IMPA - INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
PROFMAT - PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO

Aproximações Diofantinas e a Teoria das Frações Contínuas

Leonardo Barboza de Souza

Rio de Janeiro, RJ
Fevereiro, 2018

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LEONARDO BARBOZA DE SOUZA

Sob a orientação do professor
Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Rio de Janeiro, RJ
Fevereiro, 2018

Leonardo Barboza de Souza

Aproximações Diofantinas e a Teoria das Frações Contínuas/ Leonardo Barboza de Souza. – Rio de Janeiro, RJ, Fevereiro, 2018-

52 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira

– INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

, Fevereiro, 2018.

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Leonardo Barboza de Souza

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Dissertação aprovada em 21 de Fevereiro de 2018

Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira, D.Sc.
IMPA
(Orientador)

Marcelo Miranda Viana da Silva, D.Sc.
IMPA
(Suplente)

Roberto Imbuzeiro Moraes Felinto de Oliveira, D.Sc.
IMPA

Sergio Augusto Romaña Ibarra, D.Sc.
UFRJ
(Avaliador Externo)

Rio de Janeiro, RJ
Fevereiro, 2018

Agradecimentos

Meus sinceros e profundos agradecimentos a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para que esse momento chegasse:
Primeiramente a Deus. Sei que tudo acontece com a Tua permissão e sem o Senhor nada seria possível. Toda honra e toda glória seja dada a Ti. Amém!
A cada um dos meus familiares, que sempre me auxiliaram nos momentos de dificuldade, mostrando um caminho alternativo para seguir em frente.
Ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, pela oportunidade de estudo e amadurecimento intelectual.
Ao professor Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira, pela paciência na orientação e sugestões para a conclusão do trabalho.
Aos colegas de turma, que tornaram a matemática ainda mais prazerosa em suas companhias.
A todos vocês, um muito obrigado!

‘

“A percepção do desconhecido é a mais fascinante das experiências. O homem que não tem os olhos abertos para o misterioso, passará pela vida sem ver nada.”
(Albert Einstein)

Resumo

O objetivo principal da nossa exposição é fornecer ao professor de matemática, considerando o aprendizado nos cursos iniciais de álgebra abstrata, maior envolvimento no estudo das aproximações diofantinas. Na presente dissertação, pretendemos estudar propriedades relativas ao conjunto dos números reais, tomando como base a teoria dos números. Para isto, admitimos como ponto de partida as noções das frações contínuas que respondem, de modo relativamente simples, muitas perguntas correlatas ao conjunto numérico. Os métodos de otimização e aproximação dos números reais por números racionais, como sugerem as aproximações diofantinas, serão exemplificados a partir de teoremas centrais, tais como os teoremas de Dirichlet e o teorema de Hurwitz- Markov. Numa segunda oportunidade, mencionamos as contribuições da história da matemática à teoria das frações contínuas, apresentando a utilidade dos números algébricos e transcendentes ao longo desse contexto, assim como algumas de suas aplicações. As equações de Pell-Fermat, como equações diofantinas, mostram um método de aproximação de raízes quadradas por números racionais de maneira bastante eficaz, e serão tratadas como exemplo do assunto desenvolvido. Ao final, indicaremos sugestões de atividades, buscando enriquecer o conhecimento do professor de matemática e algumas sugestões de trabalhos para continuidade em pesquisas futuras.

Palavras-chaves: Teoria dos Números, Frações Contínuas, Aproximações Diofantinas, Ensino de Matemática, Formação de Professores de Matemática.

Abstract

The main objective of our exposition is to provide the mathematics teacher, considering the learning in the initial courses of abstract algebra, greater involvement in the study of Diophantine approximations. In the present dissertation, we intend to study properties relative to the set of real numbers, based on the theory of numbers. For this, we assume as a starting point the notions of continuous fractions that answer, in a relatively simple way, many questions related to the numerical set. The methods of optimization and approximation of real numbers by rational numbers, as suggested by Diophantine approximations, will be exemplified by central theorems such as the Dirichlet theorems and the Hurwitz-Markov theorem. On a second occasion, we mention the contributions of the history of mathematics to the theory of continuous fractions, presenting the usefulness of algebraic and transcendental numbers throughout this context, as well as some of their applications. The Pell-Fermat equations, like Diophantine equations, show a method of approaching square roots by rational numbers quite effectively, and will be treated as an example of the developed subject. At the end, we will indicate suggestions for activities, seeking to enrich the knowledge of the math teacher and some suggestions of work for continuity in future research.

Key-words: Theory of Numbers, Diophantine Approximations, Teaching of Mathematics, Teacher Training in Mathematics

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

A forma mais básica de pesquisa no ramo das aproximações diofantinas, tema que abordaremos ao longo desta dissertação, é o de aproximar números reais por números racionais. De acordo com [1], o autor analisa a seguinte sequência de inclusões: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, e afirma que a passagem de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ é, sem dúvidas, a mais complicada conceitualmente, e a representação de um número real está diretamente ligada à própria noção de número real. O autor ainda complementa a análise, afirmando: "De fato, o conceito de número natural é quase um conceito primitivo. Já um número inteiro é um número natural com um sinal que pode ser + ou - , e um número racional é a razão entre um número inteiro e um natural não nulo. Por outro lado, dizer o que é um número real é tarefa bem mais complicada, mas há coisas que podemos dizer sobre eles."

Com base nessas observações, e por experiência docente, o objetivo da exposição é desenvolver o tópico das frações contínuas, voltado para o ramo das aproximações diofantinas e aplicações que certamente irão contribuir na formação do professor de matemática. Muitos resultados da teoria das frações contínuas respondem perguntas sobre os números reais de forma global e facilitam bastante na compreensão do conjunto numérico.

De maneira geral, um resultado muito utilizado e comentado pelos professores de matemática em sala de aula é o fato de que seja possível aproximar os números reais por números racionais, seguindo a ideia básica das aproximações diofantinas. Quando o resultado é ensinado, os alunos não costumam apresentar dificuldades, desde que estejam claros os conceitos e as propriedades básicas de tais números. Nesse caso, a representação decimal dos números reais torna bastante palpável tal aproximação. Isto é, basta averiguar o número de casas decimais que ele deseja e, por inspeção da representação decimal, a pergunta será respondida diretamente, sem complicações.

Podemos esquematizar a situação descrita como segue, indicando o processo com até quatro casas decimais no caso do número irracional π, que é definido como a razão entre o comprimento e o diâmetro de qualquer circunferência, e tem valor numérico (com algumas de suas casas decimais) igual a $3,14159265358979323846264338327950288419716939937...$

Tabela 1: Aproximações Decimais do π

Número de casas decimais	Valor numérico
1	3,1
2	3,14
3	3,141
4	3,1415

Por questão de importância, quando trabalhamos com situações práticas, em que ocorre a necessidade da utilização do número π, é muito comum os livros didáticos explorarem a aproximação do π com duas casas decimais, conforme analisamos em [4].

Dentro desse contexto, uma aproximação para o π, devida ao matemático Arquimedes, é o número racional 22/7. O erro da aproximação gira em torno de $1{,}3.10^{-3}$. Uma outra aproximação, descoberta 4 séculos depois pelo cientista Adriaen Matieus e ainda mais precisa, é o número racional 355/113. Ao compararmos o erro entre tais aproximações e as aproximações decimais, considerando o tamanho dos denominadores, verificamos uma vantagem nas aproximações que não são as decimais. Isso sugere que existam outras aproximações realmente melhores para o número irracional π, além das que as decimais impõem.

Vejamos com mais detalhes a situação indicada acima. Note que:

$$|\pi - \frac{22}{7}| < \frac{1}{700} < |\pi - \frac{314}{100}| \tag{1.1}$$

e

$$|\pi - \frac{355}{113}| < \frac{1}{3000000} < |\pi - \frac{3141592}{1000000}| \tag{1.2}$$

Portanto, $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$ são melhores aproximações de π que aproximações decimais com denominadores muito maiores, e de fato são aproximações muito mais espetacularmente boas do que se poderia esperar, pelo tamanho dos denominadores envolvidos.

Considerando a formação do professor de matemática, onde é exigido um grau elevado de assimilação e conhecimento para a prática docente, podem surgir nesse momento alguns questionamentos, tais como:

1^o) O que garante, de fato, a existência de números racionais arbitrariamente próximos na reta real, para que seja possível aproximar os números reais por racionais?,

2^o) Como surgiram os números irracionais que trabalho com os meus alunos em sala de aula? Qual é o grau de importância deles?, ou então,

3^o) Será que existem outros tipos de representações de números reais que possam ser comentados e explorados, e até que ponto elas podem ser importantes para compreender o conceito global de números reais?

Ao longo dessa pesquisa, temos como objetivo responder essas perguntas e ampliar os conhecimentos do professor de matemática sobre o conceito de números reais, através de uma visão diferenciada, utilizando aproximações diofantinas e a teoria das frações contínuas .

Para deduzir tais resultados, nos capítulos subseqüentes, desenvolveremos as ferramentas necessárias para a execução do trabalho:

No Capítulo 2, iniciaremos uma discussão sobre aproximações de números reais por números racionais. A idéia central do capítulo é buscar melhores aproximações de números reais por números racionais, otimizando tais métodos de aproximação. Para isto, é necessário o conhecimento básico das frações contínuas, assim como os diversos tipos e trataremos essas questões procurando atingir os objetivos, voltados para a formação do professor de matemática. Alguns resultados centrais da análise matemática, como a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ e da teoria dos números, que têm versões quantitativas mais precisas indicadas nos teoremas de Dirichlet e de Hurwitz-Markov, serão citados e estudados nessa oportunidade.

No Capítulo 3, daremos ênfase à história da matemática, para descrever como as frações contínuas surgiram ao longo do tempo, e as suas necessidades de acordo com o problema proposto por cada matemático. Veremos mais adiante, que tais problemas tem uma forte relação com os números reais algébricos e transcendentes, que serão abordados no contexto.

No Capítulo 4, será estudada a relação das aproximações diofantinas com as soluções das conhecidas equações diofantinas, denominadas equações de Pell-Fermat. Um caso interessante que será discutido nesse capítulo é a aproximação de raízes quadradas, como consequência da determinação das soluções de tais equações. As frações contínuas também desempenham papel fundamental dentro do conjunto de soluções.

No Capítulo 5, realçamos a finalidade que pretendemos alcançar, com a exposição sistemática dos tópicos ao longo da dissertação. Serão propostos assuntos para a continuidade do trabalho e possibilidades de pesquisas futuras.

2 Explorando Aproximações Diofantinas e Frações Contínuas

O capítulo será dedicado ao estudo das aproximações diofantinas, como ferramenta para aproximar números reais por números racionais. A otimização das aproximações é a chave fundamental, até que as frações contínuas complementem a busca pelas melhores delas. Antes, serão introduzidas algumas definições e princípios importantes para compreender as demonstrações dos teoremas ao longo do capítulo. As referências [1], [2] e [3] foram tomadas como base para o desenvolvimento do conteúdo.

2.1 Definições e Princípios Importantes

Definição 2.1.1. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado superiormente quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que b é uma cota superior de X.*

Exemplo 2.1.1. *(Princípio da Casa dos Pombos)*

Se colocarmos $n+1$ objetos em n gavetas, então haverá ao menos uma gaveta com mais de um objeto.

2.2 A densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ e otimização das aproximações

O resultado que provaremos inicialmente nesta seção é introdutório, e comprova o fato de que seja possível aproximar arbitrariamente números reais por números racionais.

Teorema 2.2.1. *$\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, isto é, dados quaisquer números reais a e b distintos($a < b$), existe um número racional q tal que $a < q < b$.*

Demonstração: Provaremos que existe um número racional q no intervalo real $I =(a,b)$. Suponha, sem perda de generalidade, que a e b sejam números irracionais.

