UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Ricardo Sampaio

# Matrizes no estudo e na resolução de sistemas lineares

São José do Rio Preto
2018

Ricardo Sampaio

# Matrizes no estudo e na resolução de sistemas lineares

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco

São José do Rio Preto
2018

Sampaio, Ricardo.
Matrizes no estudo e na resolução de sistemas lineares / Ricardo Sampaio. -- São José do Rio Preto, 2018
62 f. : il.

Orientador: Évelin Meneguesso Barbaresco
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Matrizes (Matemática) 3. Sistemas lineares. 4. Matemática – Metodologia. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Ricardo Sampaio

# Matrizes no estudo e na resolução de sistemas lineares

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Profª. Drª. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Anderson Paião dos Santos
UTFPR – Campus de Cornélio Procópio

São José do Rio Preto
01 de março de 2018

# RESUMO

Os sistemas de equações lineares são muito úteis, pois podem modelar matematicamente diversos problemas em Estatística, Física, Química, Engenharia, Administração, Economia, enfim, em várias áreas do conhecimento. Historicamente, o cálculo de soluções desse tipo de sistema pelos chineses motivou o surgimento das matrizes, que, grosseiramente falando, são tabelas de elementos distribuídos em linhas e colunas. O uso de matrizes facilita o estudo e também a resolução de sistemas lineares, pois simplificam a notação e padronizam os procedimentos. O método do escalonamento de matrizes, por exemplo, é uma técnica que pode ser utilizada em sistemas lineares em geral, além de ser facilmente automatizada devido ao seu algoritmo. O objetivo deste trabalho é apresentar alguns conceitos e resultados sobre matrizes e sistemas lineares e abordar a relação entre eles, além de propor alguns problemas que podem ser resolvidos utilizando esses resultados. Professores do Ensino Médio podem utilizar tais problemas em sala de aula para trabalhar esse assunto com seus alunos.

Palavras-chave: Matrizes. Sistemas lineares. Escalonamento. Ensino de Matemática.

## ABSTRACT

*The systems of linear equations are very useful because they can mathematically model several problems in Statistics, Physics, Chemistry, Engineering, Administration, Economics, and finally, in various areas of knowledge. Historically, the computation of solutions of this type of system by the Chinese motivated the emergence of matrices, which, roughly speaking, are tables of elements distributed in rows and columns. The use of matrices facilitates the study and the resolution of linear systems because they simplify the notation and standardize the procedures. The Echelonment method, for example, is a technique that can always be used in linear systems in general, besides being easily automated due to its algorithm. The objective of this work is to present some concepts and results about matrices and linear systems and to approach the relation between them, besides proposing some problems that can be solved using these results. High school teachers may use such problems in the classroom to work on this subject with their students.*



*Keywords*: *Matrices*. *Linear systems*. *Echelonment*. *Mathematics Teaching*.

# AGRADECIMENTOS

A Deus, primeiramente, pelas oportunidades e por não desistir de mim.

À Alexsandra, amor da minha vida, pelo suporte, pela força e por estar sempre ao meu lado.

Aos meus pais, José Carlos e Maria, pela criação, pela educação, pelo auxílio na formação do meu caráter e por sempre acreditarem no meu potencial.

À Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco, minha orientadora, pelo apoio, pela paciência e pelas ótimas ideias.

Aos professores do PROFMAT do polo de São José do Rio Preto, pela compreensão das minhas limitações ao cursar as disciplinas.

Aos colegas do curso, pela companhia, pelos esclarecimentos e pela ajuda ao longo desses últimos anos.

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade, em diversas áreas do conhecimento, muitos problemas são modelados matematicamente por sistemas de equações lineares. Os sistemas com duas equações lineares já eram considerados pelos babilônios por volta de 1800 a.C. e resolvidos por um método que chamamos hoje de *método de eliminação gaussiana* (que consiste em transformar a matriz ampliada, associada ao sistema linear, numa matriz triangular superior através de transformações elementares, obtendo, assim, um sistema equivalente ao inicial, que pode ser resolvido por substituições regressivas), em homenagem a Carl Friedrich Gauss (Alemanha, 1777-1855), considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Os sistemas lineares são muito úteis em várias situações de diversas áreas, como Engenharia, Física, Química, Economia, Estatística, Administração, entre outras. Por exemplo, em projetos de construção de estruturas metálicas, em circuitos elétricos fechados (Lei de Kirchhoff), no balanceamento de reações químicas etc.

Uma ferramenta muito útil para encontrar soluções de sistemas lineares são as matrizes, que surgiram por volta do ano 200 a.C. com os chineses, motivados pelo interesse em calcular soluções de sistemas com mais de quatro equações lineares. No Capítulo 8 do texto intitulado *Jiuzhang suanshu*, que significa *Nove capítulos sobre a Arte Matemática*, de autor desconhecido, fica claro que o procedimento de resolução de sistemas lineares usado pelos chineses é semelhante ao *método do escalonamento*, que é visto na Seção 2.5 deste trabalho e é apresentado na forma de matrizes. Cabe observar que os chineses só consideravam sistemas lineares com o mesmo número de equações e incógnitas, não constando em seus escritos o motivo desses sistemas produzirem sempre uma única solução e como o algoritmo chinês funcionava.

Com o advento da computação e a crescente necessidade de se guardar muita informação, as matrizes adquiriram uma grande importância. Por exemplo, o que vemos na tela do computador é uma enorme matriz, e que cada valor guardado nas linhas e colunas da matriz representa um ponto colorido mostrado na tela (*pixel*). Na computação gráfica, as matrizes são utilizadas na rotação, mudança de escala, translação e composição de transformações geométricas.

Desse modo, os conteúdos sobre matrizes e sistemas lineares fazem parte do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012), elaborado pela Secretaria de Educação, e devem ser abordados no 2º bimestre letivo da 2ª série do Ensino Médio.

De acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, na publicação que trata sobre *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, o estudo de sistemas lineares deve:

> [...] receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre [...] a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2002, p. 122).

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, abordamos alguns conceitos relacionados às matrizes, como definições, algumas matrizes especiais, operações com matrizes, matriz inversa, transformações elementares de matrizes, forma escalonada de uma matriz e matrizes elementares.

No Capítulo 2, tratamos dos sistemas lineares, abrangendo os conceitos preliminares, sistemas lineares equivalentes, matrizes associadas aos sistemas lineares, sistemas de Cramer, método do escalonamento e o Teorema de Rouché-Capelli.

No Capítulo 3, apresentamos uma proposta de atividade com problemas do cotidiano, envolvendo matrizes no estudo e na resolução de sistemas de equações lineares, que pode ser aplicada em sala de aula para alunos da 2ª série do Ensino Médio.

# Capítulo 1 – MATRIZES

Neste capítulo, abordamos alguns conceitos sobre matrizes através de definições, exemplos e resultados.

As principais referências para este capítulo são Boldrini (1980), Hefez e Fernandez (2012), e Iezzi e Hazzan (1977).

## 1.1. Conceitos preliminares

Grosseiramente, *matriz* é uma tabela de elementos distribuídos em linhas e colunas. Por exemplo, ao coletarmos os dados referentes à altura, peso e idade de um grupo de cinco pessoas, podemos organizá-los na seguinte tabela:

| | *Altura (m)* | *Peso (kg)* | *Idade (anos)* |
|---|---|---|---|
| *Pessoa 1* | 1,75 | 84 | 32 |
| *Pessoa 2* | 1,70 | 70 | 23 |
| *Pessoa 3* | 1,75 | 60 | 45 |
| *Pessoa 4* | 1,60 | 52 | 25 |
| *Pessoa 5* | 1,81 | 72 | 30 |

Desconsiderando os significados das linhas e colunas, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1{,}75 & 84 & 32 \\ 1{,}70 & 70 & 23 \\ 1{,}75 & 60 & 45 \\ 1{,}60 & 52 & 25 \\ 1{,}81 & 72 & 30 \end{bmatrix}.$$

Observemos que em um problema que possui um número muito grande de variáveis e condições, essa disposição ordenada dos dados em forma de matriz torna-se absolutamente necessário.

Formalmente, temos a seguinte definição:

**Definição 1.1**: Dados dois números inteiros positivos $m$ e $n$, uma *matriz* $m$ *por* $n$ (indicamos $m \times n$) é uma tabela $M$ formada por elementos distribuídos em $m$ linhas e $n$ colunas. Dizemos que $m \times n$ é a *ordem* da matriz.

Alguns exemplos:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2 × 3 (ou de ordem 2 × 3).

2) $\begin{bmatrix} 2x & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ é uma matriz 3 × 2.

3) $\begin{bmatrix} 0 & 9 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ é uma matriz 1 × 4.

4) $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3 × 1.

5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2 × 2.

6) $[2]$ é uma matriz 1 × 1.

Os *elementos* (ou as *entradas*) de uma matriz podem ser números, funções ou outras matrizes. Neste trabalho, consideraremos apenas as matrizes cujos elementos sejam *números reais*.

Representamos uma matriz *A* de ordem *m* × *n* por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}.$$

Além dos colchetes, outras notações podem ser utilizadas para uma matriz, como os parênteses ou duas barras. Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{Vmatrix}$.

Localizamos um elemento de uma matriz através da linha e da coluna (nesta ordem) nas quais ele se encontra. Por exemplo, na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, o elemento que está na primeira linha e terceira coluna é o número – 4, isto é, $a_{13} = -4$.

**Definição 1.2**: Duas matrizes $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{r \times s}$ são *iguais* se *m* = *r*, *n* = *s* e todos os seus elementos correspondentes são iguais ($a_{ij} = b_{ij}$, para todo $1 \le i \le m$ e para todo $1 \le j \le n$).

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 9 & \operatorname{sen} 90° & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = B$, pois $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, ... , $a_{23} = b_{23}$.

**1.2. Matrizes especiais**

Existem matrizes que, por apresentarem certas particularidades, recebem um nome especial:

1) *Matriz linha*: é toda matriz de ordem 1 × *n*, isto é, que possui somente uma linha. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 0 & 9 & -1 & 7 \end{bmatrix}$.

2) *Matriz coluna*: é toda matriz de ordem *m* × 1, isto é, que possui somente uma coluna. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

3) *Matriz nula*: é toda matriz que possui todos os elementos iguais a zero, isto é, $a_{ij}$ = 0 para todos 1 ≤ *i* ≤ *m* e 1 ≤ *j* ≤ *n*. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz nula de ordem 2 × 3 e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz nula de ordem 2 × 2.

4) *Matriz quadrada de ordem n*: é toda matriz de ordem *n* × *n*, isto é, possui o mesmo número de linhas e colunas. Se *A* = $[a_{ij}]$ é uma matriz quadrada de ordem *n*, os elementos $a_{ii}$, com 1 ≤ *i* ≤ *n*, formam a *diagonal principal* de *A*. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 8 & 9 & -7 \\ 6 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3 e sua diagonal principal é formada pelos números 8, 4 e 3 (nesta ordem).

5) *Matriz triangular superior*: é toda matriz quadrada cujos elementos que se encontram abaixo da diagonal principal são iguais a zero, isto é, $a_{ij}$ = 0 para todo *i* > *j*. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

6) *Matriz triangular inferior*: é toda matriz quadrada cujos elementos que se encontram acima da diagonal principal são iguais a zero, isto é, $a_{ij}$ = 0 para todo *i* < *j*. Por exemplo, $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

7) *Matriz diagonal*: é toda matriz quadrada cujos elementos não pertencentes à diagonal principal são iguais a zero, isto é, $a_{ij}$ = 0 para todo *i* ≠ *j*. Podemos dizer também que uma matriz é diagonal se ela for simultaneamente triangular superior e triangular inferior. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

8) *Matriz identidade de ordem n*: é toda matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1, isto é, $a_{ii} = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Por exemplo,

$$[1],\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notação: I ou $I_n$.

## 1.3. Operações com matrizes

Trabalhando com matrizes, pode surgir a necessidade de efetuarmos algumas operações com seus elementos. Por exemplo, consideremos as duas tabelas abaixo, que representam a produção de grãos em dois períodos consecutivos:

| *Produção de grãos (em megatons) no primeiro período* | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *Arroz* | *Feijão* | *Milho* | *Soja* |
| *Região 1* | 300 | 150 | 600 | 2500 |
| *Região 2* | 500 | 450 | 200 | 800 |
| *Região 3* | 600 | 100 | 700 | 1500 |

| *Produção de grãos (em megatons) no segundo período* | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *Arroz* | *Feijão* | *Milho* | *Soja* |
| *Região 1* | 200 | 100 | 50 | 6000 |
| *Região 2* | 400 | 300 | 200 | 1500 |
| *Região 3* | 600 | 250 | 400 | 3000 |

Para montarmos uma tabela que represente a produção por região e por produto nos dois períodos juntos, temos que somar os elementos correspondentes destas duas tabelas:

| *Produção de grãos (em megatons) nos dois períodos* | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *Arroz* | *Feijão* | *Milho* | *Soja* |
| *Região 1* | 500 | 250 | 650 | 8500 |
| *Região 2* | 900 | 750 | 400 | 2300 |
| *Região 3* | 1200 | 350 | 1100 | 4500 |

Matricialmente, temos $\begin{bmatrix} 300 & 150 & 600 & 2500 \\ 500 & 450 & 200 & 800 \\ 600 & 100 & 700 & 1500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 & 100 & 50 & 6000 \\ 400 & 300 & 200 & 1500 \\ 600 & 250 & 400 & 3000 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 500 & 250 & 650 & 8500 \\ 900 & 750 & 400 & 2300 \\ 1200 & 350 & 1100 & 4500 \end{bmatrix}$.

Este é um exemplo de uma operação com matrizes, como a definida a seguir:

**Definição 1.3**: Se $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ são duas matrizes de mesma ordem, a *soma* de $A$ e $B$, denotada por $A + B$, é a matriz $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ de ordem $m \times n$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todos $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A operação que transforma cada par $(A, B)$ de matrizes de mesma ordem na matriz $C = A + B$ chama-se *adição* de matrizes.

**Definição 1.4**: Dada uma matriz $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, chamamos de *matriz oposta* de $A$ a matriz $-A = \left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$.

**Proposição 1.5**: Se $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ e $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ são matrizes de mesma ordem, então:

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade da adição);

(ii) $A + B = B + A$ (comutatividade da adição);

(iii) $A + 0 = A$, onde 0 denota a matriz nula $m \times n$ (elemento neutro da adição); e

(iv) $A + (-A) = 0$.

**Demonstração**: Para mostrarmos estes resultados, usaremos propriedades de números reais.

(i) $A + (B + C) = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[b_{ij} + c_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})\right]_{m\times n} =$

$= \left[(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n} + \left[c_{ij}\right]_{m\times n} = (A + B) + C$.

(ii) $A + B = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[b_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n} = \left[b_{ij} + a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[b_{ij}\right]_{m\times n} + \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = B + A$.

