UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Karl Marlow Pires

Relações métricas no triângulo retângulo com GeoGebra

São José do Rio Preto
2018

Karl Marlow Pires

Relações métricas no triângulo retângulo com GeoGebra

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos

São José do Rio Preto
2018

Pires, Karl Marlow.
Relações métricas no triângulo retângulo com Geogebra / Karl Marlow Pires. -- São José do Rio Preto, 2018
46 f. : il.

Orientador: Jéfferson Bastos
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino. 2. Geometria - Estudo e ensino. 3. Geogebra (Software de computador) 4. Matemática – Metodologia. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Karl Marlow Pires

Relações métricas no triângulo retângulo com GeoGebra

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Ligia Laís Femina
UFU – Uberlândia

Prof. Dr. Rita de Cássia Pavan Lamas
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
22 de janeiro de 2018

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelas conquistas recebidas.

Aos meus pais (Lourney e Luciene) e meus avós que colaboraram com a minha formação. Aos meus irmãos (Iago e Iuri) e ao meu tio (André) que sempre me apoiaram.

A minha amada esposa (Luana) que sempre me apoiou e esteve ao meu lado.

As minhas cunhadas Ligia e Livia por terem me ajudado.

E a todos os meus parentes meu obrigado.

Ao Gervásio, Sabrina e Neil por não terem destruído as minhas anotações e meus livros.

Ao meu orientador Prof. Dr. Jéfferson por todo incentivo e confiança.

Ao Profmat que me proporcionou essa oportunidade.

Aos meus amigos de trabalho pelo apoio e consideração.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para essa conquista.

RESUMO

A matemática é uma matéria considerada difícil por muitos alunos, nesse sentido as tecnologias no ensino podem auxiliar a romper as barreiras com a aprendizagem de matemática, sendo seu uso na área de educação cada vez mais comum. Em especial, a metodologia tradicional não parece ser a melhor opção para o ensino da geometria, sendo necessária uma reformulação do processo educativo, para o desenvolvimento do pensamento crítico dedutível dos discentes. A tecnologia computacional é uma ferramenta a mais para o ensino da matemática, não substituindo os outros materiais utilizados atualmente. Os docentes devem estar preparados para esse processo de transformação, sendo necessário atualização tecnológica e mudanças pedagógicas. Dessa forma, esse trabalho apresenta como foi utilizado o software GeoGebra para o ensino das relações métricas no triângulo retângulo. Foi observado que o uso do software auxiliou no aprendizado dos alunos, facilitando a compreensão do objeto de estudo e tornando o processo de aprendizagem mais prazeroso.

Palavras-chave: Matemática, relações métricas, triângulo retângulo, GeoGebra

ABSTRACT

Mathematics is a subject considered difficult by many students therfore the technologies in teaching can help to break down these barriers of learning, being the use in education more and more common. In particular, traditional methodology does not seem to be the best option for the teaching of geometry, and a reformulation of the educational process is necessary for the development of students' deductible critical thinking. Technology is an added tool for teaching mathematics, not replacing the other materials currently used. Teachers must be prepared for this process of transformation, with the need for technological updating and pedagogical changes. Thus, this work presents the use of GeoGebra, software for the teaching of metric relations in the rectangle triangle. It was observed that different strategies help in student learning, facilitating the understanding of the object of study and making the learning process more pleasant.

Keywords: Mathematics, metric reasons, triangle rectangle, GeoGebra

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A matemática é uma das matérias mais rejeitada pelos alunos em todos os níveis de ensino, desde os anos iniciais até o ensino superior, e a fala dos mesmos é que a disciplina é difícil, segundo Tatto e Scapin (2004). Diante dessa dificuldade e consequente desinteresse dos alunos, buscou-se uma maneira de motivá-los a entender resultados básicos de geometria e suas aplicações. Desta forma, o desenvolvimento do projeto ocorreu com a utilização do software GeoGebra para atividades que envolvam as relações métricas no triângulo retângulo.

O uso desse software é justificado pelo crescente acesso a informática que deve ser visto como um direito, tanto nas escolas públicas como particulares. Os alunos devem ter acesso a uma educação que inclua a alfabetização tecnológica, que deve ser entendida como o aprender em uma nova mídia, e não simplesmente um curso de informática. Deste modo, a informática no uso escolar deve ser parte das questões ligadas a cidadania e ser inserida em todas as atividades essenciais, desde aprender a ler, escrever até noções espaciais, entre outras, segundo Borba e Penteado (2010, p.104).

Neste trabalho o principal objetivo é: inserir o uso do computador no cotidiano do aluno, através do software GeoGebra, utilizando a álgebra e a geometria para a construção de conhecimentos matemáticos nas relações métricas do triângulo retângulo.

Materiais e métodos: o trabalho foi desenvolvido em uma escola particular em julho de dois mil e dezessete, com alunos do nono ano do ensino fundamental, período diurno, após autorização prévia dos responsáveis que assinaram Termo de Consentimento Livre e

Esclarecido da Pesquisa, e utilizado software GeoGebra (5.0.374.0-3D).

Os resultados dessa pesquisa através de atividades práticas no computador, foram a introdução e manipulação do GeoGebra, construção de triângulos, construção de triângulos retângulos e suas alturas, semelhança dos triângulos obtidos, e consequentemente as relações métricas.

A conclusão deste trabalho foi que o uso do Geogebra auxiliou no aprendizado do aluno, tornando a aula dinâmica e visual, facilitando a compreensão do objeto de estudo e desenvolvendo o raciocínio nos alunos.

O texto está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos os principais conceitos para embasamento teórico, no capítulo 3 apresentamos a prática na escola.

Capítulo 2

Embasamento Teórico

Apresentamos neste capítulo três casos de congruência de triângulos e algumas demonstrações de teoremas úteis para esse projeto em sua prática, na sala de aula. Neste texto utilizamos como referência principal o livro intitulado : Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas (Rezende e Queiroz, 2012).

2.1 Congruência

Postulado 2.1.1. *A cada par de pontos corresponde um único número maior ou igual a zero, sendo que este número só é zero se os pontos forem coincidentes.*

Este número obtido através do postulado acima é chamado **distância entre os dois pontos**, e os pontos são ditos **coincidentes** se forem o mesmo ponto.

Denotamos por AB a Distância entre os pontos A e B.

Definição 2.1.2. *Sejam A, B e C três pontos colineares e distintos dois a dois. Se AB + BC = AC, dizemos que B* ***está entre*** *A e C, o que denotamos por A - B - C.*

Figura 2.1: B está entre A e C.

Definição 2.1.3. *Sejam A e B pontos distintos. O* ***segmento de reta*** *AB,* ***ou simplesmente segmento*** *AB, o qual é denotado por* $\overline{AB}$*, é definido como sendo o conjunto dos pontos A e B, e dos pontos X tais que A - X - B. Os pontos A e B são denominados extremidades do segmento AB.*

Figura 2.2: Segmento AB.

Definição 2.1.4. *Sejam A e B pontos distintos. A* ***medida*** *ou* ***comprimento*** *de um segmento AB é definida como a distância entre os ponto A e B, como tal, é denotado por AB.*

Definição 2.1.5. *Sejam A e B pontos distintos. A* ***semirreta de origem*** *A* ***contendo o ponto*** *B, a qual é denotada por* $\overrightarrow{AB}$*, é definida como a união dos pontos do segmento AB com o conjunto dos pontos X tais que A - B - X(figura 2.3). O ponto A é denominado origem da semirreta.*

Figura 2.3: Segmento AB

Se A está entre B e C, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são chamadas **semirretas opostas**. Vamos denotar por $\overleftrightarrow{AB}$ a reta por A e B.

Definição 2.1.6. *Dois segmentos que possuem a mesma medida são chamados* ***segmentos congruentes****. Usaremos a notação* $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ *para segmentos congruentes.*

Postulado 2.1.7. *Seja* $\overrightarrow{AB}$ *uma semirreta contida na reta origem de um semiplano H. Para cada número r entre 0 e 180 existe exatamente uma semirreta* $\overrightarrow{AP}$ *com P em H, tal que* $mP\widehat{A}B = r$

Definição 2.1.8. *Um **ângulo** é a união de duas semirretas que têm a mesma origem, mas não estão contidas numa mesma reta. Se um ângulo é formado pelas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ então essas semirretas são chamadas lados do ângulo, e o ponto A é chamado de vértice do ângulo. Tal ângulo é denominado ângulo BAC ou ângulo CAB e representado por $B\widehat{A}C$ ou $C\widehat{A}B$, respectivamente (figura 2.5). Algumas vezes, quando está claro no texto, é simplesmente denominado ângulo A e representado por $\widehat{A}$ (figura 2.1).*

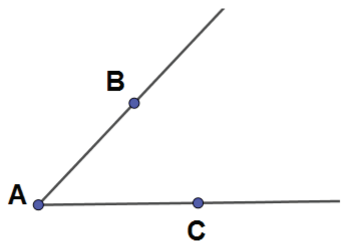


Figura 2.4: ângulo $\widehat{A}$

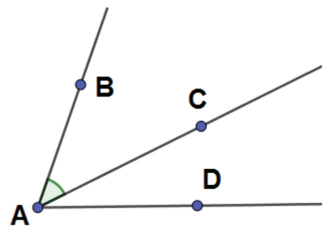


Figura 2.5: ângulo B$\widehat{A}$C ou C$\widehat{A}$B

Postulado 2.1.9. *(Postulado da medida de ângulo) A cada ângulo $B\hat{A}C$ corresponde um único número real entre 0 e 180.*

Definição 2.1.10. *(a) O número correspondente ao postulado 2.1.9 é chamado medida do ângulo, que é denotado por $mB\hat{A}C$.*

*(b) Ângulos que têm a mesma medida são chamado **ângulos congruentes.***

Se $B\hat{A}C$ e $P\widehat{Q}R$ são congruentes, isto é denotado por $B\hat{A}C \cong P\widehat{Q}R$.