Como o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$, então existe $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n > \frac{1}{b-a}$. Os intervalos I_m=[$\frac{m}{n}$,$\frac{m+1}{n}$), $m \in \mathbb{Z}$, cobrem a reta. Portanto, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in I_m$. Com a irracional, temos que $\frac{m}{n} < a < \frac{m+1}{n}$. Sendo o comprimento $\frac{1}{n}$ do intervalo I_m menor do que $b-a$, obtemos que $\frac{m+1}{n} < b$. Logo, o número racional $\frac{m+1}{n}$ pertence ao intervalo (a,b) e, portanto, tomando $q = \frac{m+1}{n}$ segue a tese. $\square$

De acordo com o que provamos logo acima, constatamos a existência de números racionais entre números reais e tais aproximações são possíveis, mas o resultado ainda não fornece um grau de precisão, e também não mostra como tais aproximações podem ser feitas.

Por esse motivo, daremos continuidade, com o objetivo de otimizar tais aproximações.

A seguir, apresentamos um resultado mais forte e que fornece um grau de aproximação de números reais por números racionais, relacionando o erro das aproximações com o inverso do quadrado do denominador dos números racionais envolvidos.

Teorema 2.2.2. *(Dirichlet). Seja α um número irracional. Existem infinitos números racionais $\frac{p}{q}$ (com p e q inteiros, $q \neq 0$) tais que $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$*

Demonstração: Usaremos a notação $\lfloor x \rfloor$, para indicar o maior inteiro menor do que ou igual a x e $\{x\}$ =x - $\lfloor x \rfloor$, para indicar a parte fracionária de x.

Seja N um número natural. Considere os seguintes N intervalos que particionam o intervalo $[0,1)$:

$$[0,\frac{1}{N}),[\frac{1}{N},\frac{2}{N}),[\frac{2}{N},\frac{3}{N}),...,[\frac{N-1}{N},1). \tag{2.1}$$

Uma vez que os $N+1$ números 0,$\{\alpha\}$,$\{2\alpha\}$,... e $\{N\alpha\}$ pertencem todos ao intervalo $[0,1)$, pelo princípio da casa dos pombos, um dos N intervalos acima contém dois dos $N+1$ números. Digamos que os tais dois números sejam iα e jα, com $0 \leq i < j \leq N$. Temos, portanto, que

$$|\{j\alpha\}-\{i\alpha\}| < \frac{1}{N} \tag{2.2}$$

Seja $q = j-i$ e $p = \lfloor j\alpha \rfloor$ - $\lfloor i\alpha \rfloor$.

Logo:

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{N}, com\ |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{Nq} \leq \frac{1}{q^2}, \tag{2.3}$$

onde na última desigualdade usamos o fato de que q=j-i $\leq N$

Isto conclui a existência de ao menos um racional.

Observe que o fato de existirem infinitos racionais, segue a partir da idéia de que podemos tomar N tão grande quanto desejarmos. De fato, se considerarmos N_1, obtemos um racional r_1=$\frac{p_1}{q_1}$ tal que

$$|\alpha - \frac{p_1}{q_1}| < \frac{1}{N_1 q_1} \leq \frac{1}{{q_1}^2} \tag{2.4}$$

Agora, tomamos $N_2 > N_1$ tal que

$$\frac{1}{N_2} < |\alpha - \frac{p_1}{q_1}|. \tag{2.5}$$

Obtemos, assim r_2=$\frac{p_2}{q_2}$, um racional associado a N_2 tal que

$$|\alpha - \frac{p_2}{q_2}| < \frac{1}{N_2 q_2} \leq \frac{1}{{q_2}^2}. \tag{2.6}$$

Segue da escolha de N_2 que $r_2 \neq r_1$, pois r_2 é uma aproximação de α melhor do que r_1, já que

$$|\alpha - \frac{p_2}{q_2}| < \frac{1}{N_2 q_2} \leq \frac{1}{N_2} < |\alpha - \frac{p_1}{q_1}| \tag{2.7}$$

Repetindo esse processo, obtemos uma sequência de inteiros $N_1 < N_2 < N_3 <...$ e uma sequência de números racionais $r_i = \frac{q_i}{p_i}$ que aproximam α cada vez melhor, pois

$$|\alpha - r_1| > |\alpha - r_2| > |\alpha - r_3| > ... \tag{2.8}$$

Isto conclui a demonstração do teorema de Dirichlet $\square$.

Uma melhora para o resultado anterior foi encontrada pelos matemáticos Hurwitz e Markov, através do teorema a seguir. Apresentaremos o enunciado nessa pesquisa sem demonstração e o leitor poderá encontrar maiores detalhes em [14], inclusive a visão geométrica do significado do teorema.

Teorema 2.2.3. *(Hurwitz, Markov) Para todo α irracional, temos:*

$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$, *para pelo menos um racional.*

Em particular, a desigualdade acima tem infinitas soluções racionais $\frac{p}{q}$.

Com base no teorema enunciado acima, o número $\sqrt{5}$ é o maior irracional com essa propriedade. De fato, se

$$\varepsilon > 0, \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} e |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2} \tag{2.9}$$

temos

$$|q(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - p| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q} \tag{2.10}$$

o que implica em,

$$|q(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - p||q(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) - p| < \frac{|\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}|}{\sqrt{5}+\varepsilon}, \tag{2.11}$$

ou seja,

$$|p^2 - pq - q^2| < \frac{|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} - \sqrt{5}|}{(\sqrt{5}+\varepsilon)} \tag{2.12}$$

Se q é grande, $\frac{1}{q^2}$ é pequeno, e $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ - $\frac{p}{q}$ é muito próximo de 0, donde o lado direito da desigualdade é muito próximo de $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\varepsilon} < 1$, absurdo, pois $|p^2$-pq-$q^2| \geq 1$.

De fato, se $p^2 - pq - q^2 = 0$,

$$(\frac{p}{q})^2 - \frac{p}{q} - 1 = 0, \frac{p}{q} \in \{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\} \tag{2.13}$$

o que é absurdo, pois $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Vamos apresentar uma outra maneira de representar números reais, a representação por frações contínuas, que sempre fornece as melhores aproximações que poderíamos obter.

2.3 Frações Contínuas

Definiremos a seguir o conceito de frações contínuas, de acordo com [1]

Definição 2.3.1. *Frações Contínuas*

Dado um número real x, seja $a_0 = \lfloor x \rfloor$*. Se* $x \notin \mathbb{Z}$*, ponha* $\alpha_1 = \frac{1}{x-a_0}$*. Para cada* $n \in \mathbb{N}$*, considera-se a sequência de números naturais* a_n *definida recursivamente através da relação* $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$*. Se* $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$*, então* $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$*.*

i)Se para algum $n \in N$*,* $\alpha_n = a_n$ *tem-se:*

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{...+\cfrac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_n}}}} := [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n]. \tag{2.14}$$

ii) Caso contrário

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{...+\cfrac{1}{a_n+...}}}} := [a_0; a_1, ..., a_n, ...] \tag{2.15}$$

O sentido dessa última notação ficará claro mais tarde. A representação acima se chama representação por frações contínuas de x.

Definição 2.3.2. *Considere* $x=[a_0;a_1,a_2,...]$*.*

Sejam $p_n \in \mathbb{Z}$*,* $q_n \in \mathbb{N}^*$ *primos entre si tais que*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n], n > 0. \tag{2.16}$$

A fração $\frac{p_n}{q_n}$ *é chamada n-ésima reduzida ou convergente da fração contínua de x*

Teorema 2.3.1. *Dada uma sequência (finita ou infinita)* $t_0,t_1,t_2,.... \in \mathbb{R}$ *tal que* $t_k > 0$*, para todo* $k \geq 1$*, definimos sequências* (x_m) *e* (y_m) *por:*

$x_0=t_0$, $y_0=1$, $x_1=t_0\, t_1 + 1$, $y_1 = t_1$, $x_{m+2}=t_{m+2}\, x_{m+1} + x_m$, $y_{m+2}=t_{m+2}\, y_{m+1} + y_m$, $m \geq 0$.

Temos então:

$$[t_0; t_1, t_2, ..., t_n] = \frac{x_n}{y_n}, n \geq 0. \tag{2.17}$$

Além disso,

$$x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1} = (-1)^n, n \geq 0. \tag{2.18}$$

Demonstração:

A prova será por indução em n. Para $n=0$ *temos* $[t_0]=t_0=\frac{t_0}{1}=\frac{x_0}{y_0}$*.Para* $n=1$*, temos* $[t_0;t_1]=t_0+\frac{1}{t_1}=\frac{t_0t_1+1}{t_1}=\frac{x_1}{y_1}$ *e, para* $n=2$*, temos*

$$[t_0;t_1,t_2]=t_0+\frac{1}{t_1+\frac{1}{t_2}}=t_0+\frac{t_2}{t_1t_2+1}=\frac{t_0t_1t_2+t_0+t_2}{t_1t_2+1}=\frac{t_2(t_0t_1+1)+t_0}{t_2t_1+1}=\frac{t_2x_1+x_0}{r_2y_1+y_0}=\frac{x_2}{y_2} \tag{2.19}$$

Suponha que a afirmação seja válida para n. Para $n+1$ *em lugar de n, temos:*

$$[t_0;t_1,t_2,...,t_n,t_{n+1}]=[t_0;t_1,t_2,...,t_n+\frac{1}{t_{n+1}}]=\frac{(t_n+\frac{1}{t_{n+1}})x_{n-1}+x_{n-2}}{(t_n+\frac{1}{t_{n+1}})y_{n-1}+y_{n-2}}= \tag{2.20}$$

$$\frac{t_{n+1}(t_nx_{n-1}+x_{n-2})+x_{n-1}}{t_{n+1}(t_ny_{n-1}+y_{n-2})+y_{n-1}}=\frac{t_{n+1}x_n+x_{n-1}}{t_{n+1}y_n+y_{n-1}}=\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}. \tag{2.21}$$

Se $n=0$ *temos que:*

$$x_1y_0-x_0y_1=a_0a_1+1-a_0a_1=1=(-1)^0 \tag{2.22}$$

Agora, se $x_{n+1}y_n-x_ny_{n+1}=(-1)^n$ *para algum valor de n, então:*

$$x_{n+2}y_{n+1}-x_{n+1}y_{n+2}= \tag{2.23}$$

$$(a_{n+2}x_{n+1}+x_n)y_{n+1}-(a_{n+2}y_{n+1}+y_n)x_{n+1}= \tag{2.24}$$

$$-(x_{n+1}y_n-x_ny_{n+1})= \tag{2.25}$$

$$-(-1)^n= \tag{2.26}$$

$$(-1)^{n+1} \tag{2.27}$$

Portanto, a igualdade é verdadeira para todo $n\geq 0$*.* □

Teorema 2.3.2. *As sequências* (p_n) *e* (q_n) *satisfazem as recorrências:*

$$p_{n+2}=a_{n+2}p_{n+1}+p_n \tag{2.28}$$

e

$$q_{n+2}=a_{n+2}q_{n+1}+q_n \tag{2.29}$$

Para todo $n\geq 0$*.*

Demonstração:

As sequências (p_n) e (q_n) definidas pelas recorrências acima satisfazem, pela proposição anterior, as igualdades

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] \tag{2.30}$$

e

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n, n \geq 0. \tag{2.31}$$

Como $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que os p_n, q_n dados pelas recorrências acima são primos entre si. Além disso, também segue da recorrência que $q_n > 0$, $n \geq 0$. Esses fatos implicam que $\frac{p_n}{q_n}$ é a sequência de reduzidas da fração contínua de x. $\square$

Teorema 2.3.3. *Para todo $k \geq 0$, temos*

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq x \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} \tag{2.32}$$

Demonstração:

O resultado segue dos seguintes fatos gerais. Para todo $n \geq 0$, temos que

$$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \tag{2.33}$$

$$\frac{a_{n+2}p_{n+1} + p_n}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n} - \frac{p_n}{q_n} = \tag{2.34}$$

$$\frac{a_{n+2}(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1})}{q_n(a_{n+2}q_{n+1} + q_n)} = \tag{2.35}$$

$$\frac{(-1)^n a_{n+2}}{q_{n+2}q_n} \tag{2.36}$$

é positivo para n par e negativo para n ímpar. Além disso, para todo $n \geq 0$, temos que

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \tag{2.37}$$

é positivo para n par e negativo para n ímpar. $\square$

Teorema 2.3.4. *(Reduzidas e Boas Aproximações) Temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| \leq |\frac{1}{q_nq_{n+1}}| < \frac{1}{q_n^2} \tag{2.38}$$

Além disso,

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{2q_n^2} \tag{2.39}$$

Ou,

$$|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}| < \frac{1}{2q_{n+1}^2} \tag{2.40}$$

Demonstração:

O número x sempre pertence a algum segmento de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ cujo comprimento é:

$$|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}| = |\frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}| = |\frac{1}{q_n q_{n+1}}| \tag{2.41}$$

O que implica em:

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2} \tag{2.42}$$

Além disso, se

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| \geq \frac{1}{2q_n^2} \tag{2.43}$$

e

$$|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}| \geq \frac{1}{2q_{n+1}^2}, \tag{2.44}$$

então

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = |x - \frac{p_n}{q_n}| + |x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}| \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} \tag{2.45}$$

Com isso, temos que q_{n+1}=q_n, absurdo. □

Observação: De fato, | x - $\frac{p_n}{q_n}$|<$\frac{1}{q_n q_{n+1}}$<$\frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$. Quanto maior for a_{n+1}, melhor será a aproximação $\frac{p_n}{q_n}$ de x.