(iii) $A + 0 = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + [0]_{m\times n} = \left[a_{ij} + 0\right]_{m\times n} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = A$.

(iv) $A + (-A) = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[-a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} + (-a_{ij})\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} - a_{ij}\right]_{m\times n} =$

$= [0]_{m\times n} = 0$.

**Definição 1.6**: Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ são duas matrizes de mesma ordem, a *diferença A – B* é a matriz soma de *A* com a matriz oposta de *B*, isto é, *A* – *B* = *A* + (–*B*).

Voltemos ao exemplo da produção de grãos. Suponhamos agora que a previsão para a safra do terceiro período seja o dobro da produção da soma dos dois primeiros períodos. Com isso, temos a seguinte tabela:

| *Previsão da produção de grãos (em megatons) no terceiro período* | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *Arroz* | *Feijão* | *Milho* | *Soja* |
| *Região 1* | 1000 | 500 | 1300 | 17000 |
| *Região 2* | 1800 | 1500 | 800 | 4600 |
| *Região 3* | 2400 | 700 | 2200 | 9000 |

Matricialmente: $2 \times \begin{bmatrix} 500 & 250 & 650 & 8500 \\ 900 & 750 & 400 & 2300 \\ 1200 & 350 & 1100 & 4500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 1300 & 17000 \\ 1800 & 1500 & 800 & 4600 \\ 2400 & 700 & 2200 & 9000 \end{bmatrix}$.

Este é um exemplo de uma outra operação definida a seguir:

**Definição 1.7**: Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz e *k* um número real. Definimos a matriz *produto de A pelo escalar k* como sendo a matriz $[k \cdot a_{ij}]_{m\times n}$, denotada por *kA* = $k \cdot [a_{ij}]_{m\times n}$.

**Proposição 1.8**: As seguintes propriedades se verificam para quaisquer matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ de mesma ordem, e *k* e *k'* em $\mathbb{R}$:

(i) *k*(*A* + *B*) = *kA* + *kB*;

(ii) (*k* + *k'*)*A* = *kA* + *k'A*;

(iii) *k*(*k'A*) = (*kk'*)*A*; e

(iv) 1*A* = *A*.

**Demonstração**: Para mostrarmos estes resultados, usaremos propriedades de números reais.

(i) $k(A + B) = k[a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} = [k(a_{ij} + b_{ij})]_{m\times n} = [ka_{ij} + kb_{ij}]_{m\times n} =$

$= [ka_{ij}]_{m\times n} + [kb_{ij}]_{m\times n} = k[a_{ij}]_{m\times n} + k[b_{ij}]_{m\times n} = kA + kB.$

(ii) $(k + k')A = (k + k')\left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[(k+k')a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[ka_{ij} + k'a_{ij}\right]_{m\times n} =$

$= \left[ka_{ij}\right]_{m\times n} + \left[k'a_{ij}\right]_{m\times n} = kA + k'A.$

(iii) $k(k'A) = k\left[k'a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[k(k'a_{ij})\right]_{m\times n} = \left[(kk')a_{ij})\right]_{m\times n} = (kk')\left[a_{ij}\right]_{m\times n} = (kk')A.$

(iv) $1A = 1\left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[1a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = A.$

**Definição 1.9**: Dada uma matriz $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, podemos obter uma outra matriz $A^t = \left[a'_{ji}\right]_{n\times m}$, onde $a'_{ji} = a_{ij}$, para todos $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$. A matriz $A^t$ é denominada *transposta* de $A$.

Exemplos:

1) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$

2) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$

3) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$

**Definição 1.10**: Uma matriz quadrada $A = \left[a_{ij}\right]$ de ordem $n$ é chamada:

(i) *simétrica* se $A^t = A$, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$ para todos $1 \le i, j \le n$; e

(ii) *antissimétrica* se $A^t = -A$, isto é, $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos $1 \le i, j \le n$.

Exemplos:

1) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ são matrizes simétricas.

2) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ são matrizes antissimétricas.

**Observação 1.11**: Notemos que nas matrizes antissimétricas, os elementos da diagonal principal são todos iguais a zero.

**Proposição 1.12**: As seguintes propriedades se verificam para quaisquer matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ de mesma ordem, e $k$ em $\mathbb{R}$:

(i) $(A^t)^t = A$;

(ii) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

(iii) $(kA)^t = kA^t$.

**Demonstração**:

(i) $(A^t)^t = \left(\left([a_{ij}]_{m\times n}\right)^t\right)^t = \left([a'_{ji}]_{n\times m}\right)^t = [a''_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = A.$

(ii) Fazendo $A + B = C = [c_{ij}]_{m\times n}$, temos:

$(A + B)^t = \left([a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}\right)^t = \left([a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}\right)^t = \left([c_{ij}]_{m\times n}\right)^t =$

$= [c'_{ji}]_{n\times m} = [a'_{ji} + b'_{ji}]_{n\times m} = [a'_{ji}]_{n\times m} + [b'_{ji}]_{n\times m} = A^t + B^t.$

(iii) Fazendo $ka_{ij} = d_{ij}$, temos $(kA)^t = \left([ka_{ij}]_{m\times n}\right)^t = \left([d_{ij}]_{m\times n}\right)^t = [d'_{ji}]_{n\times m} =$

$= [ka'_{ji}]_{n\times m} = k[a'_{ji}]_{n\times m} = k\left([a_{ij}]_{m\times n}\right)^t = kA^t.$

Agora, suponhamos que a seguinte tabela forneça as quantidades das vitaminas A, B e C obtidas em cada unidade dos alimentos I e II:

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Alimento I | 3 | 2 | 1 |
| Alimento II | 1 | 4 | 0 |

Se forem ingeridas 4 unidades do alimento I e 2 unidades do alimento II, quanto de cada tipo de vitamina será consumido?

Podemos representar o consumo dos alimentos I e II (nesta ordem) pela matriz "consumo": $[4 \quad 2]$.

A operação que nos fornecerá a quantidade ingerida de cada vitamina é o "produto":

$$[4 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = [4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \quad 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \quad 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0] = [14 \quad 16 \quad 4].$$

Isto é, serão ingeridas 14 unidades de vitamina A, 16 de B e 4 de C.

Outro problema que podemos considerar em relação aos dados anteriores é o seguinte:

Se o custo dos alimentos depender somente do seu conteúdo vitamínico e soubermos que os preços por unidade de vitamina A, B e C são, respectivamente, R$ 2,00, R$ 4,00 e R$ 5,00, quanto pagaríamos pela porção de alimentos indicada anteriormente?

$$[14 \quad 16 \quad 4] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = [14 \cdot 2 + 16 \cdot 4 + 4 \cdot 5] = [112]$$

Ou seja, pagaríamos R$ 112,00.

Estes são exemplos da operação de multiplicação de matrizes definida a seguir:

**Definição 1.13**: Dadas duas matrizes $A = [a_{il}]_{m\times n}$ e $B = [b_{lj}]_{n\times p}$, o *produto* de $A$ por $B$, denotado por $AB$, é definido como a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ tal que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} =$ $= a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ para todo $1 \le i \le m$ e para todo $1 \le j \le p$.

A definição de produto de matrizes foi apresentada por Arthur Cayley (Inglaterra, 1821-1895), no trabalho intitulado *A Memoir on the Theory of Matrices*, publicado em 1858 na revista *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. Neste trabalho, Cayley notou que a multiplicação de matrizes, como ele a definiu, simplificava muito o estudo de sistemas de equações lineares. Também observou que esta multiplicação deixava de apresentar propriedades importantes, como a comutatividade e a lei do corte, e que uma matriz não nula não é necessariamente invertível.

**Observação 1.14**:

(i) A definição acima:

- garante a existência do produto $AB$ somente se o número de colunas de $A$ for igual ao número de linhas de $B$; e
- afirma que o produto $AB$ é uma matriz que possui o número de linhas de $A$ e o número de colunas de $B$.

(ii) Dadas duas matrizes $A = [a_{il}]_{m\times n}$ e $B = [b_{lj}]_{n\times p}$, sabemos que o produto *AB* está definido. Para que exista o produto *BA*, devemos ter $m = p$. Além disso, se $m = p$ e $m \neq n$, então *AB* e *BA* são de ordens diferentes. Logo, para que *AB* e *BA* sejam da mesma ordem, devemos ter também $m = n$, ou seja, *A* e *B* devem ser matrizes quadradas e de mesma ordem.

(iii) A multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa. De fato, consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$. Temos

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 26 & 10 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 14 & 15 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = BA.$$

(iv) Na multiplicação de matrizes, podemos ter $AB = 0$ sem que necessariamente *A* ou *B* seja nula. Por exemplo, consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Temos $A \neq 0$ e $B \neq 0$, no entanto, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**Proposição 1.15**: Desde que as operações sejam possíveis, temos:

(i) $A(B + C) = AB + AC$ (distributividade à esquerda da multiplicação em relação à adição);

(ii) $(A + B)C = AC + BC$ (distributividade à direita da multiplicação em relação à adição);

(iii) $(AB)C = A(BC)$ (associatividade da multiplicação);

(iv) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$;

(v) $A\mathrm{I} = \mathrm{I}A = A$ (existência de elemento identidade);

(vi) $A0 = 0A = 0$;

(vii) $(AB)^t = B^tA^t$; e

(viii) se *A* tem uma linha nula, então *AB* tem uma linha nula, para qualquer matriz *B*.

**Demonstração**:

(i) Consideremos as matrizes $A = [a_{il}]_{m\times n}$, $B = [b_{lj}]_{n\times p}$ e $C = [c_{lj}]_{n\times p}$.

Fazendo $A(B + C) = D = [d_{ij}]_{m\times p}$, temos

$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} \cdot b_{kj} + a_{ik} \cdot c_{kj}) =$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot c_{kj} = AB + AC.$

(ii) Consideremos as matrizes $A = [a_{il}]_{m\times n}$, $B = [b_{il}]_{m\times n}$ e $C = [c_{lj}]_{n\times p}$.

Fazendo $(A + B)\,C = D = [d_{ij}]_{m\times p}$, temos

$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + b_{ik}) \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik} \cdot c_{kj} + b_{ik} \cdot c_{kj}) =$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \cdot c_{kj} = AC + BC$.

(iii) Consideremos as matrizes $A = [a_{il}]_{m\times n}$, $B = [b_{lj}]_{n\times p}$ e $C = [c_{jt}]_{p\times r}$.

Fazendo $AB = D = [d_{ij}]_{m\times p}$, $(AB)C = E = [e_{it}]_{m\times r}$ e $BC = F = [f_{lt}]_{n\times r}$, temos $e_{it} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik} \cdot c_{kt} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sk}) \cdot c_{kt} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sk} \cdot c_{kt}) =$ $= \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot (\sum_{k=1}^{p} b_{sk} \cdot c_{kt}) = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot f_{st}$. Logo, $(AB)C = A(BC)$.

(iv) Consideremos as matrizes $A = [a_{il}]_{m\times n}$ e $B = [b_{lj}]_{n\times p}$.

Fazendo $kA = C = [c_{il}]_{m\times n}$, $kB = D = [d_{lj}]_{n\times p}$ e $AB = E = [e_{ij}]_{m\times p}$, temos $\sum_{s=1}^{n} c_{is} \cdot b_{sj} = \sum_{s=1}^{n}(k \cdot a_{is}) \cdot b_{sj} = k \cdot \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj}$ e $\sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot d_{sj} =$ $\sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot (k \cdot b_{sj}) = k \cdot \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj}$. Logo, $(kA)B = A(kB) = k(AB)$.

(v) Consideremos $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\mathrm{I}_n$ a matriz identidade de ordem $n$ e $\mathrm{I}_m$ a matriz identidade de ordem $m$. Fazendo $A\mathrm{I}_n = B = [b_{ij}]_{m\times n}$, temos $b_{ij} = a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \cdots + a_{ij} \cdot 1 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = a_{ij}$ para todo $1 \le i \le m$ e para todo $1 \le j \le n$. Agora, fazendo $\mathrm{I}_m A = C = [c_{ij}]_{m\times n}$, temos $c_{ij} = 0 \cdot a_{i1} + 0 \cdot a_{i2} + \cdots + 1 \cdot a_{ij} + \cdots + 0 \cdot a_{in} = a_{ij}$ para todo $1 \le i \le m$ e para todo $1 \le j \le n$. Logo, $A\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_m A = A$.

(vi) O resultado segue dos fatos de que a multiplicação de números reais é comutativa e que o produto de qualquer número real por zero é sempre nulo.

(vii) Sejam as matrizes $A = [a_{il}]_{m\times n}$ e $B = [b_{lj}]_{n\times p}$. Fazendo $AB = C = [c_{ij}]_{m\times p}$ e, consequentemente, $(AB)^t = C^t = [c'_{ji}]_{p\times m}$, temos $c'_{ji} = c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} =$ $= \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \cdot a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b'_{jk} \cdot a'_{ki}$ (pela Definição 1.9). Logo, $(AB)^t = B^tA^t$.

(viii) Sejam as matrizes $A = [a_{il}]_{m\times n}$ e $B = [b_{lj}]_{n\times p}$. Suponhamos que a $r$-ésima linha de $A$ seja nula. Fazendo $AB = C = [c_{ij}]_{m\times p}$, segue, para cada $j = 1, \dots, p$, que $c_{rj} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}b_{kj}$. Como $a_{rk} = 0$ para cada $k = 1, \dots, n$, temos que $c_{rj} = 0$ para cada $j = 1, \dots, p$. Assim, a $r$-ésima linha de $AB$ é nula. Logo, $AB$ tem uma linha nula.

**1.4. Matriz inversa**

**Definição 1.16**: Dada uma matriz quadrada $A$ de ordem $n$, chamamos de *inversa* de $A$ uma matriz quadrada $B$ de ordem $n$ tal que $AB = BA = \mathrm{I}_n$.

Por exemplo, dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, temos que a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ é uma inversa de $A$, já que $AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) & 2 \cdot (-5) + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot (-5) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_2$ e $BA = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 & 3 \cdot 5 + (-5) \cdot 3 \\ (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 & (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_2$.

**Observação 1.17**: Nem toda matriz quadrada admite uma inversa. Por exemplo, seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Dada qualquer matriz $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos que $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}$. Assim, para termos $AB = \mathrm{I}$, devemos ter $\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ora, não existem números reais $a$, $b$, $c$ e $d$ tais que $1 = a + c = 0$ e $1 = b + d = 0$. Logo, $A$ não possui inversa.

