PROFMAT

UFOP
Universidade Federal
de Ouro Preto

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Rodnei Eduardo Fialho

Construções Geométricas e Padrões Islâmicos

Ouro Preto

2018

RODNEI EDUARDO FIALHO

Construções Geométricas e Padrões Islâmicos

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Área de Concentração: Ciência Exata e da Terra
Orientador: Prof. Dr. Luiz Gustavo de Oliveira Carneiro .

Ouro Preto
2018

FICHA CATALOGRÁFICA

F44c Fialho, Rodnei Eduardo.

Construções geométricas e padrões islâmicos [manuscrito]: padrões islâmicos / Rodnei Eduardo Fialho. - 2018.

60f.:

Orientador: Prof. Dr. Luiz Gustavo de Oliveira Carneiro.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Área de Concentração: Matemática com oferta nacional.

1. Construções geométricas. 2. Matematica - Instrumentos. 3. Geogebra (Programa de computador). I. Carneiro, Luiz Gustavo de Oliveira. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Titulo.

CDU: 519.672

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

FOLHA DE ASSINATURAS DOS PROFESSORES DA BANCA

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática - PROFMAT

Construções Geométricas e Padrões Islâmicos

Autor(a): Rodnei Eduardo Fialho

Dissertação defendida e aprovada, em **19 de Fevereiro de 2018**, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Luiz Gustavo de Oliveira Carneiro - Orientador
Universidade Federal de Ouro Preto

Leandro Correia Paes Leme Membro Interno
Universidade Federal de Ouro Preto

Márcio Fialho Chaves
Universidade Federal de Lavras

Sebastião Martins Xavier
Universidade Federal de Ouro Preto

Dedico à minha esposa e minhas filhas.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, ao meu orientador professor Luiz por mais uma vez me ajudar, a toda turma do mestrado em especial a turma da facção (Renato, Bruna, Marcelo e Bruno) e a todos professores que de alguma forma contribuíram para meu aprendizado.

Resumo

Este trabalho é o início da produção de um material didático com foco em construções geométricas de padrões islâmicos utilizando régua não graduada e compasso. Nesse material didático tratou-se -se da parte histórica dos padrões geométricos islâmicos; de construções geométricas elementares como bissetrizes, mediatrizes retas perpendiculares e paralelas e de polígonos do triângulo ao decágono e por fim de construções de padrões islâmicos todos utilizando somente régua não graduada e compasso. Todos as construções apresentadas nesse trabalho foram feitas com o auxílio do programa Geogebra.

Palavras-chave: Padrão islâmico, construção geométrica e régua e compasso.

Abstract

This work is the beginning of the production of a didactic material focusing on geometric constructions of Islamic standards using non-graduated ruler and compass. This didactic material dealt with the historical part of Islamic geometric patterns; of elemental geometric constructions such as bisectors, straight perpendicular and parallel perpendicular bisectors, and polygons from the triangle to the decagon, and finally to constructions of Islamic patterns all using only a non-graduated ruler and compass. All the constructions presented in this work were made with the aid of the Geogebra program.

Keywords: Islamic pattern, geometric construction and ruler and compass.

Conteúdo

1 Introdução

O objetivo do presente trabalho é fornecer ferramentas necessárias para que um estudante de matemática do ensino fundamental, que tenha tido os primeiros contatos com régua e compasso, possa identificar, reproduzir ou até mesmo criar padrões geométricos como aqueles utilizados produzidos na cultura Islâmica, chamados aqui de Padrões Islâmicos. Para isso utilizaremos construções geométricas com régua (não graduada) e compasso. Todas as figuras construídas foram feitas com uso do aplicativo Geogebra. Isso mostra ainda uma ótima aplicação dessa ferramenta nas artes, possibilitando obter figuras perfeitas para uso na produção de pinturas e mosaicos.

Os Padrões Islâmicos são tradições artísticas, eminentemente geométricas e simétricas. Remetem a uma tradição milenar, caracterizada por desenhos ricos em ornamentações, mosaicos coloridos e tantas outras formas indescritíveis, onde o uso dos padrões geométricos e suas modulações têm grande motivação simbólica. É considerada uma atividade nobre, sagrada e que utiliza dos mais primitivos conceitos da matemática.

Formas notáveis e complexas, com toda a exuberância e magnitude, podem ser criadas através do uso de uma régua não graduada e do compasso, onde com a simplicidade destas ferramentas, surge um encadeamento de padrões.

Notadamente, a matemática aqui se dá via assimilação consciente de padrões, conceitos e formas. No ensino de geometria, o estudo dos padrões islâmicos podem ser utilizados como atividade adicional ao conteúdo, pois além de fixar construções geométrica elementares, podem ainda servir como um incentivo ao início de produções artísticas feitas com uso de régua e compasso.

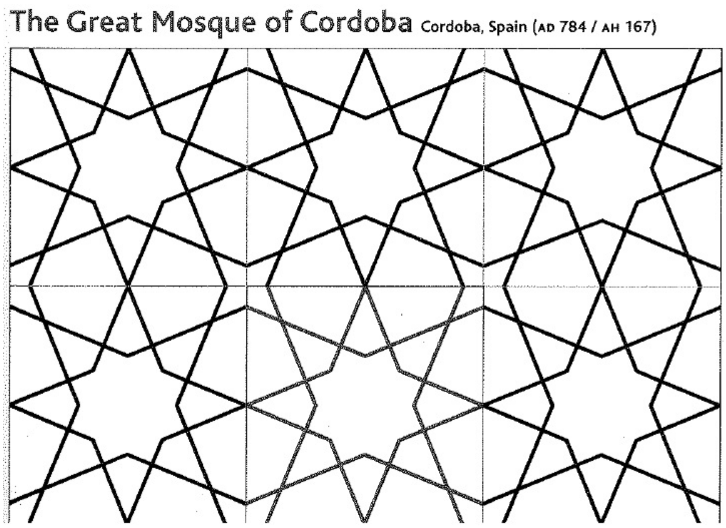
A dificuldade no aprendizado da matemática não é um tema novo, assim algumas atividades práticas, que focam na observação e criatividade, podem ser um atrativo para alunos que tenham dificuldades com os conteúdos formais do ensino de matemática. Com a utilização da régua e do compasso os alunos poderão criar figuras complexas através de procedimentos relativamente simples. As construções apresentadas neste trabalho seguem um passa-a-passo de forma a orientar cada etapa da construção dos padrões. Ao estudar padrões islâmicos, os estudantes estarão entrando em contato com uma rica tradição e cultura do mundo islâmico que encanta diversas pessoas nos palácios pelo mundo.

Inicialmente trataremos da parte histórica dos padrões islâmicos, mostrando que diferentemente da cultura ocidental, os palácios não podiam conter figuras de animais (incluindo pessoas), por isso desenvolveram sofisticados padrões geométricos. Em seguida, apresentaremos algumas construções geométricas elementares como a construção da bissetriz, da mediatriz, de retas perpendiculares e paralelas e construções de alguns polígonos regulares até o decágono. A título de curiosidade, apresentaremos construções "aproximadas"do heptágono e do eneágono regular. Um resultado clássico sobre construções de polígonos regulares diz que é impossível construir somente com o uso de régua e compasso o heptágono e o eneágono regular [9]. Depois construiremos alguns padrões islâmicos indicando cada etapa da construção; começaremos por um padrão relativamente simples, que se encontra em uma Mesquita em Cordoba na Espanha, e terminaremos com um padrão mais elaborado que se encontra na Mesquita de Al-Salih Tala'i no Egito. Ao término de cada padrão mostraremos como seria o ladrilhamento. Todos os desenhos foram feitos no programa Geogebra que é livre e pode ser baixado pela internet de forma gratuita (https://www.geogebra.org/).

2 Parte Histórica

De acordo com Grube [4], há uma grande e rica tradição no mundo islâmico em relação a arte na criação de ornamentos simétricos e geométricos que, com o passar dos anos, tais ornamentos, com o auxílio da matemática, tiveram um processo de criação aprimorado ao longo dos séculos. Dentre os exemplos da geometria do padrão islâmico se pode apontar os palácios de Alhambra em Granada, Alcazar em Sevilha, a grande Mesquita de Córdoba e tantos outros que foram construídos com tetos, pisos e paredes com figuras de padrões geométricos, como observado nas Figuras 1.

Figura 1 – Padrão utilizado na Mesquita de Cordoba/Espanha (784)



Fonte: Eric Broug, 2008, p. 27

Historicamente, embora seja a geometria islâmica um padrão que vem desde tempos mais remotos, Leite [8] sinaliza que a sua história é herdada da Antiguidade, levada, inclusive, à Espanha, pelo povo muçulmano e misturada à cultura cristã. Por ser um padrão que vem desde a Antiguidade, abrange não somente a arte, mas também a dança, literatura, teatro, música e outros, disseminados pelo povo do Oriente Médio desde o século VII, quando foi adotado o islamismo.

Harris e Braz [5] explicam que a história dos padrões islâmicos teve como base a religião islâmica, sendo esta, elemento essencial na construção dos estados árabes, motivo este que fez com que religião e política se unissem. Somado a isso, fator histórico de grande relevância a ser citado é o fato de o Islamismo não admitir que seja feita a utilização de figuras humanas nas manifestações artísticas e, desta forma, os árabes tiveram que desenvolver sua arte abstrata em figuras simétricas.

A respeito dessa abordagem de Harris e Braz quanto a religião, para Santos [10], de um modo geral, não se pode afirmar que a arte islâmica abrange somente as manifestações que surgiram diretamente da prática religiosa. Isto porque tem sido encontrado termos que envolvem todos os tipos e gêneros da arte feita pelos povos muçulmanos, ligadas ou não à religião.

Kaiuca e Kubrusly [6] afirmam que, dentre outros fatores, os padrões islâmicos foram expandidos e, com esta expansão do Islamismo, o mundo árabe ganhou novos contornos na arte por meio dos mosaicos, com características fundamentalmente romanas. Porém, devido aos fatores de cunho religiosos que proíbem a reprodução de seres vivos, tanto animais quanto homens, a arte islâmica passou a adotar como fator motivador os arranjos geométricos, facilmente distinguidos pelos árabes.

Sobre a arte e figuras, Harris e Braz, enfatizam que a religião islâmica não permitia a exposição de animais ou seres humanos e, por isso, devido a não aceitação de figuras humanas nas manifestações artísticas, os árabes tiveram que desenvolver toda uma técnica própria voltada para essa área, mesmo sem terem muito conhecimento dos conceitos matemáticos que usavam.

Contudo, tais padrões também se devem a diversas culturas, tais como persas, gregos e romanos, porém, os islâmicos que aperfeiçoaram ao longo dos séculos, fixando no mundo um estilo formado por complexos esquemas, fazendo de construções geométricas os assim chamados padrões islâmicos.

Várias foram as artes criadas e desenvolvidas pelos artesãos, mas, segundo Silva [11], era fato que a arte artesã sempre foi muito rica, embora eles não tivessem conhecimento profundo da matemática, possuíam técnicas de construções geométricas que se assemelham muito das questões propostas pelos antigos matemáticos gregos. Ainda assim, os artesãos começaram a trocar a pedra dura por peças cerâmicas, multicores, esmaltadas e com um formato que pudesse garantir que sua reprodução fosse feita com tendência ao infinito.

De acordo com Barison e Póla [1], os encontros entre artesãos e matemáticos contribuíram significativamente na solução dos problemas dos artesãos, com sessões matemáticas em que eram dadas instruções quanto às práticas da geometria. Também trabalhavam construções geométricas em diferentes dimensões, de dois ou três padrões ornamentais, em que os artesãos eram aconselhados pelos matemáticos quanto a aplicação da geometria em sua arte.

Sobre esses encontros entre artesãos e matemáticos, Barison e Póla sinalizam permitir evidenciar serem práticas costumeiras do mundo islâmico, pois eram discutidas as falhas e os erros cometidos pelos artesãos na construção dos projetos geométricos. Eram erros que permitem verificar as diferenças entre a estética priorizada pelo artesão e os cálculos precisos considerados pelo matemáticos.

Dentre os padrões geométricos islâmicos, Souza [12] aponta os mosaicos que, por séculos, foram ganhando um novo sentido no mundo muçulmano, com grande importância à inspiração das geometrias. Tais padrões foram significativos para a Matemática, pois contribuíram para o avanço desta ciência por todo o mundo. Muitos foram os artistas que usaram os mosaicos como forma de geometria para sua arte, tal como o holandês Maurits Cornelis Escher que maravilhou o mundo das artes ao adotar a geometria dos mosaicos muçulmanos na sua arte por meio de desenhos que apresentavam repetições matemáticas. Sua arte foi disseminada ao longo dos séculos e tem sido usada em escolas de artes plásticas. Sua inspiração foi a Mesquita de Córdoba e o Palácio de Alhambra, em Granada, Espanha.

Conforme verificado até aqui, a arte islâmica sempre foi muito rica e influenciada pela religião. Sobre isso, Souza, enfatiza ser relevante explicar que participação da religião na arte islâmica e da ciência no mundo árabe se deu não pelo livro sagrado Alcorão Sagrado, mas, sim, pelo Profeta Mohamed. Foi este Profeta que estabeleceu a proibição ao uso de homens e animais nas atividades ligadas a arte que usada como justificativa, fatores metafísicos, biológicas e sociais.

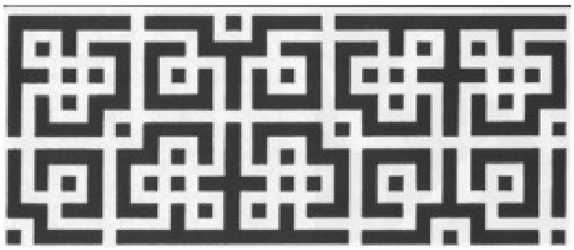
De acordo com Silva [11], a explicação metafísica, segundo crença do Profeta Mohamed, se deve pelo fato de, em vários reinos, durante a criação, a maior manifestação é o animal, enquanto os minerais e vegetais inferiores. Contudo, na busca pela demonstração de grande respeito pelo Criador, é reservada a Deus o privilégio da criação suprema, se satisfazendo apenas com a representação de seres e objetos considerados inferiores.

Quanto ao aspecto biológico, o Profeta Mohamed acreditava que aquilo que não era aproveitado pelo talento, reforça os que estão em constante uso. Assim, tem-se como exemplo o cego que tem uma sensibilidade e memória muito superiores às dos homens normais.

Sobre o aspecto social, Profeta Mohamed dá como justificativa, o horror ao fanatismo que degenera em adoração. Mas são muitas as exceções neste caso, como, por exemplo, as decorações de tapetes, brinquedos de crianças e outros que eram aceitos pelo Profeta.

Notadamente, como aponta Barison e Póla [1], a história dos padrões islâmicos vivenciou limitações à arte figurativa, tal fato levou a uma surpreendente evolução nas esferas não figurativas, pois o próprio livro sagrado, o Alcorão Sagrado, sugeria grandeza nas construções das Mesquitas. Como exemplo, o padrão geométrico na Mesquita de Simman no Irã , a Figura 2 dá um exemplo.

Figura 2 – Padrão utilizado na Mesquita de Simman/Irã



Fonte: : Barison e Póla (2007)

Segundo Barison e Póla, outros exemplos ricos em padrões geométricos islâmicos são o Taj Mahal em Agra na Índia, a Mesquita Bhong no Paquistão, o Palácio de Alambra na Espanha, com grandes obras arquitetônicas e decoração artística.

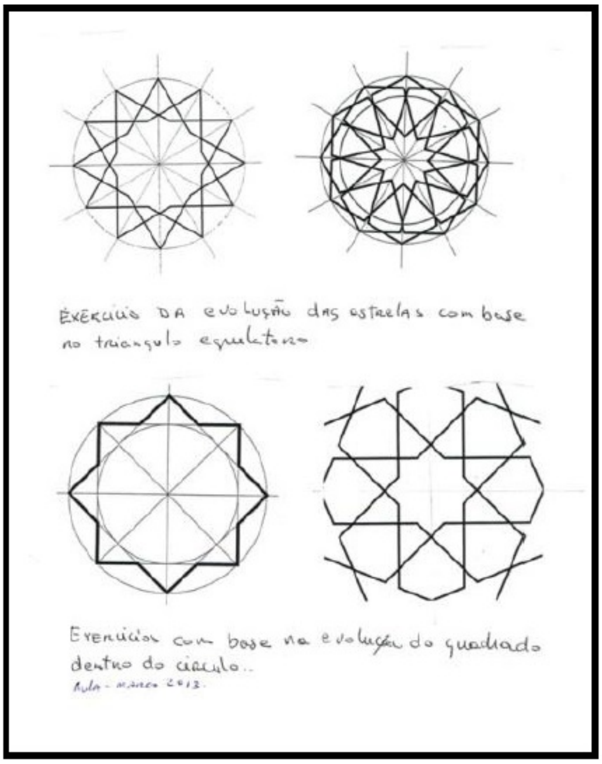
Conforme Barison e Póla, os padrões geométricos islâmicos não moviam apenas a arte, mas também a matemática. O estudo desses padrões na matemática foi muito incentivado pelo Califa Sharaf al Dawla, que contribuiu para o desenvolvimento de vários estudos nas áreas da astronomia e matemática, uma vez que são ciências originadas do Livro Sagrado, de acordo com a tradição islâmica. Neste caso, pelo fato de serem áreas originadas do próprio Criador, o Livro Sagrado possui a síntese máxima e absoluta de todas elas.

