Universidade Estadual de Londrina

ANDERSON LEANDRO GONÇALVES QUILLES

UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

LONDRINA
2018

ANDERSON LEANDRO GONÇALVES QUILLES

UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Profª. Drª. Magna Natalia Marin Pires.

LONDRINA
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Quilles, Anderson Leandro Gonçalves.

Uma trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de função quadrática na perspectiva da resolução de problemas. / Anderson Leandro Gonçalves Quilles. - Londrina, 2018.

111 f. : il.

Orientador: Magna Natalia Marin Pires.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2018.

Inclui bibliografia.

1. Educação matemática - Tese. 2. Trajetórias hipotéticas de aprendizagem - Tese. 3. Resolução de problemas - Tese. 4. Funções quadráticas. - Tese. I. Pires, Magna Natalia Marin. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

ANDERSON LEANDRO GONÇALVES QUILLES

UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina

____

Profª. Drª. Ana Lúcia da Silva
Universidade Estadual de Londrina

____

Profª. Drª. Karina Alessandra Pessoa da Silva
UTFPR – Campus Londrina

Londrina, 26 de fevereiro de 2018.

A Deus, aos meus pais, irmã, esposa,

filhos e aos meus amigos...

***companheiros* de todas as horas...**

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pelo apoio e incentivo que sempre me deram aos estudos.

À minha irmã, que mesmo estando a alguns quilômetros de distância, se manteve incansável em suas manifestações de apoio e carinho.

Agradeço especialmente a minha esposa Joseane e meus filhos Felipe e Verônica (que chegou na reta final da dissertação), que são o maior presente que Deus poderia ter me dado nesta vida. Por toda felicidade, carinho, compreensão, apoio, incentivo e dedicação. Tudo que busco e conquisto é pensando neles e sempre farão parte de cada vitória.

À minha Orientadora Profª. Drª. Magna Marin Pires pela orientação (que foi fundamental para o desenvolvimento do trabalho), dedicação, incentivo, simpatia, paciência e, principalmente, pela amizade durante todo o processo.

Aos meus amigos e "irmãos" Prof. Mateus Marcos Cortez e Prof. Carlos Augusto Portello, pela espontaneidade e alegria na ajuda da formatação e normatização da dissertação, numa rara demonstração de amizade e solidariedade.

Aos colegas de classe, pela ótima convivência durante o período de curso e, principalmente, pela troca de informações e experiências.

A todos os professores pelo carinho, dedicação e entusiasmo demonstrado ao longo do curso.

“O professor que deseja melhorar suas competências profissionais e metodologias de ensino, além da própria reflexão e atualização sobre o conteúdo da matéria ensinada, precisa estar em estado permanente de aprendizagem.”

(KENSKI, 2003)

QUILLES, Anderson Leandro Gonçalves. **Uma trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de função quadrática na perspectiva da resolução de problemas**. 2018. 111 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

RESUMO

Intitulada Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para o Ensino de Função Quadrática na Perspectiva da Resolução de Problemas, esta dissertação apresenta uma THA para o ensino de Função Quadrática, na perspectiva de Simon (1995), por meio da metodologia de ensino e de aprendizagem da Resolução de Problemas proposta por Onuchic e Allevato (2011). Com esse trabalho pretendemos responder à seguinte questão: “Em que aspectos a construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem, para o ensino Função Quadrática, pode contribuir na formação de um professor de Matemática?”. Como resultado, acreditamos que a elaboração e exploração dessa THA proporciona ao educador momentos de reflexão a respeito de como conduzir o processo de ensino e quais possíveis questionamentos podem surgir quando estudantes se deparam com problemas que envolvem o conteúdo de funções e as possíveis possibilidades de explorar as propriedades das Funções Quadráticas. Essa reflexão conduz ao processo de estudos e de retomadas, uma vez que sempre é possível surgir dúvidas ou questionamentos não previstos pelo professor em sua THA. Encontrar maneiras de lidar com as dúvidas e questionamentos dos alunos reflete diretamente na formação do professor.

Palavras-Chave: Educação matemática. Trajetórias hipotéticas de aprendizagem. Resolução de problemas. Funções quadráticas.

QUILLES, Anderson Leandro Gonçalves. **A hypothetical learning trajectory for the teaching of quadratic function in the perspective of problem solving**. 2018. 111 p. Dissertation (Professional National Masters in Mathematics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

ABSTRACT

Under the name of A Hypothetical Learning (THA) Trajectory for the Teaching of Quadratic Function in the perspective of Problem Solving, this dissertation presents a THA for the teaching of Quadratic Function in the perspective of problem solving. According to Simon (1995) and by means of a methodology of teaching and learning of problem solving proposed by Onuchic e Allevato (2011). One of the aims of this research is to answer the following question: “In which aspects the construction of a hypothetical trajectory of learning for teaching Quadratic Function can contribute to the Math teacher training? As a result it is believed that the elaboration and exploration of this THA provides the educator with moments of reflection about the way he can conduct the learning process and what possible questions can arise whenever the students come across problems that are related with functions and the probable possibilities to explore the properties of Quadratic functions. This reflection leads to a resumed and studying process once it is always possible to appear doubts or questioning not predictable by the educator in his THA. Finding ways to deal with the doubts and questioning of the students reflects directly in the educator’s training.

Key-words: Mathematcis education. Hypothetical learning Trajectories. Problem solving. Quadratic functions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Como estudante do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT e professor da Educação Básica me interessa refletir a respeito do aprendizado em Matemática e procurar possíveis caminhos que possam conduzir a uma prática do ensino de Matemática que atenda as exigências atuais para o aprendizado e para os objetivos do ensino, propostos pelas Leis de Diretrizes e Bases, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e pela Base Nacional Comum Curricular (além de outros documentos que regem a Educação Nacional).

O interesse e a criatividade são necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e de aprendizagem. É importante que o professor estabeleça um ambiente propício ao processo de ensino e de aprendizagem. Envolver os alunos com o estudo da matemática pode ser um desafio. Faz-se necessário o desenvolvimento de sugestões e apoio metodológico para possibilitar a aprendizagem levando à compreensão de conceitos matemáticos.

Na tentativa de refletir a respeito de caminhos que podem ser trilhados por professores, junto com seus alunos, e o conhecimento matemático, desenvolvemos uma pesquisa para colaborar com a formação do autor desse projeto e, o produto desse trabalho é apresentado em forma de uma proposta didática para o ensino de Função Quadrática.

De acordo com o Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT

> Art. 1o O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) é um programa de pós-graduação *stricto sensu* em Matemática, reconhecido e avaliado pela CAPES, credenciado pelo Conselho Nacional de Educação – CNE, validado pelo Ministério da Educação e conduzindo ao título de Mestre.
> Art. 2o O PROFMAT tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada e relevante ao exercício da docência na Educação Básica, visando dar ao egresso a qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática (SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2016, p. 1).

Uma das principais dificuldades enfrentadas por professores de matemática da Educação Básica, em especial do Ensino Médio, é propor atividades que interessem os educandos e, ao mesmo tempo, não fujam das competências essenciais a cada assunto. No intuito de contemplar essa expectativa, no ensino das

Funções Quadráticas, o presente trabalho é uma proposta de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem na Perspectiva da Resolução de Problemas.

Após os estudos dos referenciais teóricos e da formulação da Trajetória Hipotética de Aprendizagem, pretende-se responder a seguinte questão de estudo: "Em que aspectos a construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem, para o ensino de Função Quadrática, pode contribuir na formação de um professor de Matemática?".

O objetivo geral do estudo consiste em apresentar e analisar as contribuições, na formação do professor de Matemática, da construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), para o ensino de Função Quadrática. Para que seja alcançado tal objetivo, elencamos os seguintes objetivos especificamente:

- descrever brevemente a Resolução de Problemas na Educação Matemática, fazer uma síntese a respeito de pesquisas desenvolvidas por Polya (1994), Schoenfeld (2007), Onuchic (1999) e Van de Walle (2009), no âmbito da Resolução de Problemas;
- organizar um roteiro para uma aula na perspectiva da Resolução de Problemas;
- apresentar a Trajetória Hipotética de Aprendizagem na perspectiva de Simon(1995).
- elaborar uma alternativa para o ensino de Função Quadrática, por meio de uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) na perspectiva da Resolução de Problemas;
- conceituar matematicamente a Função Quadrática;
- analisar as contribuições desse processo na formação de um professor de Matemática.

Nesse sentido, acreditamos que a presente pesquisa é pertinente, pois representa:

- uma alternativa para o ensino de função quadrática, por meio de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA);

- pode fornecer subsídios para a preparação de uma aula na perspectiva da Resolução de Problemas (RP);
- pode fornecer subsídios do conteúdo matemático de função quadrática referentes à Educação Básica e ao Ensino Superior;
- pretende descrever elementos para reflexão de como a construção de uma THA pode contribuir na formação de um professor.

O presente trabalho está organizado em seis capítulos e aborda aspectos teóricos e metodológicos que tomamos como base para realização da pesquisa e que nortearam o seu desenvolvimento, bem como as análises e considerações finais obtidas a partir dela.

No primeiro capítulo, apresentamos a fundamentação teórica, composta de: uma visão geral do processo de ensino e de aprendizagem de matemática; indicadores didáticos e conteúdos para o ensino de Função Quadrática; a metodologia de ensino e de aprendizagem por meio da resolução de problemas e descrevemos as trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA), suas características e aspectos de como essas trajetórias podem representar um papel importante no planejamento do professor.

No segundo capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos para a realização dessa pesquisa.

No terceiro capítulo, propomos uma THA para o ensino de Função Quadrática a partir de um problema. A THA foi elaborada na perspectiva de Simon e da estratégia da Resolução de Problemas de acordo com: Schoenfeld, Kilpatrick, Onuchic e Allevato, e apresenta uma possível exploração de dois problemas do ENEM (2017).

No quarto capítulo é apresentado o estudo da Função Quadrática por meio do Cálculo Diferencial e Integral, com a intenção de fazer relações entre o conteúdo na Educação Básica com o Ensino Superior e fornecer subsídios para que a THA seja adaptada para o Ensino Superior.

No quinto capítulo é apresentada uma propriedade notável da Parábola, algumas aplicações da Parábola em várias áreas, além de alguns exemplos que nos permite visualizar a Parábola em tarefas cotidianas.

No sexto capítulo são apresentadas algumas curiosidades que podem enriquecer a aula que pretende abordar o conteúdo em tela.

Nas considerações finais, apresentamos alguns comentários e reflexões a respeito da importância do ensino de Função Quadrática e das possíveis contribuições dessa Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

CAPÍTULO 1
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A fundamentação teórica desta pesquisa será apoiada nos documentos curriculares a respeito do ensino e da aprendizagem de Matemática, na Resolução de Problemas na perspectiva de Schoenfeld (2007), Onuchic e Allevato (1999, 2008), nas Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA) na perspectiva de Simon (1995).

1.1 Os Documentos Curriculares, a Matemática, seu Ensino e Aprendizagem

De acordo com a visão oficial sobre educação em relação ao Ensino Médio os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) recomendam que

> [...] os objetivos do ensino médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo (BRASIL, 2002, p. 207).

Ainda, segundo os PCN, a Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL, 2002).

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC - 2ª versão),

> A busca, pelo ser humano, de respostas a problemas oriundos de suas práticas sociais, como na agricultura, no comércio e na construção civil, dentre outras, originou a necessidade de lidar com contagens, medições, cálculos, movimentos de objetos físicos e formas geométricas. Na busca por essas respostas, novos conhecimentos foram sendo produzidos, dando origem a novos problemas que, por sua vez, geraram novos conhecimentos, cada vez mais abstratos (BRASIL, 2016, p. 577).

A ciência Matemática, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômeno e informações. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC 2ª versão) corrobora com essa ideia.

> A Matemática se estabeleceu como ciência, alicerçada em procedimentos como analisar regularidades para estabelecer padrões, formular hipóteses e apresentar resultados por meio de métodos rigorosos de validação interna e desenvolvimento de diferentes tipos de raciocínio, em uma linguagem sintética, direta e objetiva, com menor grau de ambiguidade (BRASIL, 2016, p. 577).

As diversas formas de pensar na Matemática possibilitam ir além da descrição ou da elaboração de modelos. A presença da Matemática no desenvolvimento de competências consideradas essenciais aos jovens estudantes e futuros profissionais envolve habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico, estatístico e probabilístico.

Segundo os PCN, em seu papel formativo,

> [...] a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (BRASIL, 2000, p. 40).

É importante também pensar no caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio. Existe um conjunto de técnicas e estratégias que devem ser aplicadas em outras áreas do conhecimento, bem como em atividades profissionais. Com isso, não se deve ter a preocupação de transmitir e compreender uma série de sofisticadas estratégias, mas algumas que sejam capazes de desenvolver a iniciativa e a segurança e que possam ser adaptadas em diferentes contextos.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC 2ª versão):

> Esses conhecimentos estão na base de uma série de processos que organizam a vida contemporânea, bem como auxiliam na tomada de decisões a partir da possibilidade de examinar padrões e regularidades, e potencializam a capacidade de abstração. Isso

> confere a Matemática um papel fundamental na escola, pois permite o acesso dos/das estudantes a esses conhecimentos, ampliando suas possibilidades de ler o mundo e interagir na vida cidadã (BRASIL, 2016, p. 577).

No Ensino Médio, um papel importante da Matemática é apresentar ao aluno o conhecimento a respeito de novas informações e instrumentos que serão úteis para a vida.

Merece destaque o "saber aprender", condição básica para o contínuo aperfeiçoamento no decorrer da vida. Sem dúvida, todas as áreas do conhecimento devem contribuir para o desenvolvimento da autonomia e, principalmente, para a capacidade de pesquisa.

Alguns educadores acreditam que o jovem é autossuficiente para construir as diversas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidos nos diversos conteúdos, mas basta olhar atentamente o fracasso da educação para saber que isso não é verdade.

Diante das reflexões apresentadas, devemos então buscar alguns critérios para o ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Médio. Acreditamos que o critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema proporcionar relações entres conceitos e o pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática quanto à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. Tudo isso deve ser levado em conta na elaboração dos programas e atitudes no Ensino Médio.

Inicialmente, é necessário, portanto, estabelecer um conjunto de diretrizes para a organização do ensino da Matemática no Ensino Médio. Esses pontos norteadores devem contemplar a promoção de alunos, em suas diferentes motivações, com seus interesses e capacidades, dando de forma efetiva condições para a sua inserção num mundo em mudança.

Segundo as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do estado do Paraná:

> [...] o currículo pode tanto ser resultado de amplos debates que tenham envolvido professores, alunos, comunidades, quanto ser fruto de discussões centralizadas, feitas em gabinetes, sem a participação dos sujeitos diretamente interessados em sua constituição final. No caso de um currículo imposto às escolas, a prática pedagógica dos sujeitos

> que ficaram à margem do processo de discussão e construção curricular, em geral, transgrede o currículo documento (PARANÀ, 2008, p. 18).

Os conteúdos associados a funções no Ensino Médio estão estabelecidos na prática curricular e nos documentos oficiais dos governos federal e estadual.

No Ensino Médio, as funções ocupam grande parte da grade curricular, subdividindo-se em: Funções, Função Afim, Função Quadrática, Função Exponencial, Função Logarítmica, Função Modular e Funções Trigonométricas. As funções afim e quadrática são as mais trabalhadas normalmente na 1ª série do Ensino Médio e algumas vezes no 9º ano do Ensino Fundamental.

1.2 Função Quadrática ou de 2º grau: Noções e Recomendações Curriculares

A ideia de função é uma das mais importantes da matemática, ocupando lugar de destaque também em outras áreas do conhecimento. Uma justificativa para essa afirmação é que os fenômenos não ocorrem de forma independente. Ao contrário, parece cada vez mais evidente que, no universo, os fenômenos estão interligados, de modo que a ocorrência é uma consequência de outro ou, ainda, depende de outro. Dizemos, então, que um fenômeno está em função do outro. É importante que o aluno entenda que uma função é caracterizada pela relação de dependência entre duas grandezas.

O aluno precisa saber identificar as variáveis dependentes e independentes presentes numa função, além de identificar e representar uma função do 2º grau. Ao estudar uma função do 2º grau, é importante que o aluno identifique que o gráfico será uma parábola, no plano cartesiano, com a concavidade voltada para cima ou para baixo, possibilitando a dedução se a função terá um valor máximo ou mínimo, além de identificar (caso existam) os pontos em que a parábola interceptam os eixos coordenados. Assim o aluno terá oportunidade de desenvolver estratégias para o cálculo das coordenadas do vértice de uma parábola, obter o conjunto imagem de uma função quadrática, bem como resolver problemas correspondentes à otimização de situações interpretadas por meio de funções do 2º grau. Para tanto, optamos elaborar uma proposta de Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem na Perspectiva da Resolução de Problemas.

1.3 A Resolução de Problemas

O ensino de Matemática no século XX passou por algumas reformas, que tinham como objetivo melhorar o ensino da Matemática nas escolas. Essas reformas orientaram uma mudança das formas de trabalho dos professores, o papel dos estudantes e as relações entre professores, estudantes e o conteúdo matemático. Onuchic resume as reformas no ensino de Matemática no século XX:

> [...] passar de uma sociedade rural, onde "poucos precisavam conhecer Matemática", para uma sociedade industrial onde mais gente "precisava aprender Matemática" em razão da necessidade de técnicos especializados, daí para uma sociedade da informação onde a maioria das pessoas "precisa saber Matemática" e, agora, caminhando para uma sociedade do conhecimento que exige de todos "saber muita Matemática", é natural que o homem se tenha interessado em promover mudanças na forma de como se ensina e como se aprende Matemática (ONUCHIC, 1999, p. 200).

Onuchic (1999) aponta também que o ensino de Matemática ainda é marcado por altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão. A autora identifica alguns movimentos de reforma do ensino de Matemática que ocorreram no século XX: o ensino de Matemática por repetição, o ensino de Matemática com compreensão, a Matemática Moderna e a Resolução de Problemas.

O movimento de renovação conhecido como Matemática Moderna, nas décadas de sessenta e setenta, influenciou o ensino de matemática no Brasil e em outros países do mundo. Essa reforma que, como as outras, não contou com a participação de professores de sala de aula, deixava de lado as anteriores. Apresentava uma matemática apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, e enfatizava a teoria dos conjuntos. Realçava muitas propriedades, tinha preocupações excessivas com abstrações matemáticas e utilizava uma linguagem universal, precisa e concisa. Entretanto, acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado. Nessa reforma o ensino era trabalhado com um excesso de formalização, distanciando-se das questões práticas. Segundo Onuchic e Allevato (2005), todas essas reformas não tiveram o sucesso esperado. Os questionamentos continuavam: Estariam essas reformas voltadas para a formação de um cidadão útil à sociedade em que vivia? Buscavam elas ensinar matemática de modo a preparar os alunos para um mundo de trabalho que exige conhecimento matemático? Além disso, especialmente os anos setenta, marcaram uma era de crescimento preocupada com um currículo de matemática projetado, inicialmente, para um aumento no escore de testes de habilidades básicas, também chamados testes de habilidades computacionais.

> Discussões no campo da Educação Matemática no Brasil e no mundo mostram a necessidade de se adequar o trabalho escolar às novas tendências que podem levar a melhores formas de se ensinar e aprender Matemática (ONUCHIC, 1999, p. 200).

A Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino se torna o lema das pesquisas e estudos em Resolução de Problemas para os anos 1990. Esta nova visão de ensino-aprendizagem de Matemática se apoia, especialmente, nos estudos desenvolvidos pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que culminaram com a publicação dos Standards 2000, oficialmente Princípios e Padrões para a Matemática Escolar (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2000). A Resolução de Problemas é destacada como um dos padrões de processo para o ensino de Matemática, e o ensino através da resolução de problemas é fortemente recomendado (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005).

A visão assumida por boa parte dos pesquisadores acerca da aprendizagem da Resolução de Problemas era uma visão "muito estreita e limitada" (STANIC; KILPATRICK, 1989), pois se acreditava que ensinar a Resolução de Problemas significava apresentar problemas e as técnicas específicas para chegar à solução desses problemas.

> No último século, as discussões sobre o ensino da resolução de problemas moveram-se da defesa de que aos estudantes deve ser simplesmente apresentado com problemas ou com regras para a resolução de problemas particulares até ao desenvolvimento de aproximações mais gerais da resolução de problemas. Embora o ensino da resolução de problemas seja agora recebido com grande ênfase, os educadores de Matemática não examinaram totalmente a razão porque deveríamos ensinar a resolução de problemas. O papel da resolução de problemas nos currículos escolares de Matemática é o resultado do conflito entre forças presas às antigas e endurecidas ideias acerca dos lucros (vantagens) do estudo da Matemática e a variedade dos acontecimentos interativos que ocorrem próximo do princípio do séc. XX (STANIC; KILPATRICK, 1989, p. 2).

Segundo Schoenfeld (2007), a expressão “Resolução de Problemas” era elegante, mas sua implementação nas salas de aula era superficial. Os editores de livros a adotaram em suas obras, mas a maior parte dos conteúdos dos livros era mantida da mesma forma, com exercícios similares para os estudantes praticarem e aprender por repetição. Os textos citavam Polya e as quatro fases que ele sugeriu para a resolução de um problema (compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e fazer uma retrospectiva), do livro A Arte de Resolver Problemas. Na prática, a “Resolução de Problemas” era trabalhada como a resolução de um problema que demandava apenas um ou dois passos para a obtenção da solução.

O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é diferente daquele em que regras de “como fazer” são privilegiadas. Ele “reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental.” (ONUCHIC, 1999, p. 203).

Onuchic (1999) acredita que ao ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, os problemas são importantes não somente para aprender novos conteúdos de Matemática, mas também são o primeiro passo para se fazer isso. Ao utilizar a metodologia de ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, a autora afirma que:

> [...] ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que começa com aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender Matemática é o poder de transformar problemas não-rotineiros em rotineiros. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos) (ONUCHIC, 1999, p. 207).

Trata-se de um trabalho em que um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula (ALLEVATO; ONUCHIC, 2006; ONUCHIC; ALLEVATO, 2005).

Segundo Onuchic e Allevato (2005), não há formas rígidas para colocar em prática essa metodologia, mas sugerem organizar as atividades seguindo as seguintes etapas:

1) Preparação do problema - Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha ainda sido trabalhado em sala de aula.

2) Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

3) Leitura em conjunto - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos. Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo-lhes o problema. Se houver, no texto do problema palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

4) Resolução do problema - De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da “matemática nova” que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

5) Observar e incentivar – Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. O professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos

são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7) Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos para discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8) Busca do consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado "formalização", o professor registra na lousa uma apresentação "formal" – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Observemos que, nesta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático que pode ser aplicado na sua resolução (podendo proporcionar uma resolução mais prática e eficiente) que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita, continuamente, durante a resolução do problema.

