvora há uma variação de 10 m/s na velocidade de lançamento. A figura 24 ilustra o problema e a tabela 3 mostra algumas relações encontradas.*

Figura 24 – Lançamento oblíquo à 45 graus.




FONTE: Autor (2017) Simulação feita no phet.colorado.edu

Tabela 3 – Dados dos testes de disparo

| Pólvora (kg) | Velocidade do disparo (m/s) | Distância atingida (m) |
|---|---|---|
| 0,5 | 10 | 10,2 |
| 1 | 20 | 40,81 |
| 1,5 | 30 | 91,83 |
| 2 | 40 | 163,26 |

FONTE: Autor (2017)

Quantos quilogramas de pólvora o canhoneiro deverá usar para que a bala ultrapasse 300 metros ?

**Solução:** Seja $(D_n) = (10,2;\ 40,81;\ 91,83;\ 163,26;...)$ a sequência das distâncias atingidas pela bala do canhão. Pelo operador diferença temos $(\Delta D_n) = (30,61;\ 51,02;\ 71,43;...)$ e $(\Delta^2 D_n) = (20,41;\ 20,41;\ ...)$. Portanto $(D_n)$ é uma PA de 2ª ordem e pela proposição 3.9 tem-se:

$$D_n = \binom{n-1}{0}10,2 + \binom{n-1}{1}30,61 + \binom{n-1}{2}20,41 \ = \ 10,205n^2 - 0,005n + 10,2.$$

Devemos ter $10,205n^2 - 0,005n + 10,2 > 300$. Portanto, $n > 5,33$. Observe, pela tabela 3, que $v = 10n$, temos então que a velocidade requerida para ultrapassar 300 metros deverá ser maior que 53,3 m/s, o que equivale a dizer que será necessário mais que 2,665 kg de pólvora. □

Os problemas que apresentamos nos ajudam a perceber que as PA's de ordens superiores são úteis para resolver uma grande variedade de situações.

# 5 PROPOSTA DE FORMAÇÃO PARA PROFESSORES

A região do Extremo Norte do Tocantins é formada pelos municípios: São Bento do Tocantins, Araguatins, Augustinópolis, Axixá do Tocantins, Buriti do Tocantins, Carrasco Bonito, Esperantina, Praia Norte, Sampaio, São Miguel do Tocantins, São Sebastião do Tocantins, São Miguel do Tocantins e Sítio Novo do Tocantins. A figura 25 mostra essa região.

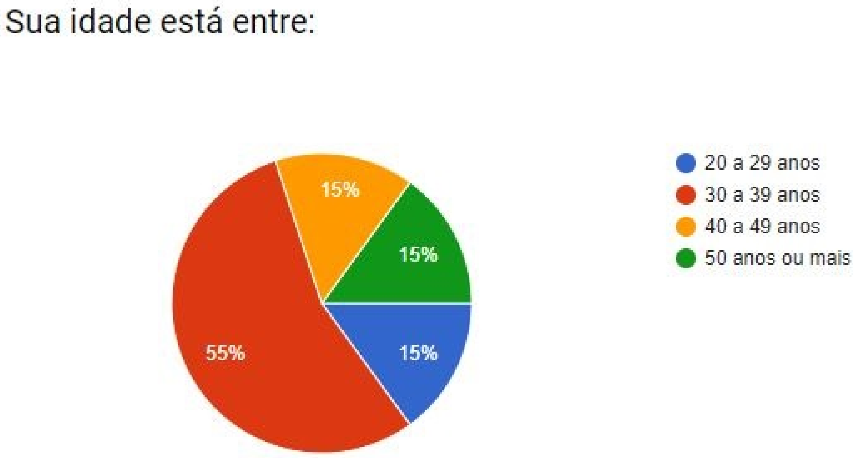
Figura 25 – Extremo norte do Tocantins


FONTE: Google Maps (2017), acessado em 07/03/2018

Uma realidade existente nesta região, de acordo com dados da DRE de Araguatins em 2017, é que 12% dos professores que atuam na docência de matemática possuem suas formações em outras áreas. Esse fato reflete diretamente na qualidade do ensino. Por outro lado, há os professores que têm formação em matemática mas que durante muitos anos trabalharam nas mesmas turmas e, por isso, seu foco foram os conteúdos da referida turma. Como o conteúdo de PA's é tradicionalmente ensinado na segunda série do Ensino Médio, é possível que muitos dos professores que participaram da formação nunca tenham ministrado o tema e outros que podem já ter vários anos que não o pratica. Essa descrição da realidade regional do sistema de ensino público se faz necessária para que ao ver os resultados, o leitor possa fazer uma análise baseada também no contexto regional.

Apresentaremos a seguir alguns gráficos com dados que nortearam a estruturação da formação. Esses dados foram obtidos através de questionário com questões objetivas aplicado a um grupo de 30 professores que atuaram em sala de aula em 2017.