Segundo Harris e Braz [5], Califa Sharaf al Dawla realizou importantes avanços na matemática a partir de trabalhos originais em mosaicos, sendo ele, incentivado pelo Alcorão, pois o livro sagrado admite o envolvimento intelectual do homem com a natureza a partir de representações em estudos. Muitas foram as contribuições dadas por Califa Sharaf al Daula em seu livros, onde se podia observar diversas soluções de problemas geométricos essenciais para as construções geométricas, utilizado, para tanto, a régua e o compasso.

Sharaf se destacou em muitas áreas da matemática, principalmente, na geometria e trigonometria. De acordo com Barison e Póla [1], a contribuição dada por ele na geometria está relacionada com a resolução de problemas geométricos que podem ser encontrados na abertura da esfera. Algumas outras contribuições são a construção da parábola por pontos, a construção de um quadrado semelhante a outros quadrados, como construir um octógono usando a metade do lado de um triângulo equilátero entre outros.

Cunha Junior [3] procura exemplificar a criação de estrelas a partir da criação de painéis islâmicos, tendo como premissa, conseguir desenhar uma estrela para se fazer um painel de estrelas. Neste ponto, Cunha Junior (2013) primeiro explica a definição da representação da estrela, enfatizando ser uma visão direcionada para uma representação com 5 e 6 pontas, ainda que se possam fazer estrelas com quantidade infinita de pontas. Na formação das duas primeiras estrelas (Figura 3), se pode observar um quadrado dentro de um círculo e um triângulo equilátero. A partir de então, se tem a divisão das circunferências em uma quantidade de partes iguais, bem como a inscrição de figuras geométricas. Nos quatro desenhos constantes na Figura 3, é mostrado o resultado da criação de dois tipos de padrões básicos para fazer uma estrela, a partir de exercícios de simetria.

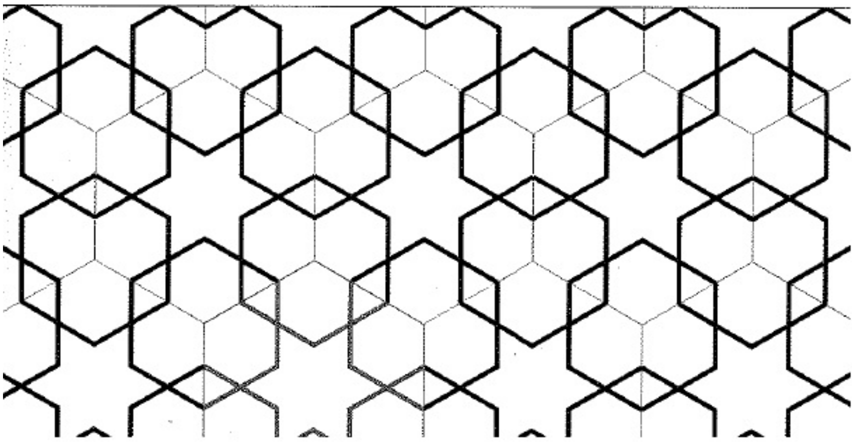
Figura 3 – Criação de uma estrela



Fonte: Cunha Junior, 2013, p. 109

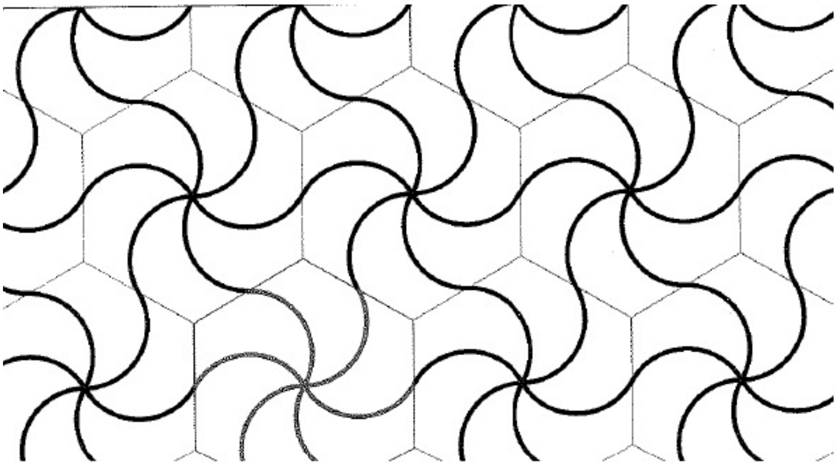
Existem em vários lugares do mundo desenhos estampados nas paredes que foram criados com sustentação nos padrões geométricos islâmicos conforme são apresentados por Broug [2], figuras 4 e 5 respectivamente.

Figura 4 – Padrão utilizado na Mesquita de Esrefoglu /Turquia (1297)



Fonte: Eric Broug, 2008, p. 37

Figura 5 – Padrão utilizado no Palácio de Alhambra/Espanha (1302)



Fonte: Eric Broug, 2008, p. 55

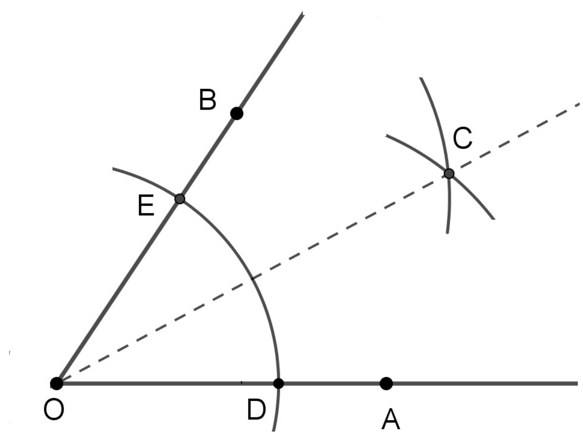
3 Construções Geométricas Elementares

Neste capítulo iremos tratar de algumas construções geométricas elementares. Veremos como se constrói: a Bissetriz de um ângulo; a Mediatriz de um segmento; retas perpendiculares e retas paralelas a uma outra reta, passando por um ponto estabelecido. Por fim, veremos a construções de alguns polígonos regulares e uma construção "aproximada"do heptágono e do eneágono regular.

3.1 Bissetriz

A bissetriz de um ângulo $\widehat{AOB}$, é uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ tal que $\widehat{AOC} = \widehat{COB}$, ou seja, a semirreta $\overrightarrow{OC}$ divide o ângulo $\widehat{AOB}$ em dois outros iguais. Podemos construir a bissetriz de $\widehat{AOB}$ traçando um arco centrado no ponto O, assim determinando os pontos D e E conforme figura 3.1.

Figura 3.1 – Bissetriz



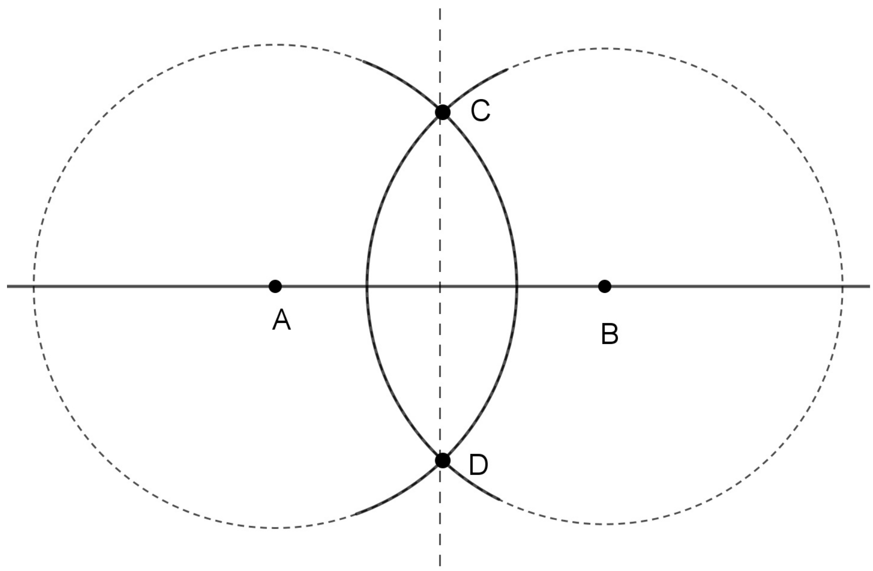
Fonte: Autor

Em seguida, traçam-se dois arcos de mesmo raio com centros em D e E, onde encontramos o ponto de interseção C. A semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$. Uma propriedade da bissetriz é que a bissetriz de um ângulo é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos lados do ângulo.

3.2 Mediatriz

A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é a reta perpendicular à $\overline{AB}$ que tem como ponto de interseção o ponto médio. A construção é feita traçando dois círculos centrado em A e B com mesmo raio; em seguida marcamos os pontos C e D nas respectivas interseções e traçamos a reta por esses pontos conforme figura 3.2.

Figura 3.2 – Mediatriz



Fonte: Autor

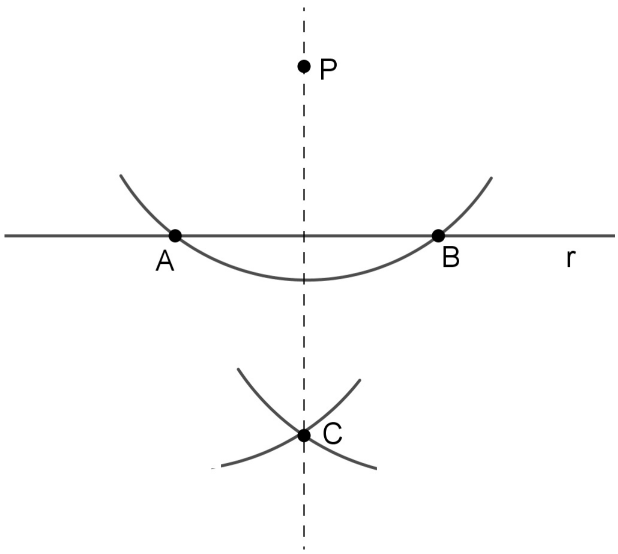
Uma propriedade importante é que a mediatriz é o conjunto de todos os pontos que equidistam dos extremos do segmento.

3.3 Perpendicular e Paralela

Nessa seção vamos aprender a traçar uma reta perpendicular a outra reta passando por um ponto dado. Vamos também traçar uma reta paralela a uma outra reta passando por um ponto dado.

Como construir uma perpendicular a uma reta r passando por um ponto P?
Dado a reta r e ponto P, com o compasso centrado em P traçamos um arco cortando a reta r em A e B (figura 3.3). Em seguida traçamos com mesmo raio arcos centrado em A e em B, de forma que obtemos o ponto C na interseção, assim a reta $\overleftrightarrow{PC}$ é perpendicular a r.

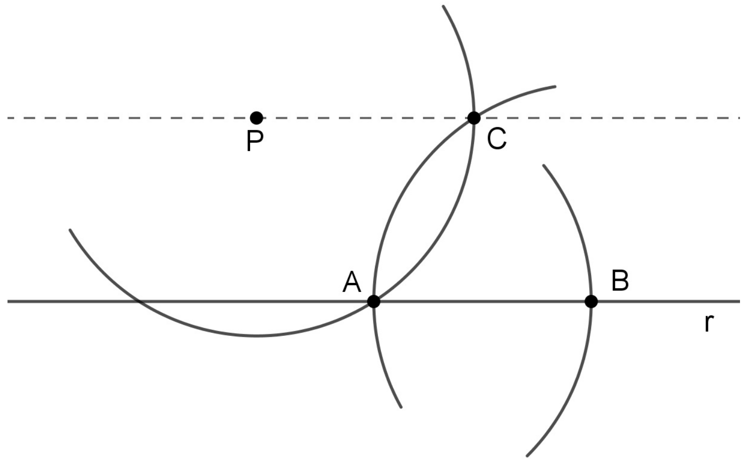
Figura 3.3 – Perpendicular



Fonte: Autor

Como construir uma paralela a uma reta r passando por um ponto P?
Uma forma é utilizar a construção anterior (figura3.3) e traçar uma perpendicular a reta $\overleftrightarrow{PC}$ passando por P. Outra forma é traçar três arcos com mesmo raio da seguinte forma. O primeiro com centro em P encontramos A na reta r; o segundo com centro em A, encontramos B na mesma reta e o terceiro com centro em B, encontramos C sobre o primeiro arco, conforme figura 3.4.

Figura 3.4 – Paralela



Fonte: Autor

A reta $\overleftrightarrow{PC}$ é paralela a reta r. Uma justificativa é que a construção foi feita com arcos de mesmo raio, os segmentos $\overline{PA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CP}$ são congruentes formando um paralelogramo.

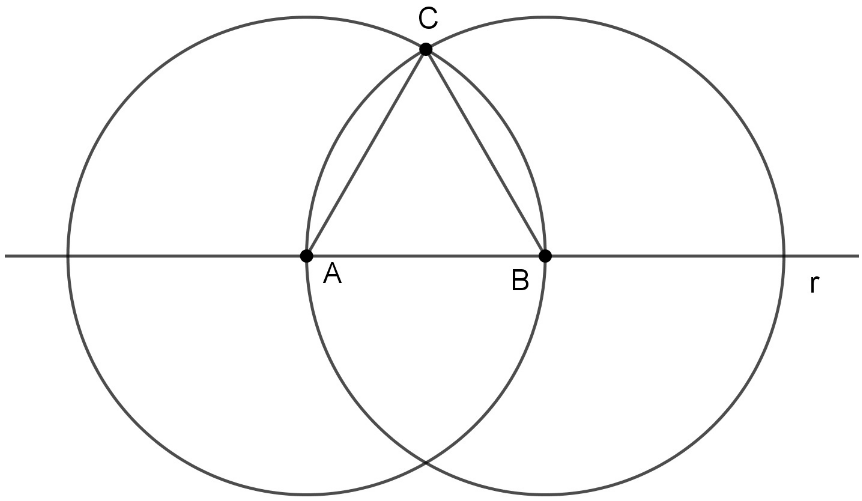
3.4 Construções de Polígonos

Nessa seção apresentaremos as construções de alguns polígonos regulares, do triângulo ao decágono. Como temos considerado, as construções serão feitas utilizando somente régua (não graduada) e compasso. Por facilidade, os passos das construções serão feitos em tópicos.

3.4.1 Triângulo

1. Trace a reta r e marque os pontos A e B.
2. Trace dois círculos de raio $\overline{AB}$ centrados em A e B, encontrando assim o ponto C dado pela interseção conforme a figura 3.5.
3. Por fim, trace os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ formando o triângulo ABC.

Figura 3.5 – Construção do Triângulo



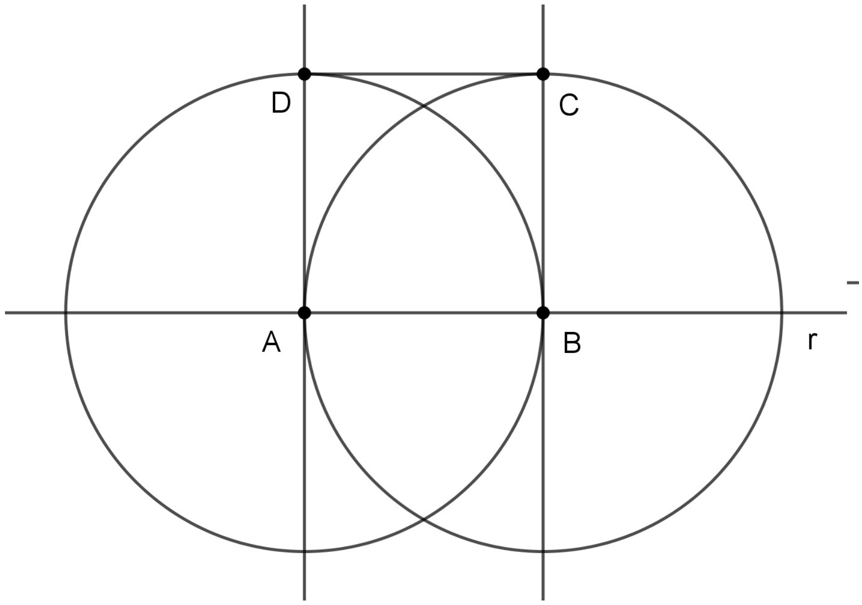
Fonte: Autor

O triângulo construído é equilátero, pois os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ tem a medida dos raios dos círculos que são iguais. Portanto os ângulos são iguais.

3.4.2 Quadrado

1. Trace a reta r e marque os pontos A e B.
2. Trace dois círculos de raio $\overline{AB}$ centrados em A e B.
3. Trace perpendiculares à reta r passando por A e B, encontrando os pontos C e D conforme a figura 3.6.
4. Trace o segmento $\overline{CD}$ formando o quadrado $ABCD$.

Figura 3.6 – Construção do Quadrado



Fonte: Autor

No quadrilátero construído tem-se $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ são congruentes, pois são os raios dos círculos, todos de mesma medida. Os ângulos $\widehat{DAB}$ e $\widehat{CBA}$ são retos.

Como a reta que passa selo segmento $\overline{CD}$ é tangente aos dois círculos, temos que $\widehat{BCD}$ e $\widehat{CDA}$ também são ângulos retos. Traçando a diagonal $\overline{BD}$ teremos dois triângulos congruentes DAB e DCA. Portanto $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$, mostrando assim que temos quatro lados iguais e quatro ângulos iguais.

