UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

SCIENTIA AD SAPIENTIAM

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA RESOLVER EQUAÇÕES DO SEGUNDO E TERCEIRO GRAUS NO CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

ADRIANO ARAÚJO COSTA

Instituto de Matemática

Maceió, Abril de 2013

PROFMAT

ADRIANO ARAÚJO COSTA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA RESOLVER EQUAÇÕES DO SEGUNDO E TERCEIRO GRAUS NO CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Amauri da Silva Barros

MACEIÓ, AL
2013

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

C837s Costa, Adriano Araújo.
Uma sequência didática para resolver equações do segundo e terceiro graus no conjunto dos números racionais / Adriano Araújo Costa. – 2013.
103 f. : il.

Orientador: Amauri da Silva Barros.
Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 100-101.
Apêndices: f. 102-103.

1. Equações. 2. Material concreto – Didática. 3. Sequência didática. 4. Material dourado. I. Título.

CDU: 51:371.695

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

Uma sequência didática para resolver equações do segundo e terceiro graus no conjunto dos números racionais

Adriano Araújo Costa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em matemática.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros (Orientador - UFAL)

____

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra (UFAL)

____

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo (UFRJ)

Aos meus pais, José Maria (em memória) e Irani,
a minha esposa, Luciana, e minhas filhas, Sophia
e Júlia, dedico esta grande conquista.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me sustentou diante das dificuldades.

A minha esposa, Luciana, e filhas, Sophia e Júlia, pelo apoio e compreensão durante todo o curso.

A minha mãe Irani por acreditar sempre em meu potencial.

Aos meus familiares que me incentivaram e compreenderam a minha ausência durante essa caminhada.

Ao Prof. Dr. Amauri Barros, pela sua amizade, pelo seu incentivo e pela confiança despendida a mim.

Ao Prof. Dr. Fernando Micena, pelo seu comprometimento, dedicação e entusiasmo na busca de uma aula que possa complementar nossos conhecimentos.

Aos professores do Instituto de Matemática que fazem parte do programa PROFMAT, que de forma direta ou indireta contribuíram para minha formação.

Aos amigos e colegas que fazem parte da primeira turma do PROFMAT pelo apoio, incentivo e estudos que realizamos durante todo o curso.

A CAPES pelo suporte financeiro que recebi ao longo de todo o curso de mestrado.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma nova proposta metodológica, baseada na teoria construtivista e na pedagogia montessoriana, para que os alunos, a partir do 8º ano do ensino fundamental, possam resolver equações do segundo e terceiro graus cujas raízes pertencem ao conjunto dos números racionais através da construção de retângulos e paralelepípedos utilizando o material dourado. Para isso, faremos algumas adaptações ao material dourado e iremos dividir as equações do segundo e terceiro graus em vários tipos de acordo com os sinais dos seus coeficientes. Nossa perspectiva é que a proposta apresentada possa contribuir no processo de ensino aprendizagem deste tema que é tão importante para a vida escolar dos nossos alunos.

Palavras-chave: Equação. Material Concreto. Sequência Didática. Material Dourado

ABSTRACT

This paper aims at present a new methodological proposal based on constructivist theory and Montessori pedagogy for students from the 8th grade of elementary school which will be able to solve equations of second and third degree whose roots belong to the set of rational numbers by constructing parallelepiped rectangles and using the golden material. Hence, we will adapt the golden material and we will divide the equations of the second and third degrees in various types according to the signs of their coefficients. Our perspective is that this work will be able to contribute to the teaching and learning process of the subject that is so important to the school life of our students.

Key words: Equation. Concrete Material. Instructional Sequence. Golden Material

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Equações algébricas é um dos conteúdos matemáticos que desperta bastante interesse no mundo acadêmico devido a sua importância e aplicabilidade tanto em outros conteúdos matemáticos, como em outras ciências e até mesmo para resolver problemas do nosso cotidiano.

O primeiro contato que o aluno tem com uma equação da forma que ela é escrita hoje ocorre no 7º ano do ensino fundamental com as equações de primeiro grau, depois no 9º ano são apresentadas a ele as equações do segundo grau e as equações de quarto grau, apenas as equações biquadradas, e por fim na 3ª série do ensino médio o aluno reconhece e soluciona uma equação algébrica ou polinomial agora podendo ser de qualquer grau.

As dificuldades apresentadas pelos alunos na compreensão das expressões algébricas e as dificuldades para resolver as equações foram resumidas pelo pesquisador americano James Fey (1990) da seguinte forma:

> Na matemática escolar atual os estudantes empregam um tempo enorme em tarefas envolvendo variáveis, enquanto nomes literais para números desconhecidos, e com equações e inequações, que impõem condições nesses números. O ensino de álgebra enfatiza demais os procedimentos formais de transformação de expressões simbólicas e resolução de equações que buscam determinar o valor desconhecido de variáveis.

Na teoria, o aluno deveria saber resolver uma equação de primeiro ou segundo grau durante todo o ensino médio porque ele só terá contato com as equações de grau maior do que ou igual a 3 na última série do ensino médio. Aqui vale destacar, pelo menos na teoria, que o aluno pode resolver equações de grau maior do que ou igual a 3 se nela for possível aplicar regras de fatoração estudadas no 8º ano do ensino fundamental. Na prática, principalmente em escolas públicas, encontramos alunos no ensino médio com imensa dificuldade em trabalhar com expressões algébricas e resolver equações do segundo grau, dificultando ao professor trabalhar os conteúdos do ensino médio e ao próprio aluno compreender conceitos relativamente simples.

O que ocorre na realidade é como se ele nunca tivesse estudado tal conteúdo ou uma coisa que aconteceu num passado muito remoto e ele lembra vagamente dos conceitos estudados, apesar de todo o tempo despendido no ensino fundamental para esse tema. Essas dificuldades podem estar associadas à forma que esses conteúdos são mecanicamente lecionados, cheios de regras e detalhes que acabam limitando o pensamento do aluno. Os alunos, por exemplo, quando se deparam com uma equação do 2º grau lembram que a sua solução depende apenas de uma única fórmula.

Segundo Nobre (2006), o primeiro indício do uso de uma equação foi constatado em um documento do antigo Egito chamado de Papiro de *Rhind*, aproximadamente 1650 a.C., que também recebe o nome de Papiro de *Ahmes*. Desde então as equações passaram a ter um papel muito importante no desenvolvimento dos estudos matemáticos. No final do século XVI, quando as equações passaram a ser escritas utilizando símbolos e letras foi possível encontrar fórmulas resolutivas para algumas equações, que durante todo esse tempo ainda foi motivo de duelos entre vários matemáticos. Um desses duelos ocorreu em 1547 e 1548 entre Fiore e Tartaglia, que foi motivado pela descoberta da fórmula para resolução das equações de terceiro grau. Mais tarde, Évariste Galois estudou as equações de grau maior ou igual a cinco e descobriu que estas não podiam ser resolvidas através de uma fórmula envolvendo os seus coeficientes.

No capítulo 2 deste trabalho apresentaremos como povos antigos resolviam problemas que hoje podemos interpretar como equações do segundo grau e como ocorreu o desenvolvimento destas resoluções até a atual forma que resolvemos esse tipo de equação, chamada por alguns autores brasileiros, por motivos desconhecidos, a partir dos anos 60 como fórmula de Bhaskara segundo Nobre (2006). Além disso, apresentaremos ainda neste capítulo a fórmula resolutiva para equações de terceiro grau.

No capítulo 3 faremos a fundamentação teórica da proposta que apresentaremos nesse trabalho que terá por base o construtivismo, teoria desenvolvida a partir das experiências do biólogo Jean Piaget que constatou que o conhecimento de uma criança está diretamente ligado à interação entre ela e o meio onde vive. E o método montessoriano criado pela médica e pedagoga italiana Maria Montessori. Veremos que seu método era composto por várias atividades motoras e sensorias.

No capítulo 4, apresentaremos a nossa proposta para resolver as equações a partir de um material concreto e os argumentos matemáticos que validam o método que estaremos propondo.

A sequência didática que estamos propondo nesse trabalho será apresentada e desenvolvida no capítulo 5, onde apresentaremos o material concreto que iremos utilizar para resolver as equações. Como representaremos a equação a partir dele e como manipular o material para obter a resolução das equações de segundo e terceiro graus.

No capítulo 6 faremos as considerações finais onde serão apresentadas as dificuldades e as propostas para aplicação do método.

2 A RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO E TERCEIRO GRAUS: ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS

Neste capítulo, apresentaremos alguns aspectos históricos relacionados as equações do segundo e terceiro graus, como algumas civilizações antigas resolviam problemas que hoje podemos interpretar como equações do segundo grau e a importância da representação geométrica para obter ou demonstrar procedimentos para resolver esses tipos de equações.

2.1 História das equações do segundo grau

A história da matemática pode ser usada como um fator motivacional despertando a curiosidade dos alunos na aprendizagem de matemática. Além disso, podemos através dela conhecer a origem de ideias, quem as criou e como essas ideias foram desenvolvidas. Desta forma, podemos compreender melhor termos e fórmulas que utilizamos hoje.

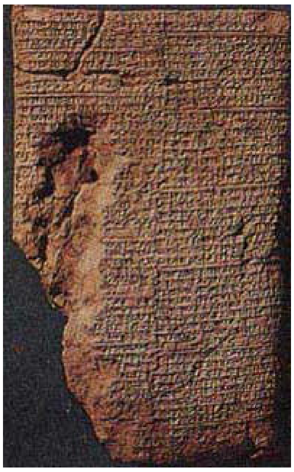
Através da história da matemática podemos constatar que a matemática utilizada por civilizações mais antigas era muito prática e estava sempre associada a problemas do cotidiano.

Boa parte do material deixado por algumas dessas civilizações foram destruídos por catástrofes naturais, ou por guerras, ou por vândalos ou até mesmo pela ação do tempo. Por exemplo, os Chineses e os Indianos utilizavam casca de árvore ou o bambu para fazer suas anotações, os Egípcios utilizavam o papiro que dependendo da região duravam por muito tempo e os Babilônios utilizavam placas de barro mole que depois eram colocadas ao sol para endurecer tornando-se assim mais resistentes.

Os registros deixados por algumas dessas civilizações são as principais referências para muitos dos fatos narrados na história da matemática. São manuscritos, datados de antes da era cristã, escritos por matemáticos daquela época que apresentavam vários problemas e suas soluções. A partir deles vamos constatar que algumas dessas civilizações já estudavam e apresentavam métodos para resolução de equações do segundo grau.

Uma dessas referências é a tábua BM13901 do período da antiga Babilônia que apresentava dois problemas que nos remetiam a um sistema de equações do segundo grau.

Figura 2.1: Tábua BM13901.



Fonte: Roque; Carvalho 2012

Na China podemos destacar o texto *Nove Capítulos da Arte Matemática* de um autor desconhecido, datado do século II antes da era cristã, que apresentava exercícios envolvendo equações do segundo grau.

Na Índia podemos destacar o manuscrito de Bhaskara que apresentava em seus versos problemas de vários assuntos entre eles a equação do segundo grau.

Pensando na proposta que iremos apresentar no capítulo 4 dessa dissertação apresentaremos alguns problemas e suas respectivas soluções apresentadas por alguns matemáticos de acordo com sua origem.

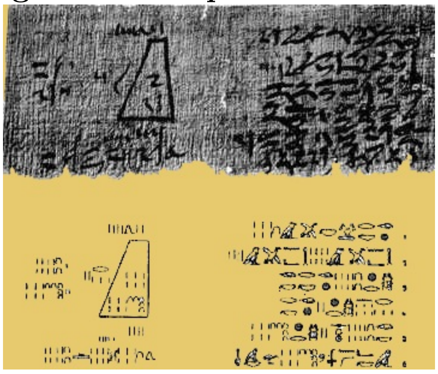
2.1.1 Resolução pelos Egípcios

O conhecimento que temos hoje da matemática praticada pela civilização Egípcia se dá pela descoberta e manutenção de alguns papiros deixados por essa civilização e que resistiram à ação do tempo. Esse conhecimento está registrado no Papiro de Rhind (escrito por volta de 1650 antes da era cristã), que apresentava 85 problemas, no Papiro de Moscou (escrito por volta de 1850 antes da era cristã), que apresentava 25 problemas, no Papiro de Berlim (escrito por volta de 1800 antes da era cristã) e no Papiro de Kahun (escrito por volta de 1800 antes da era cristã), este último apresentava em um de seus fragmentos o cálculo da raiz quadrada.

Figura 2.2: Papiro de Rhind.

Fonte: Roque; Carvalho 2012

Figura 2.3: Papiro de Moscou.



Fonte: Roque; Carvalho 2012

Figura 2.4: Papiro de Kahun.

Fonte: Roque; Carvalho 2012

Figura 2.5: Papiro de Berlim.

Fonte: Roque; Carvalho 2012

Segundo Boyer ([10] pág. 16), os conhecimentos apresentados nos papiros eram de ordem prática. Até o presente momento não foram encontrados fatos evidentes que comprovem que os antigos egípcios tenham desenvolvido algum estudo sobre a resolução de uma equação do segundo grau. Mas, no papiro de Berlim foram encontrados dois problemas envolvendo um sistema de equações no qual uma seria do segundo grau. Vejamos um desses problemas:

> "É te dito ... a área de um quadrado de 100 [cúbitos quadráticos] é igual a de dois quadrados mais pequenos. O lado de um dos quadrados é $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ o lado do outro. Diz-me quais são os lados dos dois quadrados desconhecidos."

A solução deste problema usando uma simbologia atual á a seguinte:

Sendo x e y as medidas dos lados dos quadrados. Assim, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 4x = 3y \end{cases}.$$

Note que a primeira equação do sistema é satisfeita se admitirmos que x e y valem, respectivamente, 3 e 4. Substituindo esses valores na equação obtemos:

$$x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

Agora multiplicando a equação acima por 4, obtemos a soma dos quadrados igual a 100. Assim:

$$4x^2 + 4y^2 = 2^2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 4^2 = 100 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot 3 = 6 \\ y = 2 \cdot 4 = 8 \end{cases}.$$

Como,

$$\begin{cases} 4x = 4 \cdot 6 = 24 \\ 3y = 3 \cdot 8 = 24 \end{cases} \Rightarrow 4x = 3y.$$

Note que os novos valores calculados para x e y satisfazem agora as equações 1 e 2 do sistema.

Portanto, os lados dos quadrados desconhecidos medem 6 e 8.

Essa regra foi denominada como regra da falsa posição, pois nesse caso encontramos uma solução particular para equação do segundo grau e através dela calculamos a solução para o sistema dado conforme vimos. Os Egípcios utilizavam a regra da falsa posição também para resolver equações do primeiro grau. O nome dado à regra causa tanta estranheza que Humphey Baker (1568) escreveu a seguinte frase:

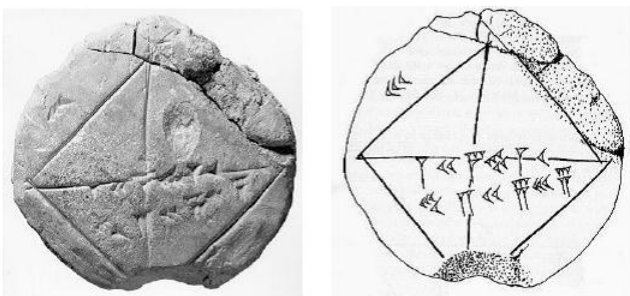
> "A regra de falsidade é assim chamada, não porque ela ensine qualquer fraude ou falsidade, mas porque, por números de meios tomados a sorte, ensina a encontrar o número verdadeiro que é o pedido. (Smith (1925))."

2.1.2 Resolução pelos Babilônios

Diferente dos egípcios que utilizavam papiros para fazer os registros matemáticos da época, os babilônios faziam tais registros em pedras de argila mole que depois eram cozidos ao sol. Por isso, existem mais documentos que comprovam que o povo babilônico estudou e desenvolveu um procedimento algébrico para resolver uma equação do segundo grau.

Um desses principais documentos é o tablete YBC 7289 no qual é apresentada uma boa aproximação da raiz quadrada de 2, que é a solução positiva da equação do segundo grau $x^2 = a$. Para isso eles utilizavam uma tabela de quadrados pela qual era possível fazer o enquadramento da raiz procurada.

Figura 2.6: Tablete YBC 7289.



Fonte: Roque; Carvalho 2012

Mas, segundo Katz ([11], p. 28) os Babilônios também resolviam equações do segundo grau do tipo $Ax^2 + Bx = C$, tais procedimentos de resolução eram apresentados como uma "receita matemática".

Segundo Roque (2012) ao longo de muito tempo acreditava-se que essas "receitas" determinavam que os babilônios utilizavam procedimentos algébricos para resolver tais equações, entretanto eles relatam que trabalhos de historiadores mais recentes poderiam tornar plausível que os babilônios utilizavam raciocínios geométricos para resolver tais equações.

Nosso objetivo é apresentar a resolução descrita pelos babilônios, então não entraremos no mérito da discussão se a mesma é algébrica ou geométrica. Dessa forma, iremos apenas descrever tal procedimento utilizando uma linguagem atual.

Para resolução da equação $Ax^2+Bx = C$, temos o seguinte procedimento algébrico:

- 1º passo: Multiplique A por C (Obtendo AC);
- 2º passo: Encontre metade de B (Obtendo $\frac{B}{2}$);
- 3º passo: Multiplique $\frac{B}{2}$ por $\frac{B}{2}$ (Obtendo $\left(\frac{B}{2}\right)^2$);
- 4º passo: Adicione AC a $\left(\frac{B}{2}\right)^2$ (Obtendo $\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC$);
- 5º passo: A raiz quadrada é (Obtendo $\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC}$);
- 6º passo: Subtraia $\frac{B}{2}$ da raiz obtida (Obtendo $\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \frac{B}{2}$);
- 7º passo: Tome o reciproco de A (Obtendo $\frac{1}{A}$);
- 8º passo: Multiplique por $\frac{1}{A}$ para obter o lado do quadrado;
- 9º passo: O lado do quadrado é $\left(\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + AC} - \frac{B}{2}\right) \times \frac{1}{A}$.

Observação: Na época não eram reconhecidos termos negativos, então a equação $Ax^2 + Bx = C$ poderia ser escrita de modo a tornar todos os números positivos. Assim a receita descrita acima sofreria algumas modificações.

2.1.3 Resolução pelos Gregos

A civilização grega acabou dando um tratamento geométrico as equações do segundo grau, pois eles buscavam entender melhor a posição do homem em relação ao universo e através da matemática eles poderiam ordenar as ideias de forma racional.

Nesse sentido, vários gregos alcançaram uma posição de destaque Euclides, Pitágoras, Thales de Mileto, Diofanto de Alexandria, entre outros.