2.4 Representação Geométrica das Frações Contínuas

A figura abaixo nos dá uma representação geométrica para a representação de um número por frações contínuas. Enchemos um retângulo 1 X x com quadrados de forma "gulosa", isto é, sempre colocando o maior quadrado dentro do espaço ainda livre. Os coeficientes a_0,a_1,a_2,... indicam o número de quadrados de cada tamanho. Na figura, se os lados do retângulo são c<d, então

$$\frac{d}{c} = [1; 2, 2, 1, ...] \tag{2.46}$$

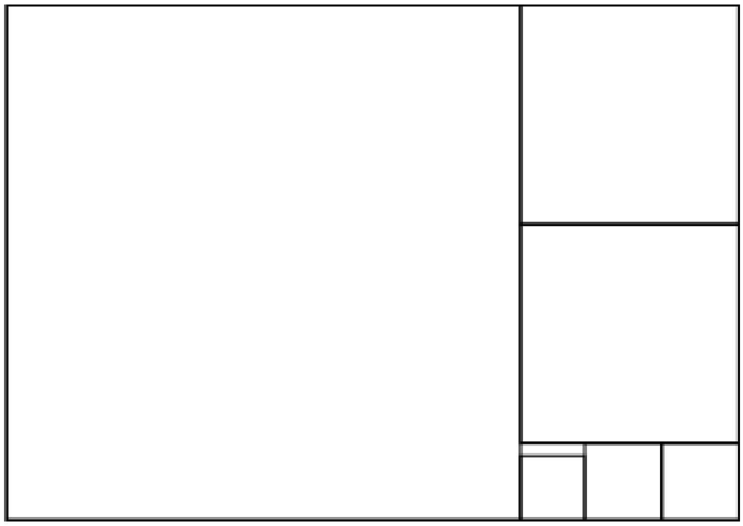

Figura 1: Enchimento do retângulo 1Xx de forma gulosa. Fonte:http://klein.sbm.org.br

pois temos a_0=1 quadrado grande,a_1=2 quadrados menores,a_2=2 quadrados ainda menores, a_3=1 quadrado ainda ainda menores, e número grande não desenhados de quadrados ainda ainda ainda menores(a_4 é grande).

A seguir, são ilustrados alguns casos do processo descrito na definição das frações contínuas, sendo x um número racional.

Exemplo 2.4.1. *Faremos uso do método de Euclides para obtenção do mdc de dois números inteiros. Nessa primeira oportunidade, iremos considerar os inteiros 10 e 7.*

Temos, então, que:

$$10 = 7.1 + 3 \tag{2.47}$$

$$7 = 3.2 + 1 \tag{2.48}$$

$$3 = 3.1 + 0 \tag{2.49}$$

Logo mdc(10,7)=1

Dessa forma, podemos representar a fração $\frac{10}{7}$ da seguinte maneira:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} \tag{2.50}$$

De acordo com a notação descrita na definição das frações contínuas, obtemos:

$$\frac{10}{7} = [1; 2, 3] \tag{2.51}$$

Exemplo 2.4.2. *No caso da fração $\frac{344}{77}$, segue que:*

$$344 = 77.4 + 36 \tag{2.52}$$

$$77 = 36.2 + 5 \tag{2.53}$$

$$36 = 5.7 + 1 \tag{2.54}$$

$$5 = 5.1 + 0 \tag{2.55}$$

Portanto:

$$\frac{344}{77} = 4 + \frac{36}{77} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{5}{36}} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{5}}} \tag{2.56}$$

Pela notação das frações contínuas:

$$\frac{344}{77} = [4; 2, 7, 5]. \tag{2.57}$$

Observe que, aplicando o processo de divisões sucessivas, apenas o primeiro quociente pode ser positivo, negativo ou zero na representação do número racional $\frac{p}{q}$. Podemos, então, separar a representação em três casos distintos:

i)Se $0 < p < q$, então o primeiro quociente parcial da fração contínua é zero.
ii)Se p for negativo, então o primeiro quociente parcial da fração contínua é negativo.
iii)Se $p > q$, então o primeiro quociente parcial da fração contínua é positivo.

Conforme apresentamos nos exemplos 1 e 2, os números racionais indicados tem representação na forma das frações contínuas. Tal representação pode ser obtida através do método de Euclides.

Tomando como base o teorema a seguir, discutiremos a generalização da idéia de que todo número racional pode ser representado na forma de frações contínuas, e tal representação não é única.

Teorema 2.4.1. *Todo número racional pode ser representado de até duas maneiras distintas sob a forma de fração contínua finita.*

Demonstração:

Sejam a e b números inteiros, com b>0. Pelo algoritmo da divisão euclidiana, existem inteiros q>0 e r_1 *tais que a=bq+*r_1*, onde* $0 \le r_1 < q$.

Daí obtemos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{bq}{b} + \frac{r_1}{b} \tag{2.58}$$

Se r_1*>0, é possível dividir b por* r_1 *e aplicar novamente o algoritmo da divisão.*

Logo, existem inteiros a_1 *e* r_2*, tais que* a_1*>0 e* $0 \le r_2 < r_1$ *satisfazendo q=*$a_1\ r_1 + r_2$.

Consequentemente:

$$\frac{a}{b} = q + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} \tag{2.59}$$

Fazendo q=a_0*, segue que:*

$$\frac{a}{b} = q + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r_1}} \tag{2.60}$$

O algoritmo da divisão pode ser aplicado sucessivamente e, como a sequência de restos obtidos é decrescente e formada por números inteiros não negativos, existirá algum n natural tal que r_n=0.

Na representação do número racional através da forma de frações contínuas, sempre que o último quociente a_n obtido for maior do que 1, pode ser substituído por (a_n-1) $+\frac{1}{1}$, comprovando a duplicidade na representação. $\square$

Note que se a representação por frações contínuas de x for finita, então x é claramente racional, pois o conjunto dos números racionais é um corpo.

Exemplo 2.4.3. *Vejamos, a seguir, duas formas distintas na forma de frações contínuas para a representação do número racional $\frac{25}{11}$:*

$$\frac{25}{11} = 2+\frac{3}{11} = 2+\frac{1}{\frac{11}{3}} = 2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = [2;3,1,2] \tag{2.61}$$

Por outro lado, temos:

$$2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = 2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} \tag{2.62}$$

Portanto:

$$\frac{25}{11} = [2;3,1,2] = [2;3,1,1,1]. \tag{2.63}$$

2.5 Frações Contínuas de Números Irracionais

Como toda fração contínua finita tem valor racional, podemos concluir que todo número irracional tem representação por frações contínuas infinita.

A seguir, faremos a representação por frações contínuas de alguns desses casos:

2.5.1 $\sqrt{2}$

Observe que:

$$\sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \tag{2.64}$$

Logo,

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}} = ... \tag{2.65}$$

De acordo com a extensão acima, a representação por frações contínuas do número $\sqrt{2}$ é dada por [1;2,2,2,2,...].

2.5.2 $\sqrt{3}$

Observe que:

$$\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)+1=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}+1}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}} \quad (2.66)$$

Continuando a expansão, obtemos a seguinte representação por frações contínuas: $\sqrt{3}$*=[1;1,2,1,2,1,2,...].*

2.5.3 $\sqrt{5}$

Note a sequência de igualdades:

$$\sqrt{5}=2+(\sqrt{5}-2)=2+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}=2+\frac{1}{\sqrt{5}+2}=2+\frac{1}{4+\frac{1}{\sqrt{5}+2}}=\ldots \quad (2.67)$$

Portanto, a expansão em frações contínuas do número $\sqrt{5}$ *é dada por [2;4,4,4,4,...].*

2.5.4 π

A representação decimal do número π *e o processo recursivo discutido na definição(2.3.1) permitem concluir que:*

$$\pi=[3;7,15,1,292,1,1,1,2,\ldots] \quad (2.68)$$

A partir dessa expansão, podemos obter algumas de suas convergentes, tais como:

$$\frac{p_0}{q_0}=3 \quad (2.69)$$

$$\frac{p_1}{q_1}=3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7} \quad (2.70)$$

Observe que a convergente indicada logo acima, fornece a aproximação para o π *encontrada pelo matemático Arquimedes, conforme mencionamos no capítulo 1.*

$$\frac{p_3}{q_3}=3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}}}=3+\frac{16}{113}=\frac{355}{113} \quad (2.71)$$

Nesse último caso, a convergente fornece a outra aproximação para o π*, também discutida no capítulo 1 e encontrada por Adriaen Matieus.*

2.5.5 e

$$e=[2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,\ldots,1,1,2n,\ldots] \quad (2.72)$$

Não incluiremos neste texto o método de obtenção da fração contínua do número e. O leitor pode encontrar detalhes na resolução do exercício (3.9) de [14].

3 História da Matemática e as Frações Contínuas

Ao longo deste capítulo, daremos ênfase à história da matemática para compreender com mais detalhes a teoria das frações contínuas. A exposição e o conhecimento do desenvolvimento da matemática, com o contexto histórico, certamente contribui de maneira significativa para o avanço do aprendizado da disciplina. Dessa forma, procuraremos conduzir a sequência do capítulo com esse objetivo. Para isso, tomamos como base a referência bibliográfica do site Wikiciências, e as informações sobre a vida e contribuição dos matemáticos foram retiradas dessa fonte.

3.1 Os primeiros registros

Conforme indicado em [5], não é possível obter um período exato do primeiro registro em que surgiu a idéia do conceito de frações contínuas na história da matemática, muito embora já tenham sido encontrados vestígios em toda a escrita da antiga matemática grega e árabe.

Com a formulação do Algoritmo de Euclides(325 a.C.-265 a.C.), existem grandes possibilidades de que as civilizações tivessem utilizado tal algoritmo para o cálculo do máximo divisor comum (MDC) entre dois números inteiros positivos e também no conceito das frações contínuas, assim como aplicamos na expansão dos números racionais (vide capítulo 2). Entretanto, não há evidências de que o desenvolvimento da teoria tenha sido concreto.

À medida que os matemáticos estudavam as aproximações de números reais por números racionais, surgiam as representações das frações contínuas para um número real arbitrário. Somente mais adiante, com o avanço da matemática pura, tais representações foram vistas como as melhores aproximações que poderiam ser obtidas.

3.2 Cientistas que contribuíram para o avanço da Teoria das Frações Contínuas

3.2.1 Ariabata(476-550) e a Matemática Indiana

Figura 2: Escultura do matemático indiano Ariabata. Fonte:www.thefamouspeople.com

Ariabata foi o primeiro dentre os grandes matemáticos-astrônomos da Idade Clássica. Estabelecendo um quadro comparativo com os outros cientistas da época, pode ser considerado notável pois apresentou contribuições em diversas áreas do conhecimento, tendo em vista o amplo repertório nas aplicações práticas.