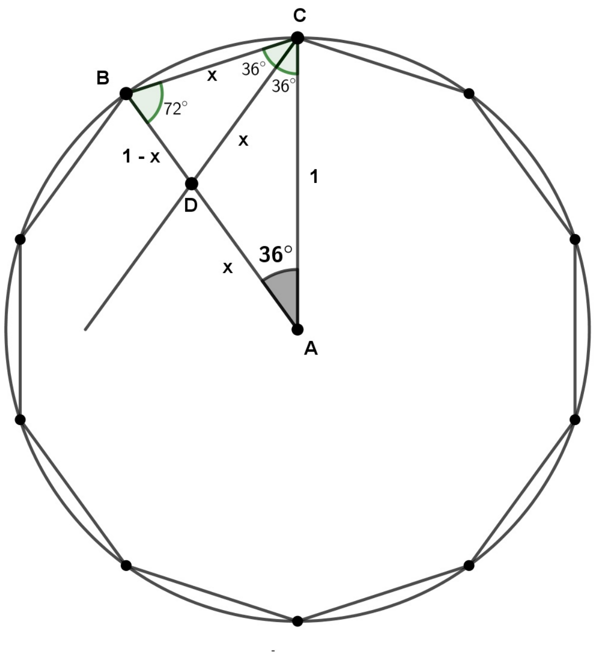
3.4.3 Pentágono

Considere um decágono regular inscrito em um círculo de raio unitário. O ângulo central de um polígono regular é dado por

$$A_c = \frac{360^\circ}{n^\circ lados}.$$

Portanto o ângulo central do decágono é $A_c = 36^\circ$. Denotando o lado do decágono por x, considere a figura seguinte:

Figura 3.7 – Construção do Pentágono



Fonte: Autor

Na figura, a semirreta $\overrightarrow{CD}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{ACB}$. Portanto o triângulo CDB é isósceles e, consequentemente, os triângulos ABC e CDB são semelhantes. Pelo teorema de Tales o lado x satisfaz

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x};$$

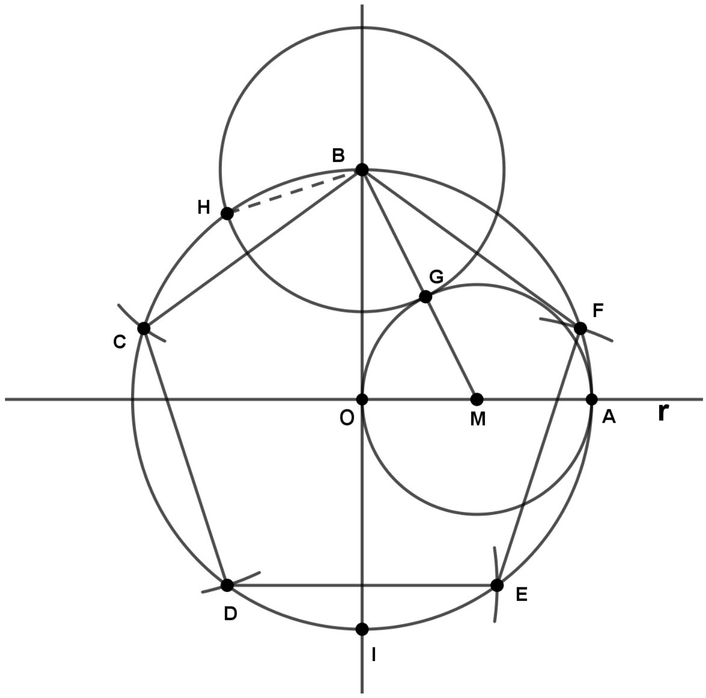
Equivalentemente, x é uma solução positiva da equação de segundo grau

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Para construirmos o pentágono, vamos construir um segmento cuja medida satisfaz a mesma equação de segundo grau acima. Para isso faremos os seguintes procedimentos.

1. Trace uma reta r e depois trace um círculo de raio OA com centro em $O \in r$. Vamos construir um pentágono regular inscrito neste círculo.
2. Trace a reta perpendicular à r por O encontrando os pontos B e I na interseção com o círculo.
3. Marque com M o ponto médio de $\overline{OA}$. Trace o círculo de raio $\overline{OM}$ centrado em M.
4. Trace o segmento $\overline{BM}$, encontrando o ponto G.
5. Trace o círculo de raio $\overline{BG}$ centrado em B encontrando o ponto H.
6. Com o compasso de abertura $\overline{BH}$ centre em H e marque o ponto C, de onde teremos a relação entre os arcos $\overset{\frown}{BC} = 2\ \overset{\frown}{BH}$. Marque os outros pontos com abertura $\overline{BC}$ formando o pentágono $BCDEF$.

Figura 3.8 – Construção do Pentágono



Fonte: Autor

Para mostrar que esse pentágono é regular, por simplicidade, podemos considerar o raio $\overline{OA}$ do círculo como unitário. Daí teremos, pelo Teorema de Pitágoras

$$\overline{BM}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OM}^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

portanto

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Temos ainda que

$$\overline{BG} = \overline{BM} - \overline{GM} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

donde

$$\overline{BG} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

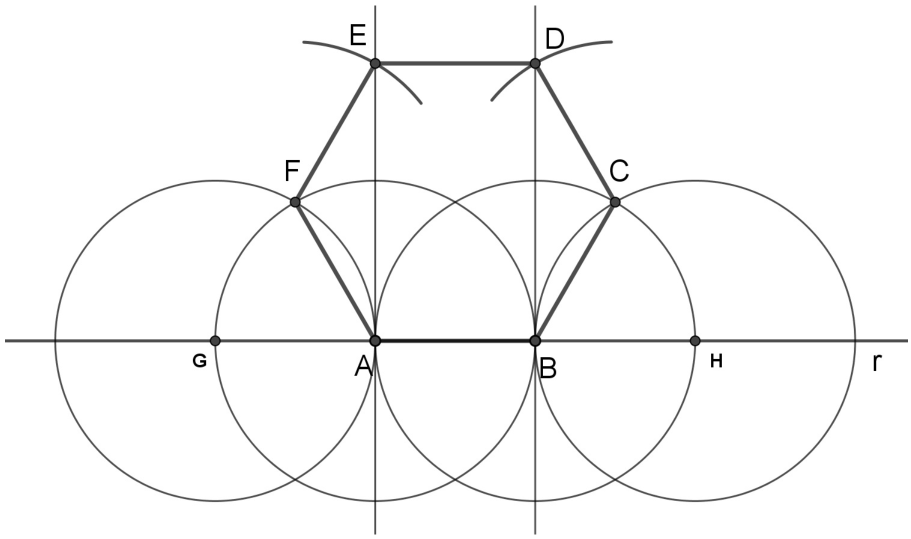
Substituindo esse valor na equação de segundo grau acima, podemos verificar que, de fato, a medida do segmento é raiz positiva da equação.

Como a relação entre o segmento e o ângulo é biunívoca, podemos concluir que o polígono construído é portanto um pentágono regular.

3.4.4 Hexágono

1. Trace a reta r e marque os pontos A e B.
2. Trace dois círculos de raio $\overline{AB}$ centrados em A e B. Denote por G e por H, respectivamente, as interseções desses círculos com a reta r. Centrando o compasso em G faça outro círculo e novamente em H mais um círculo, encontrando na interseção os pontos C e F, respectivamente.
3. Trace retas perpendiculares à reta r por A e B, conforme figura 3.8.
4. Trace os arcos com o mesmo raio dos círculos anteriores centrado em C e F encontrando os pontos D e E pertencentes as perpendiculares.
5. Trace os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$ formando o hexágono $ABCDEF$.

Figura 3.8 – Construção do Hexágono



Fonte: Autor

O polígono construído tem $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{AF}$, pois são raios dos círculos que são congruentes. Os segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{CD}$ foram construídos com o mesmo raio conforme o passo 4 e $\overline{ED}$ é o lado oposto do retângulo $ABDE$, portanto todos os lados do polígono são iguais, basta agora verificar as medidas dos ângulos para ver se o hexágono é regular. Conforme visto na construção do triângulo equilátero, temos que $\widehat{CBH} = 60^\circ$, portanto temos o ângulo interno $\widehat{CBA} = 120^\circ$. Pelo mesmo motivo temos que $\widehat{BAF} = 120^\circ$. O ângulo $\widehat{EAF} = 30^\circ$, pois a reta que passa por $\overline{AE}$ é perpendicular à reta r. Como o triângulo AFE é isósceles o ângulo $\widehat{AEF}$ também é de 30°, portanto o ângulo interno $\widehat{EFA} = 120^\circ$; pelo mesmo motivo temos o ângulo $\widehat{DCB} = 120^\circ$. Por fim, temos o ângulo $\widehat{DEF} = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$ e pelo mesmo motivo temos o ângulo $\widehat{CDE} = 120^\circ$. Como todos os ângulos também são iguais, temos que o hexágono é de fato regular.

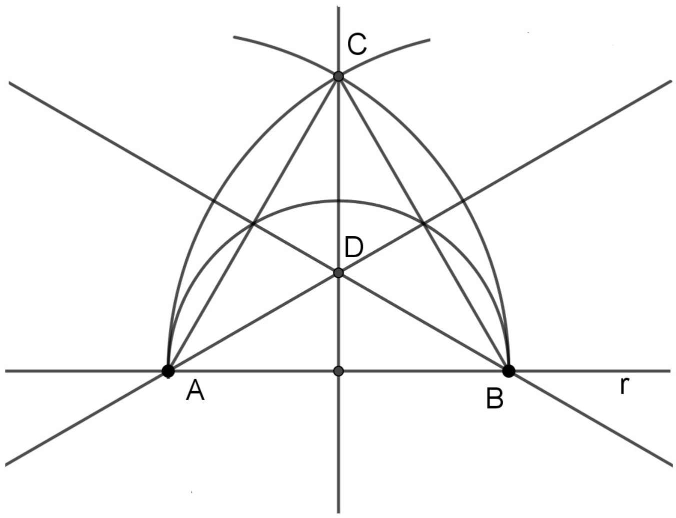
3.4.5 Heptágono

Nem todos os polígonos regulares admitem construções utilizando somente régua e compasso [9]. Este é o caso do heptágono regular. Apesar disso, podemos fazer uma construção com boa aproximação. Por ser um pouco mais elaborada, dividiremos essa construção em duas partes.

Primeira parte.

1. Trace uma reta r e marque dois pontos A e B.
2. Trace a mediatriz de $\overline{AB}$. Com a medida do raio $\overline{AB}$ trace dois arcos centrados em A e B, encontrando o ponto C. Unindo os pontos, temos o triângulo ABC.
3. Traçe as mediatrizes relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, encontrando o ponto D.

Figura 3.9 – Construção do Heptágono

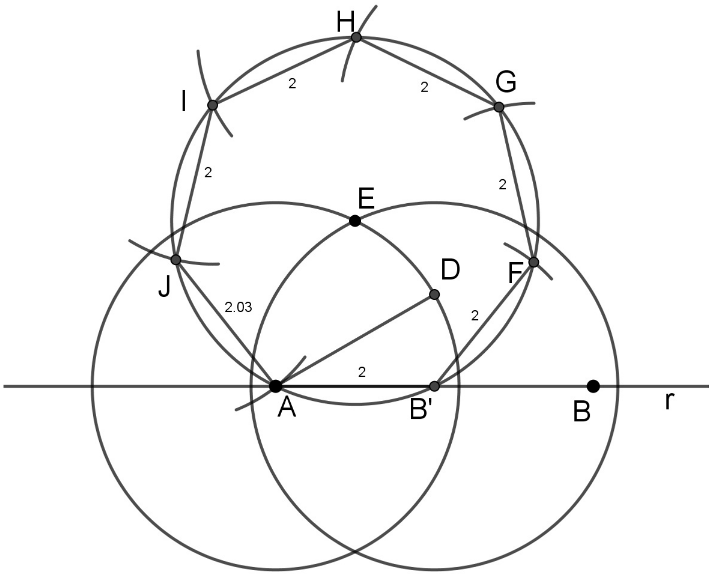


Fonte: Autor

Para continuar a construção foram retirados alguns objetos construídos e assim seguimos com a segunda parte.

4. Denote por B' o ponto médio de $\overline{AB}$, e trace dois círculos de raio $\overline{AD}$ e centrados em A e B' encontrando assim o ponto de interseção E. O ponto E será o centro do círculo circunscrito ao heptágono de lado $\overline{AB'}$.
5. Com o compasso centrado em B' e abertura $\overline{AB'}$, traçamos o outro vértice do heptágono. Faremos isso sucessivamente até obtermos o sétimo ponto no círculo.
6. Trace os segmentos $\overline{B'F}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$ E $\overline{JA}$ formando o heptágono $AB'FGHIJ$. Considerando por exemplo que o segmento $\overline{AB'}$ meça 2 unidades de comprimento, utilizando o aplicativo Geogebra podemos obter a medida do segmento $\overline{JA}$, mostrando de fato, que ele não é congruente aos outros segmentos, apesar de ser uma boa aproximação. Como mencionado anteriormente, não é possível a construção com régua e compasso de um heptágono regular (veja [9]).

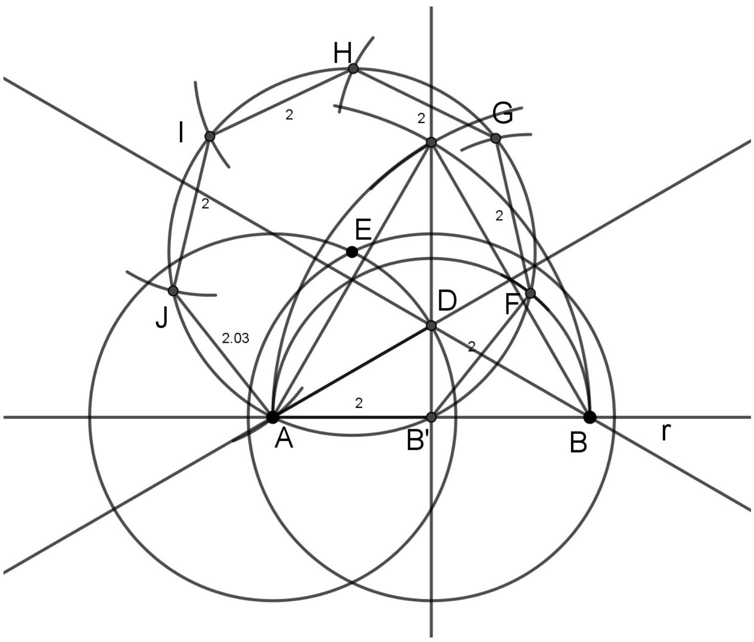
Figura 3.10 – Construção do Heptágono



Fonte: Autor

Quando as construções ficarem muito carregadas, faremos divisões em quantas partes forem necessárias e mostraremos a construção por inteira conforme abaixo.

Figura 3.11 – Construção do Heptágono



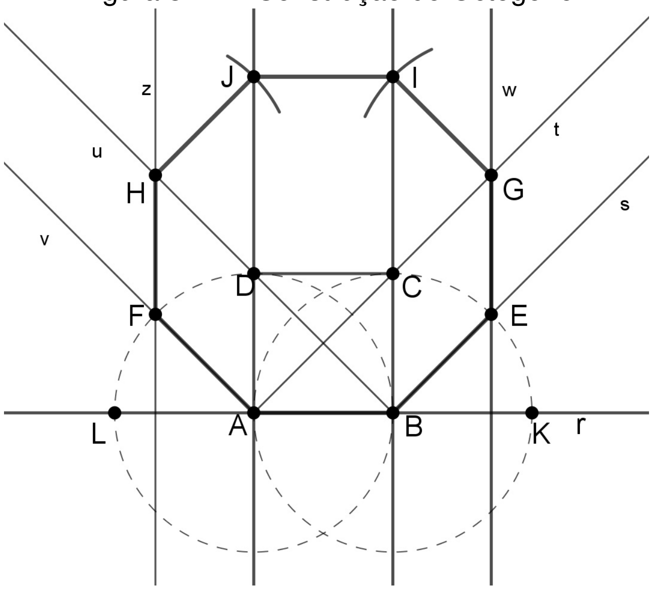
Fonte: Autor

3.4.6 Octógono

Vamos apropriar da construção do quadrado para os passos inicias da construção do octógono.

1. Trace uma reta r e marque um segmento $\overline{AB}$ sobre ela. Construa agora um quadrado de lado $\overline{AB}$ e trace dois círculos de raio $\overline{AB}$ centrados nas extremidades deste segmento conforme a figura a seguir.
2. Trace as bissetrizes s, t, u e v dos ângulos $\widehat{CBK}$; $\widehat{DAB}$; $\widehat{CBA}$ e $\widehat{DAL}$ respectivamente, encontrando os pontos de interseção destas com os círculos construídos na etapa anterior. Denotaremos estes pontos por E e F conforme a figura.
3. Trace as perpendiculares à r pelos pontos E e F, encontrando assim os pontos G e H.
4. Com o compasso de abertura $\overline{AB}$, centra-se em G encontrando o ponto I e centrado em H encontra-se o ponto J conforme a figura 3.12.
5. Trace os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BE}$, $\overline{EG}$, $\overline{GI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JH}$, $\overline{HF}$ e $\overline{FA}$ formando o octógono regular $ABEGIJHF$.

Figura 3.12 – Construção do Octógono



Fonte: Autor

Por construção vemos que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BE}$, $\overline{GI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JH}$, e $\overline{FA}$ são congruentes, pois foram construídos com o mesmo raio. As bissetrizes t e r, são paralelas por construção pois dividem ângulos iguais em mesma direção sobre a mesma reta. A reta w e a reta suporte que passa pelo segmento $\overline{BC}$ são perpendiculares à reta r, portanto paralelas. Desta forma, o quadrilátero $BCGE$ é um paralelogramo e fazendo uma análise mais detalhada, vemos que é um losango. Portanto o segmento $\overline{GE} \equiv \overline{BC}$, de maneira análoga podemos dizer o mesmo do segmento $\overline{HF}$ em relação ao $\overline{DA}$. Assim, vemos que o octógono possui todos os lados congruentes.