Postulado 2.1.11. *(Postulado da Adição de Ângulos) Se D é um Ponto interior do ângulo $B\hat{A}C$, então $mB\hat{A}C = mB\hat{A}D + mD\hat{A}C$*

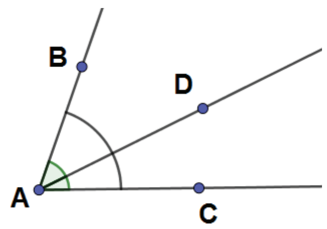


Figura 2.6: Adição de ângulo B$\widehat{A}$D ou D$\widehat{A}$C

Considerando as definições 2.1.6 e 2.1.10, de forma geral temos que duas **figuras planas** são **congruentes** se uma delas puder ser deslocada, sem que sejam modificadas sua forma nem suas medidas, até que passe a coincidir com a outra. Se duas figuras F_1 e F_2 forem congruentes, isso será denotado por $F_1 \cong F_2$. São congruentes, por exemplo, duas circunferência de mesmo raio, ou pares de figuras como na Figura 2.7:

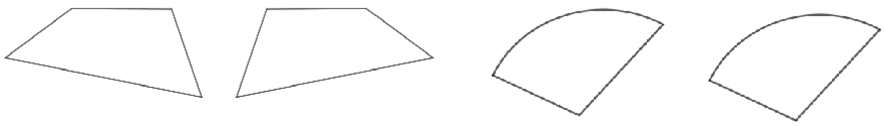


Figura 2.7: Figuras congruentes

E não são congruentes, por exemplo, duas circunferências de raios com medidas diferentes.

Definição 2.1.12. *Um políngono é dito convexo se nenhum par de seus pontos esta em semiplanos opostos relativamente a cada reta que contém um de seus lados. Assim é convexo o polígono ABCDE e não convexo o polígono FGHIJ.*

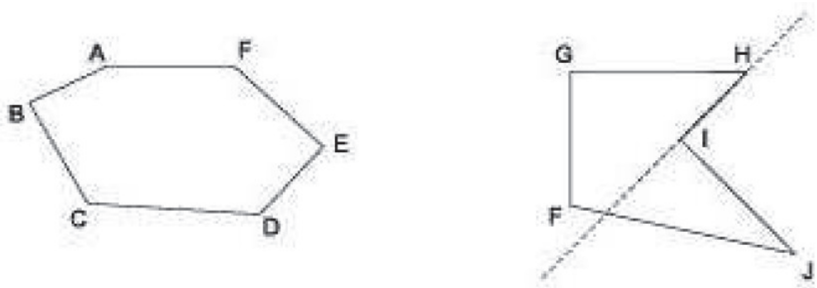


Figura 2.8: Polígono convexo e não convexo

Os ângulos do polígono convexo são $A_{i-1}\widehat{A_i}A_{i+1}$; i =2,...,n-1, e os ângulos $A_{n-1}\widehat{A_n}A_1$ e $A_n\widehat{A_1}A_2$. São chamados ângulos externos do polígono convexo A_1 A_2,..., A_n cada um dos ângulos $B_i\widehat{A_i}$ A_{i+1}, i = 2,...,n-1, $B_n\widehat{A_1}$ A_2 em que B_i distinto de A_i, é um ponto qualquer da semirreta oposta a $\overrightarrow{A_i, A_{i-1}}$; B_n distinto de A_n, está na semirreta oposta a $\overrightarrow{A_n, A_{n-1}}$; e B_1, distinto de A_1, está na semirreta oposta a $\overrightarrow{A_1, A_n}$ ou também os seus correspondentes ângulos opostos pelo vértice.

Em particular um **triângulo** é um polígono de três lados. Um triângulo de vértices ABC, denotado por triângulo △ ABC, tem por elementos os três *vértices*, que são os pontos A, B e C; os três lados, que são os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$; e os *ângulos internos*, que são $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ (figura 2.9)

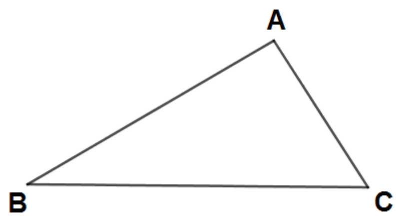


Figura 2.9: Triângulo

Quanto a medida de seus lados um triângulo pode ser chamado:

(1) **triângulo equilátero**: quando possui os três lados dois a dois congruentes.

(2) **triângulo isósceles**: quando possui dois de seus lados congruentes entre si. O terceiro lado é chamado de base do triângulo isósceles.

(3) **triângulo escaleno**: aquele em que quaisquer dois de seus lados têm medidas diferentes.

Quanto à medida de seus ângulos um triângulo pode ser:

(1) **triângulo acutângulo**: quando possui os três ângulos agudos (menos que 90°).

(2) **triângulo reto**: quando possui um ângulo reto. Neste caso, o lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa** e os outros dois são chamados de **catetos**.

(3) **triângulo obtusângulo**: quando possui um ângulo obtuso (maior que 90°).

(4) **triângulo equiângulo**: quando possui os três ângulos dois a dois congruentes.

Definição 2.1.13. *Dois **triângulos** são **congruentes** se for possível definir uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes. Assim, definida a correspondência $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$, entre os triângulos ABC e DEF, se $\hat{A} \cong \hat{D}$,$\hat{B} \cong \hat{E}$,$\hat{C} \cong \hat{F}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, dizemos que os dois triângulos são congruentes, e denotamos por $\triangle\ ABC \cong \triangle\ DEF$.*

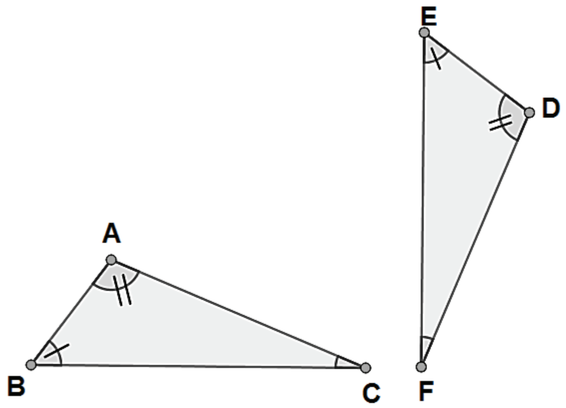


Figura 2.10: Triângulos congruentes.

Verifica-se a congruência dos seis elementos citados na definição para saber se dois triângulos são congruentes, mas temos alguns resultados para nos ajudar, chamados de casos de congruência de triângulos.

O primeiro resultado apresentado aqui será na forma de postulado e os demais como teoremas decorrentes desse postulado.

Postulado 2.1.14 (1º Caso de congruência de triângulos ou Caso L.A.L.)**.** *Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ então $\triangle\ ABC \cong \triangle\ DEF$(Figura 2.11).*

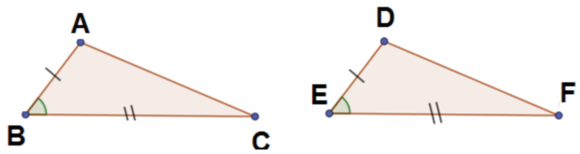


Figura 2.11: Triângulos congruentes caso L.A.L.

Antes de mostrar o segundo caso de congruência precisamos dos resultados dos teoremas 2.1.15 e 2.1.16 a seguir :

Teorema 2.1.15. *Duas retas concorrentes interseccionam-se em um único ponto.*

Demonstração: Consideremos r e s duas retas concorrentes num ponto P. Seja Q um outro ponto que também esteja em ambas as retas. Sabemos que por dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém, a reta r como sendo a reta determinada por P e Q, e a reta s também como sendo a reta determinada por P e Q. Pela unicidade apresentada, r e s seriam a mesma reta, o que contradiz a hipótese de serem retas concorrentes. Logo, P é único. ■

Teorema 2.1.16 (Teorema do Triângulo Isósceles)**.** *Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

Demonstração: Consideremos o triângulo isósceles ABC com base $\overline{BC}$. Queremos provar que $\hat{B} \cong \hat{C}$. Para isso, consideremos a correspondência que leva o triângulo ABC nele mesmo de modo que A $\leftrightarrow$ A, C $\leftrightarrow$ B e B $\leftrightarrow$ C.

Por hipótese, obtemos $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e $\overline{AC} \cong \overline{AB}$, e como $\hat{A} \cong \hat{A}$ segue, pelo caso L.A.L de congruência de triângulos, que $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ ACB. Como consequência temos $\hat{B} \cong \hat{C}$. ■

Teorema 2.1.17 (2º Caso de congruência de triângulos ou caso A.L.A)**.** *Dados dois triângulos ,*$\triangle ABC$ *e* $\triangle DEF$*, se* $\hat{A} \cong \hat{D}$*,* $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ *e* $\hat{B} \cong \hat{E}$ *então* $\triangle\ ABC \cong \triangle\ DEF$*.*

Demonstração: Considere os triângulos ABC e DEF, satisfazendo as hipóteses do teorema.

Seja P um ponto da semirreta $\overrightarrow{DF}$ tal que $\overline{DP} = \overline{AC}$

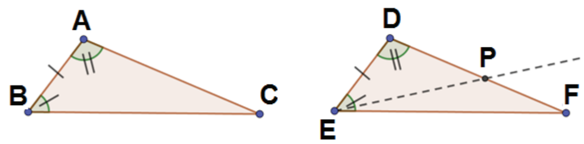


Figura 2.12: Triângulos com as condições do teorema e o ponto P

Comparemos os triângulos $\triangle$ABC e $\triangle$DEP.

Como $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{A} \cong \hat{D}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DP}$, segue que eles são congruentes, pelo caso L.A.L. Portanto A$\hat{B}$C ≅ D$\hat{E}$P.

Deste fato e da hipótese segue que D$\hat{E}$F ≅ D$\hat{E}$P. o 2.1.7 garante unicidade de semirreta de 0 a 180. Assim $\overline{EF}$ e $\overline{EP}$ são coincidentes.

Portanto F e P são o mesmo ponto pelo teorema 2.1.15 e temos △ ABC ≅ △ DEF.

■

Teorema 2.1.18 (3º Caso de congruência de triângulos ou caso L.L.L)**.** *Se dois triângulos têm os três pares de lados congruentes, então são triângulos congruentes.*

Demonstração: Consideremos os dois triângulos △ABC e △DEF tais que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\overline{CA} \cong \overline{FD}$.

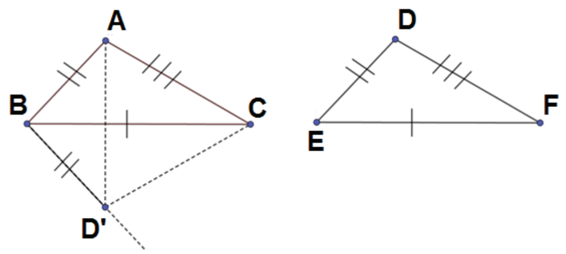


Figura 2.13: Triângulos com as condições do teorema 2.1.18

No semiplano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ e que não contém o ponto A, consideremos uma semirreta de origem B formando com $\overrightarrow{BC}$ um ângulo congruente ao D$\hat{E}$F. Escolhamos sobre ela um ponto D' tal que $\overline{BD'} = \overline{DE}$. Pelo caso L.A.L. obtemos △ D'BC ≅ △ DEF.