Em 499 d.C., criou a obra Aryabhatiya. Este livro apresenta regras de cálculo para astronomia, conceitos matemáticos e vários outros problemas. Ensina a elevar ao quadrado e ao cubo, a extrair raízes quadradas e cúbicas. Ariabata deu uma indicação muito próxima para π, registrou que: "Some quatro a cem, multiplique por oito e então adicione sessenta e dois mil. O resultado é aproximadamente a circunferência de um círculo de diâmetro vinte mil. Por esta regra, a relação da circunferência para o diâmetro é dada."Em outras palavras, π é dado aproximadamente pelo quociente $\frac{62832}{20000}$, que é igual a 3,1416. Com isso, é possível perceber uma estimativa razoável para o valor exato de π, com as três primeiras casas decimais.

Foi considerado o primeiro astrônomo a tentar medir a circunferência da Terra desde Eratóstenes (200 a.C.), calculando a circunferência do planeta em 24.835 milhas, apenas 0,2 % menor que o valor real de 24,902 milhas. Tal valor permaneceu como o mais preciso durante mais de mil anos.

O Aryabhatiya foi traduzido para o latim no século XIII, antes do tempo de Copérnico. Por esta tradução, matemáticos europeus puderam saber os métodos para calcular as áreas de triângulos, volumes de esferas bem como a raiz quadrada e cúbica, enquanto é também provável que o trabalho de Ariabata teve influência na astronomia européia.

Dentro do contexto da teoria dos números, um de seus livros é dedicado para resolver equações lineares indeterminadas. Nos tempos atuais, o algoritmo descrito na resolução de tais equações é denominado algoritmo ariabata.

De acordo com [7], que relata sobre o desenvolvimento da matemática indiana, também escreveu o livro Arya Siddhanta, que se encontra atualmente perdido. A utilização das frações contínuas foi percebida no seus estudos em aritmética, porém sem registros.

3.2.2 Rafael Bombelli(1526 - 1572)

Figura 3: Rafael Bombelli. Fonte:http://learn-math.info

Foi um algebrista italiano nascido em Bologna, o mais importante da história da matemática da Itália, pioneiro no estudo sobre os números imaginários: sua principal publicação sobre álgebra, Algebra, composto de cinco volumes, levando em consideração que os livros IV e o V estavam incompletos e só foram editados no ano seguinte à sua morte.

No campo da teoria das frações contínuas, o matemático desenvolveu um método para obter a expansão em frações contínuas de raízes quadradas. Consiste na seguinte expressão:

$$x = \sqrt{N} = \sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}}} \tag{3.1}$$

Na sequência de igualdades acima, $\sqrt{N}$ é o número real que desejamos obter a expansão por meio de frações contínuas, a^2 é o maior quadrado perfeito menor do que N e b=N-a^2.

A verificação de tal expressão é fornecida abaixo.

Considerando $\sqrt{N}$=$\sqrt{a^2+b}$, tem-se então que:

$$N = a^2 + b \tag{3.2}$$

e, consequentemente,

$$N - a^2 = b. \tag{3.3}$$

Fatorando a diferença de quadrados:

$$(\sqrt{N} - a)(\sqrt{N} + a) = b. \tag{3.4}$$

Logo:

$$\sqrt{N} = a + \frac{b}{\sqrt{N}+a} \tag{3.5}$$

Aplicando a igualdade acima para $\sqrt{N}$, no denominador da fração que aparece no segundo membro, concluímos:

$$\sqrt{N} = a + \frac{b}{a + \frac{b}{\sqrt{N}+a} + a} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{\sqrt{N}+a}} \tag{3.6}$$

Repetindo indefinidamente o processo, obtemos a expressão inicial para x.

Bombelli utilizou esse resultado, para determinar uma representação em frações contínuas de $\sqrt{13}$, atribuindo $a = 3$ e $b = 4$.

Com isso, chegou a:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6+\frac{4}{6+\frac{4}{6+\dots}}}} \tag{3.7}$$

3.2.3 William Brouncker(1620-1684)

Figura 4: William Brouncker. Fonte: wikipedia.org

Foi um matemático inglês que adquiriu o doutorado pela universidade de Oxford, em 1647. Além disso, um dos fundadores da Royal Society e o seu segundo presidente.

Realizações matemáticas de Brouncker inclui trabalhos sobre frações contínuas e logaritmos através de cálculo por séries infinitas. Em 1655, ele forneceu uma expansão na forma de fração contínua do número real $\frac{4}{\pi}$.

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2+\frac{7^2}{2+\frac{9^2}{2+\dots}}}}} \tag{3.8}$$

3.2.4 Leonhard Euler(1707 - 1783)

Figura 5: Leonhard Euler. Fonte:www.popsci.com

Leonhard Euler foi um importante matemático e cientista suíço, considerado um dos maiores estudiosos da matemática, em sua época.

Nasceu na Basileia, Suíça, no dia 15 de abril de 1707. Filho de Paul Euler, ministro protestante e Margaret Brucker, com um ano de idade mudou-se com a família para a cidade de Riehen, onde passou grande parte de sua infância. Foi educado por seu pai que lhe ensinou os primeiros conceitos da matemática. Com 7 anos começou a estudar com um professor particular e a ler textos diversos.

Em 1720, com 13 anos de idade, retornou para a Basileia para estudar e se preparar para o curso de Teologia na Universidade local. Em 1723, com 16 anos, recebeu o grau de Mestre em Artes, com uma dissertação que comparava os sistemas de Filosofia Natural de Newton e Descartes.

Atendendo ao desejo da família, matriculou-se na Faculdade de Teologia. Embora muito religioso, não demostrou entusiasmo com o estudo de Teologia e nas horas vagas se dedicava ao estudo da matemática. Com o incentivo do matemático Johan Bernoulli, que descobriu seu talento para a matemática, Euler ingressou no curso de matemática e ao concluí-lo, em 1726, foi convidado para a Universidade de São Petersburgo, na Rússia.

Em 1727, como não fora selecionado para a cadeira de Física da Universidade da Basiléia, mudou-se para a Rússia. Filiou-se à Academia de Ciências quando entrou em contato com grandes cientistas, como Jacob Hermann, Daniel Bernoulli, e Christian Goldback. Entre 1727 e 1730, quando os recursos para financiar o ingresso de cientistas estrangeiros na Academia foram suspensos, Euler serviu como médico-tenente na Marinha Russa.

Em 1730, assumiu o cargo de professor de Física da Academia. Em 1732 substituiu Daniel Bernoulli como professor de Matemática. Em 1734 se casou com a suíça Katharina Gsell e juntos tiveram 13 filhos. Nessa época, Euler publicou diversos textos, entre eles, o livro "Mecânica" (1736-37), quando apresentou extensivamente a dinâmica Newtoniana na forma de análise matemática. Euler conquistou reputação internacional, recebendo menção honrosa da Academia de Ciências de Paris.

Em 1741, preocupado com a constante turbulência na Rússia, Euler deixou São Petersburgo e seguiu pra a Academia de Ciências de Berlim, onde permaneceu durante 25 anos. Em

1744 foi nomeado diretor da seção de Matemática da Academia.

Escreveu diversos trabalhos utilizando uma matemática inovadora. Uma de suas maiores realizações foi o desenvolvimento do método dos algoritmos com o qual conseguiu, por exemplo, fazer a previsão das fases da lua, com a finalidade de obter informações para a elaboração de tabelas para ajudar o sistema de navegação.

Entre suas contribuições mais conhecidas na matemática moderna estão: a introdução da função gama, a analogia entre o cálculo infinitesimal e o cálculo das diferenças finitas, quando discutiu minunciosamente todos os aspectos formais do Cálculo Diferencial e Integral, da época. Foi o primeiro matemático a trabalhar com as funções seno e cosseno. Em 1760, iniciou o estudo das linhas de curvatura e começou a desenvolver um novo ramo da matemática denominado Geometria Diferencial.

Durante sua permanência em Berlim, Euler escreveu mais de 200 artigos sobre Física, Matemática e Astronomia e três livros de análise matemática. Escreveu mais de 200 cartas para a Princesa da Alemanha, que mais tarde foram publicadas em 3 volumes, que tratavam sobre os mais diversos assuntos, como Filosofia Natural, Religião, Física e Matemática. Em 1766, Euler voltou para a Rússia.

Conseguiu escrever o primeiro texto abrangente em que explicava as propriedades de frações contínuas. Euler demonstrou que os racionais são escritos como frações contínuas finitas e provou que a representação dos irracionais é na forma de fração contínua infinita. Uma constante matemática estudada nesse contexto é o número e. É interessante saber que o número e, definido por $e= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, cujo valor aproximado é 2,718281..., se escreve como e=[2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,...].

Leonhard Euler faleceu em São Petersburgo, Rússia, no dia 18 de setembro de 1783.

3.2.5 Johann Heinrich Lambert(1728 – 1777)

Figura 6: Johann Heinrich Lambert. Fonte: www.inspiringquotes.us

Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) foi um matemático, astrônomo, físico e filósofo que forneceu a primeira prova rigorosa que o valor de π (a relação entre o perímetro de um círculo e o seu diâmetro) é um número irracional, o que significa que não pode ser expresso como o quociente entre dois números inteiros.

Lambert era filho de um alfaiate, Lukas Lambert, casado com Elisabeth Schmerber, em 1724. Ao longo de toda a sua infância, Lambert cresceu em circunstâncias pobres e teve que deixar a escola com apenas 12 anos, para poder ajudar o seu pai. No entanto, Lukas morreu em 1747, deixando Elisabeth viúva com cinco meninos e duas meninas. No seio destas circunstâncias difíceis, Lambert utilizou bem o pouco ensino que havia recebido, juntamente com alguma formação em francês e latim, continuando os seus estudos sem professor. Foi, em grande parte, um autodidata que começou bem jovem com investigações geométricas e astronômicas através de instrumentos projetados e construídos pelo próprio.

Trabalhou algum tempo como escriturário, secretário e editor. Depois, em 1748, começou a dar aulas como professor particular e utilizou esse estatuto para obter acesso a boas bibliotecas, que usou para aperfeiçoamento dos seus conhecimentos. Em 1759, Lambert decidiu renunciar ao seu cargo para se estabelecer em Augsburg (Alemanha). Em 1764, foi para Berlim e foi apenas quatro anos depois que Lambert publicou a obra que comprova o fato de que π é um número irracional. Em 1774, em Berlim, tornou-se editor do Astronomisches Jahrbuch oder Ephemeriden (Anuário de Astronomia e de Efemérides), um almanaque astronômico.

Entre as suas obras mais importantes encontram-se Photometria (1760; "Fotometria"); Die Theorie der Parallellinien (1766; "A teoria das linhas paralelas"), que contem resultados mais tarde incluídos na geometria não-euclidiana; e Pyrometrie (1779; "Pirometria"). A principal obra filosófica de Lambert, Neues Organon (1764), contem uma análise de uma grande variedade de questões, entre elas a lógica formal, a probabilidade e os princípios da ciência. Lambert partilhava correspondência com Immanuel Kant (1724 – 1808), e foi dos primeiros a reconhecer que as nebulosas espirais eram galáxias em forma de disco, tal como a Via Láctea.

Lambert fez o primeiro desenvolvimento sistemático das funções hiperbólicas. É também responsável por muitas inovações no estudo do calor e da radiação. O último livro de Lambert, intitulado Pyrometrie (Berlim, 1779), abordou as questões da medição do calor. Na publicação, Lambert não tratou apenas dos fenômenos de irradiação, mas também da reflexão de calor, embora não tenha realizado demonstrações acerca deste último. Lambert também levou em consideração o efeito sensorial do calor no corpo humano e tentou fornecer-lhe uma formulação matemática. Apesar de ter morrido com apenas 49 anos, Lambert produziu e publicou mais de 150 trabalhos.