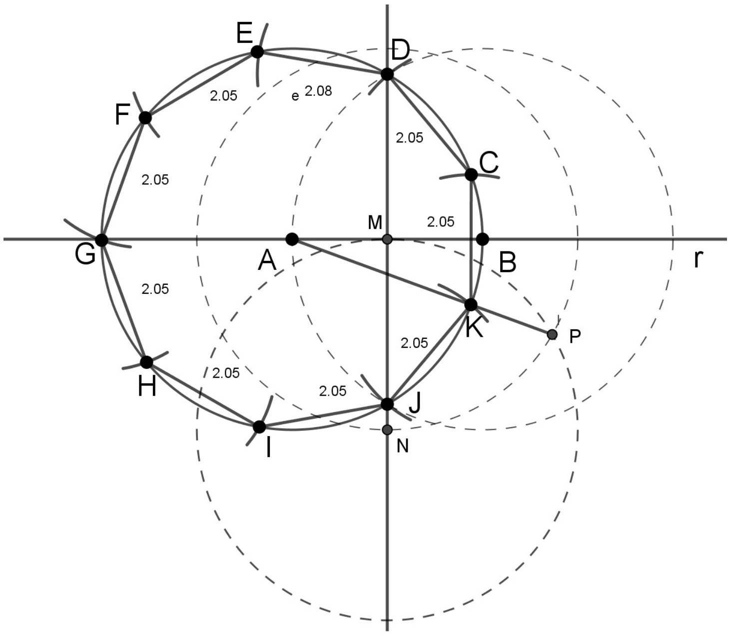
Os ângulos internos do octógono medem 135°. O ângulo $\widehat{EBC} = 45^\circ$, pois é dividido pela bissetriz s, assim o ângulo $\widehat{EBA}$ do octógono mede 135°, pois $\widehat{EBA} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$. O trapézio $BIGE$ é isósceles de ângulos da base igual a 45°. Como a soma dos ângulos internos é igual a 360° e $\widehat{IGB}$ e $\widehat{GEB}$ são iguais, temos cada um medindo 135°. O ângulo $\widehat{GIJ} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$. Fazendo as mesmas análises para os ângulos A, F, H e J, pois existe simetria na construção do octógono, vemos que todos os ângulos internos do octógono valem 135°, logo o polígono é regular.

3.4.7 Eneágono

Assim como o heptágono regular, o eneágono regular não pode ser construído somente com uso da régua e do compasso [9]. Apesar disso, é possível construí-lo com boa aproximação.

1. Trace a reta r e sobre ela trace o círculo $\overline{AB}$ de centro A. Centre em B e trace o círculo de raio $\overline{AB}$ encontrando os pontos D e J.
2. Trace a perpendicular pelo ponto médio de AB encontrando M. Trace o círculo centrado em M, encontrando o ponto N.
3. Trace o círculo centrado em N, encontrando o ponto P, conforme a figura 3.13. Trace o segmento $\overline{AP}$ encontrando o ponto K. O segmento $\overline{JK}$ é o lado do eneágono inscrito no círculo de centro A.
4. Com o compasso de abertura $\overline{JK}$, marca-se os demais consecutivos pontos do eneágono.
5. Trace os segmentos $\overline{KC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$ E $\overline{IJ}$ formando o eneágono $CDEFGHIJK$.
6. Como pudemos verificar utilizando o Geoalgebra, o segmento $\overline{ED}$ ficou maior que os demais.

Figura 3.13 – Construção do Eneágono



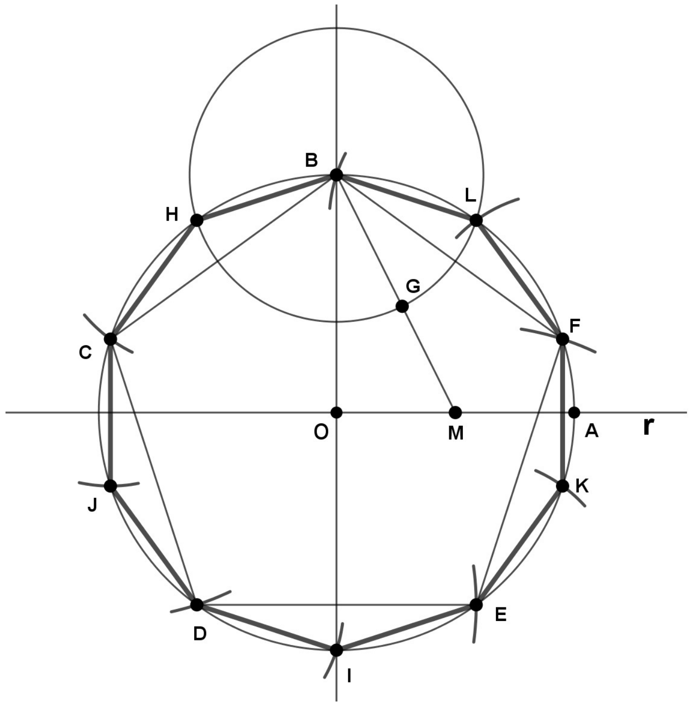
Fonte: Autor

3.4.8 Decágono

Para a construção do decágono, como podemos lembrar, utilizamos os mesmos passos da construção do pentágono.

1. Trace uma reta r e depois trace um círculo de raio $\overline{OA}$ com centro em O.
2. Trace a reta perpendicular à r por O encontrando os pontos B e I na interseção com o círculo.
3. Marque com M o ponto médio de $\overline{OA}$. Trace o círculo de raio $\overline{OM}$ centrado em M.
4. Trace o segmento $\overline{BM}$, encontrando o ponto G. Na construção do pentágono, mostramos que o segmento $\overline{BG}$ é congruente ao lado de um decágono inscrito no círculo de raio $\overline{OA}$.
5. Trace o círculo de raio $\overline{BG}$ centrado em B encontrando o ponto H. Repita o procedimento, agora centrado no ponto H obtendo o próximo ponto. Como vimos, o ciclo fecha ao retornarmos ao ponto G.
6. Trace os segmentos $\overline{BH}$, $\overline{HC}$, $\overline{CJ}$, $\overline{JD}$, $\overline{DI}$, $\overline{IE}$ $\overline{EK}$, $\overline{KF}$ $\overline{FL}$ e $\overline{LB}$, formando o decágono regular $BHCJDIEKFL$.

Figura 3.14 – Construção do Decágono



Fonte: Autor

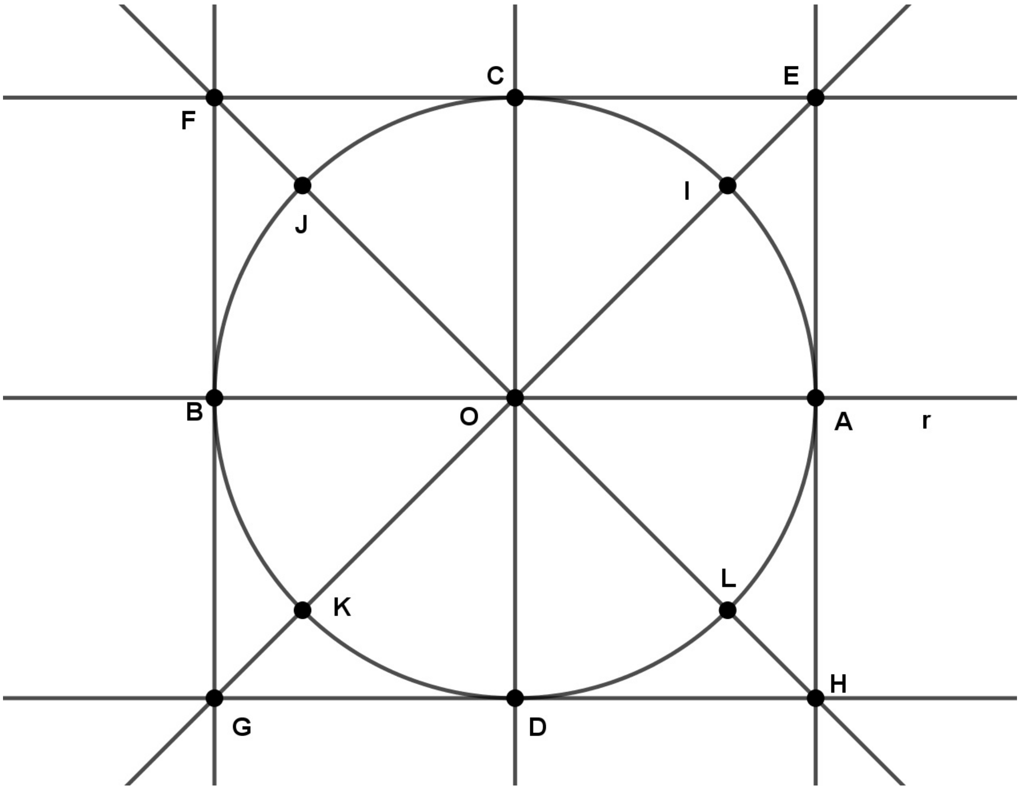
4 Alguns Padrões

Na parte histórica foi apresentado como os padrões islâmicos fazem parte de diversas construções em alguns lugares do mundo. Nesse capítulo vamos aprender como construir alguns padrões geométricos islâmicos, dos mais simples até os mais elaborados. Vamos começar pelo primeiro padrão apresentado nesse trabalho (figura 1) que foi utilizado na Mesquita de Cordoba na Espanha por volta do século VIII. Vamos dividir a construção do padrão em algumas etapas, quanto for necessário para melhor visualizar as construções. Na etapa posterior à apresentada, vamos retirar alguns detalhes de forma que não fique muito carregada as construções na etapa posterior.

4.1 Padrão Cordoba

1. Trace a reta r e faça o círculo de raio OA com o centro sobre r e $A \in r$. Marque o ponto B na interseção do círculo com a reta r.
2. Trace perpendiculares à r passando pelos pontos A, O e B e marque os pontos encontrado C e D.
3. Trace paralelas à r passando pelos pontos C e D encontrando o quadrado $EFGH$.
4. Trace as diagonais do quadrado encontrando os pontos I,J,K e L que fazem interseção com o círculo conforme a figura.

Figura 4.1.1 – Passo 1

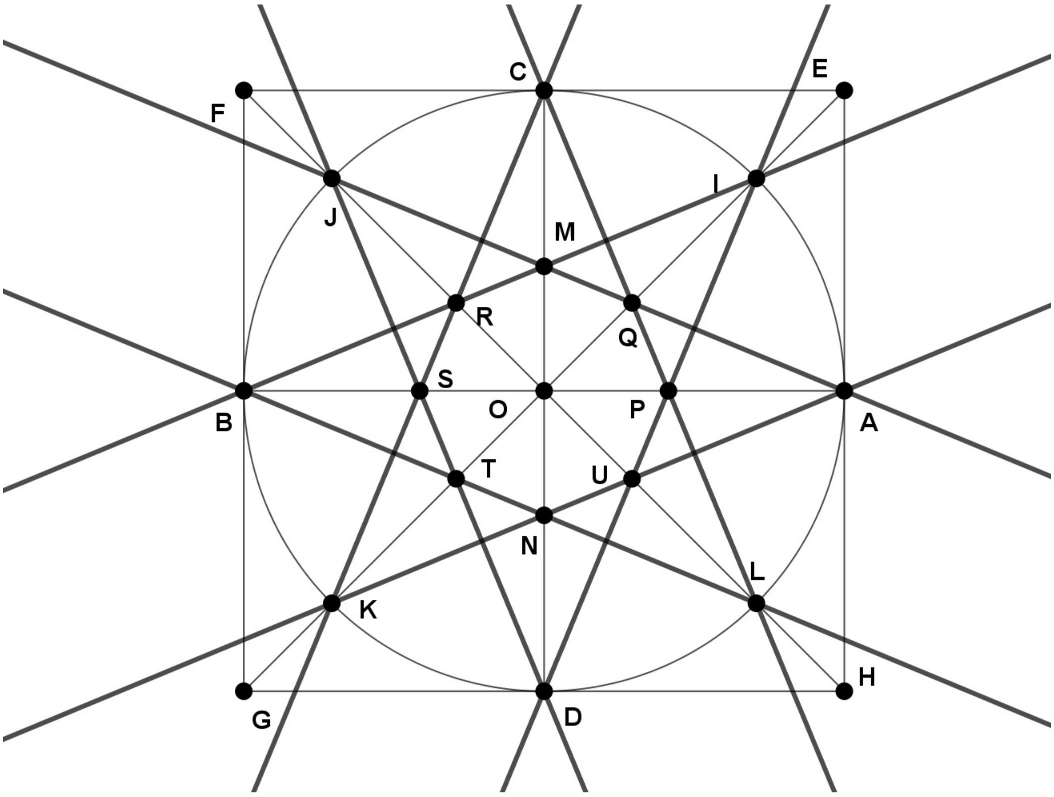


Fonte: Autor

Vamos deixar somente o quadrado com o eixo central e as diagonais para a próxima etapa.

5. Trace retas passando por $\overline{AJ}$, $\overline{BL}$, $\overline{BI}$ e $\overline{AK}$ encontrando os pontos P e S nas interseções.
6. Trace retas passando por $\overline{CK}$, $\overline{DI}$, $\overline{DJ}$ e $\overline{CL}$ encontrando os pontos M e N nas interseções.
7. Marque os pontos Q, R, T e U.

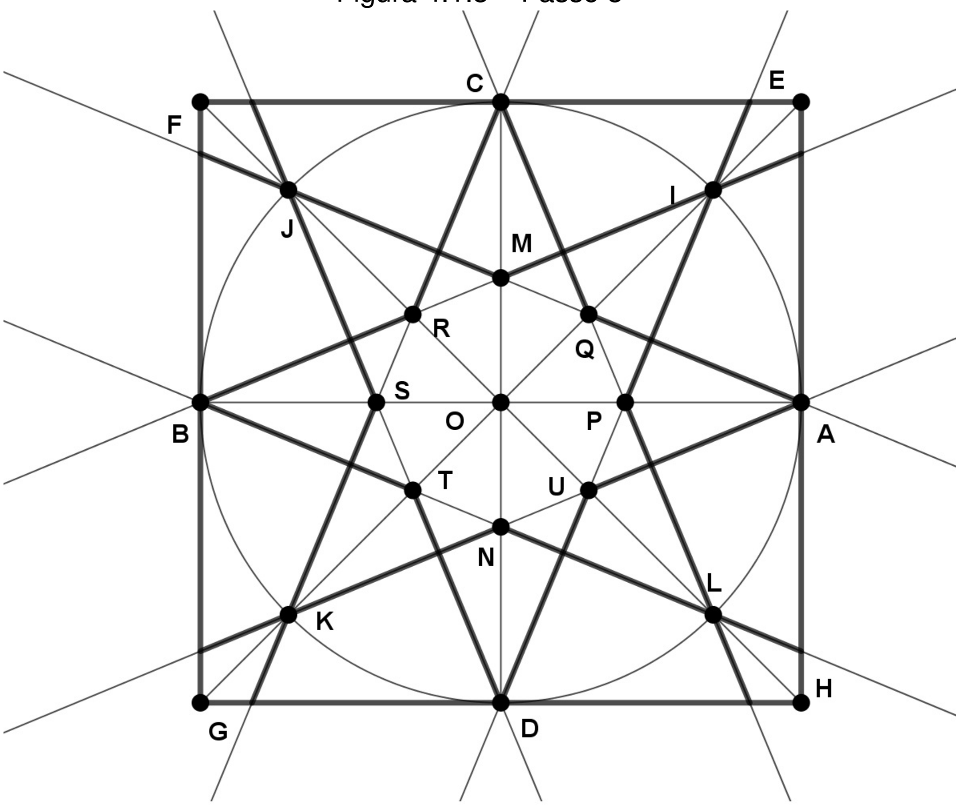
Figura 4.1.2 – Passo 2



Fonte: Autor

8. Vamos marcar os segmentos notáveis dentro do quadrado que é o polígono padrão para o ladrilhamento conforme mostrado na figura abaixo.

