

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA – UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA – IME  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – SBM  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

## O TRIÂNGULO DE NAPOLEÃO

FELIPE SAMPAIO DE MAGALHÃES

Salvador - Bahia  
27 DE FEVEREIRO DE 2018

# O TRIÂNGULO DE NAPOLEÃO

FELIPE SAMPAIO DE MAGALHÃES

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha

**Salvador - Bahia**

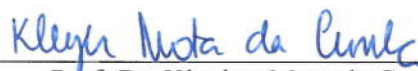
27 de Fevereiro de 2018

# O Triângulo de Napoleão

Felipe Sampaio de Magalhães

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 27/02/2018.

## Banca Examinadora:



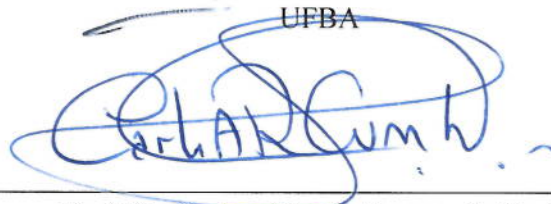
---

Prof. Dr. Kleyber Mota da Cunha (orientador)  
UFBA



---

Prof. Dr. Leandro Oliva Suguitani  
UFBA



---

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha  
UFSJ

Modelo de ficha catalográfica fornecido pelo Sistema Universitário de Bibliotecas da UFBA para ser confeccionada pelo autor

Sampaio de Magalhães, Felipe  
O Triângulo de Napoleão / Felipe Sampaio de Magalhães. --  
Salvador, 2018.  
45 f. : il

Orientador: Kleyber Mota da Cunha.  
Dissertação (Mestrado - PROFMAT) -- Universidade Federal da  
Bahia, Universidade Federal da Bahia, 2018.

1. Triângulos. 2. Triângulos equiláteros. 3. Triângulos de  
Napoleão. I. Mota da Cunha, Kleyber. II. Título.

# Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A esta Universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

Ao meu orientador Kleyber Mota da Cunha, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos.

Aos meus pais Maria Cecília e José Ubiratan (In memoria), pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A minha esposa Aldaci Almeida e minha filha Beatriz Almeida, pelo apoio e compreensão nos momentos de estudo.

Aos meus amigos do PROFMAT pra vida Evandro, Carol e Raimundo, por todos os momentos de estudos e todas as feijoadas dos sábados, além claro, dos colegas e amigos da turma.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

# Resumo

De todas as figuras da Geometria Plana, o triângulo é a mais interessante e mais produtiva em relação à produção de teoremas. Além disso, de todos os triângulos, o equilátero parece destacar-se como a perfeição personificada. Assim, Morley lançou a imortalidade matemática ao descobrir triângulos equiláteros no meio de um labirinto de ângulos de três setores. De forma similar, nos teoremas que se seguem, triângulos equiláteros parecem emergir de nenhum lugar e de todo lugar. Com algumas poucas exceções, os teoremas são originais, suas provas são simples e os resultados provocantes.

Palavras-chave: Triângulo, triângulos equiláteros, triângulo de Napoleão

# Abstract

Of all the figures of plane geometry, the triangle is the most interesting, and the most prolific in producing theorems. Furthermore, of all the triangles, the equilateral seems to stand out as perfection personified. Thus, Morley attained mathematical immortality by discovering equilateral triangles in the midst of a maze of angle trisectors. Similarly, in the theorems that follow, equilateral triangles seem to emerge out of nowhere and everywhere. With some exceptions, the theorems are original, their proofs are simple, and the results are provocative.

Keywords: Triangle, equilateral triangles, triangle of Napoleon.

# Sumário

Introdução	9
1 <i>Resultados Preliminares</i>	10
2 <i>O Triângulo Reinvestigado</i>	15
3 <i>Aplicabilidade do Triângulo de Napoleão</i>	40
Considerações Finais	43
Referências Bibliográficas	45



# *Introdução*

Inicialmente, comecei a pensar sobre que tópicos exatamente tratar, de modo que nada que fosse colocado nesse trabalho estivesse fora do alcance dos alunos do Ensino Médio e que tudo que aqui fosse colocado pudesse realmente contribuir para o enriquecimento das aulas de Matemática, em particular as aulas de Geometria. Sendo assim, o presente trabalho foi dividido em três capítulos.

No Capítulo 1, apresentamos resultados preliminares que usamos nas demonstrações dos teoremas do Capítulo 2 e nas aplicações no Capítulo 3. Estes resultados são encontrados, facilmente, na maioria dos livros didáticos do Ensino Médio. O leitor com boa experiência em Geometria pode pular esse capítulo.

No Capítulo 2, nosso principal capítulo, exibimos e demonstramos os teoremas que estão em nossa principal referência [5]. Tais teoremas nos levam a reinvestigar um triângulo qualquer, permitindo-nos descobrir notáveis triângulos equiláteros, obtidos a partir de construções geométricas sobre os lados do triângulo. Isso se dá graças a Napoleão Bonaparte (1769–1821) que, além de grande soldado e hábil político, foi um grande admirador da ciência e dos cientistas.

No Capítulo 3, capítulo de aplicabilidade do Teorema de Napoleão, destacamos a famosa “Estrela de Davi”, símbolo do Judaísmo, que consiste em dois triângulos equiláteros iguais, concêntricos mas em posições opostas.

# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

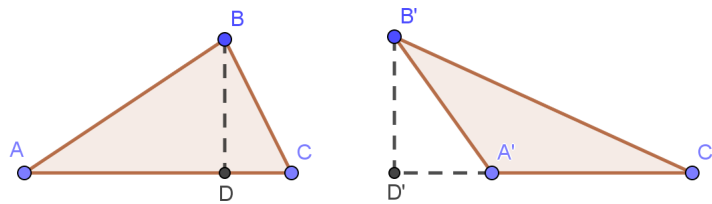
Neste capítulo apresentaremos alguns resultados que usaremos nas demonstrações dos teoremas do Capítulo 2 e nas aplicações no Capítulo 3. Estes resultados são encontrados, facilmente, na maioria dos livros didáticos do Ensino Médio.

Começaremos com a área de um triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido, cuja demonstração foi extraída em [6].

**Teorema 1.1.** A área de um triângulo é a metade do produto entre dois lados com o seno do ângulo compreendido por estes lados.

**Prova.** No triângulo esquerdo, temos  $S_1 = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}$ . Como, do triângulo  $ABD$ ,  $\overline{BD} = \overline{AB} \cdot \text{sen}(A)$ , então

$$S_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \text{sen}(A)}{2}.$$



Agora, no triângulo direito, temos  $S_2 = \frac{\overline{A'C'} \cdot \overline{B'D'}}{2}$ . Como, do triângulo  $A'B'D'$ ,  $\overline{B'D'} = \overline{A'B'} \cdot \text{sen}(180^\circ - A') = \overline{A'B'} \cdot \text{sen}(A')$ , então

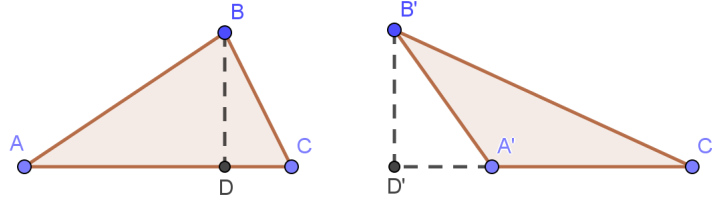
$$S_2 = \frac{\overline{A'B'} \cdot \overline{A'C'} \cdot \text{sen}(A')}{2}.$$

□

O teorema que segue, disponível em [12], será usado muitas vezes no Capítulo 2 para demonstrar os principais teoremas.

**Teorema 1.2** (A lei dos cossenos). Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

**Prova.** Considere o triângulo à esquerda com  $A < 90^\circ$ .



Como o triângulo  $BCD$  é reto, temos:

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{DC})^2 + (\overline{BD})^2. \quad (1.1)$$

No triângulo  $BAD$  que é reto, temos:

$$(\overline{BD})^2 = (\overline{AB})^2 - (\overline{AD})^2. \quad (1.2)$$

Temos também

$$\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD}. \quad (1.3)$$

Substituindo (1.3) e (1.2) em (1.1), segue que

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{AB})^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AD}.$$

Do triângulo  $BAD$  temos,  $\overline{AD} = \overline{AB} \cdot \cos(A)$ . Logo,

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{AB})^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \cos(A).$$

Considere o triângulo à direita com  $90^\circ < A < 180^\circ$ . Como o triângulo  $B'C'D'$  é reto, temos:

$$(\overline{B'C'})^2 = (\overline{D'C'})^2 + (\overline{B'D'})^2. \quad (1.4)$$

No triângulo  $B'A'D'$  que é reto, temos:

$$(\overline{B'D'})^2 = (\overline{A'B'})^2 - (\overline{A'D'})^2. \quad (1.5)$$

Temos também

$$\overline{D'C'} = \overline{A'C'} + \overline{A'D'}. \quad (1.6)$$

Substituindo (1.6) e (1.5) em (1.4), segue que

$$(\overline{B'C'})^2 = (\overline{A'C'})^2 + (\overline{A'B'})^2 + 2\overline{A'C'} \cdot \overline{A'D'}.$$

Do triângulo  $B'A'D'$  temos,  $\overline{A'D'} = \overline{A'B'} \cdot \cos(180^\circ - A') = -\overline{A'B'} \cdot \cos(A')$ . Logo,

$$(\overline{B'C'})^2 = (\overline{A'C'})^2 + (\overline{A'B'})^2 - 2\overline{A'C'} \cdot \overline{A'B'} \cdot \cos(A').$$

□

Uma expressão irracional da forma  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$  é denominada *Radical Duplo*. Mostraremos como simplificá-la numa soma com radicais simples.

**Teorema 1.3** (Radical Duplo). Sejam  $A, B \in \mathbb{R}_+$ . Então

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}},$$

em que  $C = \sqrt{A^2 - B}$ .

**Prova.** Seja  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ . Elevando ao quadrado, cada membro dessa igualdade, temos:

$$A \pm \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy}.$$

Como cada membro dessa igualdade é formado por uma parte racional e uma parte irracional, elas podem ser isoladamente igualadas:

$$\begin{cases} A = x + y \\ \sqrt{B} = \pm 2\sqrt{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{A}{2} \\ xy = \frac{B}{4} \end{cases}.$$

Temos então a soma e o produto de dois números  $x$  e  $y$  e, com isso, podemos montar uma equação de segundo grau:

$$z^2 - Az + \frac{B}{4} = 0 \Rightarrow 4z^2 - 4Az + B = 0 \Rightarrow z = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}.$$

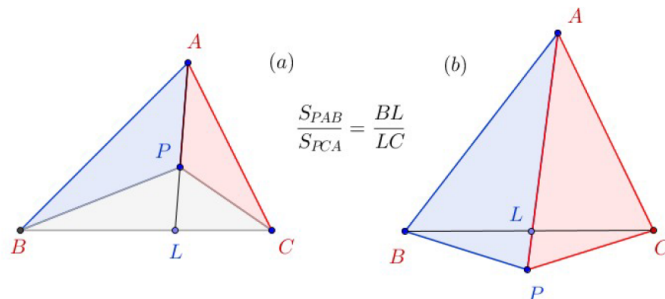
Fazendo  $A^2 - B = C^2$  temos  $z_1 = \frac{A + \sqrt{C^2}}{2} = \frac{A + C}{2}$  e  $z_2 = \frac{A - \sqrt{C^2}}{2} = \frac{A - C}{2}$ .

Portanto,  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$ , em que  $C = \sqrt{A^2 - B}$  com  $A^2 - B > 0$ . □

A proposição que segue nos será útil para a demonstração do Teorema de Ceva que, por sua vez, usaremos para demonstrar o Teorema 2.6.

**Proposição 1.4.** Dados um triângulo  $ABC$  e um ponto  $P$  não pertencente a nenhum dos lados, se a semireta  $\overrightarrow{AP}$  intercepta o segmento  $\overline{BC}$  no ponto  $L$ , então  $\frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}$ , em que  $S_{PAB}$  indica a área do triângulo  $PAB$ .