**Definição 1.18:** Uma matriz quadrada é dita *invertível* se ela admite uma matriz inversa.

**Observação 1.19**: Se uma matriz $A$ possui uma inversa, então essa inversa é única.

De fato, suponhamos que $B$ e $C$ sejam duas matrizes inversas de uma matriz quadrada $A$ de ordem $n$. Então, $AB = \mathrm{I}_n$ e $CA = \mathrm{I}_n$. Assim, por (iii) e (v) da Proposição 1.15, segue que $C = C\mathrm{I}_n = C(AB) = (CA)B = \mathrm{I}_nB = B$.

Como a inversa de uma matriz é única, quando ela existir, escrevemos $A^{-1}$ para denotar a inversa de $A$.

**Proposição 1.20**: Sejam $A$ e $B$ matrizes quadradas de ordem $n$.

(i) Se $A$ é invertível, então $A^{-1}$ é também invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
(ii) Se $A$ e $B$ são invertíveis, então $AB$ também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
(iii) $A$ é invertível se, e somente se, $A^{t}$ é invertível e $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$.
(iv) Se $A$ tem uma linha nula, então $A$ não é invertível.

**Demonstração**:

(i) Como $A$ é invertível, temos $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathrm{I}$. Agora, $A^{-1}$ é invertível se existe uma matriz quadrada $C$ de ordem $n$ tal que $A^{-1}C = CA^{-1} = \mathrm{I}$. Ora, $C = A$ satisfaz esta condição. Logo, pela unicidade da matriz inversa, $A$ é a inversa de $A^{-1}$, ou seja, $A^{-1}$ é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) Por (iii) e (v) da Proposição 1.15, segue que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\mathrm{I}A^{-1} =$ $= AA^{-1} = \mathrm{I}$ e $(B^{-1}A^{-1})\,(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\mathrm{I}B = B^{-1}B = \mathrm{I}$. Logo, $B^{-1}A^{-1}$ é a inversa de $AB$, ou seja, $AB$ é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(iii) ($\Longrightarrow$) Queremos provar que $A^{\mathrm{t}}$ é invertível e $(A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}$, ou seja, queremos que $A^{\mathrm{t}}(A^{-1})^{\mathrm{t}} = \mathrm{I}$ e $(A^{-1})^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}} = \mathrm{I}$. Como $A$ é invertível, então $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}$. Usando este fato e o item (vii) da Proposição 1.15, temos que $A^{\mathrm{t}}(A^{-1})^{\mathrm{t}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{t}} = \mathrm{I}$ e $(A^{-1})^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}} = (AA^{-1})^{\mathrm{t}} = \mathrm{I}$. Logo, pela unicidade da matriz inversa, $(A^{-1})^{\mathrm{t}}$ é a inversa de $A^{\mathrm{t}}$, ou seja, $A^{\mathrm{t}}$ é invertível e $(A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}$.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, como $A^{\mathrm{t}}$ é invertível e $(A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}$, temos $(A^{-1})^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}} =$ $= A^{\mathrm{t}}(A^{-1})^{\mathrm{t}} = I$. Por (vii) da Proposição 1.15 e (i) da Proposição 1.12, segue que $[(A^{-1})^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}]^{\mathrm{t}} = [(AA^{-1})^{\mathrm{t}}]^{\mathrm{t}} = AA^{-1} = \mathrm{I}$ e $[A^{\mathrm{t}}(A^{\mathrm{t}})^{-1}]^{\mathrm{t}} = [(A^{-1}A)^{\mathrm{t}}]^{\mathrm{t}} = A^{-1}A = \mathrm{I}$. Logo, pela unicidade da matriz inversa, $A^{-1}$ é a inversa de $A$, ou seja, $A$ é invertível.

(iv) Pela Proposição 1.15 (viii), temos que $AC$ possui uma linha nula, qualquer que seja a matriz quadrada $C$ de ordem $n$. Assim, como I não possui uma linha nula, segue que não existe matriz $C$ tal que $AC = \mathrm{I}$. Logo, $A$ não é invertível.

## 1.5. Transformações elementares de matrizes

**Definição 1.21**: Seja $A$ uma matriz de ordem $m \times n$. Para cada $1 \leq i \leq m$, denotemos por $L_i$ a $i$-ésima linha de $A$. Definimos as *transformações elementares nas linhas* da matriz $A$ como segue:

(i) Permutação das linhas $L_i$ e $L_j$ (indicada por $L_i \leftrightarrow L_j$).

(ii) Substituição de uma linha $L_i$ pela adição desta mesma linha com $c$ vezes uma outra linha $L_j$ (indicada por $L_i \rightarrow L_i + cL_j$, sendo $c$ um número real não nulo).

(iii) Multiplicação de uma linha $L_i$ por um número real $c$ não nulo (indicada por $L_i \rightarrow cL_i$).

Notação: Ao efetuarmos uma transformação qualquer, indicaremos por $e$.

Por exemplo, efetuando algumas transformações elementares nas linhas da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to \frac{1}{2}L_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Definição 1.22**: Sejam $A$ e $B$ matrizes de ordem $m \times n$. Dizemos que a matriz $A$ é *equivalente por linhas* à matriz $B$ se $B$ pode ser obtida pela aplicação sucessiva de um número finito de transformações elementares sobre as linhas de $A$.

Notação: $A \sim B$.

Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ é equivalente por linhas à matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, já que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 2L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 3L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Para a próxima observação, precisamos da seguinte definição, que se encontra em Domingues e Iezzi (2003):

**Definição 1.23**: Uma relação $R$ sobre um conjunto $E$ não vazio é chamada *relação de equivalência* sobre $E$ se, e somente se, $R$ é *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*. Ou seja, $R$ deve cumprir, respectivamente, as seguintes propriedades:

(i) se $x \in E$, então $xRx$;

(ii) se $x, y \in E$ e $xRy$, então $yRx$; e

(iii) se $x, y, z \in E$, $xRy$ e $yRz$, então $xRz$.

**Observação 1.24**:

(i) $A \sim A$, qualquer que seja a matriz $A$. De fato, basta tomarmos $c = 1$ e efetuarmos a transformação elementar $L_i \to cL_i$ sobre qualquer linha $L_i$ de $A$.

(ii) Se $A \sim B$, então $B \sim A$, quaisquer que sejam as matrizes $A$ e $B$ de mesma ordem. De fato, toda transformação elementar sobre linhas é reversível, pois: se $e$ é uma transformação elementar do tipo $L_i \leftrightarrow L_j$, podemos revertê-la através da transformação elementar $e' = e$; se $e$ é do tipo $L_i \to L_i + cL_j$, tomemos $e' = L_i \to L_i - cL_j$; finalmente, se $e$ é do tipo $L_i \to cL_i$, basta tomarmos $e' = L_i \to \frac{1}{c}L_i$. A transformação $e'$ é chamada de *transformação elementar inversa de e*, tal que $e'(e(A)) = e(e'(A)) = A$.

(iii) Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$, quaisquer que sejam as matrizes $A$, $B$ e $C$ de mesma ordem. De fato, denotando por $e_1, \ldots, e_{\mathrm{r}}$ as transformações elementares aplicadas sobre as linhas de $A$ para obter a matriz $B$ e por $e_{\mathrm{r}+1}, \ldots, e_{\mathrm{s}}$ as transformações elementares aplicadas sobre as linhas de $B$ para obter a matriz $C$, obtemos a matriz $C$ aplicando as transformações elementares $e_1, \ldots, e_{\mathrm{s}}$ sobre as linhas de $A$.

Logo, pela Observação 1.24, temos que a relação ~ é *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*, confirmando, pela Definição 1.23, que é uma *relação de equivalência*. Portanto, se $A$ é uma matriz equivalente por linhas a uma matriz $B$ (e, então, $B$ é equivalente por linhas a $A$), dizemos simplesmente que $A$ e $B$ são *matrizes equivalentes*.

## 1.6. Forma escalonada de uma matriz

**Definição 1.25**: Uma matriz $A$ de ordem $m \times n$ se diz na *forma escalonada* se for nula ou se:

(i) o primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é 1;

(ii) cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;

(iii) toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas; e

(iv) se $L_1, \ldots, L_p$ são as linhas não nulas e se o primeiro elemento não nulo da linha $L_i$ ocorre na $k_i$-ésima coluna, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_p$.

Por exemplo, a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ está na forma escalonada, pois todas as condições da Definição 1.25 são satisfeitas, mas as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não estão na forma escalonada, pois a primeira não satisfaz a condição (ii) da Definição 1.25, enquanto a segunda não satisfaz as condições (i) e (iv) da Definição 1.25.

**Teorema 1.26**: Toda matriz é equivalente a uma única matriz na forma escalonada.

**Demonstração (Existência)**: Seja $A$ uma matriz de ordem $m \times n$ qualquer. Se a primeira linha de $A$ é nula, então a condição (i) da Definição 1.25 está satisfeita no que diz respeito a esta linha. Caso contrário, seja $k$ o menor inteiro tal que $a_{1k} \neq 0$. Multipliquemos a primeira linha por $\frac{1}{a_{1k}}$ e então a condição (i) da Definição 1.25 fica satisfeita. Agora, para cada $i \geq 2$, somemos $(-a_{ik})$ vezes a primeira linha à linha $L_i$. Como resultado, temos uma matriz cujo primeiro elemento não nulo da primeira linha é 1 e ocorre na coluna $k$. Além disso, todos os outros elementos da coluna $k$ são nulos.

Consideremos agora a matriz $B$ obtida acima. Se a segunda linha de $B$ for nula, nada fazemos no que diz respeito a esta linha. Caso contrário, seja $k'$ o menor inteiro tal que $b_{2k'} \neq 0$. Multipliquemos a segunda linha por $\frac{1}{b_{2k'}}$ e, a seguir, para cada $i \geq 3$, somemos $(-b_{ik'})$ vezes a segunda linha à linha $L_i$, obtendo, assim, uma matriz cujo primeiro elemento não nulo da segunda linha é 1 e todos os outros elementos da coluna $k'$ são nulos.

Repetimos o procedimento acima em relação às demais linhas (terceira, quarta, ... , $m$-ésima), obtendo no final uma matriz $M$ que é equivalente à matriz $A$ e que satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 1.25. Caso $M$ ainda não satisfaça as condições (iii) e (iv) da Definição 1.25, basta efetuarmos um número finito de permutações das linhas de $M$.

Logo, toda matriz é equivalente a uma matriz na forma escalonada.

**(Unicidade)**: Afirmemos primeiramente que *duas matrizes na forma escalonada que são equivalentes só podem ser iguais*. De fato, nenhuma transformação elementar (exceto a multiplicação de uma linha por 1) pode ser efetuada numa matriz na forma escalonada sem que ela perca esta condição.

Agora, suponhamos que possamos obter duas matrizes na forma escalonada, $N$ e $P$, através de transformações elementares efetuadas sobre as linhas de uma matriz $A$ qualquer. Teremos, então, $A \sim N$ e $A \sim P$. Como as transformações elementares são reversíveis, de acordo com (ii) da Observação 1.24, segue que $N$ e $P$ são equivalentes, e, portanto, pela afirmação destacada acima, $N = P$.

O resultado acima é muito importante. A primeira parte da sua demonstração (existência da matriz equivalente na forma escalonada) nos fornece um algoritmo para *reduzir por linhas* uma matriz não nula qualquer a uma matriz na forma escalonada. A expressão *reduzir por linhas* significa transformar uma matriz usando as transformações elementares sobre linhas. Este processo é também chamado de *escalonamento de matrizes*.

## 1.7. Matrizes elementares

**Definição 1.27**: Uma *matriz elementar de ordem n* é uma matriz quadrada obtida da matriz identidade $I_n$ a partir da aplicação de *uma* transformação elementar, isto é, trata-se de uma matriz da forma $E = e(I_n)$, onde $e$ é uma transformação elementar.

Por exemplo, a matriz identidade é uma matriz elementar (pois podemos considerar a transformação elementar $e$: $L_i \to 1 \cdot L_i$ sobre qualquer linha $L_i$ de I), e as matrizes $e(I_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, onde $e$: $L_1 \leftrightarrow L_2$, e $e(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $e$: $L_1 \to L_1 + L_2$, são matrizes elementares de ordem 2 e de ordem 3, respectivamente.

Seja $A$ uma matriz de ordem $m \times n$ e $e$ uma transformação elementar. O próximo resultado nos diz que a matriz $e(A)$ pode ser obtida como o produto da matriz elementar $e(I_m)$ pela matriz $A$.

**Teorema 1.28**: Seja $e$ uma transformação elementar sobre matrizes. Consideremos a matriz elementar $E = e(I_m)$. Então, $e(A) = EA$, qualquer que seja a matriz $A$ de ordem $m \times n$.

**Demonstração**: Seja $EA = D = [d_{ij}]_{m \times n}$. Denotemos por $b_{ij}$ o elemento na linha $i$ e coluna $j$ de $E$, com $1 \leq i, j \leq m$. Temos três casos a considerar (um para cada tipo de transformação elementar):

<u>Caso 1:</u> *e* é a transformação elementar $L_r \leftrightarrow L_s$.

Analisando as linhas de *E*:

(I) para as linhas $i = 1, 2, \ldots, m$, com $i \neq r$ e $i \neq s$, temos $b_{ii} = 1$ e $b_{ij} = 0$, com $j \neq i$;

(II) para a linha *r*, temos $b_{rs} = 1$ e $b_{rj} = 0$, com $j \neq s$; e

(III) para a linha *s*, temos $b_{sr} = 1$ e $b_{sj} = 0$, com $j \neq r$.

Os elementos das linhas $i = 1, 2, \ldots, m$, com $i \neq r$ e $i \neq s$, de $D = EA$ são da forma (para $j = 1, \ldots, n$) $d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj} = b_{ii}a_{ij} = a_{ij}$, uma vez que, por (I), somente para $k = i$ teremos $b_{ik} = 1$ e as demais parcelas do somatório se anulam. Assim, as linhas diferentes de *r* e *s* em *D* são iguais às linhas correspondentes de *A*.

Os elementos da linha *r* de *D* são da forma (para $j = 1, \ldots, n$) $d_{rj} = \sum_{k=1}^{m} b_{rk}a_{kj} = b_{rs}a_{sj} = a_{sj}$, uma vez que, por (II), somente para $k = s$ teremos $b_{rk} = 1$ e as demais parcelas do somatório se anulam. Com isso, a linha *r* de *D* é igual à linha *s* de *A*.

Por fim, os elementos da linha *s* de *D* são da forma (para $j = 1, \ldots, n$) $d_{sj} = \sum_{k=1}^{m} b_{sk}a_{kj} = b_{sr}a_{rj} = a_{rj}$, uma vez que, por (III), somente para $k = r$ teremos $b_{sk} = 1$ e as demais parcelas do somatório se anulam. Logo, a linha *s* de *D* é igual à linha *r* de *A*.

Portanto, *D* corresponde à matriz *A* com as linhas *r* e *s* trocadas.