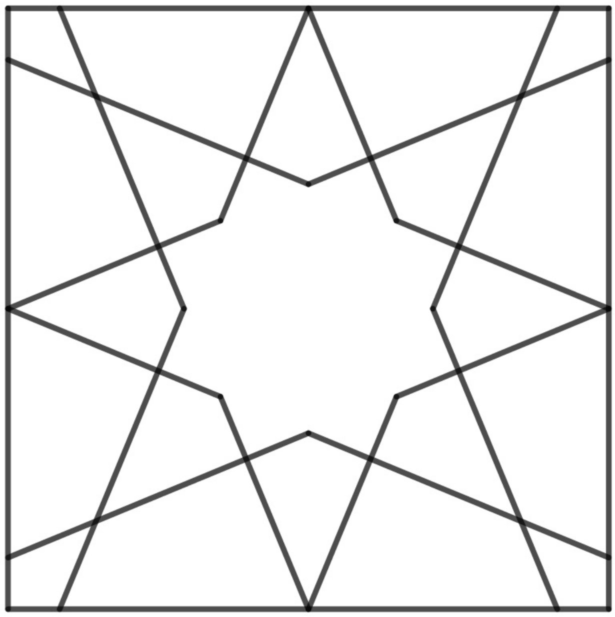
Figura 4.1.3 – Passo 3



Fonte: Autor

9. Vamos retirar os pontos e algumas construções que não precisamos para deixar somente o padrão encontrado.

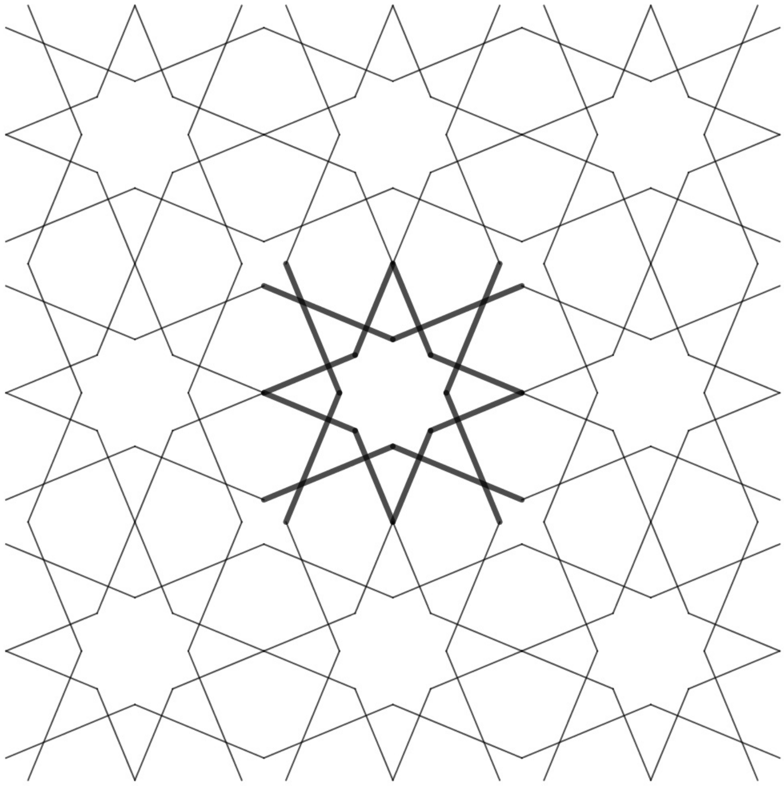
Figura 4.1.4 – Padrão de Cordoba



Fonte: Autor

Para fazermos o ladrilhamento, precisamos construir esse padrão ao redor, para formarmos a malha encontrada na Mesquita de Cordoba. Vale ressaltar que esse padrão não está exposto na Mesquita dessa forma, após ser construído, é feito pinturas que torna a apresentação ainda mais atraente. Esse não é o único padrão utilizado na Mesquita de Cordoba, existem vários outros expostos.

Figura 4.1.4 – Ladrinhamento



Fonte: Autor

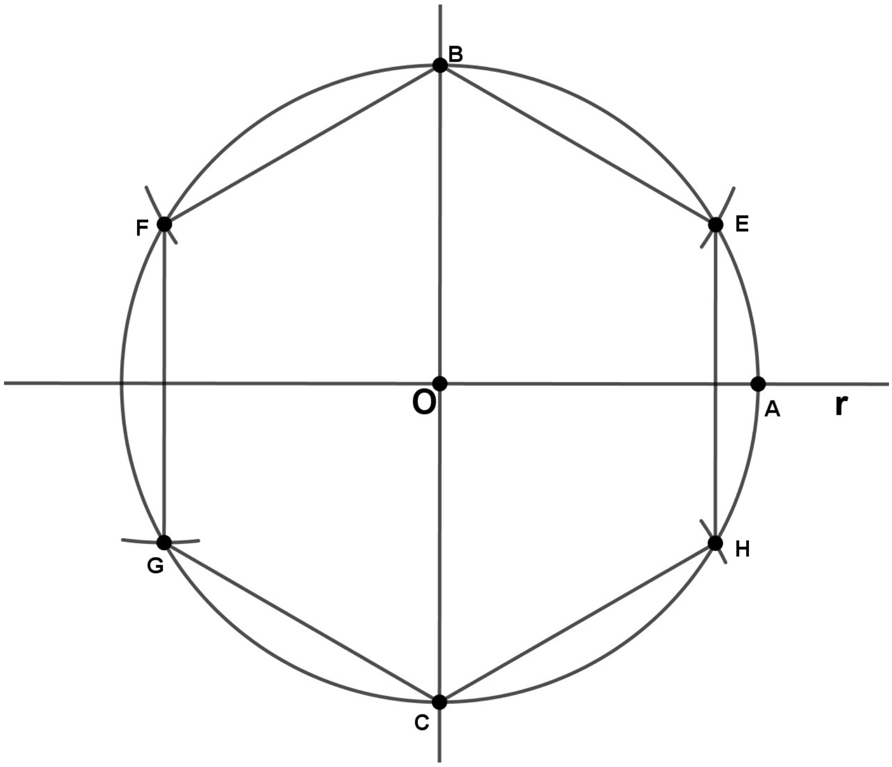
4.2 Padrão Mustansiriya Madrasa

Mustansiriya é um edifício em Bagdá no Iraque construído por volta de 1227. Esse edifício foi uma instituição de ensino que abrigou milhares de volumes importantes para época.

Para a construção desse padrão vamos seguir o mesmo formato do anterior. Esse padrão utiliza como base de ladrilhamento o hexágono, diferente do anterior que era um quadrado.

1. Trace a reta r. Trace o círculo com centro em O. Trace a perpendicular a r por O. Com o mesmo raio centrado em B, marcamos os pontos E, F, G e H de forma sucessiva.

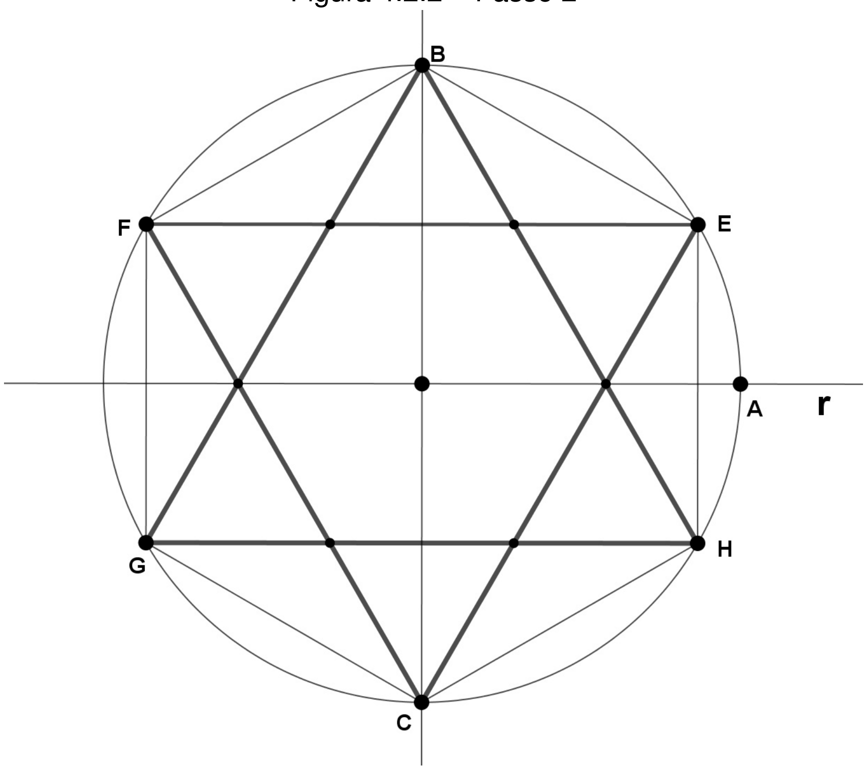
Figura 4.2.1 – Passo 1



Fonte: Autor

2. Trace os triângulos BGH e CEF. Marque os pontos de interseção entre os lados dos triângulos.

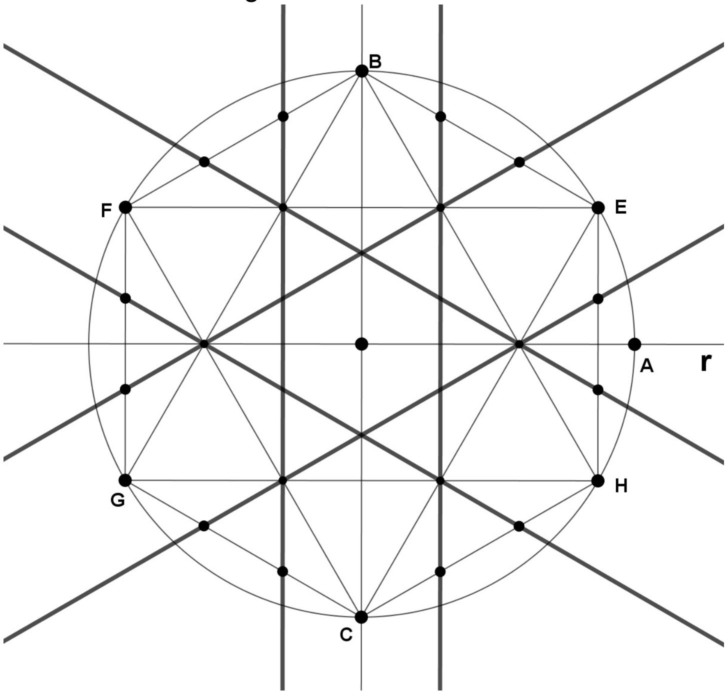
Figura 4.2.2 – Passo 2



Fonte: Autor

3. Trace retas pelos pontos de interseção encontrados entre os lados dos triângulos conforme a figura.
4. Marque os pontos de interseção das retas com os lados do hexágono.

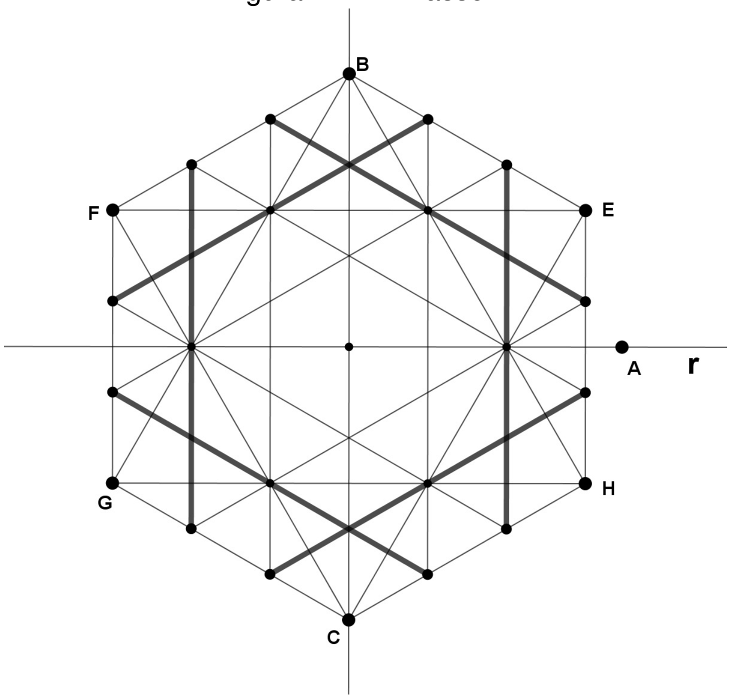
Figura 4.2.3 – Passo 3



Fonte: Autor

5. Trace os segmento conforme a figura encontrando o padrão desejado.

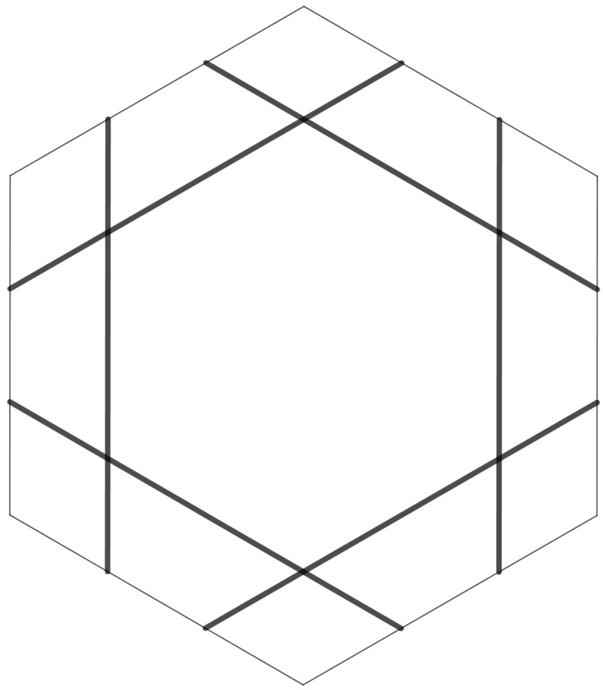
Figura 4.2.4 – Passo 4



Fonte: Autor

Retirando os segmentos secundários, temos o padrão construído na parede Mustansiriya Madrasa. Esse padrão se encontra nesse mesmo formato em alto relevo no edifício.

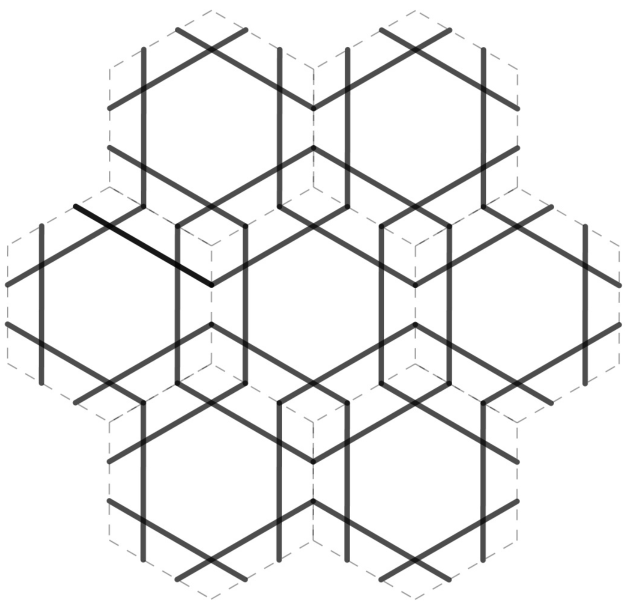
Figura 4.2.5 – Padrão Mustansiriya Madrasa



Fonte: Autor

Para fazermos o ladrilhamento, construímos o padrão um ao lado do outro conforme a figura.

Figura 4.2.6 – Ladrilhamento



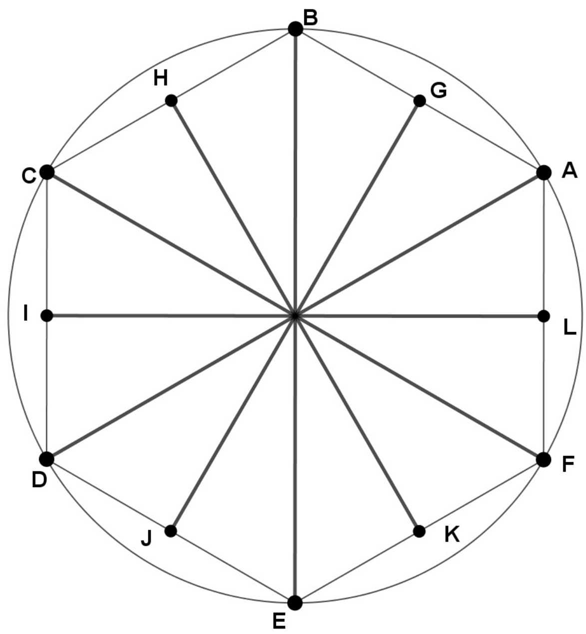
Fonte: Autor

4.3 Padrão Alambra

Alambra é um conjunto de palácios localizado em Granada na Espanha. Um padrão geométrico intrigante que está estampado em suas paredes é o que será apresentado a seguir. O polígono utilizado no ladrilhamento é o hexágono, o mesmo utilizado no padrão anterior, portanto para construção do hexágono que já foi apresentado anteriormente, iremos omitir algumas etapas.

1. Com o hexágono inscrito no círculo, trace as diagonais $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, e $\overline{CF}$.
2. Encontre os pontos médios dos lados do hexágono. Trace os segmentos $\overline{GJ}$, $\overline{HK}$, e $\overline{IL}$.

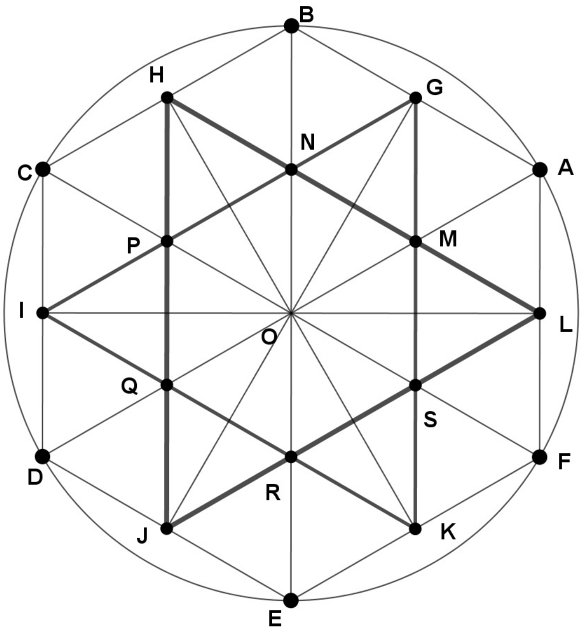
Figura 4.3.1 – Passo 1



Fonte: Autor

3. Trace os triângulos GIK e HJL. Marque os pontos de interseção M, N, O, P, Q E R entre os lados dos triângulos.

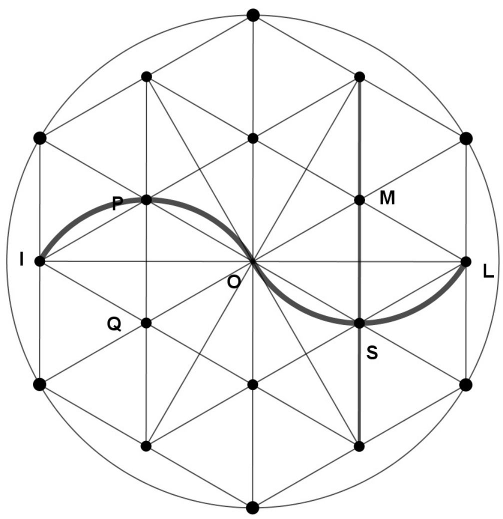
Figura 4.3.2 – Passo 2



Fonte: Autor

4. Centrado em Q e com raio $\overline{QO}$ trace o arco $\overset{\frown}{IPO}$, centrado em M e com raio $\overline{MO}$ trace o arco $\overset{\frown}{OSL}$.