**Prova.** Considerando as configurações (a) ou (b) da figura abaixo, temos que os triângulos  $PAB$  e  $PBL$  têm a mesma altura em relação às bases  $\overline{PA}$  e  $\overline{PL}$ , respectivamente. Também os triângulos  $PAC$  e  $PLC$  têm a mesma altura em relação às bases  $PA$  e  $PL$  respectivamente, assim suas áreas são proporcionais às bases.



Logo,

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBL}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PL}} = \frac{S_{PAC}}{S_{PLC}} \Rightarrow \frac{S_{PAB}}{S_{PBL}} = \frac{S_{PAC}}{S_{PLC}}.$$

Donde concluímos, para os triângulos  $PBL$  e  $PLC$  que tem a mesma altura em relação às bases  $\overline{BL}$  e  $\overline{LC}$  respectivamente,

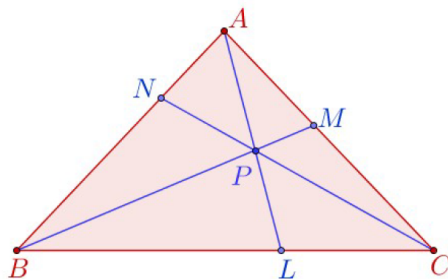
$$\frac{S_{PAB}}{S_{PCA}} = \frac{S_{PBL}}{S_{PLC}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}.$$

□

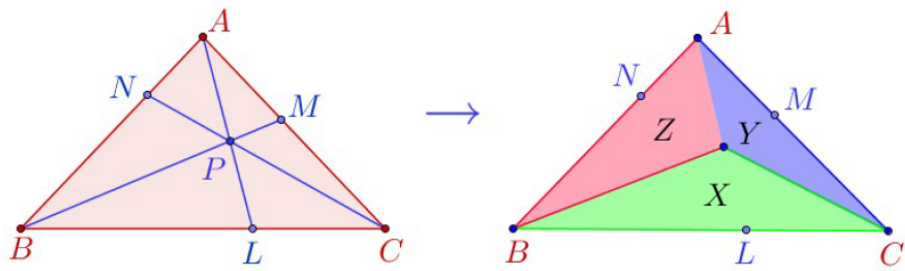
Uma *ceviana* é qualquer segmento que une um vértice a qualquer ponto do lado oposto do triângulo. O nome ceviana foi dado devido a Giovanni Ceva.

Mostraremos agora o Teorema de Ceva, que data do ano de 1678. Este teorema exhibe um critério para garantir quando as cevianas de um triângulo se interseptam. Faremos sua demonstração utilizando relações entre áreas. A referência usada foi [13].

**Teorema 1.5** (Teorema de Ceva). Sejam  $L$ ,  $M$  e  $N$  pontos, respectivamente, sobre os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  do triângulo  $ABC$ . As cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  interseptam-se em um ponto  $P$  se, e somente se,  $\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$ .



**Prova.** Primeiramente, veremos que  $\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$ , a partir do fato que das cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  serem concorrentes em um único ponto. Como consequência da Proposição 1.4 e a figura ilustrativa abaixo,



temos:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = \frac{S_{APC}}{S_{BPC}}, \quad \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} = \frac{S_{APB}}{S_{APC}}, \quad \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = \frac{S_{BPC}}{S_{APB}}.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1.$$

□

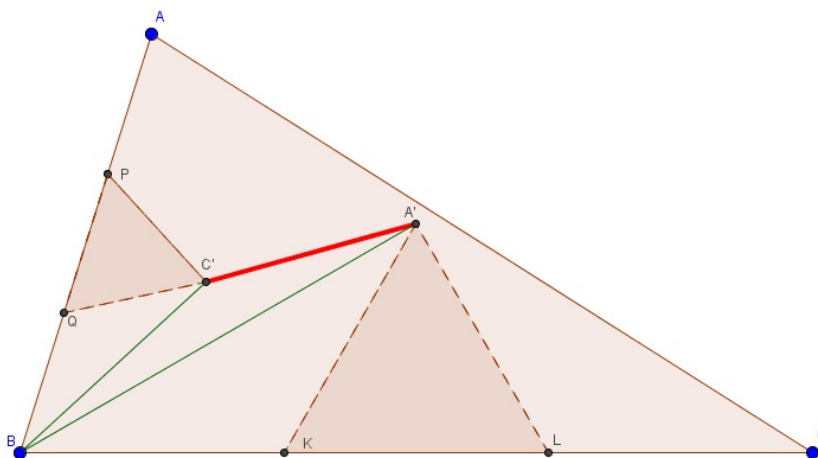
## Capítulo 2

### *O Triângulo Reinvestigado*

De todas as figuras da Geometria Plana, o triângulo é a mais interessante e mais produtiva em relação à produção de teoremas. Além disso, de todos os triângulos, o equilátero parece destacar-se como a perfeição personificada. Assim, Morley lançou a imortalidade matemática ao descobrir triângulos equiláteros no meio de um labirinto de ângulos de três setores. De forma similar, nos teoremas que se seguem, triângulos equiláteros parecem emergir de nenhum lugar e de todo lugar. Com algumas poucas exceções, os teoremas são originais, suas provas são simples e os resultados provocantes.

**Teorema 2.1.** No terço do meio de cada lado de qualquer triângulo escaleno, triângulos equiláteros são construídos no interior, então, a junção dos vértices deles formam um triângulo equilátero.

**Prova.** Vamos provar que se  $K, L, M, N, P$  e  $Q$  são pontos de triseção de lados de qualquer triângulo  $ABC$  e se  $A'KL, B'MN, C'PQ$  são equiláteros então  $A'B'C'$  é um triângulo equilátero. Nas figuras que seguem consideramos  $\overline{AB} = 3c, \overline{AC} = 3b$  e  $\overline{BC} = 3a$ .



Como  $\angle KA'L = 60^\circ$ , por se tratar de um ângulo interno do triângulo equilátero  $A'KL$ , e  $\angle KA'B = 30^\circ$ , visto que é um ângulo interno do triângulo isósceles  $A'BK$ , cujo ângulo  $\angle BKA'$

mede  $120^\circ$ , então o triângulo  $A'BL$  é retângulo, pois  $\angle LA'B = \angle KA'L + \angle KA'B = 60^\circ + 30^\circ$ . Analogamente, o triângulo  $C'PB$  é retângulo.

Por simples relações trigonométricas, temos  $\overline{BA'} = a\sqrt{3}$  e  $\overline{BC'} = c\sqrt{3}$ . Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $A'BC'$ , temos:

$$\begin{aligned} (\overline{A'C'})^2 &= (\overline{BC'})^2 + (\overline{BA'})^2 - 2 \cdot (\overline{BC'}) \cdot (\overline{BA'}) \cdot \cos(B - 60^\circ) \\ &= 3c^2 + 3a^2 - 2 \cdot 3 \cdot a \cdot c \cdot (\cos(B) \cdot \cos(60^\circ) + \sin(B) \cdot \sin(60^\circ)) \\ &= 3c^2 + 3a^2 - 6ac \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(B) - 6ac \cdot \sin(B) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3c^2 + 3a^2 - 3ac \cdot \cos(B) - 3\sqrt{3} \cdot ac \cdot \sin(B) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Temos que área de  $ABC$  é

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3c \cdot \sin(B) = \frac{9}{2} \cdot ac \cdot \sin(B) \Rightarrow ac \cdot \sin(B) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot S. \quad (2.2)$$

Agora, aplicando a lei dos cossenos em  $ABC$ , temos:

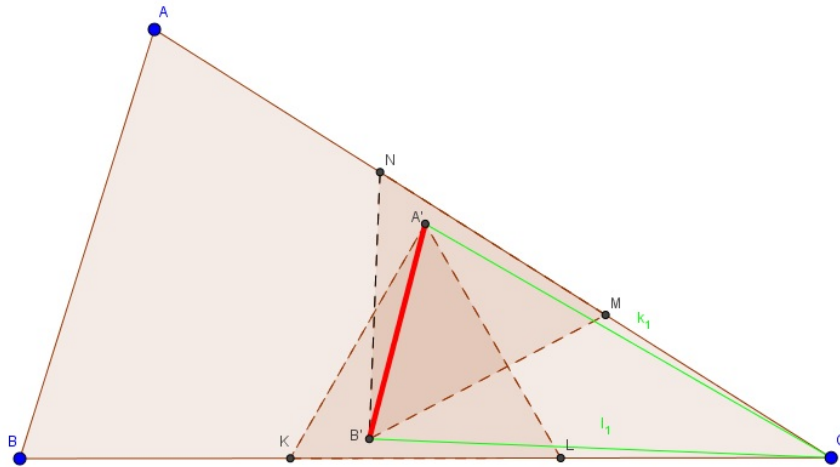
$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(B) \implies 9b^2 = 9c^2 + 9a^2 - 18ac \cdot \cos(B)$$

De onde,

$$-ac \cdot \cos(B) = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2}. \quad (2.3)$$

Usando (2.2) e (2.3) em (2.1), temos:

$$(\overline{A'C'})^2 = 3c^2 + 3a^2 + \frac{3b^2 - 3a^2 - 3c^2}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot S = \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot S.$$



Como  $\angle KA'L = 60^\circ$ , por se tratar de um ângulo interno do triângulo equilátero  $A'KL$ , e  $\angle LA'C = 30^\circ$ , visto que é um ângulo interno do triângulo isósceles  $A'LC$ , cujo ângulo  $\angle CLA'$





Aplicando a lei dos cossenos em  $A'B'C'$ , temos:

$$\begin{aligned}
 (\overline{B'C'})^2 &= (\overline{AC'})^2 + (\overline{AB'})^2 - 2 \cdot (\overline{AC'}) \cdot (\overline{AB'}) \cdot \cos(A - 60^\circ) \\
 &= 3c^2 + 3b^2 - 6bc \cdot (\cos(A) \cdot \cos(60^\circ) + \text{sen}(A) \cdot \text{sen}(60^\circ)) \\
 &= 3c^2 + 3b^2 - 6bc \cdot \left( \cos(A) \cdot \frac{1}{2} + \text{sen}(A) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= 3c^2 + 3b^2 - 3bc \cdot \cos(A) - 3\sqrt{3} \cdot bc \cdot \text{sen}(A)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

A área do triângulo  $ABC$  é:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3b \cdot 3c \cdot \text{sen}(A) = \frac{9}{2} bc \cdot \text{sen}(A) \tag{2.8}$$

Aplicando a lei dos cossenos em  $ABC$ , temos:

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 - 2 \cdot (\overline{AB}) \cdot (\overline{AC}) \cdot \cos(A) \implies 9a^2 = 9c^2 - 9b^2 - 18bc \cdot \cos(A).$$

De onde,

$$-3bc \cdot \cos(A) = \frac{9a^2 - 9c^2 - 9b^2}{6} \tag{2.9}$$

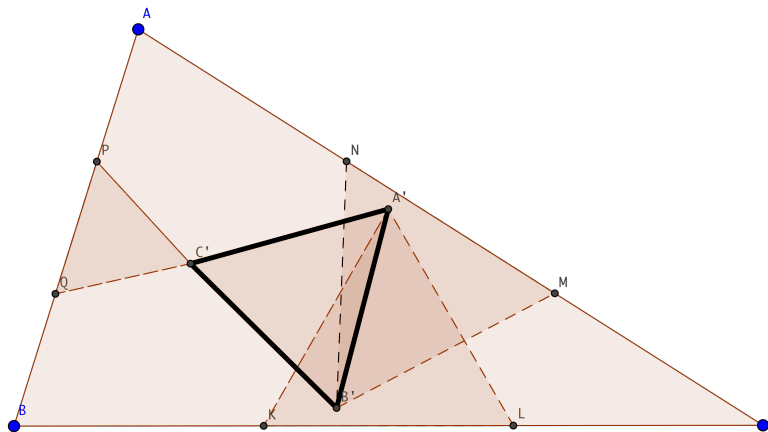
Substituindo (2.8) e (2.9) em (2.7), temos:

$$(\overline{B'C'})^2 = 3c^2 + 3b^2 + \frac{3a^2 - 3c^2 - 3b^2}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot S = \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot S.$$

Logo,  $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{A'C'}$ , ou seja,  $A'B'C'$  é equilátero.