Forneceu a primeira demonstração de que o número π é irracional, usando frações contínuas para calcular $tan(x)$ através da relação

$$\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{\frac{3}{x}-\frac{1}{\frac{5}{x}-\dots}}} \tag{3.9}$$

Lambert usou essa expressão para concluir que se x é um número racional não-nulo, então $tan(x)$ não pode ser um número racional. Sendo assim, como $tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, então π não pode ser racional.

3.2.6 Joseph-Louis Lagrange(1736 – 1813)

Lagrange é geralmente considerado um matemático francês, mas na realidade ele nasceu em Turim, Itália, e foi batizado com o nome Giuseppe Lodovico Lagrangia. Seu pai, Giuseppe Francesco Lodovico Lagrangia era tesoureiro do escritório público de trabalhos e fortificações de Turim. Sua mãe era filha única de um médico de Cambiano, perto de Turim. Lagrange era o primogênito de um total de onze filhos, dos quais, apenas ele e mais um irmão atingiram a idade adulta. Lagrange se interessou pela matemática quando recebeu uma cópia do livro de Halley de 1693 sobre o uso da álgebra em óptica.

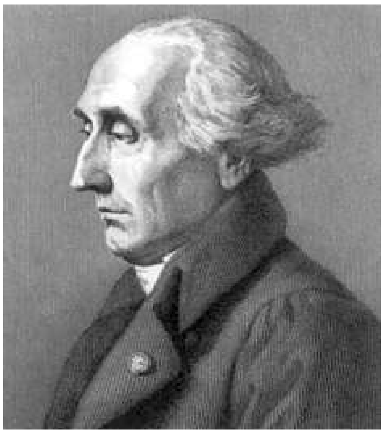

Figura 7: Joseph-Louis Lagrange. Fonte:www.wikipedia.org

Apesar de seu pai ter um cargo relativamente importante, a família de Lagrange não era rica. Talvez nós tenhamos que agradecer ao pai de Lagrange pela sua situação economicamente modesta, pois o próprio Lagrange disse: "Se eu tivesse sido rico, provavelmente não teria dedicado a minha vida à matemática".

Lagrange foi uma criança prodígio. Basicamente autodidata, aos 19 anos foi indicado para ser professor universitário da Escola Real de Artilharia de Turim. Membro fundador da Academia Real de Ciências de Turim, Lagrange recebeu um convite para suceder Euler na Academia de Berlim, onde permaneceu por 20 anos. Posteriormente mudou-se para Paris, após um convite de Frederico, o grande, para a Academia de Ciências de Paris.

Lagrange ganhou incontáveis prêmios e publicou inúmeros trabalhos de alta qualidade em várias áreas da ciência, dentre eles: a teoria dos números; teoria das funções; cálculo de probabilidades; teoria dos grupos; equações diferenciais; mecânica dos fluidos; mecânica analítica e mecânica celeste. Sua vida foi quase que inteiramente dedicada à ciência.

Dentro da teoria dos números, demonstrou que as raízes irracionais de equações quadráticas tem expansão na forma de fração contínua periódica.

3.3 Uma segunda classificação dos números reais: Algébricos e Transcendentes

Nesta seção, faremos uso das referências [1] e [8] para enunciar algumas definições e provar a existência de números transcendentes, com o auxílio da teoria das frações contínuas. Sugerimos fortemente que o leitor reveja alguns conceitos básicos do cálculo diferencial e integral, tais como a derivada de funções polinomiais e o teorema do valor médio para funções reais de uma variável. Os assuntos podem ser encontrados com detalhes na referência[9].

Definição 3.3.1. *Um número real é dito algébrico se for raíz de alguma equação polinomial não-nula com coeficientes inteiros. Além disso, dizemos que α é um número algébrico de grau n, se n for o menor grau dos polinômios g tais que $g(\alpha) = 0$. Caso contrário, diremos que tal número real é transcendente.*

A definição de número transcendente é do século XVIII e, segundo Euler, esses números são transcendentes porque transcendem o poder das operações algébricas. Contudo, apenas um século depois verificou-se a existência desses números, quando, em 1844, Liouville exibiu os primeiros exemplos.

Nesse sentido, todos os números racionais são algébricos, pois são raízes de equações polinomiais do tipo $qx - p = 0$, onde p e q são números inteiros, com q não-nulo.

Dentre os números reais que são irracionais, é possível destacar alguns casos de números algébricos, tais como:

1)$\sqrt{2}$ e as raízes quadradas de números naturais que não são exatas:

No caso do número real $\sqrt{2}$, basta observar que é solução de $x^2 - 2 = 0$.

Podemos generalizar essa idéia para as raízes quadradas que não são exatas, isto é, para $\sqrt{q}$, onde q é um número natural positivo que não seja quadrado perfeito. Assim, deve-se notar que tal raíz quadrada é solução de $x^2 - q = 0$.

2)$\sqrt[3]{2}$

Nesse caso, a raíz cúbica é solução da equação polinomial x^3-2=0.

3)$\sqrt{5}+\sqrt{7}$

A dedução da equação polinomial nesse 3º caso não é tão intuitiva como nos casos anteriores, mas será obtida a partir de um raciocínio algébrico.

Considere x = $\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, obtemos:

$$x^2 = 12 + 2\sqrt{35} \tag{3.10}$$

e, consequentemente,

$$x^2 - 12 = 2\sqrt{35}. \tag{3.11}$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os membros da igualdade logo acima, tem-se que:

$$x^4 - 24x^2 + 144 = 140. \tag{3.12}$$

Daí, x é solução da equação polinomial $x^4 - 24x^2 + 4 = 0$ e, portanto, x é um número algébrico.

A seguir, será comprovada a existência de números reais que não são algébricos, de acordo com a definição indicada. Para isto, utilizaremos a teoria das frações contínuas e um conhecido teorema da teoria dos números, o teorema de Liouville.

Teorema 3.3.1. *(Liouville) Dado um número algébrico irracional α de grau n, então existe $A > 0$, tal que, para todo p,q natural, com $q > 0$, tem-se*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{A}{q^n} \tag{3.13}$$

Demonstração: α *é solução de uma equação polinomial da forma*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0. \tag{3.14}$$

Agora, seja $d > 0$ *tal que, no intervalo [*α*-d,*α*+d] a única raíz de* $f(x) = 0$ *é* α. *(A existência de um tal d se segue de que a equação polinomial tem no máximo n raízes reais: portanto d pode ser qualquer número menor que a distâncias de* α *às demais raízes reais). A seguir, observamos que a derivada* $f'(x)$ *de* $f(x)$ *é um polinômio de grau* $n-1$, *e, portanto, ela é limitada em qualquer intervalo finito. Com base nisso, seja* $M > 0$ *tal que*

$$|f'(x)| < M, para\ x \in [\alpha - d, \alpha + d] \tag{3.15}$$

Agora, para qualquer racional $\frac{p}{q}$, *com* $q > 0$, *em [*α*-d,*α*+d] temos, aplicando o teorema do valor médio, que*

$$f(\alpha) - f(\frac{p}{q}) = (\alpha - \frac{p}{q})f'(\varepsilon), onde \varepsilon \in (\alpha - d, \alpha + d). \tag{3.16}$$

,

Como $f(\alpha) = 0$, *obtemos*

$$|f(\frac{p}{q})| = |\alpha - \frac{p}{q}||f'(\varepsilon)| \leq M||\alpha - \frac{p}{q}| \tag{3.17}$$

onde usamos a estimativa (3.15) no último passo.

Para obter a desigualdade buscada, necessitamos de uma estimativa inferior para $f(\frac{p}{q})$:

$$|f(\frac{p}{q})| = |\frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_0 q^n}{q^n}| \geq \frac{1}{q^n} \tag{3.18}$$

Portanto:

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{1}{Mq^n}, para\ \frac{p}{q} \in [\alpha - d, \alpha + d]. \tag{3.19}$$

Se $\frac{p}{q}$ *não estiver nesse intervalo teremos, então*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > d \tag{3.20}$$

e como $q \geq 1$, *temos:*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{d}{q^n}. \tag{3.21}$$

Tomamos, finalmente, A igual ao menor dos elementos $\frac{1}{M}$ *e d, e obtemos a relação que queríamos provar, para todos os racionais* $\frac{p}{q}$.

Para mostrarmos a existência de números transcendentes é suficiente que, nas mesmas condições do teorema acima, a desigualdade em α dada por:

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{C}{q^n} \tag{3.22}$$

tenha infinitas soluções para todo n.

Pelas propriedades das frações contínuas, fica mais simples determinar quantos desses quisermos.

De fato, escolhendo $a_0,a_1,a_2,...,a_k$ termos quaisquer, podemos formar o k-ésimo convergente C_k=[$a_0;a_1,a_2,...,a_k,a_{k+1}$], e tomando $a_{k+1}>q_k^{k-1}$, $C > 0$ e α=[$a_0;a_1,a_2,...,a_k,a_{k+1},...$], segue que:

$$|\alpha - \frac{p_k}{q_k}| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{a_{k+1}q_k^2} < \frac{1}{q_k^2 q_k^{k-1}} = \frac{1}{q_k^{k+1}} < \frac{C}{q_k^n} \tag{3.23}$$

Logo, dados $C > 0$ e n natural, para k suficientemente grande:

$$|\alpha - \frac{p_k}{q_k}| < \frac{1}{q_k^{k+1}} < \frac{C}{q_k^n}. \tag{3.24}$$

E, portanto, α é transcendente.

Com isso, comprovamos a existência de números reais que não são algébricos.Ocorre um detalhe mais interessante ainda: Na reta real, os números transcendentes existem em profusão. Alguns dos números irracionais bastante conhecidos são transcendentes, tais como o π e o e. De acordo com os objetivos do nosso texto, não serão incluídas tais demonstrações. Para maiores detalhes, consulte[13].

3.4 Algumas aplicações das Frações Contínuas em problemas cotidianos

3.4.1 Calendário Gregoriano

O Calendário Gregoriano teve a sua origem na Europa no século XV, promulgado pelo Papa Gregório XIII(1502-1585) em 24 de Fevereiro do ano 1582, em substituição ao calendário juliano, mais antigo, implantado pelo líder romano Júlio César (100 a.C.- 44 a.C.) em 46 a.C., sendo utilizado oficialmente pela maioria dos países. Por razões históricas, além da convenção e praticidade, o calendário gregoriano foi adotado para demarcar o ano civil no mundo inteiro, facilitando o relacionamento entre as nações do resto do globo.

Se divide em 12 meses, sendo que Janeiro, Março, Maio, Julho, Agosto, Outubro e Dezembro possuem 31 dias, e os demais, Abril, Junho, Setembro e Novembro, 30 dias, com exceção do mês de fevereiro que oscila entre 28 e 29 dias, a depender dos anos bissextos.

Entre as mudanças, foram omitidos dez dias do calendário juliano, excluindo os dias entre 5 a 14 de outubro de 1582, ditando que o dia imediato à quinta-feira, 4 de outubro, fosse sexta-feira, 15 de outubro. Com isso, os anos seculares só são considerados bissextos se forem divisíveis por 400. Sendo assim, a diferença (atraso) de três dias em cada quatrocentos anos observada no calendário juliano passaram a não existir. Corrigiu-se também a medição do ano solar, passando a medir um ano gregoriano em uma média de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos.

A seguir, serão apresentadas a solução por frações contínuas e a solução decretada pelo Papa Gregório XIII para esse calendário:

3.4.1.1 Solução do problema do calendário através de frações contínuas

O ano trópico, aquele que marca as estações, tem a duração média de 365 dias 5 horas 48 minutos e 46 segundos = 365, 242199 dias. O calendário Juliano, estabelecido em 45 a.C., considera a aproximação 1 ano = 365 dias 6 horas = 365, 25 dias, ou seja, tinha uma diferença de cerca de 11 minutos. Esta diferença de 11 minutos, em cem anos, causava um desvio de 18h 43min 20s

Esta aproximação causou um problema: as estações reais haviam retrocedido treze dias em relação ao calendário Juliano. Em 1582, o papa Gregório III convocou sábios para resolver este problema. Desde 45 a.C. até 1582, se passaram 1627 anos. O desvio acumulado desde então era de 12dias 16h 36min 38s.