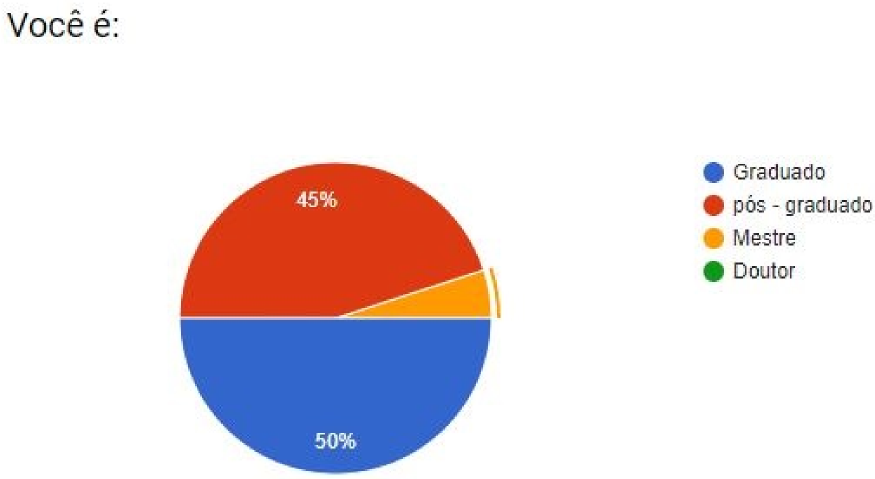
Figura 26 – Idade dos docentes pesquisados




FONTE: Autor (2017), gerado no Google Drive

Neste gráfico percebe-se que 70% dos professores têm menos de 40 anos. Isto indica que há grande chance de melhorias no ensino de matemática.

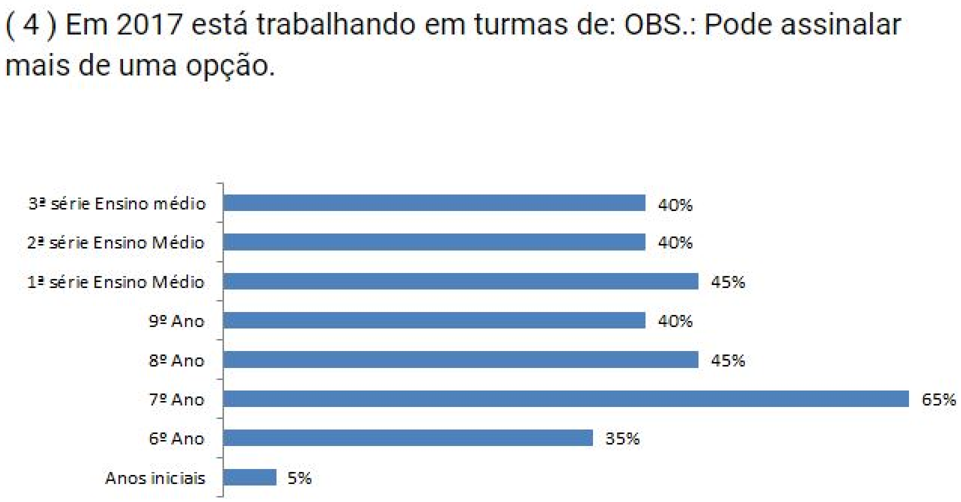
Figura 27 – Formação dos professores pesquisados




FONTE: Autor (2017), gerado no Google Drive

Com os dados desse gráfico, percebe-se a necessidade de incentivo para que os professores continuem suas formações para entrarem em contato com novas estratégias e didáticas.

Figura 28 – Atuação dos professores em 2017




FONTE: Autor (2017), gerado no Google Drive

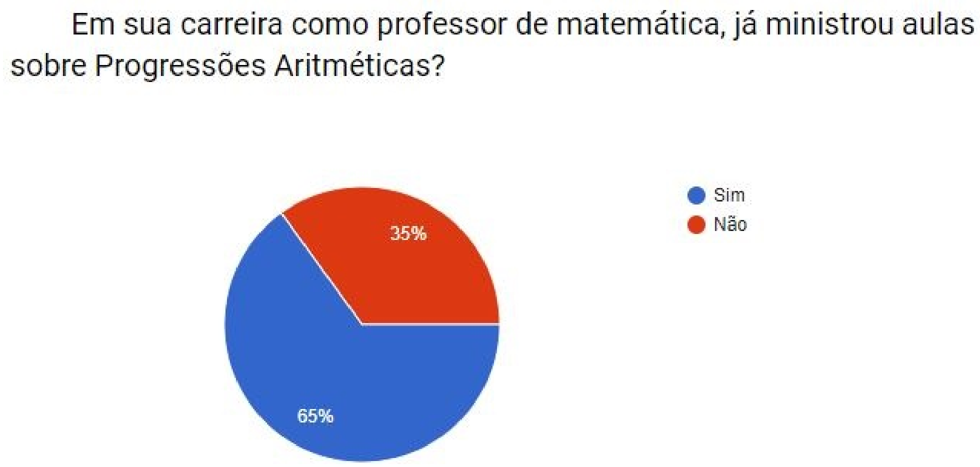
A maioria das atuações dos professores pesquisados foram em turmas de 7 ano. Isto justifica o fato de que poucos trabalharam com as PA's em 2017, visto que este tema geralmente é estudado na 2ª série do ensino médio.

Figura 29 – Tempo de docência em Matemática


FONTE: Autor (2017), gerado no Google Drive

Estes dados mostram que 60% dos professores pesquisados possuem entre 5 a 15 anos de experiência na docência em matemática, sugerindo que a maioria possui experiência em sala de aula.