A obra "Os Elementos" de Euclides, considerada como uma obra magnífica por muitos, era composta por 13 livros, onde ele apresentava várias demonstrações da resolução de uma equação utilizando construções geométricas.

Em seu segundo livro apresenta, por exemplo, a proposição 11 que diz:

> "Dividir um segmento de reta dada de maneira que o retângulo determinado pelo todo e por uma das partes seja o quadrado sobre a outra parte".

Vamos descrever o processo utilizado pelos gregos usando uma simbologia atual. De acordo com a proposição enunciada e considerando o segmento $AB = a$ dado, o objetivo é encontrar um ponto H neste segmento de modo que $(AB) \cdot (HB) = (AH)^2$. Ou seja, se $AB = a$ e $AH = x$ temos:

$$a \cdot (a - x) = x^2 \text{ ou seja } a^2 = x^2 + ax.$$

Com isso Euclides mostra em seu livro a resolução geométrica da equação de 2º grau do tipo $a^2 = x^2 + ax$.

A igualdade acima é obtida através da aplicação direta do teorema de Pitágoras.

Dada a equação $x^2 + px = q$, note que se podemos construir um triângulo de lados $x + \frac{p}{2}$, $\frac{p}{2}$ e $\sqrt{q}$ obtemos a equação desejada. Assim, temos que:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + (\sqrt{q})^2 .$$

Logo, para resolver a equação basta:

- 1º passo: Calcular a raiz quadrada de $\frac{p}{4}^2 + q$;
- 2º passo: Da raiz obtida acima subtrair $\frac{p}{2}$;
- 3º passo: o valor de x é $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2}$.

Outro matemático grego que merece destaque é Diofanto de Alexandria que é autor da obra composta por 13 livros chamada Aritmética. Nessa obra, Diofanto apresenta vários problemas envolvendo equações de vários graus, principalmente do 1º e 2º graus.

2.1.4 Resolução pelos Hindus

Bhramagupta (598-665) matemático e astrônomo realizou um estudo mais completo sobre equações algébricas. Segundo Pitombeira (2004) o procedimento de resolução apresentado por ele é correspondente à fórmula que utilizamos atualmente.

Segundo Nobre (2003), a solução dada por Bhramagupta à equação $ax^2 + bx = d$, utilizando uma simbologia atual, foi:

- 1º passo: A soma multiplicada pelo coeficiente do quadrado, você adiciona o quadrado da metade do coeficiente da incógnita;

$$x^2 = a \cdot d + \left(\frac{b}{2}\right)^2 .$$

- 2^o passo: Em seguida toma a raiz quadrada;

$$x = \sqrt{a \cdot d + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

- 3^o passo: A metade do coeficiente da incógnita é subtraída;

$$x = \sqrt{a \cdot d + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}.$$

- 4^o passo: E finalmente divide pelo coeficiente do quadrado;

$$x = \frac{\sqrt{a \cdot d + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}.$$

Efetuando algumas operações na equação obtida acima, temos que:

$$x = \frac{\sqrt{4ad + b^2} - b}{2a}.$$

> "É interessante observar que, já nessa época, havia plena consciência de que números negativos não são quadrados, e de que o número de raízes de uma equação de 2^o grau pode ser 0, 1 e 2. Bhramagupta afirma que o quadrado de negativo e de positivo é positivo e de zero é zero." (Carvalho (2004))

A fórmula que utilizamos hoje, que no Brasil é chamada inadequadamente de fórmula de Bhaskara, para resolver uma equação do segundo grau foi enunciada pela primeira vez por Sridhara (850-950) em um de seus trabalhos, mas os manuscritos deixados por ele acabaram não sendo preservados. Bhaskara II e outros citam o procedimento:

> "Multiplique ambos os lados da equação por uma quantidade igual a quatro vezes o coeficiente do quadrado da incógnita; adicione a ambos os lados uma quantidade igual ao quadrado do coeficiente da incógnita então extraia a raiz quadrada."(Carvalho (2004))

Vamos utilizar o processo descrito acima considerando a equação $ax^2 + bx = c$.

- 1º passo: Multiplicando ambos os membros por 4a, obtemos:

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac.$$

- 2º passo: Adicionando a ambos os membros o quadrado do coeficiente da quantidade desconhecida:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac \Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 + 4ac.$$

- 3º passo: Extraindo a raiz quadrada, temos que:

$$2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}.$$

Obtendo uma equação do primeiro grau cuja solução era conhecida.

2.1.5 Resolução pelos Árabes

Durante o século VIII, com o fortalecimento do império islâmico, a civilização árabe passou a se interessar por várias áreas das ciências entre elas a matemática. Os califas Al-Mansur (754 - 775), Harum Al-Rachid (786 - 809) e Al-Mamum (813 - 833) são considerados patronos da cultura abássida, durante os seus reinados muitos dos escritos deixados por civilizações mais antigas foram traduzidos. Além disso, Al-Mansur fundou uma biblioteca cujo acervo continha vários manuscritos de civilizações anteriores. Já Al-Mamum fundou em Bagdá uma academia chamada de “Casa da Sabedoria”.

Assim os árabes conseguiram traduzir as obras mais importantes deixadas por Euclides, Arquimedes, Apolônio, Herão, Ptolomeu e Diofanto. Com isso, os árabes obtiveram um maior conhecimento da matemática grega e puderam avançar em várias outras áreas entre elas a trigonometria e as equações algébricas.

Dentre os matemáticos árabes que contribuíram para esses avanços destacamos Al-Khowarizmi, Tabit Bem Qurra e Omar Khayyam.

O matemático árabe de maior importância foi Mohamed-ibn-Musa Al-Khowarizmi. Ele viveu entre 780 e 850, foi membro da Casa da Sabedoria, entre 813 e 833 escreveu o livro "Al Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa al-muqabala" cuja tradução ao pé da letra seria "Breve tratado sobre o cálculo de restauração e comparação". Mais tarde, essa obra foi traduzida como "Ciências das Equações", onde "jabr" significa somar termos iguais a ambos os membros de uma equação e "muqabala" significa subtrair termos a ambos os membros de uma equação. O principal objetivo dessas operações era eliminar termos negativos de um dos membros da equação, pois os números negativos ainda eram de difícil aceitação.

Foi a partir da operação al-jabr que, no século XIV, surgiu a palavra álgebra. As palavras algoritmo e algarismo têm sua origem a partir do nome Al-Khowarizmi. Por isso, Al-Khowarizmi é considerado o "Pai da Álgebra".

Al-Khowarizmi apresenta em sua obra regras para resolução de equações do primeiro e do segundo grau, ele dividiu essas equações em seis tipos:

1º tipo: Quadrados iguais a raízes: $ax^2 = bx$.

2º tipo: Quadrados iguais a números: $ax^2 = c$.

3º tipo: Raízes iguais a números: $bx = c$.

4º tipo: Quadrados mais raízes iguais a números: $ax^2 + bx = c$.

5º tipo: Quadrados mais números iguais a raízes: $ax^2 + c = bx$.

6º tipo: Raízes mais números iguais a quadrados: $bx + c = ax^2$.

Essa divisão se deve ao fato de que todos os coeficientes deveriam ser positivos. Segundo Roque (2012), Al-Khowarizmi possuía uma regra para cada tipo de equação que eram demonstradas por resultados obtidos no livro *Os Elementos* de Euclides.

Em sua obra Al-Khowarizmi trabalhava cada tipo de equação a partir de exemplos. Vejamos um exemplo:

"um mal e dez jidhr igualam trinta e nove denares." (Roque (2012))

Escrevendo numa linguagem atual teríamos uma equação do tipo 4 dada por $x^2 + 10x = 39$.

A regra de resolução descrita por Al-Khowarizmi foi:

"tome a metade da quantidade de jidhr; multiplique está quantidade por si mesma; some no resultado os adad; extraia a raiz quadrada do resultado; subtraia deste resultado a metade dos Jidhr, encontrando a solução."(Roque (2012))

Vejamos a solução na forma numérica:

$$\frac{10}{2} = 5 \Rightarrow 5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow 25 + 39 = 64 \Rightarrow \sqrt{64} = 8 \Rightarrow 8 - \frac{10}{2} = 8 - 5 = 3.$$

Encontrando o número 3 como solução da equação.

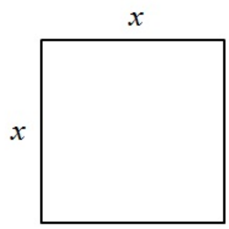
Escrevendo esse procedimento numa forma algébrica atual, temos que:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

Essa regra foi justificada geometricamente por Al-Khowarizmi. Iremos descrever abaixo todo o procedimento utilizado por ele usando uma simbologia que utilizamos atualmente.

1º passo: Considere um quadrado de lado x e área igual a x^2.

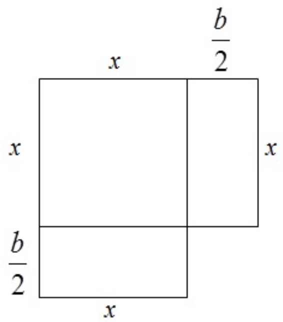
Figura 2.7: Quadrado de lado x.



Fonte: Autor 2013

2º passo: Some ao quadrado dois retângulos iguais cujos lados medem $\frac{b}{2}$ e x.

Figura 2.8: Polígono com área c.

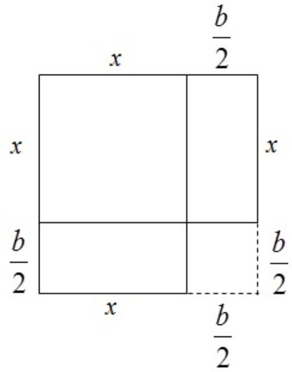


Fonte: Autor 2013

3º passo: Obtendo uma figura cuja área é igual a c.

4º passo: Completando a figura com um quadrado de lado $\frac{b}{2}$ e área $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, iremos obter um quadrado cuja área é igual a $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$.

Figura 2.9: Quadrado de lado $\left(x + \frac{b}{2}\right)$.



Fonte: Autor 2013

5º passo: Assim, temos que $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$. Portanto, $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$.

2.1.6 Resolução pelos Europeus

Até o século XII, a matemática na Europa tinha um nível de desenvolvimento muito baixo. Foi neste século, com o surgimento das cidades comerciais na Itália, que comerciantes passaram a visitar com mais frequência o Oriente e desta forma levando o conhecimento árabe para Europa. Obras como as de Al-Khowarizmi são traduzidas do árabe para o latim.

Um desses comerciantes que devemos destacar foi Leonardo de Pisa (1170 – 1250), que ficou mais conhecido como Leonardo Fibonacci, era um italiano que tinha conhecimento das línguas árabe e grega. Após regressar de uma viagem ao oriente, escreveu a sua principal obra *Líber abbaci* (1202) cujo conteúdo apresentava parte da aritmética e álgebra da civilização. Um das principais características dessa obra é a introdução do sistema de numeração hindu-arábico, que seria o marco para o avanço da matemática.

Na sua obra, Fibonacci além de estudar as equações de Al-Khowarizmi, ele também apresenta exemplos próprios onde ele já passa a considerar números negativos, o zero e números irracionais.

A partir de meados do século XV, as atividades científicas e culturais começam a se desenvolver na Europa. Foi durante o período renascentista da Europa, que se destacou o francês François Viète (1540-1603), um advogado, mas que durante o seu lazer dedicava-se a Matemática. Contribuindo para algumas áreas da Matemática, mas a sua principal contribuição foi a álgebra. Foi o primeiro a utilizar as consoantes para representar quantidades desconhecidas e também números conhecidos. Ele também desenvolveu um método para resolver equações do segundo grau conhecido como "método de Viète", tal método consiste em considerar duas novas variáveis u e v tais que, na equação $ax^2 + bx + c = 0$, x é igual a $u + v$.

Vejamos o método na prática:

Substituímos $x = u + v$ na equação $ax^2 + bx + c = 0$, obtemos:

$$a \cdot (u+v)^2 + b \cdot (u+v) + c = 0$$

$$a \cdot (u^2 + 2uv + v^2) + b \cdot (u+v) + c = 0$$

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0.(*)$$

Fazendo agora o coeficiente de v igual a zero, obtemos:

$$2au + b = 0 \Rightarrow u = \frac{-b}{2a}.$$

Substituindo o resultado acima em (*), temos que:

$$av^2 + a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0$$

$$av^2 = \frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{4a} - c$$

$$av^2 = \frac{2b^2 - b^2 - 4ac}{4a}$$

$$av^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, então $v = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Como $x = u + v$ a solução da equação será:

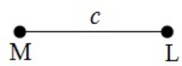
$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. (Obtendo assim a fórmula de Bhaskara)

Um outro matemático europeu que deu importantes contribuições na resolução de uma equação do segundo grau é o também francês René Descartes (1596 - 1650). Ele desenvolveu um método geométrico para calcular as raízes positivas de uma equação do segundo grau. Na obra "O discurso sobre o método" ele apresenta a solução geométrica das equações do tipo $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$.

Para resolver a equação do tipo $x^2 = bx+c^2$ ele utilizou uma construção geométrica obtida a partir dos seguintes passos:

1º passo: Constrói-se um segmento ML, de comprimento c;

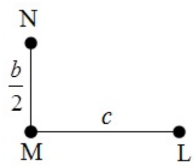
Figura 2.10: Segmento ML de comprimento c.



Fonte: Autor 2013

2º passo: Constrói-se agora um segmento MN com medida igual a $\frac{b}{2}$ e perpendicular a ML;

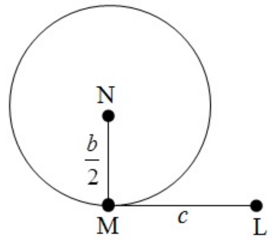
Figura 2.11: Segmentos MN e ML perpendiculares.



Fonte: Autor 2013

3º passo: Constrói-se agora um círculo com centro em N e raio MN;

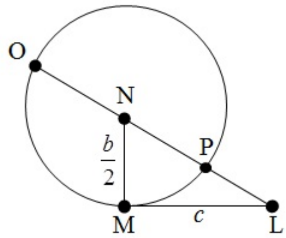
Figura 2.12: Círculo com raio MN.



Fonte: Autor 2013

4º passo: Traça-se uma reta ligando os pontos L e N que corta o círculo em O e P, com $OL = x$;

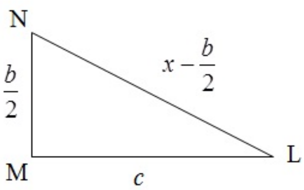
Figura 2.13: Círculo cortado por uma reta secante.



Fonte: Autor 2013

5º passo: Aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo MNL.

Figura 2.14: Triângulo retângulo MNL.



Fonte: Autor 2013

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

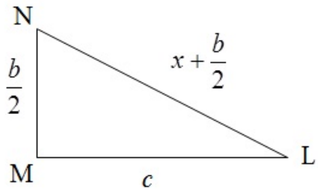
$$x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$x^2 - bx = c^2$$

$$x^2 = bx + c^2.$$

Para resolver a equação do tipo $x^2 = c^2 - bx$, utiliza-se a mesma figura admitindo que $LP = x$, obtendo um triângulo retângulo com novas medidas conforme podemos observar na figura abaixo:

Figura 2.15: Triângulo retângulo MNL.



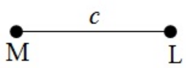
Fonte: Autor 2013

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$
$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$
$$x^2 + bx = c^2$$
$$x^2 = c^2 - bx.$$

Já para resolver as equações do tipo $x^2 = bx - c^2$ ele utilizou os seguintes passos:

1º passo: Constrói-se um segmento ML, de comprimento c;

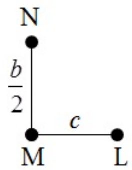
Figura 2.16: Segmento ML com comprimento c.



Fonte: Autor 2013

2º passo: Constrói-se agora um segmento MN com medida igual a $\frac{b}{2}$ e perpendicular a ML;

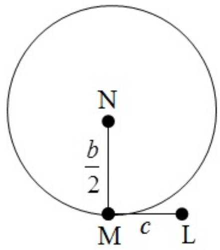
Figura 2.17: Segmentos perpendiculares MN e ML.



Fonte: Autor 2013

3º passo: Constrói-se agora um círculo com centro em N e raio MN;

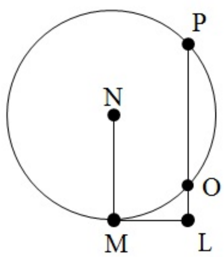
Figura 2.18: Círculo com raio MN.



Fonte: Autor 2013

4º passo: Traça-se uma reta do ponto M perpendicular a ML que irá cortar o círculo nos pontos O e P, com $MP = x$;

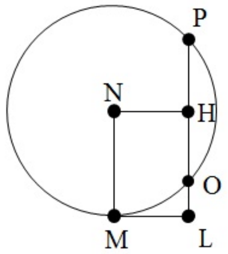
Figura 2.19: Círculo cortado por uma reta secante.



Fonte: Autor 2013

5º Passo: Construir o segmento NH paralelo a ML e perpendicular a PL.

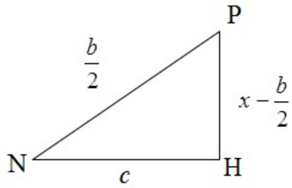
Figura 2.20: Segmento NH perpendicular ao segmento PL



Fonte: Autor 2013

6º passo: Aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo NHP, obtendo:

Figura 2.21: Triângulo retângulo NHP.



Fonte: Autor 2013

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + c^2$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2$$

$$x^2 - bx + c^2 = 0$$

$$x^2 = bx - c^2.$$

2.2 História das equações do terceiro grau

Segundo Lima (2002), o Frei Luca de Pacioli, renomado professor de Matemática de várias universidades da Itália, afirmava que era impossível haver uma regra para resolver uma equação do terceiro grau do tipo $x^3 + px = q$, que na época era lida “cubo e coisas igual a número”. Muitos matemáticos acreditavam na afirmação feita por Pacioli.

Mas, no início do século XVI, Scipione Del Ferro (1465-1526), professor da Universidade de Bolonha, foi o primeiro a encontrar uma fórmula envolvendo radicais para resolver uma equação de terceiro grau. Essa fórmula nunca foi publicada, ele apenas comunicou a Antonio Maria Fiore, que era um grande amigo.

Em 1535 Fiore desafia Niccolo Fontana (1499-1557), mais conhecido por Tartaglia, para uma disputa matemática. Esses desafios eram muito comuns na época e consistiam numa lista de problemas trocadas entre os competidores.