Vamos agora mostrar que △ ABC ≅ △ D'BC.

Seja H o ponto em que $\overline{AD'}$ corta $\overleftrightarrow{BC}$.

Vamos supor primeiro que H está entre B e C, como na Figura 2.13.

Pelo Teorema 2.1.16 aplicado aos triângulos BD'A e CAD' respectivamente, obtemos B$\widehat{A}$D' ≅ B$\widehat{D'}$A e C$\widehat{A}$D' ≅ C$\widehat{D'}$A.

Utilizando Postulado 2.1.9 de adição de ângulos, obtemos

mB$\widehat{A}$C = mB$\widehat{A}$D' + mD'$\widehat{A}$C = mB$\widehat{D'}$A + mA$\widehat{D'}$C = mB$\widehat{D'}$C.

Daí pelo caso L.A.L, segue que △ ABC ≅ △ D'BC.

No caso em que B está entre H e C como na figura que segue, ou ainda, no caso em que C está entre B e H, é demonstrado analogamente que △ D'BC ≅ △ DEF e que △ ABC ≅ △ D'BC.

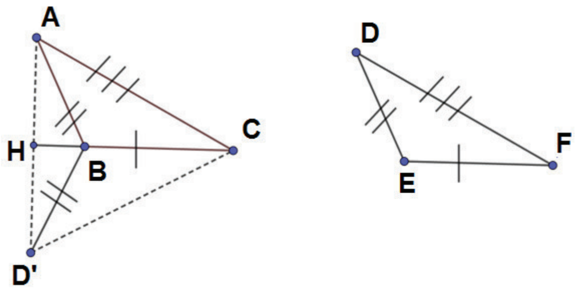


Figura 2.14: Triângulos com as condições do teorema 2.1.18 em que B esta entre H e C

Em ambos os casos, por transitividade, obtemos △ ABC ≅ △ DEF.

Analisemos agora o caso em que H = B, isto é, A, B e D' são colineares.

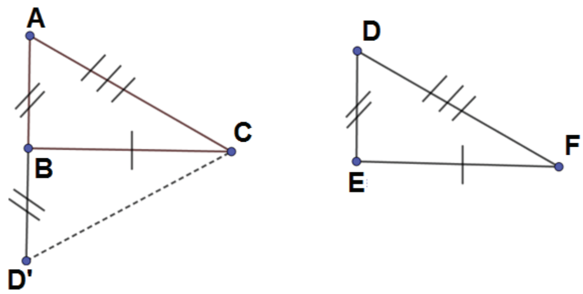


Figura 2.15: Triângulos com as condições do teorema e B ∈ $\overline{AB}$.

Neste caso, $\hat{A}$ é congruente a $\hat{D}'$, pelo Teorema do Triângulo Isósceles, e, por transitividade, $\hat{A} \cong \hat{D}$. Novamente pelo caso L.A.L, obtemos △ ABC ≅ △ DEF.

Os outros dois casos, H = C ou B - C - H, são exatamente análogos aos casos anteriores.

■

Agora, apresentaremos o Teorema do Ângulo Externo para triângulos, o que nos permitirá demonstrar mais um caso de congruência de triângulos, o caso L.A.A_o.

Definição 2.1.19. *Considere o triângulo △ ABC. Se C está entre B e D então $A\hat{C}D$ é um ângulo externo do triângulo △ABC(Figura 2.16).*

Neste caso, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são os ângulos internos não adjacentes ao ângulos externo A$\hat{C}$D.

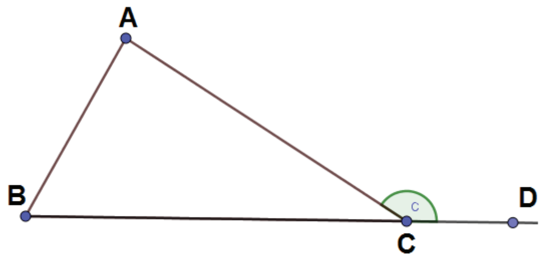


Figura 2.16: Triângulos com as condições da definição 2.1.19

Teorema 2.1.20 (Teorema do ângulo externo)**.** *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um de seus ângulos internos não adjacentes.*

Demonstração: Considere um triângulo qualquer △ABC.

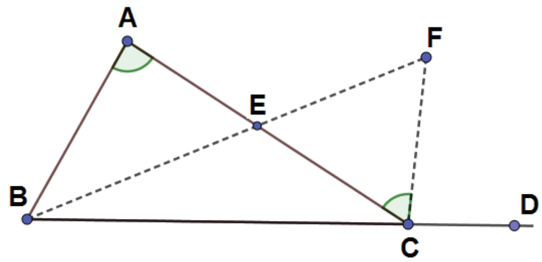


Figura 2.17: Triângulos com as condições do teorema 2.1.20

Seja D um ponto tal que C está entre B e D; vamos demonstrar que

$$A\hat{C}D > \hat{A} \text{ e } A\hat{C}D > \hat{B}.$$

Seja E o ponto médio de $\overline{AC}$ e seja F o ponto da semirreta oposta a $\overrightarrow{EB}$ tal que EF = EB.

Temos △ BEA ≅ △ FEC pelo caso L.A.L., já que $\overline{AE} \cong \overline{CE}$ e $\overline{BE} \cong \overline{FE}$ por construção e B$\hat{E}$A ≅ F$\hat{E}$C, pois são ângulos opostos pelo vértice. Portanto, $\hat{A}$ ≅ E$\hat{C}$F ≅ A$\hat{C}$F.

Disso, e verificando que o ponto F é o ponto interior ao ângulo A$\widehat{C}$D,

$$mA\widehat{C}D = mA\widehat{C}F + mF\widehat{C}D,$$

obtemos

$$A\hat{C}D > \hat{A}.$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$A\hat{C}D > \hat{B}.$$

■

Teorema 2.1.21 (4º Caso de congruência de triângulos ou caso L.A.A$_o$). *Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos tais que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$ então $\triangle$ $ABC \cong \triangle$ DEF.*

Demonstração: Considere os triângulos $\triangle$ABC e $\triangle$DEF, e X um ponto da semirreta BC tal que $\overline{BX} = \overline{EF}$. Consideremos inicialmente B - X - C.

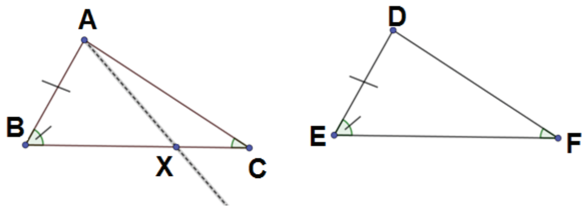


Figura 2.18: Triângulos com as condições do teorema 2.1.21

Pelo Postulado L.A.L. obtemos

$$\triangle \text{ ABX } \cong \triangle \text{ DEF }.$$

Portanto, obtemos

$$A\hat{X}B \cong D\hat{F}E. \tag{2.1}$$

Mas A$\hat{X}$B é um ângulo externo do $\triangle$ AXC, do qual A$\hat{C}$X é ângulo interno não adjacente. Logo, pelo teorema 2.1.20, A$\hat{X}$B >A$\hat{C}$X e, portanto, pela hipótese,

$$mA\hat{X}B > mD\hat{F}E,$$

o que contradiz 2.1. Se tivéssemos B-C-X, demonstraríamos analogamente que mA$\hat{X}$B > mD$\hat{F}$E o que contradiz novamente 2.1. Logo, o ponto X coincide com C, e portanto

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

■

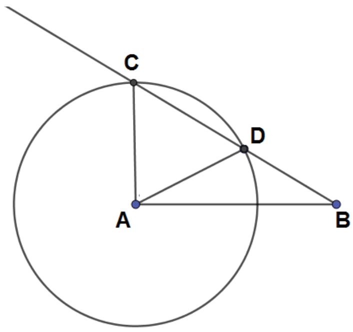


Figura 2.19: Contra exemplo do caso L.L.A.

Observação 2.1.1. *Em geral L.L.A. não fornece um caso de congruência de triângulos, considere a figura a seguir como exemplo:*

Note que os triângulos ABC e ABD não são congruentes, mesmo com $AB = AB$, $AC = AD$ *(pois são raios da mesma circunferência) e os ângulos* $A\hat{B}C \cong A\hat{B}D$. *Dessa forma, temos a condição anterior, mas não temos dois triângulos congruentes.*

2.2 Semelhança

Nesta parte vamos estudar apenas os casos de semelhança de triângulos, que contribuirão de maneira eficiente para este trabalho.

Definição 2.2.1. *Seja S uma correspondência biunívoca entre os vértices de dois triângulos. Se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, então a correspondência S é uma semelhança, e dizemos que os triângulos são semelhantes.*

Escrevemos $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ *para denotar que o triângulo* $\triangle ABC$ *é semelhante ao triângulo* $\triangle DEF$*, com a correspondência que leva A em D, B em E e C em F.*

Considere os triângulos △ABC e △DEF como na figura 2.19.

Observação 2.2.1. *Se* $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ *temos que* $mB\hat{A}C = mE\hat{D}F, mA\hat{B}C = mD\hat{E}F$ *e* $mA\hat{C}B = mD\hat{F}E$, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$.

*O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de **razão de proporcionalidade** ou **razão de semelhança** entre dois triângulos.*

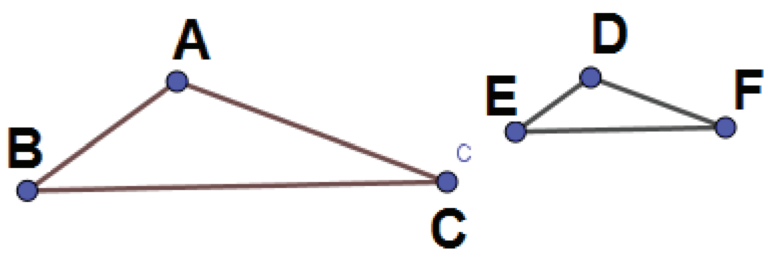


Figura 2.20: Exemplo de triângulos semelhantes

Dois triângulos semelhantes são apresentados na Figura 2.20.

Observe que se dois triângulos são semelhantes com razão de semelhança igual a um, então eles são congruentes.

Os teoremas fundamentais sobre semelhança de triângulos são apresentados a seguir.

Teorema 2.2.2. *(O Teorema de semelhança A.A.A) Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\hat{A} \cong \hat{D}$,$\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.*

Demonstração:

Considere os $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ satisfazendo as hipóteses do teorema.