<u>Caso 2:</u> *e* é a transformação elementar $L_r \rightarrow L_r + cL_s$. Neste caso, as linhas $i = 1, 2, \ldots, m$, com $i \neq r$, de *E* são iguais às linhas correspondentes de $I_m$, ou seja, para todo $i \neq r$ temos $b_{ii} = 1$ e $b_{ij} = 0$, com $j \neq i$. Para a linha *r*, temos $b_{rs} = c$, $b_{rr} = 1$ e $b_{rj} = 0$, com $j \neq r$ e $j \neq s$.

Os elementos das linhas $i = 1, 2, \ldots, m$, com $i \neq r$, de *D* são da forma (para $j = 1, \ldots, n$) $d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj} = b_{ii}a_{ij} = a_{ij}$, uma vez que $b_{ii} = 1$ e $b_{ik} = 0$, com $k \neq i$. Assim, as linhas diferentes de *r* em *D* são iguais às linhas correspondentes de *A*.

Os elementos da linha *r* de *D* são da forma (para $j = 1, \ldots, n$) $d_{rj} = \sum_{k=1}^{m} b_{rk}a_{kj} = b_{rr}a_{rj} + b_{rs}a_{sj} = a_{rj} + ca_{sj}$, uma vez que $b_{rr} = 1$, $b_{rs} = c$ e os demais termos do somatório se anulam. Logo, a linha *r* de *D* corresponde à linha *r* de *A* somada com a linha *s* multiplicada por *c*.

Portanto, *D* corresponde à matriz *A* com a linha *r* somada à linha *s* multiplicada por *c*.

<u>Caso 3:</u> *e* é a transformação elementar $L_r \rightarrow cL_r$. Neste caso, as linhas $i = 1, 2, \ldots, m$, com $i \neq r$, de *E* são iguais às linhas correspondentes de $I_m$, ou seja, para todo $i \neq r$ temos $b_{ii} = 1$ e $b_{ij} = 0$, com $j \neq i$. Para a linha *r*, temos $b_{rr} = c$ e $b_{rj} = 0$, com $j \neq r$.

Os elementos das linhas $i = 1, 2, \ldots, m$, com $i \neq r$, de $D$ são da forma (para $j = 1, \ldots, n$) $d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj} = b_{ii}a_{ij} = a_{ij}$, uma vez que $b_{ii} = 1$ e $b_{ik} = 0$, com $k \neq i$. Assim, as linhas diferentes de $r$ em $D$ são iguais às linhas correspondentes de $A$.

Os elementos da linha $r$ de $D$ são da forma (para $j = 1, \ldots, n$) $d_{rj} = \sum_{k=1}^{m} b_{rk}a_{kj} =$ $= b_{rr}a_{rj} = ca_{rj}$, uma vez que $b_{rr} = c$ e $b_{rk} = 0$, com $k \neq r$. Logo, a linha $r$ de $D$ corresponde à linha $r$ de $A$ multiplicada por $c$.

Portanto, $D$ corresponde à matriz $A$ com a linha $r$ multiplicada por $c$.

A demonstração do resultado acima se encontra em Ruggiero e Vitorino (2016, p. 1-3).

**Corolário 1.29**: Sejam $A$ e $B$ matrizes de mesma ordem $m \times n$. Então, $A \sim B$ se, e somente se, existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_s$ de ordem $m$ tais que $E_s \cdots E_2E_1A = B$.

**Demonstração**: Pela Definição 1.22, $A \sim B$ quando existem transformações elementares $e_s(\ldots(e_2(e_1(A)))\ldots) = B$. Mas, pelo Teorema 1.28, a igualdade acima equivale a $E_s \cdots E_2E_1A = B$, onde $E_i = e_i(\mathrm{I}_m)$, para cada $1 \leq i \leq s$.

**Corolário 1.30**: Toda matriz elementar é invertível e sua inversa também é uma matriz elementar.

**Demonstração**: Seja $E$ uma matriz elementar. Seja $e$ a transformação elementar tal que $E = e(\mathrm{I})$. Se $e'$ é a transformação elementar inversa de $e$ (conforme (ii) da Observação 1.24) e se $E' = e'(\mathrm{I})$, então, pelo Teorema 1.28, temos $\mathrm{I} = e'(e(\mathrm{I})) = e'(E) = e'(\mathrm{I})E = E'E$ e $\mathrm{I} =$ $= e(e'(\mathrm{I})) = e(E') = e(\mathrm{I})E' = EE'$. Logo, $E$ é invertível e $E^{-1} = E'$.

Pelo Corolário 1.30, sabemos como inverter uma matriz elementar. Por exemplo, se considerarmos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, podemos concluir que $A$ e $B$ são invertíveis, já que $A$ e $B$ são matrizes elementares. De fato, $A = e_1(\mathrm{I}_3)$ com $e_1$: $L_1 \leftrightarrow L_2$ e $B = e_2(\mathrm{I}_3)$ com $e_2$: $L_1 \rightarrow L_1 + 2 \cdot L_2$. Assim, pelo Corolário 1.30, $A^{-1} = e'_1(\mathrm{I}_3)$, onde $e'_1$ é a transformação elementar inversa de $e_1$, e $B^{-1} = e'_2(\mathrm{I}_3)$, onde $e'_2$ é a transformação elementar inversa de $e_2$. Mais precisamente, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**Teorema 1.31**: Para uma matriz quadrada $A$ de ordem $n$, são equivalentes:

(i) $A$ é invertível;

(ii) Se $B$ é uma matriz na forma escalonada equivalente a $A$, então $B = I_n$;

(iii) $A$ é uma matriz elementar ou um produto de matrizes elementares.

**Demonstração**:

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Se $B$ é equivalente a $A$, então, pelo Corolário 1.29, existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_s$ tais que $E_s \cdots E_2E_1A = B$. Como, pelo Corolário 1.30, cada $E_i$ é invertível e $A$, por hipótese, é invertível, temos que $B$ é invertível (por (ii) da Proposição 1.20). Além disso, por (iv) da Proposição 1.20, segue que $B$ não possui linhas nulas, e, por estar na forma escalonada, de acordo com a Definição 1.25, todos os elementos da sua diagonal principal são iguais a 1 e todos os seus outros elementos são nulos. Logo, $B = I_n$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Como $B \sim A$, por hipótese, então, pelo Corolário 1.29, $E_s \cdots E_2E_1A = B = I_n$, onde $E_1, E_2, \ldots, E_s$ são matrizes elementares (e invertíveis, conforme o Corolário 1.30). Assim, temos que $A = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_s^{-1}I_n$ (pela (ii) da Proposição 1.20). Como cada $E_i^{-1}$ é uma matriz elementar (de acordo com o Corolário 1.30) e $I_n$ também é uma matriz elementar, o resultado segue.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Como matrizes elementares são invertíveis (conforme o Corolário 1.30) e produtos de matrizes invertíveis são invertíveis (por (ii) da Proposição 1.20), segue que $A$ é invertível.

**Proposição 1.32**: Sejam $A$ e $B$ matrizes quadradas de ordem $n$.

(i) Se $AB = I$, então $A$ é invertível e $A^{-1} = B$.

(ii) Se $AB$ é invertível, então $A$ e $B$ são invertíveis.

**Demonstração**:

(i) Suponhamos que $A$ não seja invertível. Seja $C$ a matriz equivalente a $A$ na forma escalonada (de acordo com o Teorema 1.26). Pelo Teorema 1.31, $C \neq I_n$, e, por estar na forma escalonada (conforme a Definição 1.25), $C$ tem uma linha nula. Pelo Corolário 1.29, $C = E_s \cdots E_2E_1A$, onde $E_1, E_2, \ldots, E_s$ são matrizes elementares. Por (viii) da Proposição 1.15, $CB = E_s \cdots E_2E_1AB$ possui uma linha nula. Assim, $AB = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_s^{-1}CB$ também tem uma linha nula, o que é um absurdo, pois, por hipótese, $AB = \mathrm{I}$. Logo, $A$ é invertível. Além disso, por (iii) e (v) da Proposição 1.15, $A^{-1} = A^{-1}\mathrm{I} = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = \mathrm{I}B = B$.

(ii) Como $AB$ é invertível, existe uma matriz $C$ tal que $(AB)C = C(AB) = \mathrm{I}$. Assim, $(AB)C = \mathrm{I} \Longrightarrow A(BC) = \mathrm{I}$ (de acordo com (iii) da Proposição 1.15) $\Longrightarrow A$ é invertível (conforme (i), pois, neste caso, $A^{-1} = BC$). Por outro lado, $C(AB) = \mathrm{I} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow (CA)B = \mathrm{I} \Longrightarrow B$ é invertível (novamente por (i), pois, neste caso, $B^{-1} = CA$). Logo, $A$ e $B$ são invertíveis.

Pela Definição 1.16, uma matriz quadrada $A$ é invertível quando existe uma matriz quadrada $B$ tal que $AB = \mathrm{I}$ e $BA = \mathrm{I}$. No entanto, de acordo com (i) da Proposição 1.32, basta encontrarmos $B$ tal que $AB = \mathrm{I}$ ou tal que $BA = \mathrm{I}$ para que $A$ seja invertível. Ou seja, se uma das duas igualdades é satisfeita, então a outra é automaticamente satisfeita.

**Proposição 1.33**: Sejam $A$ uma matriz invertível e $e_1, e_2, \ldots, e_s$ uma sequência de transformações elementares tais que $e_s(\ldots(e_2(e_1(A)))\ldots) = \mathrm{I}$. Então, essa mesma sequência de transformações elementares aplicadas a I produz $A^{-1}$, isto é, $e_s(\ldots(e_2(e_1(\mathrm{I})))\ldots) = A^{-1}$.

**Demonstração**: Para cada $1 \leq i \leq s$, seja $E_i$ a matriz elementar correspondente à transformação elementar $e_i$. Então, $E_s \cdots E_2E_1A = \mathrm{I}$. Assim, $(E_s \cdots E_2E_1\mathrm{I})AA^{-1} = \mathrm{I}A^{-1}$. Logo, $E_s \cdots E_2E_1\mathrm{I} = A^{-1}$.

**Observação 1.34**: O uso do Teorema 1.31 e da Proposição 1.33 nos fornece um método para inversão de matrizes por meio de transformações elementares.

Para ilustrarmos esse método, consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$. Se aplicarmos uma sequência de transformações elementares em $A$ até obtermos uma matriz $B$ na forma escalonada, pelo Teorema 1.31, $A$ é invertível se, e somente se, $B = \mathrm{I}_3$. Se $B = \mathrm{I}_3$, então, pela Proposição 1.33, essa mesma sequência de transformações elementares aplicadas em $\mathrm{I}_3$ resultará em $A^{-1}$. Assim, vamos formar a matriz $[A \mid \mathrm{I}_3]$ de ordem $3 \times 6$ e reduzi-la a uma matriz na forma escalonada:

$$[A \mid I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - 2 \cdot L_1 \\ L_3 \to L_3 - 4 \cdot L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \to -L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_3 \to -L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 - 2 \cdot L_3 \\ L_2 \to L_2 - L_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como obtemos uma matriz na forma $[I_3 \mid C]$, temos que $A$ é invertível e $C = A^{-1}$.

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Consideremos agora a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Ao reduzirmos a matriz $[A \mid I_3]$ a uma matriz na forma escalonada, obtemos a matriz $[B \mid C]$, onde $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e, portanto, diferente de $I_3$. Logo, $A$ não é invertível (pelo Teorema 1.31).

# Capítulo 2 – SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo, abordamos conceitos preliminares relativos a sistemas lineares, sistemas lineares equivalentes, a relação entre sistemas lineares e matrizes, sistemas de Cramer, método do escalonamento e Teorema de Rouché-Capelli.

As principais referências para este capítulo são Boldrini (1980), Callioli, Domingues e Costa (1990), e Hefez e Fernandez (2012).

## 2.1. Conceitos preliminares

**Definição 2.1**: Dados os números reais $a_1, \dots, a_n$, $b$ ($n \geq 1$), damos o nome de *equação linear sobre* $\mathbb{R}$ *nas incógnitas* $x_1, \dots, x_n$ à equação $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, onde os $x_i$ são variáveis em $\mathbb{R}$.

Uma *solução* da equação definida acima é uma *sequência de n números reais* (também chamada de *n-upla de números reais*), não necessariamente distintos entre si, indicada por $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, tal que a sentença $a_1\gamma_1 + \dots + a_n\gamma_n = b$ seja verdadeira. Por exemplo, dada a equação $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$, a terna ordenada (1, 1, 0) é uma solução dessa equação, pois $2 \cdot 1 - 1 + 0 = 1$ é verdadeira.

**Definição 2.2**: Um *sistema linear de m equações com n incógnitas* é um conjunto de $m$ equações lineares, cada uma delas com $n$ incógnitas, consideradas simultaneamente. Se $m = n$, então chamamos simplesmente de *sistema linear de ordem n*.

Um sistema linear se apresenta como $S$: $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$.

Uma *solução* do sistema acima é uma $n$-upla $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ de números reais que é solução de *cada uma* das equações do sistema. Por exemplo, dado o sistema $S_1$: $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y \quad\quad = 6 \end{cases}$, uma solução de $S_1$ é (0, 3, 4). Notemos que essa solução não é única, a terna $\left(\frac{8}{5}, \frac{11}{5}, 0\right)$ também é solução de $S_1$.

**Definição 2.3**: Chamamos de *sistema linear homogêneo* todo sistema $S$ que, na notação da Definição 2.2, tiver $b_1 = ... = b_m = 0$.

**Definição 2.4**: Um sistema linear é chamado de *impossível* (ou *incompatível*) se não admite solução. Um sistema linear que admite uma única solução é chamado de *possível* (ou *compatível*) *e determinado*. Se um sistema linear admite mais do que uma solução, então ele é chamado de *possível* (ou *compatível*) *e indeterminado*.

**Observação 2.5**:

(i) Se $S$ é homogêneo, então a $n$-upla (0, 0, ... , 0) é solução de $S$. Tal solução é chamada de *solução trivial* do sistema homogêneo.

(ii) Pela Definição 2.4 e pelo item (i) acima, temos que nenhum sistema linear homogêneo é impossível.

## 2.2. Sistemas lineares equivalentes

**Definição 2.6**: Dizemos que dois sistemas lineares $S$ e $S'$ são *equivalentes* se toda solução de $S$ for solução de $S'$ e toda solução de $S'$ for solução de $S$.

Notação: $S \sim S'$.

Também podemos efetuar transformações elementares nas equações de um sistema linear qualquer da mesma forma que vimos na Definição 1.21 em relação a uma matriz, ou seja:

- Trocar a posição relativa de duas equações do sistema.
- Trocar uma equação pela soma membro a membro da própria equação com um múltiplo não nulo de outra.
- Trocar uma equação dada por um de seus múltiplos não nulos (isto é, a equação obtida multiplicando ambos os membros da equação dada por um número real não nulo).