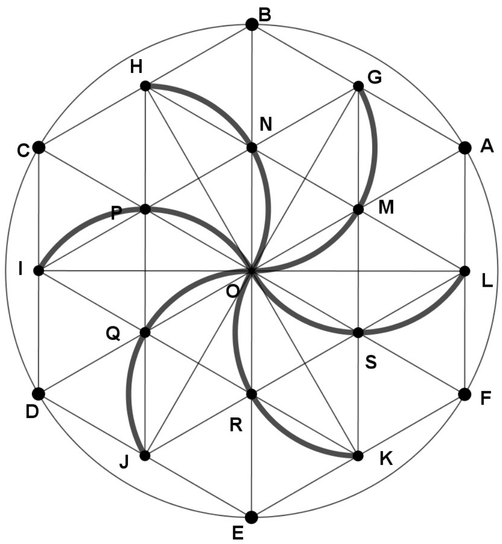
Figura 4.3.3 – Passo 3



Fonte: Autor

5. Centrado em P e com raio $\overline{PO}$ trace o arco $\overset{\frown}{HNO}$, centrado em S e com raio $\overline{SO}$ trace o arco $\overset{\frown}{ORK}$.
6. Centrado em R e com raio $\overline{RO}$ trace o arco $\overset{\frown}{JQO}$, centrado em N e com raio $\overline{MO}$ trace o arco $\overset{\frown}{GMO}$ formando todos os arcos desejados conforme a figura.

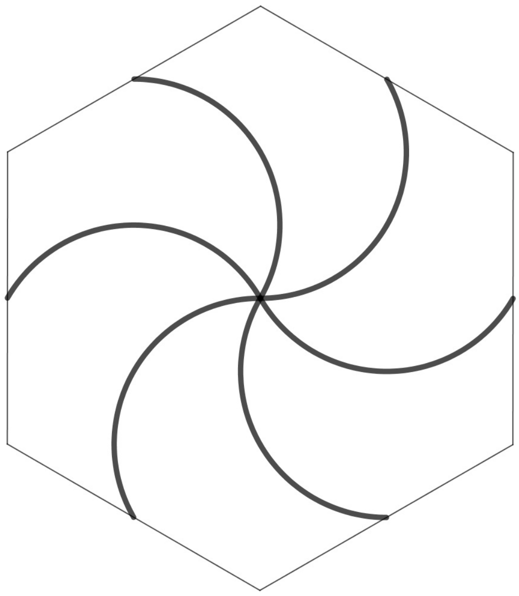
Figura 4.3.4 – Passo 4



Fonte: Autor

Retirando os segmentos secundários e os pontos, temos o padrão desejado de Alambra.

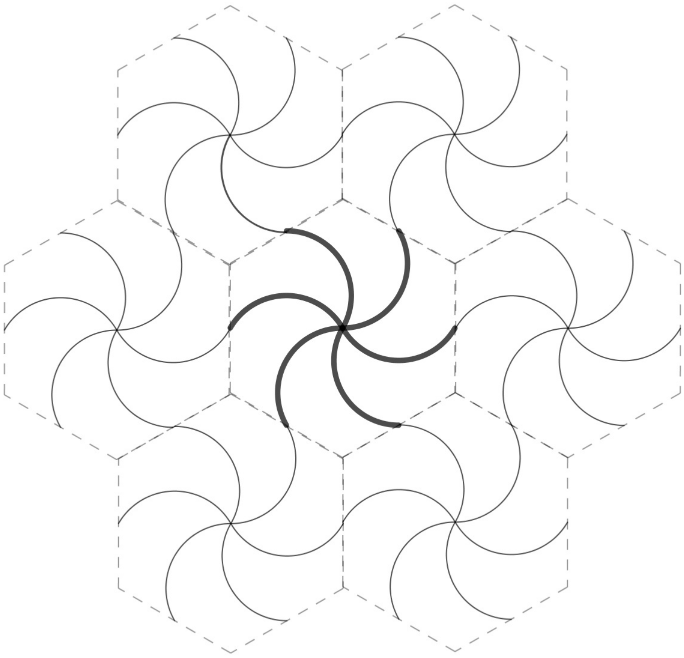
Figura 4.3.5 – Padrão Alambra



Fonte: Autor

Para fazermos o ladrilhamento, construímos o padrão um ao lado do outro conforme a figura.

Figura 4.3.6 – Ladrilhamento



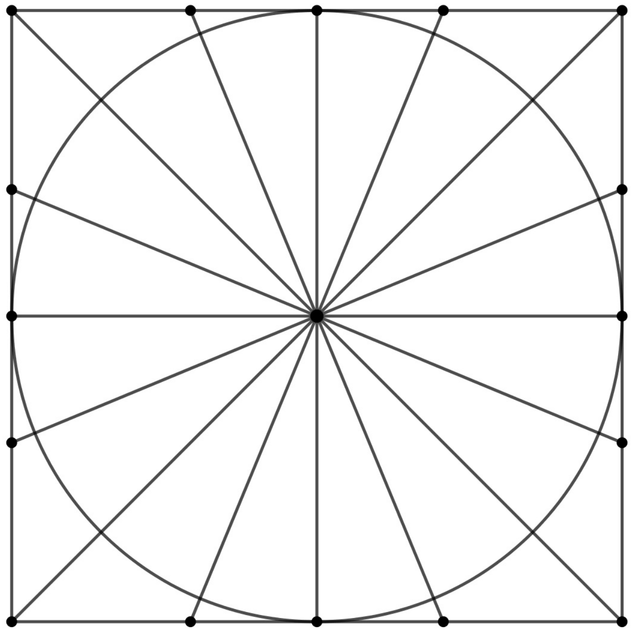
Fonte: Autor

4.4 Padrão Al-Salih Tala'i

A mesquita de Al-Salih Tala'i se encontra no Egito em Cairo, suas construções datam de 1160. Esse padrão que apresentaremos será o mais elaborado desse trabalho. Nessa construção usaremos uma notação diferente devido a quantidade de detalhes que essa apresenta.

1. Trace um círculo. Construa o quadrado circunscrito ao círculo. Trace as diagonais do quadrado.
2. Trace as bissetrizes entre as diagonais formando quatro quadrantes. No primeiro quadrante trace duas bissetrizes, uma abaixo da diagonal e outra acima formando quatro ângulos iguais no primeiro quadrante. Repita o mesmo procedimento nos outros quadrantes conforme a figura.

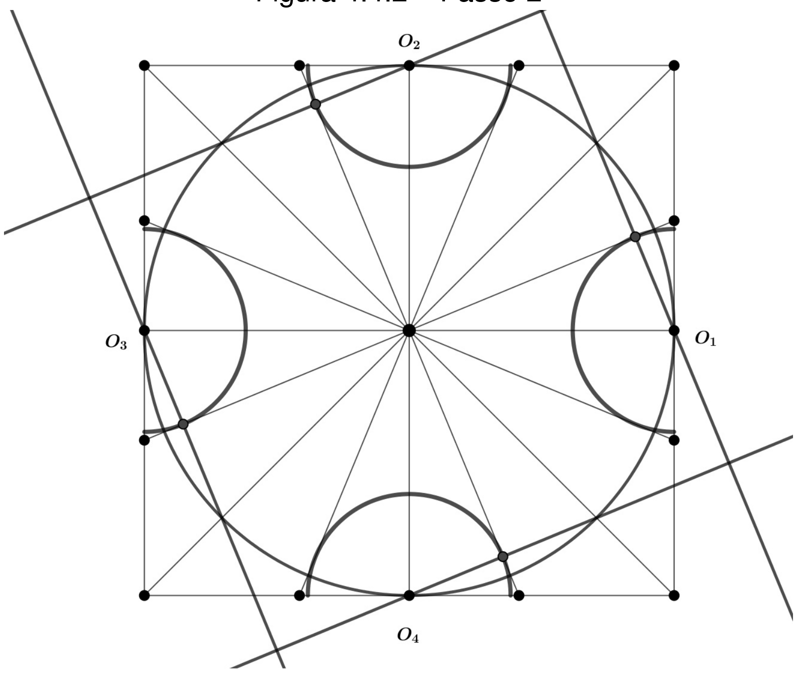
Figura 4.4.1 – Passo 1



Fonte: Autor

3. Por O_1 trace uma perpendicular à bissetriz encontrando o ponto de interseção que será o raio do semicírculo centrado em O_1 conforme a figura. Faça o mesmo com os outros semicírculos.

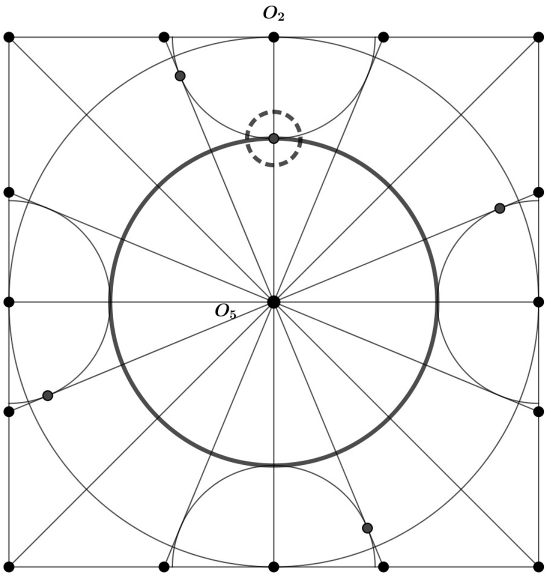
Figura 4.4.2 – Passo 2



Fonte: Autor

4. Marque o ponto de interseção entre o eixo central e o semicírculo conforme indicado na figura. Trace o círculo centrado em O_5.

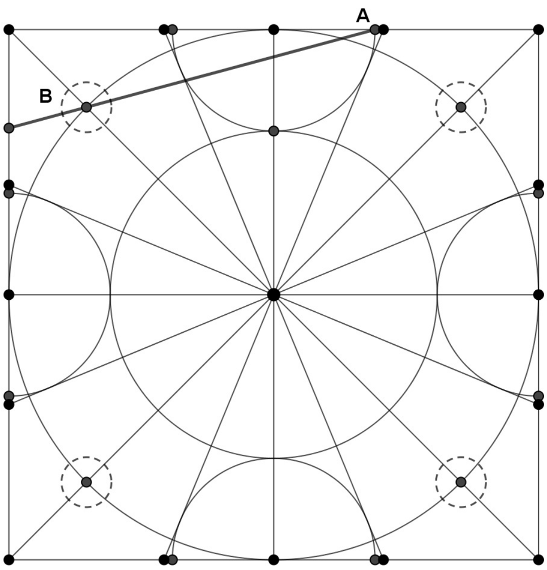
Figura 4.4.3 – Passo 3



Fonte: Autor

5. Marque os pontos das interseções, entre as diagonais do quadrado e o círculo maior. Trace o segmento com uma extremidade em A e a outra sobre o lado do quadrado conforme a figura.

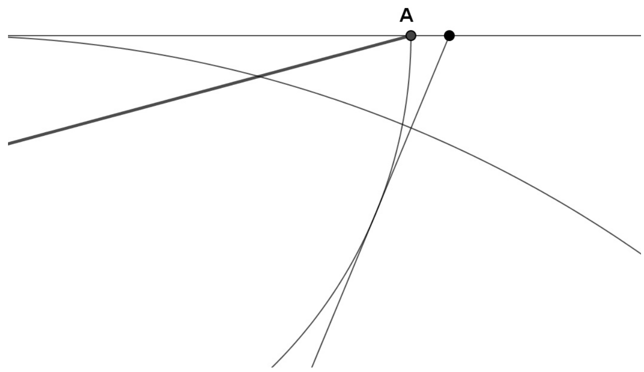
Figura 4.4.4 – Passo 4



Fonte: Autor

É importante destacar, que o ponto A, pertence ao semicírculo e não à bissetriz, conforme mostra a figura abaixo.

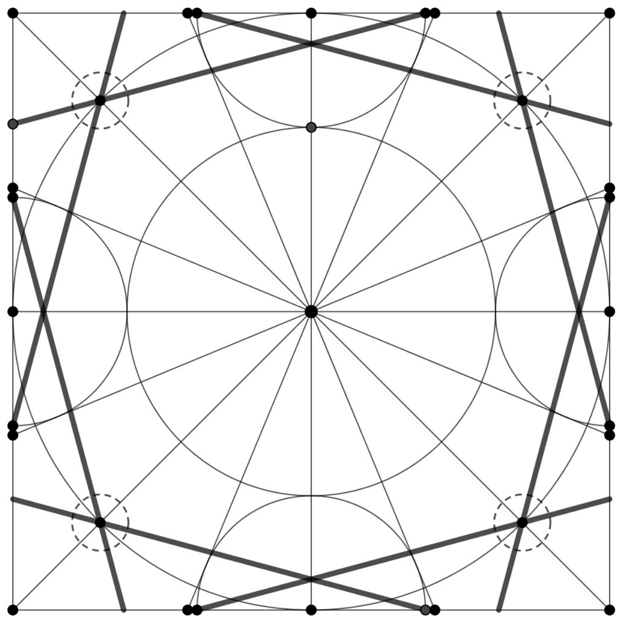
Figura 4.4.5 – Detalhe Passo 4



Fonte: Autor

6. Trace os outros segmentos seguindo as mesmas orientações do item 5, encontrado a figura abaixo.

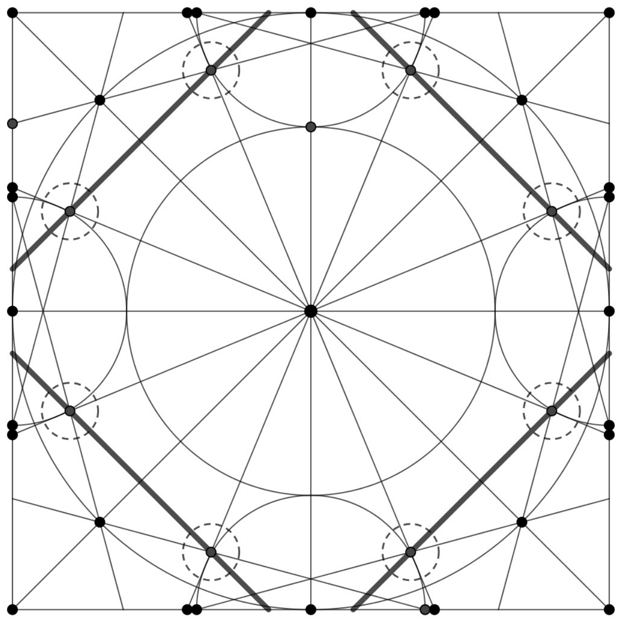
Figura 4.4.6 – Passo 5



Fonte: Autor

7. Marque os pontos de interseção entre as bissetrizes e os segmentos encontrados anteriormente, e, trace os segmentos com extremidades nos lados do quadrado, conforme figura abaixo.

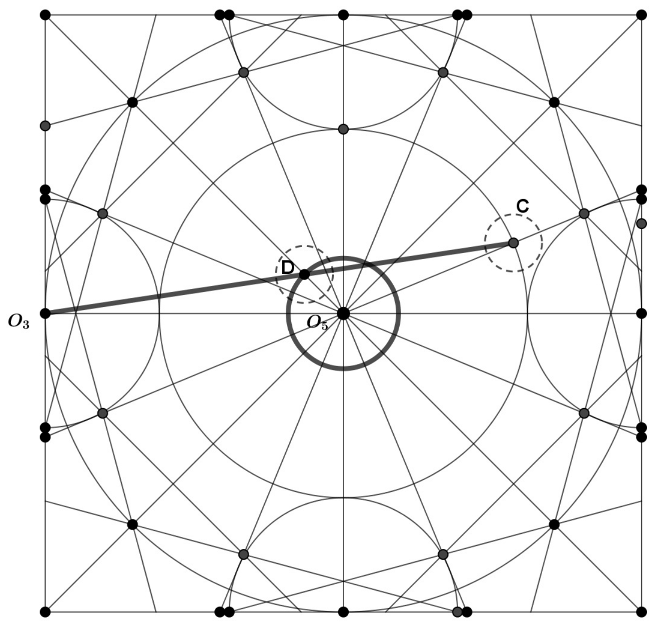
Figura 4.4.7 – Passo 6



Fonte: Autor

8. Trace o segmento $\overline{O_3C}$ encontrando o ponto D. Trace o círculo centrado em O_5 passando por D, conforme figura abaixo.