Acreditamos que é importante reconhecer que a Matemática pode e deve ser trabalhada por meio da Resolução de Problemas, ou seja, o professor tem condições de partir de uma situação problema e também explorar novos conteúdos, revisitando conteúdos já estudados anteriormente. Dessa forma, o professor também reforça ideias importantes para o novo conteúdo, possibilitando que os estudantes notem as relações entre os tópicos matemáticos e também observem que muitas vezes existem diferentes soluções para um mesmo problema.

1.4 Trajetória Hipotética de Aprendizagem

Martin Simon (pesquisador americano), em 1995, introduz a noção de Trajetória Hipotética de Aprendizagem baseada no construtivismo. Para ele, a aprendizagem é entendida como um processo de construção individual e social mediado por professores com a concepção de um trabalho estruturado, na qual se entende a aprendizagem dos alunos. Para o autor o construtivismo indica caminhos que auxiliam na compreensão de como ocorre a aprendizagem, favorecendo uma aprendizagem significativa.

Simon compara a palavra trajetória com uma viagem, quando uma pessoa faz uma viagem pelo mundo, por exemplo, há uma formulação de um plano para quais locais visitar primeiro, porém no caminho podem existir imprevistos, sendo necessário reformular o plano. O caminho pelo qual se viaja é, segundo Simon, a trajetória, e o caminho que tinha sido planejado é a trajetória hipotética. Relacionando ao processo de ensino e de aprendizagem, o autor diz o seguinte:

> Uso o termo “trajetória hipotética de aprendizagem” para me referir a previsão do professor como um caminho pelo qual a aprendizagem pode ocorrer. É hipotético porque a trajetória real de aprendizagem não é conhecida previamente. Ela caracteriza uma tendência esperada. A aprendizagem individual dos estudantes ocorre de forma idiossincrática, embora frequentemente em caminhos similares. É assumido que uma aprendizagem individual tem alguma regularidade, que a sala de aula limita a atividade matemática frequentemente de formas previsíveis, e que muitos estudantes na mesma sala podem se beneficiar da mesma tarefa matemática. Uma trajetória hipotética de aprendizagem fornece ao professor uma análise racional para escolher um projeto instrucional particular; assim, eu tomo as minhas decisões baseadas nas minhas melhores suposições de como a aprendizagem pode acontecer (SIMON, 1995, p. 135).

Uma das características da THA é ter como hipótese os conhecimentos dos estudantes acerca do objeto matemático a ser estudado, que será confirmado ou não no desenvolvimento da mesma. Assim a THA não é um processo estanque, na verdade é mutável, flexível e vai ao encontro das necessidades e especificidades dos estudantes em relação ao conteúdo a ser estudado.

> [...] o desenvolvimento de um processo de trajetória hipotética de aprendizagem e o desenvolvimento de atividades de aprendizagem têm um relacionamento simbiótico; a geração de ideias para atividades de aprendizagem é dependente das hipóteses do professor sobre o

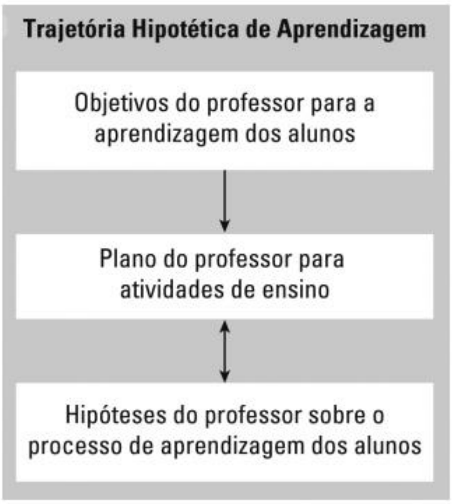
> desenvolvimento do pensamento e da aprendizagem dos estudantes, além disso a geração de hipóteses do desenvolvimento conceitual do estudante depende da natureza de atividades antecipadas (SIMON, 1995, p. 136).

Segundo Simon (1995 apud TRALDI, 2010, p. 370) as THA "consistem de estabelecimentos de objetivos de aprendizagem dos estudantes, de tarefas matemáticas para promover aprendizagem, e do levantamento de hipóteses acerca do processo de aprendizagem dos alunos". Essa trajetória considera as particularidades dos alunos em relação a sua aprendizagem e conhecimentos prévios. Portanto, ao elaborar a THA o professor poderá explicitar seus conhecimentos em relação ao ensino da matemática. Segue abaixo um Ciclo de Ensino de Matemática, desenvolvido por Simon (1995) a fim de apresentar um modelo que represente as variadas relações que uma THA possui, considerando o conhecimento do professor, sua reflexão sobre a prática, a avaliação para tomada de decisão. Segundo Simon (1995), uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA – é composta por três componentes:

> 1ª - o objetivo do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos; 2ª - as atividades de ensino; 3ª - o processamento hipotético de aprendizagem (uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos serão colocados em ação no contexto de aprendizagem das atividades) (apud PIRES, 2009, p. 157).

A criação das possibilidades de modificações da Trajetória Hipotética de Aprendizagem é a parte central do modelo a seguir:

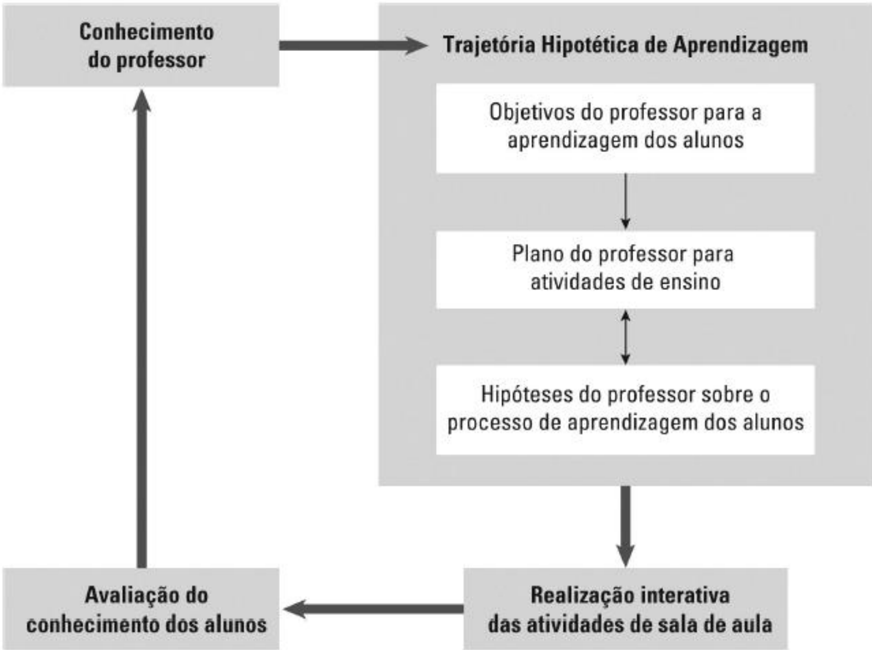
Figura 1.1 - Trajetória hipotética de aprendizagem



Fonte: Simon (1995 apud PIRES, 2009, p. 157).

Simon defende a ideia de que os objetivos da aprendizagem, as atividades de aprendizagem e o conhecimento dos estudantes que estarão envolvidos no processo de aprendizagem são elementos importantes na construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem – parte-chave do que ele denomina Ciclo de Ensino de Matemática (Figura 1.2), como um modelo de inter-relações cíclicas dos aspectos do conhecimento do professor, pensamento, tomada de atitudes.

Figura 1.2 – Ciclo de ensino de matemática abreviado



Fonte: Simon (1995 apud PIRES, 2009, p. 156)

Analisando o ciclo apresentado na figura, o conhecimento do professor é o ponto de partida. O professor organiza a trajetória a partir de objetivos de aprendizagem para seus alunos, escolhendo atividades que julga pertinentes para que esses objetivos sejam alcançados; além disso, tem como base hipóteses que formula sobre como os alunos podem aprender tais conteúdos, quais são seus conhecimentos prévios. Em seguida, o professor vai desenvolver essa trajetória planejada junto a seus alunos e, na maior parte das vezes, precisará fazer ajustes, seja em relação aos próprios objetivos, seja em relação às atividades planejadas, o que evidencia o caráter predominantemente hipotético de uma trajetória, por mais que tenha sido detalhadamente planejada. Segue-se a etapa da reflexão sobre a aprendizagem dos alunos em que o professor avalia também o que foi planejado e realizado, estando sujeita às modificações durante todo o percurso de planejamento, incluindo ajustes, seja da forma que se vai ensinar, ou mesmo da percepção que se tem sobre a aprendizagem do aluno.

Para Simon, é a meta da aprendizagem do professor para seus alunos que possibilita uma direção para uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem:

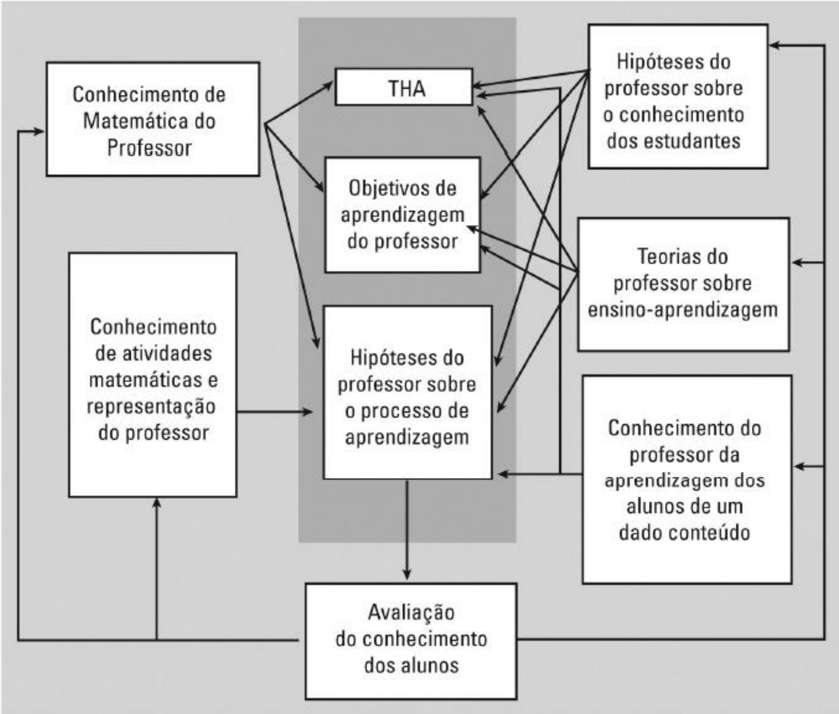
> Usaremos o termo trajetória hipotética de aprendizagem tanto para fazer referência ao prognóstico do professor como para o caminho que possibilitará o processamento da aprendizagem. É hipotética porque caracteriza a propensão a uma expectativa. O conhecimento individual dos estudantes ocorre de forma idiossincrática, embora frequentemente em caminhos similares. O conhecimento do indivíduo tem alguma regularidade (cf. Steffe, Von Glaserfield, Richards e Cobb, 1983), que em sala de aula adquire com atividades matemáticas frequentes em métodos prognósticos, e que muitos dos alunos em uma mesma sala de aula podem se beneficiar das mesmas tarefas matemáticas (SIMON, 1995, p. 34).

Para Simon, a Trajetória Hipotética de Aprendizagem dá ao professor a possibilidade de construir seu projeto de decisões, baseado em suas melhores suposições de como o conhecimento poderia ser processado.

Em seu texto, Simon destaca que a geração de uma THA prioriza buscar a forma pela qual o professor desenvolve seu planejamento em atividades de sala de aula, mas também ajuda a identificar como o professor interage com as observações dos alunos, coletivamente, constituindo uma experiência e construindo novos conhecimentos.

Simon destaca a relação entre os vários domínios do conhecimento do professor, a Trajetória Hipotética de Aprendizagem e as interações com os alunos (Figura 1.3). O conhecimento matemático do professor contribui para a identificação de um objetivo de ensino. Esses domínios de conhecimento, a meta de ensino e o conhecimento da representação das atividades matemáticas para o professor, seu conhecimento sobre a aprendizagem individual do aluno, bem como a concepção de aprendizagem e ensino (ambos em geral dentro da Matemática) contribuem para o desenvolvimento de atividades de aprendizagem e processos de aprendizagens hipotéticas.

Figura 1.3 – Domínios do conhecimento do professor, Trajetória Hipotética de Aprendizagem e interações com os alunos



Fonte: Simon (1995 apud PIRES, 2009, p. 159).

A noção da Trajetória Hipotética de Aprendizagem, para Simon, pressupõe a importância da relação entre a meta pretendida e o raciocínio sobre decisões de ensino e a hipótese sobre esse percurso. Para ele, o desenvolvimento de um processo hipotético de aprendizagem e o desenvolvimento de atividades dessa aprendizagem têm uma relação simbólica. A geração de ideias para atividades de aprendizagem é subordinada à hipótese do professor sobre o desenvolvimento do pensamento e aprendizagem de seus alunos.

A opção pela elaboração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) deu-se porque acreditamos que ela tem potencial para que o professor possa ir além da elaboração de um plano de aula e reflita a respeito de suas ações e das possíveis ações dos estudantes em sala de aula. Pretende-se também levantar elementos que mostram que construir uma trajetória constitui-se em uma ação de formação de professor.

CAPÍTULO 2
ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

Este trabalho foi projetado a partir de uma reflexão pessoal a respeito do aprendizado em Matemática buscando possíveis caminhos que possam conduzir a uma prática de ensino que possa colaborar e atender as exigências atuais para o aprendizado e para os objetivos do ensino, propostos pelas Leis de Diretrizes e Bases, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e pela Base Nacional Comum Curricular. Assim os principais documentos que regem a Educação Nacional foram consultados para o desenvolvimento do trabalho.

Neste trabalho, a abordagem qualitativa se constituiu como opção metodológica face às possibilidades que pode oferecer para o estudo das ações desenvolvidas no diagnóstico e na abordagem das possíveis dificuldades de aprendizagem no processo de ensino e de aprendizagem de matemática.

Para Bogdan e Biklen (1994, p. 11), a pesquisa qualitativa é aquela que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais. Os autores apresentam as seguintes características de uma pesquisa qualitativa: a investigação qualitativa é descritiva; os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; os pesquisadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; e o significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Assim sendo nossa pesquisa terá caráter qualitativo.

O estudo foi composto de duas etapas distintas que foram requisitos para a evolução e desenvolvimento da pesquisa. A primeira etapa foi de embasamento teórico para dar suporte ao desenvolvimento THA. A segunda etapa o desenvolvimento da THA bem como o estudo e a abordagem formal do conteúdo matemático.

Incialmente realizamos uma revisão bibliográfica a respeito da perspectiva da Resolução de Problemas para o ensino de matemática, com o objetivo de propor uma alternativa para o ensino de Função Quadrática.

As bases teóricas assumidas nessa pesquisa são a Resolução de Problemas como estratégia metodológica para o ensino aprendizagem de Matemática na perspectiva de Onuchic e Allevato (2011) e as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem de Simon (1995).

Na segunda etapa foi elaborada a Trajetória Hipotética de Aprendizagem, bem como o desenvolvimento da abordagem formal de Função Quadrática. Foi feito também um estudo a respeito do conteúdo de Função Quadrática por meio do Cálculo Diferencial, com o propósito de apresentar uma ligação entre os dois níveis de ensino: médio e superior. Foram apresentadas algumas definições e teoremas que deram suporte para o estudo com o Cálculo Diferencial. Ainda na segunda etapa foi feito um estudo de uma propriedade notável da Parábola, foram apresentadas algumas aplicações na Parábola em várias áreas, além de alguns exemplos que nos permitem visualizar a Parábola em tarefas cotidianas, bem como algumas curiosidades sobre as parábolas, que podem ser utilizadas na tentativa de tornar o aprendizado mais interessante, eficaz e agradável.

Para os estudos da segunda etapa (dentre outros materiais) foram amplamente utilizados os livros da Coleção PROFMAT que serviram de base para o desenvolvimento das disciplinas estudadas pelo autor deste trabalho durante o curso.

Finalizando são apresentadas reflexões a respeito da importância do ensino de Função Quadrática e das possíveis contribuições dessa Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

CAPÍTULO 3
UMA THA PARA O ESTUDO FUNÇÃO QUADRÁTICA: DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

3.1 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ESTUDO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

De acordo com Lima (2014), o estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau. Problemas que recaem numa equação do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática. Em textos cuneiformes, escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos, encontramos, por exemplo, a questão de achar dois números, dados sua soma s e seu produto p. Em termos geométricos, este problema pede que se determinem os lados de um retângulo conhecendo o semiperímetro s e a área p.

A importância do conceito de função quadrática não se restringe apenas à singularidade interna a essa área do conhecimento, mas também pela sua aplicação intensiva e recorrente em outros campos do conhecimento. Na recepção de sinais a aplicação mais comum é a da antena parabólica que capta os sinais emitidos por um satélite, outros exemplos que podemos destacar é o dos faróis de carros, holofotes e até mesmo das lanternas que possuem na sua estrutura um emissor de luz localizado no foco de uma parábola. O campo Arquitetônico é vasto de exemplos utilizando a parábola, não só por questões estéticas e estruturais, mas também pela otimização de espaços, iluminação e ventilação. Podemos destacar também atividades relacionadas a problemas do cotidiano; principalmente problemas de otimização; aplicações na Física e Cálculo Diferencial e Integral. Vale ressaltar o carácter unificador que este conceito assume, agregando em seu entorno conhecimentos variados e em áreas diversas, servindo também de ponte para a construção de outros conceitos originados em diferentes áreas do conhecimento.

O estudo das funções é conteúdo pertinente à grade curricular da 1ª série do Ensino Médio, por isso é fácil observar uma unidade a respeito das Funções Quadráticas em qualquer livro didático desse nível de ensino. Observa-se que os autores abordam esse conteúdo com rigor matemático, seu tratamento enfoca o comportamento gráfico, máximos e mínimos, coordenadas do vértice, zeros ou raízes da Função Quadrática. Uma série de elementos pode ser explorada: o comportamento gráfico, o deslocamento da parábola, sua abertura, e também a concavidade.

Em geral, nas apostilas e livros didáticos, o conteúdo de Funções Quadráticas é apresentado de uma forma mecânica, carregado de fórmulas que, muitas vezes não fazem sentido para os alunos.

Uma das principais dificuldades enfrentadas por professores de matemática da Educação Básica, em especial do Ensino Médio, é propor atividades que sejam realísticas[1] para os educandos e que também permitam a exploração das competências propostas nos documentos curriculares.

Na próxima seção, apresentamos uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (SIMON, 1995) para o ensino de Função Quadrática e suas propriedades, na perspectiva da Resolução de Problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

3.2 O Estudo de Função Quadrática – Trajetória Hipotética de Aprendizagem

Apresentamos inicialmente os objetivos do professor com relação às aprendizagens dos estudantes, de acordo com as DCE-PR. Os principais objetivos no estudo desse conteúdo são:

- identificar a lei de formação de uma Função Quadrática a partir de sua representação algébrica e/ou gráfica;
- calcular as raízes e o vértice de uma Função Quadrática, bem como identificar seu ponto de máximo e de mínimo;
- determinar o número de raízes de uma Função Quadrática por meio da análise de sua representação gráfica (concavidade da parábola);
- identificar que determinadas situações podem ser descritas por meio de uma Função Quadrática;
- resolver problemas que envolvam a Função Quadrática.

A elaboração da THA começa com o esboço do plano de atividades para a aprendizagem dos estudantes, optamos pela escolha de dois problemas, que envolvem o estudo de Função Quadrática. Os problemas apresentados foram

[1] O termo realístico aqui utilizado tem base na abordagem Educação Matemática Realística, proposta por Hans Freudenthal. O termo realístico, nesta perspectiva, abrange fatos reais e imagináveis para os alunos (PIRES, 2013).

retirados do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM – 2017).

Inicialmente apresentamos um dos problemas (problema gerador[2]), creditamos que os estudantes tenham condições de resolver esse problema, talvez não por meio de função quadrática, considerando que eles ainda não estudaram esse conteúdo, mas sim por meio de testes (tentativa e erro) que os levarão a resposta. Cabe ao professor guiar a aula para a introdução do conceito de Função Quadrática, sua definição, suas consequências e suas aplicações. A preparação desse problema está prevista no roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011). Após a resolução do primeiro problema, e a formalização do conteúdo, será apresentado o segundo problema para que o professor possa observar se os alunos conseguem aplicar o conteúdo agora já formalizado.

Na THA proposta seguimos as etapas de uma aula apresentadas no roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011). Destacamos a etapa da resolução do problema, para descrever uma possível solução que acreditamos que os estudantes podem apresentar, incluindo possíveis dúvidas no decorrer da resolução, conforme sugerido por Simon (1995), como as hipóteses do professor a respeito do processo de aprendizagem. Enfatizamos também a formalização do conteúdo no decorrer da aula, uma vez que a resolução do problema e a formalização representam aspectos essenciais da estratégia metodológica proposta.

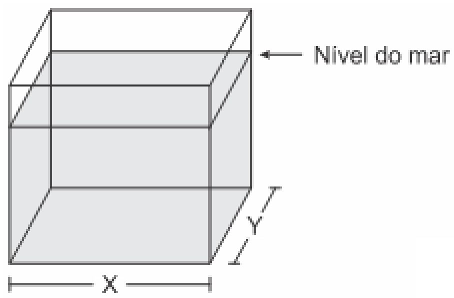
Nos últimos anos, o Enem (Exame Nacional do Ensino Médio) passou a ser a principal porta de entrada para o ensino superior no Brasil, atraindo a atenção da sociedade e gerando grande interesse público. Acreditamos então que é de interesse por boa parte dos alunos trabalhar com questões do ENEM. Nosso problema gerador foi retirado do ENEM do ano de 2017.

---

[2] Segundo Onuchic e Allevato (2005), Na sugestão de etapas na resolução de problemas, na etapa 1, devemos selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador.

Quadro 3.1 - Questão ENEM

(Enem 2017) Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 *metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.*



Quais devem ser os valores de X *e de* Y, *em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?*

a) 1 *e* 49

b) 1 *e* 99

c) 10 *e* 10

d) 25 *e* 25

e) 50 *e* 50

Fonte: Inep (2017).

Inicialmente deve ser entregue uma cópia do problema para cada aluno. Após a leitura individual sugerimos a formação de grupos e a nova leitura do problema.

Acreditamos que nesse momento algumas questões podem ser levantadas, segue alguns exemplos.

- O que são viveiros de lagostas?
  Uma espécie de gaiola submersa, são utilizados para armazenar as lagostas após a captura.