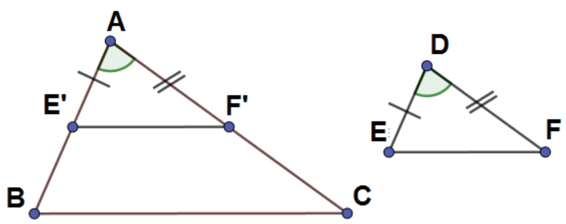


Figura 2.21: Triângulos com as condições do teorema 2.2.2

Consideremos E' e F' pontos de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, tais que AE' = DE e AF' = DF. Pelo postulado 2.1.14 , temos que

$$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF.$$

Portanto A$\widehat{E'}$F' $\cong$ $\widehat{B}$. Assim, $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas ou coincidem. Se coincidem, então, pelo caso de congruência A.L.A., temos $\triangle AE'F' \cong \triangle ABC$, e, portanto, os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são congruentes e daí, semelhantes.

Se $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, então pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade temos

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

Como AE' = DE e AF' = DF temos

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$

Analogamente demonstramos que

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Logo $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. ■

Se dois triângulos tem dois pares de ângulos correspondentes congruentes, o terceiro par de ângulos correspondentes tem também esta propriedade, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, obtemos do teorema anterior o seguinte corolário, o qual será frequentemente usado, ao invés do caso A.A.A. ■

Corolário 2.2.3. *(Corolário A.A.) Seja S uma correspondência entre os vértices de dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência S é uma semelhança.*

Teorema 2.2.4. *(O Teorema de Semelhança L.A.L.) Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\hat{A} \cong \hat{D}$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.*

Demonstração:

Considere os triângulos △ABC e △DEF satisfazendo as hipóteses do teorema.

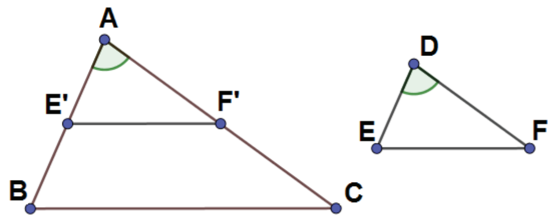


Figura 2.22: Triângulos com as condições do teorema 2.2.4.

Considere E' e F' pontos de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ respectivamente, tais que AE' = DE e AF' = DF. Temos

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

Portanto, temos que se uma reta corta dois lados de um triângulo dividindo-os na mesma razão, então ela é paralela ao terceiro lado. Isso decorre do teorema de Tales o qual não foi demonstrado nesse texto (a demonstração desse resultado é encontra no livro de geometria plana tomado como embasamento). Assim, obtemos que $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas e duas reta paralelas cortadas por uma transversal formam pares de ângulos correspondentes congruentes, temos que $\hat{B} \cong A\hat{E'}F'$ e $\hat{C} \cong A\hat{F'}E'$.

Pelo postulado 2.1.14, os triângulos AE'F' e DEF são congruentes. Portanto, temos $A\hat{E'}F' \cong \hat{E}$ e $A\hat{F'}E' \cong \hat{F}$.

Então $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$, e pelo Corolário 2.2.3 temos que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

■

Teorema 2.2.5. *(O Teorema de semelhança L.L.L) Se dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são tais que seus lados satisfazem a relação $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.*

Demonstração:

Sejam E' e F' pontos de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, tais que AE'=DE e AF'= DF (Figura 2.23).

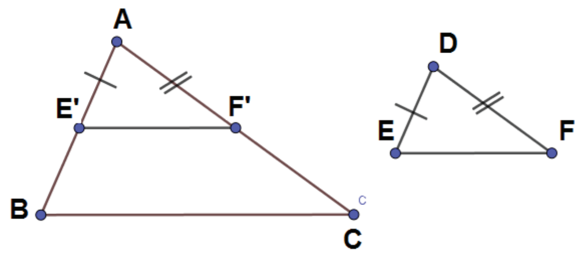


Figura 2.23: Triângulos com as condições do teorema 2.2.5

Pela hipótese decorre $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$. Pelo teorema de Tales temos que $\overleftrightarrow{E'F'}$ é paralela $\overleftrightarrow{BC}$. Temos, duas retas paralelas interseccionada por uma transversal. Logo os ângulos correspondentes formados são congruentes

$$\hat{B} \cong A\hat{E'}F' \quad e \quad \hat{C} \cong A\hat{F'}E'. \tag{2.2}$$

Pelo corolário 2.2.3 temos $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ AE'F'. Portanto $\frac{E'F'}{BC} = \frac{AE'}{AB}$, e, daí,

$$E'F' = BC\frac{AE'}{AB} = BC\frac{DE}{AB}. \tag{2.3}$$

Pela hipótese, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, ou seja ,

$$EF = BC\frac{DE}{AB}. \tag{2.4}$$

De 2.3 e 2.4 segue que E'F' = EF. Então, pelo Teorema 2.1.18 de congruência de triângulos, temos $\triangle AE'F' = \triangle DEF$, e portanto

$$A\hat{E'}F' \cong \hat{E} \quad e \quad A\hat{F'}E' \cong \hat{F}. \tag{2.5}$$

Por 2.2 e 2.5 temos $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$. E, do Corolário A.A., segue o resultado. ■

Capítulo 3

Relações na sala de aula

3.1 Objetivos

O computador auxilia os alunos a desenvolver seu conhecimento por simulações, construções e conjecturas. Esta etapa envolve planejamento das aulas e definição dos objetivos, para que não seja o uso meramente do computador.

Dessa forma, o objeto principal desse trabalho foi inserir computador em aula, através do software GeoGebra, utilizando a álgebra e a geometria para a construção de conhecimentos matemáticos, que podem ser usados para resolução de problemas em outras áreas. resolução de problemas em outras áreas da matemática.

Os objetivos específicos incluem a verificação pelo aluno dos conceitos de triângulo retângulo, sua altura referente a hipotenusa, validades das razões métricas e utilização das mesmas para calcular as medidas de seus principais elementos.

3.2 Materiais e Métodos

O trabalho foi desenvolvido em uma escola particular, com alunos do 9° ano do Ensino Fundamental II, após autorização prévia dos responsáveis que assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido da Pesquisa. Foi utilizado o software GeoGebra (5.0.374.0-3D).

3.3 Descrição da escola, dos alunos e do projeto.

3.3.1 Escola e do município

A Escola Artemaior está localizada na Rua 13 de maio, número 78, centro da cidade de Mirassol, no estado de São Paulo. A cidade de Mirassol está localizada no interior do estado de São Paulo, e possui 53.792 habitantes, em uma área de 243,228 km^2. Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2015), havia no município: 17 escolas com ensino pré-escolar, 18 com Ensino Fundamental e 11 ensino médio. A Escola Artemaior foi fundada inicialmente Escola de Educação Musical em 1981, pela professora Zuleica de Carvalho Moreira e diretora da mesma. Transformou em colégio Artemaior em 1996. No início com Educação Infantil e após o Ensino Fundamental e, em 2001 com Ensino Médio. Atualmente consta de duas unidades. A mesma foi escolhida como campo do trabalho, uma vez que exerço o magistério na mesma há dois anos. Nesse período, observei as dificuldades dos alunos nos conceitos de triângulo retângulo e suas métricas.

3.3.2 Alunos no projeto.

Os alunos envolvidos no projeto foram do 9° ano do Ensino Fundamental II do período diurno. A turma possuía 24 alunos matriculados, porém a aula do projeto foi em horário extracurricular. Desta forma sendo assim nem todos participaram, totalizando 14 alunos participantes. A maioria dos discentes não possuía uma rotina de estudos diária em casa. Desse modo, não recordavam os conceitos abordados no projeto. Por tal motivo, os conceitos foram revisados em aulas anteriores. Os alunos demonstram interesse em sala de aula, porém muitas vezes as atividades não são completadas na sua totalidade ou de forma adequada pela falta de tempo hábil. O uso de celulares ou de qualquer outro tipo de tecnologia é proibido na sala de aula, com exceções quando o professor vai utilizá-los em alguma atividade para auxiliar na aprendizagem. De forma geral, os alunos apreciam utilizar meios tecnológicos em sala de aula por facilitar as operações matemáticas e agilizar as resoluções de exercícios propostos. Entretanto, nem sempre é possível o uso destes recursos. A idade dos discentes envolvidos no projeto é de 13 a 14, sendo que do total foram 04 do gênero feminino e 10 do gênero masculino. Os responsáveis de todos os alunos participantes assinaram Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Figura 3.1: Alunos participantes do projeto. Mirassol, 2017.

3.3.3 Professor aplicador.

Estudei em Mirassol durante todo meu ensino fundamental e médio, cidade na qual resido. No início em escola particular e no 8^{o} ano (7^{a} série) fui transferido para escola pública. No ensino médio já percebi a aptidão para matemática, e então prestei vestibular para Licenciatura em Matemática, que conclui pela Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, campos de São José do Rio Preto (IBILCE- UNESP), em 2010.

Após a faculdade lecionei em escola pública do município, sendo que 2014 ingressei em escola particular. Em 2015, decidi aprimorar meus conceitos e me inscrevi no processo de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), no IBILCE, no qual fui aprovado. Em 2016, fui admitido na escola na qual desenvolvi o projeto, sendo que leciono do 6^{o}

ano até a 3ª Série do Ensino Médio.

3.4 Apresentação do GeoGebra

GeoGebra é um software de matemática dinâmica, utilizando geometria, álgebra e cálculo. Foi desenvolvido para aprendizagem e ensino da matemática nas escolas por Markus Hohenwarter e uma equipe de programadores. Pode ser instalado gratuitamente no próprio site, ao realizar o download do mesmo (Hohenwarter, 2017).

Inicialmente apresentei a interface do GeoGebra, suas ferramentas e algumas construções básicas para desenvolver a temática de relações métricas no triângulo retângulo.

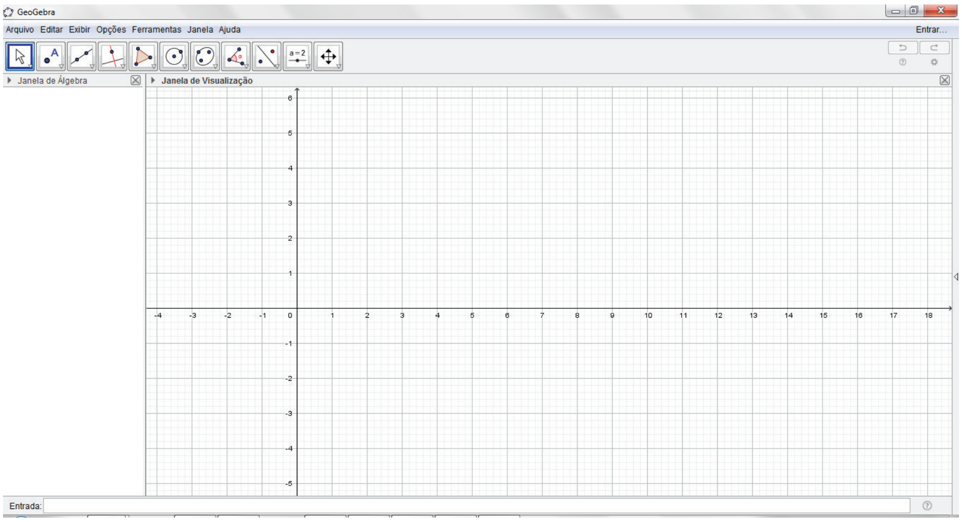


Figura 3.2: Interface inicial do GeoGebra.