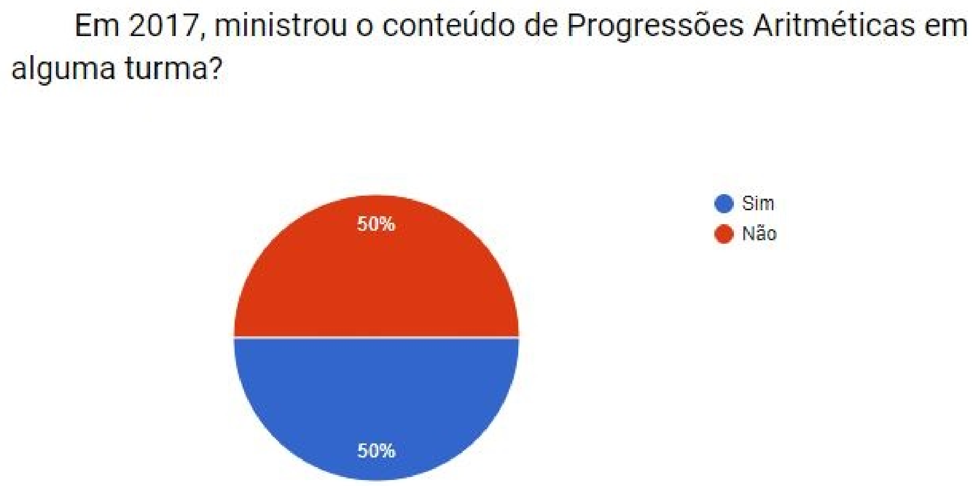
Figura 30 – Progressões Aritméticas e os docentes




FONTE: Autor (2017), gerado no Google Drive

Esses dados mostram que a maioria dos professores trabalham no ensino fundamental e não no ensino médio.

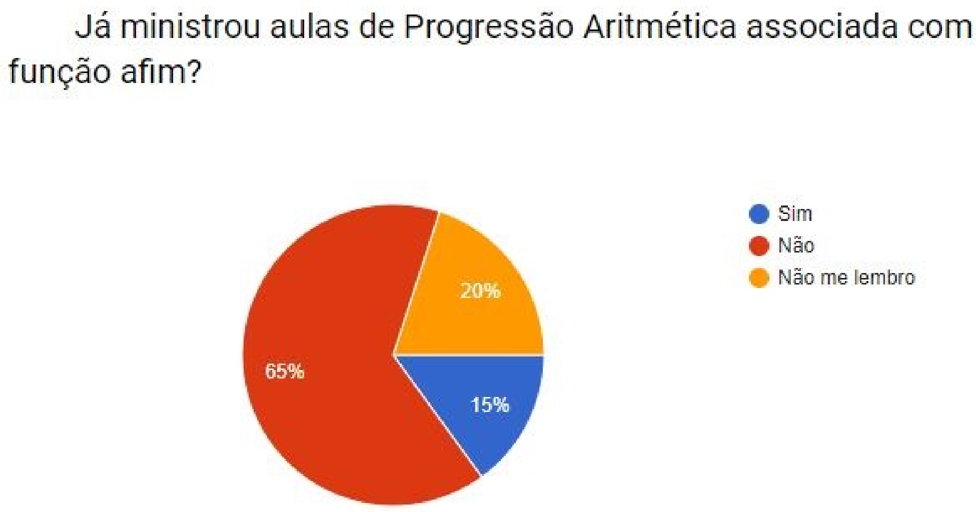
Figura 31 – Docência de Progressões Aritméticas eo 2017




FONTE: Autor (2017), gerado no Google Drive

Como a maioria dos professores trabalharam no 7 ano em 2017, isto contribuiu para que 50% deles não tenham ministrado PA's, que é tema do ensino médio.

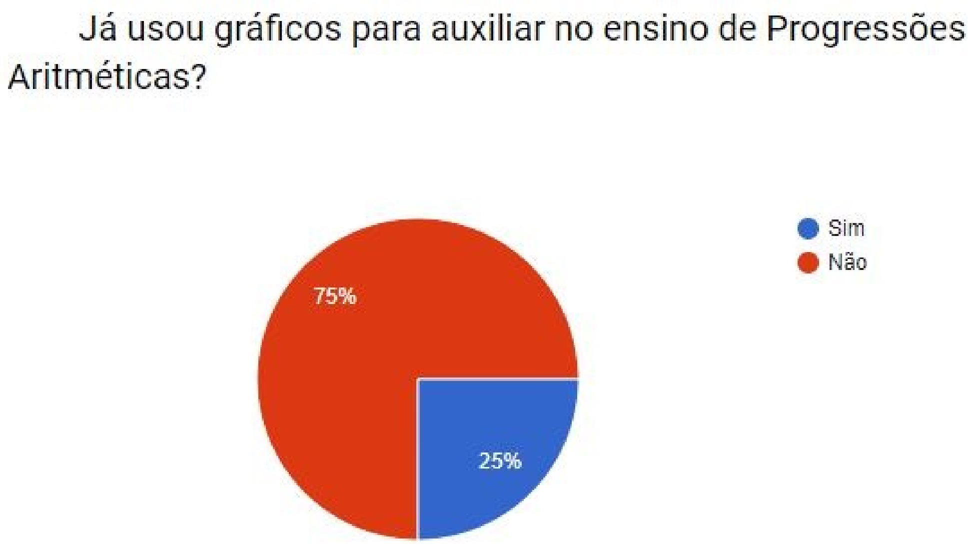
Figura 32 – Progressões Aritméticas e Função afim




FONTE: Autor (2017), gerado no Google Drive

Esses dados mostram que 15% dos professores já perceberam a vantagem de trabalhar funções consorciadas com PA's.