A lista apresentada por Fiore continha problemas envolvendo equações do terceiro grau, logo Tartaglia desconfiou que pudesse existir uma solução para tais equações. Os competidores tinham um prazo de 40 dias para resolver a lista proposta pelo oponente, oito dias antes do encerramento desse prazo, depois de várias tentativas, Tartaglia resolve a equação do terceiro grau, principalmente as do tipo $x^3 + px = q$, e vence o duelo com facilidade, pois o seu oponente não conseguiu resolver nenhum dos problemas proposto por ele. Mais uma vez a fórmula para resolver as equações do terceiro grau é mantida em segredo.

As notícias sobre o resultado desse duelo se espalharam muito rapidamente devido à natureza dos problemas chegando a Milão onde vivia o doutor Girolamo Cardano (1501-1576), que ficou muito curioso para saber como teriam conseguido resolver um problema que para Pacioli e outros era impossível.

Em 1539, Girolamo Cardano usando de todos os meios, principalmente a promessa de que nunca divulgaria a regra, obteve de Tartaglia a regra para resolver à equação do terceiro grau. Essa regra foi passada a ele sob a forma de versos enigmáticos, mas sem a demonstração.

Cardano e seu brilhante discípulo, Ludivico Ferrari (1522-1557), demonstraram a regra de Tartaglia para solução da equação $x^3 + px = q$.

Os estudos de Cardano, com a colaboração de Ferrari, conduziram a importantes avanços na teoria das equações, entre eles poderíamos citar o reconhecimento de raízes múltiplas, relação entre raízes e coeficientes e a aceitação das raízes negativas, irracionais e imaginárias.

Em 1545, Cardano publica o livro “Ars Magna”, que continha as soluções para os 13 tipos de equações separadas por capítulos. Isto provoca uma reação contrária de Tartaglia, que, em 1546, publica o livro “Quesiti et Inventioni Diverse”, no qual ele, além de apresentar soluções para vários pro-blemas que lhe foram propostos, ataca duramente Cardano pela quebra do juramento.

Segundo Roque (2012), Cardano nunca afirmou que era o descobridor do método, ele apenas descobriu uma forma geométrica de demonstrá-lo. Como podemos observar na citação abaixo:

> “No mais, quando entendi que a regra que Tartaglia havia fornecido tinha sido descoberta por mim a partir de uma demonstração geométrica, pensei que este seria o melhor caminho a seguir em todos os casos.”(Cardano)

2.2.1 Resolução das equações do terceiro grau

A regra de Cardano para resolver uma equação do terceiro grau foi enunciada da seguinte forma:

> “Eleve ao cubo a terça parte do número de coisas ao qual será somado o quadrado da metade do termo numérico da equação e extraia a raiz quadrada deste total que será usado, em dois momentos. Em um deles, adicione a metade do termo numérico da equação e no outro subtraia o mesmo número. Teremos então, um binomium e o seu apotome respectivamente. Subtraia a raiz cúbica do apotome da raiz cúbica do binomium e o resultado final é o valor da coisa.” (Roque (2012))

Considerando a equação do tipo $x^3 + px = q$ e escrevendo a regra descrita acima numa linguagem atual, obtemos:

1^{o} passo: $\left(\frac{p}{3}\right)^3$;

2^{o} passo: $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$;

3^{o} passo: $\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$;

4^{o} passo: $\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$(binomium) e $\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$ (apotome);

5^{o} passo: $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} - \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$.

Note que o quinto e último passo poderá ser reescrito da seguinte forma:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)} \Rightarrow$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}.$$

Como a regra acima é para uma equação cuja variável ao quadrado tem o coeficiente igual a zero, Cardano sugere que para as equações em que isso não ocorra, devemos fazer uma mudança de variável na equação, ou seja, substituímos $x = y - \frac{a}{3}$ na equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ obtendo assim uma equação do tipo $y^3 + py = q$.

Segundo Roque (2012), a demonstração geométrica proposta por Cardano é difícil de compreender. Ainda segundo os mesmos a demonstração proposta por Cardano seria o equivalente a regra do cubo da soma demons-trada geometricamente.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, apresentaremos o embasamento teórico da nossa proposta que estará fundamentada na teoria construtivista e no método montessoriano.

3.1 Construtivismo

Construtivismo é uma das correntes teóricas empenhadas em explicar como a inteligência humana se desenvolve partindo do princípio de que o desenvolvimento da inteligência é determinado pelas ações mútuas entre o indivíduo e o meio.

O construtivismo propõe que o aluno, a partir de suas ações, participe ativamente do seu próprio aprendizado, através da experimentação, das pesquisas em grupos, do estímulo ao desenvolvimento do raciocínio entre outras interações que eles possam ter com objetos, espaço e pessoas.

A percepção e o desenvolvimento de alguns conceitos como o de proporcionalidade, quantidade, volume, entre outros, surgem a partir da interação do aluno com o meio em que ele vive.

3.2 O Método Montessoriano

> "Eu estudei a criança. Foram minhas observações, pesquisas e conclusões sobre o que a criança expressou que serviram de base para o que é chamado de

método montessori." (Maria Montessori)

O método montessoriano foi inicialmente criado para ser aplicado a crianças com necessidades especiais mais tarde quando aplicado a crianças sem nenhum tipo de necessidade especial obteve-se resultados surpreendentes. Uma das principais características desse método de ensino é a utilização de atividades motoras e sensoriais, aplicadas principalmente em crianças das séries iniciais. Esse é um método de caráter individual com atividades específicas e atraentes que possam estimular a memória e percepção da criança. Para isso, utiliza-se de matérias especiais desenvolvidos por Maria Montessori.

No método montessoriano a criança é livre para escolher a atividade que irá desenvolver dentro daquelas que já estão preestabelecidas, são atividades diferentes, mas que desenvolvem uma mesma habilidade.

Segundo o site do Centro de Educação Montessoriana do Pará (2013), poderíamos destacar como as principais características do método montessoriano:

- Liberdade: A liberdade é um exercício constante, pois os alunos podem escolher os materiais e as atividades que eles irão trabalhar, de acordo com o seu ritmo, respeitando o outro e o ambiente.

> "O Homem é tanto mais livre quanto maior for a sua capacidade de escolher as coisas que lhe fazem bem." (Maria Montessori)

- Ambiente: O ambiente deverá ser organizado e preparado, de acordo com a necessidade, para que os alunos possam desenvolver sua aprendizagem através de suas potencialidades.

- Normalização: A normalização é a característica principal da educação, com ela o aluno é capaz de se autodisciplinar e assim desenvolver suas atividades de forma espontânea.

> “A normalização oferece condições para que a criança encontre o silêncio interior”. (Maria Montessori)

- Educação para a vida: O método montessoriano durante todas as etapas da educação está preocupado em criar atividades para os conteúdos que possam ser associadas ao cotidiano da criança. Formando cidadãos críticos e conscientes do seu papel na sociedade.

3.3 Materiais Didáticos Montessorianos

Para desenvolver o seu método Maria Montessori criou uma série de cinco grupos de materiais didáticos, são eles:

1. Exercícios para a vida cotidiana;

2. Material sensorial;

3. Material de linguagem;

4. Material de matemática;

5. Material de ciências.

Estes materiais são compostos por peças sólidas de diversos tamanhos e formas: caixas para abrir, fechar e encaixar; botões para abotoar; série de cores, de tamanhos, de formas e espessuras diferentes. Coleções de superfícies de diferentes texturas e campainhas com diferentes sons.

Dentre os materiais de matemática desenvolvidos por Maria Montessori destacamos o Material das Contas e o Material Dourado.

3.3.1 Material das Contas

Maria Montessori definiu assim o material das contas:

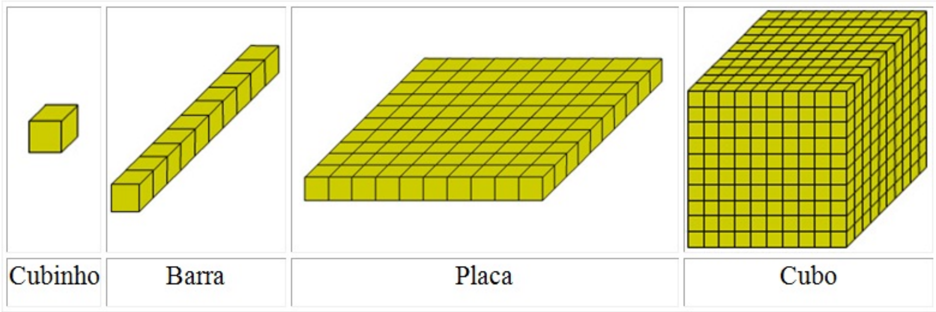
> *"Preparei também, para os maiorezinhos do curso elementar, um material destinado a representar os números sob formas geométricas. Trata-se do excelente material chamado material das contas. As unidades são representadas por pequenas contas amarelas; a dezena é formada por uma barra de dez contas enfiadas num arame bem duro. Esta barra é repetida dez vezes em dez outras barras ligadas entre si, formando um quadrado, "o quadrado de dez", somando o total de cem. Finalmente, dez quadrados sobrepostos e ligados formando um cubo, o "cubo de dez", isto é, 1000".*

3.3.2 Material Dourado

O material dourado foi desenvolvido a partir do material das contas, onde tais contas se transformaram em cubos. O material dourado é composto por cubinhos, barras, placas e cubos. Conforme podemos observar na figura abaixo, o cubo é formado por 10 placas, a placa é formada por 10 barras, a barra é formada por 10 cubinhos.

O material dourado pode ser aplicado para facilitar a compreensão de diversos conteúdos matemáticos, entre eles destacamos os algoritmos da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão entre números. Por exemplo, a tabela abaixo mostra a relação entre as peças que compõem o material dourado e o valor posicional do algarismo no nosso sistema de numeração. Este material será base para nossa proposta que descreveremos no capítulo 4.

Figura 3.1: Peças do Material Dourado.



Fonte: Autor 2013

Tabela 3.1: Valores representativos do material dourado.

PEÇA	SIGNIFICADO
Cubinho	Uma unidade
Barra	Uma dezena
Placa	Uma centena
Cubo	Uma unidade de milhar

Fonte: Autor 2013

3.4 A importância do laboratório de Matemática na aprendizagem de Matemática

O laboratório de matemática é uma ferramenta indispensável para facilitar a compreensão e melhorar o aprendizado do aluno. Por exemplo, o aluno que olha para as operações de polinômios se depara com uma porção de letras e até mecanicamente, sem compreender muito bem o que está fazendo, automatiza a solução destas operações.

Nesse sentido, poderíamos utilizar o laboratório de matemática para explicar melhor aos nossos alunos a diferença entre os termos de uma expressão polinomial associando cada termo semelhante a figuras ou objetos iguais e termos não semelhantes a figuras ou objetos diferentes.

Todo professor já deve ter sido questionado por algum ou vários alunos perguntando: "por que estamos estudando isso?". O laboratório pode ser uma boa ferramenta para responder a essa pergunta.

3.5 Materiais manipuláveis no ensino de Matemática

A utilização de jogos, software, materiais concretos e outros recursos que facilitem a compreensão dos conteúdos se tornam ferramentas indispensáveis no mundo cada vez mais atraente, o que acaba tornando a sala de aula e livros didáticos algo quase que ultrapassados. A sala de aula é um ambiente propício à aprendizagem, onde podemos trocar experiências, reconhecer e criar novas técnicas de ensino. Ela deve ser vista como um laboratório onde a observação e a pesquisa são constantes.

O fato de um professor usar um notebook, um projetor multimídia ou uma lousa eletrônica não significa que o aluno irá compreender melhor os conceitos abordados na sala de aula. Ele apenas está dando cores a algo que antes era transmitido em preto e branco. Se todo esse aparato não for utilizado de forma adequada, a sala de aula será parecida com uma sala de cinema onde o público (o aluno) estará assistindo a um filme que ele não tem interesse em assistir.

Todos esses recursos tecnológicos quando utilizados apenas para a reprodução do material não tem significado diferente da aula tradicional. Apesar desse método atender a uma demanda pequena da turma, eles devem ser utilizados para chamar a atenção e envolver o aluno no processo de aprendizagem. Muitos conceitos matemáticos são difíceis de serem compreendidos sem uma maior interatividade entre eles e a realidade do aluno.

O material concreto então irá tornar alguns conceitos matemáticos que não ficaram bem compreendidos no papel em algo que pode ser manipulado e visualizado com as mãos do próprio aluno.

Dentre tantos os materiais concretos já existentes atualmente queremos destacar o material criado pela médica italiana Maria Montessori conhecido como material dourado, tal material é utilizado para compreensão de alguns conceitos matemáticos tais como números decimais, potenciação, área, volume, entre outros. Esse material que será base para a nossa proposta.

4 APRESENTAÇÃO DA PROPOSTA

Como vimos no capítulo 2 deste trabalho, as civilizações mais antigas tinham como fonte de demonstração a prática geométrica já que a simbologia algébrica que utilizamos hoje não fazia parte da prática matemática dessas civilizações.

Atualmente, a demonstração de uma fórmula, de um teorema, enfim de algum resultado matemático, é feita de forma algébrica. Com isso, a geometria muitas vezes é utilizada para facilitar a compreensão do resultado não sendo explorada como poderia. Isto se deve ao fato de que alguns resultados não podem ser demonstrados apenas com argumentos geométricos.

Em relação à resolução de uma equação do segundo grau, por exemplo, alguns professores seguem as instruções de alguns livros didáticos e ainda aplicam mesmo que de forma meramente ilustrativa a resolução geométrica de completar quadrados. Esta é uma forma mais geral, e é aplicada a solução de uma equação do segundo grau encontrando suas raízes. O grande problema desse método é que às vezes o aluno irá trabalhar com operações de potenciação e radiciação com números decimais e isso é um fator complicador para alguns alunos, mesmo considerando que a solução que queremos encontrar pertença aos números racionais. Além disso, ele terá que utilizar a álgebra para determinar a solução da equação.

Pensando nisso neste capítulo, vamos apresentar uma proposta para resolver equações do segundo e do terceiro graus, onde devemos aplica-la, quais são os nossos objetivos e as demonstrações matemáticas desta proposta.

4.1 Descrevendo a proposta

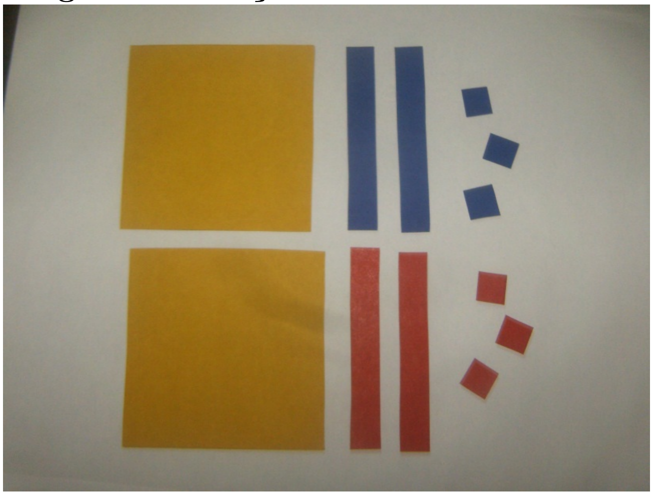
Nossa proposta é apresentar um método para que o aluno possa determinar as raízes de uma equação do segundo e terceiro grau a partir de um material concreto. Nesse sentido, o aluno irá construir, com as peças que representarão os termos de uma equação, paralelepípedos e a partir das suas dimensões determinarão as raízes da equação. Com isso, pretendemos que essa proposta seja aplicada a partir do 8º ano do ensino fundamental.

4.2 Investigando a proposta

Para desenvolver melhor o método e entender as dificuldades que pudessem acontecer, resolvemos aplicar uma atividade, sem que os alunos soubessem qual era o propósito dela na realidade, cujo objetivo era simplesmente montar retângulos com as peças entregues a eles.

Para aplicação desta atividade comprei cartolinas guache amarela, azul e vermelha e com elas criei quadrados maiores medindo 10 cm por 10 cm, retângulos medindo 10 cm por 1,5 cm e quadrados menores medindo 1,5 cm por 1,5 cm conforme figura abaixo. O objetivo dessas medidas é que eles encaixassem as peças da forma conveniente para o método que pretendemos desenvolver e não um retângulo qualquer.

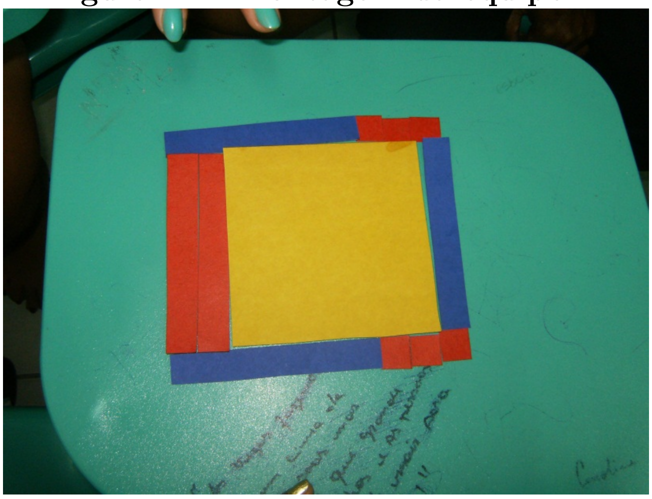
Figura 4.1: Peças feitas com cartolina.



Fonte: Autor 2013

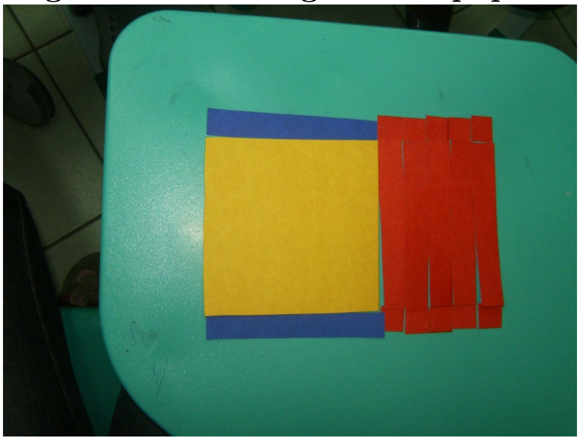
Dividi a turma em várias equipes de tal forma que uma não pudesse interagir com a outra e, de forma aleatória, comecei a distribuir os jogos de peças, a partir das equações que eu já havia pensado, para que eles montassem os retângulos, os resultados de algumas equipes estão representados nas fotos abaixo.

Figura 4.2: Montagem da equipe 1.