**Observação 2.7**: Seja $S$ um sistema linear de $m$ equações com $n$ incógnitas. Consideremos o sistema $S'$ obtido de $S$ através de uma transformação elementar. Afirmamos que $S$ e $S'$ são sistemas lineares equivalentes.

De fato:

(i) Se $S'$ foi obtido de $S$ através da permutação de duas equações de $S$, então é óbvio que toda solução de $S'$ é solução de $S$ e vice-versa.

(ii) Se $S'$ foi obtido de $S$ através da substituição de uma equação de $S$ pela adição desta mesma equação com $c$ vezes outra equação de $S$, sendo $c$ um número real não nulo, então, pelo item (i) acima, podemos supor, sem perda de generalidade, que a primeira equação de $S$ foi substituída pela adição dela com $c$ vezes a segunda equação de $S$. Se a $n$-upla $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é uma solução de $S$, então, de acordo com a Definição 2.2,

$$a_{11}\gamma_1 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1 \text{ (I) e}$$

$$a_{21}\gamma_1 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = b_2 \text{ (II).}$$

Multiplicando (II) por $c$ e somando o resultado com (I), obtemos $a_{11}\gamma_1 + \cdots + a_{1n}\gamma_n + ca_{21}\gamma_1 + \cdots + ca_{2n}\gamma_n = b_1 + cb_2$. Colocando $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ em evidência nesta igualdade, temos $(a_{11} + ca_{21})\gamma_1 + \cdots + (a_{1n} + ca_{2n})\gamma_n =$ $= b_1 + cb_2$, o que mostra que $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é também solução da primeira equação de $S'$. Por outro lado, se $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é solução de $S'$, então

$$(a_{11} + ca_{21})\gamma_1 + \cdots + (a_{1n} + ca_{2n})\gamma_n = b_1 + cb_2 \text{ (III) e}$$

$$a_{21}\gamma_1 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = b_2 \text{ (IV).}$$

Pela distributividade da multiplicação em relação à adição de números reais, segue de (III) que $a_{11}\gamma_1 + \cdots + a_{1n}\gamma_n + c(a_{21}\gamma_1 + \cdots + a_{2n}\gamma_n) = b_1 + cb_2$. Desta igualdade, obtemos, por (IV), $a_{11}\gamma_1 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1$, o que mostra que $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é também solução da primeira equação de $S$. Como as demais equações de $S$ e $S'$ coincidem, segue que toda solução de $S'$ é solução de $S$ e vice-versa.

(iii) Se $S'$ foi obtido de $S$ através da multiplicação de uma equação de $S$ por um número real $c$ não nulo, então, pelo item (i), podemos supor, sem perda de generalidade, que a equação de $S$ multiplicada seja a primeira. Se a $n$-upla $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é uma solução de $S$, então, conforme a Definição 2.2, $a_{11}\gamma_1 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1$. Multiplicando por $c$ esta igualdade, obtemos $(ca_{11})\gamma_1 + \cdots + (ca_{1n})\gamma_n = cb_1$, o que mostra que $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é também solução da primeira equação de $S'$. Por outro lado, se $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é solução de $S'$, então $(ca_{11})\gamma_1 + \cdots + (ca_{1n})\gamma_n = cb_1$.

Dividindo esta igualdade por $c$, obtemos $a_{11}\gamma_1 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = b_1$, o que mostra que $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ é também solução da primeira equação de $S$. Como as demais equações de $S$ e $S'$ coincidem, segue que toda solução de $S'$ é solução de $S$ e vice-versa.

Portanto, podemos efetuar transformações elementares nas equações de um sistema linear, obtendo, desta forma, um sistema linear equivalente ao sistema inicial.

**Exemplo 2.8**: Dado o sistema $S$: $\begin{cases} 2x - y + z - t = 4 \\ 3x + 2y - z + 2t = 1 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases}$, podemos substituir a terceira equação de $S$ pela adição desta mesma equação com a primeira equação de $S$ multiplicada por –1, obtendo o sistema $S'$: $\begin{cases} 2x - y + z - t = 4 \\ 3x + 2y - z + 2t = 1 \\ -2z = -4 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases}$ tal que $S \sim S'$. Agora, multiplicando a terceira equação de $S'$ por $-\frac{1}{2}$, obtemos o sistema $S''$: $\begin{cases} 2x - y + z - t = 4 \\ 3x + 2y - z + 2t = 1 \\ z = 2 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases}$ tal que $S'' \sim S'$ e, por transitividade, $S'' \sim S$. Em seguida, permutando as duas primeiras equações de $S''$, obtemos o sistema $S'''$: $\begin{cases} 3x + 2y - z + 2t = 1 \\ 2x - y + z - t = 4 \\ z = 2 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases}$ tal que $S \sim S'''$.

### 2.3. Sistemas lineares e matrizes

O que há de essencial num sistema de equações lineares são os coeficientes das equações que o formam e os números que compõem os segundos membros das equações (também chamados de *termos independentes*).

Consideremos as $n$-uplas $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ que representam os coeficientes das equações de um sistema linear $S$ e as organizemos como linhas de uma matriz.

**Definição 2.9**: Nas notações do parágrafo anterior, a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é chamada de *matriz dos coeficientes* do sistema linear *S* de *m* equações com *n* incógnitas.

**Exemplo 2.10**: Dado o sistema *S*: $\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$, a matriz dos coeficientes de *S* é $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$.

**Observação 2.11**: Podemos representar um sistema linear *S* matricialmente. De fato, denotando por *A* a matriz dos coeficientes, *X* = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ a *matriz das incógnitas* e *B* = $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ a *matriz dos termos independentes* de *S*, segue que *S*: *AX* = *B*. O sistema *S* do Exemplo 2.10 pode ser representado de forma matricial, como segue: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Consideremos agora as (*n* + 1)-uplas ($a_{i1}$, $a_{i2}$, ... , $a_{in}$, $b_i$) que representam os coeficientes das equações de um sistema linear *S* acrescidos dos termos independentes, e as organizemos também como linhas de uma matriz.

**Definição 2.12**: Conforme o parágrafo anterior, a matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ é chamada de *matriz ampliada* de *S*.

**Exemplo 2.13**: Dado o sistema *S*: $\begin{cases} x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$, segue que a matriz ampliada de *S* é $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

## 2.4. Sistemas de Cramer

**Definição 2.14**: Um *sistema de Cramer* é um sistema linear de ordem *n* cuja matriz dos coeficientes é invertível.

**Observação 2.15**: Todo sistema de Cramer é possível e determinado.

De fato, seja $S$: $AX = B$ um sistema de Cramer, onde $A$ é a matriz dos coeficientes, $X$ é a matriz das incógnitas e $B$ é a matriz dos termos independentes de $S$. Como $A$ é invertível, temos $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$. Portanto, pela unicidade da matriz inversa, a única solução de $S$ é dada por $A^{-1}B$.

**Exemplo 2.16**: Consideremos o sistema $S$: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$. Então, sua matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, sua matriz das incógnitas é $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e sua matriz dos termos independentes é $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Através do método para inversão de matrizes que vimos no final da Seção 1.7, verifiquemos que $A$ é invertível e determinemos sua inversa:

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \to -L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_3 \to L_3 + 4L_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 5 & -4 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_3 \to -\frac{1}{8}L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 - 2L_3 \\ L_2 \to L_2 + 3L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{array}\right].$$

Como obtemos uma matriz na forma $[I_3 \mid C]$, temos que $A$ é invertível e $C = A^{-1}$. Assim,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Logo, pela Observação 2.15, temos $X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}$, ou seja, $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{8}\ e\ z = \frac{3}{8}$.

Portanto, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$ é a única solução de *S*, e *S* é possível e determinado.

## 2.5. Método do escalonamento

O *método do escalonamento* consiste em se tomar a matriz ampliada de um sistema linear e aplicar uma sequência de transformações elementares a esta matriz, de modo a obtermos uma matriz equivalente que seja a matriz ampliada de um sistema linear "fácil" de resolver. Isto é válido graças ao resultado a seguir.

**Proposição 2.17**: Dois sistemas lineares com matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

**Demonstração**:

Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ e $A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{bmatrix}$ as matrizes ampliadas $m \times (n + 1)$ dos sistemas *S* e *S'*, respectivamente, tais que $A \sim A'$.

Pelo Corolário 1.29,

$$A' = CA \ (*),$$

onde *C* é um produto de matrizes elementares. Sejam agora $N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ e $N' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$ as matrizes dos coeficientes de *S* e *S'*, respectivamente, e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ e $B' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix}$ as matrizes dos termos independentes de *S* e *S'*, também respectivamente.

De (*), temos $a'_{ij} = \sum_{k=1}^{m} c_{ik}a_{kj}$ e $b'_{ij} = \sum_{k=1}^{m} c_{ik}b_k$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$, isto é, $N' = CN$ e $B' = CB$. Como $C$ é invertível (de acordo com o Corolário 1.30) e pela Observação 2.11, segue que $NX = B \Leftrightarrow CNX = CB \Leftrightarrow N'X = B'$, qualquer que seja a matriz das incógnitas $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Logo, toda solução de $S$ é solução de $S'$ e vice-versa. Portanto, $S \sim S'$.

**Observação 2.18**: Quando utilizarmos a Proposição 2.17 num sistema linear homogêneo, não é necessário tomarmos a matriz ampliada. Basta considerarmos a matriz dos coeficientes do sistema.

**Exemplo 2.19**: Consideremos o sistema $S_1$: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 & (2) \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 & (3) \end{cases}$.

Seja $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ a matriz ampliada de $S_1$. Efetuemos a seguinte sequência de transformações elementares sobre as linhas de $A_1$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}]{} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \to -\frac{1}{3}L_2]{} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 - 4L_2 \\ L_3 \to L_3 - 7L_2}]{} A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_3 \to -3L_3]{} A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 - \frac{1}{3}L_3 \\ L_2 \to L_2 - \frac{2}{3}L_3}]{} A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pelo o que vimos na Seção 1.5, temos $A_1 \sim A_6$. Além disso, $A_6$ é a matriz ampliada do sistema linear $S_6$: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$. Assim, pela Proposição 2.17, segue que $S_1 \sim S_6$. Logo, como $S_6$ é possível e determinado (pela Definição 2.4), pois possui a terna ordenada (3, – 2, 2) como sua única solução, $S_1$ também é possível e determinado e sua única solução é (3, – 2, 2).

De outra forma, porém equivalente, podemos fazer com $S_1$ o que segue:

(i) Eliminemos $x_1$ das equações (2) e (3), multiplicando a equação (1) por –2 e somando a equação obtida com a equação (2), obtendo uma nova equação (2′). Da mesma maneira, produziremos a equação (3'), obtida ao multiplicarmos a equação (1) por –1 e somando esta nova equação à equação (3). Isto resulta no sistema $S_2$: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1') \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = 2 & (2') \\ \quad -7x_2 - 5x_3 = 4 & (3') \end{cases}$.

(ii) Tornemos o coeficiente de $x_2$ da equação (2') igual a 1, multiplicando a equação (2') por $-\frac{1}{3}$. O sistema resultante é $S_3$: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1'') \\ \quad x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2'') \\ \quad -7x_2 - 5x_3 = 4 & (3'') \end{cases}$.

(iii) Eliminemos $x_2$ das equações (1'') e (3''), multiplicando a equação (2'') por –4 e somando a esta a equação (1''), obtendo (1'''). De maneira análoga, obtemos (3'''), multiplicando a equação (2'') por 7 e somando a esta nova equação a equação (3''). Isto resulta no sistema $S_4$: $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (1''') \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2''') \\ -\frac{1}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (3''') \end{cases}$.

(iv) Tornemos o coeficiente de $x_3$ na equação (3''') igual a 1, multiplicando a equação (3''') por –3. O sistema resultante é $S_5$: $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (1^{iv}) \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2^{iv}) \\ x_3 = 2 & (3^{iv}) \end{cases}$.

(v) Eliminemos $x_3$ das duas primeiras equações do sistema $S_5$, multiplicando a equação ($3^{iv}$) por $-\frac{1}{3}$ e somando a esta nova equação a equação ($1^{iv}$). De modo análogo, multipliquemos a equação ($3^{iv}$) por $-\frac{2}{3}$ e somemos a esta nova equação a equação ($2^{iv}$). Isto resulta no sistema $S_6$: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$.

Com isso, pela Observação 2.7, temos $S_1 \sim S_6$. Portanto, $S_1$ é possível e determinado e sua única solução é (3, – 2, 2).

Esse método aplicado aos sistemas de equações lineares é essencialmente devido a Gauss e foi aperfeiçoado por Camille Jordan (França, 1838-1922) e, por este motivo, é chamado de *processo de eliminação de Gauss-Jordan*.

**Exemplo 2.20**: Consideremos o sistema $S_1$: $\begin{cases} x + y - 2z + 3w = 4 \\ 2x + 3y + 3z - w = 3 \\ 5x + 7y + 4z + w = 5 \end{cases}$.

Seja $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ a matriz ampliada de $S_1$. Efetuemos a seguinte sequência de transformações elementares sobre as linhas de $A_1$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 5L_1}]{} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & -15 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_3 \to L_3 - 2L_2}]{} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 10 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to -\frac{1}{5}L_3]{} A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 10 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 - 9L_3 \\ L_2 \to L_2 + 5L_3}]{} A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notemos que $A_5$ é a matriz ampliada do sistema $S_5$: $\begin{cases} x - 9z + 10w = 0 \\ y + 7z - 7w = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$, que não possui solução, pois a terceira equação é uma contradição. Logo, como $S_1 \sim S_5$ (conforme a Observação 2.7), $S_1$ também é impossível.

**Exemplo 2.21**: Consideremos o sistema $S_1$: $\begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ 2x + 4y - 3z + 4w = 5 \\ 5x + 10y - 8z + 11w = 12 \end{cases}$.

Seja $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ a matriz ampliada de $S_1$. Efetuemos a seguinte sequência de transformações elementares sobre as linhas de $A_1$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 5L_1}]{} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 + 2L_2 \\ L_3 \to L_3 - 2L_2}]{} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observemos que $A_3$ é a matriz ampliada do sistema $S_3$: $\begin{cases} x + 2y - w = 4 \\ z - 2w = 1 \end{cases}$. Assim, na segunda equação, obtemos $w = \frac{z-1}{2}$. Substituindo esta igualdade na primeira equação, obtemos $x = -2y + \frac{z-1}{2} + 4$, chegando ao sistema $S_4$: $\begin{cases} x = -2y + \frac{z-1}{2} + 4 \\ w = \frac{z-1}{2} \end{cases}$. Logo, como $S_1 \sim S_4$, as soluções de $S_1$ são os elementos do conjunto $\left\{\left(-2y + \frac{z-1}{2} + 4, y, z, \frac{z-1}{2}\right); y, z \in \mathbb{R}\right\}$. Portanto, pela Definição 2.4, $S_1$ é possível e indeterminado.