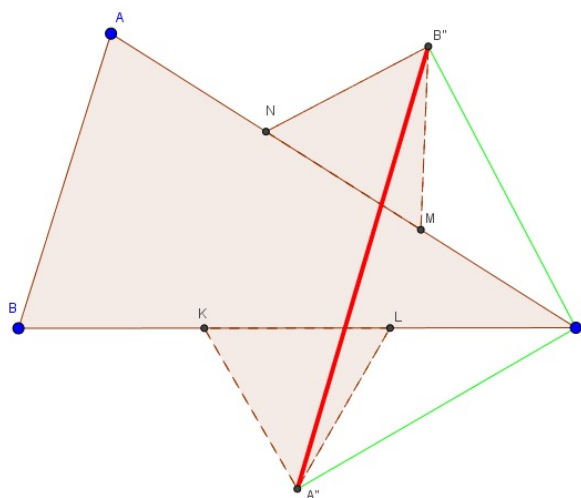
□

O triângulo  $A'B'C'$  obtido no teorema acima é denominado *Triângulo de Napoleão Interior*, conforme ilustração abaixo.



**Teorema 2.2.** Se  $K, L, M, N, P$  e  $Q$  são pontos de triseção de lados de qualquer triângulo escaleno  $ABC$  e se  $A''KL, B''MN, C''PQ$  são equiláteros exteriores ao triângulo, então  $A''B''C''$  é um triângulo equilátero.

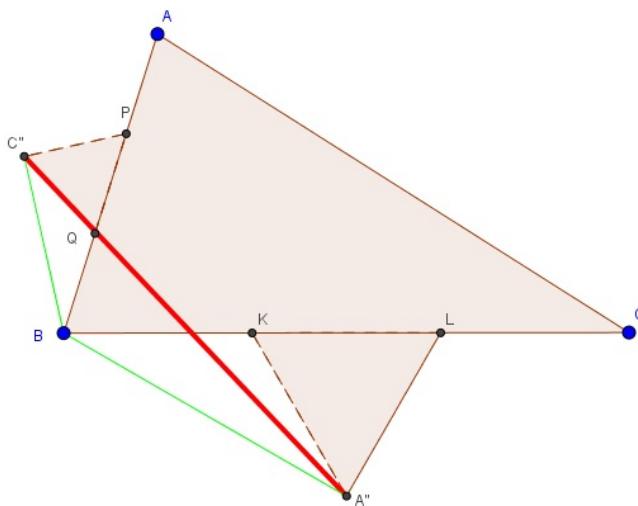
**Prova.** A prova deste teorema segue identicamente pela mesma linha do Teorema 2.1, por conta disso omitimos algumas passagens da prova e recuperamos resultados do Teorema 2.1.



Aplicando a lei dos cossenos em  $A''B''C$ , temos:

$$\begin{aligned} (\overline{A''B''})^2 &= (\overline{A''C})^2 + (\overline{B''C})^2 - 2 \cdot (\overline{A''B}) \cdot (\overline{A''C}) \cdot \cos(c + 60^\circ) \\ &= 3a^2 + 3b^2 - 6ab \cdot (\cos(C) \cdot \cos(60^\circ) - \text{sen}(C) \cdot \text{sen}(60^\circ)) \\ &= 3a^2 + 3b^2 - 3ab \cdot \cos(C) + 3\sqrt{3} \cdot ac \cdot \text{sen}(C). \end{aligned}$$

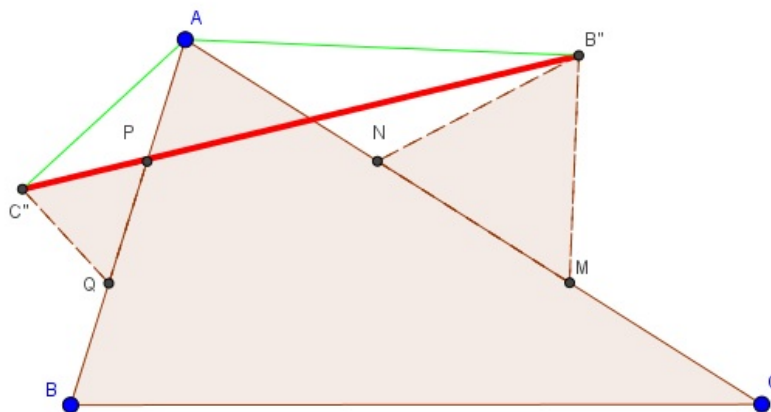
De (2.5) e (2.6), temos  $(\overline{A''B''})^2 = \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot S$ .



Aplicando a lei dos cossenos em  $A''C''B$ , temos:

$$\begin{aligned} (\overline{A''C''})^2 &= (\overline{A''B})^2 + (\overline{C''B})^2 - 2 \cdot (\overline{A''B}) \cdot (\overline{C''B}) \cdot \cos(B + 60^\circ) \\ &= 3a^2 + 3c^2 - 6ac \cdot (\cos(B) \cdot \cos(60^\circ) - \text{sen}(B) \cdot \text{sen}(60^\circ)) \\ &= 3a^2 + 3c^2 - 3ac \cdot \cos(B) + 3\sqrt{3} \cdot ac \cdot \text{sen}(B). \end{aligned}$$

De (2.2) e (2.3), temos:  $(\overline{A''C''})^2 = \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot S$ .



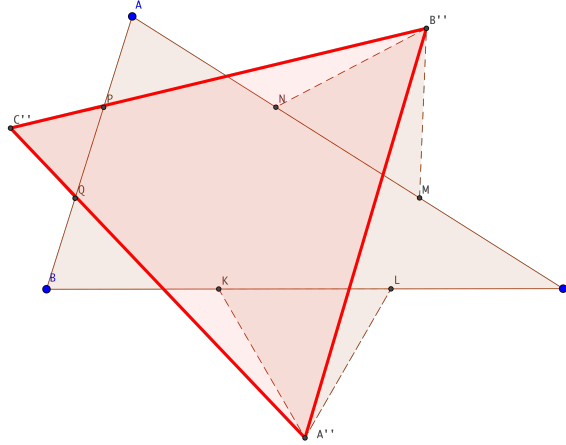
Aplicando a lei dos cossenos em  $B''C''A$ , temos:

$$\begin{aligned} (\overline{B''C''})^2 &= (\overline{AC''})^2 + (\overline{AB''})^2 - 2 \cdot (\overline{AC''}) \cdot (\overline{AB''}) \cdot \cos(A + 60^\circ) \\ &= 3b^2 + 3c^2 - 6bc \cdot (\cos(A) \cdot \cos(60^\circ) - \text{sen}(A) \cdot \text{sen}(60^\circ)) \\ &= 3b^2 + 3c^2 - 3bc \cdot \cos(A) + 3\sqrt{3} \cdot bc \cdot \text{sen}(A) \end{aligned}$$

De (2.8) e (2.9), temos,  $(\overline{B''C''})^2 = \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot S$ .

Como  $\overline{A''B''} = \overline{B''C''} = \overline{A''C''}$ , temos que  $A''B''C''$  é equilátero. □

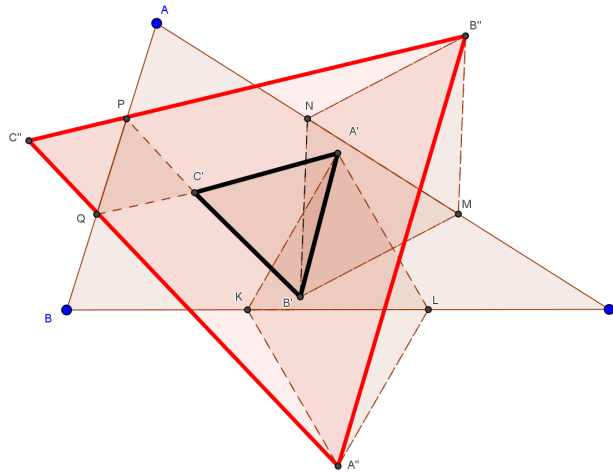
O triângulo  $A''B''C''$  obtido no teorema acima é denominado *Triângulo de Napoleão Exterior*, conforme ilustração abaixo.



No que segue, relacionaremos as áreas dos três triângulos, a saber: o original e os de Napoleão, interior e exterior.

**Teorema 2.3.** A área do triângulo original é igual à diferença entre as áreas dos triângulos exterior e interior de Napoleão.

**Prova.** Sejam  $S'$  a área do triângulo  $A'B'C'$  e  $S''$  a área do triângulo  $A''B''C''$ . Como ambos são equiláteros, obtemos suas áreas com a fórmula  $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ , em que  $\ell$  indica a medida do lado do triângulo.



Como já foram calculados, nos Teoremas 2.1 e 2.2, as medidas dos lados dos triângulos interno e externo de Napoleão,  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{A''B''}$  respectivamente. Temos:

$$\begin{aligned} (\overline{A'B'})^2 &= \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}S \Rightarrow S' = \frac{\sqrt{3}(\overline{A'B'})^2}{4} = \frac{\sqrt{3}(3a^2 + 3b^2 + 3c^2)}{8} - \frac{S}{2}, \\ (\overline{A''B''})^2 &= \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}S \Rightarrow S'' = \frac{\sqrt{3}(\overline{A''B''})^2}{4} = \frac{\sqrt{3}(3a^2 + 3b^2 + 3c^2)}{8} + \frac{S}{2}. \end{aligned}$$

Fazendo  $S'' - S'$ , temos:

$$S'' - S' = \frac{\sqrt{3}(3a^2 + 3b^2 + 3c^2)}{8} + \frac{S}{2} - \frac{\sqrt{3}(3a^2 + 3b^2 + 3c^2)}{8} + \frac{S}{2} = \frac{S}{2} + \frac{S}{2} = S.$$

□

A seguir, iremos mostrar que o baricentro do triângulo original coincide com o baricentro do triângulo de Napoleão interno e com o baricentro do triângulo de Napoleão externo. Para isso localizamos o baricentro do original e mostramos que coincide com os outros dois.

**Teorema 2.4.** Os baricentros dos triângulos interiores e exteriores de Napoleão coincidem com o baricentro do triângulo original.

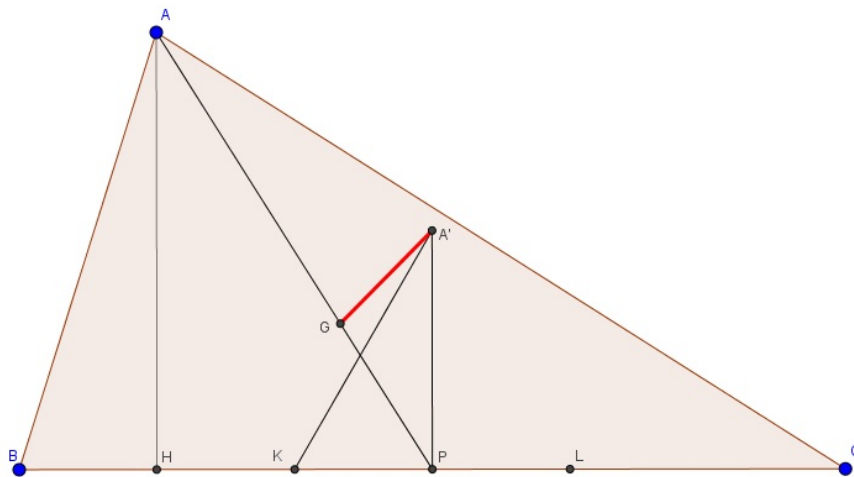
**Prova.** Sejam  $G$  o baricentro do triângulo original  $ABC$  e,  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  os triângulos interno e externo de Napoleão, respectivamente.

Essa prova será feita em duas etapas, a saber: na primeira, mostraremos que o baricentro  $G$  coincide com o baricentro de  $A'B'C'$ , mostrando que  $\overline{GA'} = \overline{GC'} = \overline{GB'}$ ; na segunda, mostraremos que o baricentro  $G$  coincide com o baricentro de  $A''B''C''$ , mostrando que  $\overline{GA''} = \overline{GC''} = \overline{GB''}$ .