Figura 3.1 - Viveiro de lagostas

Fonte: Wikimedia Commons (2017).

- O que é uma cooperativa de pescadores?

  Cooperativa é uma associação de pessoas com interesses comuns, economicamente organizada de forma democrática, isto é, contando com a participação livre de todos e respeitando direitos e deveres de cada um de seus cooperados, aos quais presta serviços (ZANLUCA, 2017).

- O que é um prisma reto-retangular?

  O prisma reto-retangular é um poliedro cuja base é um retângulo e a arestas de suas faces laterais têm o mesmo comprimento e são perpendiculares ao plano das bases inferior e superior. A aresta lateral forma com a base ângulos de retas que medem 90º.

- O que é corrosão marinha?

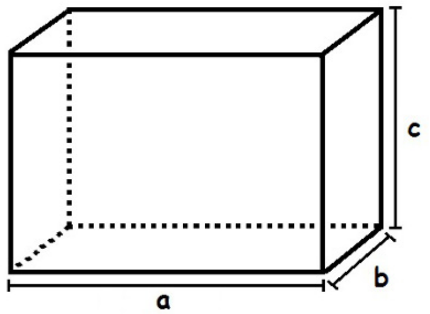
  Corrosão é um termo químico bastante empregado no cotidiano para se referir ao processo de destruição total, parcial, superficial ou estrutural de determinado material causado pela ação do meio. É de conhecimento que peças feitas de aço carbono sofrem desgaste por Corrosão Marinha quando expostas a ambientes próximos ao mar. (FOGAÇA, 2017).

Após sanadas as dúvidas com relação ao enunciado, os alunos em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, devem tentar resolver o problema.

Nesse momento o professor deve observar e incentivar. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor vai passando pelos grupos, observando, analisando o comportamento dos alunos e estimulando o trabalho colaborativo. Nessa fase do trabalho o professor assume o papel de mediador, tentando fazer com que os alunos reflitam, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. O professor deve incentivar os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto. Estimulando-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, o professor deve atender os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanhar suas explorações e ajudá-los, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

Pode ser que alguns alunos apresentem dificuldades em calcular a área da base de um prisma reto-retangular.

Figura 3.2 – Prisma reto-retangular



Fonte: Autor.

Cálculo da área da base (A_B): $A_B = a.b$

Feitas as resoluções em grupos, o professor deve convidar representantes dos grupos para registrar suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

Durante os registros, o professor deve incentivar uma plenária em que todos os alunos são convidados a discutirem as diferentes resoluções registradas pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

Caso a turma ainda não tenha estudado o conteúdo de Função Quadrática, espera-se que eles tentem resolver o problema por tentativa e erro, atribuindo valores a x e y, aproveitando as alternativas fornecidas e verificando os resultados.

Espera-se também que boa parte dos alunos não se atente ao fato que a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, poderão substituir os valores das alternativas calculando a área:

Se $x = 1$ e $y = 49$ (alternativa (a)), temos que a área da base (A_B) será dada por:
$A_B = 1.49 = 49\,m^2$.

Se $x = 1$ e $y = 99$ (alternativa (b)), temos que a área da base (A_B) será dada por:
$A_B = 1.99 = 99\,m^2$.

Se $x = 10$ e $y = 10$ (alternativa (c)), temos que a área da base (A_B) será dada por:
$A_B = 10.10 = 100\,m^2$.

Se $x = 25$ e $y = 25$ (alternativa (d)), temos que a área da base (A_B) será dada por:
$A_B = 25.25 = 625\,m^2$.

Se $x = 50$ e $y = 50$ (alternativa (e)), temos que a área da base (A_B) será dada por:
$A_B = 50.50 = 2500\,m^2$.

Como 50 mais 50 dá 100, o total de metros lineares da tela, boa parte dos alunos pode responder, equivocando-se, a alternativa (e), pois para $100\,m$ de tela não seria possível $x = 50\,m$ e $y = 50\,m$.

Ao grupo de alunos que ficou atento ao fato de se utilizar $100\,m$ de tela, espera-se o seguinte cálculo:
$2x + 2y = 100$, logo $x + y = 50$.

No caso de análise das alternativas para chegar à solução teremos:

Se $x = 1$ e $y = 49$ (alternativa (a)), temos que $x + y = 50$ e a área da base (A_B) será dada por:
$A_B = 1.49 = 49\,m^2$.

Se $x = 1$ e $y = 99$ (alternativa (b)), temos que $x + y \neq 50$, logo fica descartada a alternativa (b).

Se $x = 10$ e $y = 10$ (alternativa (c)), temos que $x + y \neq 50$, logo fica descartada a alternativa (c).

Se $x = 25$ e $y = 25$ (alternativa (d)), temos que $x + y = 50$ e a área da base (A_B) será dada por:
$A_B = 25.25 = 625\,m^2$.

Se $x = 50$ e $y = 50$ (alternativa (e)), temos que $x + y \neq 50$, logo fica descartada a alternativa (e).

Portanto a alternativa correta é a alternativa (d).

Podemos também incentivar os alunos a organizarem os dados possivelmente por meio de uma tabela, para os que ficaram atentos que $x + y = 50$ teremos:

Tabela 3.1 - Área da base

$x\ (m)$	$y\ (m)$	Área da base (A_B em m²)
1	49	49
2	48	96
...	...	...
10	40	400
15	35	525
20	30	600
25	25	625
30	20	600
35	15	525
40	10	400
...	...	...
48	2	96
49	1	49

Fonte: Autor.

De acordo com a regularidade dessa tabela, percebemos que o valor máximo da área da base será 625 m², pois conforme vamos alterando os valores de x a área aumenta até esse valor e depois começa a decrescer.

Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a sala de aula, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

Realizado esse consenso referente ao resultado, é o momento da formalização do conteúdo. Antes da formalização do conteúdo de Função Quadrática especificamente, recomendamos a retomada do conceito de função já estudado pelos alunos, para isso o professor pode levantar as seguintes questões:

- Existe uma relação entre x e y?

  Resposta esperada: Sim como temos 100 metros de tela o perímetro da base é dado por $2x + 2y = 100$, logo $x + y = 50$.
- Podemos escrever y em função de x?

  Resposta esperada: Como $x + y = 50$, então $y = 50 - x$.
- Como podemos escrever a área (A_B) em função de x?

  Resposta esperada: Como $A_B = x.y$ e $y = 50 - x$, logo:

$$A_B = x.(50 - x) = 50.x - x^2 = -x^2 + 50.x$$

- Tanto A_B como x são variáveis?
  Resposta esperada: Sim, conforme alteramos os valores de x, altera-se os valores de A_B.

- Existe dependência entre essas variáveis?
  Resposta esperada: Sim, uma depende da outra.

- Qual seria dependente? E qual seria independente?
  Resposta esperada: A_B depende de x, logo A_B é a variável dependente e x a variável independente.

- Esta relação é uma função?
  Resposta esperada: Sim, uma função é uma relação entre duas variáveis, sendo uma delas dependente e a outra independente, em que para toda variável independente existe uma única variável dependente a ela correspondente.

- Que valores podem assumir as variáveis? Como podemos chamar o conjunto de números aos quais as variáveis podem assumir?
  Resposta esperada: No problema em estudo x e y simbolizam medidas de lados da base e logo devem ser valores positivos. Como $y = 50 - x$, x deve ser um valor positivo menor que 50. Quando calculamos A_B, que simboliza o valor da área da base, temos como resultado valores positivos e, de acordo com os cálculos já realizados, o maior valor para A_B foi de 625. Notemos ainda que os valores não necessariamente são inteiros, podemos atribuir valores reais positivos a x e podemos obter A_B com valores reais positivos também. Como x são os valores independentes da relação que é uma função, os valores atribuídos a x simbolizam o domínio da função (D_f) e os valores de A_B, que são os dependentes, simbolizam a imagem da função (I_m), logo:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \, / \, 0 < x < 50\}$ e $I_m = \{A_B \in \mathbb{R} \, / \, 0 < A_B \leq 625\}$, sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais.

Como A_B está em função de x, podemos usar a seguinte notação:

$$A_B = f(x) = -x^2 + 50.x$$

- Que tipo de função acabamos de escrever?
  Não se espera que os alunos respondam que a função é quadrática ou do segundo grau, mas sim comparem com a função já estudada, a função afim ou do primeiro grau, concluindo que não se trata de uma função afim. Assim o professor pode então definir a nova função a ser estudada.

Vale ressaltar que muitas vezes as respostas não estarão muito de acordo com as respostas esperadas, cabe ao professor a habilidade para aproveitar as respostas dos alunos e levantar outros questionamentos para orientá-los na construção dos conceitos e definições próprios do conteúdo em tela.

Neste momento, denominado "formalização", sugerimos que o professor registre na lousa (ou utilize algum recurso audiovisual) uma apresentação "formal" (organizada e estruturada em linguagem matemática) padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

3.3 Abordagem Formal

Além de abordar o conceito de Função Quadrática, o problema escolhido para essa trajetória possibilita a determinação das raízes, estudo da forma canônica da função, a forma fatorada, os valores de máximo ou de mínimo dessa função bem como o comportamento gráfico.

3.3.1 Definição de Função Quadrática

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais $a, b, c,$ com $a \neq 0,$ tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ sendo o conjunto dos número reais).

Para o caso do problema dos "*Viveiros de lagostas",* temos que

$f(x) = -x^2 + 50.x$. Assim temos uma função quadrática, em que $a = -1$, $b = 50$ e $c = 0$.

Os coeficientes $a, b, c,$ da função quadrática f ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume. Isto é se $ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$, então $a = d, b = e, c = f$. Com efeito, seja $ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$ para todo $x \in R$. Tomando $x = 0$, obtemos $c = f$. Então desconsiderando c e f tem-se $ax^2 + bx = dx^2 + ex$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, essa igualdade vale para todo $x \neq 0$. Nesse caso, dividindo os dois membros por x, obtemos $ax + b = dx + e$ para todo $x \neq 0$. Fazendo primeiro $x = 1$ e depois $x = -1$, obtemos $a + b = d + e$ e $-a + b = -d + e$, assim concluímos que $a = d$ e $b = e$.

3.3.2 Valor Numérico

A Função Quadrática também é conhecida como Função Polinomial do 2º grau. Os números representados por a, b e $c,$ são os coeficientes da função. Em geral, o domínio da função quadrática é $\mathbb{R}$, ou um de seus subconjuntos. No entanto, quando está ligada a uma situação real, é preciso verificar o que representa a variável independente x para determinarmos o seu domínio (caso do problema estudado). Em alguns problemas é importante o cálculo do valor da função quadrática num ponto, como: dada a imagem da função quadrática, calcular os elementos do domínio correspondentes. Isto é, dado $x_0 \epsilon R$ calcular $f(x_0)$ ou dada a equação $y_0 = f(x_0)$, calcular x_0.

No caso do problema em discussão que, $A_B = f(x) = x^2 + 50.x$, podemos, por exemplo, calcular a área da base (A_B) se a medida do lado (x) for igual a $10\ m$, fazendo:

$$f(10) = -10^2 + 50.10 = -100 + 500 = 400\ m^2$$

Ou ainda podemos obter o valor do lado x para que a área da base A_B seja igual $600\ m^2$:

$$A_B = 600 \iff -x^2 + 50.x = 600 \iff -x^2 + 50.x - 600 = 0$$

e as soluções da equação são $20\ m$ e $30\ m$ (espera-se que os alunos já tenham conhecimento sobre métodos de resolução de uma equação do 2º grau, ainda assim alguns procedimentos podem ser retomados).

3.3.3 Zeros ou Raízes de uma Função Quadrática

Os zeros ou raízes de uma função $f(x)$ são os valores x do domínio para os quais $f(x) = 0$. Assim, os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Podemos determinar os zeros ou raízes de funções quadráticas das seguintes maneiras:

3.3.3.1 Por fatoração

Para a função $f(x) = x^2 - 9$, podemos pensar na diferença entre dois quadrados e reescrever a função $f(x) = (x + 3).(x - 3)$. Para que o produto se anule (ou seja, $f(x) = 0$), basta que um dos fatores também seja nulo. Assim, as raízes são -3 e 3. Para a função $f(x) = x^2 - 5x$, podemos reescrever a função $f(x) = x.(x - 5)$. Para que o produto se anule, basta também que um dos fatores também seja nulo, logo as raízes são 0 e 5. Para a função $f(x) = x^2 + 4x + 9$, podemos pensar no quadrado da soma e reescrever a função $f(x) = (x + 2).(x + 2)$. considerando o produto nulo, concluímos que – 2 é uma raiz dupla da função.

Generalizando: Se $f(x) = ax^2 - c$, com $a \neq 0$, para determinar as raízes podemos reescrever a função como $f(x) = \left(\sqrt{a}.x + \sqrt{c}\right).\left(\sqrt{a}.x - \sqrt{c}\right) = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ sempre que $\frac{c}{a} > 0$. Podemos concluir que se $b = 0$ as raízes são simétricas. Se $f(x) = ax^2 + bx$, podemos reescrever como $x.(ax + b) = 0$ teremos $x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$. Podemos concluir que se $c = 0$ uma raiz será nula.

Na função do problema dos "*Viveiros de lagostas",* temos $f(x) = -x^2 + 50.x$, fazendo $f(x) = 0$ temos $-x^2 + 50.x = 0 \Leftrightarrow x.(-x + 50) = 0$ e para que o produto se anule, basta também que um dos fatores também seja nulo, logo as raízes são 0 e 50. Ressaltando, que no contexto do problema em questão, igualar $f(x)$ a zero, significa obter os valores de x para que a área seja igual a zero, ou seja, não teríamos o retângulo da base. Quando definimos o domínio da função excluímos as medidas $x = 0$ e $x = 50$ para que o retângulo existisse.

3.3.3.2 Completando quadrado

Para a função $f(x) = x^2 + 10x + 16$, fazendo $f(x) = 0$ temos $x^2 + 10x + 16 = 0$ que é equivalente a equação $x^2 + 10x + 16 + 9 = 9$ ou $x^2 + 10x + 25 = 9 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 9 \Leftrightarrow (x+5)^2 = (\pm 3)^2$ logo, $x + 5 = 3 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x + 5 = -3 \Leftrightarrow x = -8$.

Na função do problema em estudo temos $f(x) = -x^2 + 50.x$, fazendo $f(x) = 0$ temos $-x^2 + 50.x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 50.x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 50.x + 625 = 625 \Leftrightarrow (x-25)^2 = (\pm 25)^2$ logo, $x - 25 = 25 \Leftrightarrow x = 50$ ou $x - 25 = -25 \Leftrightarrow x = 0$. Ressaltando novamente que no contexto do problema, igualar $f(x)$ a zero, significa obter os valores de x para que a área seja igual a zero, ou seja, não teríamos o retângulo da base. Quando definimos o domínio da nossa função excluímos as medidas $x = 0$ e $x = 50$ para que o retângulo existisse.

Notemos que se $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, fazendo $f(x) = 0$ temos que $ax^2 + bx + c = 0$

$$\Leftrightarrow ax^2 + bx = -c$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Que representa a fórmula resolutiva da equação do segundo grau no conjunto dos números reais sempre que $b^2 - 4ac \geq 0$.

3.3.3.3 Pela fórmula resolutiva de equação que envolve polinômio de 2º grau

Vimos anteriormente que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ representa a fórmula resolutiva da equação do 2º grau. Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

E assim:

- Se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais distintas.
- Se $\Delta = 0$, a equação possui duas raízes reais iguais.
- Se $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais.

Na função em estudo: $f(x) = -x^2 + 50.x$, fazendo $f(x) = 0$ temos $-x^2 + 50.x = 0$. Assim $a = -1$, $b = 50$ e $c = 0$. Calculando Δ temos: $\Delta = 50^2 - 4.(-1).0 = 2500$. Aplicando na fórmula resolutiva da equação do 2º grau: $x = \frac{-50 \pm \sqrt{2500}}{2.(-1)} = \frac{-50 \pm 50}{-2}$ que resulta em $x = 0$ ou $x = 50$. Lembrando que, igualar $f(x)$ a zero, significa obter os valores de x para que a área seja igual a zero, ou seja não teríamos o retângulo da base. Quando definimos o domínio da função excluímos as medidas $x = 0$ e $x = 50$ para que o retângulo existisse.

3.3.3.4 Pela regra da soma e do produto das raízes

Vimos da fórmula resolutiva da equação do 2º grau que $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, denotando as possíveis raízes por x' e x'', temos que $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, logo,

podemos obter a soma:

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

podemos obter o produto:

$$x'.x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Ou seja, a soma $(x' + x'')$ e o produto $(x'.x'')$ das raízes de uma equação do segundo grau são:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

$$x'.x'' = \frac{c}{a}$$

Na função $f(x) = -x^2 + 50.x$, fazendo $f(x) = 0$ temos $-x^2 + 50.x = 0$. Assim $a = -1$, $b = 50$ e $c = 0$. Portanto $x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{50}{-1} = 50$ e $x'.x'' = \frac{c}{a} = \frac{0}{-1} = 0$. Ou seja, devemos obter dois valores que somados correspondem a 50 e multiplicados a 0, esses valores são 0 e 50. Lembrando mais uma vez que no contexto do nosso problema, igualar $f(x)$ a zero, significa obter os valores de x para que a área seja igual a zero, ou seja, não teríamos o retângulo da base. Quando definimos o domínio da nossa função excluímos as medidas $x = 0$ e $x = 50$ para que o retângulo existisse.

3.3.4 Forma Canônica da Função Quadrática

Dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, podemos escrever:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$$

Notemos que:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \qquad (I)$$

E que:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \qquad (II)$$

Substituindo (I) em (II) temos:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

Ou seja:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Que é conhecida como forma canônica da função quadrática.

Por meio da forma canônica podemos obter o valor mínimo ou máximo da função quadrática.

3.3.5 Valor Mínimo e Valor Máximo da Função Quadrática

Vimos que a forma canônica da função quadrática (3.3.4) é dada por:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

A forma canônica exibe, no interior dos colchetes, uma soma de duas parcelas, sendo a primeira $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ dependente de x é não negativa, a segunda $\left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$ constante.

Supondo $a > 0$, temos que o menor valor da função $f(x)$ será dado quando a primeira parcela $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ for igual a zero ou seja quando $x = -\frac{b}{2a}$, assim:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left[\left(-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}\right)^{2}+\frac{4ac-b^{2}}{4a^{2}}\right]=a.\left(\frac{4ac-b^{2}}{4a^{2}}\right)=a.\left(-\frac{b^{2}-4ac}{4a^{2}}\right)$$

Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$ temos que o menor valor (valor mínimo) de $f(x)$ será:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)= -\frac{\Delta}{4a}$$

Não podemos determinar o maior valor que a função $f(x)$ assume pois quanto maior for o valor de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}$ maior será o valor de $f(x)$.

Supondo $a < 0$, temos que o maior valor da função $f(x)$ será dado quando a primeira parcela $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}$ for igual a zero ou seja quando $x = -\frac{b}{2a}$, assim:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=a\left[\left(-\frac{b}{2a}+\frac{b}{2a}\right)^{2}+\frac{4ac-b^{2}}{4a^{2}}\right]=a.\left(\frac{4ac-b^{2}}{4a^{2}}\right)=a.\left(-\frac{b^{2}-4ac}{4a^{2}}\right)$$

Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$ temos que o maior valor (valor máximo) de $f(x)$ será:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)= -\frac{\Delta}{4a}$$

Não podemos determinar o menor valor que a função $f(x)$ assume pois quanto maior for o valor de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}$ menor será o valor de $f(x)$.

Na função do problema temos $A_B = f(x) = -x^2 + 50.x$. Assim $a = -1$, $b = 50$ e $c = 0$. Calculando Δ temos: $\Delta = 50^2 - 4.(-1).0 = 2500$ e $-\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2.(-1)} = 25$.

Como $a = -1$ portanto $a < 0$, a função admite um valor máximo que será dado por $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ ou seja:

$$f(25) = -\frac{2500}{4.(-1)} = 625$$

Assim concluímos que a área máxima da base será de $A_B = 625\ m^2$ e isso ocorre quando a medida do lado $x = 25\ m^2$.

3.3.6 Forma Fatorada da Função Quadrática

Dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, podemos escrever:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = a.\left[x^2 - x.\left(\frac{-b}{a}\right) + \frac{c}{a}\right] \qquad \text{(I)}$$

Por (3.3.3.iv) temos que a soma $(x' + x'')$ e o produto $(x'.x'')$ das raízes de uma equação do segundo grau são:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} \qquad \text{(II)}$$

$$x'.x'' = \frac{c}{a} \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I) temos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a.[x^2 - x.(x' + x'') + x'.x'']$$

Notemos que:

$$[x^2 - x.(x' + x'') + x'.x''] \Leftrightarrow (x^2 - x.x' - x.x'' + x'.x'')$$
$$\Leftrightarrow [x.(x - x') - x''.(x - x')] \Leftrightarrow (x - x').(x - x'')$$

E assim temos a forma fatorada da função quadrática.

$$f(x) = a.(x - x').(x - x'')$$

Na função $f(x) = -x^2 + 50.x$, $a = -1$ e as raízes são $x' = 0$ e $x'' = 50$ (3.3.3. $\boldsymbol{i}$). Com esses valores podemos escrever a forma fatorada de f(x):

$$f(x) = a.(x - x').(x - x'') = -1.(x - 0).(x - 50) = -x.(x - 50)$$

Notemos que a forma fatorada é prática para a obtenção da lei da função quadrática quando conhecido o coeficiente a e as raízes x' e x''. Por exemplo, se queremos obter a lei da função quadrática de raízes 2 e 3, sabendo que $f(1) = 10$. Substituindo as raízes na forma fatorada:

$$f(x) = a.(x - x').(x - x'') = a.(x - 2).(x - 3)$$

Como $f(1) = 10$ então $f(1) = a.(1 - 2).(1 - 3) = 10$ ou seja $2.a = 10 \Leftrightarrow a = 5$. E assim $f(x) = 5.(x - 2).(x - 3) = 5x^2 - 25x + 30$ que é a lei da função quadrática.

3.3.7 Gráfico da Função Quadrática

3.3.7.1 Esboço gráfico do problema

Se os alunos souberem representar pontos e funções no plano cartesiano e reconhecerem que o gráfico da função afim ou do 1º grau é uma reta, o professor pode começar por questioná-los com o objetivo que os alunos percebam que o gráfico de uma função quadrática não é uma reta. Para tanto podemos esboçar os pontos que possivelmente já foram calculados em alguma das resoluções feitas pelos alunos.