3.4.1 Ferramentas

Neste momento, descreveremos algumas ferramentas do software GeoGebra.

O símbolo (Inserir pontos)  é usada para inserir pontos. Também é possível inserir pontos utilizando forma algébrica no painel de entrada de comandos (figura 3.3).

O simbolo (Mover janela de visualização)  movimenta os eixos coordenados.

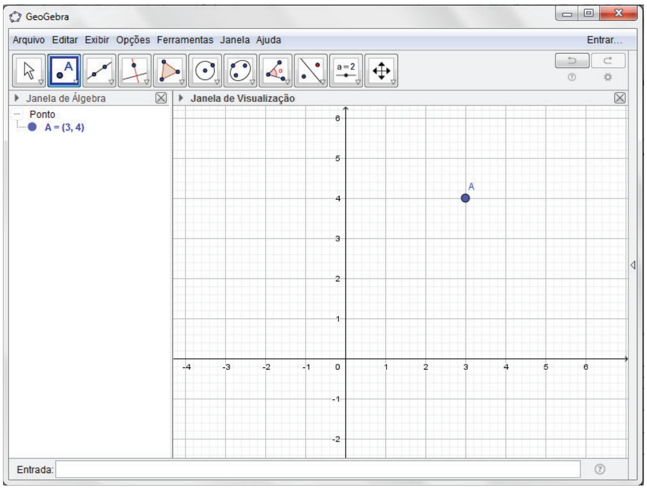


Figura 3.3: Incluindo ponto.

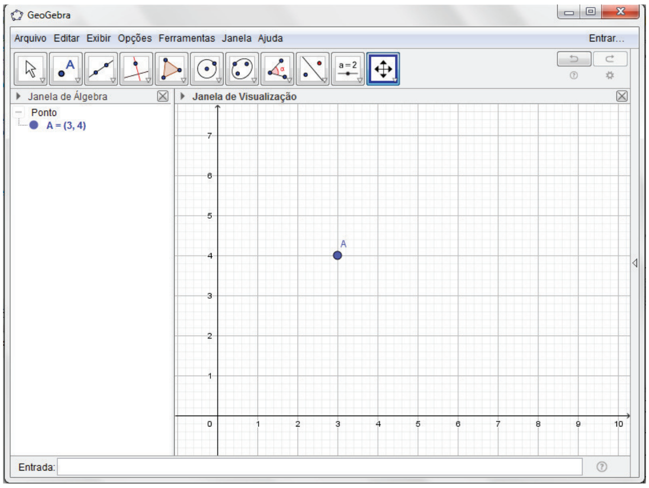


Figura 3.4: Movendo os eixos coordenados.

A ferramenta (Polígono)  é usada para construir polígonos, e será útil na construção de triângulos. Ao clicarmos na ferramenta basta irmos inserindo o local onde ficaram os pontos dos nossos polígonos (Figura 3.5).

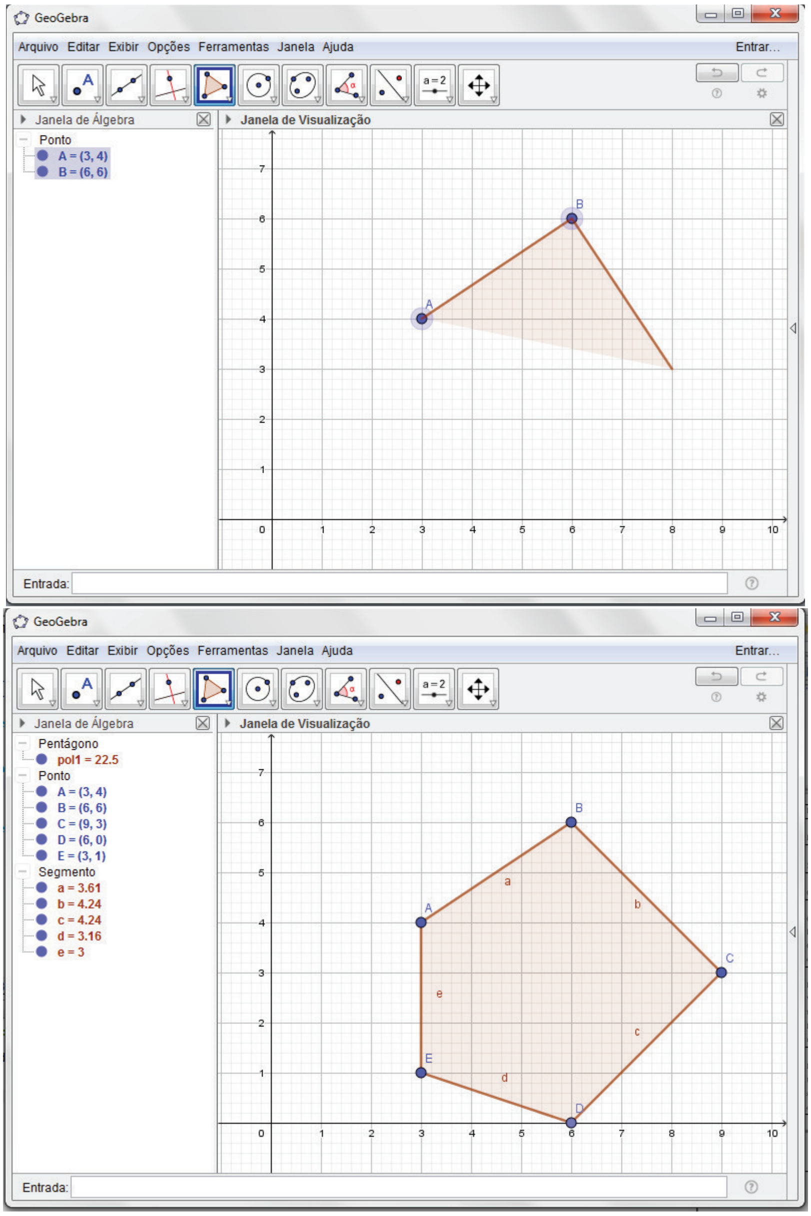


Figura 3.5: Construindo polígonos.

Agora vamos construir uma reta perpendicular a um segmento por um ponto dado utilizando a seguinte ferramenta (Reta perpendicular) , por exemplo a que temos na figura 3.6 e 3.7.

E clicando com o botão direito do mouse no segmento de reta e depois no ponto dado teremos uma reta perpendicular passando pelo ponto dado.

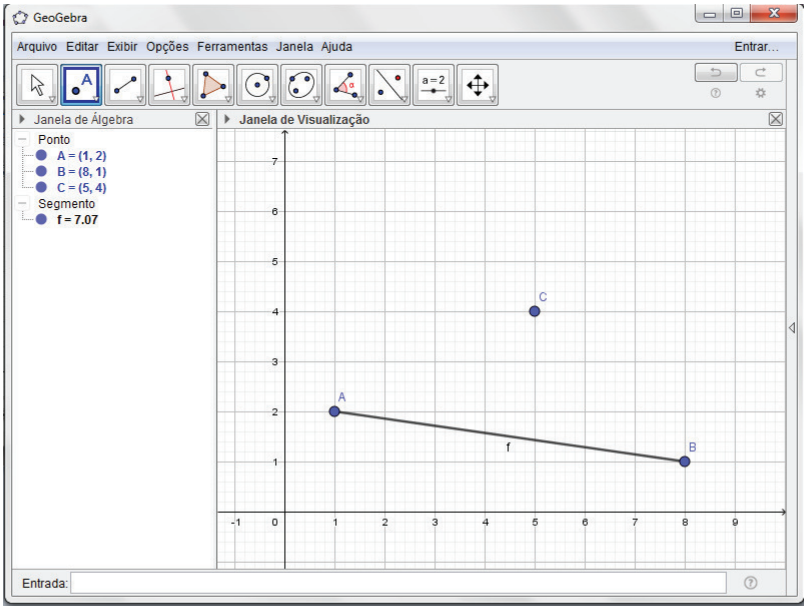


Figura 3.6: Segmento de reta e um ponto

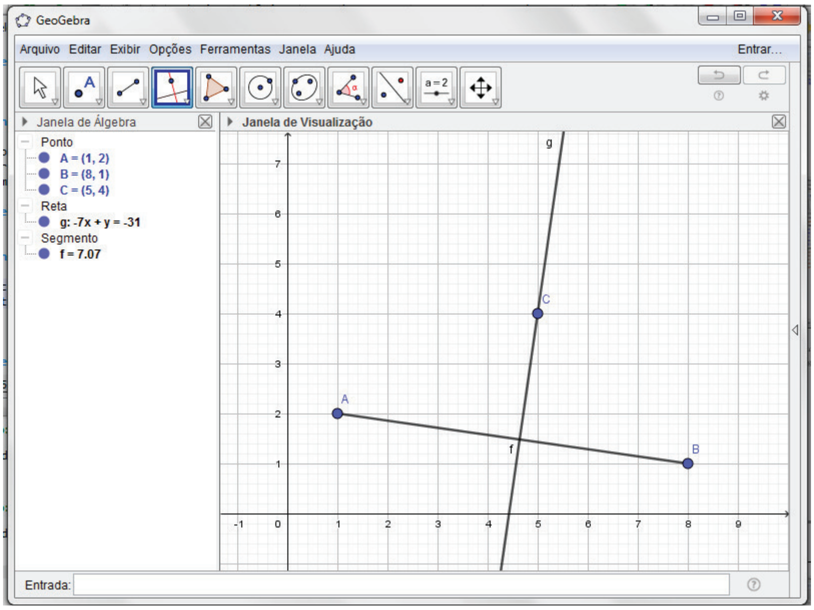


Figura 3.7: Reta perpendicular a um segmento de reta por uma ponto dado.

Para medir ângulos é utilizada a ferramenta (Ângulo) . Na figura 3.8 temos um ângulo e usaremos a ferramenta para medi-lo.