*Primeira Etapa.*

Seja o segmento  $\overline{AP}$  a mediana relativa ao lado  $\overline{BC}$ . Com isso, a altura do triângulo equilátero  $A'KL$  é  $\overline{A'P}$  que, por sua vez, é paralela a altura do triângulo  $ABC$ ,  $\overline{AH}$ , relativa ao lado  $\overline{BC}$ , conforme figura abaixo. Assim, garantimos que  $\angle PAH = \angle A'PG = \alpha$ .

Iniciaremos esta etapa obtendo o comprimento de  $\overline{GA'}$ .



Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $GA'P$ , temos

$$(\overline{GA'})^2 = (\overline{GP})^2 + (\overline{A'P})^2 - 2 \cdot (\overline{GP}) \cdot (\overline{A'P}) \cdot \cos(\alpha).$$

Mas do triângulo retângulo  $AHP$ , temos que  $\cos(\alpha) = \frac{\overline{AH}}{\overline{AP}} = \frac{h}{m}$ , em que  $h = \overline{AH}$  e  $m = \overline{AP}$ . Assim,

$$(\overline{GA'})^2 = \left(\frac{m}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{h}{m} = \frac{m^2}{9} + \frac{3a^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot h \quad (2.10)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $APC$ , temos:

$$\begin{aligned} (\overline{AC})^2 &= (\overline{AP})^2 + (\overline{PC})^2 - 2 \cdot (\overline{AP}) \cdot (\overline{PC}) \cdot \cos(90^\circ + \alpha) \\ 9b^2 &= m^2 + \frac{9a^2}{4} - 2 \cdot m \cdot \frac{3a}{2} \cdot \cos(90^\circ + \alpha) \\ &= m^2 + \frac{9a^2}{4} + 3 \cdot a \cdot m \cdot \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $APB$ , temos:

$$\begin{aligned} (\overline{AB})^2 &= (\overline{PB})^2 + (\overline{AP})^2 - 2 \cdot (\overline{PB}) \cdot (\overline{AP}) \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \\ 9c^2 &= m^2 + \frac{9a^2}{4} - 2 \cdot m \cdot \frac{3a}{2} \cdot \sin(\alpha) \\ &= m^2 + \frac{9a^2}{4} - 3 \cdot a \cdot m \cdot \sin(\alpha) \end{aligned} \quad (2.12)$$

De (2.11) e (2.12), temos:

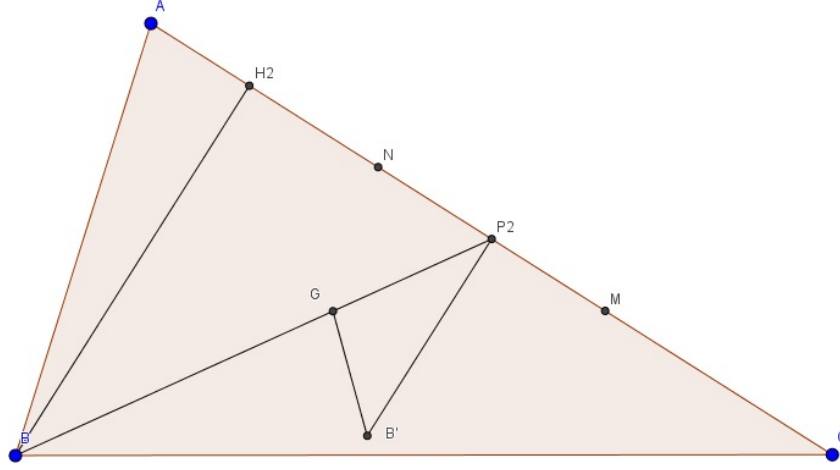
$$9b^2 + 9c^2 = 2m^2 + \frac{9a^2}{2} \Rightarrow m^2 = \frac{9}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2) \Rightarrow \frac{m^2}{9} = \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Substituindo em (2.10), e usando  $S = \frac{3ah}{2}$ , temos:

$$(\overline{GA'})^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S.$$

Seguiremos para o cálculo do comprimento de  $\overline{GB'}$ .

Seja o segmento  $\overline{BP_2}$  a mediana relativa ao lado  $\overline{AC}$ . Com isso, a altura do triângulo equilátero  $B'NM$  é  $\overline{B'P_2}$  que, por sua vez, é paralela a altura do triângulo  $ABC$ ,  $\overline{BH_2}$ , relativa ao lado  $\overline{AC}$ , conforme figura abaixo. Assim, garantimos que  $\angle B'P_2G = \angle P_2BH_2 = \theta$ .



Aplicando a lei dos cossenos em  $GB'P_2$ , temos:

$$(\overline{GB'})^2 = (\overline{GP_2})^2 + (\overline{B'P_2})^2 - 2 \cdot (\overline{GP_2}) \cdot (\overline{B'P_2}) \cdot \cos(\theta).$$

Como  $\cos(\theta) = \frac{h_2}{m_2}$ , em que  $h_2 = \overline{BH_2}$  e  $m_2 = \overline{AP_2}$ , no triângulo  $BH_2P_2$ , temos:

$$(\overline{GB'})^2 = \frac{m_2^2}{9} + \frac{3b^2}{4} - 2 \cdot \frac{m_2}{3} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{h_2}{m_2}.$$

Mas, a área do triângulo  $ABC$  é  $S = \frac{3bh_2}{2}$ , então

$$(\overline{GB'})^2 = \frac{m_2^2}{9} + \frac{3b^2}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S. \quad (2.13)$$

Aplicando, novamente, a lei dos cossenos, agora no triângulo  $BP_2C$ , temos

$$\begin{aligned} (\overline{BC})^2 &= (\overline{BP_2})^2 + (\overline{P_2C})^2 - 2 \cdot (\overline{BP_2}) \cdot (\overline{P_2C}) \cdot \cos(\theta + 90^\circ) \\ 9a^2 &= m_2^2 + \frac{9b^2}{4} - 2 \cdot m_2 \cdot \frac{3b}{2} \cdot (-\text{sen}(\theta)) \\ &= m_2^2 + \frac{9b^2}{4} + 3 \cdot b \cdot m_2 \cdot \text{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $BP_2A$ , temos:

$$\begin{aligned} (\overline{AB})^2 &= (\overline{P_2B})^2 + (\overline{P_2A})^2 - 2 \cdot (\overline{P_2B}) \cdot (\overline{P_2A}) \cdot \cos(90^\circ - \theta) \\ 9c^2 &= m_2^2 + \frac{9b^2}{4} - 2 \cdot m_2 \cdot \frac{3b}{2} \cdot \text{sen}(\theta) \\ &= m_2^2 + \frac{9b^2}{4} - 3 \cdot b \cdot m_2 \cdot \text{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (2.15)$$



De (2.14) e (2.15), temos

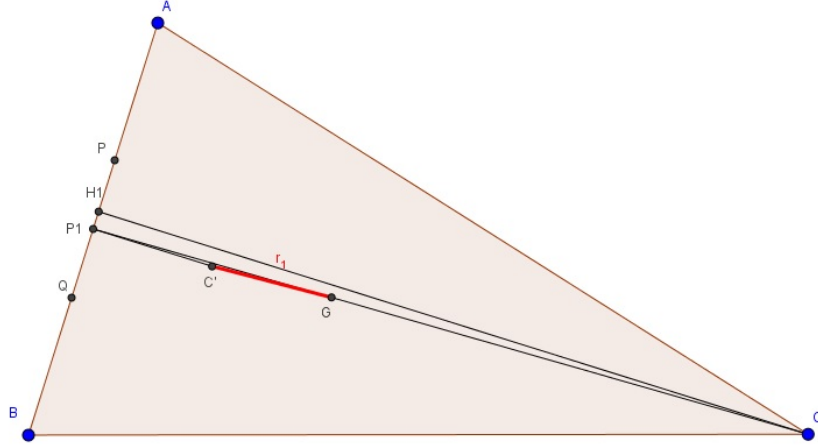
$$9a^2 + 9c^2 = 2m_2^2 + \frac{9b^2}{2} \Rightarrow \frac{m_2^2}{9} = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \quad (2.16)$$

Substituindo (2.16) em (2.13), temos

$$(\overline{GB'})^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S.$$

Para finalizar a primeira etapa, vamos calcular o comprimento de  $\overline{GC'}$ .

Seja o segmento  $\overline{CP_1}$  a mediana relativa ao lado  $\overline{AB}$ . Com isso, a altura do triângulo equilátero  $C'PQ$  é  $\overline{C'P_1}$  que, por sua vez, é paralela a altura do triângulo  $ABC$ ,  $\overline{CH_1}$ , relativa ao lado  $\overline{AB}$ , conforme figura abaixo. Assim, garantimos que  $\angle C'P_1G = \angle P_1CH_1 = \beta$ .



Aplicando a lei dos cossenos em  $GC'P_1$ , temos:

$$(\overline{GC'})^2 = (\overline{GP_1})^2 + (\overline{C'P_1})^2 - 2 \cdot (\overline{GP_1}) \cdot (\overline{C'P_1}) \cdot \cos(\beta).$$

Como  $\cos(\beta) = \frac{h_1}{m_1}$ , em que  $h_1 = \overline{CH_1}$  e  $m_1 = \overline{CP_1}$ , no triângulo  $CH_1P_1$ , temos:

$$(\overline{GC'})^2 = \frac{m_1^2}{9} + \frac{3c^2}{4} - 2 \cdot \frac{m_1}{3} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{h_1}{m_1}.$$

Como  $S = \frac{2ch_1}{2}$ , então,

$$(\overline{GC'})^2 = \frac{m_1^2}{9} + \frac{3c^2}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S. \quad (2.17)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $CP_1B$ , temos

$$\begin{aligned}
 (\overline{BC})^2 &= (\overline{CP_1})^2 + (\overline{BP_1})^2 - 2 \cdot (\overline{CP_1}) \cdot (\overline{BP_1}) \cdot \cos(90^\circ + \beta) \\
 9a^2 &= m_1^2 + \frac{9c^2}{4} - 2 \cdot m_1 \cdot \frac{3c}{2} \cdot (-\operatorname{sen}(\beta)) \\
 &= m_1^2 + \frac{9c^2}{4} + 3 \cdot c \cdot m_1 \cdot \operatorname{sen}(\beta)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $CP_1A$ , temos:

$$\begin{aligned}
 (\overline{AC})^2 &= (\overline{CP_1})^2 + (\overline{AP_1})^2 - 2 \cdot (\overline{CP_1}) \cdot (\overline{AP_1}) \cdot \cos(90^\circ - \beta) \\
 9b^2 &= m_1^2 + \frac{9c^2}{4} - 2 \cdot m_1 \cdot \frac{3c}{2} \cdot \operatorname{sen}(\beta) \\
 &= m_1^2 + \frac{9c^2}{4} - 3 \cdot c \cdot m_1 \cdot \operatorname{sen}(\beta)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

De (2.18) e (2.19), temos

$$9a^2 + 9b^2 = 2m_1^2 + \frac{9c^2}{2} \Rightarrow 2m_1^2 = 9a^2 + 9b^2 - \frac{9c^2}{2} \Rightarrow \frac{m_1^2}{9} = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \tag{2.20}$$

Substituindo (2.20) em (2.17), temos

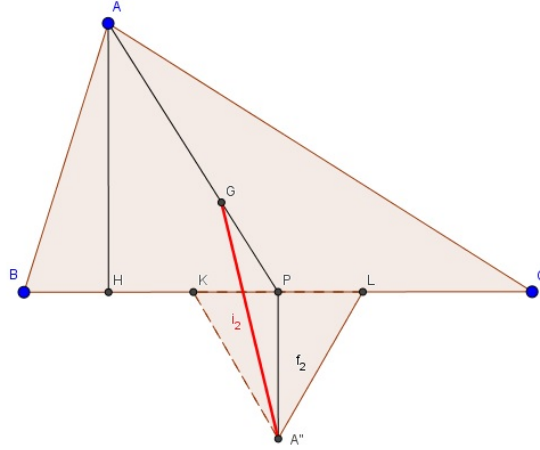
$$(\overline{GC'})^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} + \frac{3 \cdot c^2}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S.$$

Logo,  $\overline{GB'} = \overline{GC'} = \overline{G'A}$ , portanto,  $G$  é o baricentro do triângulo  $A'B'C'$ .