Em umas das hipóteses de resolução temos a seguinte tabela:

Tabela 3.2 - Área da base

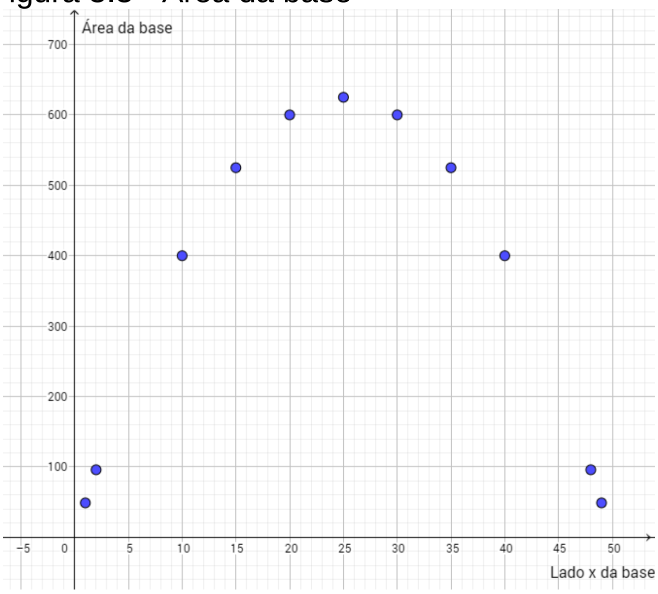
$x\ (m)$	$y\ (m)$	Área da base (A_B em m²)
1	49	49
2	48	96
...	...	...
10	40	400
15	35	525
20	30	600
25	25	625
30	20	600
35	15	525
40	10	400
...	...	...
48	2	96
49	1	49

Fonte: Autor.

Caso a tabela não apareça em alguma das resoluções apresentadas pelos alunos, o professor deve construir a tabela com os alunos.

Com os valores da tabela, representar no plano cartesiano os pontos (medida do lado x, valor da área da base) (figura 3.3):

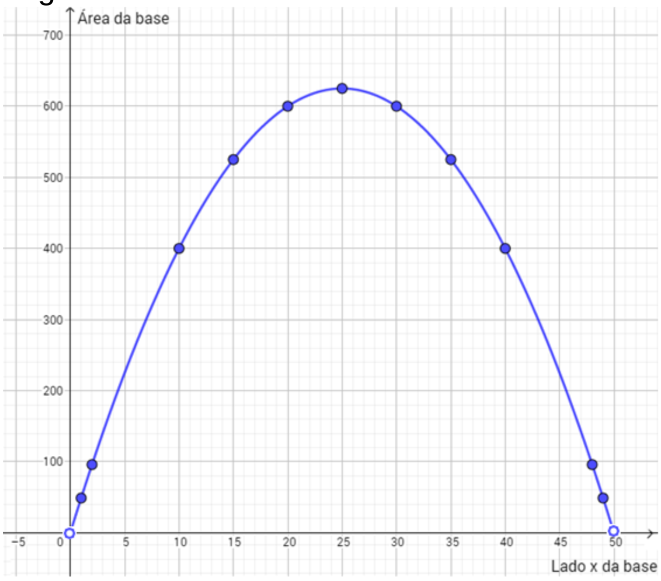
Figura 3.3 - Área da base



Fonte: autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Na formalização do conteúdo e resolução do problema, temos que a função que descreve a área da base $A_B = f(x)$ está em função do lado x e $f(x) = -x^2 + 50.x$. Acreditamos que seja interessante testar os valores da função e retomar o conceito de domínio. Lembrando que neste caso $D_f = \{x \in \mathbb{R} \, / \, 0 < x < 50\}$ e $I_m = \{A_B \in \mathbb{R} \, / \, 0 < A_B \leq 625\}$, sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Ou seja, podemos atribuir valores reais entre 0 e 50 para x, assim o gráfico da nossa função seria como na figura 3.4.

Figura 3.4 - Área da base



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

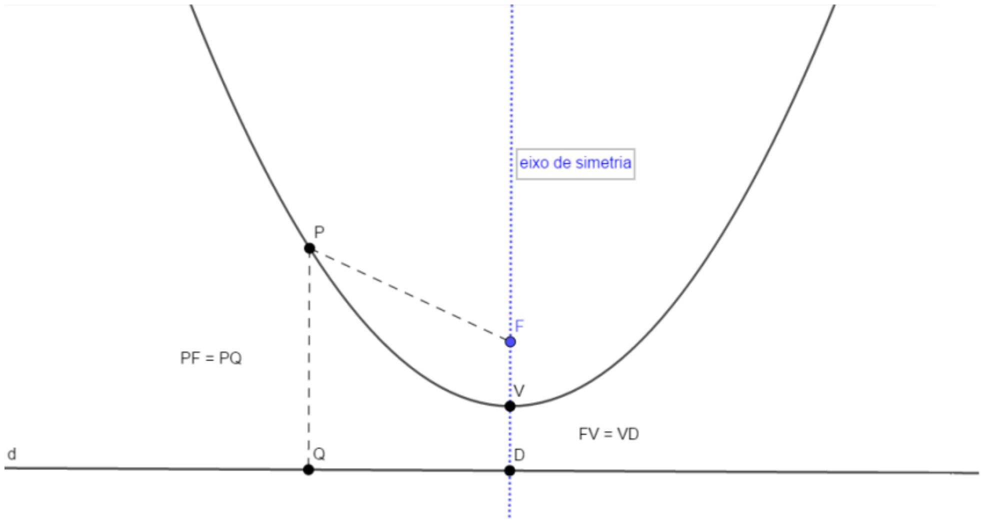
Notemos que o gráfico não é uma reta e sim uma curva chamada parábola. O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. O professor, nesse momento, aproveita e trabalha com os alunos a definição formal da parábola.

3.3.7.2 Definição de parábola

Dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d. A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se eixo de simetria da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se o vértice dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz.

Assim, definirmos que a parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa d, chamada diretriz, e de um ponto fixo F, não pertencente à diretriz, chamado foco (Figura 3.5).

Figura 3.5 - Parábola



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

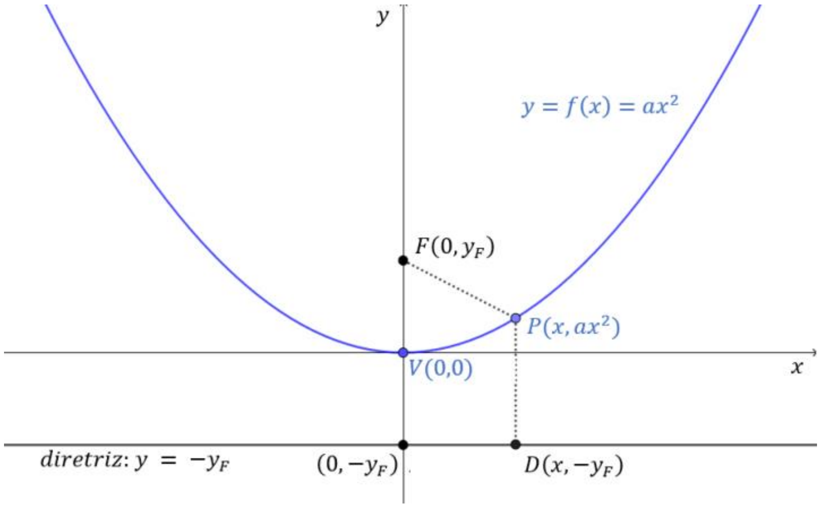
3.3.7.3 Gráfico da função quadrática

Vamos demonstrar a seguir porque o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Calcularemos também as coordenadas do foco $F(x_F, y_F)$ e do vértice $V(x_V, y_V)$ em termos dos coeficientes a, b e c da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Consideremos o caso em que $b = c = 0$, logo, $f(x) = ax^2$. Vamos assumir que $a > 0$ ($a < 0$ é análogo). Temos que mostrar que existe um ponto F e uma reta d tais que todo ponto do gráfico de $f(x)$, ou seja, todo ponto da forma (x, ax^2), é equidistante de F e d.

Notemos que $x^2 = (-x)^2$ para todo x real, temos que $f(x) = f(-x)$ e, portanto, o eixo-y (do plano cartesiano) funciona como um eixo de simetria para os pontos do gráfico de $f(x)$ (de fato, o ponto $(-x, ax^2)$ é o simétrico de (x, ax^2) em relação ao eixo-y). Sendo assim, o foco (caso exista) precisa estar sobre o eixo-y; logo, F deve possuir coordenadas $(0, y_F)$, para algum número real y_F (que precisamos determinar). Como $(0,0)$ é o único ponto do gráfico que está sobre o eixo de simetria, ele é nosso único candidato para ser o vértice V de nossa parábola. Lembrando que a diretriz d é perpendicular ao eixo de simetria, aqui ela precisa ser uma reta paralela ao eixo-x. E, como a distância da diretriz para $V = (0,0)$ é igual à distância de V a F, temos que a diretriz só pode ser a reta $y = -y_F$. Consideremos, agora, um ponto $P(x, ax^2)$ qualquer do gráfico de $f(x)$, vamos calcular a distância de $P(x, ax^2)$ até $F(x_F, y_F)$ e até a reta diretriz (que será dada pela distância do ponto $P(x, ax^2)$ ao ponto $D(x, -y_F)$. A figura 3.6 abaixo ilustra o que temos até agora.

Figura 3.6 - Parábola



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Pelo teorema de Pitágoras (ou pela fórmula da distância entre dois pontos) temos que a distância entre os pontos P e F ($d_{\overline{PF}}$) será dada por:

$$d_{\overline{PF}} = \sqrt{(x-0)^2 + (y_F - ax^2)^2}$$

E a distância entre os pontos P e D ($d_{\overline{PD}}$) será:

$$d_{\overline{PD}} = ax^2 + y_F$$

Queremos mostrar que existe um ponto $F(0, y_F)$, tal que $d_{\overline{PF}} = d_{\overline{PD}}$, sejam iguais para todo x real. Como a expressão dentro da raiz em $d_{\overline{PF}} \geq 0$, temos que $d_{\overline{PF}}$ e $d_{\overline{PD}}$ são iguais se, e somente se, seus quadrados forem iguais:

$$d_{\overline{PF}}{}^2 = d_{\overline{PD}}{}^2 \Leftrightarrow x^2 + (y_F - ax^2)^2 = (ax^2 + y_F)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = (ax^2 + y_F)^2 - (y_F - ax^2)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = [(ax^2 + y_F) + (y_F - ax^2)].[(ax^2 + y_F) - (y_F - ax^2)]$$
$$\Leftrightarrow x^2 = (2y_F).(2ax^2)$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 4ax^2 y_F$$
$$\Leftrightarrow y_F = \frac{1}{4a}$$

Como $a > 0$, temos que o gráfico de $f(x) = ax^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$, o vértice é o ponto $V = (0,0)$. Notemos ainda que a reta diretriz possui equação $y = -\frac{1}{4a}$. O caso em que $a < 0$ é análogo.

Consideremos, agora, o caso geral em que a função quadrática é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$. Denotando $f(x)$ por y e escrevendo a função em sua forma canônica (3.3.4), temos:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Denotando $X = x + \frac{b}{2a}$ e $Y = y + \frac{\Delta}{4a}$, obtemos:

$$Y = aX^2$$

Já mostramos que o conjunto dos pontos (X, Y) que satisfazem $Y = aX^2$ é uma parábola. Notemos que, sendo $X = x + \frac{b}{2a}$ e $Y = y + \frac{\Delta}{4a}$ o conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ é apenas uma translação do conjunto de pontos (X, Y). Mais precisamente, o ponto (x, y) é obtido transladando o ponto (X, Y) de $\frac{b}{2a}$ unidades para a esquerda (pois $x = X - \frac{b}{2a}$) e de $\frac{\Delta}{4a}$ unidades para baixo (pois $y = Y - \frac{\Delta}{4a}$). Assim:

O gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, é uma parábola cujo foco é o ponto $F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ e o vértice é o ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e sua diretriz é a reta de equação $y = \frac{-1-\Delta}{4a}$. Denotando as coordenadas do vértice por $V(x_V, y_V)$, acabamos de mostrar que $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$.

Assim podemos escrever também a forma canônica da função quadrática da seguinte forma:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a(x - x_V)^2 + y_V$$

3.3.7.4 Gráfico de $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, por meio de translação de $Y = aX^2$

Como já conhecemos a forma canônica da Função Quadrática, pode ser mais simples esboçar seu gráfico fazendo apenas uma translação do gráfico de $Y = aX^2$. (3.7. iii)**.** Por exemplo, suponha que a função é dada no formato:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a(x - x_V)^2 + y_V$$

Notemos que podemos esboçar o gráfico $Y = aX^2$ e, em seguida, fazer a translação que leva o vértice (0,0) desta última parábola ao ponto (x_V, y_V). Observemos que:

- Quando x_V > 0, a parábola $Y = aX^2$ é transladada em x_V unidades para a direita.
- Quando x_V < 0, a parábola $Y = aX^2$é transladada em x_V unidades para a esquerda.
- Quando y_V > 0, a parábola $Y = aX^2$ é transladada em y_V unidades para cima.
- Quando y_V < 0, a parábola $Y = aX^2$ é transladada em y_V unidades para baixo.

Por exemplo na função de nosso problema $f(x) = -x^2 + 50.x$, temos que $a = -1$. Considerando $f_i(x) = -x^2$.

Sabemos que:

$x_V = -\frac{b}{2a} - \frac{50}{2.(-1)} = 25$ e

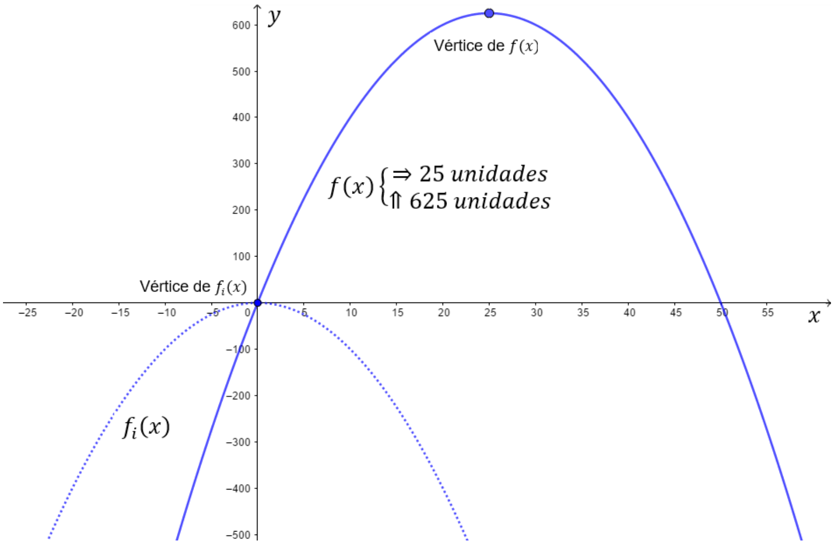
$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{2500}{4.(-1)} = 625.$

Assim, como $x_V = 25 > 0$, a parábola $y = -x^2$ é transladada em $x_V = 25$ unidades para a direita.

Como $y_V = 625 > 0$, a parábola $y = -x^2$ é transladada em $y_V = 625$ unidades para cima.

Esboçando o gráfico de $f_i(x)$ (no gráfico a seguir tracejado), efetuando as translações, obtemos o gráfico de $f(x)$:

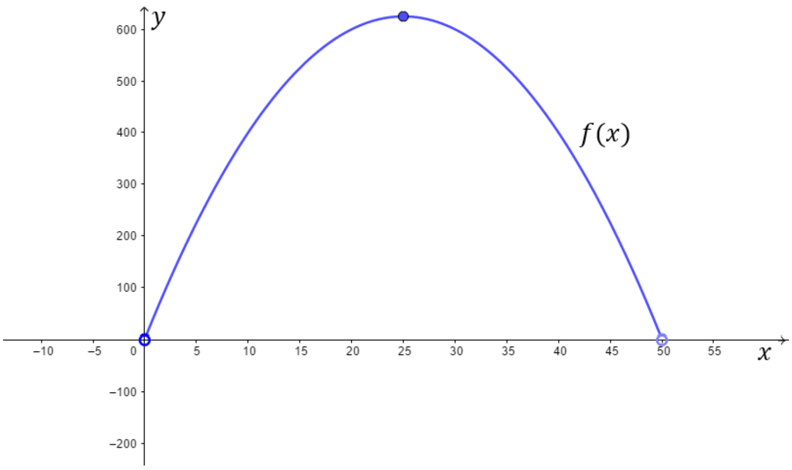
Figura 3.7 - Translação da Parábola



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Lembrando que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x < 50\}$ e, feita as translações temos o gráfico:

Figura 3.8 - Translação da Parábola



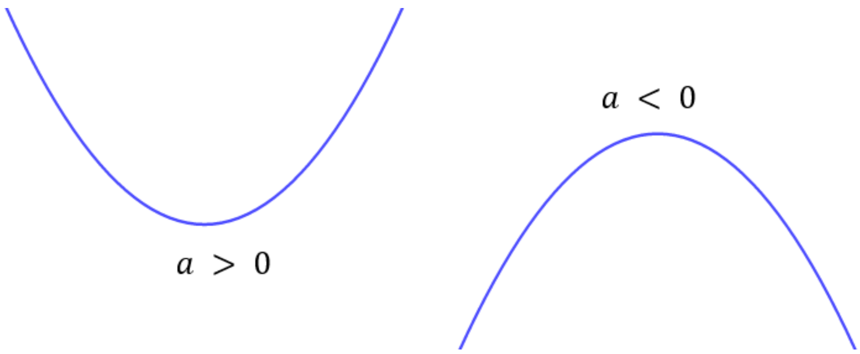
Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

3.3.7.5 Variação dos coeficientes

Vamos analisar o que acontece com o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, ao variarmos os valores de seus coeficientes a, b e c.

Considerando inicialmente que $f(x) = ax^2$. Neste caso, vamos lembrar que o gráfico de $f(x)$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$, o vértice é o ponto $V = (0,0)$ (3.3.7.3). Assim se $a > 0$, o foco está acima do vértice. Se $a < 0$ o foco está abaixo do vértice. Isso determina a direção da concavidade ("boca") da parábola pois o foco sempre se encontra "dentro" da parábola.

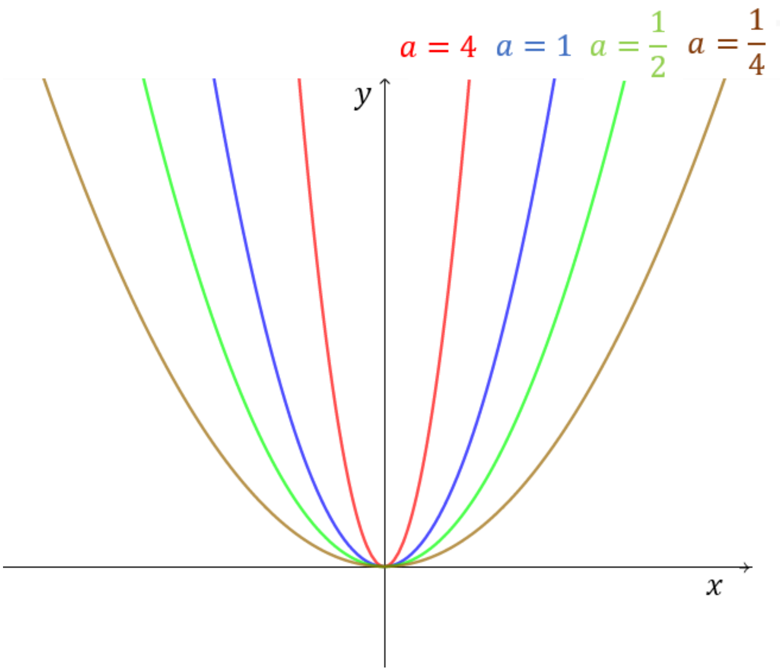
Figura 3.9 - Concavidade da parábola



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

O valor absoluto do coeficiente a de x^2 está associado á abertura da concavidade da parábola. De forma precisa, quanto maior for o valor de $|a|$, menor será tal abertura: a parábola será mais fechada, pois irá "crescer" mais rapidamente (pois para um determinado valor do domínio x, quanto maior o valor de a, maior será a imagem), ou seja, de forma mais acentuada/inclinada.

Figura 3.10 - Variação do coeficiente a.



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Já mostramos que no caso geral, em que $f(x) = ax^2 + bx + c \;\; a \neq 0$, temos uma translação de $Y = aX^2$ (3.3.7.3).

Assim, o coeficiente a está relacionado com a concavidade e abertura da parábola. Quando $a > 0$ a concavidade será para cima enquanto quando $a < 0$ a parábola terá concavidade para baixo. Quanto menor o valor absoluto de a, maior será a abertura da parábola (parábola mais aberta) enquanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola (parábola mais fechada).

Ainda analisando o caso geral, em que $f(x) = y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, temos uma translação de $Y = aX^2$(3.3.7.3). Vimos também (3.3.7.4) que:

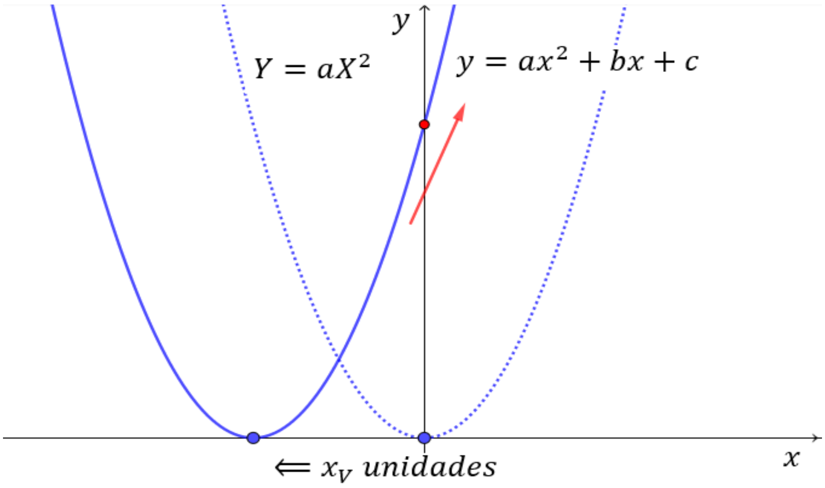
- Quando $x_V > 0$, a parábola $Y = aX^2$ é transladada em x_V unidades para a direita.
- Quando $x_V < 0$, a parábola $Y = aX^2$ é transladada em x_V unidades para a esquerda.

Sabemos que $x_V = -\frac{b}{2a}$, assim:

Notemos inicialmente que se $b = 0$, independente do valor de $a \neq 0$, então $x_V = 0$ e não ocorre transladação para direita e nem para esquerda e a parábola intersecta o eixo y em seu vértice.

Se $a > 0$ (concavidade voltada para cima) e $b > 0$, temos que x_V < 0 e a parábola $Y = aX^2$ é transladada em x_V unidades para a esquerda.