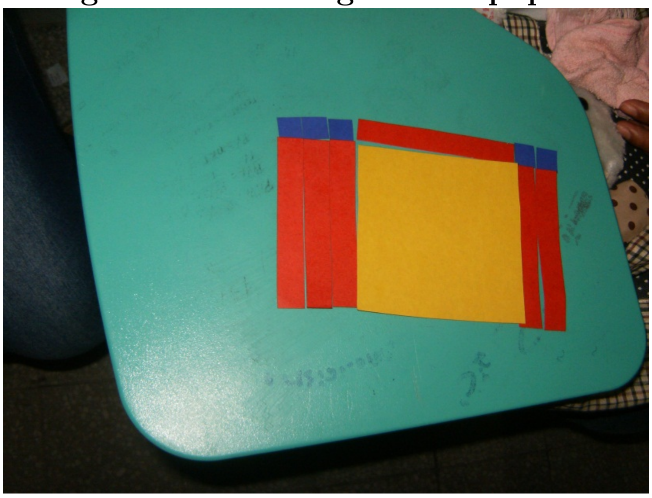
Fonte: Autor 2013

Figura 4.3: Montagem da equipe 2.



Fonte: Autor 2013

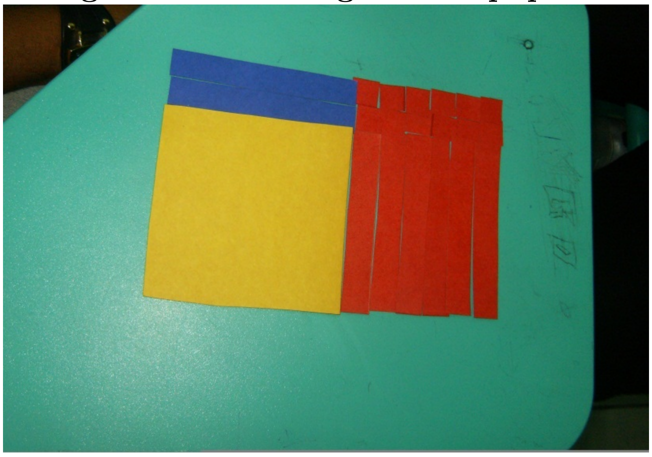
Figura 4.4: Montagem da equipe 3.



Fonte: Autor 2013

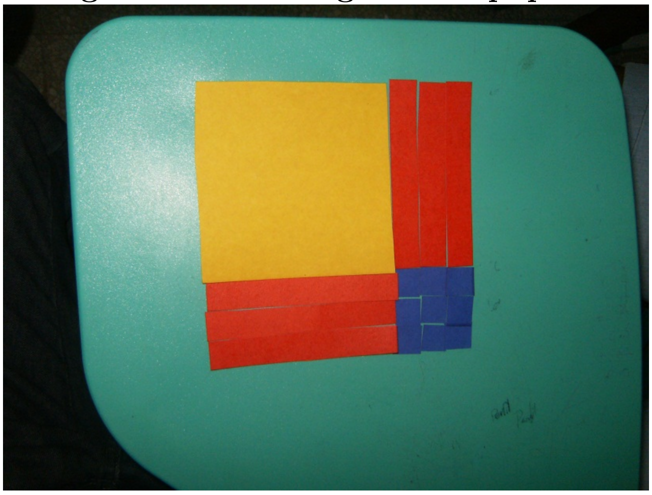
Algumas equipes apresentaram dificuldades e precisaram de algum tempo, mas conseguiram montar o primeiro retângulo e as dificuldades apresentadas por essas equipes foram diminuindo com a prática da montagem. Outras equipes tiveram menos dificuldades e conseguiam montar com uma boa velocidade. Como podemos perceber nas fotos, as equipes montavam os retângulos sem se preocupar com a estética da figura, mas uma equipe me chamou a atenção e de forma intuitiva realizou a tarefa apresentando sua figura com uma boa estética, tais como elementos com tamanhos iguais juntos ou de cores iguais também juntos (ver figuras abaixo).

Figura 4.5: Montagem da equipe 4.



Fonte: Autor 2013

Figura 4.6: Montagem da equipe 4.



Fonte: Autor 2013

No experimento realizado com esse material percebi que os erros mais comuns apresentados pelas equipes na montagem eram o de deixar espaços entre algumas peças para obter o retângulo, montar peças sobrepostas uma das outras ou ultrapassar com alguma peça o limite de um dos lados do retângulo.

É importante nesse momento deixar registrado que essa atividade aplicada não tem como objetivo coletar dados ou testar se o método é eficiente na aprendizagem do aluno, mas apenas para modelar o método. Por isso, não existe a necessidade de apresentar gráficos estatísticos, questionários feitos aos alunos, ou seja, qualquer documento que garanta os resultados que estão sendo citados aqui.

Com isso, podemos percerber que a proposta era viável e a minpulação do material era de fácil compreensão bastava agora criar uma metodologia, que iremos apresentar no capítulo 5, para a nossa proposta.

4.3 Relação entre a proposta e a forma fatorada de uma equação polinomial

O italiano Raphael Bombelli (1526-1572), no seu livro de Álgebra, percebe de forma melhor os números complexos e concluiu que a equação do terceiro grau tinha três raízes e a do quarto possuía quatro raízes.

Mais tarde, Leonhard Euler (1707-1783), através dos seus estudos com os números complexos trouxe contribuições importantes na teoria das equações polinomiais. Euler descobriu que o número de raízes n-ésimas de qualquer número complexo não nulo, seja ele real ou um número imaginário, é exatamente igual a n.

Com isso, vários matemáticos tentaram provar que uma equação polinomial de grau n tem n raízes, conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra, nenhum deles obteve sucesso. A primeira vez que o Teorema Fundamental da Álgebra foi demonstrado foi na tese de doutorado em matemática de Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

A partir da demonstração desse teorema podemos concluir que uma equação polinomial de grau n tem n raízes e é escrita de uma única forma fatorada.

Considerando que as raízes da equação $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0$ são r_1, r_2, ..., r_{n-1}, r_n, então a forma fatorada dessa equação é:

$$(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot ... \cdot (x - r_{n-1}) \cdot (x - r_n) = 0.$$

Como estamos apresentando uma proposta para resolver equações do segundo e terceiro graus que tenha raízes racionais. Vamos apresentar agora, a forma fatorada dessas equações com suas raízes racionais.

Suponha que as raízes racionais de uma equação do segundo grau sejam $r_1 = \frac{a_1}{b_1}$ e $r_2 = \frac{a_2}{b_2}$, com $a_1, b_1, a_2, b_2 \in Z$ e $b_1, b_2 \neq 0$. Substituindo essas raízes na forma fatorada, temos que:

$$
\begin{aligned}
&(x - r_1) \cdot (x - r_2) = 0 \\
&\left(x - \tfrac{a_1}{b_1}\right) \cdot \left(x - \tfrac{a_2}{b_2}\right) = 0 \\
&\left(\tfrac{b_1 x - a_1}{b_1}\right) \cdot \left(\tfrac{b_2 x - a_2}{b_2}\right) = 0 \\
&(b_1 x - a_1) \cdot (b_2 x - a_2) = 0
\end{aligned}
$$

Consideremos um retângulo cujos lados são $b_1 x - a_1$ e $b_2 x - a_2$. A área desse retângulo é representada pelo produto desses dois lados, ou seja:

$$A = (b_1 x - a_1) \cdot (b_2 x - a_2)$$

Notem que a expressão que representa a área do retângulo é a mesma que representa a forma fatorada da equação.

Fazendo o mesmo para as equações do terceiro grau. Vamos admitir que as raízes racionais de uma equação de terceiro grau sejam $r_1 = \frac{a_1}{b_1}$, $r_2 = \frac{a_2}{b_2}$ e $r_3 = \frac{a_3}{b_3}$, com $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in Z$ e $b_1, b_2, b_3 \neq 0$. Substituindo essas raízes na forma fatorada, temos que:

$$
\begin{aligned}
&(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) = 0 \\
&\left(x - \tfrac{a_1}{b_1}\right) \cdot \left(x - \tfrac{a_2}{b_2}\right) \cdot \left(x - \tfrac{a_3}{b_3}\right) = 0 \\
&\left(\tfrac{b_1 x - a_1}{b_1}\right) \cdot \left(\tfrac{b_2 x - a_2}{b_2}\right) \cdot \left(\tfrac{b_3 x - a_3}{b_3}\right) = 0 \\
&(b_1 x - a_1) \cdot (b_2 x - a_2) \cdot (b_3 x - a_3) = 0
\end{aligned}
$$

Consideremos um paralelepípedo cujas dimensões são $b_1x - a_1$, $b_2x - a_2$ e $b_3x - a_3$. O volume desse paralelepípedo é representado pelo produto dessas três dimensões, ou seja:

$$V = (b_1 x - a_1) \cdot (b_2 x - a_2) \cdot (b_3 x - a_3)$$

Notem que a expressão que representa o volume do paralelepípedo é a mesma que representa a forma fatorada da equação.

Portanto, podemos admitir que é possível determinar as raízes racionais de uma equação do segundo grau a partir da construção de retângulos e as raízes racionais de uma equação do terceiro grau a partir da construção de paralelepípedos.

4.4 Objetivos da proposta

Para que o aluno possa resolver uma equação a partir do material concreto ele deverá:

- Conhecer o significado de cada elemento do material concreto;

- Representar uma equação do segundo e terceiro grau com o material concreto;

- Manipular os elementos do material concreto que representam uma equação para construir um paralelepípedo;

- Analisar as dimensões do paralelepípedo construído;

- Determinar as raízes racionais da equação a partir das dimensões do paralelepípedo.

5 METODOLOGIA

Neste capítulo, iremos apresentar as adaptações que teremos que fazer no material dourado para que possamos resolver as equações do segundo e do terceiro grau a partir dele.

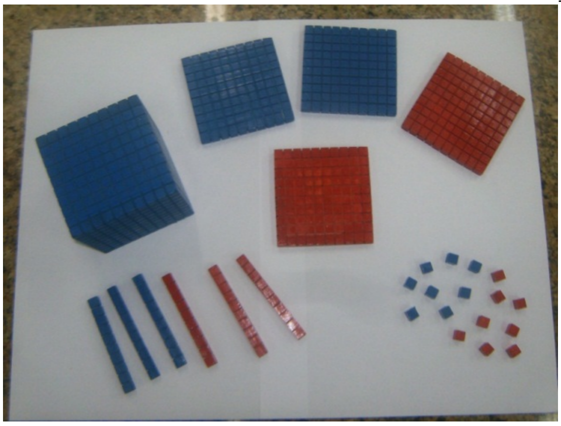
Descreveremos como o aluno representará as equações do segundo e do terceiro graus a partir do material dourado adaptado, como ele irá manipular o material e como determinar a solução a partir da construção geométrica que ele irá obter.

5.1 Os Elementos envolvidos e seus significados

Como vimos no capítulo anterior iremos utilizar o material dourado criado por Maria Montessori para resolução das equações do segundo e do terceiro graus. Neste sentido, iremos fazer duas adaptações ao material dourado, a primeira será em relação às cores.

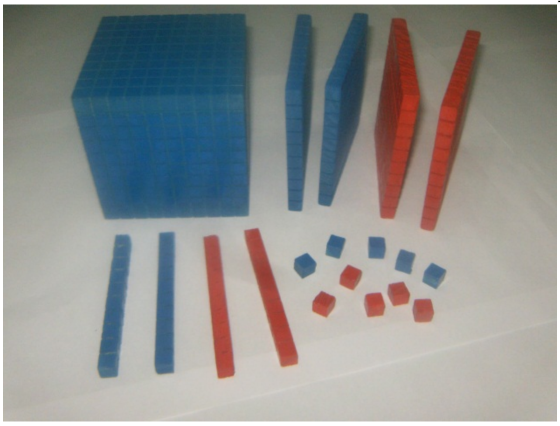
Tal material geralmente é comercializado nas cores amarela, dourada ou madeira. Na nossa proposta o material terá as cores vermelha, que representará valores negativos, e azul, que representará valores positivos.

Figura 5.1: Foto do material dourado adaptado.



Fonte: Autor 2013

Figura 5.2: Foto do material dourado adaptado.



Fonte: Autor 2013

A segunda modificação está relacionada ao significado de cada peça. Originalmente elas são utilizadas para representar as unidades (cubinhos), dezenas (barras), centenas (placas) e unidades de milhar (cubo). Como todos os elementos que formam o material dourado têm o formato de paralelepípedo, ou seja, são sólidos que têm comprimento, largura e altura. Iremos adotar medidas para os sólidos que formam o material dourado. Neste sentido, o cubinho terá aresta medindo 1, a barra terá medidas 1 por 1 por x, a placa terá medidas 1 por x por x e o cubo terá arestas medindo x.

Calculando o volume de cada uma das peças que formam o material dourado a partir das medidas que adotamos para cada um deles, teremos que o volume do cubinho será igual a 1 unidade de capacidade, o da barra será igual a x unidades de capacidade, o da placa será de x^2 unidades de capacidade e o do cubo será de x^3 unidades de capacidade.

Portanto, as modificações que propomos na segunda etapa estão apresentadas na tabela abaixo, indicando o novo significado de cada peça.

Tabela 5.1: Valores representativos do material dourado na proposta apresentada.

PEÇA	SIGNIFICADO
Cubinho	Termo independente da equação
Barra	Termo de grau um da equação
Placa	Termo de grau dois na equação
Cubo	Termo de grau três na equação

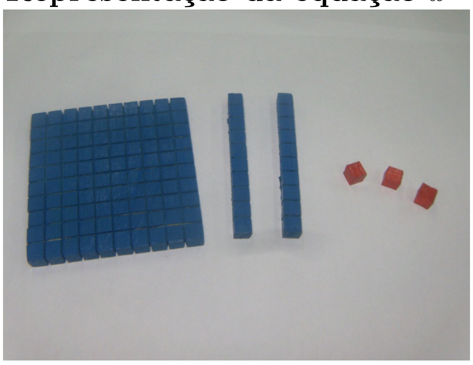
Fonte: Autor 2013

Neste momento, propomos que o professor desenvolva algumas seções de atividades para que o aluno possa representar algumas equações com o material e vice-versa, ou seja, que ele também possa escrever a equação a partir das peças fornecidas a ele.

Como sugestão de atividade para o professor, apresentamos abaixo dois exemplos de como iremos representar uma equação do segundo ou do terceiro grau com o material proposto.

Exemplo 1: A equação $x^2 + 2x - 3 = 0$ representada a partir do material dourado proposto seria:

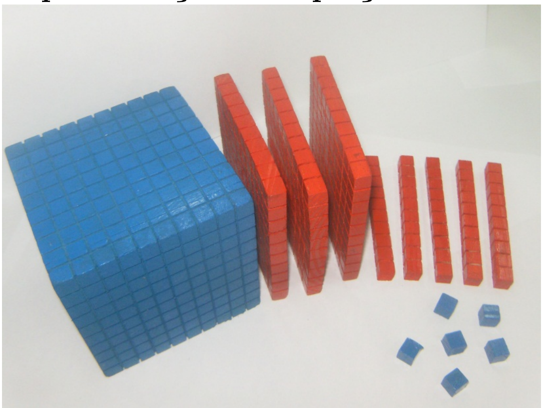
Figura 5.3: Representação da equação $x^2 + 2x - 3 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Exemplo 2: A equação $x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 0$ representada a partir do material dourado proposto seria:

Figura 5.4: Representação da equação $x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 0$.



Fonte: Autor 2013

5.2 Resolvendo equações do segundo grau utilizando o material dourado

Agora que o aluno já conhece todos os elementos do material dourado proposto e já sabe representar a equação do segundo grau através do material dourado, passamos para etapa mais interessante que seria a apresentação da solução das equações através da manipulação do material representativo da equação.

Como vimos no capitulo 4, na investigação da proposta, a atividade que os alunos realizaram com os recortes de cartolinas geraram retângulos mais de forma desorganizada, apenas algumas equipes tiveram um olhar diferenciado em relação a estética da figura. Neste momento, o papel do professor é importante para que o aluno possa compreender como ele irá manipular as peças.

Neste momento, é interessante estabelecer algumas etapas que acreditamos que será a sequência didática que o professor deverá seguir para que o aluno possa determinar, ao final delas, as raízes da equação do segundo grau. Em relação ao tempo e/ou quantidade de atividades que o professor irá desenvolver em cada uma destas etapas, acreditamos que deverá ser de acordo com a turma ao qual ele estará desenvolvendo a proposta. Vejamos quais são essas etapas:

- 1ª Etapa: Apresentação do material dourado com o significado de cada peça e as cores que propomos:

  Nesse caso, o professor apresentará o significado seguindo o que propomos na tabela 5.1. Já em relação às cores temos a distinção entre termos positivos (peças azuis) e negativos (peças vermelhas).

- 2ª Etapa: Representação das equações do segundo grau com o material dourado proposto;

  Neste momento, o professor apresentará várias equações aos alunos e estes deveram apresentar as peças do material que representam a equação.

- 3ª Etapa: Utilizar a simbologia algébrica para escrever a equação do segundo grau a partir do material dourado;

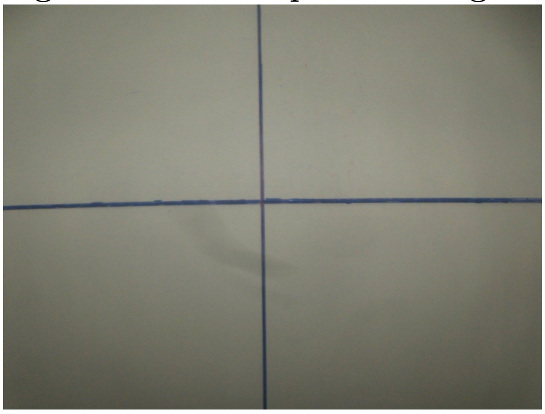
  A terceira etapa será a volta da segunda etapa, ou seja, o professor apresentará as peças e o aluno descreverá a equação numa simbologia algébrica.

- 4ª Etapa: Organizar o plano onde montaremos o retângulo;

  Nessa etapa, o professor deverá desenhar sobre o plano, onde devemos construir o retângulo, duas linhas perpendiculares (ver figura abaixo), que dividirá o plano de montagem em quatro regiões. O objetivo dessa divisão é orientar o aluno na distribuição das peças. Conforme vimos na atividade proposta no capítulo anterior os alunos montaram os retângulos mais as peças ficaram distribuídas aleatoriamente.

- 5ª Etapa: Exemplificar como as peças deveram ser distribuídas nas quatro regiões;

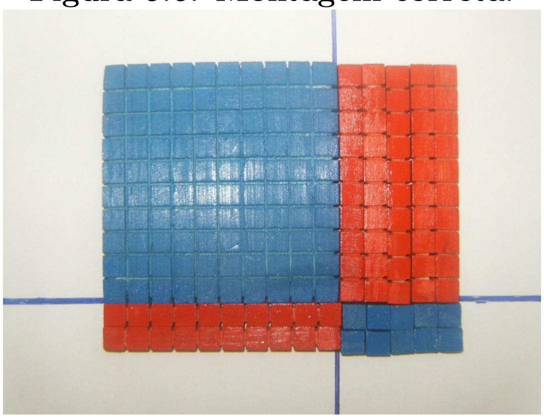
Figura 5.5: Plano para montagem.