Para tal, principiou-se em se calcular o desvio proporcionado para um dia. Se em 1 ano o desvio é de 11 min 14s (674 s), então um dia proporciona o desvio dado por 128,19 anos. Assim, ocorre aproximadamente desvio de 128 anos para cada dia, ou seja, de cerca de 3 dias em cada 400 anos. Isto provocou uma pequena alteração na intercalação de três anos de 365 dias e um ano de 366 dias, que já era própria do calendário juliano.

Enquanto a duração média do ano Juliano era de 365 dias 6h, com a retirada de três dias do calendário gregoriano, o valor passou a ser $365\frac{97}{400}$ dias = 365,242500 dias, isto é, 365dias 5horas 49min 12s. O que ainda causa uma diferença de cerca de 26 segundos do valor real. A duração média de 1 ano é 365, 242199 dias. Daí, obtemos a fração $\frac{5h48min46s}{1dia} = \frac{20926}{86400} = \frac{10463}{43200}$.

A fração contínua correspondente ao 1^0 ano é [365; 4, 7, 1, 3, 5, 64].

O 1º convergente é 365 dias.

O 2º convergente é dado por:

$$365 + \frac{1}{4} dias \tag{3.25}$$

Própria do calendário Juliano.

O 3º convergente é dado por:

$$365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7}} = 365 + \frac{7}{29} \tag{3.26}$$

Ou seja, 7 anos bissextos a cada 29 anos.

O 4º convergente é dado por:

$$365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1}}} = 365 + \frac{8}{33} \tag{3.27}$$

Ou seja, 8 anos bissextos a cada 33 anos.

O 5º convergente é dado por:

$$365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} = 365 + \frac{31}{128} \tag{3.28}$$

Nesse caso, são 31 anos bissextos a cada 128 anos

Logo, ao total dos 400 anos, existem aproximadamente 97 anos bissextos.

Isto é uma incrível coincidência, pois não há indícios do uso de frações contínuas nos procedimentos de correção do calendário gregoriano.

3.4.1.2 Solução decretada pelo Papa Gregório XIII

Acostumou-se a começar cada ano novo em 1 de Janeiro. Poucos anos seculares se consideram bissextos, só aqueles que sejam divisíveis por 4 e não sejam terminados em duplo zero, exceto os divisíveis por 400. Deste modo, evita-se o desfasamento de um dia em cada cem anos. O ano bissexto ocorre a cada quatro anos após o último ano bissexto.

3.4.2 O número de Ouro e sua relação com a sequência de Fibonacci

3.4.2.1 A história do número ϕ, o número de ouro

Envolto em muito mistério e características divinas, o número ϕ desperta há muito tempo a curiosidade e o desejo de muitos matemáticos em encontrar as suas ilimitadas aplicações. Phi é, na verdade, a pronuncia da letra ϕ grega, inicial do nome Fídeas, escultor e arquiteto grego responsável pela construção do Partenon, em Atenas.

O misterioso ϕ é também conhecido como número de ouro. Devido as suas incontáveis aplicações, muitos o condirem como sendo uma oferta de Deus ao mundo. Ele é simbolicamente representado por ϕ.

Uma maneira de encontrar a representação numérica de ϕ é através da razão $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que equivale à dízima não periódica 1,61803398... Sendo assim, é um número irracional, encontrado a partir da razão áurea (razão de ouro, divina proporção etc.). Dados dois pontos A e B, em extremidades opostas de um segmento de reta, um ponto X divide AB em uma razão áurea se X pertence ao segmento AB e $\frac{AX}{XB} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$=1,61803398...

O reconhecimento do número de ouro se faz há tanto tempo quanto os nossos registros históricos conseguem alcançar. No Egito Antigo, por exemplo, as pirâmides de Gizé foram construídas tendo por base a razão de ouro: A razão entre a altura de uma face e metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro. Já no Papiro de Rhind menciona uma razão sagrada, que se entende como sendo a razão áurea.

O templo Partenon, construído entre 447 e 433 a. C., contém a razão de Ouro no retângulo que contêm a fachada (Largura / Altura). Na estrela pentagonal, os pitagóricos também utilizaram a razão áurea; Endoxus, matemático grego, utilizou os seus estudos sobre proporções para estudar a secção que se crer ser a secção áurea; Fibonacci utilizou a razão áurea na solução do famoso problema dos coelhos e nos presentou com o que hoje conhecemos como a sequência de números de Fibonacci; importante contribuição e utilização para evolução do número de ouro foi dada, também, por Leonardo Da Vinci, por exemplo, em uma de suas pinturas mais famosas: o Homem Vitruviano. Da Vinci utilizou a razão áurea para garantir a perfeição de suas obras.

3.4.2.2 A construção e a representação em frações contínuas do número de ouro

No Livro [10], Euclides nos fornece a seguinte definição: "Um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo."

Com a finalidade de encontrar o número de ouro, divide-se um segmento em outros dois de comprimentos a e b, conforme a figura abaixo:

Figura 8: Segmento de comprimento $a + b$

De acordo com a definição de Euclides, temos que:

$$\phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \tag{3.29}$$

Logo:

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \tag{3.30}$$

e, consequentemente,

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi \tag{3.31}$$

,

onde uma das raízes da equação anterior é ϕ=$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Repetindo indefinidamente a equação acima, é possível obter a representação do número ϕ, como segue abaixo:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \tag{3.32}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} \tag{3.33}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}} \tag{3.34}$$

Portanto, a representação em frações contínuas do número de ouro é dada por:

ϕ=[1;1,1,1,1,1,...]

Abaixo estão indicadas as cinco primeiras aproximações:

$$1 = \frac{1}{1} \tag{3.35}$$

$$[1;1] = \frac{2}{1} \tag{3.36}$$

$$[1;1,1] = \frac{3}{2} = 1,5 \tag{3.37}$$

$$[1;1,1,1] = \frac{5}{3} \tag{3.38}$$

$$[1;1,1,1,1] = \frac{8}{5} = 1,6 \tag{3.39}$$

Uma propriedade interessante que surge nesses cálculos são os termos das sequência de Fibonacci. Observe que, nos numeradores das frações que aparecem como resultado em cada processo, temos respectivamente os números 1,2,3,5 e 8. A partir daí, podem ser descritos alguns termos dessa sequência, onde o termo geral é dado por

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n,\ n \geq 2\ com\ a_1 = 1\ e\ a_2 = 1 \tag{3.40}$$

,

Além disso, observa-se certa lentidão com que os resultados desse processo se aproximem do valor exato de ϕ. Com base nessa análise, talvez o número de ouro seja o mais irracional dos números irracionais.

Conhecendo a representação na forma de frações contínuas do número de ouro, podemos obter a sua representação geométrica por meio das coberturas de forma "gulosa", conforme mencionamos no capítulo 2. Como cada coeficiente da representação na forma de frações contínuas de ϕ é igual a unidade, a cada etapa da cobertura será necessário somente um maior quadrado dentro do espaço ainda livre.

4 Aproximações Diofantinas e a Equação de Pell-Fermat

O presente capítulo tem como finalidade estudar a relação entre as aproximações diofantinas e a conhecida equação diofantina, denominada equação de Pell-Fermat. Um método eficaz de aproximação de raízes quadradas por números racionais será mencionado e estudado nessa oportunidade. As frações contínuas desempenham papel importante no contexto, e as aproximações que iremos obter serão dadas a partir delas.

A seguir, serão definidas as equações diofantinas de modo geral e, após isso, faremos um estudo detalhado das equações de Pell-Fermat. Com o intuito de desenvolver o texto do capítulo, mencionamos as referências [11],[12],[13] e [14].

4.1 Equações Diofantinas e o estudo de um caso particular: A equação de Pell-Fermat

Definição 4.1.1. *Toda equação diofantina é uma equação polinomial com duas ou mais incógnitas, onde cada um dos coeficientes são números inteiros.*

Exemplo 4.1.1. *Listamos alguns casos de igualdades que representam equações diofantinas.*

$$3x+4y=10 \tag{4.1}$$

$$2x^2-y^2=18 \tag{4.2}$$

$$6x^3+2y^2-z=13 \tag{4.3}$$

$$a^2+b^2=c^2 \tag{4.4}$$

$$x^2+432=y^3 \tag{4.5}$$

De maneira geral, quando estudamos equações diofantinas, existe uma grande preocupação em obter soluções inteiras para a igualdade indicada. Entretanto, pode acontecer a situação de que determinada equação diofantina seja resolvida em outro conjunto numérico como, por exemplo, no conjunto dos números racionais.

Conforme representamos a seguir, casos distintos podem ocorrer, dependendo do tipo de equação diofantina:

i) A equação diofantina $3x^2+y^2=-3$ não possui solução, pois $x^2\geq 0$ e $y^2\geq 0$, onde $3x^2+y^2\geq 0$.

ii) A equação diofantina $3x - 2y = 46$, possui infinitas soluções dadas pelos pares ordenados (x,y) tais que $x = 10 + 2k$ e $y = 3k - 8$, onde k $\in \mathbb{Z}$.

iii) As soluções da equação diofantina $x^2 + y^2 = 16$ podem ser obtidas a partir da geometria analítica, pois a equação cartesiana $x^2 + y^2 = 16$ representa uma circunferência centrada na origem cujo raio mede 4. Quatro de suas soluções inteiras são representadas pelos pares ordenados (0,4), (4,0), (0,-4) e (-4,0).

Como observamos acima, não existe um método que generalize a resolução de todas as equações diofantinas, pois cada uma delas é resolvida de maneira individual ou, pelo menos, na forma de um grupo.

Definição 4.1.2. *Considere d um número natural não-nulo que não seja quadrado perfeito. A equação de Pell-Fermat é representada pela igualdade $x^2 - dy^2 = m$, onde m é um número inteiro.*

Observação: Ao longo deste capítulo, estaremos preocupados na resolução das equações de Pell-Fermat no caso em que $m = 1$ e os pares ordenados (x,y) serão formados exclusivamente por números inteiros.

Na definição acima, o leitor pode interrogar sobre o número d, pensando no motivo pelo qual deve ser um número natural, positivo, mas por outro lado não pode ser quadrado perfeito. A explicação para este fato está no conjunto solução obtido para a equação, quando d é quadrado perfeito. Note que, se $d = p^2$(onde p é inteiro) e $m = 1$, então $x^2 - p^2y^2 = 1$ e, consequentemente, $(x - py)(x + py) = 1$. Examinando soluções inteiras, só existem duas possiblidades: $x - py = 1$ e $x + py = 1$, ou $x - py = -1$ e $x + py = -1$. Em tais casos, podemos concluir que somente os pares ordenados $(1,0)$ e $(-1,0)$ são soluções, o que são consideradas soluções triviais para a equação de Pell. Dado isso, o objetivo será encontrar soluções que não sejam triviais e, portanto, d não pode ser um número natural positivo que seja quadrado perfeito.

As soluções da equação correspondem a pontos com coordenadas inteiras sobre uma hipérbole, pois a igualdade $x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{d}} = 1$ representa tal tipo de cônica no sistema cartesiano.

Na figura abaixo, a hipérbole é $x^2 - 5y^2 = 1$: $A(9,4)$ é um exemplo de ponto com coordenadas inteiras sobre a cônica, pois $9^2 - 5.4^2 = 1$. Com isso, determinamos uma das soluções desse tipo de equação.