Figura 3.11 - Variação do coeficiente b.

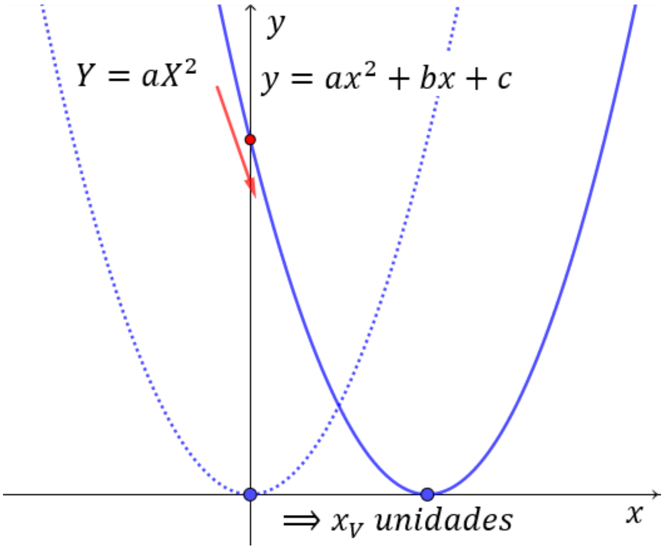


Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Notemos que a parábola intersecta o eixo y em uma parte (ramo) crescente, mesmo se existir a translação para cima ou para baixo (depende de y_V) isso iria acontecer.

Se $a > 0$ (concavidade voltada para cima) e $b < 0$, temos que x_V > 0, a parábola $Y = aX^2$ é transladada em x_V unidades para a direita.

Figura 3.12 - Variação do coeficiente b.

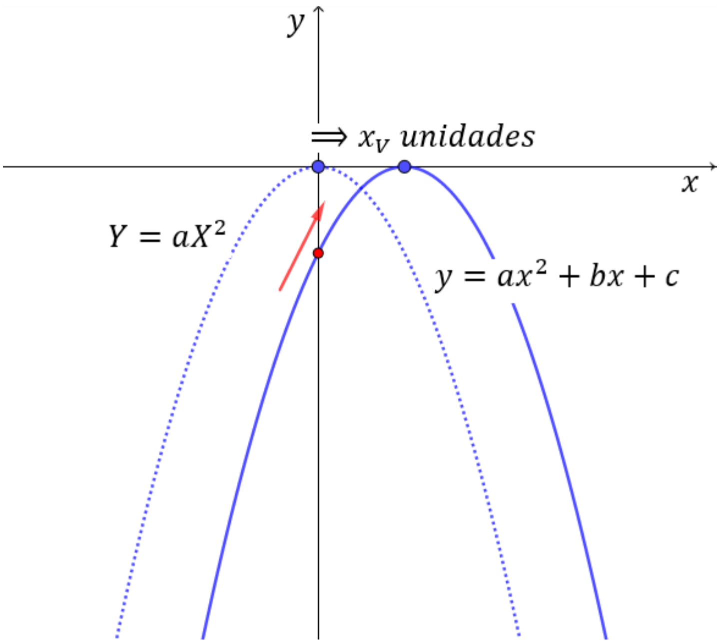


Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Notemos que a parábola intersecta o eixo y em uma parte (ramo) decrescente, mesmo se existir a translação para cima ou para baixo (depende de y_V) isso iria acontecer.

Se $a < 0$ (concavidade voltada para baixo) e $b > 0$, temos que $x_V > 0$, a parábola $Y = aX^2$ é transladada em x_V unidades para a direita.

Figura 3.13 - Variação do coeficiente b

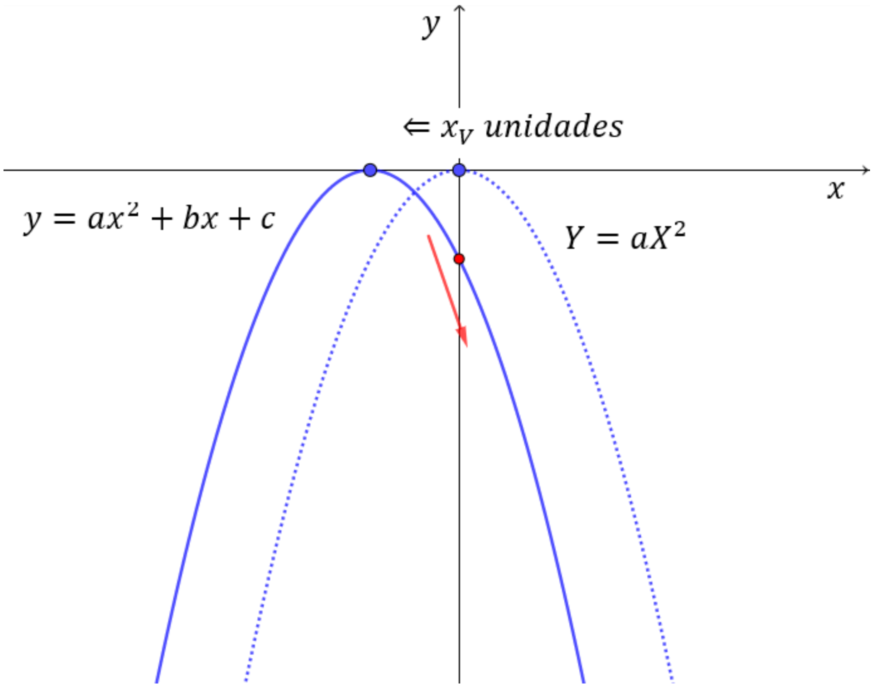


Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Notemos que a parábola intersecta o eixo y em uma parte (ramo) crescente, mesmo se existir a translação para cima ou para baixo (depende de y_V) isso iria acontecer.

Se $a < 0$ (concavidade voltada para baixo) e $b < 0$, temos que $x_V < 0$, a parábola $Y = aX^2$ é transladada em x_V unidades para a esquerda.

Figura 3.14 - Variação do coeficiente b



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Notemos que a parábola intersecta o eixo y em uma parte (ramo) decrescente, mesmo se existir a translação para cima ou para baixo (depende de y_V) isso iria acontecer.

Portanto temos que o coeficiente b nos indica se a parábola irá intersectar o eixo y no seu ramo crescente (caso $b > 0$), decrescente (caso $b < 0$) ou no vértice (quando $b = 0$).

Notemos que o coeficiente c indica em qual ponto a parábola intersectará o eixo y. A intersecção ocorrerá no ponto $(0, c)$ (pois em $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(0) = c$.

3.3.7.6 Coeficiente a e $\Delta = b^2 - 4ac$

Em uma interpretação geométrica, diz-se que as raízes de uma função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola intersecta o eixo x, pois se $f(x) = 0$, então $ax^2 + bx + c = 0$. Estudamos métodos para obtenção das raízes (3.3.3), lembrando que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ representa a fórmula resolutiva da equação do 2º grau. Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

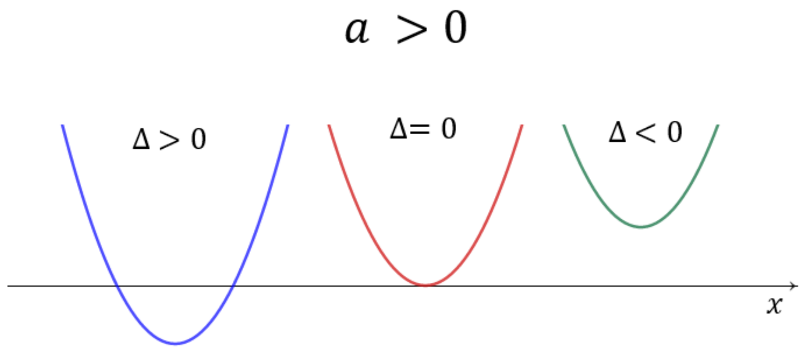
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

E:

- se $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais distintas, ou seja, o gráfico de f intersecta o eixo x em dois pontos distintos.
- se $\Delta = 0$, a equação possui duas raízes reais iguais, logo o gráfico de f “toca” o eixo x em apenas um ponto.
- se $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais, logo o gráfico de f não intersecta o eixo x.

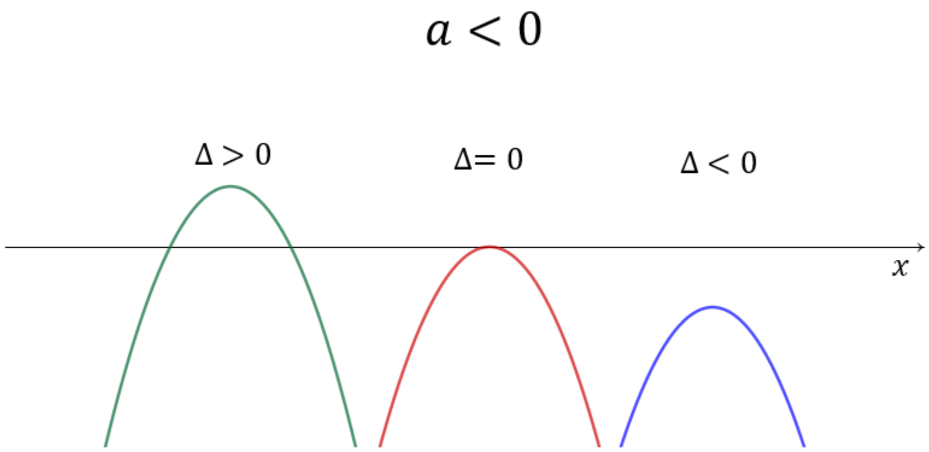
Assim, com relação ao coeficiente a e Δ da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, temos as possibilidades:

Figura 3.15 - Parábola e o eixo das abscissas



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Figura 3.16 - Parábola e o eixo das abscissas



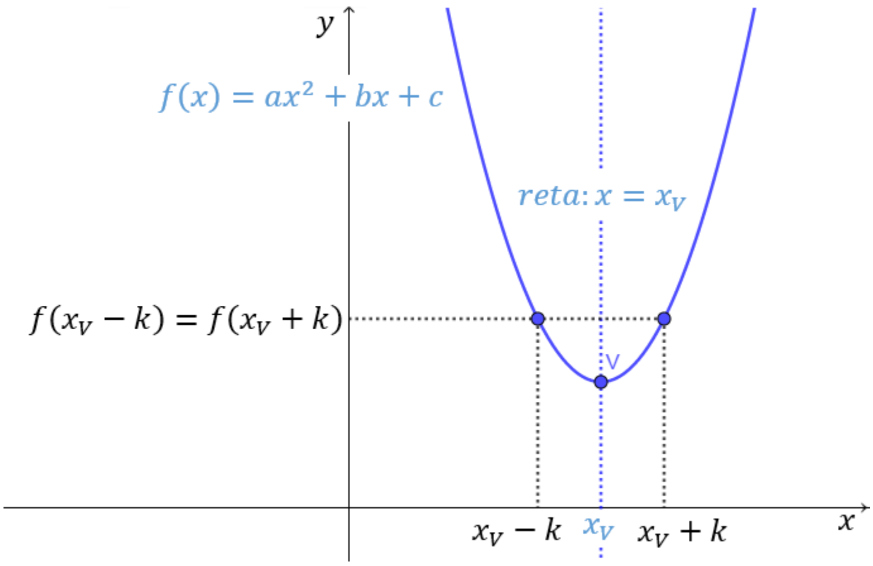
Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

3.3.7.7 Eixo de simetria, raízes e vértice

Vimos que a reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se eixo de simetria da parábola (3.3.7.2).

Vamos analisar aqui a parábola que representa uma função quadrática. Notemos que o eixo de simetria contém o vértice da parábola e sua equação é dada pela reta $x = x_V$. Essa reta recebe o nome de eixo de simetria porque em uma parábola qualquer (que representa uma função quadrática) dois valores de x (do domínio) equidistantes de x_V, possuem imagens iguais. Logo existe uma simetria em relação a reta $x = x_V$. Podemos provar essa simetria considerando dois valores equidistantes de x_V com abscissas $x_1 = x_V - k$ e $x_2 = x_V + k$, respectivamente, com $k > 0$, mostrando que $f(x_1) = f(x_2)$. A figura 3.17 ilustra um exemplo dessa situação:

Figura 3.17 - Eixo de simetria



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Sabemos que a forma canônica da função quadrática da seguinte forma (3.3.7.3):

$$f(x) = a(x - x_V)^2 + y_V$$

Assim, $f(x_1) = f(x_V - k) = a[(x_V - k) - x_V]^2 + y_V = a(-k)^2 + y_V = ak^2 + y_V$ e $f(x_2) = f(x_V + k) = a[(x_V + k) - x_V]^2 + y_V = a(k)^2 + y_V = ak^2 + y_V$.

Logo temos que $f(x_1) = f(x_2)$ e assim temos a simetria pois dois pontos equidistantes do vértice, possuem imagens iguais.

Analogamente, aproveitando o que mostramos acima podemos notar que se as imagens são iguais $f(x_1) = f(x_2)$ então x_1e x_2 são pontos equidistantes do vértice.

Assim as raízes da função quadrática x' e x'' (caso existam, e onde $f(x') = f(x'') = 0)$ são valores equidistantes do vértice, portanto o vértice corresponde ao ponto médio das raízes, ou seja:

$$x_V = \frac{x' + x''}{2}$$

Podemos obter esse resultado calculando a média das raízes (caso existam). Sabemos pela fórmula resolutiva da equação do 2º grau que $(3.3.3.3)$:

$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, onde Δ= $b^2 - 4ac$.

Assim, $x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

Portanto, $\frac{x'+x''}{2} = -\frac{b}{2a}$. Sabemos que $x_V = -\frac{b}{2a}$ $(3.3.7.3)$ e assim:

$$x_V = \frac{x' + x''}{2}$$

A função do problema em estudo é dada por $f(x) = -x^2 + 50.x$. Assim:

Se $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 50.x = 0$. Logo $a = -1$, $b = 50$ e $c = 0$. Calculando Δ temos: Δ= $50^2 - 4.(-1).0 = 2500$. Aplicando na fórmula resolutiva da equação do 2º grau: $x = \frac{-50\pm\sqrt{2500}}{2.(-1)} = \frac{-50\pm 50}{-2}$ que resulta em $x' = 0$ ou $x'' = 50$. Logo podemos obter $x_V = \frac{0+50}{2} = 25$.

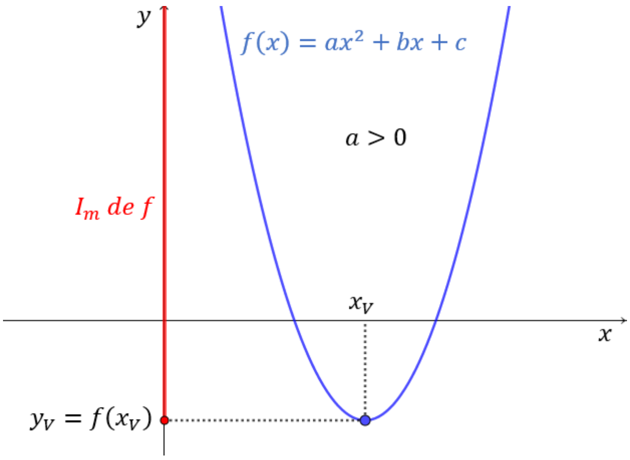
3.3.7.8 Vértice e imagem da Função Quadrática

Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabemos que $a > 0$ a função terá um valor mínimo dado por $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ e se $a < 0$ a função terá um valor máximo dado por $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ (3.3.5). Sabemos também que $-\frac{b}{2a} = x_V$ e $-\frac{\Delta}{4a} = y_V$, sendo $V(x_V, y_V)$ o vértice da parábola que representa a função quadrática (3.3.7.3).

Vimos que se $a > 0$ a concavidade da parábola está voltada para cima e se $a < 0$ a concavidade está voltada para baixo (3.3.7.5).

Logo, temos que, para a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se $a > 0$ a parábola que representa seu gráfico terá concavidade voltada para cima e a função admite um valor mínimo dado por $y_V = f(x_V)$. Assim sua imagem será dada $I_m = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y \geq y_V\}$, sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A figura 3.18 representa um exemplo desta situação:

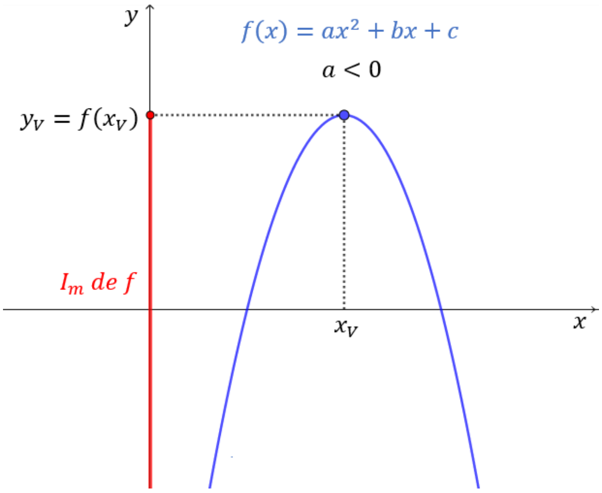
Figura 3.18 - Imagem da função quadrática



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Se $a < 0$ a parábola que representa seu gráfico terá concavidade voltada para baixo e a função admite um valor máximo dado por $y_V = f(x_V)$. Assim sua imagem será dada $I_m = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y \leq y_V\}$, sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A figura 3.19 representa um exemplo desta situação:

Figura 3.19 - Imagem da função quadrática



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

3.3.7.9 Obtenção do gráfico por meio dos pontos notáveis da Função Quadrática

Vamos destacar alguns pontos do gráfico da função quadrática (pontos notáveis), por meio deles podemos esboçar a parábola no plano cartesiano. Esses pontos que chamamos de notáveis são:

- $(x', 0)$ e $(x'', 0)$, pontos (se existirem) onde a parábola intersecta o eixo x, sendo x' e x'' as raízes da função quadrática (vimos técnicas para a obtenção das mesmas (3.3.3).
- $(0, c)$ ponto onde a parábola intersecta o eixo y (3.3.7.5).
- $V(x_V, y_V)$ o vértice (3.3.7.3).

A função do problema em estudo é dada por $f(x) = -x^2 + 50.x$, logo como é uma função quadrática o gráfico será uma parábola (3.3.7.3). Notemos inicialmente que como $a = -1 < 0$, a concavidade da parábola será voltada para baixo (3.3.7.5) e a função terá um valor máximo.

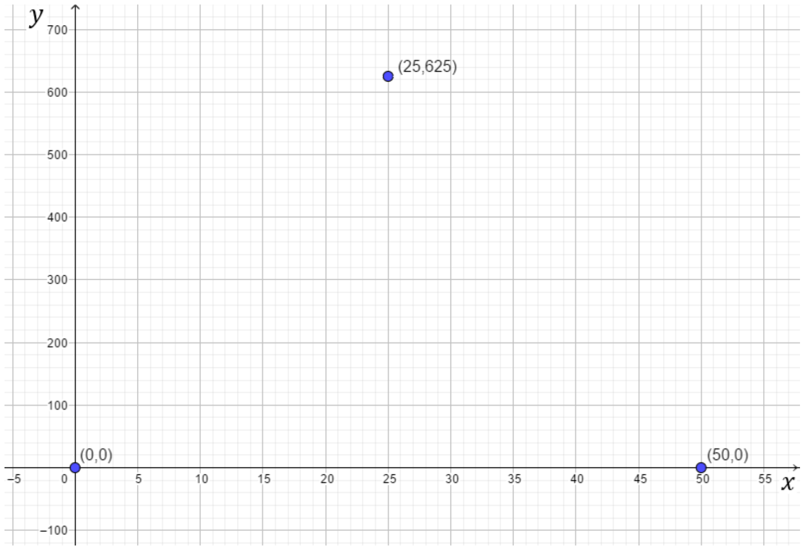
Se $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 50.x = 0$. Logo $a = -1$, $b = 50$ e $c = 0$. Calculando Δ temos: $\Delta = 50^2 - 4.(-1).0 = 2500$. Aplicando na fórmula resolutiva da equação do 2º grau: $x = \frac{-50 \pm \sqrt{2500}}{2.(-1)} = \frac{-50 \pm 50}{-2}$ que resulta em $x' = 0$ ou $x'' = 50$. Logo $(0,0)$ e $(50,0)$, pontos onde a parábola intersecta o eixo x.

Como $c = 0$, o ponto $(0,0)$ é ponto onde a parábola intersecta o eixo y.

Sabemos que $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$. Assim $x_V = -\frac{50}{2(-1)} = 25$ e $y_V = -\frac{2500}{4(-1)} = 625$. Portanto $(25, 625)$ é o vértice da parábola.

Esboçando esses pontos no plano cartesiano temos:

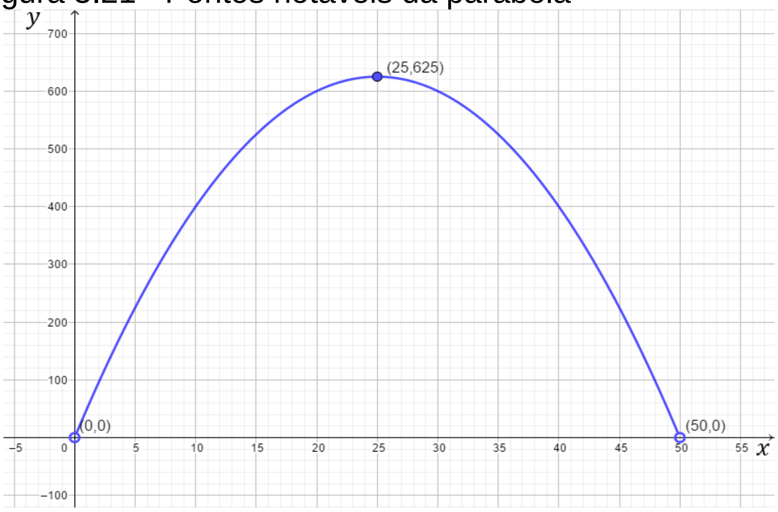
Figura 3.20 - Pontos notáveis da parábola



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Lembrando que no domínio da função excluímos as medidas $x = 0$ e $x = 50$ para que o retângulo existisse, ou seja $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x < 50\}$ e $I_m = \{y \in \mathbb{R} \,/\, 0 < y \leq 625\}$, sendo $\mathbb{R}$ o conjunto dos número reais.