Agora no sentido anti-horário para medirmos teremos que clicar primeiro na segmento $\overline{AB}$ e depois no segmento $\overline{BC}$ e dessa forma conseguimos medir o ângulo $A\widehat{B}C$. Olhar

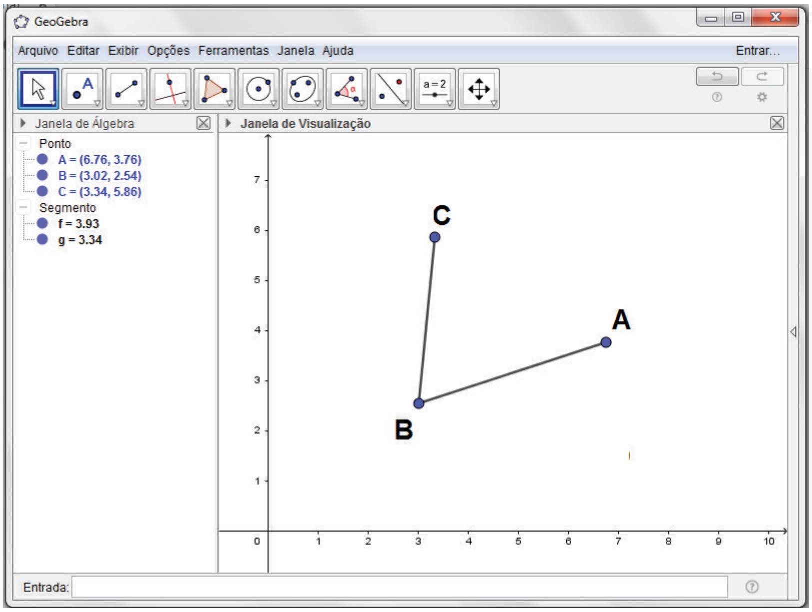


Figura 3.8: Um ângulo qualquer

(Figura 3.8 e 3.9).

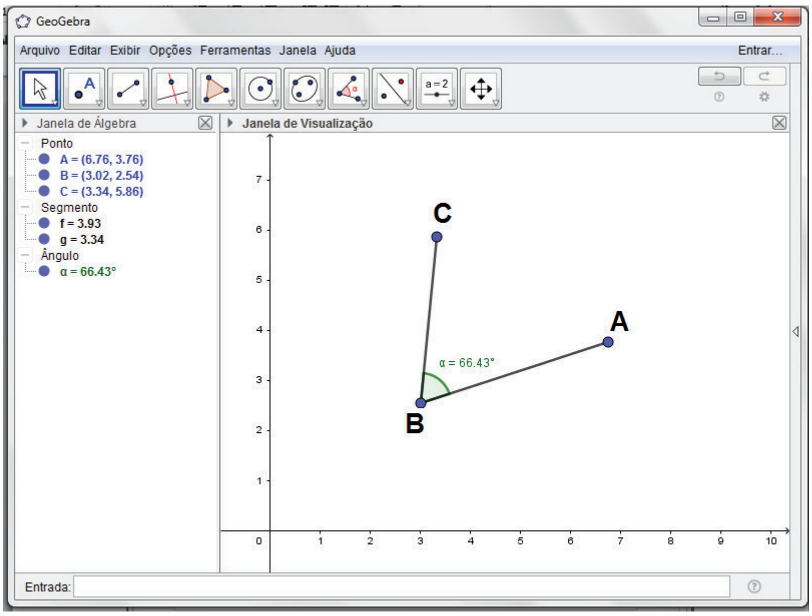


Figura 3.9: Medida do ângulo.

Essa ferramenta será importante para mostrarmos que os triângulos são semelhantes. A próxima ferramenta mede o comprimeto de segmentos e é a seguinte . Podemos usar da seguinte forma, temos um segmento dado como o da Figura 3.11 clicando nos pontos das extremidades do segmento teremos a medida deste, aparecendo próximo ao mesmo.

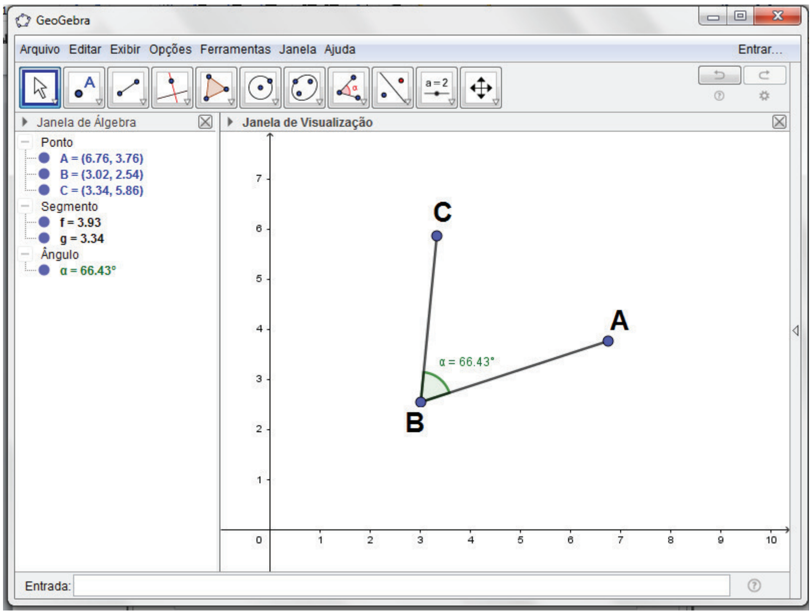


Figura 3.10: Um segmento qualquer.

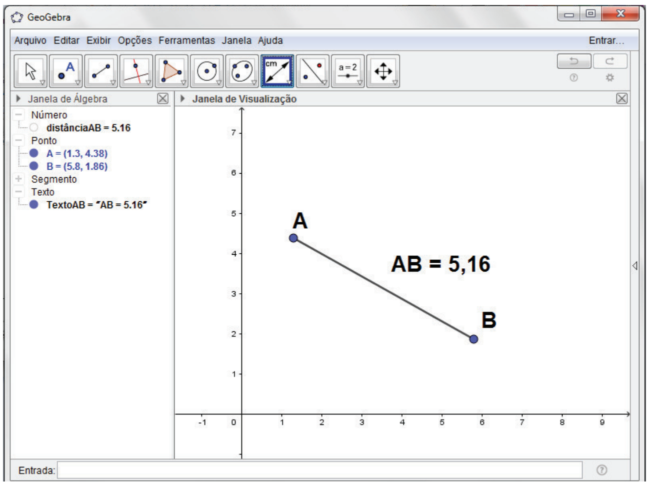


Figura 3.11: Medida do segmento.

É com essa ferramentas que trabalhamos com os alunos desse projeto, porém no software do GeoGebra existem várias outras.

Após minha exposição sobre os comandos do software, permiti que os alunos manipulassem as ferramentas e realizassem construções livres(Figura 3.12).

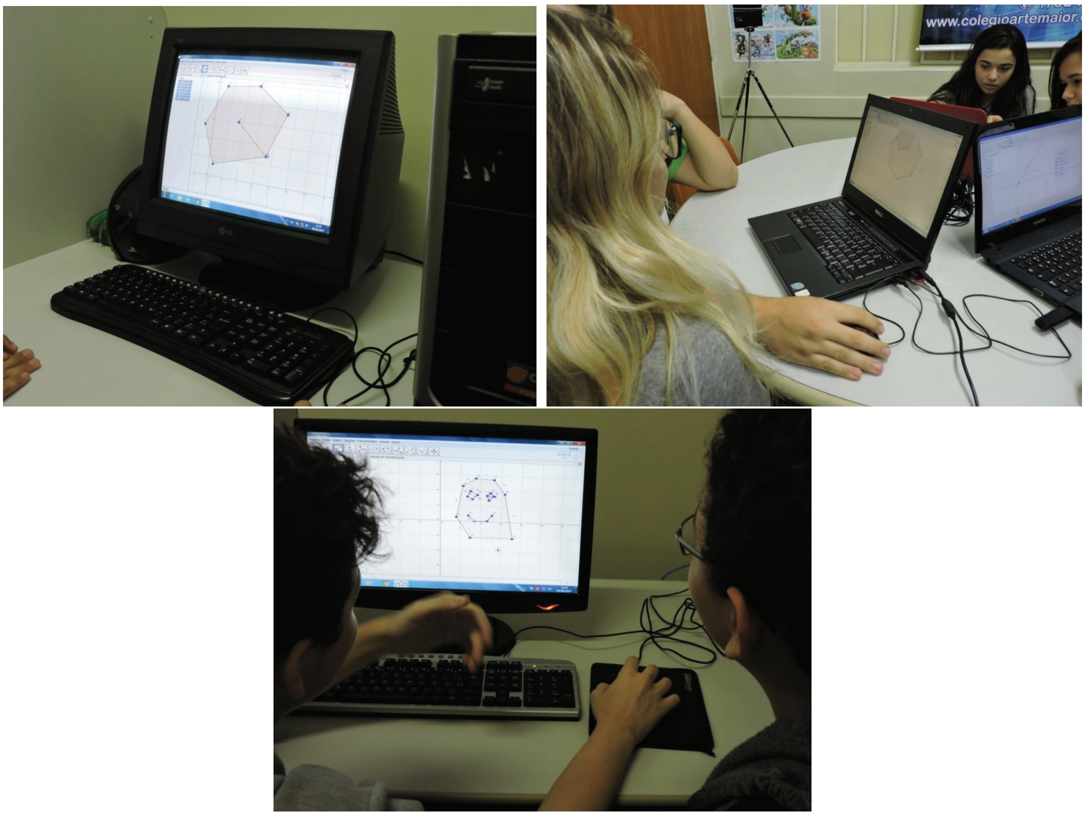


Figura 3.12: Construção livre dos alunos no GeoGebra

Após a construção livre, foi perguntado aos alunos, as seguintes perguntas:

O que a palavra métrica significa?

Sendo as respostas unânimes: Medida.

O que é um triângulo retângulo?

Aquele que tem ângulo reto, respostas unânimes.

O que foi complementado com a explicação que ângulo reto mede 90º.

Foi solicitado a turma que tentassem fazer a construção de um triângulo retângulo. Essa foi realizada rapidamente e sem maiores dificuldades olhe figura 3.13.