Fonte: Autor 2013

Agora, o professor deverá mostrar como o material deve ser manipulado nas quatro regiões determinadas pelas linhas perpendiculares. Explicar através de exemplos que em cada região deverá ficar um único tipo de peça e de mesma cor. Além disso, as placas e os cubinhos devem ocupar regiões do plano que estão opostas pelo vértice. Na sequência, apresentamos dois retângulos que estão montados com as peças do material dourado.

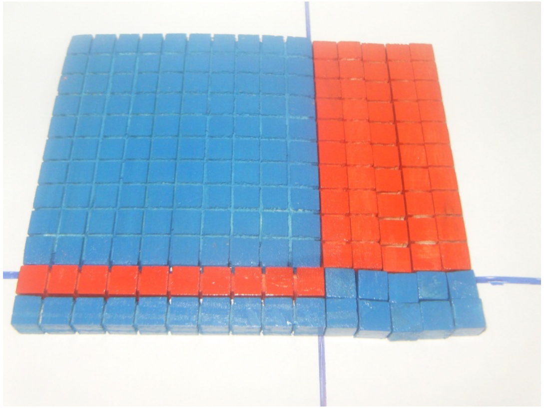
Figura 5.6: Montagem correta.



Fonte: Autor 2013

Como podemos observar na figura 5.6 em cada quadrante existem peças iguais e de mesma cor. Além disso, podemos observar que para montar o retângulo as placas e os cubinhos devem estar oposto pelo vértice em relação ao plano de montagem. Esta será mais uma condição que devemos estabelecer no início para facilitar a montagem do retângulo por parte do aluno.

Figura 5.7: Montagem incorreta.



Fonte: Autor 2013

Notem que na figura 5.7 no terceiro quadrante existem duas barras sendo uma azul e a outra vermelha, segundo o que enunciamos anteriormente isso não pode ocorrer dentro de um mesmo quadrante. Por isso, a montagem está incorreta.

- 6ª Etapa: Dividir as equações em vários tipos;

O principal objetivo dessa divisão é que o aluno consiga se familiarizar com o método criando a segurança necessária para resolução da equação. Outro detalhe importante nessa divisão é que dependendo dos coeficientes da equação, iremos encontrar o retângulo somente com as peças fornecidas pela equação ou teremos que acrescentar mais peças as que foram fornecidas pela equação para obter o retângulo. A divisão que propomos ao professor está apresentada na tabela abaixo.

Tabela 5.2: Tipos de equações do segundo grau.

TIPO	EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU
Tipo 1	Equações completas com todos os coeficientes positivos.
Tipo 2	Equações completas com os coeficientes a e c positivos e b negativo.
Tipo 3	Equações incompletas em c.
Tipo 4	Equações completas com coeficiente c negativo e incompletas em b.

Fonte: Autor 2013

- 7ª Etapa: Montar o retângulo;

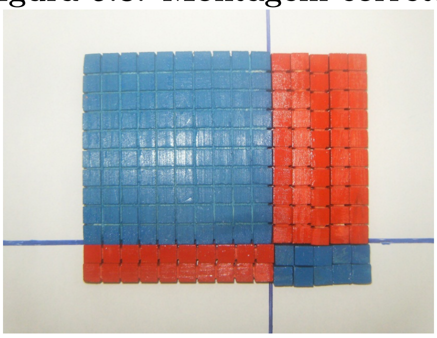
Agora, o professor irá apresentar os procedimentos para montagem do retângulo de acordo com o tipo de equação do segundo grau que propomos. Faremos o detalhamento desses procedimentos na próxima seção.

- 8ª Etapa: Identificar as raízes da equação pelo retângulo montado;

Está será nossa última etapa, após a montagem do retângulo o aluno poderá utilizar o recurso algébrico para determinar as raízes da equação. Como vimos no capítulo anterior, a decomposição da área do retângulo representa a forma fatorada da equação. Assim o aluno que igualar cada lado do retângulo a zero determinará as duas raízes da equação. Mas, nosso objetivo é que ele não utilize recursos algébricos para determinar as raízes.

Nesse caso, o professor deverá explicar ao aluno que a solução é dada pelo número de barras que acrescentamos ao lado da placa com o sinal oposto. A demonstração deste fato é o procedimento algébrico que explicamos acima. Retomando a figura 5.6 podemos perceber que aos lados da placa foram acrescentadas duas placas vermelhas (representando - 2) e cinco placas vermelhas (representando - 5).

Figura 5.8: Montagem correta.



Fonte: Autor 2013

Portanto, as raízes da equação representada por esse retângulo é 2 e 5.

Agora que finalizamos todas as etapas da nossa proposta, vamos estudar a resolução de cada tipo de equação sugerida aplicando o método que está sendo proposto nesse trabalho.

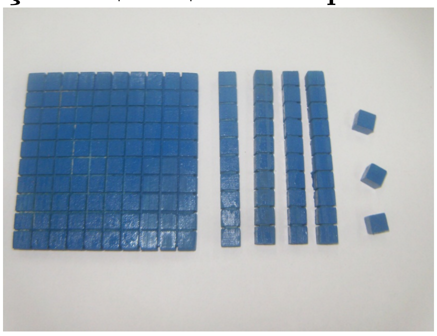
5.2.1 Equações do tipo 1

Nesse tipo de equação, o retângulo é montado utilizando as peças obtidas de acordo com a equação, caso o retângulo não possa ser montado significa dizer que a equação não possui raízes racionais. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Quais são as raízes da equação $x^2 + 4x + 3 = 0$?

Solução: A equação representada com o material seria:

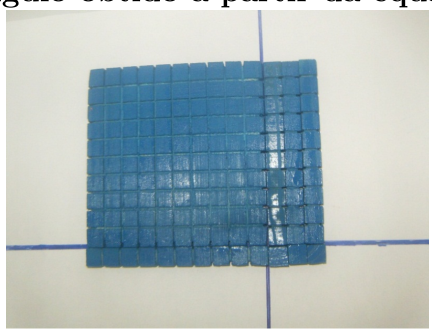
Figura 5.9: Equação $x^2 + 4x + 3 = 0$ representada no material.



Fonte: Autor 2013

Agora vamos montar um retângulo com essas peças, obtendo:

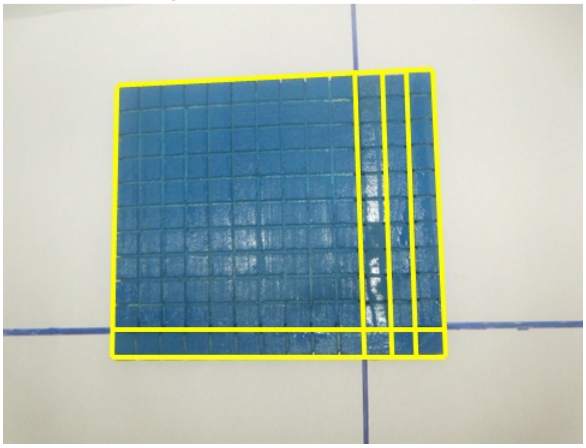
Figura 5.10: Retângulo obtido a partir da equação $x^2 + 4x + 3 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Vamos analisar o retângulo montado:

Figura 5.11: Solução geométrica da equação $x^2 + 4x + 3 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Notem que a partir da análise feita e considerando as medidas de cada sólido, obtemos um retângulo cujos lados medem $x + 3$ e $x + 1$. A área desse retângulo será a forma fatorada da equação estudada, ou seja:

$$A = (x + 1) \cdot (x + 3).$$

Fazendo a área igual a zero, obtemos:

$$(x + 1) \cdot (x + 3) = 0.$$

Agora, para determinar as raízes da equação basta igualar cada fator a zero, obtendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array} \right. .$$

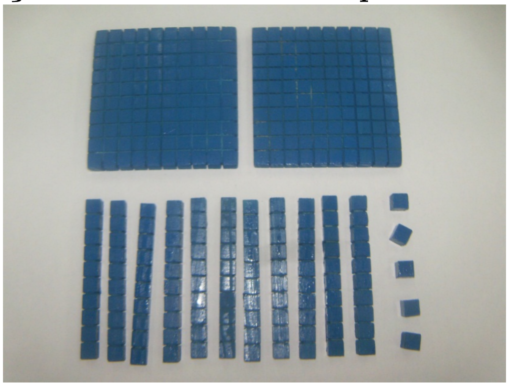
Fazendo uma observação apenas no retângulo obtido poderíamos determinar a solução sem a necessidade da utilização da área ou da forma fatorada, bastava observar quanto foi acrescentado a cada lado do retângulo e suas raízes serão esses números com os sinais opostos.

Vamos verificar isso em outros exemplos:

Exemplo 2: Determine o conjunto solução da equação $2x^2 + 11x + 5 = 0$.

Solução: A equação representada pelo material será:

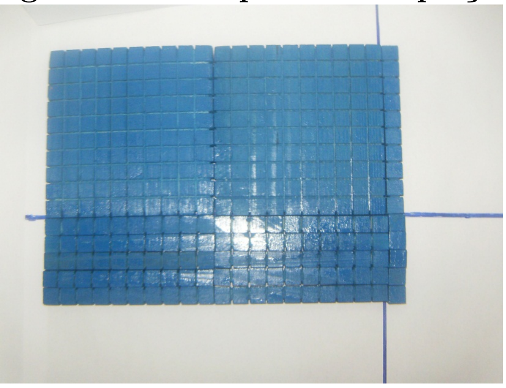
Figura 5.12: Equação $2x^2 + 11x + 5 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

Montando um retângulo com essas peças, obtemos:

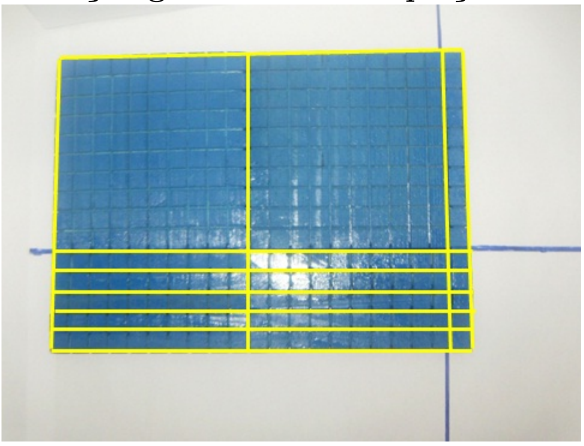
Figura 5.13: Retângulo obtido a partir da equação $2x^2 + 11x + 5 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Vamos analisar o retângulo acima:

Figura 5.14: Solução geométrica da equação $2x^2 + 11x + 5 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Nesse caso, obtemos um retângulo cujos lados medem $2x + 1$ e $x + 5$. Assim, temos que:

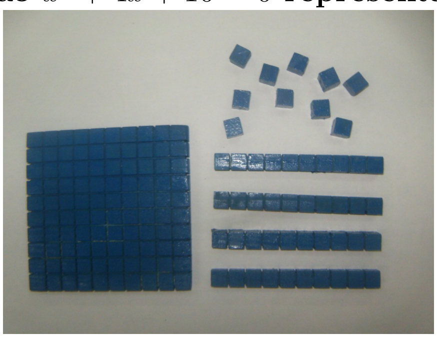
$$A = (2x+1)\cdot(x+5) \Rightarrow (2x+1)\cdot(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ x = -5 \end{cases}.$$

Analisando apenas a figura, podemos observar que ao lado x acrescentamos + 5, isso significa que uma das raízes será – 5, e ao lado $2x$ acrescentamos + 1, isso significa que será – 1 divido por 2,ou seja, $\frac{-1}{2}$.

Exemplo 3: Quais são os números racionais que satisfazem a equação $x^2 + 4x + 10 = 0$?

Solução: A equação nos fornece as seguintes peças:

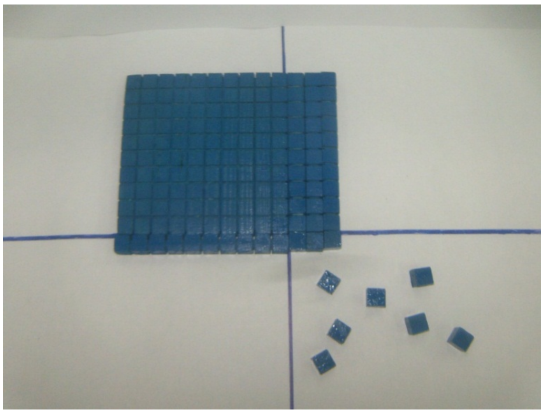
Figura 5.15: Equação $x^2 + 4x + 10 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

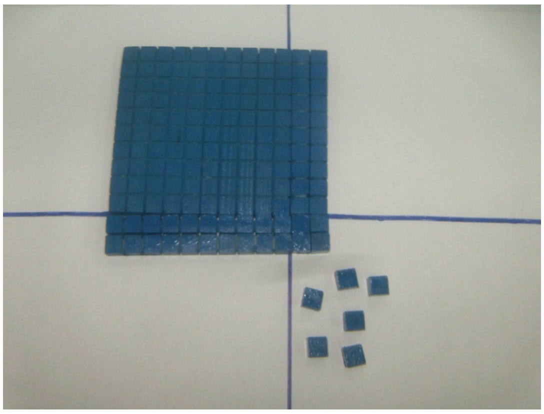
Agora, vamos tentar montar um retângulo com essas peças.

Figura 5.16: Primeira tentativa para montar o retângulo que represente a equação $x^2 + 4x + 10 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Figura 5.17: Segunda tentativa para montar o retângulo que represente a equação $x^2 + 4x + 10 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Observem que sempre está sobrando peças nas duas tentativas, isso significa que não podemos montar um retângulo para essa equação. Logo, a equação não tem raízes racionais.

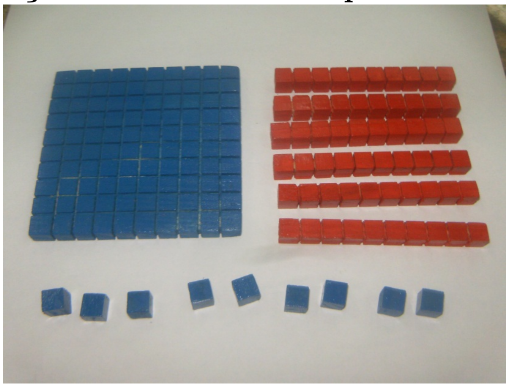
5.2.2 Equações do tipo 2

Analogamente as equações do tipo 1, o retângulo é obtido utilizando as peças obtidas de acordo com a equação, caso o retângulo não possa ser montado significa dizer que a equação não possui raízes racionais. Vamos exemplificar para entender melhor:

Exemplo 1: Quais são as raízes da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$?

Solução: Representando a equação com o material obtemos as seguintes peças:

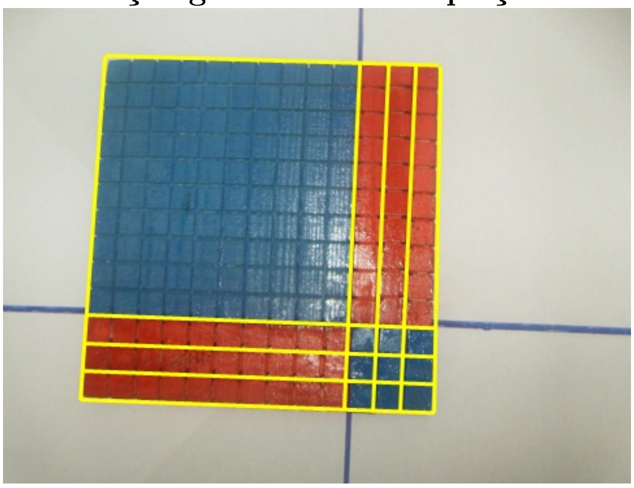
Figura 5.18: Equação $x^2 - 6x + 9 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

Montando e analisando um retângulo com essas peças, obtemos a figura:

Figura 5.19: Solução geométrica da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Analisando algebricamente a figura e lembrando que as peças vermelhas re presentam números negativos, obtemos:

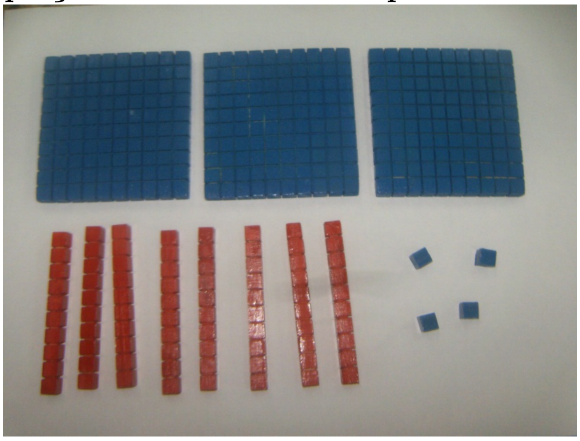
$$A = (x-3)\cdot(x-3) \Rightarrow (x-3)\cdot(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Analisando a figura notem que a cada lado x acrescentamos – 3, isso significa que as duas raízes da equação são iguais a 3.

Exemplo 2: Determine o conjunto solução da equação $3x^2 - 8x + 4 = 0$.

Solução: De acordo com a equação temos as seguintes peças para montar nosso retângulo.

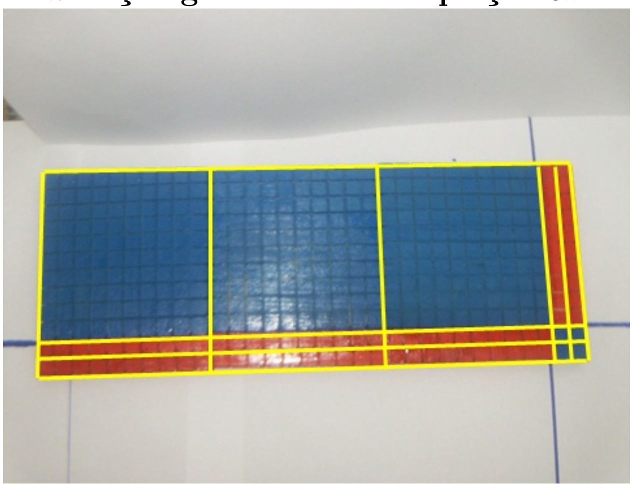
Figura 5.20: Equação $3x^2 - 8x + 4 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

Montando e analisando um retângulo com essas peças, obtemos a figura:

Figura 5.21: Solução geométrica da equação $3x^2 - 8x + 4 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Analisando algebricamente a figura, obtemos:

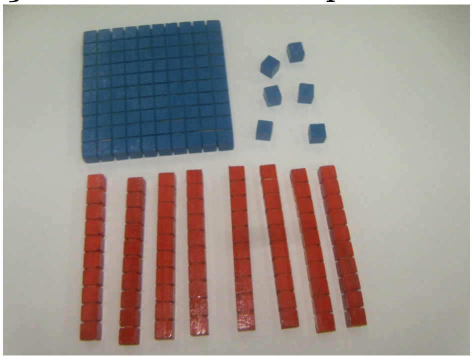
$$A = (x-2)\cdot(3x-2) \Rightarrow (x-2)\cdot(3x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Analisando a figura, notem que ao lado x acrescentamos – 2, isso significa que uma das raízes da equação é 2. Já ao lado $3x$ acrescentamos – 2, isso significa que a outra raiz da equação é $\frac{2}{3}$.