Figura 3.21 - Pontos notáveis da parábola

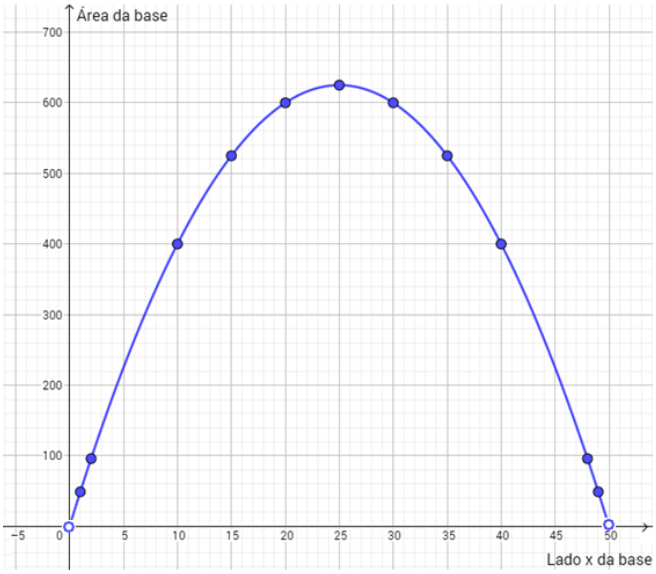


Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

3.3.7.10 Obtenção da função por meio do gráfico

Vimos que podemos fazer o esboço gráfico do problema dos "*Viveiros de lagostas"* representando os pontos no plano cartesiano $(3.3.7.1)$:

Figura 3.22 - Gráfico – área da base



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Como o gráfico é uma parábola, vamos tentar associar essa parábola com a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Notemos que a parábola intersecta o eixo y em 0, assim $c = 0$, em uma parte (ramo) crescente, logo $b > 0$. Como a concavidade está voltada para baixo, temos que $a < 0$.

Observemos que as coordenadas do vértice da parábola são $x_V = 25$ e $y_V = 625$ (valor não destacado no gráfico, mas na tabela utilizada na montagem do mesmo).

Como $x_V = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = 25 \Leftrightarrow a = -\frac{b}{50}\ (I)$ e

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow -\frac{b^2-4ac}{4a} = 625 \Leftrightarrow b^2 = -2500a\ (II)$

Substituindo (I) em (II) e como $b > 0$, temos que $b = 50$ e assim temos que $a = -1$.

Como já sabemos que c = 0, então a função quadrática que representa nosso problema é dada por $f(x) = -x^2 + 50.x$.

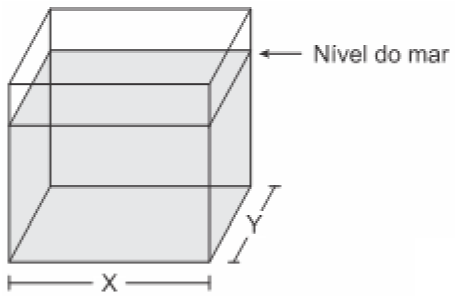
3.4 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA APÓS A ABORDAGEM FORMAL

Embora tenhamos sempre utilizado o problema em estudo como exemplo, a cada item que vimos na abordagem formal, acreditamos que é interessante voltarmos agora nossa atenção para a resolução do problema com os aspectos teóricos que vimos sobre Função Quadrática.

Vamos inicialmente retomar o enunciado de nosso problema:

Quadro 3.2 – Questão ENEM

(Enem 2017) Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 *metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.*



Quais devem ser os valores de X *e de* Y, *em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?*

a) 1 *e* 49

b) 1 *e* 99

c) 10 *e* 10

d) 25 *e* 25

e) 50 *e* 50

Fonte: Inep (2017).

Observando que a área da base A_B corresponde a área de um retângulo (que calculamos fazendo a multiplicação do comprimento pela largura ou base pela altura) temos que $A_B = X.Y$, e o perímetro do retângulo da base será dado por $2.X + 2.Y$.

Como vamos utilizar os 100 m de tela então:

$$2.X + 2.Y = 100 \Leftrightarrow X + Y = 50 \Leftrightarrow Y = 50 - X$$

Assim podemos escrever a área da base A_B em função do lado X:

$$A_B = X.Y = X.(50 - X) = 50.X - X^2 = -X^2 + 50.X$$

Ou seja:

$$A_B(X) = -X^2 + 50.X$$

Que é uma função quadrática, cujo gráfico será uma parábola, como o coeficiente de X^2 é $a = -1$, então a parábola terá a concavidade voltada para baixo e a função apresentará um valor máximo (y_V), ou seja, uma área máxima para a base, e esse valor será atingido quando $X = x_V$.

Sabemos que $x_V = -\frac{b}{2a}$, como $a = -1$ e $b = 50$, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2.(-1)} = 25$$

Portanto para $X = 25\ m$ teremos o valor máximo para a área da base, como $Y = 50 - X$, então para $Y = 25\ m$ que teremos o valor máximo.

Assim a alternativa correta de nosso problema é a alternativa (d).

3.5 Aplicação da Abordagem Formal em Outro Problema

Após retomado o problema inicial, feita a abordagem formal e resolvido por meio da teoria estudada sobre função quadrática, o professor pode apresentar outro problema. O problema a seguir também foi retirado do ENEM do ano de 2017.

Quadro 3.3 – Questão ENEM

(Enem 2017) A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

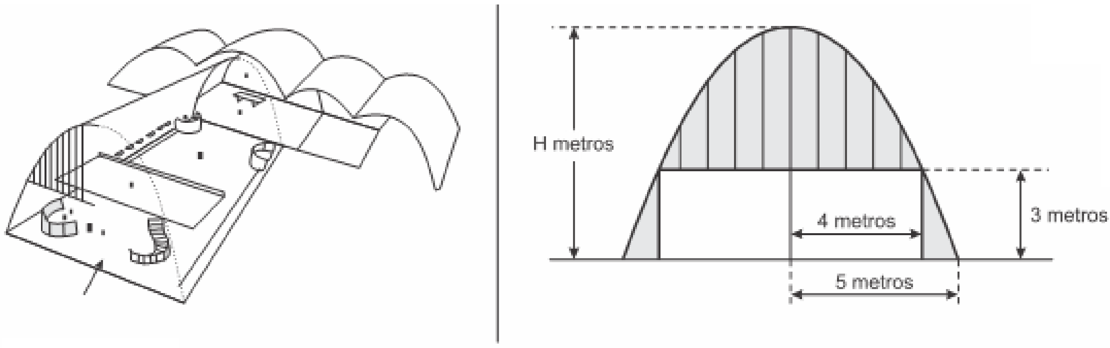


Figura 1 Figura 2

Qual a medida da altura H, *em metro, indicada na Figura 2?*

a) $\frac{16}{3}$

b) $\frac{31}{5}$

c) $\frac{25}{4}$

d) $\frac{25}{3}$

e) $\frac{75}{2}$

Fonte: Inep (2017).

Inicialmente deve ser entregue uma cópia do problema para cada aluno e solicitada a leitura.

Após a leitura individual sugerimos a formação de grupos e a nova leitura do problema.

Acreditamos que nesse momento algumas questões podem ser levantadas como:

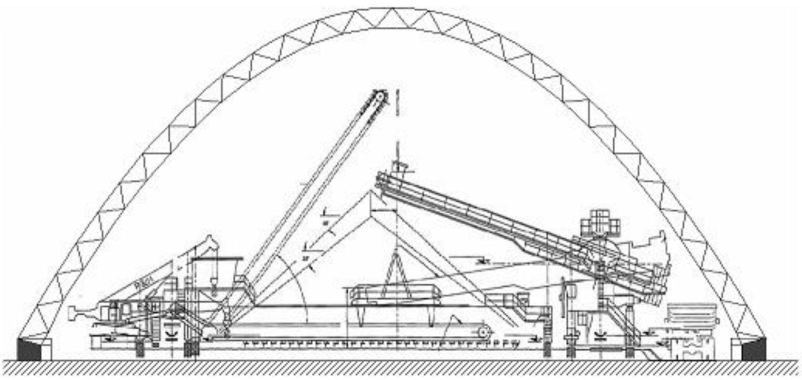
- Quem foi Oscar Niemeyer?

Foi um arquiteto brasileiro, considerado uma das figuras-chave no desenvolvimento da arquitetura moderna. Niemeyer foi mais conhecido pelos projetos de edifícios cívicos para Brasília, uma cidade planejada que se tornou a capital do Brasil em 1960, bem como por sua colaboração no grupo de arquitetos que projetou a sede das Nações Unidas em Nova Iorque, nos Estados Unidos. Sua exploração das possibilidades construtivas do concreto armado foi altamente influente na época, tal como na arquitetura do final do século XX e início do século XXI (OSCAR NIEMEYER, 2017).

- O que é uma abóbada?

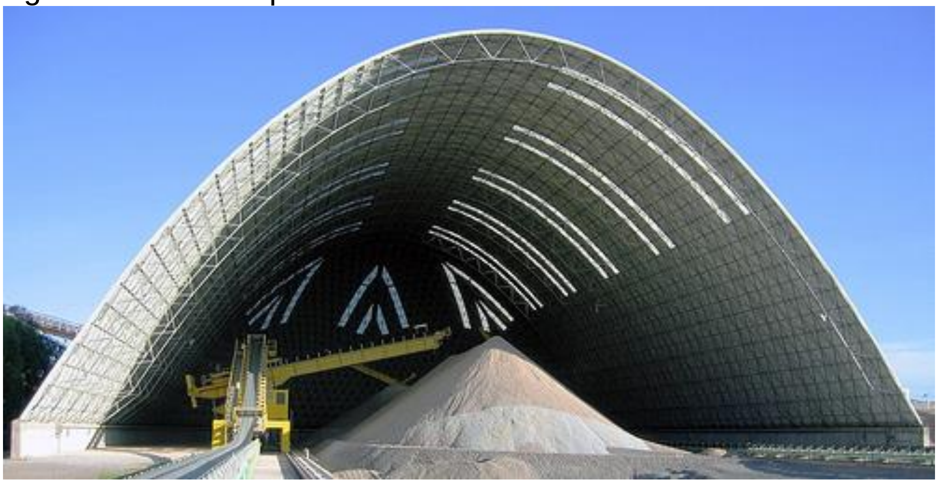
Abóbadas são estruturas que se estendem apenas numa direção. As abóbadas têm sido usadas como instalações desportivas, terminais de transporte, hangares de aviões e para proteção ambiental. Abóbodas podem ser de diversas formas, uma delas é a parabólica.

Figura 3.23 - exemplo de abóbada



Fonte: Geometrica (2017).

Figura 3.24 - Exemplo de abóbada



Fonte: Geometrica (2017).

Sanadas as dúvidas com relação ao enunciado, os alunos em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo devem tentar resolver o problema.

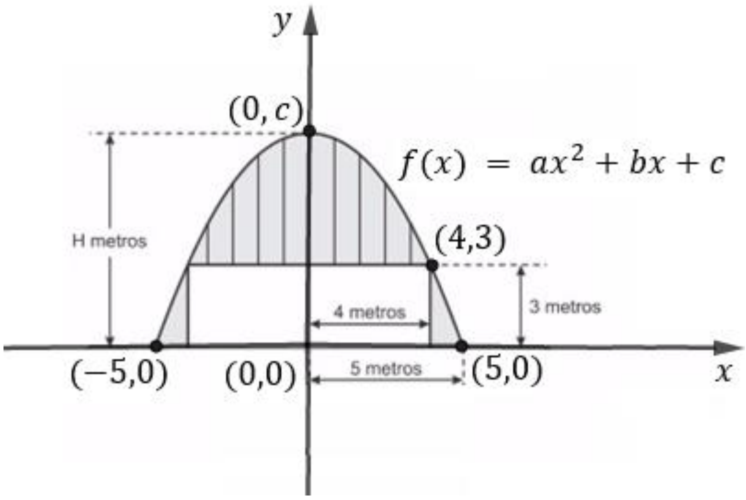
Nesse momento o professor deve observar e incentivar. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor deve observar, analisar o comportamento dos alunos e estimular o trabalho colaborativo. Ainda, o professor enquanto mediador deve fazer perguntas e provocar discussões com a intenção dos alunos pensarem, dando-lhes tempo e instigando a troca de ideias entre eles. O professor deve incentivar os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. (Neste caso o que já foi estudado de Função Quadrática). Acompanhar suas explorações e ajudá-los, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

Acreditamos que boa parte dos alunos ao analisarem a figura 2 percebam que se trata do uma parábola, tentando assim associá-la a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

Pode ser que alguns alunos encontrem dificuldade para esboçar a parábola na figura 2 no plano cartesiano, principalmente dificuldade para dar as coordenadas dos pontos de acordo com as medidas indicadas, então o professor precisará orientar esse procedimento (uma maneira de orientação está apresentada a seguir).

Podem aparecer formas diferentes de locar os pontos no plano cartesiano, acreditamos que seja mais prático locar o eixo de simetria da parábola (que contém o vértice) sobre o $eixo - y$ no plano cartesiano e o segmento de reta que representa a base da abóbada parabólica sobre o $eixo - x$, adotando como unidade de medida o metro, locando os eixos conforme citado, termos então a seguinte representação no plano cartesiano:

Figura 3.25 - Esboço no plano cartesiano



Fonte: Autor

Após a representação no plano cartesiano, espera-se que os alunos observem que a altura H em metros é dada pelo valor do coeficiente c da função quadrática. Pois o valor de H seria o valor de $f(0) = c$, e é onde a parábola intersecta o $eixo - y$. Ou ainda que o valor de H corresponde a y_V pois ponto denotado como (o, c) também corresponde ao vértice da parábola.

Uma das possibilidades de resolução é por meio de um sistema com os coeficientes a e c, notando que como $x_V = 0$, então $-\frac{b}{2a} = 0$, como $a \neq 0$, então $b = 0$. Temos os pontos $(5{,}0)$ e $(4{,}3)$ que pertencem a função f, logo:

$$f(5) = 0 \Leftrightarrow a.5^2 + 0.5 + c = 0 \Leftrightarrow 25.a + c = 0$$
$$f(4) = 3 \Leftrightarrow a.4^2 + 0.4 + c = 3 \Leftrightarrow 16.a + c = 3$$

Portanto temos o sistema:

$$\begin{cases} 25.a + c = 0 \quad (I) \\ 16.a + c = 3 \quad (II) \end{cases}$$

Fazendo (I) – (II):

$$9.a\ =\ -3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

Substituindo em (I):

$$25.\left(-\frac{1}{3}\right) + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{25}{3}$$

Assim, como neste caso o coeficiente c indica o valor da altura H, então $\mathrm{H}\ = \frac{25}{3}\ m$. Logo a alternativa (d) é correta.

Outra possibilidade de resolução é trabalhar com a forma fatorada da função quadrática:

$$f(x) = a.(x - x').(x - x'')$$

Onde x' e x'' são as raízes da função. Notemos que nesse caso $x' = -5$ e $x'' = 5$, assim,$f(x) = a.(x + 5).(x - 5)$. Como $f(4) = 3$, então $a.(4 + 5).(4 - 5) = 3 \Leftrightarrow -9.a = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$, ou seja:

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x + 5).(x - 5) = -\frac{1}{3}.(x^2 - 25) = -\frac{1}{3}.x^2 + \frac{25}{3}$$

Logo temos os coeficientes: $a = -\frac{1}{3}$, $b\ =\ 0$ e $c\ = \frac{25}{3}$. Como o coeficiente c corresponde ao valor de H, então $\mathrm{H}\ = \frac{25}{3}\ m$. Portanto a alternativa (d) é correta.

Podemos ainda resolver o problema utilizando a forma canônica da função quadrática:

$$\mathrm{f}(x) = a.(x - x_V)^2 + y_V$$

Onde x_V e y_V correspondem as coordenadas do vértice da parábola e neste caso $x_V = 0$ e $y_V = c = \mathrm{H}$. Assim:

$$\mathrm{f}(x) = a.(x - 0)^2 + \mathrm{H}$$

Logo:

$$f(5) = 0 \Leftrightarrow a.(5)^2 + \mathrm{H} = 0 \Leftrightarrow 25.a + \mathrm{H} = 0$$
$$f(4) = 3 \Leftrightarrow a.(4)^2 + \mathrm{H} = 3 \Leftrightarrow 16.a + \mathrm{H} = 3$$

Portanto temos o sistema:

$$\begin{cases} 25.a + \mathrm{H} = 0 \quad (\mathrm{I}) \\ 16.a + \mathrm{H} = 3 \quad (II) \end{cases}$$

Fazendo (I) – (II):

$$9.a = -3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

Substituindo em (I):

$$25.\left(-\frac{1}{3}\right) + \mathrm{H} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{H} = \frac{25}{3}$$

Assim $\mathrm{H} = \frac{25}{3}\ m$. Ou seja, a alternativa (d) é correta.

Durante o desenvolvimento da trajetória, apontamos algumas possíveis dúvidas e resoluções que podem ser apresentadas pelos alunos, bem como algumas alternativas de respostas e encaminhamento de resoluções.

Acreditamos que seja improvável definir com precisão como o pensamento e o entendimento dos alunos serão colocados em ação no contexto de aprendizagem das atividades. Espera-se que muitos encontrem dificuldades de assimilação principalmente com relação as notações (a autor em sua prática docente percebe a dificuldade dos alunos com a escrita matemática). Possivelmente alguns encontrarão resistência em aceitar a formalização do conteúdo (tendo em vista que possivelmente muitos conseguiram resolver o problema sem o conteúdo formal), cabe ao professor orientar e talvez apresentar mais problemas ou ainda apresentar algumas aplicações da parábola por exemplo, para que os alunos percebam a necessidade (ou mesmo vantagem) de formalizar o conteúdo.

CAPÍTULO 4
ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA POR MEIO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

4.1 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O Cálculo Diferencial e Integral tornou-se desde seu início um instrumento precioso e imprescindível para a solução de vários problemas relativos à Matemática e à Física. O formalismo matemático do Cálculo, que à primeira vista nos parece abstrato e fora da realidade, está internamente relacionado com o raciocínio usado pelas pessoas em geral na resolução de problemas cotidianos.

O Cálculo Diferencial fornece "ferramentas" importantes para a solução de diversas situações e problemas, por meio de derivadas podemos resolver muitos problemas, não apenas no ensino da matemática como no estudo da inclinação de retas, mas no ensino da física, pelas quais podem ser determinadas a velocidade e aceleração de um objeto, por exemplo; na economia empresarial, em atividades como a maximização da capacidade de embalagens e minimização de custos. A taxa de variação pode ser aplicada em diversos ramos das ciências tais como física, biologia, química, economia, dentre outros.

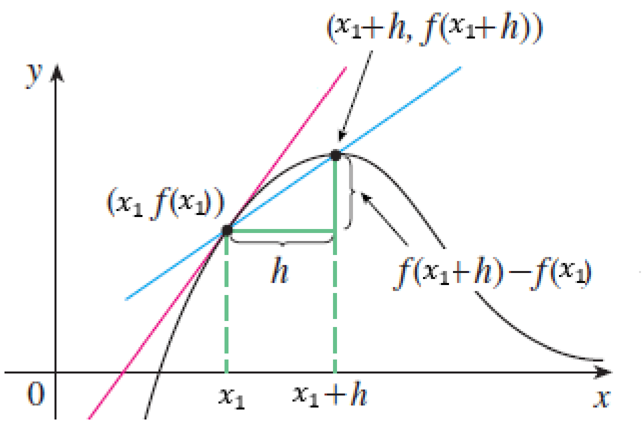
A derivada de uma função é considerada uma das ferramentas de maior utilidade no Cálculo. Para encontrarmos os valores de máximo ou mínimo de uma função, primeiramente deve-se encontrar a função que representa o problema, calcular sua derivada, obtendo uma função dependendo somente de uma variável. Em seguida, igualamos a zero, obtendo uma equação, resolvendo a equação, obtemos o valor máximo ou mínimo. A seguir vamos retomar algumas definições e teoremas do cálculo para justificar esse procedimento. Sabemos que o gráfico da função quadrática é uma parábola e apresenta valor máximo ou mínimo, podemos então recorrer a esse procedimento para a o estudo da Função Quadrática.

4.2 ALGUMAS DEFINIÇÕES, PROPOSIÇÕES E TEOREMAS

Definição 1: Seja $f: A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$. A derivada de uma função f no ponto x_1, denotada por f', é definida pelo limite (se existir):

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Figura 4.1 - Derivada



Fonte: Autor.

Este limite nos dá a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$. Portanto, geometricamente, a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_1 representa a inclinação da curva neste ponto.

O quociente $\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$ é conhecido como quociente de Newton.

Definição 2: Uma função f tem um máximo relativo em c se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$, em que $D(f)$ é o domínio da função f.

Definição 3: Uma função f tem um mínimo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Definição 4: Dizemos que uma função f, definida num intervalo I, é crescente neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$.

Definição 5: Dizemos que uma função f, definida num intervalo I, é decrescente neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_1 \in I, x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_2)$.

Definição 6: Dizemos que uma função f é contínua no ponto a se as seguintes condições forem satisfeitas:

$i)$ f é definida no ponto a;

$ii)$ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe;

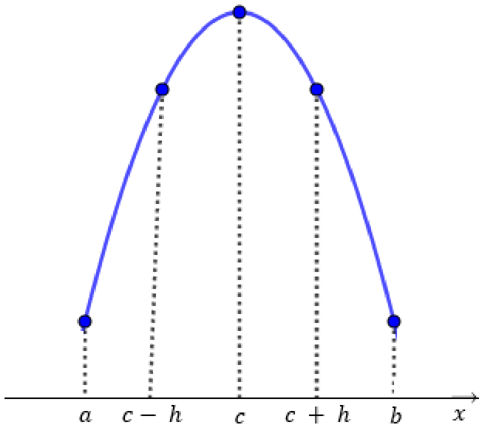
$iii)$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Proposição 1: Suponhamos que $f(x)$ existe para todos os valores de $x \in (a, b)$ e que f tem um máximo relativo em c, onde $a < c < b$. Se $f'(c)$ existe então $f'(c) = 0$.

<u>Demonstração:</u> Suponhamos que f tenha um máximo relativo em c. Então, de acordo com a Definição 2, $f(c) \geq f(x)$ se x estiver suficientemente próximo de c, o que implica que se h estiver suficientemente próximo de 0 (ou seja, valor "pequeno" h), sendo positivo ou negativo.

Vamos considerar inicialmente valores positivos para h. (figura 4.1)

Figura 4.2 - Máximo relativo



Fonte: autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Assim,

$$f(c) \geq f(c+h)$$

E, portanto,

$$f(c+h) - f(c) \leq 0.$$

Podemos dividir ambos os lados de uma desigualdade por um número positivo sem alterar a desigualdade. Assim se $h > 0$ e h for suficientemente pequeno, temos o quociente de Newton:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Tomando o limite a direita de ambos os lados dessa desigualdade obtemos:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Vamos considerar agora, valores negativos para h, seja $h = -k$ com $k > 0$ então:

$$f(c-k) - f(c) \leq 0$$

Ou seja,

$$f(c) - f(c-k) \geq 0$$

E o quociente é:

$$\frac{f(c-k) - f(c)}{-k} = \frac{f(c) - f(c-k)}{k}$$

Portanto temos que o quociente de Newton é maior ou igual a zero. Tomando o limite para h (ou k) tendendo a zero,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

E assim a única maneira destes limites serem iguais é serem ambos zeros, ou seja:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0$$

Pela Definição 1:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Assim, $f'(c) = 0$.