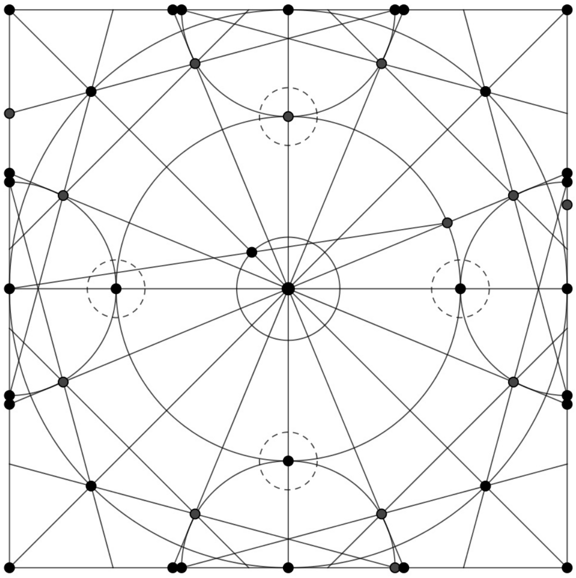
Figura 4.4.8 – Passo 7



Fonte: Autor

9. Marque os pontos de interseção entre o círculo médio e os semicírculos.

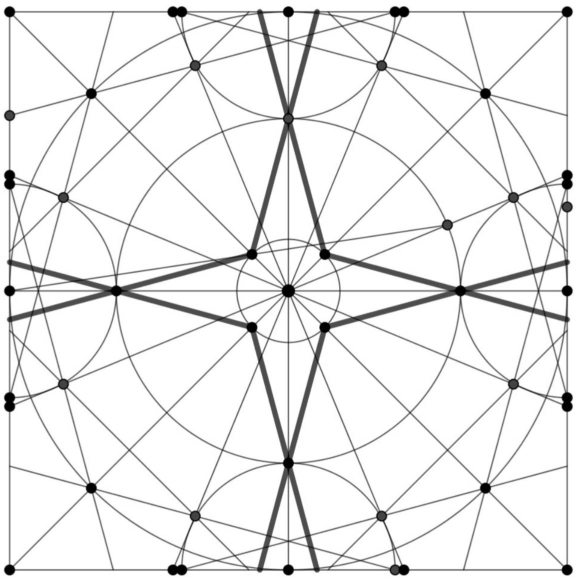
Figura 4.4.9 – Passo 8



Fonte: Autor

10. Marque os pontos de interseção entre o círculo menor e as diagonais do quadrado.
11. Trace os segmentos com extremidades no ponto de interseção do passo 11 e o lado do quadrado passando pelo ponto de interseção do passo 10 conforme a figura.

Figura 4.4.10 – Passo 9

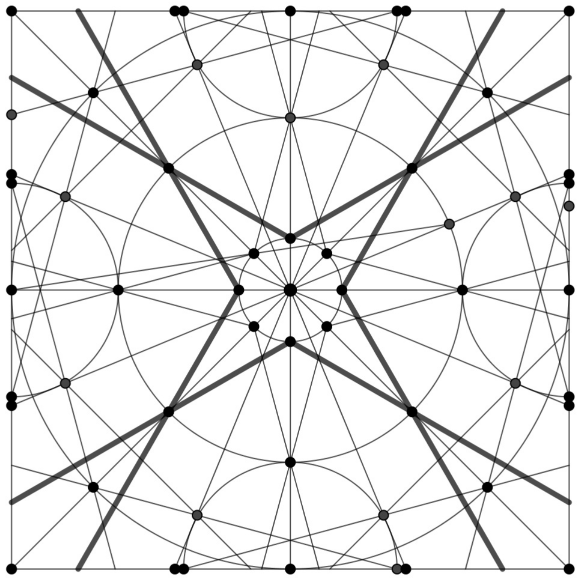


Fonte: Autor

12. Marque os pontos de interseção entre o círculo médio e as diagonais do quadrado.
13. Marque os pontos de interseção entre o círculo menor e os eixos centrais do quadrado.

14. Trace os segmentos com extremidades no ponto de interseção do passo 14 e o lado do quadrado passando pelo ponto de interseção do passo 13 conforme a figura.

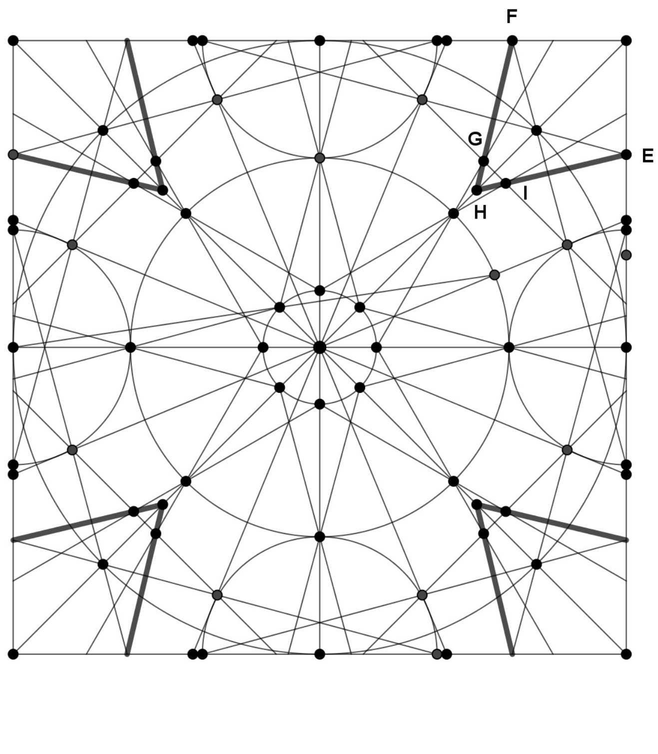
Figura 4.4.11 – Passo 10



Fonte: Autor

15. Marque os pontos E, F, G e I.
16. Trace a reta passando pelos pontos E e I e outra reta passando pelos pontos F e G encontrando o ponto de interseção H.
17. Trace os segmentos $\overline{EH}$ e $\overline{FH}$. Faça o mesmo com os outros três 'cantos' do quadrado conforme a figura.

Figura 4.4.12 – Passo 11

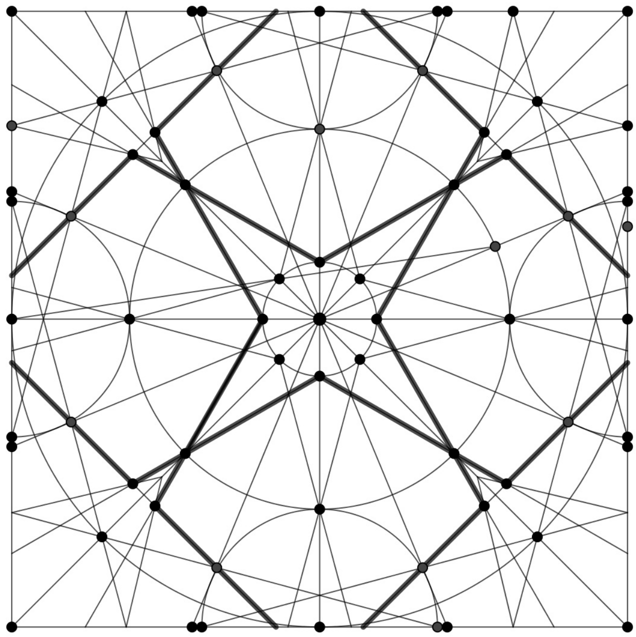


Fonte: Autor

Essas foram as últimas construções de segmentos. Nos passos seguintes, vamos marcar os segmentos notáveis para construção do padrão desejado.

18. Para não ficar muito confuso, vamos marcar os segmentos em dois passos. Na primeira parte, marque os segmentos conforme a figura 4.4.13.

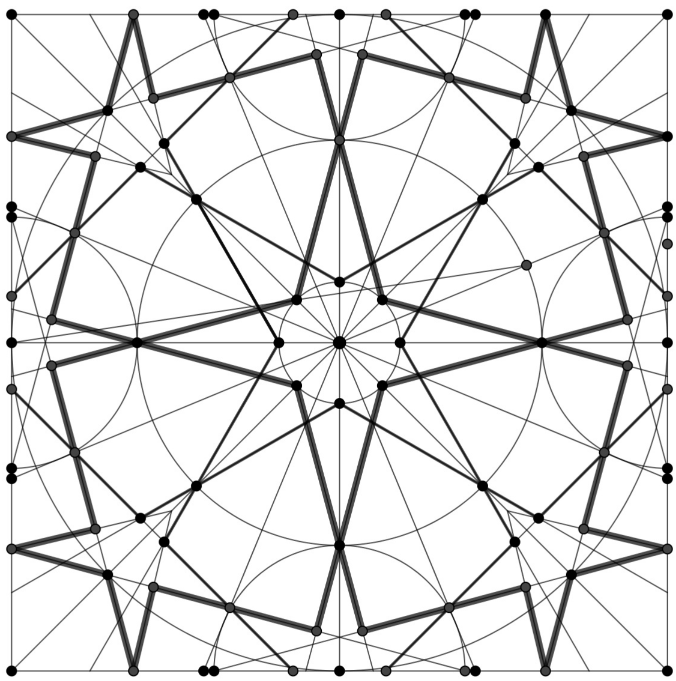
Figura 4.4.13 – Passo 12



Fonte: Autor

19. Para a segunda parte, marque os segmentos conforme a figura 4.4.14.

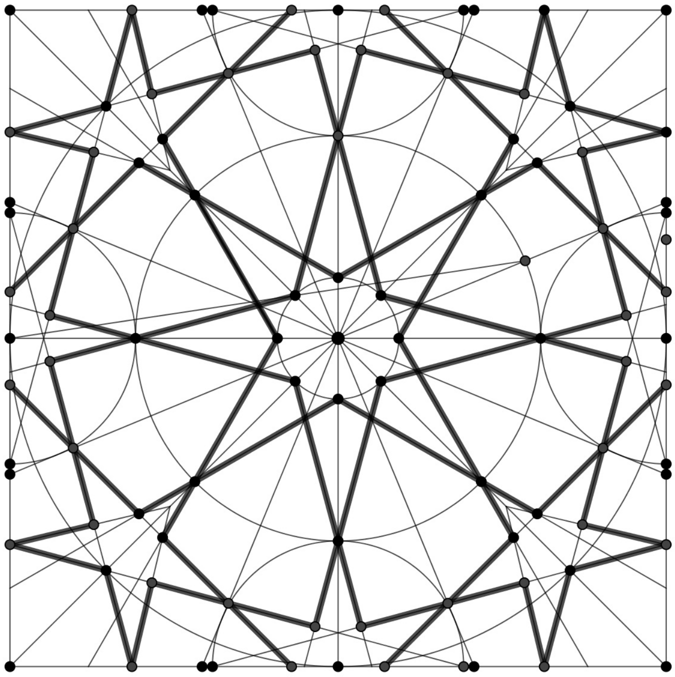
Figura 4.4.14 – Passo 13



Fonte: Autor

Fazendo a junção das duas figuras anteriores, em uma só, temos:

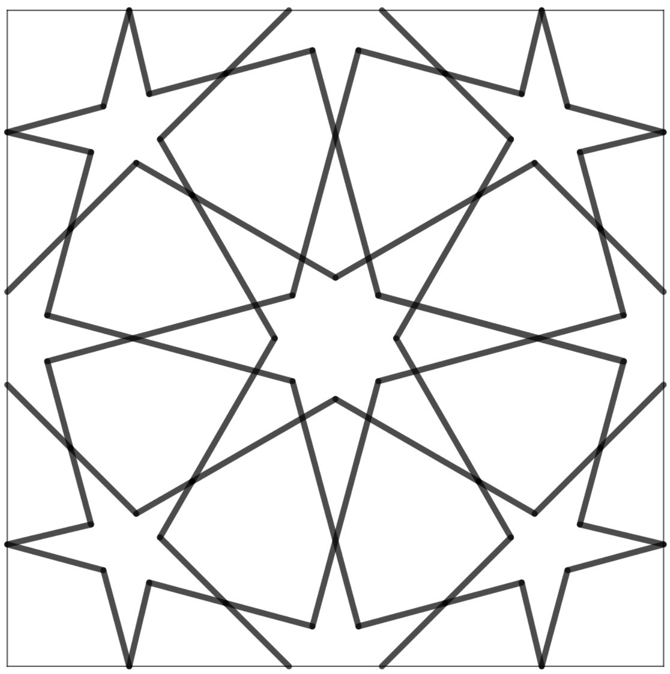
Figura 4.4.15 – Passo 14



Fonte: Autor

Retirando os pontos e os segmentos secundários, temos o padrão de Al-Salih Tala'i

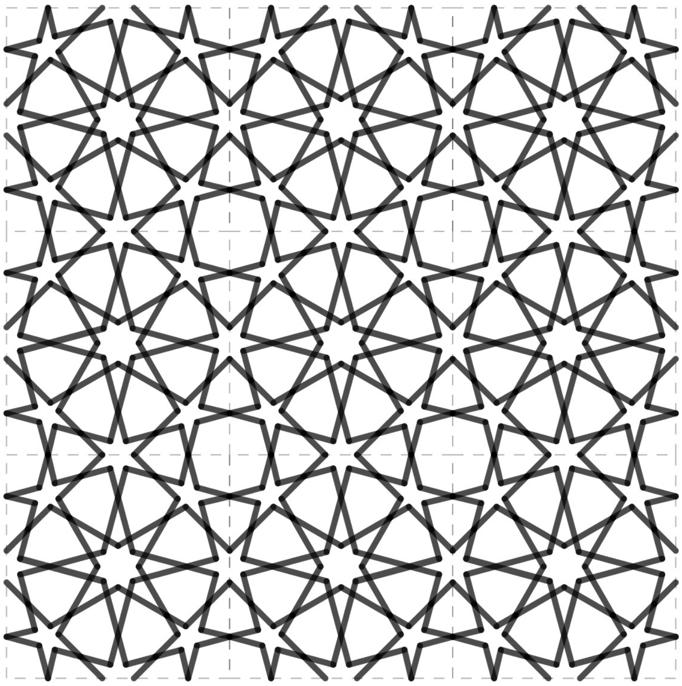
Figura 4.4.16 – Padrão de Al-Salih Tala'i



Fonte: Autor

Para fazermos o ladrilhamento, construímos o padrão um ao lado do outro, conforme a figura.

Figura 4.4.17 – Ladrilhamento



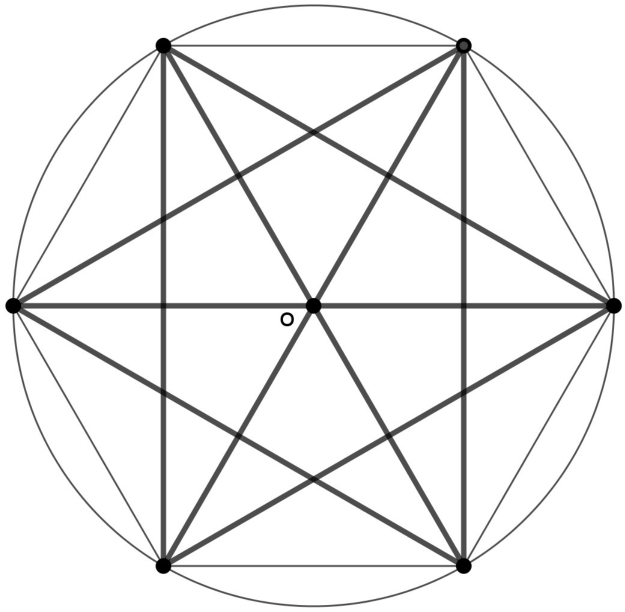
Fonte: Autor

4.5 Padrão PROFMAT

Por fim, após estudar vários padrões e começar a familiarizar, resolvi criar um padrão. Como venho colocando nome em cada padrão, chamarei esse de Padrão PROFMAT.

1. Trace um círculo. Construa o hexágono inscrito no círculo. Trace as diagonais do hexágono conforme a figura.

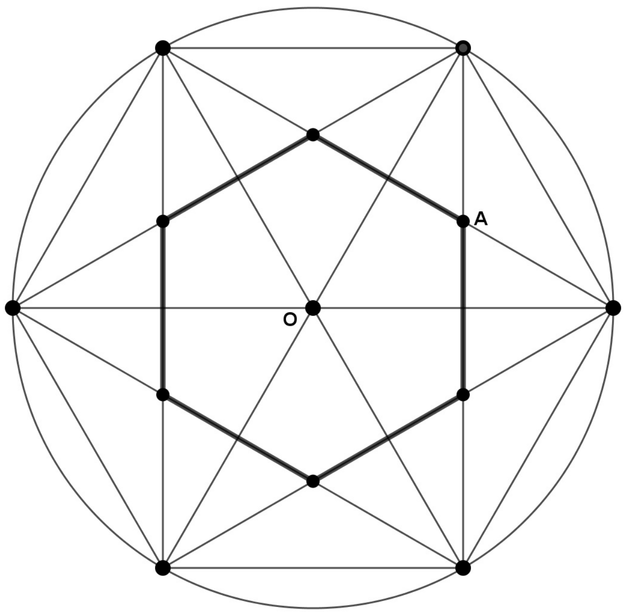
Figura 4.5.1 – Passo 1



Fonte: Autor

2. Marque os pontos de interseção das diagonais conforme a figura abaixo formando um novo hexágono.

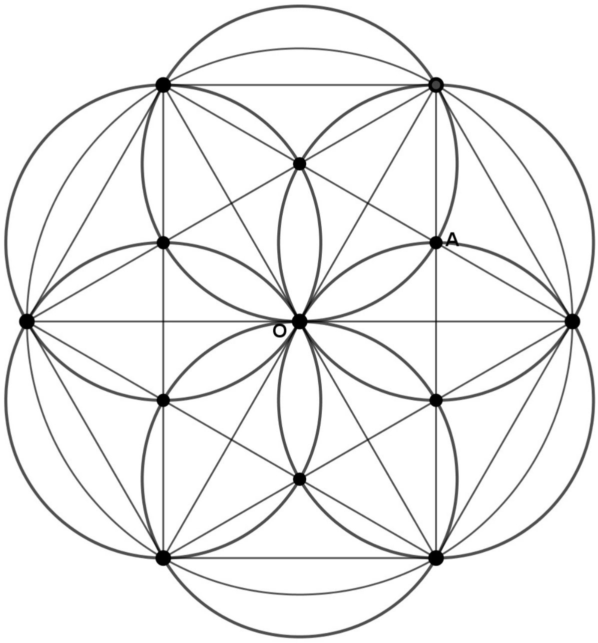
Figura 4.5.2 – Passo 2



Fonte: Autor

3. Com raio $\overline{OA}$ trace círculos centrados em cada vértice do hexágono menor.

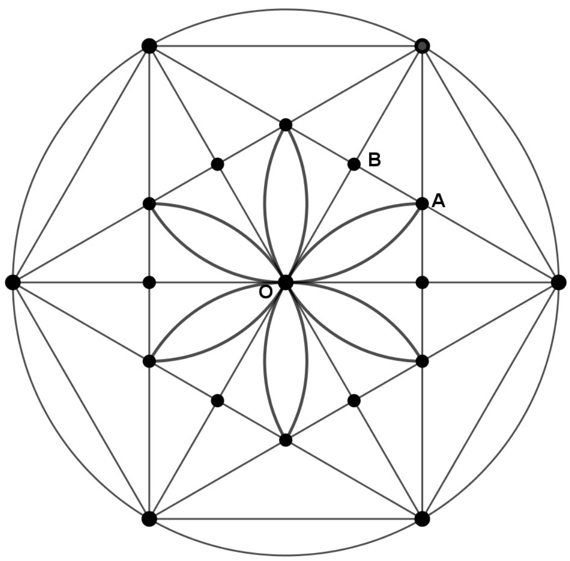
Figura 4.5.3 – Passo 3



Fonte: Autor

4. Marque somente os arcos formando a flor no interior do hexágono menor.
5. Marque os pontos médios dos lados do hexágono menor, conforme a figura.