Figura 33 – Progressões Aritméticas e gráficos




FONTE: Autor (2017), gerado no Google Drive

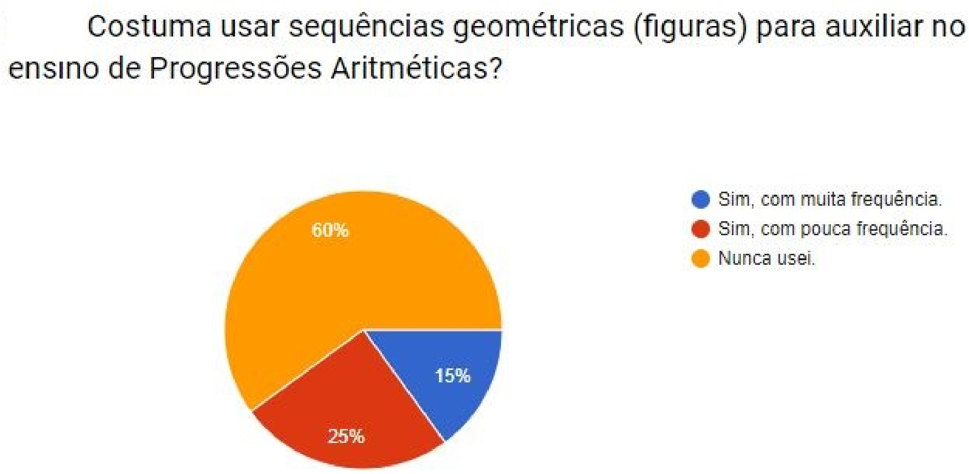
Aqui percebe-se que ainda falta um grande caminho a ser percorrido no tocante ao uso de gráficos para representar representação de PA's.

Figura 34 – Conhecimento de números figurados


FONTE: Autor (2017), gerado no Google Drive

Os números figurados são bastante úteis e podem auxiliar no entendimento das sequências e 40 % dos professores não tem conhecimento deles.

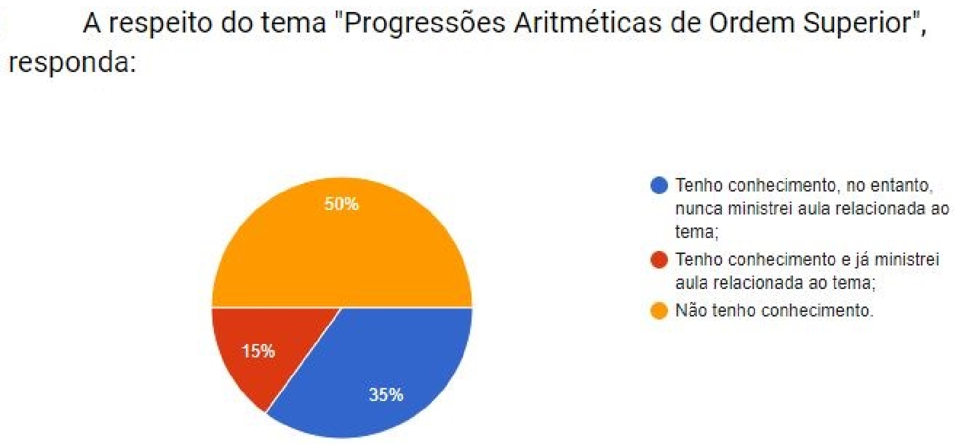
Figura 35 – Progressões Aritméticas e números figurados




FONTE: Autor (2017), gerado no Google Drive

A maioria dos números figurados podem formar PA's de ordem 1, 2 ou 3 e, portanto, são muito úteis no ensino destas. Não usar sequências geométricas no ensino de PA's é deixar uma excelente ferramenta de lado.

Figura 36 – Conhecimento de Progressões Aritméticas de ordem superior




FONTE: Autor (2017), gerado no Google Drive

Os dados deste gráfico vem comprovar que as PA's de ordens superiores não estão sendo ensinadas nem no Ensino médio nem nas graduações e apoiam a necessidade deste trabalho.

Figura 37 – Aceitação da formação


FONTE: Autor (2017), gerado no Google Drive

Aqui está expressa uma grande esperança para a região do extremo norte do tocantins no tocante ao aprendizado das teorias relativas às PA's de ordens superiores. 100% dos professores pesquisados apresentaram o desejo de participarem de uma formação sobre o tema.

Fazer uma formação sobre Progressões Aritméticas de Ordem Superior com os professores de matemática do extremo norte do Tocantins foi uma realização de muita importância para o crescimento profissional dos participantes, visto que 50% dos professores que responderam à pesquisa declararam não ter conhecimento das PA's de ordem superior (figura 36). Esse fato nos motivou a preparar a formação com o objetivo de dar as primeiras orientações sobre o tema e incentivar os professores a continuarem as pesquisas.

Essa formação foi pensada para um encontro presencial com duração de 8 horas. Os professores participaram de uma avaliação inicial (ver apêndice A), para verificação de conhecimentos prévios e, após 4 horas de exposição aos novos conhecimentos, foram avaliados novamente (ver apêndice B), para verificação do que foi aprendido. As avaliações serviram para verificar se a metodologia usada foi eficiente.

A tabela 4 mostra o cronograma das atividades realizadas na formação.

Tabela 4 – Estrutura da formação de professores

| | |
|---|---|
| Data: | 21 de Novembro de 2017 |
| Cidade: | Araguatins |
| Local: | Auditório da Escola Estadual Leônidas Gonçalves Duarte |
| Público: | 30 Professores de matemática da Rede Estadual de Ensino |
| Materiais: | Data show, computador, quadro, softwares matemáticos |
| 8:00 às 9:30 | Aplicação da avaliação de conhecimentos prévios |
| 9:30 às 9:45 | Intervalo para descanso |
| 9:45 às 12:00 | oficina colaborativa sobre Progressões Aritméticas de ordem superior |
| 14:00 às 16:00 | oficina colaborativa sobre Progressões Aritméticas de ordem superior |
| 16:00 às 17:30 | aplicação da avaliação de saída |
| 17:30 às 18:00 | Discussões finais, avaliação da formação e encerramento |

FONTE: Autor (2017)

Dos trinta professores esperados para a formação, vinte e oito compareceram. Em virtude de vários problemas logísticos, tais como horários dos transportes intermunicipais da região, alguns dos professores não puderam realizar a avaliação de saída e outros tiveram apenas trinta minutos para fazê-la. Por isso, os dados estatísticos apresentados nas tabelas 5 e 6 dizem respeito apenas aos professores que puderam participar das duas avaliações e elas informam o percentual de acertos nas duas avaliações.