Os alunos mediram os ângulos do triângulo construído. Os mesmos perceberam que muitas vezes os triângulos não apresentaram o ângulo de 90º, mas sim medidas próximas,

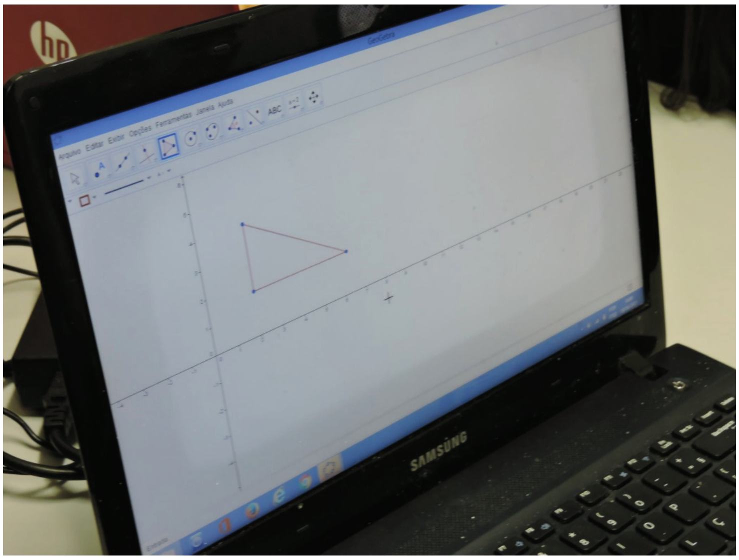


Figura 3.13: Construção do triângulo retângulo pelos alunos.

como 89,76º; pois os mesmos foram construídos sem a ferramenta de retas perpendiculares (figura 3.14).

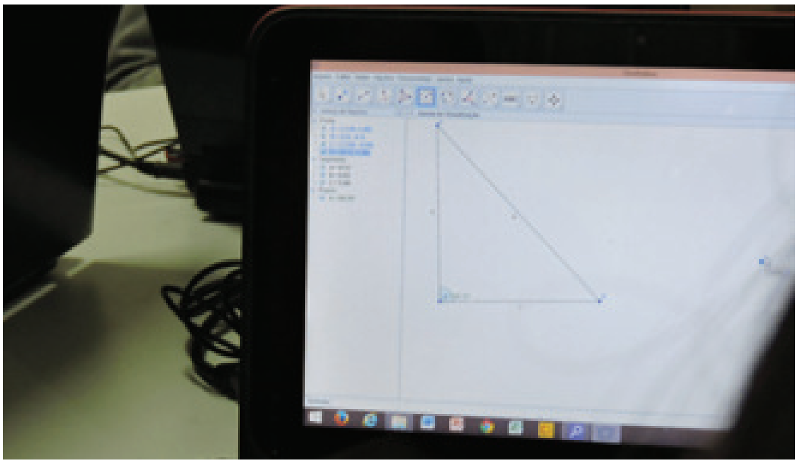


Figura 3.14: Triângulo não retângulo construído por aluno.

Depois foi construído com os alunos, um triângulo retângulo, mostrando a eles que podemos construí-lo a partir dos eixos coordenados, pois eles são perpendiculares e utilizando as triplas pitagóricas. Inicialmente é marcado o ponto A na origem dos sistemas com a ferramenta 

figura 3.15.

E com a mesma ferramenta são marcado os pontos B (8,0) e C (0,6) figura 3.16.

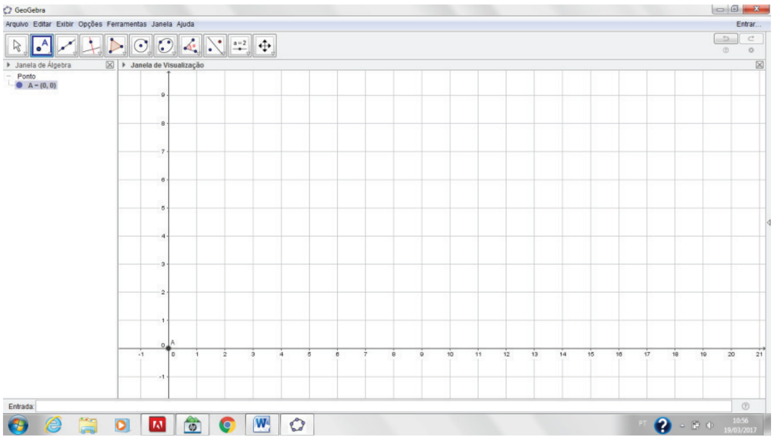


Figura 3.15: Marcação do ponto A na origem dos sistemas

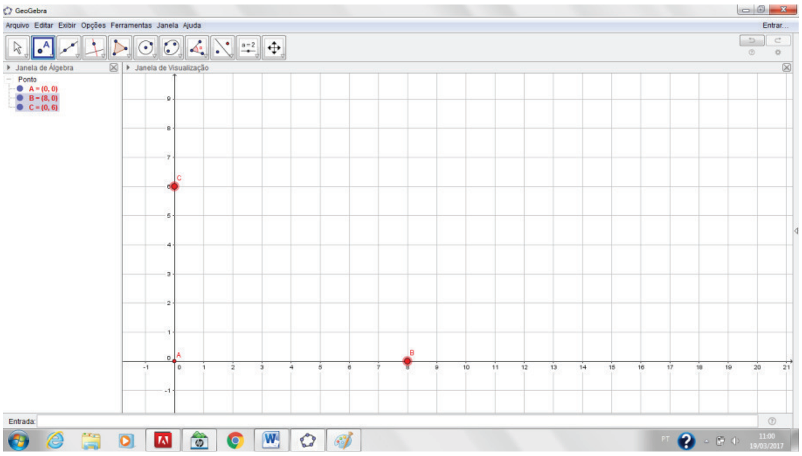
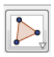


Figura 3.16: Marcação dos pontos B (8,0) e C (0,6)

E finalmente com a ferramenta polígono  é feito o triângulo figura 3.17.

Os alunos realizaram a atividade e foi introduzido o conceito sobre altura relativa a hipotenusa.

Altura de um triângulo é um segmento de reta perpendicular a reta suporte do lado do triângulo, traçado pelo vértice oposto. Esse lado é chamado base do triângulo, e o ponto onde a altura encontra a base é chamado de pé da altura.

Aos alunos foi solicitados a tentar traçar essa altura, sendo que foram indagados aos mesmos quantas alturas o triângulo tem, com respostas: "Uma","Três". Pediu-se para que os alunos traçassem uma reta perpendicular passando pelo ponto P. Para isso utiliza-se a ferramenta . clicando no ponto A e depois no segmento BC olhe a figura 3.18.

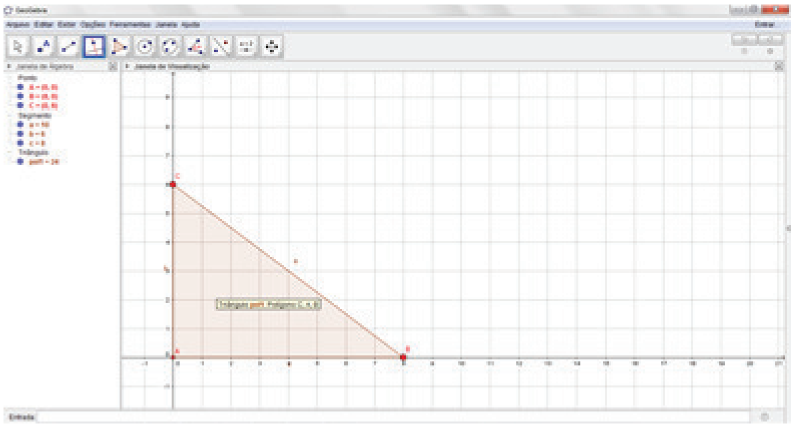


Figura 3.17: Triângulo retângulo

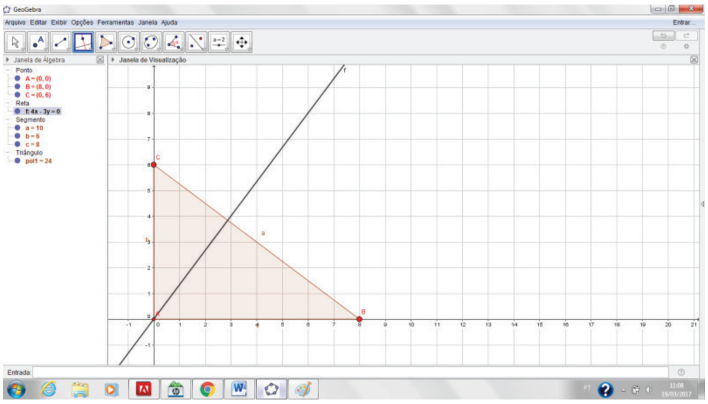
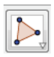


Figura 3.18: Altura do triângulo retângulo

Foi perguntado aos alunos quantos triângulos havia na figura depois da altura traçada. Alguns alunos responderam: “Dois”. Outro aluno respondeu “Três”. Foi mostrado a eles que se formam três triângulos. Com a ferramenta polígono  foi realizado dois triângulos, o triângulo ABD e o triângulo ACD onde estes dois triângulos são semelhantes e mostrados pela ferramenta de ângulos. olhe a figura 3.19.

Todos os alunos realizaram a atividade (Figura 3.18 e 3.19) e após foi interrogado:

Esses três triângulos se parecem?

Sim, todos afirmaram.

Esses três triângulos são semelhantes?

Sim, todos afirmaram.

Qual o porquê destes triângulos serem semelhantes? Porque os ângulos são iguais, foi

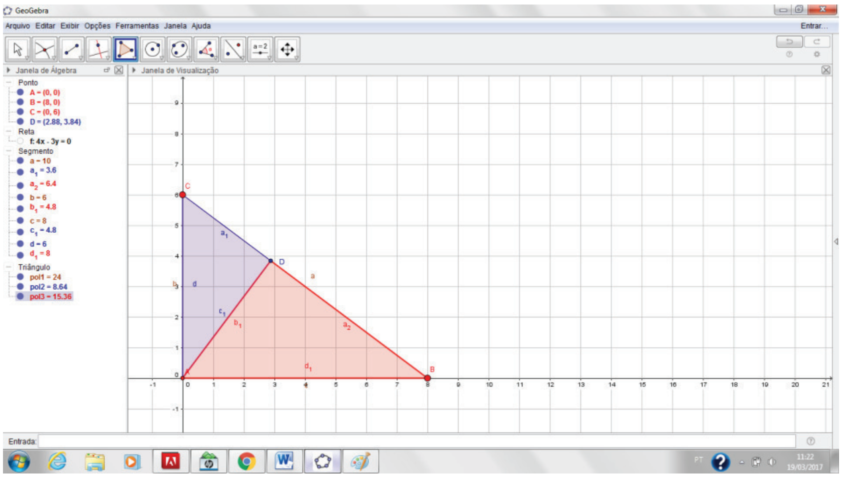
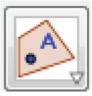
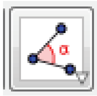


Figura 3.19: Triângulos no triângulo retângulo

uma das respostas. Como vocês sabem que os ângulos são iguais? Vocês mediram os ângulos?