*Segunda Etapa.*

Iniciaremos esta etapa calculando  $\overline{GA''}$ .

Seja o segmento  $\overline{AP}$  a mediana relativa ao lado  $\overline{BC}$ . Com isso, a altura do triângulo equilátero  $A''KL$  é  $\overline{PA''}$ . Seja  $\alpha' = \angle HPA$ .



Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $A''PG$ , temos

$$\begin{aligned} (\overline{A''G})^2 &= (\overline{GP})^2 + (\overline{A''P})^2 - 2 \cdot (\overline{GP}) \cdot (\overline{A''P}) \cdot \cos(90^\circ + \alpha') \\ &= \frac{m^2}{9} + \frac{3a^2}{4} - 2 \cdot \frac{m}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot (-\text{sen}(\alpha')) \end{aligned}$$

Como  $\text{sen}(\alpha') = \frac{h}{m}$  no triângulo  $APH$ , ento  $(\overline{A''G})^2 = \frac{m^2}{9} + \frac{3a^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot m \cdot a \cdot \frac{h}{m}$ .

Mas, a área do triângulo  $ABC$  é  $S = \frac{3ah}{2}$ , então

$$(\overline{A''G})^2 = \frac{m^2}{9} + \frac{3a^2}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S. \quad (2.21)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $APC$ , temos

$$\begin{aligned} (\overline{AC})^2 &= (\overline{AP})^2 + (\overline{PC})^2 - 2 \cdot (\overline{AP}) \cdot (\overline{PC}) \cdot \cos(180^\circ - \alpha') \\ 9b^2 &= m^2 + \frac{9a^2}{4} - 2 \cdot m \cdot \frac{3a}{2} \cdot (-\cos(\alpha')) \\ &= m^2 + \frac{9a^2}{4} + 3 \cdot a \cdot m \cdot \cos(\alpha') \end{aligned} \quad (2.22)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $APB$ , temos

$$\begin{aligned} (\overline{AB})^2 &= (\overline{AP})^2 + (\overline{BP})^2 - 2 \cdot (\overline{AP}) \cdot (\overline{BP}) \cdot \cos(\alpha) \\ 9c^2 &= m^2 + \frac{9a^2}{4} - 2 \cdot m \cdot \frac{3a}{2} \cdot \cos(\alpha') \\ &= m^2 + \frac{9a^2}{4} - 3 \cdot a \cdot m \cdot \cos(\alpha') \end{aligned} \quad (2.23)$$

De (2.22) e (2.23), temos

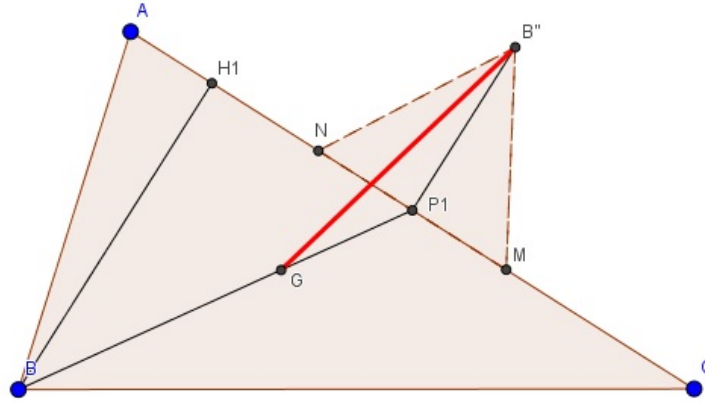
$$9b^2 + 9c^2 = 2m^2 + \frac{9a^2}{2} \Rightarrow \frac{m^2}{9} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \quad (2.24)$$

Substituindo (2.24) em (2.21), temos

$$(\overline{A''G})^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S.$$

Seguiremos com o cálculo  $\overline{GB''}$ .

Seja o segmento  $\overline{BP_1}$  a mediana relativa ao lado  $\overline{AC}$ . Com isso, a altura do triângulo equilátero  $B''MN$  é  $\overline{P_1B''}$ . Seja  $\beta' = \angle BP_1A$ .



Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $AP_1B''$ , temos:

$$\begin{aligned} (\overline{GB''})^2 &= (\overline{GP_1})^2 + (\overline{P_1B''})^2 - 2 \cdot (\overline{GP_1}) \cdot (\overline{P_1B''}) \cdot \cos(90^\circ + \beta') \\ &= \frac{m_2^2}{9} + \frac{3b^2}{4} - 2 \cdot \frac{m_2}{3} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} \cdot (-\text{sen}(\beta')) \end{aligned}$$

Como  $\text{sen}(\beta') = \frac{h_2}{m_2}$  no triângulo  $BP_1H_1$ , ento  $(\overline{GB''})^2 = \frac{m_2^2}{9} + \frac{3b^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot m_2 \cdot b \cdot \frac{h_2}{m_2}$ .

Mas, a área do triângulo ABC é  $S = \frac{3bh_2}{2}$ , então

$$(\overline{GB''})^2 = \frac{m_2^2}{9} + \frac{3b^2}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S. \quad (2.25)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $BP_1A_1$ , temos

$$\begin{aligned} (\overline{AB})^2 &= (\overline{BP_1})^2 + (\overline{AP_1})^2 - 2 \cdot (\overline{BP_1}) \cdot (\overline{AP_1}) \cdot \cos(\beta') \\ 9c^2 &= m_2^2 + \frac{9b^2}{4} - 2 \cdot m_2 \cdot \frac{3b}{2} \cdot \cos(\beta') \\ &= m_2^2 + \frac{9a^2}{4} - 3 \cdot b \cdot m_2 \cdot \cos(\beta') \end{aligned} \quad (2.26)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $BP_1C_1$ , temos

$$\begin{aligned} (\overline{BC})^2 &= (\overline{BP_1})^2 + (\overline{P_1C})^2 - 2 \cdot (\overline{BP_1}) \cdot (\overline{P_1C}) \cdot \cos(180^\circ - \beta') \\ 9a^2 &= m_2^2 + \frac{9b^2}{4} - 2 \cdot m_2 \cdot \frac{3b}{2} \cdot (-\cos(\beta')) \\ &= m_2^2 + \frac{9b^2}{4} + 3 \cdot m_2 \cdot b \cdot \cos(\beta') \end{aligned} \quad (2.27)$$

De (2.26) e (2.27), temos:

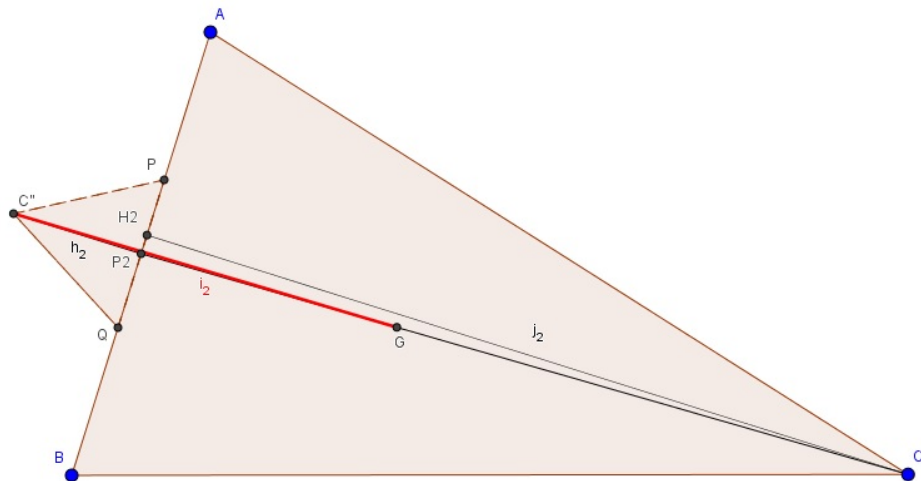
$$9a^2 + 9c^2 = 2m_2^2 + \frac{9b^2}{2} \Rightarrow \frac{m_2^2}{9} = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \quad (2.28)$$

Substituindo (2.28) em (2.25), temos

$$(\overline{GB''})^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S.$$

Para finalizar, calcularemos  $\overline{GC''}$ .

Seja o segmento  $\overline{CP_2}$  a mediana relativa ao lado  $\overline{AB}$ . Com isso, a altura do triângulo equilátero  $QC''P$  é  $\overline{P_2C''}$ . Seja  $\theta' = \angle CP_2H_2$ .



Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $C''P_2G$ , temos

$$\begin{aligned} (\overline{C''G})^2 &= (\overline{GP_2})^2 + (\overline{C''P_2})^2 - 2 \cdot (\overline{GP_2}) \cdot (\overline{C''P_2}) \cdot \cos(90^\circ + \theta') \\ &= \frac{m_1^2}{9} + \frac{3c^2}{4} - 2 \cdot \frac{m_1}{3} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2} \cdot (-\operatorname{sen}(\theta')) \end{aligned}$$

Como  $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{h_1}{m_1}$ , então  $(\overline{C''G})^2 = \frac{m_1^2}{9} + \frac{3c^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot m_1 \cdot c \cdot \frac{h_1}{m_1}$ .

Acontece que a área do triângulo ABC é  $S = \frac{3ch_1}{2}$ , então

$$(\overline{C''G})^2 = \frac{m_1^2}{9} + \frac{3c^2}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S. \quad (2.29)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $CP_2A$ , temos

$$\begin{aligned} (\overline{AC})^2 &= (\overline{CP_2})^2 + (\overline{AP_2})^2 - 2 \cdot (\overline{CP_2}) \cdot (\overline{AP_2}) \cdot \cos(\theta') \\ 9b^2 &= m_1^2 + \frac{9c^2}{4} - 2 \cdot m_1 \cdot \frac{3c}{2} \cdot \cos(\theta') \\ &= m_1^2 + \frac{9c^2}{4} - 3 \cdot m_1 \cdot c \cdot \cos(\theta') \end{aligned} \quad (2.30)$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $CP_2B$ , temos

$$\begin{aligned} (\overline{BC})^2 &= (\overline{CP_2})^2 + (\overline{BP_2})^2 - 2 \cdot (\overline{CP_2}) \cdot (\overline{BP_2}) \cdot \cos(180^\circ - \theta') \\ 9a^2 &= m_1^2 + \frac{9c^2}{4} - 2 \cdot m_1 \cdot \frac{3c}{2} \cdot (-\cos(\theta')) \\ &= m_1^2 + \frac{9c^2}{4} + 3 \cdot m_1 \cdot c \cdot \cos(\theta') \end{aligned} \quad (2.31)$$

De (2.30) e (2.31), temos

$$9a^2 + 9b^2 = 2m_1^2 + \frac{9c^2}{2} \Rightarrow \frac{m_1^2}{9} = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \quad (2.32)$$

Substituindo (2.32) em (2.29), temos

$$(\overline{C''G})^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} + \frac{3c^2}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S.$$

Logo,  $\overline{A''G} = \overline{B''G} = \overline{C''G} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot S$ . Portanto, G também é o baricentro do triângulo  $A''B''C''$ .

□

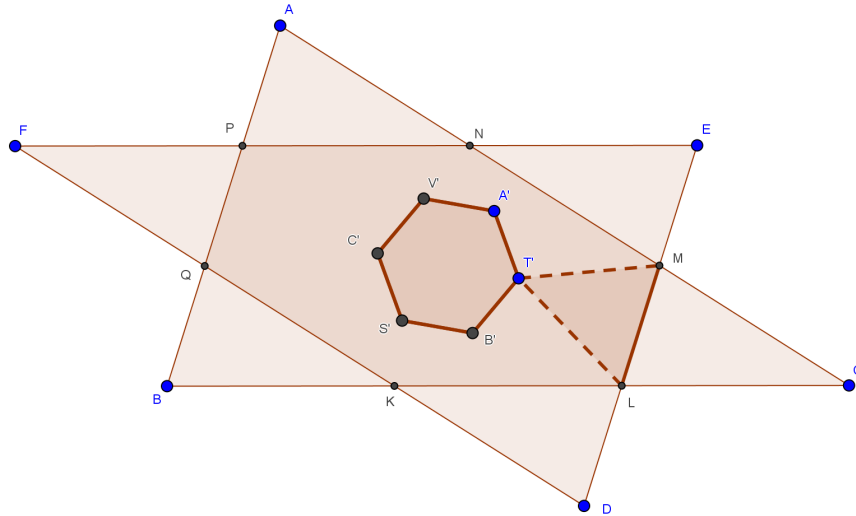
Seja  $DEF$  o triângulo obtido a partir da rotação do triângulo  $ABC$ , em  $180^\circ$ , em torno do baricentro  $G$  de  $ABC$ . O teorema que segue mostra que os vértices dos triângulos internos de Napoleão relativos aos triângulos  $ABC$  e  $DEF$  formam um hexágono regular.