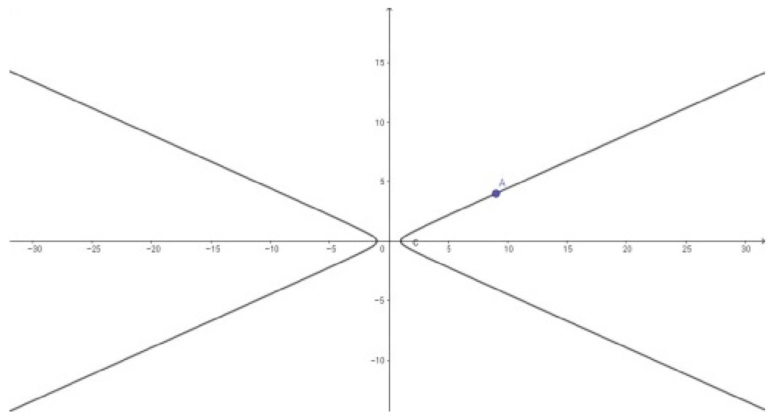

Figura 9: Representação cartesiana da hipérbole x^2 - $5y^2$=1 e o ponto A(9,4)

Uma pergunta que naturalmente pode surgir é a seguinte:"Será que existem infinitos pontos de coordenadas inteiras que interceptam a hipérbole?". A resposta para esta pergunta é positiva e veremos, mais precisamente, que para obtermos todas as soluções desse tipo de equação, basta apenas ter o conhecimento de uma delas.

Outro ponto de vista é o de que estamos procurando pontos de uma hipérbole sobre um reticulado. Na próxima figura, a hipérbole é $u^2 - v^2 = 1$ e o reticulado consiste nos pontos da forma $(a, b\sqrt{5})$, a e b inteiros. As duas figuras só diferem por uma transformação linear(vide figura abaixo).

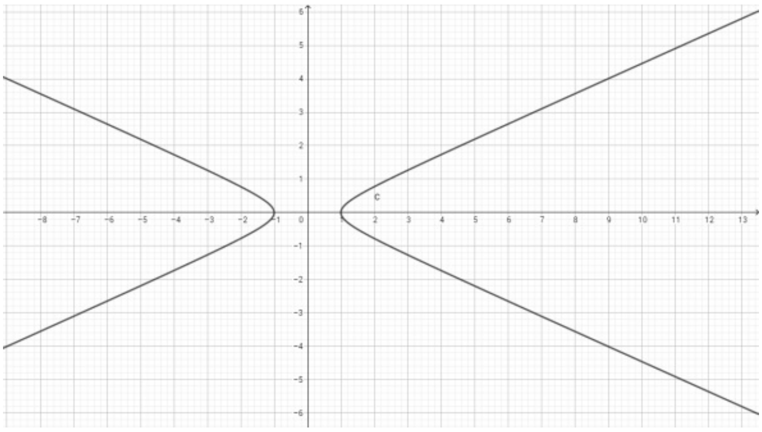

Figura 10: Representação cartesiana da hipérbole $x^2 - 5y^2 = 1$ e o reticulado

Dessa forma, vamos considerar números da forma $x + y\sqrt{d}$ com $x,y \in \mathbb{Z}$(ou $x,y \in \mathbb{Q}$). Observe que, se $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$, então $\sqrt{d}$ é irracional. De fato, caso contrário, podemos supor que $\sqrt{d} = \frac{p}{q}$, onde p e q são números naturais não-nulos, $mdc(p,q) = 1$ e $q > 1$. Então, segue que $d = \frac{p^2}{q^2}$ o que é um absurdo, pois $mdc(p,q) = 1$ implica em $mdc(p^2,q^2) = 1$, donde $\frac{p^2}{q^2}$ não pode ser inteiro.

É importante notar que a igualdade $x + y\sqrt{d} = z + w\sqrt{d}$, onde d é um número natural positivo que não seja quadrado perfeito e sendo x,y,z e w números racionais, comprova que $x = z$ e $y = w$. Observe que, se $y = w$ então, pela própria igualdade, $x = z$. Caso contrário, se $y \neq w$, é verdade que $\sqrt{d} = \frac{x-z}{w-y} \in \mathbb{Q}$,um absurdo.

Com o objetivo de estudar a existência de soluções para a equação de Pell e um método para a obtenção dessas possíveis soluções, iremos descrever algumas ferramentas e provar alguns resultados relevantes dentro da teoria.

Definição 4.1.3. *Dado γ=x+y$\sqrt{d}$ com x e y racionais, podemos definir seu conjugado x-y$\sqrt{d}$, e sua norma N=x^2 - dy^2*

As soluções inteiras da equação de Pell correspondem a elementos da forma $x + y\sqrt{d}$, com x e y inteiros, cuja norma $N(x + y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2$ é igual a 1.

Teorema 4.1.1. *A norma N:$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Q}$ é uma função multiplicativa.*

Demonstração:

Sejam α=x+y$\sqrt{d}$ e γ=u+v$\sqrt{d}$.

$$N((x + y\sqrt{d})(u + v\sqrt{d})) = \tag{4.6}$$

$$N((xu+dyv)+(xv+yu)\sqrt{d}) = \tag{4.7}$$
$$(xu+dyv)^2 - d(xv+yu)^2 = \tag{4.8}$$
$$x^2u^2 + d^2y^2v^2 - d(x^2v^2+y^2u^2) = \tag{4.9}$$
$$(x^2-dy^2)(u^2-dv^2) = \tag{4.10}$$
$$N(x+y\sqrt{d})N(u+v\sqrt{d}) \tag{4.11}$$

Portanto, a norma é uma função multiplicativa. □

Observe que se a equação tem alguma solução (x_1, y_1), com $y_1 \neq 0$ então possui infinitas. Com $x_1^2 - dy_1^2 = 1$ e n natural , temos que:

$$N((x_1+\sqrt{d}y_1)^n) = \tag{4.12}$$

$$((x_1+\sqrt{d}y_1)^n)((x_1-\sqrt{d}y_1)^n) = \tag{4.13}$$

$$(x_1^2 - dy_1^2)^n = 1^n = 1. \tag{4.14}$$

Fazendo a substituição:

$$x_n + \sqrt{d}y_n = \tag{4.15}$$

$$(x_1+\sqrt{d}y_1)^n = \tag{4.16}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_1^{n-i}\sqrt{d}^i y_1^i \tag{4.17}$$

onde

$$x_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} x_1^{n-2i} d^i y_1^{2i} \tag{4.18}$$

e

$$y_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2i+1} x_1^{n-2i-1} d^i y_1^{2i+1} \tag{4.19}$$

Consequentemente, obtemos:

$$x_n^2 - dy_n^2 = 1 \; para \; todo \; n \in \mathbb{N} \tag{4.20}$$

Teorema 4.1.2. *A equação $x^2 - dy^2 = 1$, com d diferente de um quadrado perfeito, possui solução não trivial em inteiros positivos, isto é, com $x + y\sqrt{d} > 1$.*

Demonstração:

Como $\sqrt{d}$ é irracional, a desigualdade $|\sqrt{d} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ tem infinitas soluções racionais $\frac{p}{q}$. Note que se $|\sqrt{d} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ então

$$|p^2 - dq^2| = q^2|\sqrt{d} - \frac{p}{q}||\frac{p}{q} + \sqrt{d}| < |\frac{p}{q} + \sqrt{d}| \leq 2\sqrt{d} + |\sqrt{d} - \frac{p}{q}| \leq 2\sqrt{d} + 1 \qquad (4.21)$$

Considerando infinitos pares de inteiros positivos (p_n, q_n) com $|\sqrt{d} - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$, teremos sempre $|p_n^2 - dq_n^2| < 2\sqrt{d} + 1$, portanto temos um número finito de possibilidades para o valor(inteiro) de $p_n^2 - dq_n^2$. Consequentemente, existe um inteiro $k \neq 0$ tal que $p_n^2 - dq_n^2 = k$ para infinitos valores de n. Obtemos,portanto, duas sequências crescentes de pares de inteiros positivos (u_r),(v_r), onde $r \in \mathbb{N}$ tais que $u_r^2 - dv_r^2 = k$ para todo r.

Como há $|k|^2$ possibilidades para os pares $(u_r modk, v_r modk)$, existem inteiros a e b e infinitos valores de r tais que $u_r \equiv a(modk)$ e $v_r \equiv b(modk)$. Tomamos, então, $r < s$ com as propriedades acima.

Seja

$$x + y\sqrt{d} = \frac{u_s + v_s\sqrt{d}}{u_r + v_r\sqrt{d}} = \frac{(u_s + v_s\sqrt{d})(u_r - v_r\sqrt{d})}{u_r^2 - dv_r^2} = \frac{u_s u_r - dv_s v_r}{k} + \frac{u_r v_s - u_s v_r}{k}\sqrt{d} \qquad (4.22)$$

Temos $u_s u_r - dv_s v_r \equiv u_r^2 - dv_r^2 = k \equiv 0(modk)$ e $u_r v_s - u_s v_r \equiv ab - ab = 0(modk)$ e portanto $x = \frac{u_r v_s - u_s v_r}{k}$ e $y = \frac{u_r v_s - u_s v_r}{k}$ são inteiros. Por outro lado,

$$(x + y\sqrt{d})(u_r + v_r\sqrt{d}) = u_s + v_s\sqrt{d}, \qquad (4.23)$$

donde $N(x + y\sqrt{d})N(u_r + v_r\sqrt{d}) = N(u_s + v_s\sqrt{d})$. Como $N(u_r + v_r\sqrt{d}) = N(u_s + v_s\sqrt{d}) = k$, segue que $N(x + y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2 = 1$. Observando que $s > r$, $u_s + v_s\sqrt{d} > u_r + v_r\sqrt{d}$, donde

$$x + y\sqrt{d} = \frac{u_s + v_s\sqrt{d}}{u_r + v_r\sqrt{d}} > 1. \quad \square \qquad (4.24)$$

Dentre todas as soluções $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ da equação de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ com $x + y\sqrt{d} > 1$, existe uma solução mínima ou fundamental, isto é, com x e portanto y e $x + y\sqrt{d}$ mínimos. Denote por (x_1, y_1) esta solução mínima. Se, como antes, definimos $(x_n, y_n) \in \mathbb{N}^2$ pela relação

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n, \qquad (4.25)$$

temos que (x_n, y_n), $n \geq 1$, são todas as soluções inteiras positivas da equação de Pell: de fato, já vimos que (x_n, y_n) são soluções, e se (x', y') é uma outra solução, então como

$$x_1 + y_1\sqrt{d} > 1 \qquad (4.26)$$

existe $n \geq 1$ tal que

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^n \leq x' + y'\sqrt{d} < (x_1 + y_1\sqrt{d})^{n+1} \tag{4.27}$$

Multiplicando por

$$x_n - y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{-n} > 0, \tag{4.28}$$

obtemos

$$1 \leq (x' + y'\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d}) = (x'x_n - y'y_nd) + (y'x_n - x'y_n)\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d} \tag{4.29}$$

Como

$$N((x' + y'\sqrt{d})(x_n - y_n\sqrt{d})) = N(x' + y'\sqrt{d})N(x_n - y_n\sqrt{d}) = 1, \tag{4.30}$$

temos que

$$(x'x_n - y'y_nd, y'x_n - x'y_n) \tag{4.31}$$

também é solução da equação de Pell, menor que a solução mínima. Temos que

$$x'x_n - y'y_nd \geq 0, \tag{4.32}$$

pois caso contrário

$$x'x_n - y'y_nd < 0 \tag{4.33}$$

o que implica em

$$\frac{x'}{y'}\frac{x_n}{y_n} < d, \tag{4.34}$$

porém

$$x_n^2 - y_n^2 d = 1 \tag{4.35}$$

e, consequentemente,

$$(\frac{x_n}{y_n})^2 = d + \frac{1}{y_n^2} > d \tag{4.36}$$

onde,

$$\frac{x_n}{y_n} > \sqrt{d} \tag{4.37}$$

Analogamente, $\frac{x'}{y'} > \sqrt{d}$, o que contradiz o fato de

$$\frac{x'}{y'}\frac{x_n}{y_n} < d \tag{4.38}$$

Da mesma forma,

$$y'x_n - x'y_n \geq 0 \tag{4.39}$$

pois caso contrário

$$\frac{x_n}{y_n} < \frac{x'}{y'} \tag{4.40}$$

Implica em:

$$d + \frac{1}{y_n^2} = (\frac{x_n}{y_n})^2 < (\frac{x'}{y'})^2 = d + \frac{1}{y'^2} \tag{4.41}$$

com $y' < y_n$ e, consequentemente, $x' < x_n$, o que contradiz o fato de

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n \leq x' + y'\sqrt{d}. \tag{4.42}$$

Resumindo, temos que

$$(x'x_n - y'y_n d, y'x_n - x'y_n) \in \mathbb{N}^2 \tag{4.43}$$

é uma solução menor do que a solução mínima, logo

$$x'x_n - y'y_n d = 1 \tag{4.44}$$

e

$$y'x_n - x'y_n = 0 \tag{4.45}$$

ou seja,

$$(x' + y'\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d})^{-n} = 1 \tag{4.46}$$

o que implica em:

$$x' + y'\sqrt{d} = x_n + y_n\sqrt{d}, \tag{4.47}$$

donde

$$(x', y') = (x_n, y_n), \tag{4.48}$$

como queríamos.