Exemplo 3: Quais são os números racionais que satisfazem a equação $x^2 - 8x + 6 = 0$?

Solução: A equação nos fornece as seguintes peças:

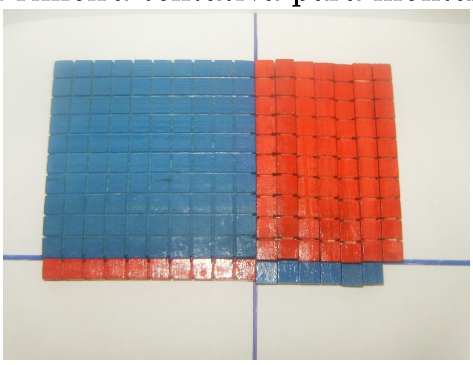
Figura 5.22: Equação $x^2 - 8x + 6 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

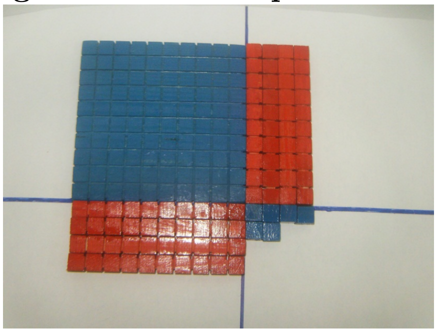
Vamos tentar montar um retângulo com essas peças.

Figura 5.23: Primeira tentativa para montar o retângulo.



Fonte: Autor 2013

Figura 5.24: Segunda tentativa para montar o retângulo.



Fonte: Autor 2013

Notem que não foi possível montar o retângulo com as peças fornecidas. Logo, a equação dada não tem raízes racionais.

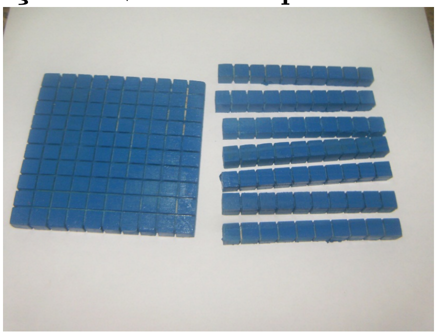
5.2.3 Equações do tipo 3

Nesse tipo de equação, o retângulo é obtido juntando todas as barras a um dos lados da placa. Assim, um dos lados da equação será sempre x o que resulta que uma das raízes será sempre igual a zero, ou seja, nesse caso é sempre possível montar o retângulo. Vejam os exemplos:

Exemplo 1: Quais são as raízes da equação $x^2 + 7x = 0$?

Solução: De acordo com a equação, temos que montar um retângulo com as seguintes peças:

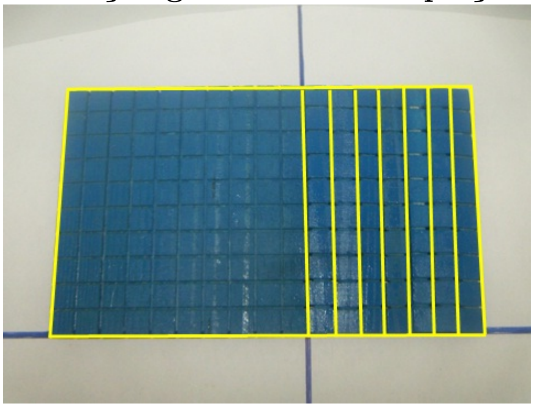
Figura 5.25: Equação $x^2 + 7x = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

De acordo com o que enunciamos acima, obtemos a seguinte figura:

Figura 5.26: Solução geométrica da equação $x^2 + 7x = 0$.



Fonte: Autor 2013

Analisando algebricamente a figura, obtemos:

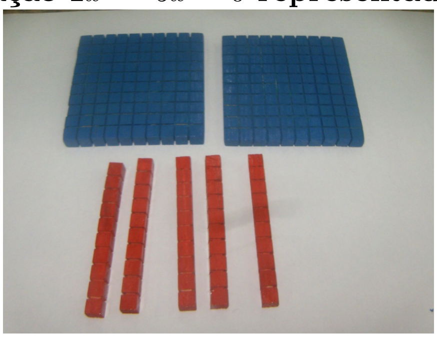
$$A = x \cdot (x+7) \Rightarrow x \cdot (x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -7 \end{cases}.$$

Analisando a figura, notem que aos lados x acrescentamos 0 e + 7, isso significa que as raízes dessa equação são 0 e – 7.

Exemplo 2: Determine os valores de x que satisfazem a equação $2x^2 - 5x = 0$?

Solução: Representando a equação a partir do material obtemos as seguintes peças:

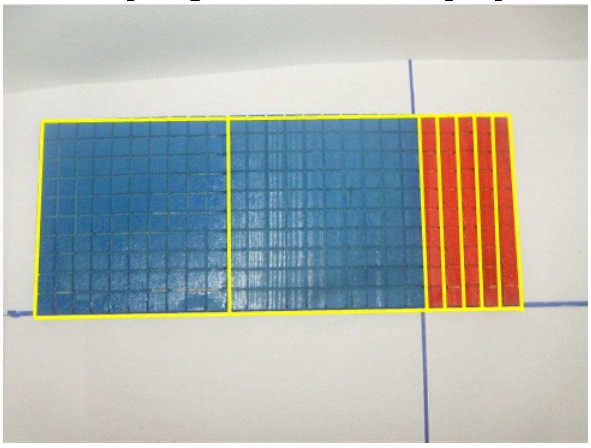
Figura 5.27: Equação $2x^2 - 5x = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

Agora, vamos montar e analisar o retângulo que iremos obter com essas peças.

Figura 5.28: Solução geométrica da equação $2x^2 - 5x = 0$.



Fonte: Autor 2013

A partir da área do retângulo, temos que:

$$A = x \cdot (2x - 5) \Rightarrow x \cdot (2x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Analisando a figura, notem que ao lado x acrescentamos 0 e ao lado $2x$ acrescentamos – 5, isso significa que as raízes dessa equação são 0 e $\frac{5}{2}$.

5.2.4 Equações do tipo 4

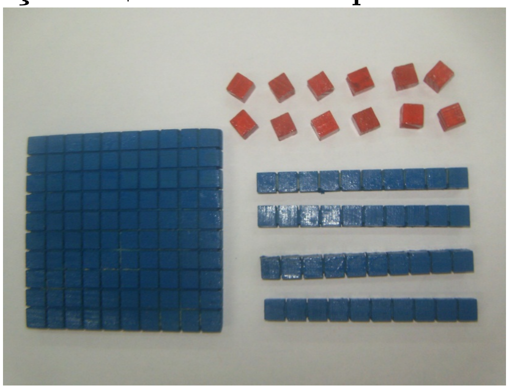
Nas equações do tipo 4 a quantidade de peças que a equação nos fornece é sempre insuficiente para montar o retângulo, isso não significa que a equação não tem raízes racionais.

Para resolver esse problema o aluno poderá solicitar peças do tipo barra para tentar montar o retângulo. Esta solicitação não pode ser em uma quantidade qualquer de peças, ela deverá ter uma quantidade par de peças sendo metade azul (positiva) e a outra metade vermelha (negativa), assim estaremos acrescentando à equação elementos opostos, o que não alterará a equação em questão. Por isso, esse tipo de equação exigirá um pouco mais de atenção por dois motivos, o primeiro é que ele deverá analisar bem a equação para não solicitar peças demais e o segundo é que ao fim da montagem devemos verificar o jogo de sinais, pois o retângulo poderá estar montado, mas a equação não ter soluções no conjunto dos números racionais. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Quais são as raízes da equação $x^2 + 4x - 12 = 0$?

Solução: Representando a equação no material proposto, obtemos as seguintes peças:

Figura 5.29: Equação $x^2 + 4x - 12 = 0$ representada com o material.

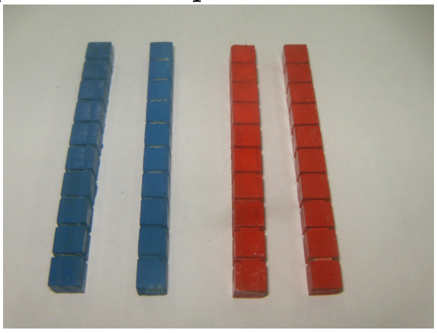


Fonte: Autor 2013

O aluno irá tentar montar o retângulo com essas peças e não conseguirá. Como foi dito acima, esse tipo de equação exige que o aluno faça a complementação de retângulo solicitando peças do tipo barra para que ele possa tentar montar o retângulo. Também como foi dito, essa solicitação deverá ser numa quantidade par de peças, sendo metade azul e a outra metade vermelha. Aqui neste momento, não iremos discutir a habilidade do aluno se ele solicitará uma quantidade exata de peças ou se ele irá solicitar de duas em duas até que consiga montar a figura. Portanto, apresentaremos a quantidade exata de peças que é necessária para montar o retângulo.

Nesse caso, são necessárias quatro barras sendo duas azuis e duas vermelhas.

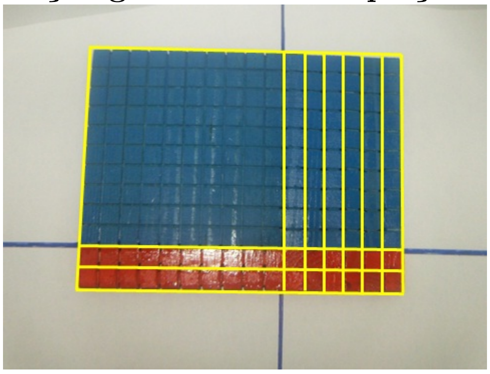
Figura 5.30: Peças complementares para resolver a equação $x^2 + 4x - 12 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Assim, obteremos o seguinte retângulo:

Figura 5.31: Solução geométrica da equação $x^2 + 4x - 12 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Veja que acrescentamos a um dos lados – 2 e ao outro + 6 e o produto desses números é – 12. Notem que o termo independente da equação é axatamente representado por doze cubinhos vermelhos, complementando assim o retângulo. Calculando a área do retângulo, temos que:

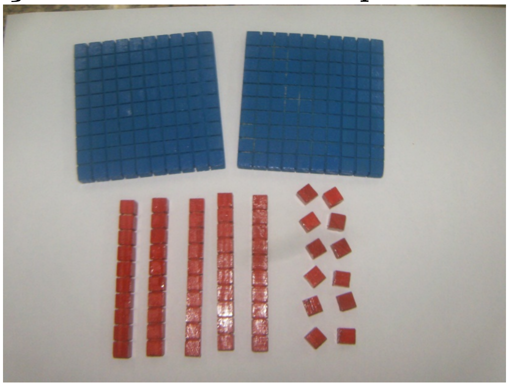
$$A = (x+6)\cdot(x-2) \Rightarrow (x+6)\cdot(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Analisando a figura, notem que aos lados x acrescentamos + 6 e – 2, desta forma teremos que as raízes dessa equação são – 6 e 2.

Exemplo 2: Determine o conjunto solução da equação $2x^2 - 5x - 12 = 0$.

Solução: Representando a equação no material proposto, obtemos as seguintes peças:

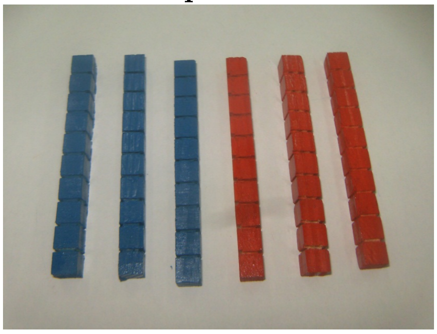
Figura 5.32: Equação $2x^2 - 5x - 12 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

O aluno irá tentar montar o retângulo com essas peças e não irá conseguir. Logo, ele terá que solicitar algumas barras conforme figura abaixo:

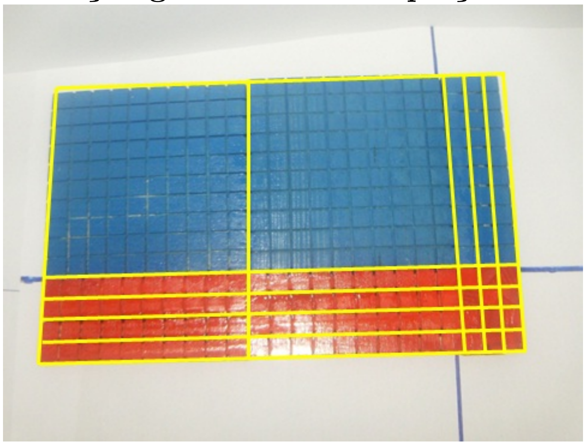
Figura 5.33: Peças complementares para resolver a equação $2x^2 - 5x - 12 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Com essas novas peças ele irá montar o retângulo abaixo:

Figura 5.34: Solução geométrica da equação $2x^2 - 5x - 12 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Veja que acrescentamos a um dos lados – 4 e ao outro + 3 e o produto desses números é – 12, Neste momento é importante verificar se o número que representa o produto é igual ao número que representa o termo independente da equação. Neste caso, temos doze cubinhos vermelhos complementando a figura. Assim, calculando a área do retângulo, temos que:

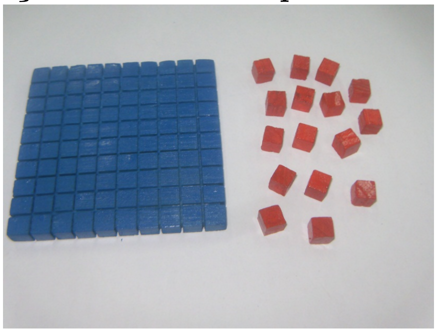
$$A = (2x+3)\cdot(x-4) \Rightarrow (2x+3)\cdot(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ x = 4 \end{cases}.$$

Analisando a figura, notem que ao lado $2x$ acrescentamos + 3 e ao lado x acrescentamos – 4, desta forma teremos que as raízes dessa equação são $\frac{-3}{2}$ e 4.

Exemplo 3: Determine os valores de x que satisfazem a equação $x^2 - 16 = 0$?

Solução: Como vimos nos exemplos anteriores o primeiro passo é representar a equação com o material proposto. Assim, obtemos as seguintes peças:

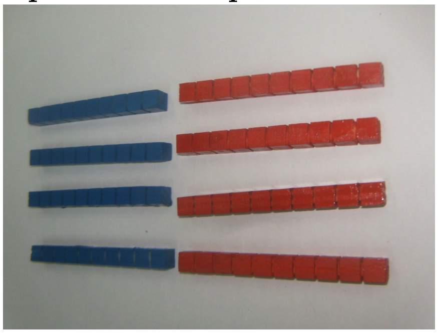
Figura 5.35: Equação $x^2 - 16 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

O aluno logo perceberá que não é possível montar o retângulo com essas peças. Assim, ele terá que solicitar algumas barras conforme figura abaixo:

Figura 5.36: Peças complementares para resolver a equação $x^2 - 16 = 0$.



Fonte: Autor 2013

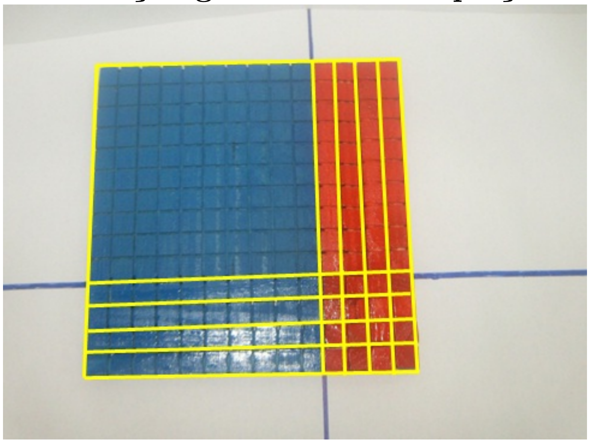
A partir dessa nova quantidade de peças ele poderá montar seu retângulo:

Veja que acrescentamos a um dos lados – 4 e ao outro + 4 e o produto desses números é – 16. Notem que a quantidade de cubinhos vermelhos é 16. Desta forma, obtemos a solução da equação, calculando a área do retângulo, temos que:

$$A = (x+4)\cdot(x-4) \Rightarrow (x+4)\cdot(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Analisando a figura, notem que aos lados x acrescentamos + 4 e – 4, desta forma teremos que as raízes dessa equação são – 4 e 4.

Figura 5.37: Solução geométrica da equação $x^2 - 16 = 0$.



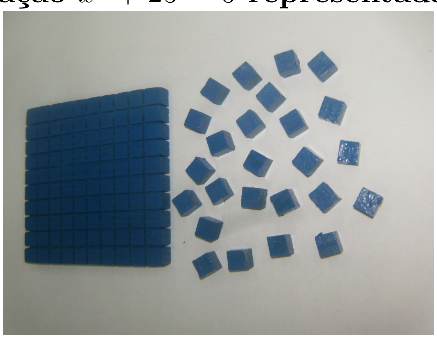
Fonte: Autor 2013

É natural que após a conclusão desta etapa o aluno tente encontrar soluções para as equações dos itens anteriores solicitando barras para fazer a complementação do retângulo, então é por isso que é preciso deixar claro para eles que além de montar o retângulo é necessário também observar o jogo de sinais que estão representados pelas cores.

Vamos verificar esse fato através do exemplo abaixo:

Exemplo 4: Quais são os números racionais que satisfazem a equação $x^2 + 25 = 0$?
Solução: Representando a equação no material proposto, obtemos as seguintes peças:

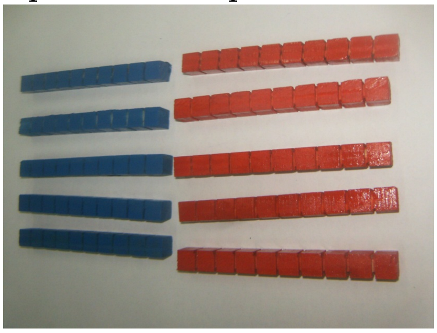
Figura 5.38: Equação $x^2 + 25 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

O aluno logo perceberá que não é possível montar o retângulo com essas peças. Assim, ele terá que solicitar algumas barras conforme figura abaixo:

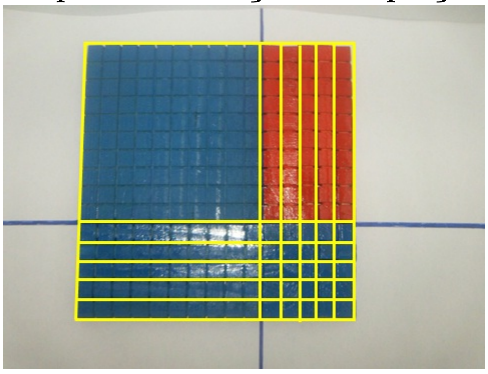
Figura 5.39: Peças complementares para resolver a equação $x^2 + 25 = 0$.