Tabela 5 – Percentual de acerto nas duas avaliações da formação.

| Participante | 36 | 18 | 37 | 32 | 25 | 3 | 29 | 16 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Avaliação Inicial | 8,3 | 16,7 | 8,3 | 8,3 | 25 | 0 | 8,3 | 16,7 | 16,7 |
| Avaliação Final | 22,2 | 55,6 | 22,2 | 0 | 22,2 | 33,3 | 22,2 | 44,4 | 0 |

FONTE: Autor (2017)

Tabela 6 – Percentual de acerto nas duas avaliações da formação (continuação)

| Participante | 19 | 28 | 1 | 26 | 15 | 21 | 33 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Avaliação Inicial | 41,7 | 41,7 | 50 | 16,7 | 16,7 | 33,3 | 75 |
| Avaliação Final | 100 | 100 | 100 | 55,6 | 88,9 | 66,7 | 66,7 |

FONTE: Autor (2017)

A tabela 7 resume ainda mais os dados, comparando os acertos da segunda avaliação com os acertos da primeira .

Tabela 7 – Estatística da formação de professores

| | |
|---|---|
| Progrediram | 75% |
| Regrediram | 25 % |

FONTE: Autor (2017)

Enquanto ocorria a formação foi possível perceber que grande parte dos professores se animaram com a possibilidade de novos conhecimentos e procedimentos enquanto uma minoria se mostrava meio indiferente ao que estava acontecendo, não dando muita importância ao tema. Isto é confirmado pela tabela 7, pois 75% dos participantes tiveram melhor desempenho na segunda avaliação.

As avaliações foram planejadas da seguinte forma:

1) Questões de Progressões Aritméticas de primeira ordem, visando verificar o nível de conhecimento do conteúdo que geralmente é trabalhado na segunda série do Ensino Médio.

2) Questões de Progressões Aritméticas de segunda e terceira ordens com o objetivo de averiguar se já tinham conhecimento de alguma técnica de resolução de problemas com o envolvimento desse tipo de sequência.

Os apêndices A e B trazem as avaliações inicial e final aplicadas na formação com os professores, enquanto que o apêndice C traz as avaliações de três dos professores participantes. Nessas avaliações podem ser vistos os avanços que eles apresentaram após os estudos do dia. Nem todos os professores conseguiram um desempenho como os três que anexamos e isto nos mostrou que ainda há um longo caminho a ser percorrido até que esse tema seja completamente dominado pela maioria dos professores da rede pública de ensino na região do Bico do Papagaio (Extremo Norte do Tocantins). Por outro lado, vendo o ótimo desempenho alcançado por alguns deles, ficou claro que o tema é de fácil entendimento e possível de ser aprendido e ensinado.

Através de entrevistas com os professores que participaram da formação, concluímos que foi muito produtivo para todos os envolvidos (inclusive para mim) as horas de estudo sobre as PA's de ordens superiores. A seguir temos a transcrição de alguns comentários de professores sobre o momento de formação.

"Que sejam realizadas mais formações desta natureza, para aprimorar o conhecimento."

"Foi de muito aproveitamento. Conto com o próximo encontro."

"Foi interessante. A abordagem é nova mas bem produtiva."

"Quero estar no próximo encontro."

A partir dos comentários desses professores foi possível constatar que o objetivo da formação foi atingido embora tenha ficado evidente que para alguns professores, serão necessárias mais horas de estudo e treinamento para que dominem a teoria necessária e possam assim, ministrar boas aulas desse tema em suas escolas.

# 6 CONCLUSÃO

Por muito tempo, em minha mente, havia a certeza de que um problema sobre PA não traria muita dificuldade para ser resolvido. Não tinha ideia de que só conhecia uma parte desse tema.

Neste trabalho procurou-se mostrar a teoria sobre as PA's que ainda não foi explorada nos livros didáticos do ensino médio. Uma enorme quantidade de sequências, denominadas Progressões Aritméticas de ordem superior ficaram fora do foco das pesquisas e de estudos básicos nas escolas da rede estadual de ensino.

Acreditamos ter reaberto uma porta que oferece muitas oportunidades para que outros pesquisadores possam dar continuidade a essa pesquisa. Expusemos uma fórmula que se mostra bastante útil na resolução de problemas que envolvem as PA's de ordem superior assim como uma coleção de aplicações que podem servir de subsídio didático a outros pesquisadores.

Ao proporcionar uma formação com professores da região delimitada para esse projeto, começamos a resolver o problema das PA's de ordem superior e esperamos que esses professores se sintam motivados a aprofundarem no assunto e disseminem o conhecimento que começaram a compreender.

# REFERÊNCIAS


BALESTRI, R. **Matemática 1, interação e tecnologia - volume 1**. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

BARROSO, J. M. **Matemática Construção e Significado**. 1. ed. São Paulo, SP: Moderna, 2008.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

CONTADOR, P. R. M. **A Matemática na Arte e na Vida**. 1. ed. Sáo Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2007.

CYRINO, H. F. F. **Matemática e gregos**. 1. ed. Campinas, SP: Átomo, 2006.