Assim, as soluções com x e y inteiros positivos podem ser enumeradas por (x_n, y_n), com n maior do que ou igual a zero, de modo que, para todo n,

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n \tag{4.49}$$

e portanto,

$$x_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^n + (x_1 - y_1\sqrt{d})^n}{2} \tag{4.50}$$

e

$$y_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^n + (x_1 - y_1\sqrt{d})^n}{2\sqrt{d}} \tag{4.51}$$

4.2 Aproximações Racionais para $\sqrt{d}$ via Teorema de Dirichlet

O próximo teorema nos mostra como é possível aproximar raízes quadradas a partir de números racionais, com o auxílio da equação de Pell-Fermat. Uma ferramenta bastante utilizada na resolução de exercícios de matemática, em que é necessário ter noções de aproximações diofantinas.

Teorema 4.2.1. *Sejam (x_n, y_n) soluções da equação $x^2 - dy^2 = 1$. Então $\frac{x_n}{y_n}$ são aproximações racionais de $\sqrt{d}$, com $|\sqrt{d} - \frac{x_n}{y_n}| < \frac{1}{y_n^2}$*

Demonstração:

Como (x_n, y_n) são soluções da equação $x^2 - dy^2 = 1$, podemos escrever

$$x_n^2 - dy_n^2 = 1 \tag{4.52}$$

,

onde

$$(x_n + \sqrt{d}y_n)(x_n - \sqrt{d}y_n) = 1 \tag{4.53}$$

.

Daí, vem que:

$$x_n - \sqrt{d}y_n = \frac{1}{x_n + \sqrt{d}y_n} \tag{4.54}$$

e

$$0 < x_n - \sqrt{d}y_n = \frac{1}{x_n + y_n\sqrt{d}} < \frac{1}{y_n} \tag{4.55}$$

.

Multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{y_n}$, segue que:

$$|x_n - y_n\sqrt{d}| = x_n - y_n\sqrt{d} < \frac{1}{y_n} \tag{4.56}$$

Este fato implica em:

$$|\frac{x_n}{y_n} - \sqrt{d}| < \frac{1}{y_n^2} \tag{4.57}$$

Assim, a partir das soluções da equação de Pell-Fermat, os termos obtidos da sequência $\frac{x_n}{y_n}$ são aproximações racionais de $\sqrt{d}$ que satisfazem o teorema de Dirichlet. □

A seguir, iremos verificar um exemplo em que o teorema acima é aplicável.

Exemplo 4.2.1. *A equação diofantina x^2-5y^2=1 admite como solução fundamental o par ordenado (9,4) e, a partir disso, toda solução é da forma*

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (9+4\sqrt{5})^n. \tag{4.58}$$

Se n=2, então obtemos que

$$x_2 + y_2\sqrt{5} = (9+4\sqrt{5})^2 = 161 + 72\sqrt{5} \tag{4.59}$$

Logo:

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{161}{72} = 2,23611111... \tag{4.60}$$

é uma das aproximações racionais encontradas para $\sqrt{5}$, de uma casa decimal.

No caso em que n=3, chegamos a

$$x_3 + y_3\sqrt{5} = (9+4\sqrt{5})^3 = 2889 + 1292\sqrt{5}. \tag{4.61}$$

Logo:

$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{2889}{1292} = 2,236... \tag{4.62}$$

isto é, uma aproximação racional para $\sqrt{5}$ de duas casas decimais.

Nos dois casos anteriores, a obtenção das soluções da equação de Pell forneceram aproximações razoáveis para $\sqrt{5}$.

No entanto, a simplicidade do método tem como preço obter a solução fundamental de equações desse tipo, o que nem sempre é fácil. Pode-se ter uma idéia analisando a igualdade

$$x^2 - 41y^2 = 1, \tag{4.63}$$

onde a solução fundamental é dada pelo par ordenado (2049,320).

4.3 Soluções da Equação de Pell via Frações Contínuas

Vamos descrever um método para obter soluções fundamentais da equação de Pell por meio da expansão em frações contínuas. Não incluímos as demonstrações das afirmações abaixo. Para maiores detalhes, veja a seção 4.4.1 de [14].

No caso particular em que o número irracional é da forma $\sqrt{n}$, prova-se que os coeficientes da sua fração contínua se repetem a partir de um determinado índice r (estas são denominadas frações contínuas periódicas), ou seja,

$$\sqrt{n} = [a_0;\overline{a_1, a_2, ..., a_{r-1}, a_r}] \text{ e } a_r = 2a_0 \tag{4.64}$$

Com base nisso, é possível dividir a obtenção das soluções fundamentais x e y da equação de Pell em dois casos:

1) Se r é par, considere:

$$x = p_{r-1} \text{ e } y = q_{r-1}. \tag{4.65}$$

2) Se r é ímpar, considere:

$$x = p_{2r-1} \text{ e } y = q_{2r-1} \tag{4.66}$$

Exemplo 4.3.1. *Seja a equação de Pell $x^2 - 5y^2$=1. A expansão em frações contínuas de $\sqrt{5}$ é [2;4,4,4,...] e a parte periódica se repete a partir de $r = 2$. Como r é par, pelo que foi visto na seção anterior, torna-se necessário calcular a reduzida $\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}$. Daí vem que:*

$$\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}} = \frac{p_1}{q_1} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}. \tag{4.67}$$

Portanto, a solução fundamental é indicada por $x = 9$ e $y = 4$.

5 Conclusão

As considerações tecidas neste texto abordam uma maneira de expor o conceito de aproximações diofantinas, voltada para professores que fizeram os cursos iniciais de teoria dos números. Em geral, como esse tópico é pouco explorado nos cursos de licenciatura em matemática, procuramos articular o conhecimento que o professor de matemática possui com a teoria a ser desenvolvida. Particularmente, o autor teve a oportunidade de estudar alguns detalhes do assunto e enriquecer o saber nessa área.

Na parte teórica, a compreensão do conjunto dos números reais, que até então era visto somente como a reunião entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, atingiu uma perspectiva mais ampla. Como o próprio autor do artigo [1] mencionou, a passagem dos números racionais para os números reais, tratando dos conjuntos numéricos explorados no ensino médio, torna-se de mais difícil entendimento no sentido da construção de conjuntos. Estrategicamente, de acordo com a notação das frações contínuas, todo número real que é racional pode ser representado por uma fração contínua finita. Caso contrário, os números reais que não são racionais podem ser representados por meio de uma fração contínua infinita. Através dessa divisão, tornou mais palpável compreender que os números irracionais não indicam o quociente entre dois números inteiros, onde o denominador é diferente de zero, como consequência do próprio algoritmo de Euclides. Dessa forma, é possível observar uma interação entre a natureza discreta e finita, com a natureza contínua e infinita dos números reais.

Considerando a parte didática, visualizamos algumas aplicações de frações contínuas em problemas cotidianos que são relevantes, e que podem ser exploradas em sala de aula por professores de matemática. O calendário gregoriano é uma das aplicações bem discutidas dentro do assunto, e está diretamente ligada com a noção de tempo, enquanto o número de ouro e a sequência de Fibonacci estão mais ligadas às proporções do mundo físico.

A história da matemática assume papel importante pois mostra como os matemáticos estudam os problemas ao longo do tempo, e de que maneira a contribuição de cada um deles é essencial para cada estágio da compreensão do conceito. O leitor pode tomar como base a progressão do assunto e perceber que uma teoria matemática atravessa séculos e, geralmente, muitas perguntas são respondidas apenas em um período bem mais avançado. Por exemplo, temos o caso do número irracional π, que já estava sendo estudado desde a antiguidade. Euclides já havia tomado uma estimativa para seu valor numérico e, ainda assim, a otimização das aproximações que poderiam ser obtidas foram fornecidas num período mais avançado, onde a matemática pura ganhou mais forma e as ferramentas das demonstrações eram mais concretas.

Para o professor de matemática, a assimilação dos conceitos e apropriação do contexto sugerido pela dissertação teve como objetivo um conhecimento além do que costuma ser abordado em sala de aula. Muitas definições e teoremas discutidos enriquecem o conhecimento na área da teoria dos números. Alguns assuntos mais avançados, como as equações de Pell-Fermat e as suas soluções, utilizando as frações contínuas, preparam bastante para que tenham contato com a matemática olímpica. Em alguns momentos, o professor do ensino básico não dispõe de muito tempo para trabalhar conteúdos que preparam seus alunos para as olimpíadas de matemática, e a leitura deste trabalho abre portas para que o conteúdo seja aprimorado e expandido, com o intuito de preparar melhor o estudante que tem prazer em estudar matemática.

Como sugestões de pesquisas futuras, deixamos para o leitor o estudo das aproximações diofantinas e da teoria das frações contínuas em sala de aula, com o objetivo de pesquisa de campo. Dessa maneira, os docentes da área de matemática irão conferir concretamente o resultado de seus alunos, e então poderão discutir possíveis melhorias e aprimoramentos na prática do ensino de matemática. A ideia das aproximações de números reais por números racionais é estudada desde cedo com os alunos, e acaba sendo extremamente importante para o entendimento de assuntos que serão aprendidos mais adiante.

6 Referências Bibliográficas

[1]Moreira, Carlos Gustavo. Frações contínuas, representações de números e aproximações diofantinas. IMPA, 2011 (1^o Colóquio de Matemática da Região Sudeste).

[2]Lima, Elon Lages. Curso de análise; v.1.14.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014. Projeto Euclides.

[3] Santos, José Plínio O. Introdução à teoria dos números. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1998. Coleção Matemática Universitária.

[4] Iezzi, Gelson. Matemática: Ciência e Aplicações. Vol. 1, Ensino Médio. Atual Editora.

[5] Andrade, E.X.L. e Bracciali, C.F. Frações Contínuas. Editora Plêiade, 2005

[6] Boyer, Carl Benjamin. História da Matemática.2^a edição. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 1996.

[7] J. Katz, Victor. Mathematics Magazine, Vol. 68. Journal article. MAA, 1995. Ideas of Calculus in Islam and India.

[8] Guedes de Figueiredo, Djairo. Números Irracionais e Transcendentes.Coleção Iniciação Científica. Sociedade Brasileira de Matemática.

[9] Stewart, James. Cálculo, vol 1. Tradução da 8^a versão norte americana. Cengage Learning.

[10] Bicudo, Irineu. Os Elementos de Euclides. Tradução completa do grego para o português. 1^a Edição. Editora Unesp, 2009.

[11] Lenstra Jr.,H. W. Solving the Pell Equation. AMS, 2002.

[12] Fuchs, Dimitry; Tabachnikov, Serge. Mathematical Omnibus :Thirty Lectures on Classic Mathematics.

[13] A. Ya. Khinchin,Continued Fractions,Dover Science, New York, 1997.

[14] Brochero Martinez, F.E.; Moreira, C.G.; Saldanha, N.C.; Tengan, E.- Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro - Projeto Euclides, IMPA, 2010.