Diante da negativa foi monstrado como medir os ângulos e os alunos fizeram essa aferição. Com a ferramenta ponto sobre objeto  faz-se um ponto sobre o segmento CD e outro ponto sobre o segmento DB assim tem-se os pontos E e F, respectivamente. Com a ferramenta ângulos  mede-se os ângulos dos triângulos. Veja a figura 3.20.

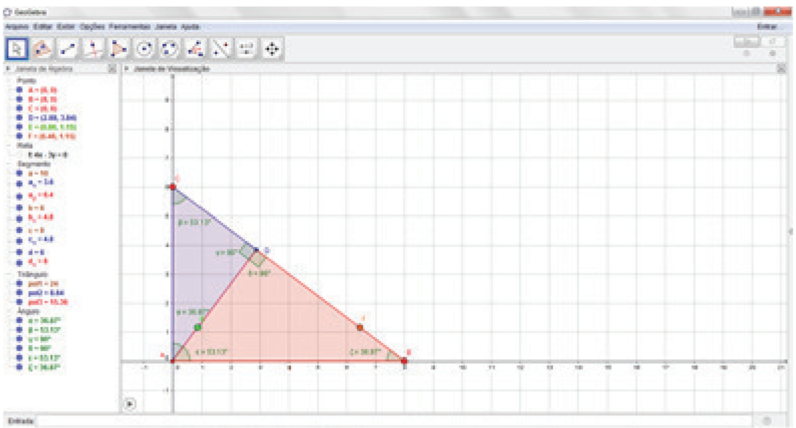


Figura 3.20: Medidas dos ângulos do triângulo retângulo

Com isso mostra-se que a altura forma o ângulo de 90° com o lado desse triângulo. Com os ângulos podemos mostrar que esses 3 triângulos ABC, DAC e DBA são semelhantes pelo caso (A, A, A) (ângulo, ângulo, ângulo). Assim, foi perguntado após a atividade se realmente os triângulos eram semelhantes, sendo a resposta Sim, porque possuem três ângulos iguais (congruentes). Foi criado outro triângulo congruente ao ABC para mostrar que se tiver outro ponto animado nesse triângulo ele também será semelhante aos outros dois DAC e DBA (figura 3.21).

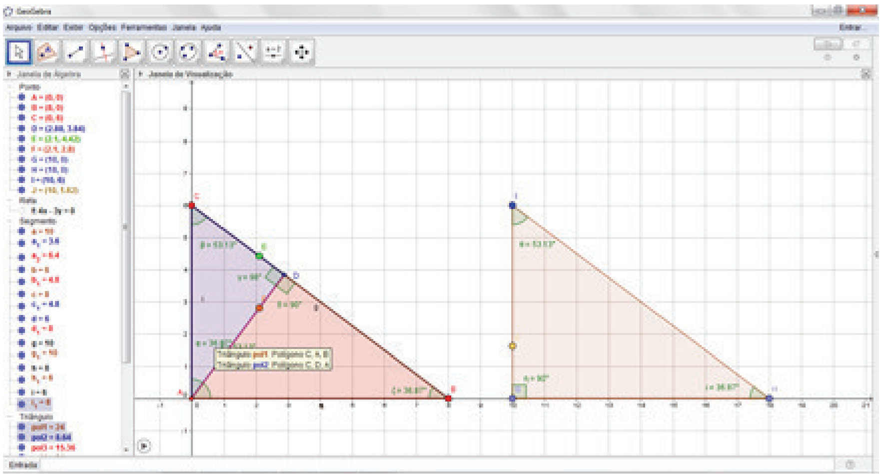


Figura 3.21: Medidas dos ângulos do triângulo retângulo

Assim que os alunos se familiarizarem com o triângulo retângulo e tendo conhecimento dos elementos desse triângulo, incluindo sua altura não perpendicular ao eixo x isto é, a perpendicular a reta suporte ao lado do triângulo (hipotenusa). A partir desses conhecimentos foi estabelecido as relações métricas no triângulo retângulo, conforme segue.

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a.n$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a.m$$

$$\triangle ABD \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = n.m$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow a.h = b.c$$

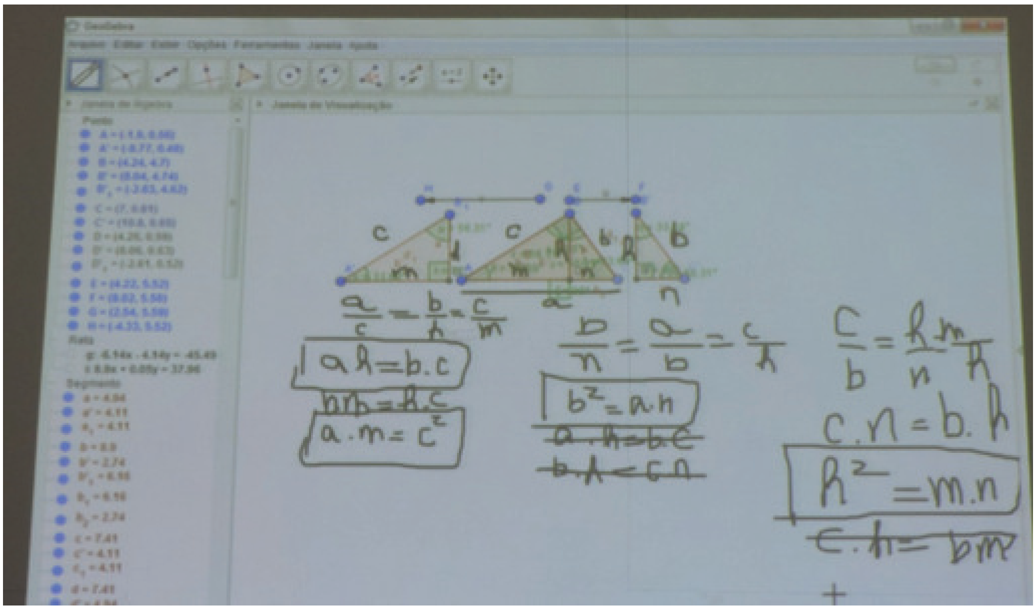


Figura 3.22: Construção das fórmulas dos triângulos retângulos

Por esse estudo pode-se demonstrar também o Teorema de Pitágoras. Porém, o mesmo não foi abordado nesta aula.

Um dos alunos perguntou sobre como instalar o programa no computador foi explicado que é um programa gratuito e que pode ser instalado no computador ou celular. Um dos alunos já havia instalado no celular o programa.

Os alunos foram interrogados sobre a metodologia, sendo que a maioria aprovou entre as respostas citadas: Mais explicativa, Mais didática, Eu gostei. Um aluno disse que prefere o método tradicional de ensino.

3.5 Conclusão

A partir do estudo com a utilização do GeoGebra foi possível observar que o uso de metodologia diferentes, auxiliam no aprendizado do aluno, tornando a aula mais dinâmica e visual, facilitando a compreensão do objeto de estudo e no raciocínio proporcionando a construção do conceito. Constatou-se que os objetivos propostos foram atingidos, complementando o aprendizado dos alunos.

Referências Bibliográficas

[1] BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.** 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010. 104 p.

[2] COLEGIO ARTEMAIOR. **O colégio, quem somos**. Disponível em: ¡ *http : //www.colegioartemaior.com.br/novo/4_Quem − Somos_ct.html* > *Acessoem* : 20*nov*.2017.

[3] DANTE, L. R. **Matemática Dante**. 1ed. São Paulo: Ática, 2005, p. 171-173

[4] HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. **Ajuda GeoGebra: Manual Oficial de Versão 3.2**. Tradução e adaptação para o português Antonio Ribeiro. Disponível em: < *http : //www.geogebra.org.br/help/docupt*$_P$*T.pdf* > .*Acessoem* : 20*nov*.2017.

[5] IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Mirassol: infográficos**. Disponível em: < *http : //cidades.ibge.gov.br/xtras/temas.php?lang* = &*codmun* = 353030&*idtema* = 156&*search* = *sao* − *paulo*|*mirassol*|*ensino* − *matriculas* − *docentes* − *e* − *rede* − *escolar* − 2015 > .*Acessoem* : 20*nov*.2017.

[6] LAMAS, R. C. P.; MENDES, I. **GeoGebra Animações geométricas**. 1 ed. Curitiba: Appris, 2017.

[7] PAIVA, M. **Matemática Paiva**. 1 ed. São Paulo: Editora Moderna, 2009, p. 58-79.

[8] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas.** 2. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2012.

[9] SOFTWARE GEOGEBRA. Disponível em $< http : //www.geogebra.org/download > > .Acessoem : 20nov.2017.$

[10] TATTO, F.; SCAPIN, I. J. **Por que o nível elevado de rejeição?**. Revista de Ciências Humanas. Rio Grande do Sul: Editora URI, n. 5, abr 2004.

Capítulo 4

Anexo

ANEXO I: Plano de aula

Tema: Relações métricas no triângulo retângulo com o GeoGebra

Duração: 2 aulas

1) **Dados de identificação**

Escola: Escola de Educação Musical Artemaior

Professor: Karl Marlow Pires

Disciplina: Matemática **Serie:** 9° Ano do ensino fundamental II **Período:** Diurno.

2) **Objetivo geral:** Ensinar os conceitos de relações métricas no triangulo retângulo
3) **Objetivos específicos:**

   Altura de triângulos

   Medidas dos ângulos em triângulos

   Catetos e hipotenusa

   Ângulo reto
4) **Conteúdo**

   O que o aluno poderá aprender com esta aula?

   As relações métricas nos triângulos retângulos.

   E iniciar a utilização do software GeoGebra.
5) **Desenvolvimento do tema**

   <u>1° Momento</u>

   Apresentação do software GeoGebra

   Ferramentas do GeoGebra

   Utilização do GeoGebra

   <u>2° Momento</u>

   Construções geométricas

   Elaboração dos conceitos das relações métricas no triângulo retângulo

   Resolução de exercícios
6) **Recursos didáticos:** Computador, Software, Projetor.
7) **Avaliação:** Por meio da participação dos alunos nas atividades propostas.

Referências Bibliográficas

HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. Ajuda GeoGebra: Manual Oficial de Versão 3.2. Tradução e adaptação para o português Antonio Ribeiro. Disponível em: <http://www.geogebra.org.br/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2017.

SOFTWARE GEOGEBRA. Disponível em <http:// www.geogebra.org/download \textgreater>. Acesso em: 20 nov. 2017.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 16/02/2018

Karl M Pires

Assinatura do autor