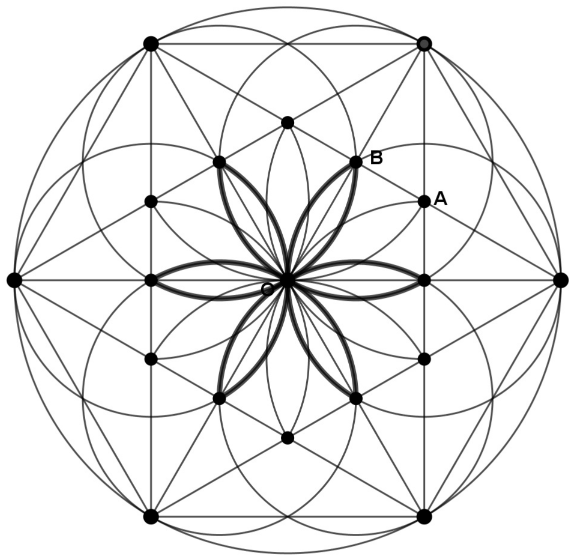
Figura 4.5.4 – Passo 4



Fonte: Autor

6. Trace círculos com raio $\overline{OB}$, centrados nos pontos médios dos lados do hexágono menor.
7. Marque os arcos, formando uma nova flor no interior do hexágono menor, conforme a figura abaixo.

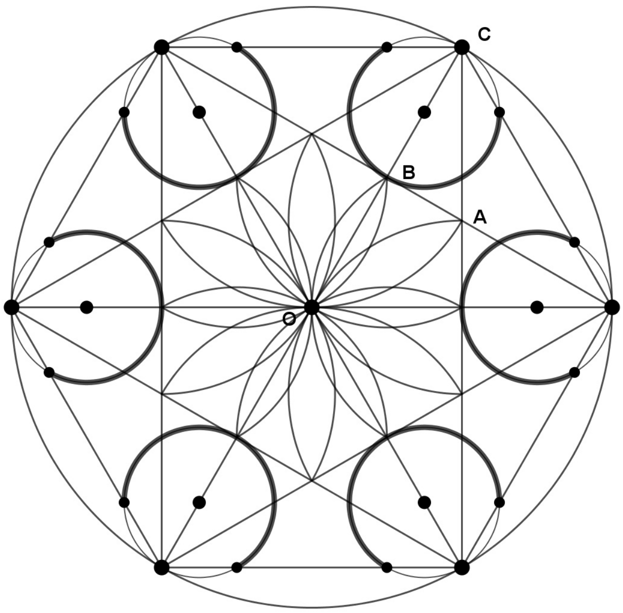
Figura 4.5.5 – Passo 5



Fonte: Autor

8. Marque o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Trace círculo centrado no ponto médio passando por $\overline{BC}$. Faça o mesmo com os demais vértices do hexágono maior, conforme a figura abaixo.
9. Nos círculos traçados no passo anterior, marque os arcos até no ponto que fazem interseção com o lado do hexágono maior, conforme a figura abaixo.

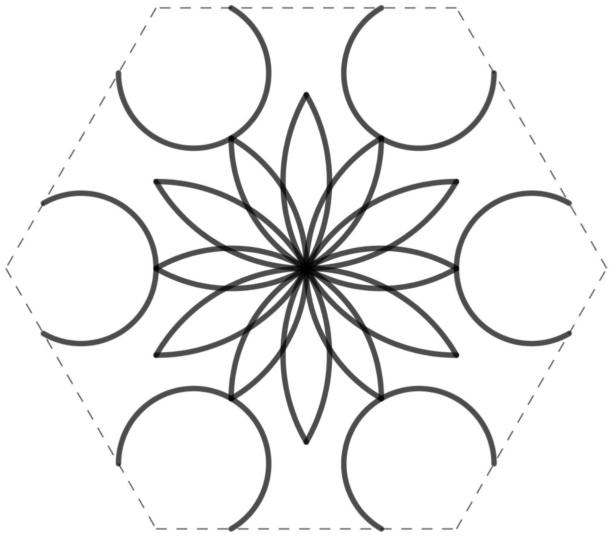
Figura 4.5.6 – Passo 6



Fonte: Autor

Por fim, retirando os segmentos, círculos e pontos de excesso temos o padrão PROFMAT.

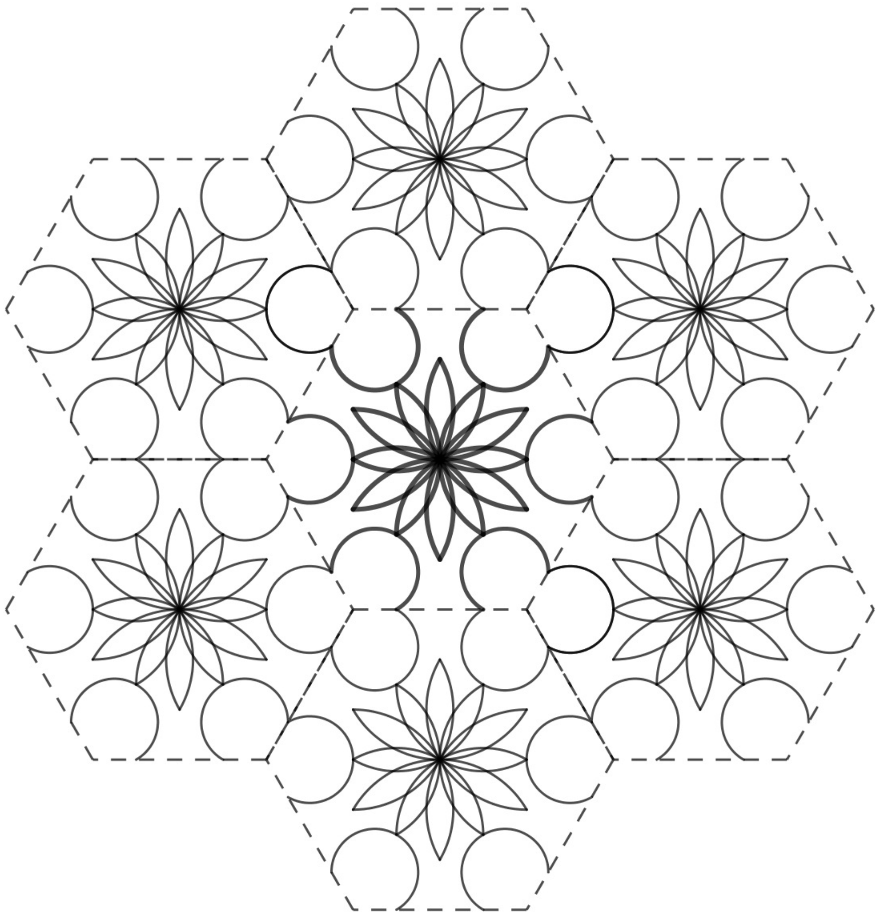
Figura 4.5.7 –Padrão PROFMAT



Fonte: Autor

Fazendo o ladrilhamento do padrão construído, temos a seguinte imagem.

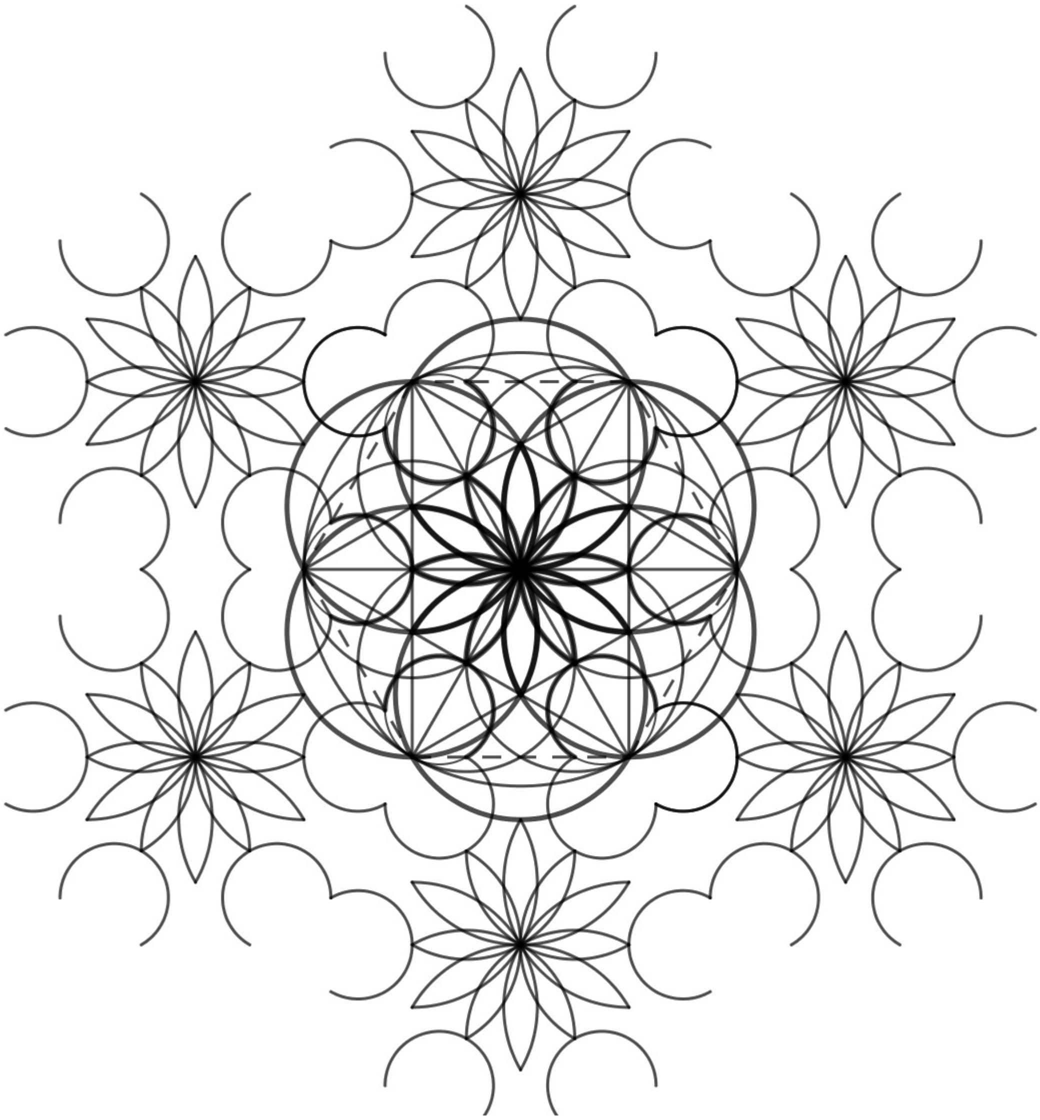
Figura 4.5.8 – Ladrilhamento



Fonte: Autor

Ao construir qualquer padrão, no final das construções, temos um emaranhado de segmentos e círculos, onde poderíamos encontrar outros padrões na mesma construção. Podemos ver o emaranhado nessa construção, conforme a figura abaixo.

Figura 4.5.9 –Padrão PROFMAT



Fonte: Autor

5 Atividade

PROPOSTA DE ATIVIDADE

Existem várias possibilidades de trabalhar com esse material em sala de aula.

1. Uma sugestão seria um trabalho multidisciplinar com outras matérias, como artes e história. Pedir os alunos para montar grupos e trabalhar a parte histórica e a parte artística dos mosaicos. Na parte de matemática pedir os alunos para construírem alguns padrões, respeitando cada faixa etária. Existem padrões simples e outros bem elaborados, uma boa fonte é o livro [2].
2. Pode ser trabalhado com os alunos, depois das construções feitas, algumas propriedades de geometria plana, sempre respeitando cada faixa etária. Os alunos sempre ficam empolgados com as construções. Depois de feitas é uma boa oportunidade de mostrar um pouco de matemática por detrás das construções.
3. Para alunos do ensino médio, depois das construções feitas, pode ser trabalhado o motivo das figuras ficarem tão perfeitas, enfatizando o rigor matemático nas construções, como construções de bissetrizes, mediatrizes, paralelas entre outras.
4. Outra sugestão, depois dos alunos terem feitos alguns padrões, sendo básicos ou não, deixar o aluno colocar em prática sua criatividade. Pedir para cada aluno construir seu próprio padrão e os mais bonitos serem gratificados de alguma forma, até mesmo sendo exposto no mural da escola.

6 Considerações Finais

Nessa etapa do nosso projeto, podemos perceber que existe uma infinidade de possibilidades na criação de mosaicos com padrões que se remetem as construções islâmicas.

Esses mosaicos estão estampados em diversos palácios pelo mundo e são muito admirados. Percebemos ainda, que nem sempre é muito fácil de perceber o padrão existente nos mosaicos, pois, depois de pintados, a construção geométrica fica em segundo plano e a arte se destaca.

Ao construir o padrão é necessário a utilização dos entes matemáticos para buscar a simetria, pois se não usar os conceitos de forma correta, quando for construir o ladrilhamento as imperfeições se tornam bem aparentes.

Fizemos construções com poucos detalhes e outros mais elaborados. Algumas dessas construções, podem perfeitamente ser trabalhadas em algumas séries do ensino fundamental I, ou seja, com crianças de 7 a 10 anos, pois exige-se da criança pouco manuseio da régua e do compasso. Com isso, cria-se no aluno um fator importante de empoderamento para futuras abordagens com a matemática. Outras construções, mais elaboradas, podem ser trabalhadas em séries posteriores e até ter algumas abordagens algébricas, como cálculos de ângulos e segmentos.

Existem outras formas de ladrilhamento que não foram abordadas até agora nesse trabalho. Essas outras formas, envolvem mais de um polígono no mesmo ladrilhamento. Em nosso trabalho, utilizamos somente o quadrado e o hexágono como polígono para ladrilhar. Certamente, esse outro tipo de ladrilhamento aparecerá no livro, sobre construções de padrões islâmicos com régua e compasso.

Bibliografia

[1] BARISON, M. B. e PÓLA, M. C. *Construção de padrões islâmicos no ensino de desenho geométrico: artesanato e tecnologia*. Curitba - PR: Graphica, 2007.

[2] BROUG Eric. *Islamic Geometric Patterns*. 1ªed., London - England: Thames e Hudson, 2008.

[3] CUNHA JUNIOR, Henrique. *Geometria, geometrização, e arte afro-islâmica*. Revista Teias, V. 14, n 34, p. 102-111., 2013.

[4] GRUBE, Ernest J. *O mundo da arte: Mundo Islâmico*. São Paulo - SP: Expressão e Cultura, 1996.

[5] HARRIS, A. L. C. e BRAZ, F. M. *Análises compositivas de padrões geométricos do pavilhão mourisco do Instituto Fiocruz*. Curitiba - PR: Graphica, 2009.

[6] KAIUCA, M. A. e KUBRUSLY, Ricardo. *Abou Wafa Al-Buzjani: a arte dos mosaicos árabes e a matemática*. Artigo (Doutorado em Matemática), Rio de Janeiro - RJ: UFRJ, 2007.

[7] LAWLOR, Robert. *Sacred Geometry*. Tradução de Maria José Garcia Ripoll, London - England: Thames e Hudson, 1982.

[8] LEITE, Sylvia. *O simbolismo dos padrões geométricos da arte Islâmica*. São Paulo - SP: Ateliê Editorial, 2007.

[9] PRECIOSO, J. C. e PEDROSO, H. A. *Construções Euclidianas e o Desfecho de Problemas Famosos da Geometria*. RECEN - Revista Ciências Exatas e Naturais, Vol.13, n. 2, Guarapuava - Paraná: 2011.

[10] SANTOS, Lázaro Souza. *Ladrilhamento no Plano: Uma Proposta de Atividade para o Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, UESB, Vitória da Conquista - BA: 2014.

[11] SILVA, Alex Gomes. *Construções geométricas com régua e compasso*. Dissertação de Mestrado em Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió - AL: 2013.

[12] SOUZA, Bárbara. *Simetria na Arte Islâmica: Projeto de Ensino de Matemática*. IME, São Paulo: 2003

[13] The Metropolitan Museum of Art. *Islamic Art and Geometric Design*. New York - USA: 2004

[14] WAGNER, Eduardo. *Construções Geométricas*. 6ªed., Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2007