**Observação 2.22**: No exemplo acima, $y$ e $z$ são as *incógnitas livres* de $S_1$, isto é, são as incógnitas que podem assumir qualquer valor real. Notemos que as incógnitas livres podem ser escolhidas com alguma liberdade: poderíamos ter escolhido, por exemplo, $x$ e $w$ como incógnitas livres, obtendo, assim, como soluções de $S_1$, os elementos do conjunto $\left\{\left(x, \frac{w-x}{2} + 2, 2w + 1, w\right); x, w \in \mathbb{R}\right\}$.

## 2.6. Teorema de Rouché-Capelli

**Definição 2.23**: Sejam $A$ uma matriz $m \times n$ e $\tilde{A}$ a única matriz na forma escalonada equivalente a $A$. Definimos o *posto* (ou *característica*) *de A* como sendo o número de linhas não nulas de $\tilde{A}$ e o denotamos por $p$. Definimos também a *nulidade de A* como sendo o número $n - p$.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, temos que $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$ é a única matriz na forma escalonada equivalente a $A$. Assim, pela Definição 2.23, o posto $p$ de $A$ é igual a 3, pois o número de linhas não nulas de $\tilde{A}$ é 3.

Para matrizes quadradas, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.24**: Uma matriz quadrada de ordem $n$ é invertível se, e somente se, ela tem posto $n$.

**Demonstração**:

($\Longrightarrow$) Seja $A$ uma matriz quadrada de ordem $n$. Se $A$ é invertível, então, pelo Teorema 1.31, $\tilde{A} = \mathrm{I}_n$. Logo, como $\mathrm{I}_n$ não possui linhas nulas, segue que $A$ tem posto $n$.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, seja $A$ uma matriz quadrada de ordem $n$. Se $A$ tem posto $n$, então $\tilde{A}$ não tem linhas nulas, e, por estar na forma escalonada, de acordo com a Definição 1.25, todos os elementos da sua diagonal principal são iguais a 1 e todos os seus outros elementos são nulos. Assim, $\tilde{A} = \mathrm{I}_n$. Pelo Corolário 1.29, existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_s$ de ordem $n$ (e invertíveis, pelo Corolário 1.30) tais que $A = E_s \cdots E_2 E_1 \tilde{A} = E_s \cdots E_2 E_1$. Portanto, pela Proposição 1.20 (ii), $A$ é invertível.

O resultado a seguir é conhecido como *Teorema de Rouché-Capelli* (ou *Teorema do Posto*), em homenagem aos matemáticos Eugène Rouché (França, 1832-1919) e Alfredo Capelli (Itália, 1855-1910). Ele relaciona os postos das matrizes ampliada e dos coeficientes de um sistema linear com o seu número de soluções.

**Teorema 2.25**: Consideremos um sistema linear de $m$ equações com $n$ incógnitas $AX = B$. Sejam $p_{AB}$ o posto da matriz ampliada do sistema e $p_A$ o posto da matriz dos coeficientes do sistema. Então:

(i) O sistema é possível se, e somente se, $p_{AB} = p_A$.

(ii) O sistema é possível e determinado se, e somente se, $p_{AB} = p_A = n$.

(iii) O sistema é possível e indeterminado se, e somente se, $p_{AB} = p_A < n$. Neste caso, $n - p_A$ é o número de incógnitas livres (ou o *grau de liberdade*) do sistema.

**Demonstração**: Sejam $S$: $AX = B$ um sistema linear de $m$ equações com $n$ incógnitas, $C$ a matriz ampliada de $S$, $\tilde{C}$ a matriz na forma escalonada equivalente a $C$ e $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}$ a matriz na forma escalonada equivalente à matriz $A$ dos coeficientes de $S$. Claramente, $\tilde{C}$ é formada pelas $n$ colunas de $\tilde{A}$ acrescidas da coluna de $B$ alterada pelas transformações elementares efetuadas nas linhas de $C$. Denotemos a matriz formada pela última coluna de $\tilde{C}$ por $\tilde{B} = [\tilde{b}_i]_{m\times 1}$. Com isso, pela Proposição 2.17, o sistema $S'$: $\tilde{A}X = \tilde{B}$ é equivalente ao sistema $S$. Assim, podemos ter:

<u>Caso 1</u>: $p_A = p_{\tilde{A}} < p_{\tilde{C}} = p_{AB}$. Neste caso, $\tilde{C}$ tem uma linha do tipo $(0 \;\; 0 \cdots 0 \;\; 1)$. Logo, o sistema $S'$ é impossível. Portanto, o sistema $S$ é impossível.

<u>Caso 2</u>: $p_A = p_{\tilde{A}} = p_{\tilde{C}} = p_{AB}$. Neste caso, $\tilde{C}$ e $\tilde{A}$ têm o mesmo número de linhas não nulas. Com isso, podemos ter:

<u>Subcaso 2.1</u>: $p_{AB} = p_A = n$. Sendo $\tilde{A}$ uma matriz com $n$ colunas, com $p_{\tilde{A}} = p_A = n$, e estando $\tilde{A}$ na forma escalonada, segue que $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Como $p_A = p_{AB} = n$, segue que $\tilde{B}$ é tal que $\tilde{b}_{n+1} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$. Logo, o sistema $S'$ é possível e determinado com a única solução $x_1 = \tilde{b}_1, \ldots, x_n = \tilde{b}_n$. Portanto, o sistema $S$ é possível e determinado com a mesma solução.

<u>Subcaso 2.2</u>: $p_{AB} = p_A < n$. Ponhamos $p = p_A = p_{AB}$. Neste caso, $\tilde{A}$ e $\tilde{C}$ possuem as linhas não nulas $L_1, \dots, L_p$ tais que o primeiro elemento não nulo de $L_i$ está na coluna $k_i$ e $k_1 < \cdots < k_p$, conforme a Definição 1.25. Além disso, temos $\tilde{b}_{p+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$. Com isso, segue que o sistema $S'$ é da forma

$$\begin{bmatrix} x_{k_1} + \tilde{a}_{1(k_1+1)}x_{k_1+1} + \tilde{a}_{1(k_1+2)}x_{k_1+2} + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n \\ 0 + \cdots + 0 + x_{k_2} + \tilde{a}_{(2k_2+1)}x_{k_2+1} + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n \\ \ddots \\ 0 + 0 + \cdots + 0 + x_{k_p} + \tilde{a}_{p(k_p+1)}x_{k_p+1} + \cdots + \tilde{a}_{pn}x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tal igualdade matricial, juntamente com o fato de $\tilde{A}$ estar na forma escalonada, nos fornece o sistema de equações

$$\begin{cases} x_{k_1} = -\sum_{j>k_1} \tilde{a}_{1j}x_j + \tilde{b}_1, \text{ onde } \tilde{a}_{1k_i} = 0, \text{ se } i > 1, \\ x_{k_2} = -\sum_{j>k_2} \tilde{a}_{2j}x_j + \tilde{b}_2, \text{ onde } \tilde{a}_{2k_i} = 0, \text{ se } i > 2, \\ \vdots \\ x_{k_{p-1}} = -\sum_{j>k_{p-1}} \tilde{a}_{p-1,j}x_j + \tilde{b}_{p-1}, \text{ onde } \tilde{a}_{p-1,k_i} = 0, \text{ se } i = k_p, \\ x_{k_p} = -\sum_{j>k_p} \tilde{a}_{pj}x_j + \tilde{b}_p \end{cases}.$$

Isto mostra que podemos escolher arbitrariamente valores para as incógnitas no conjunto $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_{k_1}, \dots, x_{k_p}\}$ e, com eles, determinar valores para $x_{k_1}, \dots, x_{k_p}$. Logo, como este conjunto tem $n - p$ elementos, o sistema $S'$ é possível e indeterminado, e tem $n - p$ incógnitas livres. Portanto, o sistema $S$ é possível e indeterminado, e tem $n - p$ incógnitas livres (ou grau de liberdade $n - p$).

**Exemplo 2.26**: Consideremos o sistema $S$: $\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + 3y - z + 2t = 3 \end{cases}$.

A matriz ampliada de $S$ é $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Assim, segue que $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz equivalente na forma escalonada à matriz $A$ dos coeficientes de $S$. Com isso, temos $p_{AB} = p_A = 2 < 4 = n$. Logo, pelo Teorema de Rouché-Capelli, $S$ é possível e indeterminado, e possui 2 incógnitas livres (ou grau de liberdade 2). Podemos escolher $z$ e $t$ como as incógnitas livres. Portanto, $S$ é equivalente ao sistema $\tilde{S}$: $\begin{cases} x = -5z + t + 3 \\ y = 2z - t + 2 \end{cases}$, cujas soluções são os elementos do conjunto $\{(-5z + t + 3, 2z - t + 2, z, t); z, t \in \mathbb{R}\}$.

**Exemplo 2.27**: Consideremos o sistema *S*: $\begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ -x + 4y - 3z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$.

A matriz ampliada de *S* é *C* = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{C}$ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$. Assim, segue que $\tilde{A}$ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ = $I_3$ é a matriz equivalente na forma escalonada à matriz *A* dos coeficientes de *S*. Logo, temos $p_{AB} = p_A = 3 = n$. Portanto, pelo Teorema de Rouché-Capelli, *S* é possível e determinado, e sua única solução é $\begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \\ z = -\frac{6}{5} \end{cases}$.

**Exemplo 2.28**: Consideremos o sistema *S*: $\begin{cases} x + 4y = -8 \\ 3x - y = 15 \\ 10x - 12y = 7 \end{cases}$.

A matriz ampliada de *S* é *C* = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 3 & -1 & 15 \\ 10 & -12 & 7 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{C}$ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Assim, segue que $\tilde{A}$ = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz equivalente na forma escalonada à matriz *A* dos coeficientes de *S*. Logo, temos $p_{AB} = 3 > 2 = p_A$. Portanto, pelo Teorema de Rouché-Capelli, *S* é impossível.

Particularizando o Teorema de Rouché-Capelli para os sistemas lineares homogêneos, obtemos o seguinte resultado:

**Corolário 2.29**: Consideremos um sistema linear homogêneo $AX = 0$ de *m* equações com *n* incógnitas:

(i) Se $A$ tem posto $n$, então o sistema possui apenas a solução trivial. Em particular, isto ocorre quando $m = n$ e $A$ é invertível.

(ii) Se $A$ tem posto $p < n$, então o sistema possui infinitas soluções. Em particular, isto sempre ocorre quando $m < n$.

**Exemplo 2.30**: Consideremos o sistema $S_h$: $\begin{cases} x + 2y + 3z - 5w & = 0 \\ 2x + 4y + z + 2w & = 0 \\ x + 3y + 4z & = 0 \\ 3x + 5y + 8z - 10w & = 0 \end{cases}$.

A matriz dos coeficientes de $S_h$ é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & -10 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$. Logo, $A$ tem posto 4. Portanto, pelo Corolário 2.29, $S_h$ possui apenas a solução trivial (0, 0, 0, 0). Observemos também que $m = 4$ e $A$ é invertível.

**Exemplo 2.31**: Consideremos o sistema $S_h$: $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 4x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 7z = 0 \end{cases}$.

A matriz dos coeficientes de $S_h$ é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Logo, $A$ tem posto $p = 2 < 3 = n$. Portanto, pelo Corolário 2.29, $S_h$ possui infinitas soluções. Além disso, pelo Teorema de Rouché-Capelli, $S_h$ possui 1 incógnita livre (ou grau de liberdade 1). Podemos escolher $z$ como a incógnita livre. Assim, $S_h$ é equivalente ao sistema $\tilde{S}_h$: $\begin{cases} x = \frac{2}{5}z \\ y = \frac{13}{5}z \end{cases}$, cujas soluções são os elementos do conjunto $\left\{\left(\frac{2}{5}z, \frac{13}{5}z, z\right); z \in \mathbb{R}\right\}$.

# Capítulo 3 – PROPOSTA DE ATIVIDADE EDUCATIVA

Neste Capítulo, propomos uma lista de problemas envolvendo sistemas lineares. Para tanto, assumimos que os alunos já tiveram contato anteriormente com o conteúdo apresentado no Capítulo 2. Esta proposta é direcionada à 2ª série do Ensino Médio, de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo para a disciplina de Matemática. Além disso, ela não foi aplicada em sala de aula para apresentação de resultados neste trabalho. Em função disso, não sugerimos uma quantidade de aulas necessária para a aplicação da mesma.

Antes de apresentarmos os problemas, fizemos uma breve abordagem da *metodologia de resolução de problemas* com base em Zorzan (2007), Onuchic (1999), D'Ambrosio (1989), e, mais especificamente, dos *métodos de resolução de problemas* segundo Polya (1995).

## 3.1. Resolução de problemas em Matemática

É comum existir nos cursos de Matemática, tanto de graduação quanto de pós-graduação, uma confusão entre a *metodologia de resolução de problemas* e os *métodos de resolução de problemas*. A *metodologia de resolução de problemas* é "[...] uma metodologia de ensino em que o professor propõe ao aluno situações-problemas caracterizadas por investigação e exploração de novos conceitos." (D'AMBROSIO 1989, p. 3). Já os *métodos de resolução de problemas* propõem "[...] diferentes heurísticas e passos na resolução de problemas." (D'AMBROSIO 1989, p. 3).

O ensino de Matemática a partir da resolução de problemas busca partir de situações-problemas, "[...] passando do processo de problematização para o estudo abstrato, no qual se operacionalizam os problemas através da representação simbólica." (ZORZAN, 2007, p. 85).

Ainda de acordo com D'Ambrosio (1989, p. 3), essa metodologia:

> [...] visa a construção de conceitos matemáticos pelo aluno através de situações que estimulam a curiosidade matemática. Através de suas experiências com problemas de naturezas diferentes, o aluno interpreta o fenômeno matemático e procura explicá-lo dentro de sua concepção da Matemática envolvida.

Segundo Zorzan (2007, p. 85-86):

> [...] nessa abordagem, o ensino-aprendizagem fundamenta-se na construção do conhecimento, sendo enfatizados o pensar, o indagar, o relacionar, o comparar e a aplicação de recursos em uso no meio. A ação recíproca do sujeito e do objeto de conhecimento constitui a aprendizagem.