Notemos que tudo que foi feito para o máximo poderia ser feito para o mínimo.

Proposição 2: Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b).

i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$;
ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Demonstração: Seja x_1 e x_2 dois números quaisquer no intervalo $[a, b]$ com $x_1 < x_2$. De acordo com a definição de função crescente (Definição 4) devemos mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$. Como estamos supondo $f'(x) > 0$, sabemos que f é derivável em $[x_1, x_2]$. Logo pelo Teorema do Valor Médio, existe c entre x_1 e x_2 tal que: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Agora $f'(c) > 0$ por hipótese e $x_2 - x_1 > 0$, pois $x_1 < x_2$. Assim, o lado direito da equação acima é positivo, e $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou $f(x_1) < f(x_2)$. Isso mostra que f é crescente.
A parte ii) é provada de maneira análoga.

Teorema 1: (Critério da derivada primeira para determinação de extremos)
Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto c.

$i)$ Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.
$ii)$ Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

O Critério da Derivada Primeira é uma consequência da Proposição 2. Na parte $i)$, por exemplo, uma vez que o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em c, f é crescente à esquerda de c e decrescente à direita. Segue-se que f tem um máximo local em c.

Teorema 2: (Critério da derivada segunda para determinação de extremos de uma função)

Seja f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b), temos:

$i)$ Se $f''(x) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c.
$ii)$ Se $f''(x) > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c.
$iii)$ o teste é inconclusivo caso $f''(x) = 0$.

<u>Demonstração</u>: caso $i)$, caso $ii)$ é análogo.

Suponha $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$. então:

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0$$

Logo, há um intervalo (a, b) contendo c tal que $\frac{f'(x)}{x-c} < 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Portanto,

$$a < x < c \Rightarrow x - c < 0 \text{ e } \frac{f'(x)}{x-c} < 0 \Rightarrow f'(x) > 0.$$

$$c < x < b \Rightarrow x - c < 0 \text{ e } \frac{f'(x)}{x-c} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0.$$

Portanto, f passa de crescente para decrescente em c. Pelo teste da derivada primeira, f tem máximo local em $x = c$.

4.3 Derivada da Função Quadrática

Sendo $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ com $a \neq 0$, pela definição da derivada (Definição 1) temos que $f'(\,x_1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$, logo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{[a.(x_1+h)^2 + b.(x_1+h) + c] - [a.{x_1}^2 + b.x_1 + c]}{h}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\left[a.\left({x_1}^2 + 2.x_1.h + h^2\right) + b.x_1 + b.h + c\right] - [a.{x_1}^2 + b.x_1 + c]}{h}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{a.{x_1}^2 + 2.a.x_1.h + a.h^2 + b.x_1 + b.h + c - a.{x_1}^2 - b.x_1 - c]}{h}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{2.a.x_1.h + a.h^2 + b.h}{h} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}(2.a.x_1. + a.h + b)$$

Calculando o limite, temos que $f'(\,x_1) = 2.a.x_1 + b$, ou seja, podemos denotar a derivada de $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ por $f'(x) = 2.a.x + b$.

4.4 Derivada Segunda da Função Quadrática

Notemos que $f''(\,x_1) = \lim_{h\to 0} \frac{f\prime(x_1+h)-f\prime(x_1)}{h}$, assim sendo $f'(x) = 2.a.x + b$ (que corresponde a derivada primeira da função quadrática 4.3) temos que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{[2.a.(x_1+h) + b] - [2.a.x_1. + b]}{h}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{2.a.x_1 + 2.a.h + b - 2.a.x_1 - b}{h} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{2.a.h}{h} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\,[2.a]$$

Calculando o limite, temos que $f''(x_1) = 2.a$, ou seja, podemos denotar a derivada segunda de $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ por $f''(x) = 2.a$.

4.5 Vértice e Valor Máximo ou Mínimo da Função Quadrática (Por Meio da Derivada)

Sabemos que $f'(x) = 2.a.x + b$ (4.3), como o gráfico da função quadrática é uma parábola $(3.3.7.iii)$, o ponto de máximo ou mínimo da parábola é chamado de vértice e é denotado por $V(x_V, y_V)$ pela Proposição 1**,** se f tem um máximo (ou mínimo) em x_V, então $f'(x_V) = 0$. Assim:

$$f'(x_V) = 0 \Leftrightarrow 2.a.x_V + b = 0 \Leftrightarrow x_V = -\frac{b}{2.a}$$

Como $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, então:

$$f(x_V) = a.{x_V}^2 + b.x_V + c = a.\left(-\frac{b}{2.a}\right)^2 + b.\left(-\frac{b}{2.a}\right) + c$$

$$\Leftrightarrow f(x_V) = \frac{b^2}{4.a} - \frac{b^2}{2.a} + c = \frac{b^2 - 2.b^2 + 4.a.c}{4.a} = \frac{-b^2 + 4.a.c}{4.a} = -\frac{b^2 - 4.a.c}{4.a}$$

Denotando $\Delta = b^2 - 4.a.c$, temos:

$$f(x_V) = -\frac{\Delta}{4.a} = y_V$$

Logo temos que o ponto de máximo ou mínimo da função quadrática, ou seja, o valor máximo ou mínimo da função quadrática á dado por $y_V = -\frac{\Delta}{4.a}$ quando $x_V = -\frac{b}{2.a}$.

4.6 Variação dos Coeficientes (Por Meio da Derivada)

Vamos analisar o que acontece na função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, ao variarmos os valores de seus coeficientes a, b e c.

Sabemos que o gráfico da função quadrática $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ com $a \neq 0$ é uma parábola $(3.3.7. iii)$, ou seja, a função f admite apenas um valor máximo ou um valor mínimo. Como $f''(x) = 2.a$ (4.4). Pelo Teorema 2. (Critério da derivada segunda para determinação de extremos de uma função) temos que:

i) Se $f''(x) = 2.a < 0$, f tem um valor máximo.
ii) Se $f''(x) = 2.a > 0$, f tem um valor mínimo.

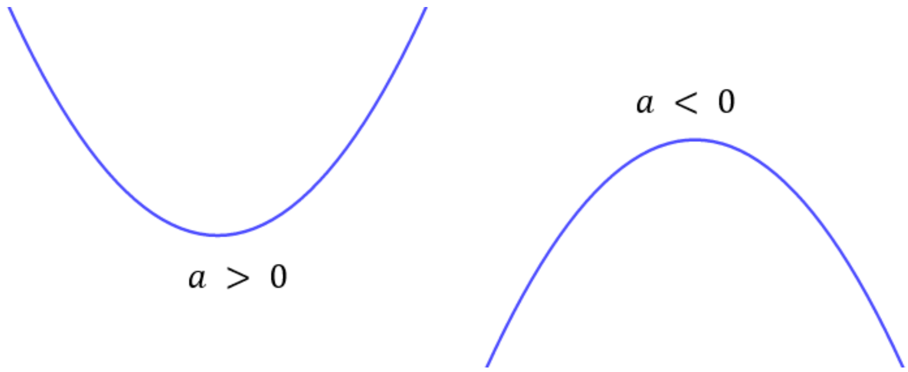
Portanto:

- Se $a > 0$, temos que $f''(x) > 0$, f tem um valor mínimo, ou seja, a concavidade da parábola estará voltada para cima.

- Se $a < 0$, temos que $f''(x) < 0$, f tem um valor máximo, logo a concavidade da parábola estará voltada para baixo.

A figura 4.2 a seguir ilustra essas situações.

Figura 4.3 - Concavidade da parábola



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Como $f'(x) = 2.a.x + b$ (4.3) tomando $k > 0$ suficientemente pequeno de tal maneira que $f'(0) = b$, pela Proposição 2 temos que:

$i)$ Se $f'(0) = b > 0$ para todo $x \in (-k, k)$, então f é crescente em $[-k, k]$;
$ii)$ Se $f'(0) = b < 0$ para todo $x \in (-k, k)$, então f é decrescente em $[-k, k]$.

Assim:

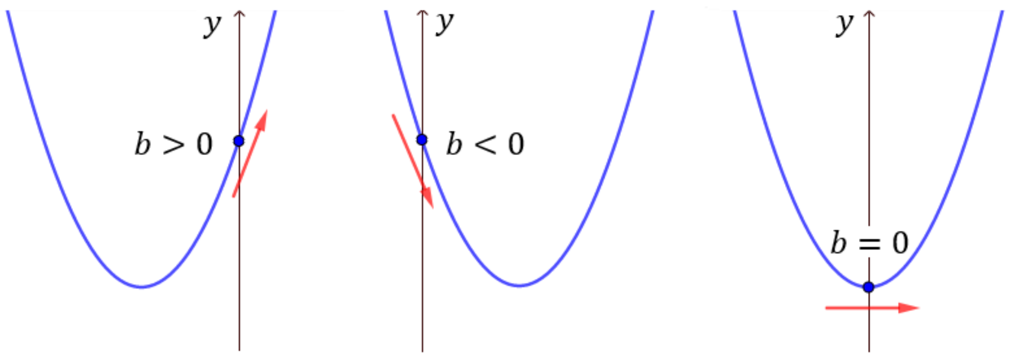
- Se $b > 0$, o gráfico de f intersecta o eixo y em uma "parte" (ramo da parábola) de f que é crescente.

- Se $b < 0$, o gráfico de f intersecta o eixo y em uma "parte" (ramo da parábola) de f que é decrescente.

Notemos que se $b = 0$ então $x_V = -\frac{b}{2.a} = 0$, logo o gráfico de f intersecta o eixo y em seu vértice. A figura a seguir ilustra as situações (para $a > 0$ por exemplo):

Figura 4.4 - Coeficiente b

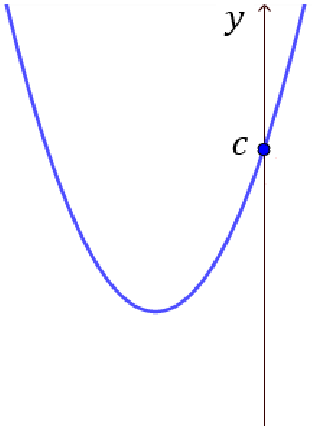
$$f(x) = a.x^2 + b.x + c$$



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Para $f(x) = a.x^2 + b.x + c$, temos que $f(0) = a.0^2 + b.0 + c$, logo $f(0) = c$, ou seja a parábola intersecta o eixo y no ponto (o, c), a figura a seguir ilustra a situação (para $a > 0$ e $b > 0$):

Figura 4.5 - Coeficiente c



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

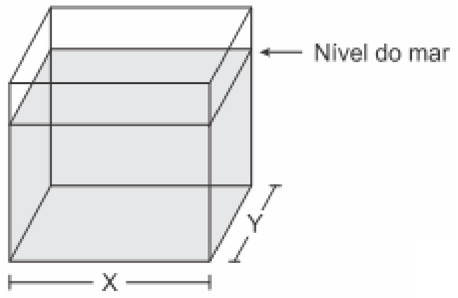
4.7 Resolução do Problema Gerador do Capítulo 3 por Meio do Cálculo Diferencial e Integral

Resolvemos o problema gerador do capítulo 3 por meio de conceitos normalmente estudados no Ensino Médio, mas podemos também recorrer ao Cálculo Diferencial e Integral para resolver o mesmo.

Vamos inicialmente retomar o enunciado de nosso problema:

Quadro 4.1 – Questão ENEM

(Enem 2017) Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 *metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.*



Quais devem ser os valores de X *e de* Y, *em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?*

a) 1 *e* 49

b) 1 *e* 99

c) 10 *e* 10

d) 25 *e* 25

e) 50 *e* 50

Fonte: Inep (2017).

Observando que a área da base A_B corresponde a área de um retângulo (que calculamos fazendo a multiplicação do comprimento pela largura ou base pela altura) temos que $A_B = X.Y$, e o perímetro do retângulo da base será dado por $2.X + 2.Y$.

Como vamos utilizar os 100 m de tela então:

$$2.X + 2.Y = 100 \Leftrightarrow X + Y = 50 \Leftrightarrow Y = 50 - X$$

Assim podemos escrever a área da base A_B em função do lado X:

$$A_B = X.Y = X.(50 - X) = 50.X - X^2 = -X^2 + 50.X$$

Ou seja:

$$A_B(X) = -X^2 + 50.X$$

Retomando a proposição 4.2.1: Suponhamos que $f(x)$ existe para todos os valores de $x \in (a,b)$ e que f tem um máximo relativo em c, onde $a < c < b$. Se $f'(c)$ existe então $f'(c) = 0$.

Notemos que $A'_B(X) = -2.X + 50$ (4.3 derivadas da função quadrática). Assim:

$$-2.X + 50 = 0 \Leftrightarrow X = 25$$

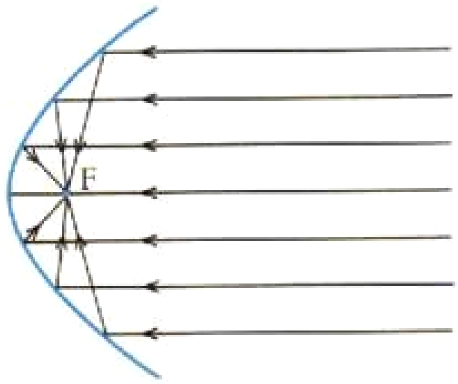
Logo para $X = 25\,m$ teremos a área máxima para base, como $Y = 50 - X$, temos que $Y = 25\,m$. Ou seja a alternativa correta é a alternativa d).

CAPÍTULO 5
UMA PROPRIEDADE NOTÁVEL DA PARÁBOLA E SUAS APLICAÇÕES

5.1 UMA PROPRIEDADE NOTÁVEL DA PARÁBOLA

Se girarmos uma parábola em torno do seu eixo, ela vai gerar uma superfície chamada paraboloide de revolução, também conhecida como superfície parabólica. Esta superfície possui inúmeras aplicações interessantes, todas elas decorrentes de uma propriedade geométrica da parábola, a chamada propriedade refletora da parábola.

Figura 5.1 – Propriedade refletora da parábola



Fonte: Autor.

A seguir vamos justificar a propriedade refletora da parábola.

Seja a parábola ρ. Consideremos P pertencente a essa parábola de foco F, reta diretriz d' e como P pertence à parábola, por definição,

$$d_{\overline{FP}} = d_{\overline{PD}}$$

Notemos que $\overline{PD} \perp d'$, também por definição da parábola. Seja b, com $M \in b \cap \overline{FD}$, a bissetriz de $F\hat{P}D$. Isso quer dizer que:

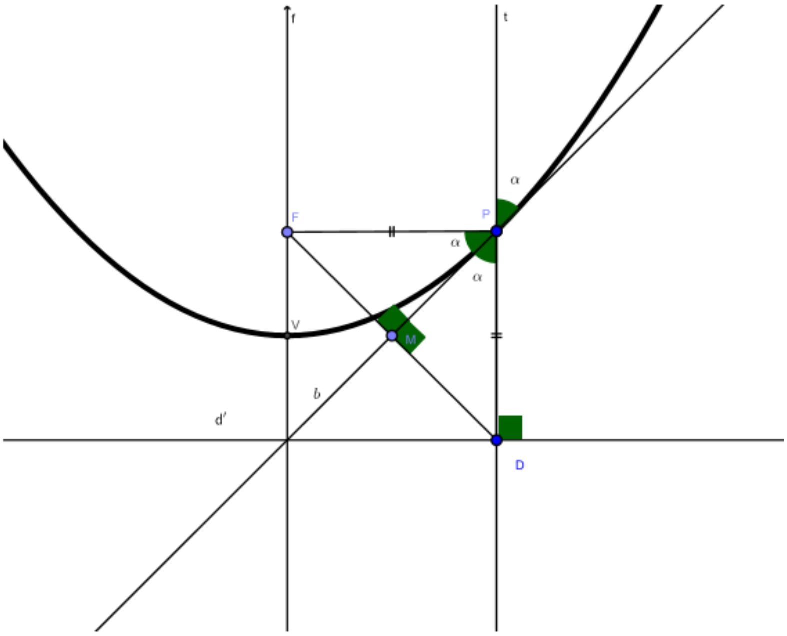
$$F\hat{P}M \equiv M\hat{P}D.$$

Usando o caso de congruência lado-ângulo-lado $(L - A - L)$, pois $\overline{PM}$ é um lado comum aos triângulos ΔFPM e ΔPMD, além disso temos um triângulo isósceles por construção e definição da parábola, por isso:

$$\overline{FP} \equiv \overline{PD}.$$

E b, além de ser bissetriz é a mediatriz de $\overline{FD}$ (por definição de triângulo isósceles) $F\hat{P}M \equiv M\hat{P}D$ e pelo caso Lado-Ângulo-Lado $\Delta FPM \equiv \Delta PMD$.

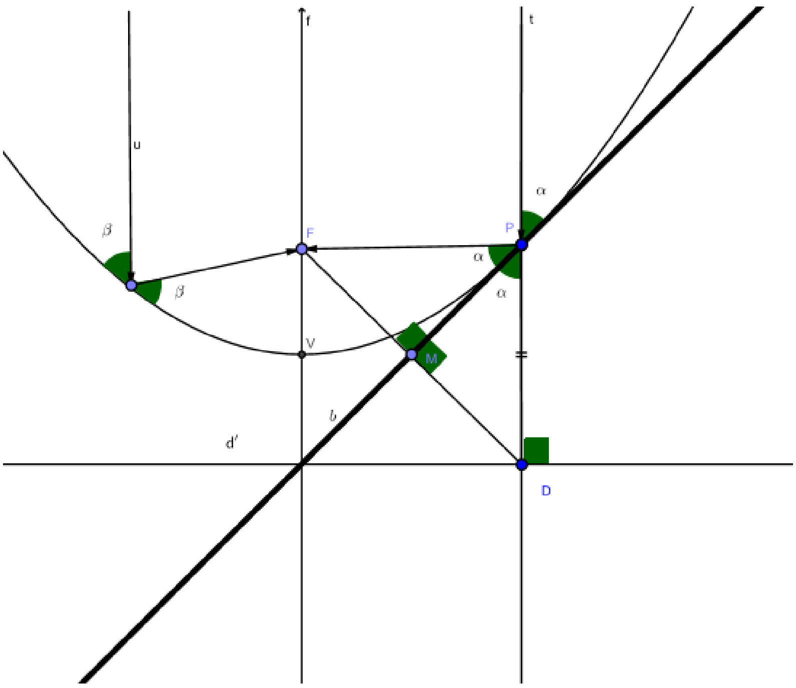
Figura 5.2 – Ângulo de incidência e reflexão na parábola.



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Seja t, a reta que passa por P e D, note que t é perpendicular a d' (por definição de distância) e como f também é perpendicular a d', temos que $t\,//f$ e o ângulo entre b e $\overline{PD}$ é oposto pelo vértice com α, que por definição de oposto pelo vértice, também mede α. Façamos t um raio incidente em P, paralelo a f e temos que o ângulo de incidência α é igual ao ângulo de reflexão e como vemos, todo raio que incidir paralelamente a f, passará pelo foco F, que justifica a propriedade refletora da parábola. Para melhor visualização, vamos considerar a Figura 5.1.3 a seguir, suponhamos f paralelo a t e paralelo a u, um outro raio que incide paralelo à reta focal da parábola.

Figura 5.3 – Propriedade refletora da parábola.



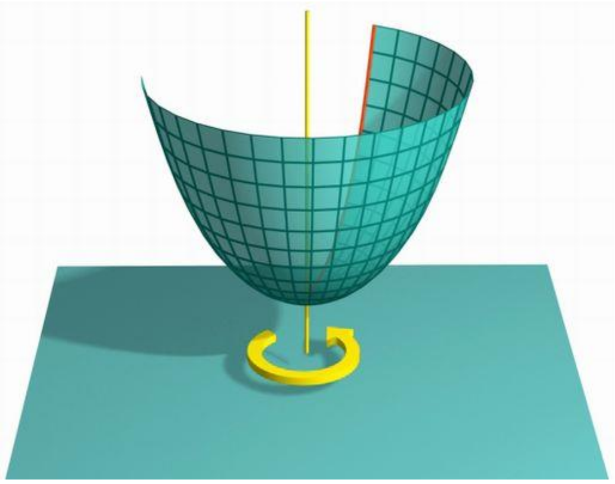
Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Assim, supondo um raio de luz, podemos concluir que todo raio de luz paralelo ao eixo da parábola, após reflexão toma a direção do foco e analogamente, todo raio de luz emitido pelo foco sairá paralelo ao eixo após reflexão. Esta talvez seja a mais importante propriedade de uma parábola, a propriedade refletora da parábola.

5.2 Aplicações da Parábola

O paraboloide de revolução, também conhecido como superfície parabólica, é uma superfície obtida pela rotação de uma parábola em torno do seu eixo de simetria, e esta superfície preserva a propriedade refletora da parábola em toda sua região. O que garante que toda recepção de sinais paralelos ao eixo de simetria será refletida para o foco, bem como todo sinal emitido pelo foco será refletido paralelamente ao eixo de simetria. Em função disto, o paraboloide será a base para as diversas aplicações que mostraremos a seguir.

Figura 5.4 – Paraboloide de revolução



Fonte: Portal do Professor (2017).

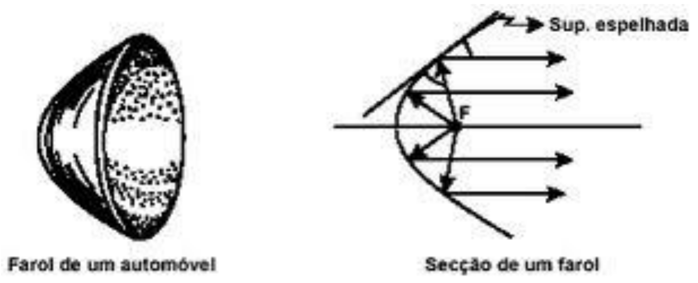
Na recepção de sinais, a aplicação mais comum é a antena parabólica que capta os sinais emitidos por um satélite, mas estes sinais chegam aqui muito fracos. Esta antena serve como um amplificador natural de sinais, uma vez que direciona todos os sinais captados para o foco (Figura 5.5).

Figura 5.5 - Antena parabólica

Fonte: AGM Antenas BH (2018).

Outros exemplos que podemos destacar é o dos faróis de carros, holofotes e até mesmo das lanternas que possuem na sua estrutura um emissor de luz localizado no foco de uma parábola, voltado para um espelho parabólico localizado no fundo do objeto. É esta superfície que irá refletir os raios luminosos, paralelamente ao eixo da parábola (Figura 5.6).