**Teorema 2.5.** Se  $K, L, M, N, P$  e  $Q$  são pontos de triseção, então os vértices do triângulo interior de Napoleão  $A'B'C'$  formam com  $T'V'S'$ , contruídos internamente em  $LM, QK$  e  $NP$ , respectivamente, um hexágono regular.

**Prova.** A prova é dada em três etapas. Na primeira provaremos que  $DEF$  é congruente ao triângulo  $ABC$ . Na segunda, que o Triângulo  $S'T'V'$  é interno de Napoleão do triângulo  $DEF$  e, por fim, na terceira que o hexágono  $A'V'C'S'B'T'$  é regular.

*Primeira Etapa.*

Sejam  $A = (x_0, y_0)$ ,  $B = (x_1, y_1)$  e  $C = (x_2, y_2)$ . Como o triângulo  $DEF$  é a imagem do triângulo sob  $180^\circ$  de rotação, aplicaremos a matriz de rotação de um ângulo  $\theta$  para encontrarmos os vértices  $D, E$  e  $F$ .



A matriz de rotação é  $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$  que, para  $\theta = \pi$ , temos

$$R_\pi = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & \text{sen}(\pi) \\ -\text{sen}(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a matriz de rotação em  $A, B$  e  $C$ , encontramos  $D, E$  e  $F$ , respectivamente.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{bmatrix} \implies D = (-x_0, -y_0)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{bmatrix} \implies E = (-x_1, -y_1)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ -y_2 \end{bmatrix} \implies F = (-x_2, -y_2)$$

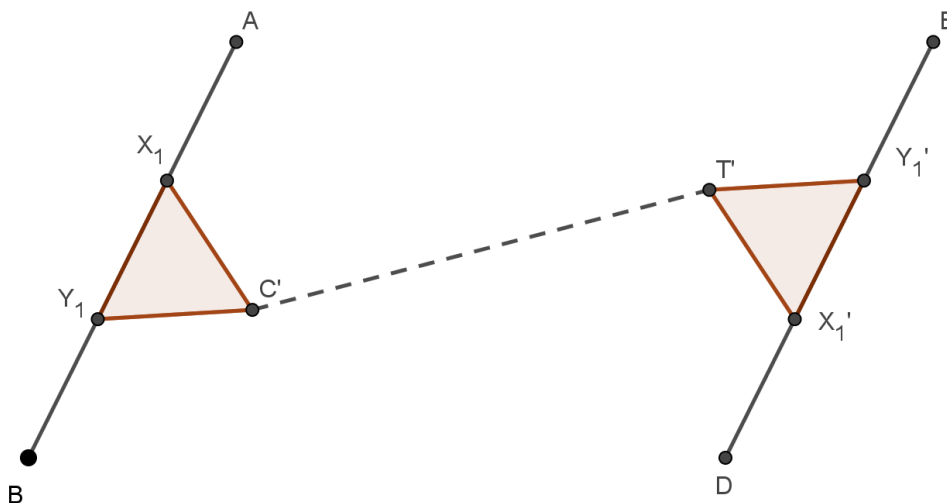
Como  $A = (x_0, y_0)$ ,  $B = (x_1, y_1)$ ,  $C = (x_2, y_2)$ ,  $D = (-x_0, -y_0)$ ,  $E = (-x_1, -y_1)$  e  $F = (-x_2, -y_2)$ , então  $|\overline{AB}| = |\overline{DE}|$ ,  $\overline{AC} = \overline{DF}$  e  $\overline{BC} = \overline{EF}$ . Logo, o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $DEF$ .

### Segunda Etapa.

O triângulo  $DEF$  é gerado a partir da rotação de  $180^\circ$  do triângulo  $ABC$ . Toda rotação é uma isometria, em particular de  $180^\circ$ , pois preserva as distâncias, fato provado na primeira etapa. Como  $R_\pi A = D$  e  $R_\pi B = E$ , temos que  $|\overline{AB}| = |\overline{DE}|$ .

Sobre  $\overline{AB}$  vamos marcar os pontos  $X_1$  e  $Y_1$ , de tal sorte que  $\overline{AX_1} = \overline{X_1Y_1} = \overline{Y_1B}$  e sobre o segmento  $\overline{DE}$ , vamos marcar os pontos  $X'_1$  e  $Y'_1$ , de tal sorte que  $\overline{DX'_1} = \overline{X'_1Y'_1} = \overline{Y'_1E}$ .

Note que  $\overline{X_1Y_1} = \frac{\overline{AB}}{3} = \frac{\overline{DE}}{3} = \overline{X'_1Y'_1}$ .



Seja  $C'$  o vértice do triângulo de Napoleão interior relativo ao lado  $\overline{AB}$  e seja  $T'$  o vértice do triângulo de Napoleão, a partir do segmento  $\overline{ED}$ . Note que esse ponto  $T'$  será do triângulo de Napoleão interior, uma vez que, se do baricentro do triângulo  $ABC$ , traçarmos um Plano Cartesiano, de tal modo que a origem coincida com esse ponto, então o ponto  $T'$  é a imagem da rotação de  $180^\circ$  do ponto  $C'$ , ou seja,  $R_\pi C' = T'$ .

Analogamente, o mesmo vale para o ponto  $S'$ , que é a imagem de  $180^\circ$  do ponto  $A'$  e  $V'$  que é a imagem de  $180^\circ$  do ponto  $B'$ .



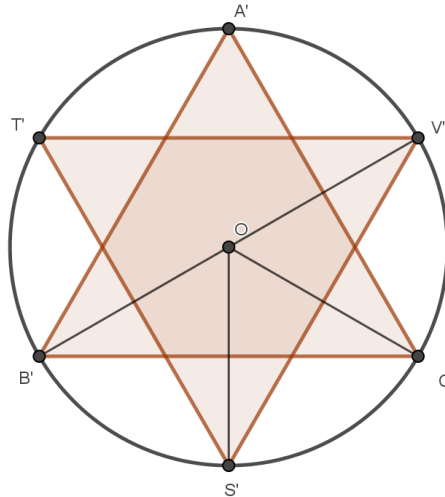
Portanto, a imagem de  $180^\circ$  do triângulo  $A'B'C'$  interno de Napoleão do triângulo  $ABC$  é o triângulo  $S'V'T'$ . Logo, o triângulo  $S'V'T'$  é o triângulo interno de Napoleão do triângulo  $DEF$ .

*Terceira Etapa.*

Recordemos que  $R_\pi P$  é a imagem de um ponto  $P$  sobre uma rotação de  $180^\circ$ . Como  $d(P, R_\pi Q) = d(R_\pi P, Q)$ , então os lados opostos do hexágono  $A'V'C'S'B'T'$  são congruentes.

Como o triângulo  $S'V'T'$  de Napoleão é obtido pela rotação de  $180^\circ$  do triângulo  $A'B'C'$ , também de Napoleão, então os baricentros coincidem.

Dessa forma, cada triângulo de Napoleão interno está inscrito numa mesma circunferência e, portanto, o hexágono  $A'V'C'S'B'T'$  está inscrito nessa circunferência.



Pela figura acima, temos que  $\widehat{S'C'} + \widehat{S'B'} = 120^\circ$  e  $\widehat{V'C'} + \widehat{C'S'} = 120^\circ$ . Logo  $\widehat{S'B'} = \widehat{V'C'}$  e  $\overline{V'C'} = \overline{S'B'}$ . Como  $\overline{A'V'} = \overline{S'B'}$ , temos que  $\overline{V'C'} = \overline{A'V'}$ .

Analogamente mostramos que todos os lados são congruentes. Portanto, o hexágono é regular.

□

O próximo teorema afirma que os triângulos de Napoleão internos e externos de qualquer triângulo escaleno são perspectivos pois, mostraremos que são equiláteros.

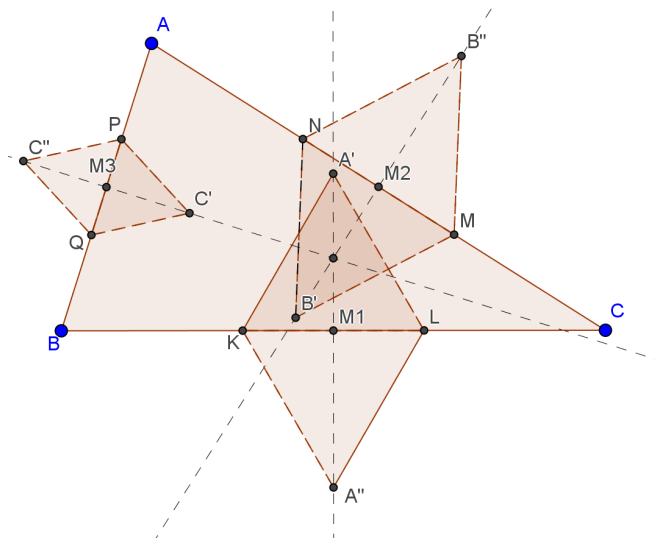
**Teorema 2.6.** Os triângulos de Napoleão internos e externos de qualquer triângulo escaleno são perspectivos um com o outro e com o triângulo original.

**Prova.**

*Primeiro Caso.*

Os triângulos considerados são os triângulos de Napoleão internos e externos.

Como os triângulos  $A'KL$  e  $A''KL$  são equiláteros com o lado  $\overline{KL}$  em comum, então o segmento  $A'A''$  é perpendicular ao segmento  $KL$  passando por  $M_1$ , ponto médio do segmento  $KL$ . Como  $\overline{KL} \subset \overline{BC}$  e  $A'A''$  é perpendicular a  $\overline{KL}$ , então  $A'A''$  também é perpendicular ao segmento  $BC$ . Como  $\overline{BK} = \overline{KL} = \overline{LC}$  e  $\overline{KM_1} = \overline{M_1L}$ , então  $M_1$  também é ponto médio de  $\overline{BC}$ .

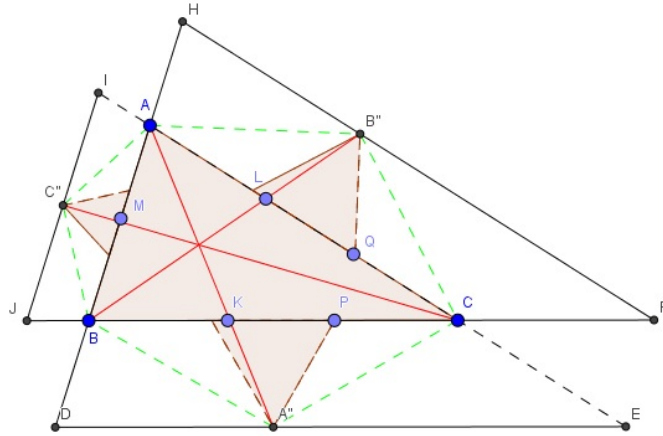


Segue que  $A'A''$  é mediatriz do segmento  $BC$ , ou seja, é ortogonal a  $BC$  em seu ponto médio. O mesmo ocorre com os triângulos  $B'MN$  e  $B''MN$  e  $C'PQ$  e  $C''PQ$ . Logo,  $B'B''$  é mediatriz do segmento  $AC$  e  $C'C''$  é mediatriz do segmento  $AB$ .

Portanto, os segmentos  $A'A''$ ,  $B'B''$  e  $C'C''$  são as mediatrizes do triângulo  $ABC$ , logo se interceptam no ponto denominado circuncentro.

*Segundo Caso.*

Os triângulos considerados são o triângulo original e o triângulo de Napoleão externo.