Agora, com relação aos métodos de resolução de problemas, Polya (1995, p. 3-4) desenvolveu *quatro fases*:

> Primeiro, temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

O esquema de Polya (1995, p. 5-12) traz algumas sugestões de indagações por parte do professor em possíveis diálogos com os alunos na resolução de problemas:

1) <u>Compreensão do problema</u>:
   - Qual é a incógnita?
   - Quais são os dados?
   - Qual é a condicionante?
   - É possível satisfazer a condicionante?
2) <u>Estabelecimento de um plano</u>:
   - Conhece algum problema correlato já resolvido? É possível utilizá-lo?
   - Conhece algum problema que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante?
   - É possível reformular o problema?
   - É possível introduzir algum elemento auxiliar para possibilitar a utilização de algum problema correlato já resolvido?
   - Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante?
3) <u>Execução do plano</u>:
   - É possível perceber claramente que cada passo está certo?
   - É possível demonstrar que cada passo está certo?
4) <u>Retrospecto</u>:
   - É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento?
   - É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível percebê-lo num relance?
   - É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Portanto, através de ambas as abordagens, “[...] o aluno tanto aprende Matemática resolvendo problemas como aprende Matemática para resolver problemas.” (ONUCHIC, 1999, p. 210-211 apud ZORZAN, 2007, p. 86).

Neste trabalho, adotamos um esquema mais próximo ao de Polya (1995).

## 3.2. Problemas propostos e suas resoluções

Propomos a seguir alguns problemas envolvendo sistemas lineares e suas respectivas resoluções, com os quais o professor pode trabalhar com os seus alunos da forma que preferir: exemplos, listas de exercícios, desafios, avaliações etc.

**Problema 1** (Boldrini, 1980, p. 50 – adaptado): Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 grama), determinou-se que:

(i) o alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C;
(ii) o alimento II tem 2, 3 e 5 unidades, respectivamente, das vitaminas A, B e C; e
(iii) o alimento III tem 3 unidades de vitamina A, 3 unidades de vitamina C e não contém vitamina B.

Se, para uma determinada dieta, são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C:

**a)** Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III que fornecem as quantidades de vitaminas desejadas.
**b)** Se o alimento I custa 60 centavos por grama e os outros dois alimentos custam 10 centavos cada um por grama, existe uma solução custando exatamente 1 real?

**Resolução**:

**a)** A primeira parte deste problema pede *todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III que fornecem as quantidades de vitaminas desejadas para uma determinada dieta*.

• Compreensão do problema

As condicionantes do problema são as unidades necessárias de vitaminas A, B e C para atender a dieta. E os dados que usaremos para resolver este problema são os fornecidos pelos itens (i), (ii) e (iii), que são as unidades de cada uma das vitaminas A, B e C presentes em 1 grama de cada um dos alimentos I, II e III. Esses dados podem ser apresentados numa tabela, como abaixo:

**Tabela 1**. Unidade de vitamina por grama de alimento e quantidade de vitamina necessária

| | Alimento I | Alimento II | Alimento III | Quantidade total de vitamina necessária na dieta |
|---|---|---|---|---|
| Vitamina A | 1 | 2 | 3 | 11 |
| Vitamina B | 3 | 3 | 0 | 9 |
| Vitamina C | 4 | 5 | 3 | 20 |

• Estabelecimento de um plano

Podemos considerar as incógnitas $x$, $y$ e $z$ representando, respectivamente, as quantidades dos alimentos I, II e III. Para a dieta, são necessárias 11 unidades de vitamina A. Considerando os dados do problema, sabemos que os alimentos I, II e III fornecem, respectivamente, 1, 2 e 3 unidades de vitamina A. Com isso, precisamos encontrar as quantidades dos alimentos I, II e III que forneçam as 11 unidades de vitamina A, isto é, devemos obter os valores de $x$, $y$ e $z$ que satisfaçam a equação linear $x + 2y + 3z = 11$ (*).

Em relação à vitamina B, a dieta diz que são necessárias 9 unidades dela. Pelos dados do problema, sabemos que os alimentos I, II e III fornecem, respectivamente, 3, 3 e 0 unidades de vitamina B. Logo, precisamos encontrar as quantidades dos alimentos I, II e III que forneçam as 9 unidades de vitamina B, isto é, devemos obter os valores de $x$, $y$ e $z$ que satisfaçam a equação linear $3x + 3y + 0z = 9$ (**).

Por fim, são necessárias 20 unidades de vitamina C para a dieta em questão. Pelos dados apresentados no problema, sabemos que os alimentos I, II e III fornecem, respectivamente, 4, 5 e 3 unidades de vitamina C. Assim, precisamos encontrar as quantidades dos alimentos I, II e III que forneçam as 20 unidades de vitamina C, isto é, devemos obter os valores de $x$, $y$ e $z$ que satisfaçam a equação linear $4x + 5y + 3z = 20$ (***).

Para que a dieta seja feita corretamente, precisamos encontrar as quantidades dos alimentos I, II e III que forneçam as unidades necessárias das vitaminas A, B e C *ao mesmo tempo*, isto é, devemos obter os valores de *x*, *y* e *z* que satisfaçam *simultaneamente* as equações lineares (*), (**) e (***). Com isso, precisamos resolver o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 3x + 3y \qquad = \ 9 \\ 4x + 5y + 3z = 20 \end{cases}.$$

- <u>Execução do plano</u>

A matriz ampliada do sistema *S* é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 20 \end{bmatrix}$. Vamos efetuar as transformações elementares necessárias nas linhas de *A* para determinarmos a matriz *B* na forma escalonada tal que *A* ~ *B*:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - 4L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -3 & -9 & -24 \\ 0 & -3 & -9 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to -\frac{1}{3}L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & -3 & -9 & -24 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 - 2L_2 \\ L_3 \to L_3 + 3L_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Logo, o sistema associado à matriz *B* é *S'*: $\begin{cases} x - 3z = -5 \\ y + 3z \ = \ 8 \end{cases}$ tal que *S'* ~ *S*. Isolando *x* e *y* no primeiro membro das respectivas equações, temos *S'*: $\begin{cases} x = \ \ 3z - 5 \\ y = -3z + 8 \end{cases}$.

Observemos que não podemos ter quantidades negativas de alimentos, ou seja, devemos ter $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ \ 3z - 5 \geq 0 \\ -3z + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \geq \frac{5}{3} \\ z \leq \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq z \leq \frac{8}{3}$.

Com isso, temos que as soluções do sistema *S* são os elementos do conjunto $\left\{(3z - 5, -3z + 8, z); \frac{5}{3} \leq z \leq \frac{8}{3}\right\}$.

- <u>Retrospecto</u>

*Para atender a dieta, são necessários* **(3z – 5) gramas do alimento I, (–3z + 8) gramas do alimento II e *z* gramas do alimento III, onde $\frac{5}{3} \leq z \leq \frac{8}{3}$**, isto é, **1,67 ≤ *z* ≤ 2,67, aproximadamente**. Assim, se considerarmos, por exemplo, *z* = 2,5, devemos ter *x* = 2,5 e *y* = 0,5. Ou seja, 2,5 gramas do alimento I, 0,5 grama do alimento II e 2,5 gramas do alimento III.

**b)** A segunda parte deste problema quer saber *se existe uma solução custando exatamente 1 real*, dentre as soluções que encontramos no item a).

• Compreensão do problema

Agora, os dados que usaremos são os preços por grama de cada alimento. Como o alimento I custa 60 centavos por grama e os outros dois alimentos custam 10 centavos cada um por grama, temos a seguinte tabela:

**Tabela 2.** Preço por grama de cada alimento

| | Preço por grama |
|---|---|
| Alimento I | 60 centavos |
| Alimento II | 10 centavos |
| Alimento III | 10 centavos |

• Estabelecimento de um plano

Precisamos verificar a possibilidade de existir uma soma das quantidades dos alimentos I, II e III que atenda a dieta e custe exatamente 1 real, isto é, 100 centavos. Com isso, devemos encontrar os valores de $x$, $y$ e $z$ que satisfaçam a equação linear $60x + 10y + 10z = 100$ e que atenda a dieta.

• Execução do plano

De acordo com o item a), para atender a dieta, temos que $x = 3z – 5$ e $y = –3z + 8$. Então, devemos ter:

$60x + 10y + 10z = 100 \Leftrightarrow 60(3z – 5) + 10(–3z + 8) + 10z = 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 180z – 300 – 30z + 80 + 10z = 100 \Leftrightarrow 160z = 320 \Leftrightarrow z = 2.$

Logo, $z = 2$, $x = 1$ e $y = 2$.

• Retrospecto

**Existe uma solução custando exatamente 1 real**, que é **1 grama do alimento I, 2 gramas do alimento II e 2 gramas do alimento III**. De fato, essa é a solução do problema, pois satisfaz a equação $60x + 10y + 10z = 100$ e atende a dieta.

**Problema 2** (Iezzi, 2011, p. 345): Se Amélia der R$ 3,00 a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia. Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com R$ 6,00 a mais do que Amélia. Se Amélia perder a metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria. Quanto possui cada uma das meninas Amélia, Lúcia e Maria?

**Resolução**: O problema diz que as meninas Amélia, Lúcia e Maria possuem, cada uma, certa quantia em dinheiro, não necessariamente a mesma. Representemos por $x$, $y$ e $z$, respectivamente, as quantias de Amélia, Lúcia e Maria.

- Compreensão do problema

Como, em dinheiro, Amélia possui $x$ e Lúcia possui $y$, se Amélia der R$ 3,00 a Lúcia, então Amélia ficará com $x - 3$ e Lúcia ficará com $y + 3$. Além disso, a primeira condicionante do problema diz que se isso acontecer, então Amélia e Lúcia ficarão com a mesma quantia. Isso nos fornece a equação linear $x - 3 = y + 3$ (*).

Como Maria possui $z$ e Lúcia possui $y$, se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então Lúcia ficará com $y + \frac{z}{3}$. Além disso, a segunda condicionante do problema diz que se isso acontecer, então Lúcia ficará com R$ 6,00 a mais do que Amélia. Como Amélia possui $x$, se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então Lúcia ficará com $x + 6$. Com isso, a segunda condicionante nos fornece a equação linear $y + \frac{z}{3} = x + 6$ (**).

Por fim, como Amélia possui $x$, se ela perder metade do que tem, então ficará com $\frac{x}{2}$. Além disso, a terceira condicionante do problema diz que se isso acontecer, então Amélia ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria. Como Maria possui $z$, se Amélia perder metade do que tem, então ela ficará com $\frac{z}{3}$. Logo, essa condição nos fornece a equação linear $\frac{x}{2} = \frac{z}{3}$ (***).

- Estabelecimento de um plano

Para descobrirmos a quantia que cada menina possui, precisamos obter os valores de $x$, $y$ e $z$ que satisfaçam *simultaneamente* as equações lineares (*), (**) e (***). Com isso, e após uma pequena reorganização dos termos, obtemos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} x - y = 6 \\ x - y - \frac{z}{3} = -6 \\ \frac{x}{2} - \frac{z}{3} = 0 \end{cases}.$$

Para responder à questão do problema, precisamos encontrar a solução do sistema *S*.

- <u>Execução do plano</u>

A matriz ampliada do sistema *S* é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{3} & -6 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$. Vamos efetuar as transformações elementares necessárias nas linhas de *A* para determinarmos a matriz *B* na forma escalonada tal que *A* ~ *B*:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{3} & -6 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - \frac{1}{2}L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -12 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \to -3L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 36 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + \frac{1}{3}L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 36 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to 2L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & 18 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 + L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 36 \end{bmatrix} = B.$$

Logo, o sistema associado à matriz *B* é *S'*: $\begin{cases} x = 24 \\ y = 18 \\ z = 36 \end{cases}$, onde *S'* ~ *S*. Assim, a solução do sistema *S* é a terna ordenada (24, 18, 36).

- <u>Retrospecto</u>

**Amélia possui R$ 24,00, Lúcia possui R$ 18,00 e Maria possui R$ 36,00**. De fato, essa é a solução do problema, pois satisfaz todas as equações do sistema linear.

**Problema 3** (Iezzi, 2011, p. 355 – adaptado): Fernando foi a um caixa eletrônico e fez um saque em cédulas de três tipos diferentes: R$ 20,00, R$ 10,00 e R$ 5,00. Sabe-se que ele retirou 14 cédulas e que a quantia retirada foi a mesma para cada tipo de cédula. Qual foi a quantia sacada por Fernando?

**Resolução**: O problema diz que Fernando fez um saque num caixa eletrônico, que forneceu cédulas de R$ 20,00, de R$ 10,00 e de R$ 5,00.

- <u>Compreensão do problema</u>

Representemos por *x*, *y* e *z*, respectivamente, as quantidades de cédulas de R$ 20,00, R$ 10,00 e R$ 5,00 liberadas pelo caixa eletrônico.

Sabemos que Fernando retirou 14 cédulas. Com isso, temos que $x + y + z = 14$ (*). Além disso, <u>a quantia retirada para cada tipo de cédula foi a mesma</u>. Isso significa que, em termos monetários, a soma das cédulas de R$ 20,00 é igual à soma das cédulas de R$ 10,00 e é igual à soma das cédulas de R$ 5,00. Assim, segue que $20x = 10y$ (**), $10y = 5z$ (***) e $20x = 5z$ (****).

- <u>Estabelecimento de um plano</u>

Para descobrirmos a quantidade de cada cédula do saque feito pelo Fernando, precisamos obter os valores de $x$, $y$ e $z$ que satisfaçam *simultaneamente* as equações lineares (*), (**), (***) e (****).

Observemos que a equação (****) é redundante, pois ela é obtida pelas equações (**) e (***). Com isso, podemos retirá-la da resolução. Assim, e após uma pequena reorganização dos termos, obtemos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} x + y + z = 14 \\ 20x - 10y = 0. \\ 10y \ - \ 5z = 0 \end{cases}$$

- <u>Execução do plano</u>

A matriz ampliada do sistema $S$ é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 20 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \end{bmatrix}$. Vamos efetuar as transformações elementares necessárias nas linhas de $A$ para determinarmos a matriz $B$ na forma escalonada tal que $A \sim B$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 20 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 20L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & -30 & -20 & -280 \\ 0 & 10 & -5 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \to -\frac{1}{30}L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{28}{3} \\ 0 & 10 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \to L_1 - L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{28}{3} \\ 0 & 10 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 10L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{28}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{35}{3} & -\frac{280}{3} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_3 \to -\frac{3}{35}L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{28}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \to L_1 - \frac{1}{3}L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{28}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - \frac{2}{3}L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} = B.$$

Assim, o sistema associado à matriz $B$ é $S'$: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = 8 \end{cases}$, onde $S' \sim S$. Logo, a solução do sistema $S$ é a terna ordenada (2, 4, 8).

- Retrospecto

Concluímos que Fernando sacou 2 cédulas de R$ 20,00, 4 cédulas de R$ 10,00 e 8 cédulas de R$ 5,00, obtendo 14 cédulas totalizando R$ 120,00.

Portanto, *a quantia sacada por Fernando foi de* **R$ 120,00**.

**Observação 3.1**: Com os mesmos argumentos utilizados na resolução dos sistemas lineares de 3 equações com 3 incógnitas, também podemos resolver sistemas com um maior número de equações e incógnitas, como ilustramos nos problemas seguintes.