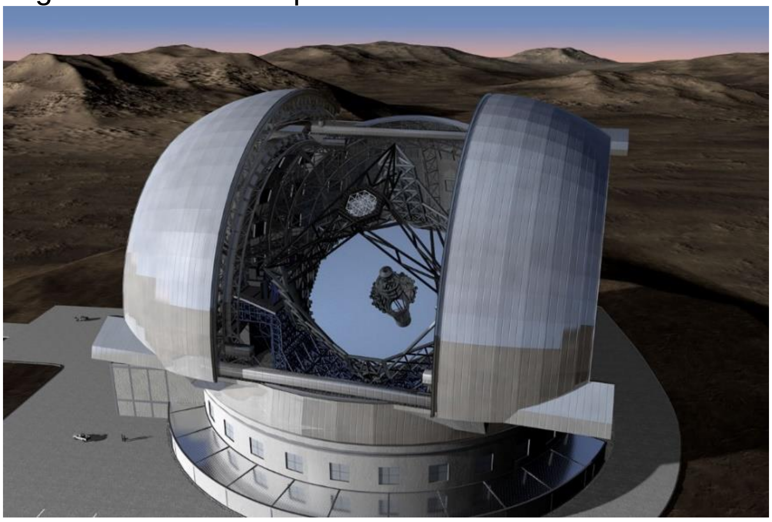
Figura 5.6 - Farol de um automóvel



Fonte:
http://2.bp.blogspot.com/-OI8I5Tbcljc/UDEIMobju7I/AAAAAAAAACk/Vu8iste0AzY/s1600/farol.jpg

Destacam-se ainda, com este mesmo princípio, os telescópios.

Figura 5.7 - Telescópio



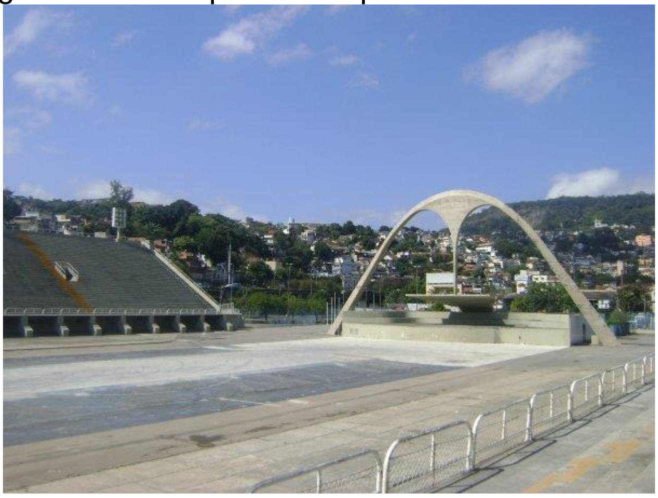
Fonte: ESO (2008).

O campo Arquitetônico é vasto de exemplos utilizando a parábola, não só por questões estéticas e estruturais, mas também pela otimização de espaços, iluminação e ventilação. Aqui no Brasil destacam-se as obras de Oscar Niemeyer, como a ponte Juscelino Kubitschek em Brasília (Figura 5.8), os arcos da Marquês de Sapucaí no Rio de Janeiro (Figura 5.9) e a Igreja da Pampulha em Belo Horizonte (Figura 5.10).

Figura 5.8 - Ponte Juscelino Kubitschek - Brasília

Fonte: Wikipedia Commons (2007).

Figura 5.9 - Marquês de Sapucaí - Rio de Janeiro



Fonte: TripAdvisor (2018b).

Figura 5.10 - Igreja da Pampulha - Belo Horizonte

Fonte: Illuminato (2018).

Existem também palcos construídos dentro de uma concha acústica parabólica. Assim, o som produzido que se propaga em todas as direções, ao invés de preencher todo o palco, é potencializado utilizando o princípio refletor da parábola. Um exemplo de concha acústica é encontrado na cidade de Londrina (Figura 5.11).

Figura 5.11 - Concha acústica de Londrina

Fonte: TripAdvisor (2018a)

Podemos citar também como exemplo de aplicações os fornos solares. Um forno solar bem conhecido é o localizado em Odeillo, sul da França (Figura 5.12). Pois como a distância do Sol à Terra é bem grande o feixe de luz solar que nos atinge possui seus raios praticamente paralelos. Portanto, ao se refletirem no espelho, os raios desse feixe convergem para seu foco, onde haverá uma grande concentração de energia, tanto luminosa quanto térmica. Assim, no foco do espelho há uma elevação de temperatura e, nesse ponto, é colocado o dispositivo que irá utilizar a energia concentrada.

Figura 5.12 - Forno solar Odeillo - França

Fonte: Novo Ambiente (2018).

Como podemos observar, o uso das parábolas vai muito além, ela está presente em todas as áreas, desde a construção civil, participando de grandes estruturas arquitetônicas, até a área tecnológica, na qual sua aplicação é cada vez mais abrangente. O estudo aprofundado e aplicado das parábolas tem sido cada vez mais importante.

CAPÍTULO 6
CURIOSIDADES

Vamos apresentar a seguir algumas curiosidades que envolvem as parábolas, vamos comentar um pouco sobre a lenda de Arquimedes, que relata uma vitória de Arquimedes frente a uma frota marítima utilizando espelhos parabólicos, um incrível forno parabólico batizado de "Pireliófero", construído pelo padre Manuel António Gomes Himalaya, que alcançou 3.500ºC utilizando apenas energia solar, comentaremos também sobre a calculadora parabólica, que pode ser utilizada já no Ensino Fundamental.

6.1 A Lenda de Arquimedes

De acordo com Canella (2016), conta a lenda que Arquimedes, durante o cerco a Siracusa em 214 a.C, que usando os fenômenos da reflexão que haviam sido descritos por Aristófanes e Aristóteles, utilizou um espelho côncavo, com o objetivo de coibir a invasão do exército romano, (um paraboloide circular), que na época teria sido feito de cobre. Dessa forma, Arquimedes, utilizando este artefato, concentrou os raios do Sol sobre os barcos romanos, incendiando-os à distância. Estes espelhos ganharam o nome de "espelho ardente". Mitos ou verdades à parte, a história fascina a todos, muitos estudantes, engenheiros e estudiosos, que através dos tempos vem tentando recriar a experiência de Arquimedes. Ela concentrava toda a radiação proveniente do Sol, que devido à enorme distância do Sol à Terra chegam paralelos.

Figura 6.1 - Lenda de Arquimedes

Fonte: Marcantoni (2016).

6.2 O Pireliófero

De acordo com Cerqueira (2015), o Pireliófero era um forno solar, com 6177 pequenos espelhos formando uma imensa estrutura parabólica espelhada de 80m^2. Foi construído por Manuel António Gomes, o padre Himalaya, além das suas atividades ecumênicas também era pesquisador e inventor e já no final do século XIX e início do século XX se preocupava com a utilização de fontes renováveis de energia, defendia a utilização das energias eólica, solar e das marés.

Este artefato tinha ainda uma cápsula refrataria localizada no foco da parábola, e esta estrutura estava apoiada em uma base com um mecanismo de relojoaria que fazia a superfície espelhada acompanhar o movimento solar, aproveitando o máximo de energia possível já que o sistema estava sempre alinhado. A cápsula funcionava como um recipiente onde se colocava o material que seria fundido. Este invento gerou um alvoroço na exposição todos curiosos e apressados para ver quase tudo se derreter repentinamente, um bloco de granito se liquefazer quase que instantaneamente. Este forno conseguiu atingir incríveis 3500^{o}C apenas refletindo a energia solar.

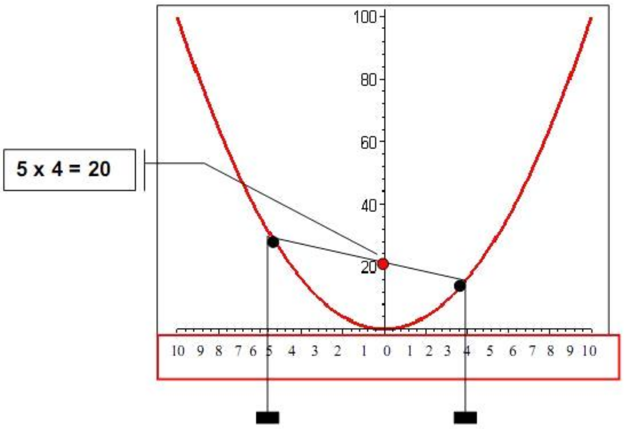
Figura 6.2 - Pireliófero

Fonte: Simões (2018).

6.3 Calculadora Parabólica

De acordo com Cerqueira (2015), a calculadora parabólica é um artefato simples e muito fácil de ser construído, basta esboçar a parábola da curva $y = x^2$ e fixar em uma base, notemos que não será necessário a utilização da parte negativa das ordenadas e nas abcissas devemos ter o cuidado de graduar com valores positivos nas duas direções. Podemos utilizar dois alfinetes para marcar os pontos A e B e um fio de nylon ou barbante com pesos nos extremos para garantir o fio sempre esticado. Observemos que os alfinetes determinam três segmentos no fio esticado, os dois segmentos verticais determinam os fatores que serão multiplicados em quanto que o segmento com extremos nos alfinetes determina o produto entre estes fatores. No exemplo a seguir, temos 5 × 4 = 20. Desta forma, com apenas uma curva temos todas as tabuadas de multiplicação em mãos.

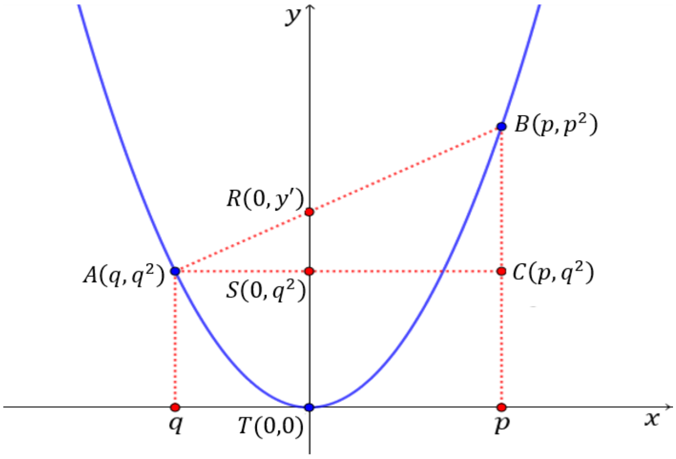
Figura 6.3 - Calculadora Parabólica



Fonte: Hora Matemática (2010).

Vamos mostrar que esta calculadora é válida para qualquer valor real. Consideremos a figura 6.4:

Figura 6.4 - Calculadora Parabólica



Fonte: Autor - Software GeoGebra 5.0.74.0-3D

Notemos que os triângulos ABC e ARS são semelhantes, pois $\overline{RS}$ e $\overline{BC}$ são paralelos. Desta forma, podemos afirmar que:

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AC}}$$

Logo:

$$\overline{RS} = \frac{\overline{AS}.\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{q.(p^2 - q^2)}{p+q} = \frac{q.(p+q).(p-q)}{p+q}$$

Ou seja,

$$\overline{RS} = q.(p-q)$$

Notemos que:

$$\overline{RT} = \overline{ST} + \overline{RS}$$

Substituindo $\overline{RS}$, temos:

$$\overline{RT} = q^2 + q.(p-q) = q^2 + q.p - q^2 = q.p$$

E assim, como o ponto T é a origem do sistema cartesiano, podemos concluir que a ordenada y' do ponto R é igual ao produto das abcissas dos pontos A e B, em módulo. Ou seja $y' = q.p$.

CAPÍTULO 7
CONCLUSÕES E REFLEXÕES A RESPEITO DA PESQUISA

Após o desenvolvimento do trabalho é necessário refletir a respeito dos motivos que nos levaram à elaboração dessa Trajetória Hipotética de Aprendizagem e, em especial focar na questão: “Em que aspectos a construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem, para o ensino Função Quadrática, pode contribuir na formação de um professor de Matemática?”.

Ao descrever aspectos da Resolução de Problemas na Educação Matemática e apresentar elementos dela de acordo com Polya (1994), Schoenfeld (2007), Onuchic (1999) e Van de Walle (2009), o presente trabalho oferece subsídios para a preparação de uma aula na perspectiva da Resolução de Problemas. A exposição teórica a respeito dessa metodologia e os passos simulados na THA são uma sugestão de caminho a ser trilhado, ou pelo menos, de início de caminhada para um professor que deseja investir em mudanças e aprofundamento no conteúdo de Funções Quadráticas.

A docência requer constante atualização, estudo e reflexão. São necessários mecanismos que possam colocar o professor no processo de aprender a aprender. A elaboração de uma THA exige ações que colocam o autor nesse rico processo de estudar, hipotetizar, refletir, testar e reelaborar; já que a construção das THA dá ao professor a possibilidade de construir seu projeto de decisões, baseado em suas melhores suposições de como o conhecimento poderia ser processado.

Para escrever a THA, na perspectiva de Simon (1995), foram necessários estudos teóricos a respeito do conteúdo, da estratégia de encaminhamento, do conceito de THA. Durante os estudos e também no processo da escrita, foram realizadas reflexões que tiveram como base a própria experiência do autor com 15 anos de trabalho em sala de sala; experiências no lidar com o conteúdo em questão e também com os que estão em seu entorno. O estudo também permite que o professor conheça a aplicação do conteúdo em outras áreas do conhecimento; no caso deste estudo foi possível exemplificar a relação de Funções Quadráticas com: calculadora parabólica, forno parabólico, espelhos parabólicos utilizados em frotas marítimas.

Conhecer o “todo” do conteúdo é necessário para que o professor possa orientar diferentes caminhos que os alunos podem seguir quando resolvem um problema, a elaboração da THA exige que o professor tome conhecimento do "todo".

Ao refletir a respeito das maneiras que os alunos podem abordar um problema para resolvê-lo nos faz refletir que diversas formas de pensar na Matemática possibilitam ir além da descrição ou da elaboração de modelos.

Ao simular a aula utilizando as etapas sugeridas por Onuchic e Allevato (2005) é possível mudar concepções a respeito do ensino da Matemática. De acordo com a proposta, o processo:

> [...] ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que começa com aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender Matemática é o poder de transformar problemas não-rotineiros em rotineiros. (ONUCHIC, 1999, p. 207).

É importante que o professor leve em conta que os alunos precisam compreender o seu papel em sala de aula enquanto construtores de seus conhecimentos. A Trajetória Hipotética de Aprendizagem, modelo proposto desde 1995 por Matin Simon, pode ser um instrumento de capacitação de professores; com a THA é possível antecipar ou prorrogar alguns conceitos, comentários e prever como e quando enfrentar algumas dificuldades que possam surgir, colaborando assim com o processo de ensino e de aprendizagem.

A THA proporciona ao educador momentos de reflexão a respeito de como ensinar e quais possíveis questionamentos podem surgir quando um estudante se depara pela primeira vez com um problema. Em especial, o desenvolvimento desse estudo permitiu ao autor perceber que é possível que o estudante consiga construir seu conhecimento a partir do envolvimento com a resolução de um problema e, nesse processo o professor formaliza conteúdos novos e já aprendidos pelos alunos.

Acreditamos que o referente trabalho contribuiu para a formação do autor, tendo em vista os aspectos teóricos estudados e as possibilidades de questionamentos que a THA pode proporcionar. Isso nos remete a resposta da nossa questão, pois a elaboração e exploração dessa THA proporciona ao educador momentos de reflexão a respeito de como conduzir o processo de aprender e quais possíveis questionamentos podem surgir quando um estudante se depara com um problema. Essa reflexão leva quase sempre ao processo de estudos e de retomadas, uma vez que sempre é possível surgir uma dúvida ou questionamento não previsto pelo professor em sua THA.

Esses aspectos corroboram para entender que a formação do professor também representa um processo constante e ele sempre precisa estudar de modo e investir em sua própria formação, sendo notória a possibilidade de construir seu projeto de decisões, baseado em suas melhores suposições de como o conhecimento poderia ser processado.

A experiência de estudo para elaboração desta THA representa para o autor um excelente exemplo de “saber aprender”.

A THA aqui apresentada não foi aplicada. A intenção agora é aplicá-la em uma turma da Educação Básica, refletir a respeito dos resultados e reformulá-la; possibilitando a continuação dessa pesquisa.

Espera-se também, que a leitura deste trabalho, venha colaborar para o aprimoramento do ensino de matemática, ou ao menos propiciar, reflexões na busca de uma educação de qualidade.

REFERÊNCIAS

AGM ANTENAS BH. Disponível em: <http://www.agmantenas.com.br/>. Acesso em: 27 mar. 2018.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática através da resolução de problemas: uma nova possibilidade para o trabalho em sala de aula. In: REUNIÃO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA DO CONE SUL, 7., 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** Águas de Lindóia: PUC/SP, 2006.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Ed. Porto. 1994. Título original: Qualitative research for education.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**: proposta preliminar. 2. ed. Brasília, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 16 fev. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais do Ensino Médio**. Brasília, 2000. Disponível em:<www.portal.mec.gov.br/>. Acesso em: 9 maio 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais (PCNs)**: ensino médio parte iii- ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 9 maio 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais + para o ensino médio, orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MECSEMTEC, 2002.

CANELLA, C. M. S. B. **Funções quadrática e suas aplicações no primeiro ano do ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora – 2016.

CERQUERIA, A. A. **Parábola e suas aplicações**. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

ESO - EUROPEAN SOUTHERN OBSERVATORY. **Images**. 2008. Disponível em: <http://www.eso.org/public/archives/images/screen/e-elt-3_2008.jpg>. Acesso em: 27 mar. 2018.

FOGAÇA, J. R. V. Tipos de corrosão. **Brasil Escola**. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/quimica/tipos-corrosao.htm>. Acesso em: 26 mar. 2017.

GEOMETRICA. **Abóbodas**. Disponível em: <http://geometrica.com/pt/node/630>. 26 mar. 2017.

HORA MATEMÁTICA. **Vamos aprender a tabuada?** Calculadora Parabólica. 2010. Disponível em: <http://horamatematica.blogspot.com.br/2010/11/vamos-aprender-tabuada-calculadora.html>. Acesso em: 27 mar. 2018.

ILLUMINATO. **Painel**. Disponível em: <http://www.illuminatoblog.com.br/>. Acesso em: 27 mar. 2018.

INEP. **Exame nacional do ensino médio**: prova de ciências da natureza e suas tecnologias, prova de matemática e suas tecnologias. 2017. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/cad_7_prova_azul_12112017.pdf>. Acesso em: 5 fev. 2018.

LANG, S. **Cálculo**. Rio de Janeiro: Livro Técnico S. A, 1971. v. 1.

LIMA, E. L. **Coleção Profmat:** números e funções reais. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

MARCANTONI, Marco. **Fabbrica Zanzariere**. 2016. Disponível em: <https://www.zanzariereplissettate.it/fabbrica-di-zanzariere-utilizza-lo-sporco-trucco-di-archimede-dello-specchio-ustorio-per-far-aumentare-gli-utili-del-serramentista/>. Acesso em: 27 mar. 2018.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: NationalCouncil of Teachers of Mathematics, 2000.

NOVO AMBIENTE. **Engenharia solar**: ciência e natureza caminhando juntas. Disponível em: <http://novoambiente.com/blog/wp-content/uploads/2014/08/NA_20_08_blog1.jpg>. Acesso em: 27 mar. 2018.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2005. p. 213-231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa Em Resolução de Problemas: Caminhos, Avanços e Novas Perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98. 2011.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa Em Resolução de Problemas: Caminhos, Avanços e Novas Perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98. 2011.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S.G. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2008, México. **Anais...** México, 2008.

OSCAR NIEMEYER. In: Wikipédia. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Oscar_Niemeyer>. Acesso em: 26 jan. 2017.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes curriculares de matemática para educação básica***.* Curitiba: SEED, 2008.

PIRES, C. M. C. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145-166, 2009.

PIRES, Magna Natalia Marin. **Oportunidade para aprender**: uma prática da reinvenção guiada na prova em fases. 2013. 122 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

PORTAL DO PROFESSOR. **Paraboloide de revolução**. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/discovirtual/galerias/imagem/0000000837/0000011081.jpg>. Acesso em: 5 out. 2017.

SANTOS, R. P. **História da física**: os espelhos de arquimedes. 2016. Disponível em: <http://www.fisica-interessante.com/historia-da-fisica-espelhos-de-arquimedes.html>. Acesso em: 14 out. 2017.

SCHOENFELD, A. H. Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. **The International Journal in Mathematics Education**, Heidelberg, v. 39, p. 537-551, 2007. Disponível em: <http://www2.fc.unesp.br/matematica/semana/arquivos/ZDM_Alan%20Schoenfeld.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2017

SIMÕES, H. **Padre Himalaya**: homem de ciência, pioneiro da ecologia em Portugal. Disponivel em: <http://naturlink.pt/article.aspx?menuid=23&cid=72607&bl=1&viewall=true>. Acesso em: 27 mar. 2018.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 26, n. 2, p. 114-145, 1995.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Regimento do mestrado profissional em matemática em rede nacional**. Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/Regimento_Profmat_2016.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2017.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving.** Reston: NCTM, 1989. p. 1-22.

TRALDI JUNIOR, A.; ROSENBAUM, L. S. Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 2, p. 369-393, 2010.

TRIPADVISOR. **Concha acústica**. Londrina, PR. Disponível em:<https://media-cdn.tripadvisor.com/media/photo-s/07/4f/e7/fc/concha-acustica.jpg>. Acesso em: 27 mar. 2018a.

TRIPADVISOR. **Sambódromo da Marquês de Sapucaí**. Disponível em: <https://media-cdn.tripadvisor.com/media/photo-o/01/3f/82/09/sambodrome.jpg>. Acesso em: 27 mar. 2018b.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução de P. H. Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WIKIMEDIA COMMONS. **Bridge Juscelino Kubitschek (Ponte JK), Brasilia, DF.** 2007. Disponível em: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/01/BSB_Ponte_JK_Panorama_05_2007_266.jpg>. Acesso em: 27 mar. 2018.

WIKIMEDIA COMMONS. **Pesca de langostas con nasa en el archipielago de Los Roques, Venezuela**. Disponível em: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/82/Pesca_de_Langosta_con_Nasa_en_Los_Roques%2C_Venezuela.jpg/800px-Pesca_de_Langosta_con_Nasa_en_Los_>. Acesso em: 26 jan. 2017.

ZANLUCA, J. C. **Como funcionam as cooperativas**. Disponível em: <http://www.portaldecontabilidade.com.br/tematicas/cooperativas.htm>. Acesso em: 26 jan. 2017.