Traçaremos um segmento  $DE \parallel BC$  passando por  $A''$ , de modo que o ponto  $E$  seja o ponto de interseção da reta que contém o segmento  $AC$  com a reta  $DA''E$  (traçada) e o ponto  $D$  é o ponto de interseção dessa mesma reta  $DA''E$  com a reta que contém o segmento  $AB$ .

Traçaremos outro segmento  $HF \parallel AC$  passando por  $B''$  de tal forma que o ponto  $H$  é o ponto de interseção da reta que contém o segmento  $AB$  com a reta  $HB''F$  (traçada) e o ponto  $F$  é o ponto de interseção da reta que contém o segmento  $BC$  com a reta que contém o segmento  $HB''F$  (traçado).

Por fim, traçaremos uma reta  $s \parallel AB$  passando por  $C''$  onde a interseção da reta  $s$  com a reta que contém o segmento  $BC$  dá o ponto  $J$  e a interseção da reta  $s$  com a reta que contém o segmento  $AC$  dá o ponto  $I$ .

$$\overline{AA''} \cap \overline{BC} = K, \quad \overline{BB''} \cap \overline{AC} = L, \quad \overline{CC''} \cap \overline{AB} = M.$$

Como  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ,  $\overline{FH} \parallel \overline{AC}$  e  $\overline{IJ} \parallel \overline{AB}$ , temos:

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{DA''}}{\overline{A''E}}, \quad (2.33)$$

$$\frac{\overline{CL}}{\overline{LA}} = \frac{\overline{FB''}}{\overline{B''H}}, \quad (2.34)$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{IC''}}{\overline{C''J}}. \quad (2.35)$$

De (2.33), (2.34) e (2.35), temos:

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{CL}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{DA''}}{\overline{A''E}} \cdot \frac{\overline{FB''}}{\overline{B''H}} \cdot \frac{\overline{IC''}}{\overline{C''J}}$$

e

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{CL}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{DA''}}{\overline{C''J}} \cdot \frac{\overline{IC''}}{\overline{B''H}} \cdot \frac{\overline{FB''}}{\overline{A''E}}. \quad (2.36)$$

Note que o triângulo  $A''PC$  é isósceles, visto que  $\overline{A''P} = \overline{PC}$  com o ângulo  $\angle A''PC = 120^\circ$ . Logo  $\angle A''CP = \angle CA''P = 30^\circ$ , como  $DE \parallel BC$ , então  $\angle A''CP = \angle CA''E = 30^\circ$ . De maneira análoga, temos que o triângulo  $B''CQ$  é isósceles  $QC = QB''$  com  $\angle QCB'' = \angle CB''Q = 30^\circ$  e os segmentos  $FH \parallel AC$ , o que implica em  $\angle FB''C = \angle B''CQ = 30^\circ$ .

Como  $DE \parallel BF$  e  $HF \parallel AE$ , então  $\angle CEA'' = \angle CFB'' = \angle BCA = c$ .

Logo os triângulos  $CEA''$  e  $CFB''$  são semelhantes, visto que seus ângulos correspondentes são congruentes (indicamos como caso de semelhança AA), daí temos:

$$\frac{\overline{FB''}}{\overline{A''E}} = \frac{\overline{B''C}}{\overline{CA''}}. \quad (2.37)$$

Pelo caso de semelhança AA, temos que os triângulos  $PA''C$  e  $QB''C$  são semelhantes.

Logo:

$$\frac{\overline{B''C}}{\overline{A''C}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{PC}}. \quad (2.38)$$

Como  $\overline{AC} = 3 \cdot \overline{QC}$  e  $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{PC}$ , então:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PC}} \implies \frac{\overline{CQ}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}. \quad (2.39)$$

De (2.37), (2.38) e (2.39), temos:

$$\frac{\overline{FB''}}{\overline{A''E}} = \frac{\overline{B''C}}{\overline{A''C}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}. \quad (2.40)$$

De forma análoga, podemos concluir que  $\angle AB''H = \angle AC''I = \angle BC''J = \angle BA''D = 30^\circ$  e  $\angle B''HA = \angle AIC'$  e  $\angle BJC'' = \angle BDA''$ . Logo, temos que os triângulos  $AB''H$  e  $AC''I$  são semelhantes, assim como são semelhantes os triângulos  $BC''J$  e  $BA''D$ . Daí segue que:

$$\frac{\overline{IC''}}{\overline{HB''}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \quad (2.41)$$

$$\frac{\overline{DA''}}{\overline{C''J}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} AC. \quad (2.42)$$

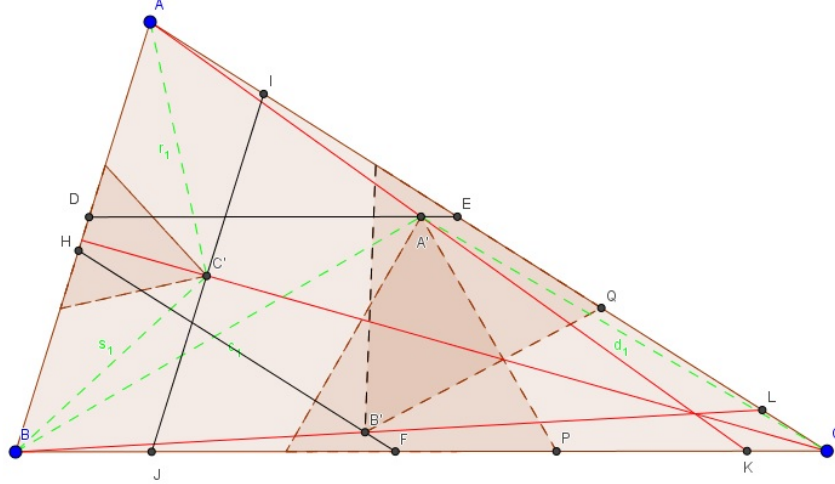
Substituindo (2.40), (2.41) e (2.42) em (2.36), temos:

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{CL}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 1.$$

Portanto, pelo Teorema de Ceva, Teorema 1.5, as linhas  $AK$ ,  $BL$  e  $CM$  concorrem.

*Terceiro Caso.*

Os triângulos considerados são o triângulo original e o triângulo de Napoleão interno.



Após traçarmos os segmentos  $DA'E$ ,  $FB'H$  e  $IC'J$  paralelos a  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , respectivamente, então:

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'E}} \quad (2.43)$$

$$\frac{\overline{CL}}{\overline{LA}} = \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'H}} \quad (2.44)$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{IC'}}{\overline{C'J}} \quad (2.45)$$

De (2.43), (2.44) e (2.45), temos:

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{CL}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'E}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'H}} \cdot \frac{\overline{IC'}}{\overline{C'J}}.$$

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{CL}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{DA'}}{\overline{C'J}} \cdot \frac{\overline{IC'}}{\overline{B'H}} \cdot \frac{\overline{F'B}}{\overline{A'E}} \quad (2.46)$$

Note que os triângulos  $CA'P$  e  $CB'Q$  são isósceles, visto que  $\overline{CP} = \overline{PA'}$  e  $\overline{CQ} = \overline{QB'}$ , logo  $\angle CA'P = \angle PCA' = \angle CB'Q = \angle QCB' = 30^\circ$ .

Como  $DE \parallel BC$  e  $AC \parallel FH$ , logo  $\angle PFB' = \angle A'EQ = \angle BCA = c$ , com isso, temos que  $\angle A'EC = \angle B'FC = 180^\circ - c$ . Logo o triângulo  $CB'F$  é semelhante ao triângulo  $CA'E$ .

$$\frac{\overline{FB'}}{\overline{A'E}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{CA'}} \quad (2.47)$$

Também pelo caso AA de semelhança de triângulos, podemos afirmar que os triângulos  $PA'C$  e  $QB'C$  são semelhantes, logo:

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{PC}} \quad (2.48)$$

Como  $\overline{AC} = 3 \cdot \overline{QC}$  e  $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{PC}$ , então:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PC}} \implies \frac{\overline{CQ}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad (2.49)$$

De (2.47), (2.48) e (2.49), temos:

$$\frac{\overline{FB'}}{\overline{A'E}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad (2.50)$$

De maneira análoga, podemos concluir que  $\angle AB'H = \angle AC'I = \angle BC'J$ ,  $\angle B'HA = \angle AIC'$  e  $\angle BJC' = \angle BDA'$ . Logo, temos que os triângulos  $AB'H$  e  $AC'I$  são semelhantes, assim como são semelhantes os triângulos  $BC'J$  e  $BA'D$ . Daí segue que:

$$\frac{\overline{IC'}}{\overline{HB'}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (2.51)$$

$$\frac{\overline{DA'}}{\overline{C'J}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad (2.52)$$

Substituindo (2.50), (2.51) e (2.52) em (2.46), temos:

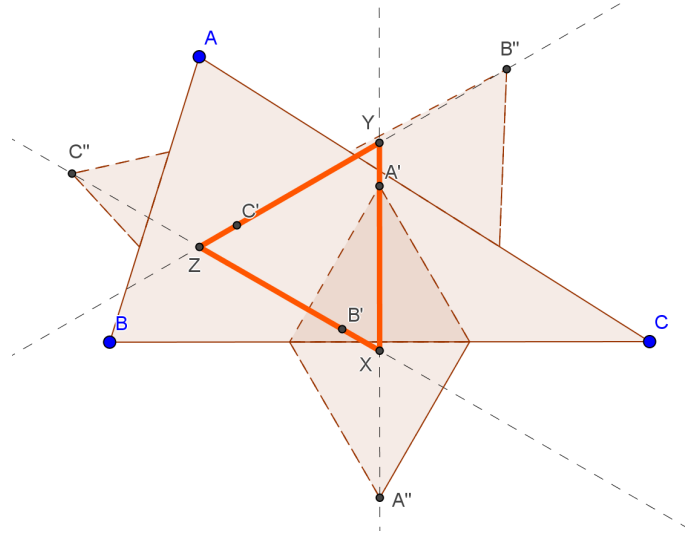
$$\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{CL}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 1.$$

Portanto, pelo Teorema de Ceva, as linhas  $AK$ ,  $BL$  e  $CM$  concorrem.

□

**Teorema 2.7.** As linhas  $C''B'$ ,  $B''C'$ ,  $A''A'$  formam um triângulo equilátero do qual o baricentro coincide com o baricentro do triângulo  $ABC$ .

**Prova.** Como os baricentros dos triângulos interno e externo de Napoleão ( $A'B'C'$  e  $A''B''C''$ , respectivamente) coincidem com o baricentro do triângulo original  $ABC$  (conforme foi provado no Teorema 2.4), portanto basta provar que o triângulo formado pelas linhas  $C''B'$ ,  $B''C'$  e  $A''A'$ , formam um triângulo equilátero.



Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  os pontos de intersecção de  $\overrightarrow{A''A'}$  com  $\overrightarrow{C''B'}$ ,  $\overrightarrow{A''A'}$  com  $\overrightarrow{B''C'}$  e  $\overrightarrow{B''C'}$  com  $\overrightarrow{C''B'}$ , respectivamente. Para mostrar que o triângulo  $XYZ$  é equilátero, basta mostrar que seus ângulos internos medem  $60^\circ$  cada um.

Como o triângulo  $A'B'C'$  é equilátero, então dando um giro de  $120^\circ$  no ponto  $A'$ , no sentido horário, em torno do centro de  $A'B'C'$ , o ponto vai coincidir com o ponto  $B'$ . Se fizermos o mesmo com o ponto  $B'$ , este coincidirá com  $C'$  que, por sua vez, coincidirá com  $A'$ . Da mesma forma, o triângulo  $A''B''C''$ , temos que girando  $A''$   $120^\circ$  no sentido horário, em torno do seu centro, ele vai coincidir com  $C''$ , girando da mesma forma o ponto  $C''$  coincidirá com o ponto  $B''$  que, por sua vez, coincidirá com  $A''$ .