**Problema 4** (Boldrini, 1980, p. 54 – adaptado): Faça o balanceamento da reação química $HF + SiO_2 \rightarrow SiF_4 + H_2O$ (dissolução do vidro em ácido fluorídrico).

**Resolução**: O problema diz que moléculas de fluoreto de hidrogênio (HF) reagem com moléculas de dióxido de silício ($SiO_2$) para produzir moléculas de tetrafluoreto de silício ($SiF_4$) e moléculas de água ($H_2O$).

- Compreensão do problema

Consideremos as incógnitas $x$, $y$, $z$ e $w$ como sendo, respectivamente, as quantidades de moléculas de HF, $SiO_2$, $SiF_4$ e $H_2O$ presentes na reação; a condicionante é o fato de que o número de átomos de cada elemento no início da reação deve ser igual ao número de átomos do mesmo elemento no fim da reação. Na Química, tais incógnitas são denominadas *coeficientes estequiométricos*.

Logo, esquematicamente, temos que $x\mathrm{HF} + y\mathrm{SiO_2} \rightarrow z\mathrm{SiF_4} + w\mathrm{H_2O}$. Para satisfazermos a condicionante, devemos ter:

- $x$ átomos de F igual a $z$ átomos de $F_4$, ou seja, $x = 4z$ (*);
- $x$ átomos de H igual a $w$ átomos de $H_2$, ou seja, $x = 2w$ (**);
- $y$ átomos de Si igual a $z$ átomos de Si, ou seja, $y = z$ (***); e
- $y$ átomos de $O_2$ igual a $z$ átomos de O, ou seja, $2y = w$ (****).

- Estabelecimento de um plano

Para podermos balancear a reação química em questão, devemos obter os valores de $x$, $y$, $z$ e $w$ que satisfaçam *simultaneamente* as equações lineares (*), (**), (***) e (****). Com isso, e após uma pequena reorganização dos termos, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo:

$$S: \begin{cases} x - 4z = 0 \\ x - 2w = 0 \\ y - z = 0 \\ 2y - w = 0 \end{cases}.$$

- Execução do plano

A matriz dos coeficientes do sistema $S$ é $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Vamos efetuar as transformações elementares necessárias nas linhas de $A$ para determinarmos a matriz $B$ na forma escalonada tal que $A \sim B$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to \frac{1}{4} L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 + 4L_2 \\ L_3 \to L_3 + L_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4 \to L_4 - 2L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Logo, o sistema associado à matriz $B$ é $S'$: $\begin{cases} x - 2w = 0 \\ y - \frac{1}{2} w = 0 \\ z - \frac{1}{2} w = 0 \end{cases}$, onde $S \sim S'$. Isolando $x$, $y$ e $z$ no primeiro membro das respectivas equações, temos $S'$: $\begin{cases} x = 2w \\ y = \frac{1}{2} w \\ z = \frac{1}{2} w \end{cases}$.

Na Química, quando efetuamos o balanceamento de uma reação, devemos obter os menores valores inteiros positivos possíveis para os coeficientes estequiométricos. Neste caso, fazendo $w = 2$, obtemos $x = 4$, $y = 1$ e $z = 1$.

- Retrospecto

*O balanceamento para a reação em questão é* **$4HF + SiO_2 \rightarrow SiF_4 + 2H_2O$**.

**Problema 5** (Boldrini, 1980, p. 55 – adaptado): Necessita-se adubar um terreno, acrescentando, a cada 10 m², 150 g de nitrato, 180 g de fosfato e 204 g de potássio. Dispõe-se de quatro qualidades de adubo com as seguintes características:

(i) Cada kg do adubo I custa R$ 5,00 e contém 10 g de nitrato, 10 g de fosfato e 100 g de potássio.

(ii) Cada kg do adubo II custa R$ 6,00 e contém 10 g de nitrato, 100 g de fosfato e 30 g de potássio.

(iii) Cada kg do adubo III custa R$ 5,00 e contém 50 g de nitrato, 20 g de fosfato e 20 g de potássio.

(iv) Cada kg do adubo IV custa R$ 15,00 e contém 20 g de nitrato, 40 g de fosfato e 36 g de potássio.

Quanto de cada adubo se deve misturar para conseguir o efeito desejado, considerando que se está disposto a gastar R$ 54,00 a cada 10 m² com a adubação?

**Resolução**: O problema pede *quanto de cada tipo de adubo se deve misturar para adubar um terreno, acrescentando, a cada 10 m², 150 g de nitrato, 180 g de fosfato e 204 g de potássio, considerando o gasto de R$ 54,00 a cada 10 m² com a adubação*.

- <u>Compreensão do problema</u>

As condicionantes são as quantidades necessárias de nitrato, fosfato e potássio utilizadas a cada 10 m² de terreno e o valor que se está disposto a gastar com a adubação também a cada 10 m². E os dados que usaremos para resolver este problema são os fornecidos pelos itens (i), (ii), (iii) e (iv), que são os preços por quilograma de cada tipo de adubo e a quantidade de nitrato, fosfato e potássio contida em um quilograma de cada um dos adubos I, II, III e IV. Esses dados podem ser apresentados numa tabela, como abaixo:

**Tabela 1**. Quantidade de componente e custo por quilograma de adubo

| | Nitrato | Fosfato | Potássio | Custo de 1 kg |
|---|---|---|---|---|
| Adubo I | 10 g | 10 g | 100 g | R$ 5,00 |
| Adubo II | 10 g | 100 g | 30 g | R$ 6,00 |
| Adubo III | 50 g | 20 g | 20 g | R$ 5,00 |
| Adubo IV | 20 g | 40 g | 36 g | R$ 15,00 |

• <u>Estabelecimento de um plano</u>

Consideremos as incógnitas *x*, *y*, *z* e *w* representando, respectivamente, as quantidades dos adubos I, II, III e IV. São necessários 150 g de nitrato a cada 10 m² de terreno. Pelos itens (i), (ii), (iii) e (iv) do problema, sabemos que 1 kg de cada um dos adubos I, II, III e IV contém, respectivamente, 10, 10, 50 e 20 gramas de nitrato. Com isso, precisamos determinar quanto de cada tipo de adubo é necessário para obtermos o total de 150 g de nitrato, ou seja, devemos obter os valores de *x*, *y*, *z* e *w* que satisfaçam a equação linear $10x + 10y + 50z + 20w = 150$ (*).

Em relação ao fosfato, são necessários 180 g dele a cada 10 m² de terreno. Pelos dados do problema, sabemos que 1 kg de cada um dos adubos I, II, III e IV contém, respectivamente, 10, 100, 20 e 40 gramas de fosfato. Logo, precisamos determinar quanto de cada tipo de adubo é necessário para obtermos o total de 180 g de fosfato, isto é, devemos obter os valores de *x*, *y*, *z* e *w* que satisfaçam a equação linear $10x + 100y + 20z + 40w = 180$ (**).

Quanto ao potássio, são necessários 204 g dele a cada 10 m² de terreno. Os dados nos dizem que 1 kg de cada um dos adubos I, II, III e IV contém, respectivamente, 100, 30, 20 e 36 gramas de potássio. Assim, precisamos determinar quanto de cada tipo de adubo é necessário para obtermos o total de 204 g de potássio, ou seja, devemos obter os valores de *x*, *y*, *z* e *w* que satisfaçam a equação linear $100x + 30y + 20z + 36w = 204$ (***).

Por fim, como se está disposto a gastar R$ 54,00 a cada 10 m² de terreno com a adubação, pelos dados do problema, sabemos que 1 kg de cada um dos adubos I, II, III e IV custa, respectivamente, 5, 6, 5 e 15 reais. Com isso, precisamos determinar quanto de cada tipo de adubo é necessário para gerar um gasto de R$ 54,00 a cada 10 m² de terreno com a adubação, isto é, devemos obter os valores de *x*, *y*, *z* e *w* que satisfaçam a equação linear $5x + 6y + 5z + 15w = 54$ (****).

Para que as condicionantes sejam satisfeitas, precisamos encontrar quanto de cada um dos adubos I, II, III e IV contém as quantidades necessárias de nitrato, fosfato e potássio *ao mesmo tempo* que gera um gasto de R$ 54,00, isto é, devemos obter os valores de *x*, *y* e *z* que satisfaçam *simultaneamente* as equações lineares (*), (**), (***) e (****). Logo, precisamos resolver o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 10x + 10y + 50z + 20w = 150 \\ 10x + 100y + 20z + 40w = 180 \\ 100x + 30y + 20z + 36w = 204 \\ 5x + 6y + 5z + 15w = 54 \end{cases}.$$

- <u>Execução do plano</u>

A matriz ampliada do sistema $S$ é $A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 50 & 20 & 150 \\ 10 & 100 & 20 & 40 & 180 \\ 100 & 30 & 20 & 36 & 204 \\ 5 & 6 & 5 & 15 & 54 \end{bmatrix}$. Vamos efetuar as transformações elementares necessárias nas linhas de $A$ para determinarmos a matriz $B$ na forma escalonada tal que $A \sim B$:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 50 & 20 & 150 \\ 10 & 100 & 20 & 40 & 180 \\ 100 & 30 & 20 & 36 & 204 \\ 5 & 6 & 5 & 15 & 54 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \to \frac{1}{10}L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 & 15 \\ 10 & 100 & 20 & 40 & 180 \\ 100 & 30 & 20 & 36 & 204 \\ 5 & 6 & 5 & 15 & 54 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2 - 10L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 & 15 \\ 0 & 90 & -30 & 20 & 30 \\ 100 & 30 & 20 & 36 & 204 \\ 5 & 6 & 5 & 15 & 54 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 - 100L_1 \\ L_4 \to L_4 - 5L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 & 15 \\ 0 & 90 & -30 & 20 & 30 \\ 0 & -70 & -480 & -164 & -1296 \\ 0 & 1 & -20 & 5 & -21 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2 \to \frac{1}{90}L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 & 15 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & -70 & -480 & -164 & -1296 \\ 0 & 1 & -20 & 5 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \to L_1 - L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{3} & \frac{16}{9} & \frac{44}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & -70 & -480 & -164 & -1296 \\ 0 & 1 & -20 & 5 & -21 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 + 70L_2 \\ L_4 \to L_4 - L_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{3} & \frac{16}{9} & \frac{44}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1510}{3} & -\frac{1336}{9} & -\frac{3818}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{59}{3} & \frac{43}{9} & -\frac{64}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to -\frac{3}{1510}L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{16}{3} & \frac{16}{9} & \frac{44}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{668}{2265} & \frac{1909}{755} \\ 0 & 0 & -\frac{59}{3} & \frac{43}{9} & -\frac{64}{3} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_1 \to L_1 - \frac{16}{3}L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{464}{2265} & \frac{892}{755} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{668}{2265} & \frac{1909}{755} \\ 0 & 0 & -\frac{59}{3} & \frac{43}{9} & -\frac{64}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 + \frac{1}{3}L_3 \\ L_4 \to L_4 + \frac{59}{3}L_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{464}{2265} & \frac{892}{755} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{242}{755} & \frac{888}{755} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{668}{2265} & \frac{1909}{755} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23959}{2265} & \frac{21437}{755} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_4 \to \frac{2265}{23959}L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{464}{2265} & \frac{892}{755} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{242}{755} & \frac{888}{755} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{668}{2265} & \frac{1909}{755} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7701}{2869} \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \to L_1 - \frac{464}{2265}L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1812}{2869} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{242}{755} & \frac{888}{755} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{668}{2265} & \frac{1909}{755} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7701}{2869} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - \frac{242}{755}L_4 \\ L_3 \to L_3 - \frac{668}{2265}L_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1812}{2869} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{906}{2869} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4983}{2869} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7701}{2869} \end{bmatrix} = B.$$

Assim, o sistema associado à matriz $B$ é $S'$: $\begin{cases} x = \frac{1812}{2869} \\ y = \frac{906}{2869} \\ z = \frac{4983}{2869} \\ w = \frac{7701}{2869} \end{cases}$, onde $S' \sim S$. Logo, a única solução do sistema $S$ é a quadra ordenada $\left(\frac{1812}{2869}, \frac{906}{2869}, \frac{4983}{2869}, \frac{7701}{2869}\right)$.

- <u>Retrospecto</u>

*Misturando* $\mathbf{\frac{1812}{2869}}$ **kg do adubo I,** $\mathbf{\frac{906}{2869}}$ **kg do adubo II,** $\mathbf{\frac{4983}{2869}}$ **kg do adubo III e** $\mathbf{\frac{7701}{2869}}$ **kg do adubo IV**, ou, aproximadamente, **631,58 g do adubo I, 315,79 g do adubo II, 1736,84 g do adubo III e 2684,21 g do adubo IV**, *pode-se adubar 10 m² do terreno acrescentando 150 g de nitrato, 180 g de fosfato e 204 g de potássio, e gastando R$ 54,00*.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, dedicamos nosso estudo a alguns conteúdos de matrizes e sistemas lineares, e à abordagem de alguns problemas práticos envolvendo tais conteúdos, os quais fazem parte do currículo de Matemática da 2ª série do Ensino Médio.

Mesmo sem a aplicação dos problemas propostos no Capítulo 3, acreditamos que eles possam ajudar os professores da Educação Básica a tornarem suas aulas de Matemática mais atrativas, possibilitando a participação dos alunos no processo de construção do conhecimento, aguçando a criatividade e facilitando o desenvolvimento de estratégias que possam ser aplicadas em diferentes situações nas mais variadas áreas de atuação na sociedade.

É muito importante que os professores consigam estabelecer relações entre os conteúdos da sala de aula com o cotidiano, apesar de não ser algo tão simples em algumas situações. Desta forma, o desinteresse dos alunos pela Matemática, e, consequentemente, a preocupação e o desconforto dos professores, podem ser minimizados.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais+ (PCN+)**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 29 mar. 2018.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6. ed. rev. São Paulo: Atual, 1990.

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar Matemática hoje? **Temas e debates - SBEM**, Brasília, ano 2, n. 2, p. 15-20, 1989.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4. ed. reform. São Paulo: Atual, 2003.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar - Vol. 4**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1977.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: volume único. 5. ed. São Paulo: Atual, 2011.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas (Seminários e Debates). São Paulo: UNESP, 1999.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

RUGGIERO, M. A. G.; VITORINO, A. **Álgebra Linear e Aplicações.** 2016. Disponível em <http://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/Arquivos%20PDF/demo_op.pdf>. Acesso em: 29 mar. 2018.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. 1. ed. atual. São Paulo: SE, 2012. 72 p.

ZORZAN, A. S. L. Ensino-aprendizagem: algumas tendências na Educação Matemática. **Revista de Ciências Humanas - URI Frederico Westphalen**, v. 8, n. 10, p. 77-93, 2007.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

## TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 02 / 04 / 2018

Assinatura do autor