Fonte: Autor 2013

A partir dessa nova quantidade de peças ele poderá montar seu retângulo:

Figura 5.40: Aparente solução da equação $x^2 + 25 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Apesar de termos conseguido montar a figura essa equação não tem raízes racionais. Vamos analisar a figura montada, observe que acrescentamos a um dos lados da figura + 5 e a o outro – 5 e o produto desses números é – 25. Agora, a quantidade de cubinhos, que representa o termo independente da equação, são 25 azuis, ou seja, o termo independente é positivo e o produto deu negativo. Isto significa que o retângulo que foi montado não representa a solução da equação. Então, podemos concluir que essa equação não possui raízes racionais.

5.3 Resolvendo equações do terceiro grau utilizando o material dourado

Utilizaremos as mesmas etapas descritas para as equações do segundo grau para resolver as equações de terceiro grau, mas agora estaremos trabalhando com uma figura em terceira dimensão, ou seja, nesse caso estaremos agora tentando formar um paralelepípedo. A decomposição do volume desse paralelepípedo formado representará a forma fatorada da equação que estaremos estudando.

Para identificar algumas dificuldades ou estabelecer alguns procedimentos para montagem do paralelepípedo resolvi aplicar, mais uma vez sem que os alunos soubessem o propósito da atividade propriamente dito, a atividade de formar paralelepípedo com as peças recebidas. Como eles já haviam participado da atividade de montar retângulo esta segunda atividade foi iniciada de forma mais tranquila. Agora, a montagem apresentou alguns erros comuns que era a desarrumação da figura e a solicitação de peças demais naquelas que são necessárias às solicitações.

Mais uma vez devemos deixar registrado que essa atividade aplicada não tinha como objetivo coletar dados ou testar se o método é eficiente na aprendizagem do aluno, mas apenas para modelar o método. Por isso, não existe a necessidade de apresentar gráficos estatísticos, questionários feitos aos alunos, ou seja, qualquer documento que garanta os resultados que estão sendo citados aqui.

A partir dessa atividade podemos estabelecer algumas condições:

- 1ª condição: para montar o paralelepípedo devemos sobrepor as placas sobre as faces do cubo, não colocando essas placas em faces paralelas;

- 2ª condição: não colocar peças de cores diferentes sobre a mesma face;

- 3ª condição: quando necessário podemos solicitar, sempre em quantidades pares metade azul e metade vermelha, placas e barras para montar o paralelepípedo;

- 4ª condição: a quantidade de placas que serão colocadas sobre cada face do cubo pode ser identificada pelo termo independente da equação;

- 5ª condição: se o paralelepípedo for montado, as raízes racionais da equação serão iguais aos opostos das quantidades que acrescentamos a cada aresta do cubo.

Para facilitar a aprendizagem, iremos dividir as equações do terceiro grau em três tipos, conforme tabela abaixo. Essa divisão foi relaizada utilizando a mesma idéia utilizada nas equações do segundo grau, ou seja, exitem equações que montamos o paralelepípedo a partir das peças fornecidas por ela, enquanto outras devemos acrescentar peças para montar o paralelepípedo.

Tabela 5.3: Tipos de equações do terceiro grau.

TIPO	EQUAÇÕES DO TERCEIRO GRAU
TIPO 1	Equações completas com todos os coeficientes positivos.
TIPO 2	Equações completas com os coeficientes a e c positivos e b e d negativos.
TIPO 3	As demais equações completas e incompletas.

Fonte: Autor 2013

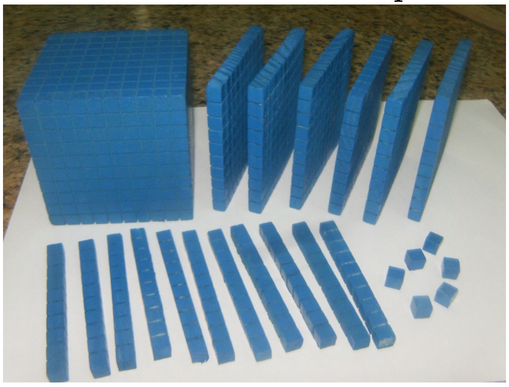
Agora vamos estudar a resolução de cada tipo de equação sugerida aplicando o método que está sendo proposto nesse trabalho.

5.3.1 Equações do tipo 1

Nesse tipo de equação, iremos montar o paralelepípedo utilizando apenas as peças que a equação irá nos fornecer, caso isso não seja possível significa que a equação não terá todas as suas raízes racionais. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Quais são as raízes da equação $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$?

Figura 5.41: Equação $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ representada com o material.

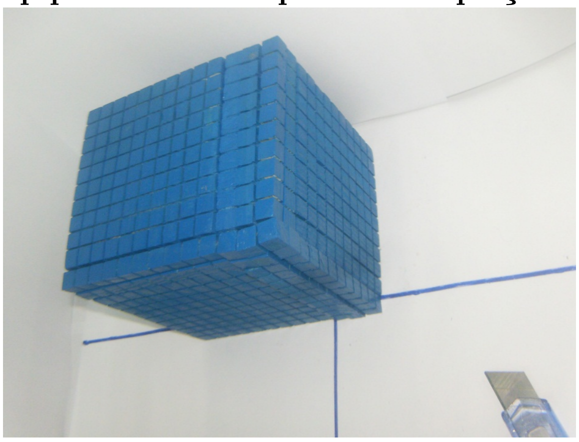


Fonte: Autor 2013

Solução: Inicialmente, iremos representar a equação a partir do material dourado.

Conforme enunciamos acima, esse tipo de equação é solucionada de forma direta, sem a solicitação de peças. Montando o paralelepípedo com essas peças, obtemos a figura:

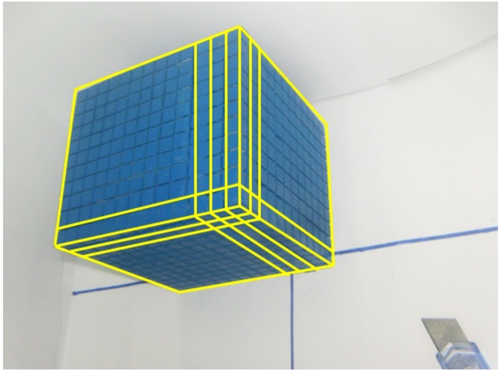
Figura 5.42: Paralelepípedo obtido a partir da equação $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Vamos analisar o paralelepípedo acima:

Figura 5.43: Solução geométrica da equação $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Observe que ao montarmos o sólido encontramos um paralelepípedo cujas arestas medem $x+1$, $x+2$ e $x+3$. O volume deste paralelepípedo nos dará a forma fatorada da equação dada.

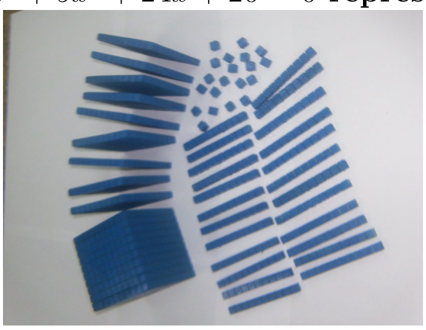
$$V = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3) \Rightarrow (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Analisando a figura, notem que às arestas x do cubo acrescentamos $+\,1$,$+\,2$ e $+\,3$, desta forma teremos que as raízes dessa equação são $-\,1$, $-\,2$ e $-\,3$.

Exemplo 2: Determine o conjunto solução da equação $x^3 + 9x^2 + 24x + 20 = 0$.

Solução: Inicialmente, iremos representar a equação a partir do material dourado.

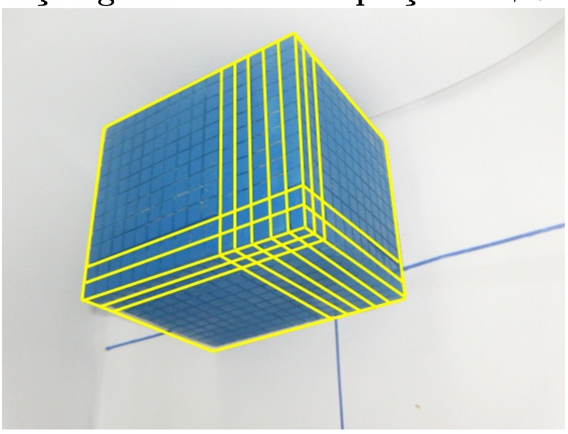
Figura 5.44: Equação $x^3 + 9x^2 + 24x + 20 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

Conforme enunciamos acima, esse tipo de equação é solucionada de forma direta, sem a solicitação de peças. Montando e analisando o paralelepípedo com essas peças, obtemos a figura:

Figura 5.45: Solução geométrica da equação $x^3 + 9x^2 + 24x + 20 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Observe que ao montarmos o sólido encontramos um paralelepípedo cujas arestas medem $x+2$, $x+2$ e $x+5$. Calculando o volume deste paralelepípedo nos dará a forma fatorada da equação dada.

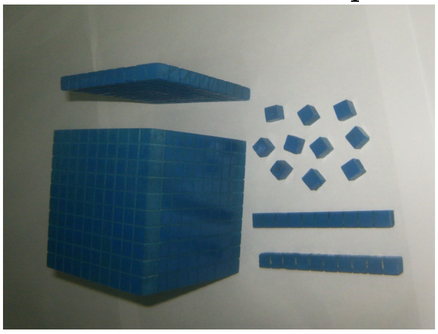
$$V = (x+2)\cdot(x+2)\cdot(x+5) \Rightarrow (x+2)\cdot(x+2)\cdot(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -2 \\ x = -5 \end{cases}.$$

Analisando a figura, notem que às arestas x do cubo acrescentamos + 2,+ 2 e + 5, desta forma teremos que as raízes dessa equação são – 2, – 2 e – 5.

Exemplo 3: Quais são os números racionais que satisfazem a equação $x^3+x^2+2x+10 = 0$?

Solução: Representando a equação no material dourado, obtemos as seguintes peças:

Figura 5.46: Equação $x^3 + x^2 + 2x + 10 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

Não é possível montar um paralelepípedo utilizando apenas essas peças. Portanto, a equação não tem todas as suas raízes racionais.

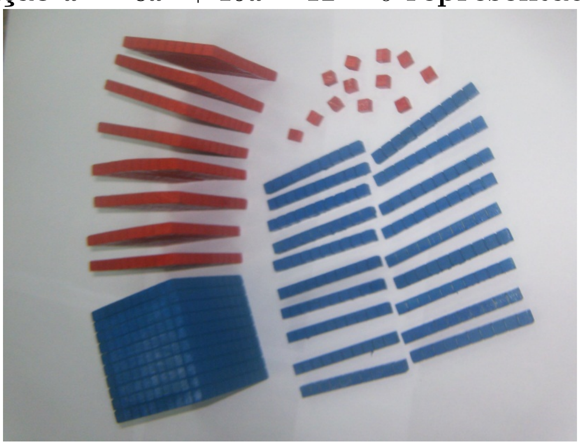
5.3.2 Equações do tipo 2

Nesse tipo de equação iremos utilizar o mesmo procedimento utilizado nas equações do tipo 1, ou seja, montar o paralelepípedo utilizando as peças fornecidas pela equação, não sendo possível montar o paralelepípedo a equação não terá todas as suas raízes racionais. Vamos exemplificar para entender melhor:

Exemplo 1: Quais são as raízes da equação $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$?

Solução: Inicialmente, iremos representar a equação a partir do material dourado.

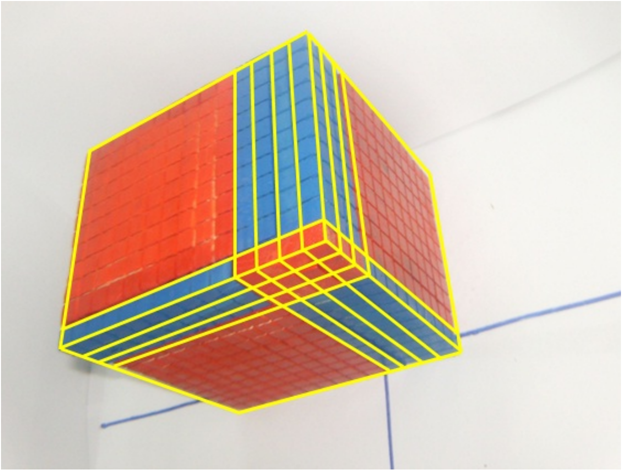
Figura 5.47: Equação $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

Conforme enunciamos acima, esse tipo de equação é solucionada de forma direta, sem a solicitação de peças. Montando e analisando o paralelepípedo com essas peças, obtemos a figura:

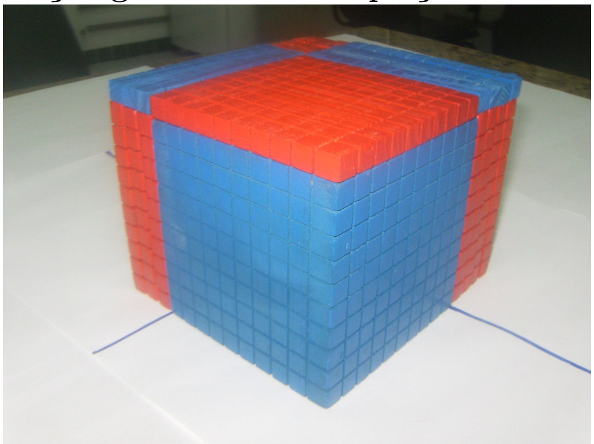
Figura 5.48: Solução geométrica da equação $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$**.**



Fonte: Autor 2013

Outra visão do paralelepípedo montado:

Figura 5.49: Solução geométrica da equação $x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$**.**



Fonte: Autor 2013

Observe que ao montarmos o sólido encontramos um paralelepípedo cujas arestas medem $x - 1$, $x - 3$ e $x - 4$. Calculando o volume deste paralelepípedo nos dará a forma fatorada da equação dada.

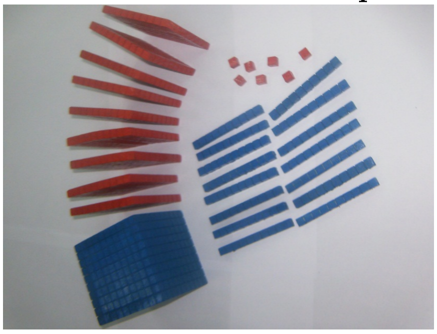
$$V = (x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-4) \Rightarrow (x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Analisando a figura, notem que às arestas x do cubo acrescentamos -1 , -3 e -4, desta forma teremos que as raízes dessa equação são 1, 3 e 4.

Exemplo 2: Determine o conjunto solução da equação $x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = 0$.

Solução: Inicialmente, iremos representar a equação a partir do material dourado.

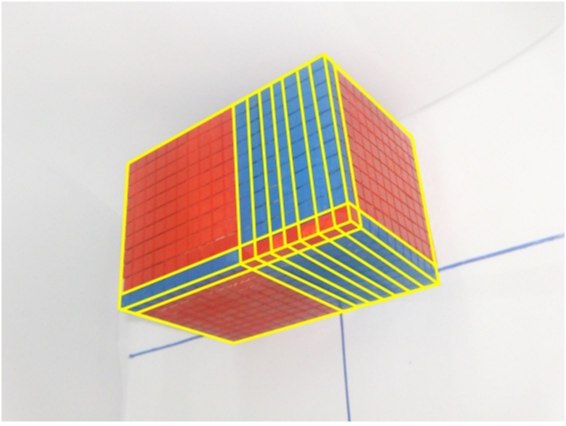
Figura 5.50: Equação $x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

Montando e analisando o paralelepípedo com essas peças, obtemos a figura:

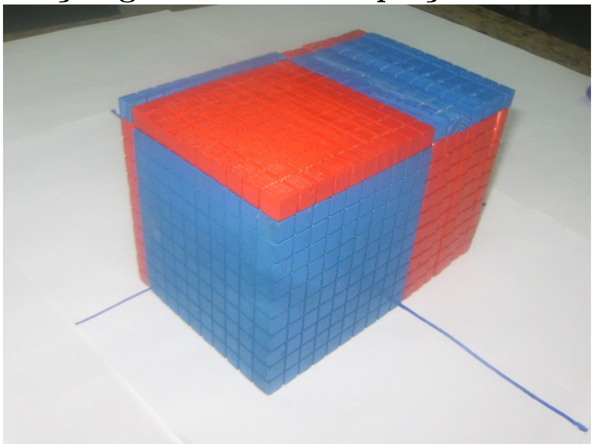
Figura 5.51: Solução geométrica da equação $x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Outra visão do paralelepípedo montado:

Figura 5.52: Solução geométrica da equação $x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Observe que ao montarmos o sólido encontramos um paralelepípedo cujas arestas medem $x - 1$, $x - 1$ e $x - 7$. Calculando o volume deste paralelepípedo nos dará a forma fatorada da equação dada.

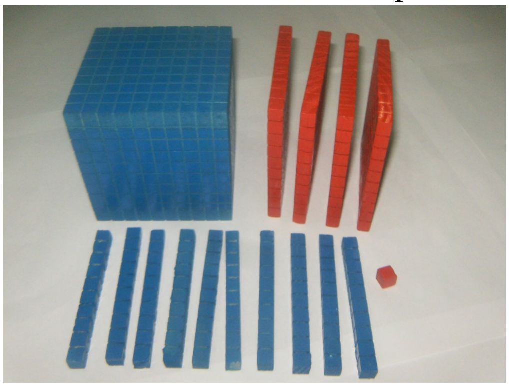
$$V = (x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-7) \Rightarrow (x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \\ x = 7 \end{cases}.$$

Analisando a figura, notem que às arestas x do cubo acrescentamos – 1 , – 1 e – 7, desta forma teremos que as raízes dessa equação são 1, 1 e 7.

Exemplo 3: Quais são os números racionais que satisfazem a equação $x^3 - 4x^2 + 10x - 1 = 0$?