DLAB, V. Arithmetic progressions of higher order. **Teaching Mathematics and Computer Science**, v. 4, p. 225–239, 2011.

GEORGE, I. T. B. de. Sequências e progressões. 2012. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=41049>. Acesso em: 08/01/2018.

LIMA, V. S. de. Progressões aritméticas e geométricas: história, conceitos e aplicações. 2008. Disponível em: <http://www.unopec.com.br/revist.PDF>. Acesso em: 18 set. 2017.

LIMA, W. A. F. **Progressões Aritméticas de Ordem Superior**: Uma proposta de abordagem no ensino médio. Dissertação (PROFMAT) — UEM, Maringá - PR, 2015.

MORGADO, A. C.; CARVALHO paulo C. P. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

PAIVA, M. **Matemática, volume único**. 1. ed. São Paulo, SP: Moderna, 2005.

PCN. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

PEREIRA, M. V. **Recorrências:Problemas e Aplicações**. Dissertação (PROFMAT) — UNB, Brasília - DF, 2014.

ROQUE, T. **história da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zohar, 2012.

# APÊNDICE A – AVALIAÇÃO INICIAL APLICADA NA FORMAÇÃO DOS PROFESSORES

Caro(a) professor(a), esta formação traz novos métodos de análise de Progressões Aritméticas para contribuir com a prática docente em sala de aula, visando o crescimento profissional do professor e o aprendizado efetivo do aluno. Sua participação é fundamental e esperamos que você seja um(a) multiplicador(a) desse conhecimento na sua escola frente aos demais colegas de matemática. Para fins de análise de resultados, teremos uma atividade de entrada e outra de saída. Pedimos que responda francamente as questões propostas nas duas atividades. Você não será identificado nominalmente. A Assessoria de Matemática agradece sua participação.

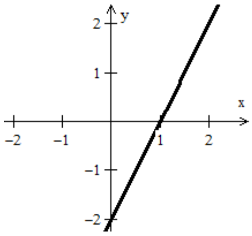
| IDENTIFICACÃO NUMÉRICA | |
|---|---|

01) Na sequência $(a_n) = (\dots, 30,\ 24, 18, 12, \dots\ )$, o 32º termo é 30. Qual é o valor do 1º e do 100º termo?

02) Quanto vale a soma dos cem primeiros termos da sequência do item 01?

03) Represente graficamente a PA que possui primeiro termo igual a 5 e razão 2.

04) Determine a PA que está representada no gráfico abaixo.




05) Encontre a PA cuja soma dos n primeiros termos é dada pelo polinômio $p(x) = n^2 + n$.

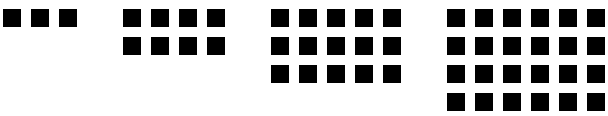
06) No triângulo numérico abaixo, aparecem várias sequências.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1ª linha** | **1** | | | | |
| **2ª linha** | **2** | **3** | | | |
| **3ª linha** | **4** | **5** | **6** | | |
| **4ª linha** | **7** | **8** | **9** | **10** | |
| **5ª linha** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Usando-o como base, escolha uma sequência de uma coluna ou uma diagonal no sentido indicado pelas setas e responda aos seguintes questionamentos:

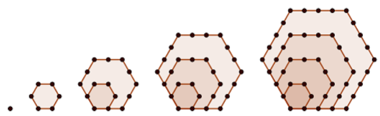
a) Encontre o termo geral da sequência que você escolheu.
b) Encontre o número que estará na centésima posição da sequência que você escolheu?
c) Encontre o valor da soma dos cem primeiros termos de sua sequência.

07) A sequência geométrica a seguir é constituída por figuras formadas por pontos. Baseada nela responda:



Quantos pontos serão necessários para construir essa sequência com 20 figuras?

08) A seguir está a sequência dos números hexagonais.



**1 6 15 28 45**

a) Quantos pontos serão necessários para construir o 15º número hexagonal?
b) Para construir os 10 primeiros números dessa sequência serão necessários quantos pontos?

09) A imagem abaixo contém uma sequência numérica. Encontre o termo geral dessa sequência.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **4** | **10** | **20** | **35** | **56** | **84** | **120** | **.........** | $a_n$ |

# APÊNDICE B – AVALIAÇÃO FINAL APLICADA NA FORMAÇÃO DOS PROFESSORES

AVALIAÇÃO DE SAÍDA DA FORMAÇÃO CONTINUADA SOBRE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

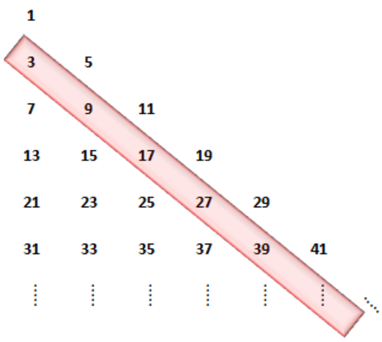
Resolva cada um dos problemas abaixo.

01) A sequência $(a_n) = (\dots, -13,\ -7,\ -1,\ 5,\ 11, \dots)$ possui 71 termos e o termo central é $-1$. Responda:

a) Qual o valor do 1º termo?

b) Qual o valor da soma de seus termos?