Logo, girando o segmento  $B''C'$   $120^\circ$  em torno do centro dos triângulos  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  no sentido horário, ele vai coincidir com o segmento  $A''A'$ , o mesmo acontece com o segmento  $C'A'$ , que coincidirá com o segmento  $A'B'$ . Logo, temos que  $\angle B''C'A' = \angle A''A'B'$  que, de forma análoga temos que os segmentos  $A''A'$  e  $C''B'$  são congruentes, bem como são congruentes os segmentos  $A'B'$  e  $B'C'$ , portanto segue que  $\angle B''C'A' = \angle A''A'B' = \angle C''B'C' = \alpha$ .

Como o triângulo  $A'B'C'$  é equilátero, então os seus ângulos internos medem  $60^\circ$ . Com isso temos que  $\angle B'C'Z = \angle C'A'Y = \angle A'B'X = 120^\circ - \alpha$ .

Como a soma dos ângulos internos do triângulo mede  $180^\circ$ , então:

- Do triângulo  $XA'B'$  podemos concluir que  $\angle B'XA' = 60^\circ$ ;
- Do triângulo  $YA'C'$  podemos concluir que  $\angle A'YC' = 60^\circ$ ;
- Do triângulo  $C'ZB'$  podemos concluir que  $\angle C'ZB' = 60^\circ$ .

Logo, o triângulo  $XYZ$  é equilátero.

□

## Capítulo 3

# *Aplicabilidade do Triângulo de Napoleão*

Napoleão Bonaparte, além de grande soldado e hábil político, era um grande admirador da ciência e dos cientistas. Em particular, devotava grande interesse à Matemática. O que pouca gente sabe é que Napoleão é o descobridor de um belo Teorema de Geometria. Eis o enunciado do Teorema de Napoleão:

“Tome um triângulo arbitrário. Com base em cada um de seus lados, construa (externamente) um triângulo equilátero. Os centros desses três triângulos equiláteros são ainda vértices de um outro triângulo equilátero”. (Não é difícil verificar, este novo triângulo coincide com o triângulo de Napoleão exterior.)

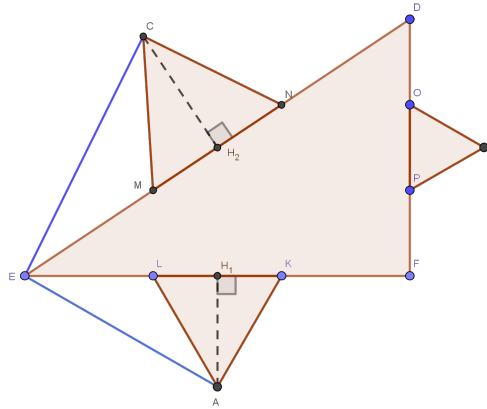
De posse dessas informações, analisemos os itens seguintes:

1. Num triângulo de Napoleão exterior  $ABC$  proveniente de um triângulo retângulo isósceles  $DEF$  de base  $EF$ , o ângulo  $\widehat{AEC}$  pode medir  $105^\circ$ .
2. Ainda com relação ao item 1, se os lados iguais do triângulo  $DEF$  medirem  $4\sqrt{3}$  então o Triângulo de Napoleão  $ABC$  terá seus lados medindo  $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ .
3. A famosa “Estrela de Davi”, símbolo do Judaísmo, consiste em dois triângulos equiláteros iguais, concêntricos mas em posições opostas. Pode-se afirmar que este símbolo é um exemplo de um triângulo e o seu correspondente de Napoleão.

Vamos analisar cada afirmativa.

Nas afirmativas 1 e 2, a figura abaixo será levada em consideração.





1. Verdadeiro! De fato. Como o triângulo  $DEF$  é retângulo e isósceles, então  $\angle DEF$  mede  $45^\circ$ .

O fato do triângulo  $ABC$  ser externo de Napoleão implica que  $\overline{EL} = \overline{LA} = \overline{KL} = \overline{AK} = \overline{KF}$ , por construção. Também por construção temos que triângulo  $AKL$  é equilátero, logo  $\angle ALK$  mede  $60^\circ$ .

Como  $\angle ALK$  é externo do triângulo  $ALE$ , que por sua vez é isósceles, visto que triângulo  $EMC$  é isósceles e  $\angle CEM$  mede  $30^\circ$ .

Portanto  $\angle AEC$  é o resultado

$$\angle AEL + \angle DEF + \angle CEM = 30^\circ + 45^\circ + 30^\circ = 105^\circ.$$

2. Verdadeiro! De fato. Sejam  $\overline{AH_1}$  e  $\overline{CH_2}$  alturas dos triângulos  $LKA$  e  $MNC$ , respectivamente. Note que  $H_1$  é ponto médio do segmento  $\overline{EF}$  e  $H_2$  o ponto médio do segmento  $\overline{ED}$ . Portanto,  $\overline{EH_1} = 2\sqrt{3}$  e  $\overline{EH_2} = 2\sqrt{6}$ .

Do triângulo retângulo  $EH_1A$ , temos:

$$\overline{EA} = \frac{\overline{EH_1}}{\cos(30^\circ)} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4.$$

Do triângulo retângulo  $EH_2C$ , temos:

$$\overline{EC} = \frac{\overline{EH_2}}{\cos(30^\circ)} = \frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{2}.$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $AEC$ , temos:

$$\begin{aligned}
 (\overline{AC})^2 &= (\overline{AB})^2 + (\overline{EC})^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EC} \cdot \cos(\angle AEC) \\
 &= 16 + 32 - 2 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos(105^\circ) \\
 &= 48 - 32\sqrt{2} (\cos(60^\circ) \cdot \cos(45^\circ) - \text{sen}(60^\circ) \cdot \text{sen}(45^\circ)) \\
 &= 48 - 32\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = 16(2 + \sqrt{3}) \\
 \overline{AC} &= 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

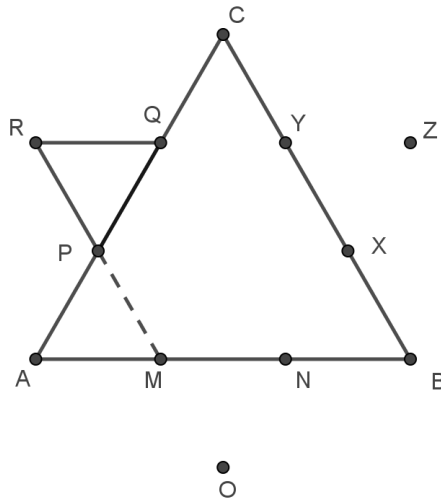
Pondo  $A = 2$  e  $B = 3$ , o radical duplo, Teorema 1.3,  $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$ , em que  $C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{2^2 - 3} = 1$ , nos dá:

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

Portanto,  $\overline{AC} = 4\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 4 \left( \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right) = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ .

3. Verdadeiro! De fato.

Considere o triângulo equilátero  $ABC$ , com as trissecções em em seus lados, conforme figura abaixo.



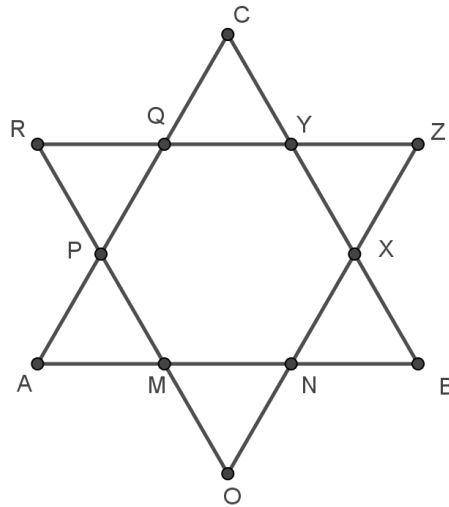
No segmento  $\overline{PQ}$  traçamos o triângulo equilátero externo  $PQR$ . Ao traçarmos o segmento  $\overline{PM}$  obtemos o triângulo isósceles  $PAM$ , pois  $\overline{PA} = \overline{AM}$ .

Como o triângulo  $ABC$  é equilátero, temos  $\angle PAM = 60^\circ$ . Logo o triângulo  $PAM$  é equilátero.

Como  $\angle APR = 120^\circ$ , por ser externo ao triângulo equilátero  $PRQ$ , e ao somarmos com  $\angle APM = 60^\circ$  resulta em  $180^\circ$ . Concluimos que  $R, P$  e  $M$  são colineares.

Analogamente mostra-se que  $O, M$  e  $P$  são colineares. Logo, mostramos que  $R, P, M$  e  $O$  são colineares, ademais  $\overline{OR} = \overline{AB}$ .

Prosseguindo, com o mesmo procedimento, com os triângulos  $MNO$  e  $XYZ$ , concluimos que os pontos  $O, N, X$  e  $Z$  são colineares, assim como os pontos  $Z, Y, Q$  e  $R$ . Além disso, garantimos que o triângulo  $ROZ$  é equilátero e congruente a  $ABC$ .



## *Considerações Finais*

O objetivo principal desta dissertação foi apresentar os teoremas referentes ao Triângulo de Napoleão dentro de um contexto acessível aos alunos do ensino médio, e estudiosos da Geometria. Tentamos entregar os conceitos e resultados preliminares para que o texto seja autossuficiente e assim, o leitor não precise consultar outros textos para o entendimento e compressão dos resultados aqui expostos. A maioria das definições, lemas, proposições, teoremas e exercícios em geral, foram acompanhadas de figuras ilustrativas para facilitar o entendimento da situação estudada.

Esperamos que nosso trabalho tenha contribuído com o ensino da geometria e estimulado aqueles leitores que procuram conhecimentos na geometria plana e em especial para aqueles interessados em problemas que envolvem triângulos equiláteros.

É bastante oportuno que esses enfoques passem também a ideia do lúdico, do lógico e da aplicação prática para a vida do aluno, desmistificando a aridez e a noção errônea de que aprender matemática e, em particular geometria, é para poucos e iluminados. Destacamos também a necessidade de estimular já nas séries finais do ensino fundamental, a prática das demonstrações geométricas, mesmo as mais elementares de tal modo que com a continuidade tornará os jovens mais confiantes e mais criativos. Com isto, acreditamos, ser possível melhorar a qualidade do ensino da matemática e sobretudo da geometria em nosso país.

Por fim, espero que com este trabalho eu tenha dado uma contribuição no sentido de dar maior significado à Matemática na Educação Básica e também despertar nos alunos maior interesse pelo estudo dessa disciplina tão importante.

# Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, Geraldo; *Euclides, Geometria e Fundamentos*, Revista do Professor de matemática, 45, SBM.
- [2] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. 10a Ed., Rio de Janeiro; SBM, (2006).
- [3] CAPITÁN, Francisco J. Garcia, *Coordenadas Baricêntricas*. Disponível no site: [www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol202garcap/ab.pdf](http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol202garcap/ab.pdf)
- [4] DOLCE, Osvaldo & POMPEO, José Nicolau, *Fundamentos de Matemática Elementar*, Editora Atual, Volume 9, São Paulo, 2010.
- [5] GARFUNKEL, J. & STAHL, S., *The Triangle Reinvestigated*. The American Mathematical Monthly. Vol. 72 (1965) 12 – 20.
- [6] IEZZI, Gelson, *Fundamentos de Matemática Elementar*, Editora Atual, Volume 3, São Paulo, 2010.
- [7] LIMA, Elon Lages, *Álgebra Linear*, 5a Ed., Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro (2001).
- [8] LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cesar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César, *A Matemática do Ensino Médio*, Vol 3, SBM, Rio de Janeiro (2006).
- [9] MORGADO, A. C., WAGNER, E., JORGE, M., *Geometria II*, Vest seller, Fortaleza CE, (2008).
- [10] NETO, Antônio Caminha Muniz , *Geometria*, Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção PROFMAT, 1a Edição, Rio de Janeiro RJ, (2013).
- [11] NETO, Antônio Caminha Muniz. *Tópicos de Matemática elementar: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM, (2012).
- [12] PAIVA, Manoel, *Matemática*, Editora Moderna, Volume 1, São Paulo, 1995.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [13] SILVA, José Constantino da, *Os Teoremas de Menelaus e Ceva*, dissertação de mestrado, PROFMAT-UFRPE, 2015. Disponível em [http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/dissertacao\\_constantino\\_b.pdf](http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/dissertacao_constantino_b.pdf). Acessado em 08/02/2018.