Solução: Representando a equação no material dourado, obtemos as seguintes peças:

Figura 5.53: Equação $x^3 - 4x^2 + 10x - 1 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

Não é possível montar um paralelepípedo utilizando apenas essas peças. Portanto, a equação não tem todas as suas raízes racionais.

5.3.3 Equações do tipo 3

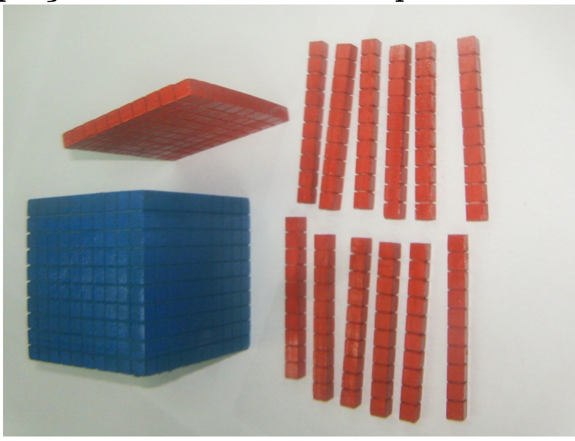
Nas equações do tipo 3, a quantidade de peças que a equação nos fornece poderá ser insuficiente para montar o paralelepípedo, isso não significa que a equação não tem raízes racionais.

Para resolver esse problema o aluno poderá solicitar peças dos tipos placas e/ou barras para tentar montar o retângulo. Esta solicitação não pode ser em uma quantidade qualquer de peças, ela deverá ter uma quantidade par de peças sendo metade azul (positiva) e a outra metade vermelha (negativa), assim estaremos acrescentando a equação elementos opostos, o que não alterará a equação em questão. Por isso, esse tipo de equação exigirá um pouco mais de atenção por dois motivos, o primeiro é que ele deverá analisar bem a equação para não solicitar peças demais e o segundo é que ao fim da montagem devemos verificar o jogo de sinais. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Quais são as raízes da equação $x^3 - x^2 - 12x = 0$?

Solução: Inicialmente, iremos representar a equação a partir do material dourado.

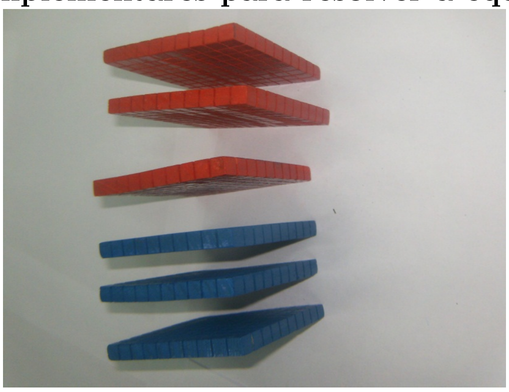
Figura 5.54: Equação $x^3 - x^2 - 12x = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

Conforme enunciamos acima, devemos solicitar algumas peças do tipo placa e/ou do tipo barra, todas em quantidades pares sendo metade azul e metade vermelha para não alterar a equação dada. Nesse momento devemos destacar que não importa como o aluno fará tais solicitações e sim que ele compreenda todo o procedimento. A quantidade que deverá ser solicitada para resolver essa equação está representada na figura abaixo.

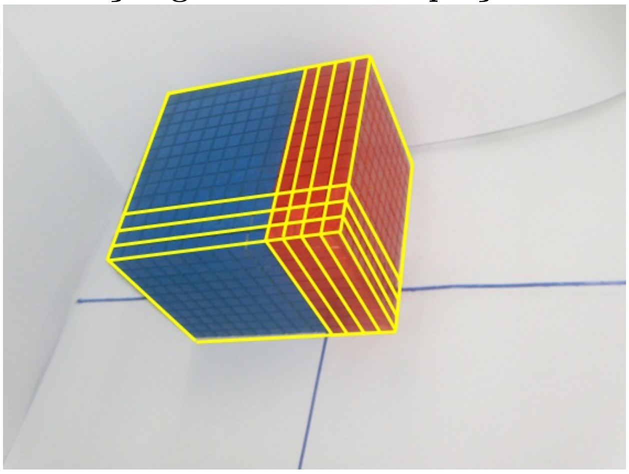
Figura 5.55: Peças complementares para resolver a equação $x^3 - x^2 - 12x = 0$.



Fonte: Autor 2013

Analisando o paralelepípedo que podemos montar com essas peças, obtemos a figura:

Figura 5.56: Solução geométrica da equação $x^3 - x^2 - 12x = 0$.



Fonte: Autor 2013

Observe que ao montarmos o sólido encontramos um paralelepípedo cujas arestas medem x, $x - 4$ e $x + 3$. Calculando o volume deste paralelepípedo nos dará a forma fatorada da equação dada.

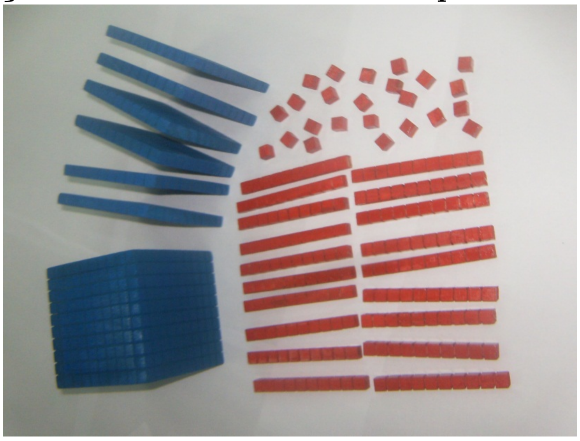
$$V = x \cdot (x-4) \cdot (x+3) \Rightarrow x \cdot (x-4) \cdot (x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \\ x = -3 \end{cases} .$$

Analisando a figura, notem que às arestas x do cubo acrescentamos 0 , – 4 e + 3, desta forma teremos que as raízes dessa equação são 0, 4 e – 3.

Exemplo 2: Determine os valores de x que satisfazem a equação $x^3 + 6x^2 - 19x - 24 = 0$?

Solução: Inicialmente, iremos representar a equação a partir do material dourado.

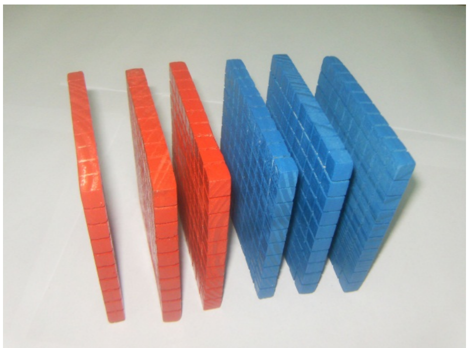
Figura 5.57: Equação $x^3 + 6x^2 - 19x - 24 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

A quantidade de peças do tipo placa que deverá ser solicitada para resolver essa equação está representada na figura abaixo.

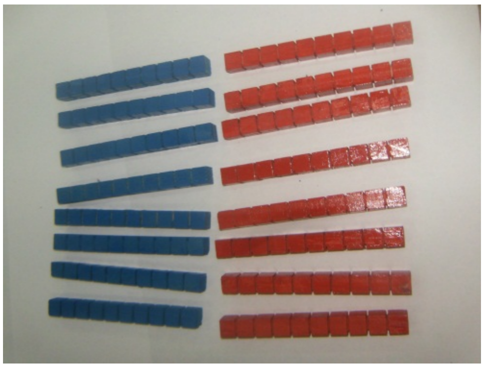
Figura 5.58: Peças complementares do tipo placa para resolver a equação $x^3 + 6x^2 - 19x - 24 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Fazendo apenas a solicitação dessas peças não será possível ainda montar o paralelepípedo. Então, deveremos solicitar também peças do tipo barra. A quantidade que deverá ser solicitada para resolver essa equação está representada na figura abaixo.

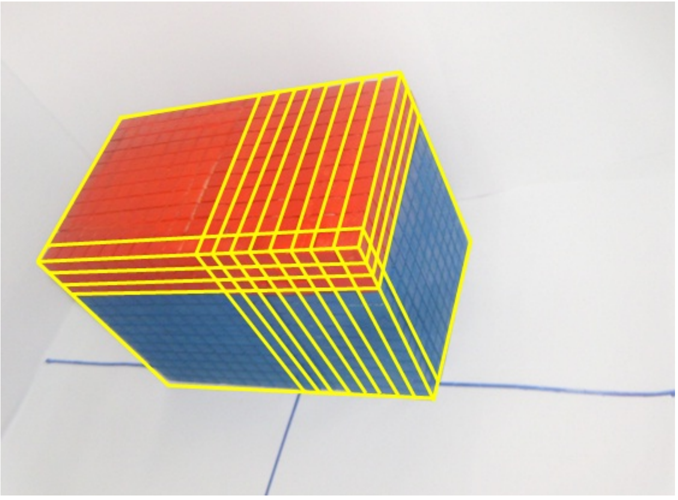
Figura 5.59: Peças complementares do tipo barra para resolver a equação $x^3 + 6x^2 - 19x - 24 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Analisando o paralelepípedo que podemos montar com essas peças, obtemos a figura:

Figura 5.60: Solução geométrica da equação $x^3 + 6x^2 - 19x - 24 = 0$.



Fonte: Autor 2013

Observe que ao montarmos o sólido encontramos um paralelepípedo cujas arestas medem $x+1$, $x+8$ e $x-3$. Calculando o volume deste paralelepípedo nos dará a forma fatorada da equação dada.

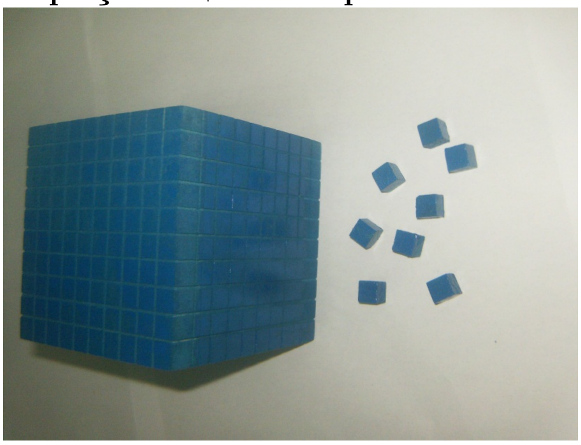
$$V = (x+1)\cdot(x+8)\cdot(x-3) \Rightarrow (x+1)\cdot(x+8)\cdot(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -8 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Analisando a figura, notem que às arestas x do cubo acrescentamos + 1, + 8 e − 3, desta forma teremos que as raízes dessa equação são − 1, − 8 e 3.

Exemplo 3: Quais são os números racionais que satisfazem a equação $x^3 + 8 = 0$?

Solução: Representando a equação no material dourado, obtemos as seguintes peças:

Figura 5.61: Equação $x^3 + 8 = 0$ representada com o material.



Fonte: Autor 2013

Nesse caso, podemos solicitar peças do tipo placas e/ou barras para montar o paralelepípedo mesmo assim não iremos conseguir montar o paralelepípedo. Portanto, a equação não tem todas as suas raízes racionais.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final desse trabalho devemos destacar que a proposta apresentada une dois elementos que podem tornar a aprendizagem mais atrativa e de fácil compreensão. O primeiro elemento é a utilização dos procedimentos geométricos, tão utilizados por povos antigos, para representar uma equação e o segundo é que essa representação geométrica será feita com um material pedagógico, o material dourado, cuja eficácia no desenvolvimento do aluno já fora devidamente comprovada.

Para alguns professores a proposta que está sendo apresentada pode ser considerada incompleta, pois só é possível encontrar a solução para raízes racionais ou pela alegação de que o material para montagem não estará disponível para o aluno, por exemplo, na aplicação de uma prova. Mas, o aluno que estiver bem familiarizado com o procedimento poderá construir um desenho para representar os elementos da equação e depois solucionar essa equação a partir do seu desenho. Além disso, quando o aluno resolve uma equação do segundo ou terceiro grau a partir do método estudado ele estará, mesmo que intuitivamente, estabelecendo relações entre os coeficientes e as raízes da equação, ou seja, as relações de Girard.

Como nossa proposta é que esse método possa ser aplicado no oitavo ano do ensino fundamental o aluno ainda não terá tido o contato com as relações de Girard, mas quando esse conteúdo for passado para ele nas séries seguintes ele poderá fazer alguma associação entre o método proposto e tais relações.

Podemos perceber também que durante o processo de resolução o aluno está trabalhando outros conceitos matemáticos além de determinar as raízes da equação, tais como estudo dos sinais, propriedades da adição, operações inversas, multiplicação de números inteiros, multiplicação de polinômios, área do retângulo, área do quadrado, volume do paralelepípedo, volume do cubo e equação do primeiro grau. Aliados a todos esses conteúdos poderíamos destacar também o desenvolvimento da visão espacial e do raciocínio lógico dedutivo. Por isso, esse material também poderá ser utilizado para explicar a multiplicação entre dois ou três polinômios de primeiro grau, produtos notáveis entre outros que possam ser associados a esse material.

É claro que para o aluno atingir o desenvolvimento ideal para esse tipo de trabalho, devemos aplicar essa sequência didática que está sendo proposta em diversas aulas e procurando envolver o aluno para que ele possa descobrir a melhor forma de visualizar e montar o seu objeto. O professor terá um papel de facilitador mais a descoberta deverá ser do aluno.

As dificuldades que os professores encontrarão durante a aplicação deste método é principalmente a falta de interesse do aluno na montagem da figura. Isto se deve ao fato de que ele não é acostumado a desenvolver atividades de montagem e colagem, principalmente a partir do sexto ano do ensino fundamental, ou pela dificuldade natural que os alunos apresentam quando desenvolvem alguma atividade que não tenha resposta imediata, ou seja, atividades que exijam um pouco de raciocínio. Nenhum recurso tecnológico ou material pedagógico será eficaz se o professor não desenvolver habilidades para motivar o aluno para que ele possa realizar a tarefa e atingir o objetivo desejado.

Finalmente, podemos concluir esse trabalho acreditando que a proposta de sequência didática apresentada possa ser mais uma ferramenta que possibilite o desenvolvimento e a aprendizagem dos nossos alunos.

REFERÊNCIAS

[1] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações Volume 3*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2003.

[2] GUELLI, Oscar. *Matemática: Uma Aventura do pensamento*. 8ª série. 8. ed. São Paulo: Ática, 2001.

[3] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações*. 7. ed. São Paulo: Atual, 2005.

[4] IEZZI, Gelson ... et al. *Matemática ciências e aplicações, 3*. 4. ed. São Paulo: Atual, 2006.

[5] LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 1. ed. SBM, 2002. Coleção do Professor de Matemática.

[6] NOBRE, Sergio. Equações algébricas: uma abordagem histórica sobre o processo de resolução da equação de 2º grau. In: Silva C. C. (Org.) *Estudo de história e filosofia das ciências: subsídios para aplicação no ensino*. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

[7] ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[8] SMITH, David Eugene. *History Of Mathematics Vol II*. Osmania University, 1925.

[9] PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática: Paiva*. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

[10] CARVALHO, João Bosco Pitombeira. *Revisitando uma velha conhecida*. Disponível em < http://www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf >. Acesso em: 08 jan. 2013.

[11] ANDRADE, Bernardino Carneiro de. *A evolução histórica das equações do 2º grau*, 2000, 115 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade do Porto, Porto, 2000.

[12] MACÊDO, Elaine Souza de. Uma sequência didática para o ensino da resolução da equação do 2º grau: adequação para o uso com professores / Elaine Souza de Macêdo. 2011, 140 p., Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal,2011.

[13] MENDES, Sebastiana Fátima Palermo. *A Aprendizagem no Construtivismo*. Disponível em < http://www.profala.com/artpsico85.htm >. Acesso em: 11 dez. 2012.

[14] MATERIAL DOURADO. Disponível em < http://educar.sc.usp.br/matematica/m2l2.htm >. Acesso em: 16 dez. 2012.

[15] PEDAGOGIA MONTESSORIANA. Disponível em < http://www.cemp-pa.com.br/montessori >. Acesso em: 16 dez. 2012.

APÊNDICE A

QUEM FOI MARIA MONTESSORI?

No dia 31 de Agosto de 1870 em Chiaravelle na Itália nasce Maria Montessori, filha de Alessandro Montessori (Militar e diretor da Manufatura Tabacchi) e e Renilde Stoppani (era filha do renomado filósofo e professor Stoppani).

Quando Maria Montessori tinha doze anos seus pais decidem mudar para Roma, pensando nos estudos de sua filha. Aos 14 anos, ela inicia o curso secundário demonstrando um grande interesse pelo estudo das matérias científicas, principalmente biologia e matemática, a última será estudada durante toda a sua vida. Em 1897, aos 17 anos ela se matricula no curso de engenharia contra a vontade de seus pais que gostariam que ela fosse professora.

Em 1890, obteve licenciatura na cadeira de físico-matemática e em 1892 completou o curso e é diplomada em Ciências Naturais pela Faculdade de Ciências Físicas, Matemáticas e Naturais, da Universidade de Roma.

Em 1896, Montessori formou-se em Medicina, tornando-se a primeira mu-lher médica em seu país. Em 1897, começa a trabalhar como médica assistente na clínica de psiquiátrica da Universidade de Roma, dando uma maior atenção às crianças que eram consideradas loucas. Passou a trabalhar numa creche, mantendo um maior contato com as crianças e desenvolvendo intensas pesquisas com elas. Maria Montessori estudou diversas obras de famosos médicos franceses Itard, Séguin e Bourneville, a partir desses estudos e de suas investigações nasce o Método de Classificação dos deficientes.

Em 6 de Janeiro de 1907, era inaugurada a primeira "Casa dei Bambini", no bairro operário de San Lourenzo em Roma, onde ela passa a aplicar suas ideias na educação das crianças. Neste mesmo ano é inaugurada a segunda "Casa dei Bambini".

Em 1909 publica o livro "Método da pedagogia científica aplicada à edu-cação" que obteve grande repercussão em todo o mundo sendo traduzido para vários idiomas fazendo cm que o método Montessori seja difundido em todos os países. Escolas Montessorianas surgem em vários países: Inglaterra, Áustria, Holanda, Dinamarca, Suíça, Índia, Paquistão, Estados Unidos, etc.

Em 1912, vai pela primeira vez aos Estados Unidos, onde é recebida com grande admiração, e lança o livro "O método Montessori".

No período de 1915 a 1934, participa de congressos e ministra cursos para professores em vários países.

Em 1950, preside o IX Congresso Internacional de Educação Montesso-riana realizado em Londres.

Em 1951, é convidada pelo governo de Gana a contribuir para a independência e liberdade da nação Africana.

Em 6 de Maio de 1952, aos 81 anos de idade, falece a criadora de um método que revolucionou uma época e traz contribuições muito significativas para o desenvolvimento das crianças no mundo educacional atual.