02) No triângulo numérico abaixo há uma sequência destacada. Baseado nela, responda:

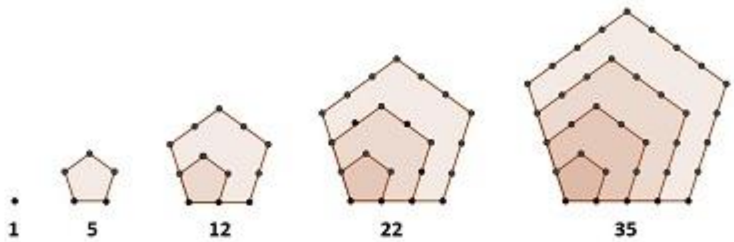



a) Qual  o termo geral?

b) Qual o quadragésimo número dessa sequência?

c) Quanto é a soma dos trinta primeiros números?

03) Quantos pontos são necessários para se construir a vigésima figura da sequência abaixo?




04) A sequência geométrica a seguir é constituída por figuras formadas por pontos. Baseada nela responda:

a) Quantos pontos serão necessários para construir a 20ª figura dessa sequência?

b) Quantos pontos serão necessários para construir as 20 primeiras figuras dessa sequência?

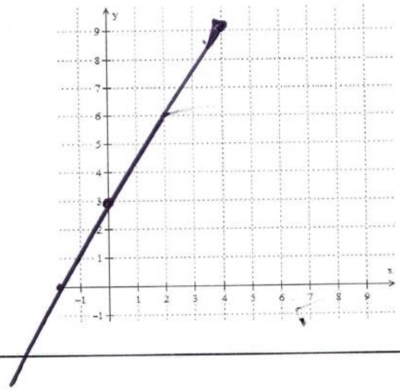
05) A imagem abaixo contém uma sequência numérica. Encontre o termo geral dessa sequência.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 11 | 26 | 50 | 85 | 133 | .......... | $a_n$ |

# APÊNDICE C – AMOSTRA DE RESPOSTAS DAS AVALIAÇÕES APLICADAS NA FORMAÇÃO DOS PROFESSORES

| IDENTIFICACÃO NUMÉRICA | 1 |
|---|---|

FOLHA DE RESPOSTAS: Registre nessa página as respostas que você encontrou.

| | |
|---|---|
| Questão 01 | $a_1 = -156$<br>$a_{100} = 438$ |
| Questão 02 | $S_{100} = 14100$ |
| Questão 03 |  |
| Questão 04 | P.A $(0, 2, 4, 6, \dots)$ |
| Questão 05 | $a_n = -a_1 + 2.(n+1) \Rightarrow$ P.A $(2, 4, 6, \dots)$ |
| Questão 06 | (a) $a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$ |
| | (b) $a_{100} = 4951$ |
| | (c) $S_{100} = 247.600$ |
| Questão 07 | $a_{20} = 440$ |
| Questão 08 | (a) $a_{15} = 435$ |
| | (b) $S_{10} = 490,5$ |
| Questão 09 | 3ª ordem: ?<br>2ª ordem: $\boxed{a_n = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}}$<br>1ª ordem: $\boxed{a_n = -n + 2}$ |

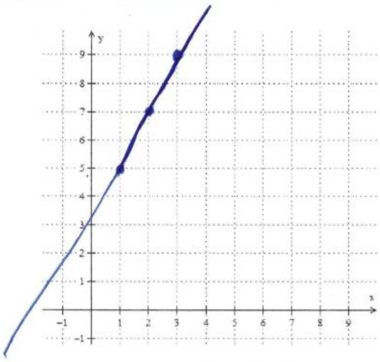
FOLHA DE RESPOSTAS: Registre nessa página as respostas que você encontrou.

IDENTIFICACÃO NUMÉRICA | 1

| | | |
|---|---|---|
| Questão 01 | a) | $a_1 = -211$ |
| | b) | $S_{71} = -71$ |
| Questão 02 | a) | $a_n = n^2 + 3n - 1$ |
| | b) | $a_{40} = 1719$ |
| | c) | $S_n = \frac{n^3 + 6n^2 + 2n}{3} \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{n.(n^2+6n+2)}{3}}$ |
| Questão 03 | | $\boxed{a_n = \frac{3n^2 - n}{2}} \Rightarrow a_{20} = \frac{3.20^2 - 20}{2} = \frac{3.400 - 20}{2}$ $\boxed{a_{20} = 590}$ |
| Questão 04 | a) | $\boxed{a_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}} \Rightarrow a_{20} = \frac{400 - 20 + 2}{2} = 191$ |
| | b) | $\boxed{S_n = \frac{n^3 + 5n}{6}}$ |
| Questão 05 | | $\boxed{a_n = \frac{n.(2n^2+9n+7)}{6}}$ |

FOLHA DE RESPOSTAS: Registre nessa página as respostas que você encontrou.

| IDENTIFICACÃO NUMÉRICA | 19 |
|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| Questão 01 | | $a_1 = 216$<br>$a_{100} = -378$<br>$a_{100} = 216 + (100-1).(-6)$<br>$= 216 + 99.(-6)$<br>$216 - 594$<br>$a_{100} = -378$ |
| Questão 02 | | $S_n = \frac{(216-378).100}{2}$<br>$S_n = -162.50$<br>$S_n = -8100$ |
| Questão 03 | | x \| y<br>1 \| 5<br>2 \| 7<br>3 \| 9<br>$a_n = 5 + (n-1).2$<br>$a_n = 2n+3$<br> |
| Questão 04 | | PA$(-\cancel{2}, 0, 2, 4, 6, \ldots)$ |
| Questão 05 | | PA$(2, 4, 6, 8 \ldots)$ |
| Questão 06 | (a) | ? |
| | (b) | ? |
| | (c) | ? |
| Questão 07 | | ? |
| Questão 08 | (a) | ? |
| | (b) | ? |
| Questão 09 | | ? |

FOLHA DE RESPOSTAS: Registre nessa página as respostas que você encontrou.

| IDENTIFICACÃO NUMÉRICA | 19 |
|---|---|

**Questão 01**

a)

$a_{36} = a_1 + (36-1)\cdot 6 \Rightarrow a_1 = -1 - 210$

$-1 = a_1 + 35\cdot 6$

$-1 = a_1 + 210$

$\boxed{a_1 = -210}$

b)

$a_{71} = -211 + 70\cdot 6$

$a_{71} = -211 + 420$

$a_{71} = 209$

$S_{71} = \dfrac{(-211+209)\cdot 71}{2}$

$S_{71} = \dfrac{-\cancel{2}\cdot 71}{\cancel{2}}$

$\boxed{S_{71} = -71}$

**Questão 02**

a)

$b_n = (3, 9, 17, 27, 39 \dots)$

$\Delta^1 = (6, 8, 10, 12 \dots)$

$\Delta^2 = (2, 2, 2)$

$b_n = 1\cdot 3 + (n-1)\cdot 6 + \dfrac{(n^2 - 3n + 2)\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}$

$\boxed{b_n = n^2 + 3n - 1}$

b)

$b_{40} = 40^2 + 3\cdot 40 - 1$

$= 1600 + 120 - 1$

$= 1600 + 119$

$\boxed{b_{40} = 1719}$

c)

$a_n = (3, 9, 17, 27, 39 \dots)$

$S_n = (3, 12, 29, 56, 95 \dots)$

$\Delta^1 = (9, 17, 27, 39 \dots)$

$\Delta^2 = (8, 10, 12 \dots)$

$\Delta^3 = (2, 2, 2 \dots)$

$S_n = \dfrac{n(n^2 + 6n + 2)}{3}$

$\boxed{S_{30} = 10820}$

**Questão 03**

$a_n = (1, 5, 12, 22, 35 \dots)$

$\Delta^1 = (4, 7, 10, 13, \dots)$

$\Delta^2 = (3, 3, 3, \dots)$

$b_n = 1\cdot 1 + (n-1)\cdot 4 + \dfrac{(n^2 - 3n + 2)}{2}\cdot 3$

$b_n = \dfrac{3n^2 - n}{2} \Rightarrow b_n = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

$b_{20} = \dfrac{20\cdot(3\cdot 20 - 1)}{2}$

$b_{20} = 10\cdot(60 - 1)$

$b_{20} = 10\cdot 59$

$\boxed{b_{20} = 590}$

**Questão 04**

a) $a_n = (1, 2, 4, 7, 11, 16 \dots)$

$\Delta^1 = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$

$\Delta^2 = (1, 1, 1 \dots)$

$b_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{2}$

$\boxed{b_{20} = 191}$

b)

$a_n = (1, 2, 4, 7, 11, \dots)$

$S_n = (1, 3, 7, 14, 25 \dots)$

$\Delta^1 = (2, 4, 7, 11, 16 \dots)$

$\Delta^2 = (2, 3, 4, 5 \dots)$

$\Delta^3 = (1, 1, 1 \dots)$

$S_n = \dfrac{n^3 + 5n}{6}$

$\boxed{S_{20} = 1350}$

**Questão 05**

$a_n = (3, 11, 26, 50, 85, 133 \dots)$

$\Delta^1 = (8, 15, 24, 35, 48 \dots)$

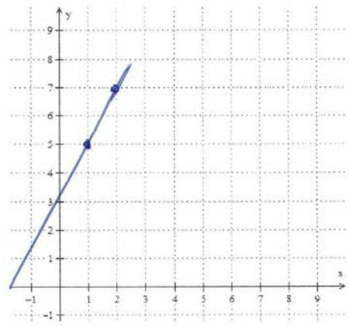
$\Delta^2 = (7, 9, 11, 13 \dots)$

$\Delta^3 = (2, 2, 2 \dots)$

$$\boxed{C_n = \dfrac{n(2n^2 + 9n + 7)}{6}}$$

FOLHA DE RESPOSTAS: Registre nessa página as respostas que você encontrou.

| IDENTIFICACÃO NUMÉRICA | 28 |
|---|---|

| | |
|---|---|
| Questão 01 | $a_1 = 216$   $a_{100} = -378$ |
| Questão 02 | $S_n = -8100$ |
| Questão 03 |  |
| Questão 04 | PA$(0, 2, 4, 6, \ldots)$ |
| Questão 05 | PA$(2, 4, 6, \ldots)$ |
| Questão 06 | (a) |
| | (b) |
| | (c) |
| Questão 07 | |
| Questão 08 | (a) |
| | (b) |
| Questão 09 | |

FOLHA DE RESPOSTAS: Registre nessa página as respostas que você encontrou.

IDENTIFICACÃO NUMÉRICA 28

| | | |
|---|---|---|
| Questão 01 | a) | $a_1 = -211$ |
| | b) | $S_{71} = -71$ |
| Questão 02 | a) | $C_n = n^2 + 3n - 1$ |
| | b) | $C_{40} = 1719$ |
| | c) | $S_{30} = 10820$ |
| Questão 03 | | $C_n = \frac{3n^2 - n}{2}$ $C_{20} = 590$ |
| Questão 04 | | $C_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}$ $C_{20} = 191$ <br> $S_n = \frac{n^3 + 5n}{6}$ $S_{20} = 1350$ |
| Questão 05 | | $S_n = \frac{n(2n^2 + 9n + 7)}{6}$ |