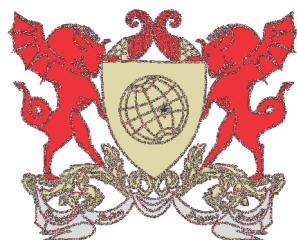


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



HENRIQUE JOSÉ DE ORNELAS SILVA

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E
COMPASSO E DOBRADURAS

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2018

HENRIQUE JOSÉ DE ORNELAS SILVA

**CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E
COMPASSO E DOBRADURAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,
para obter o título *Magister Scientiae*.

FLORESTAL
MINAS GERAIS – BRASIL
2018

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T

S586c
2018
Silva, Henrique José de Ornelas, 0-
Construções geométricas com régua e compasso e
dobraduras / Henrique José de Ornelas Silva. – Florestal, MG,
2018.

vii, 90f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndice.

Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.90.

1. Construções geométricas. 2. Dobraduras. 3. Ensino.
4. Matemática. 5. Desenho geométrico. I. Universidade Federal
de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado
em Matemática - Profissional. II. Título.

HENRIQUE JOSÉ DE ORNELAS SILVA

**CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM RÉGUA E
COMPASSO E DOBRADURAS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa,
como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional,
para obter o título *Magister Scientiae*.

APROVADA: 28 de fevereiro de 2018.



Mehran Sabeti



Gil Fidelix de Souza



Alexandre Alvarenga Rocha
(Coorientador)



Luís Felipe Gonçalves Fonseca
(Orientador)

Dedicatória

Ao meu pai José Maria e à minha mãe Maria Aparecida
(sempre presente em meus pensamentos e no meu coração),
serei eternamente grato por tudo que vocês me proporcionaram.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me guiar em minha jornada da vida dando-me força para prosseguir sempre.

À minha esposa Grazielle, pela compreensão, incentivo, apoio e por estar sempre ao meu lado em todos os momentos.

Aos meus filhos Sofia e Vítor, razões de tudo que faço.

À minha sogra Maria Helena, por suas orações nos dias das avaliações.

A todos os meus companheiros de PROFMAT, pela amizade, presteza, pelo conhecimento compartilhado. Vocês foram fundamentais nesta trajetória.

Ao meu amigo Edimilson, pelas revisões nos textos.

A todos os professores do PROFMAT (UFV-Florestal), pelo aprendizado proporcionado, em especial ao meu orientador Luís Felipe Gonçalves Fonseca, pelo apoio, comprometimento, paciência e disponibilidade.

Aos meus alunos da Escola Maria da Penha dos Santos Almeida, por participarem das aplicações.

Aos meus amigos das Escolas Lidimanha Augusta Maia e Maria da Penha dos Santos Almeida pelo incentivo e apoio.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro durante a realização do mestrado.

À Secretaria Municipal de Educação de Brumadinho-MG, pela dispensa de minhas atividades como professor, possibilitando, assim, mais tempo para dedicar-me aos estudos.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de alguma forma na realização desta conquista.

Resumo

SILVA, Henrique José de Ornelas, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2018. **Construções geométricas com régua e compasso e dobraduras.** Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca. Coorientador: Alexandre Alvarenga Rocha.

Este trabalho aborda as construções geométricas via régua e compasso, a justificativa algébrica da impossibilidade da resolução dos três problemas clássicos gregos: a duplicação do cubo, a trissecção de um ângulo arbitrário e a quadratura do círculo; e também as construções geométricas através de dobraduras. Ao final, é apresentado um roteiro de aula sobre construções geométricas via régua e compasso e dobraduras, bem como o relato de sua aplicação à alunos das séries finais do ensino fundamental.

Abstract

SILVA, Henrique José de Ornelas, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2018. **Geometric constructions with ruler and compass and paper folding.** Adviser: Luís Felipe Gonçalves Fonseca. Co-adviser: Alexandre Alvarenga Rocha.

This work deals with geometric constructions via straightedge and compass, the algebraic justification of the impossibility of solving the three classical Greek problems: cube duplication, trisection of an arbitrary angle and squaring of the circle; and also the geometric constructions in paper folding. At the end, a lesson script on geometric constructions is presented through ruler and compass and paper folding, as well as the report of its application to students in the final series of elementary school.

Sumário

1	Introdução	1
2	Construções geométricas com régua e compasso	2
2.1	Adição e subtração de segmentos	2
2.2	Retas Perpendiculares	3
2.2.1	Perpendicular a uma reta passando por um ponto pertencente a essa reta	3
2.2.2	Perpendicular a uma reta passando por um ponto não pertencente a essa reta	4
2.3	Construção de uma reta paralela	5
2.4	Triângulo equilátero	5
2.5	Transporte de ângulos	6
2.6	Mediatriz	7
2.7	Bissetriz	8
2.8	Arco capaz	8
2.9	Pontos notáveis do triângulo	9
2.9.1	Incentro	9
2.9.2	Baricentro	10
2.9.3	Circuncentro	11
2.9.4	Ortocentro	11
2.10	A 4ª proporcional	12
2.11	Construções utilizando um segmento unitário	13
2.11.1	Segmento de medida \sqrt{a}	13
2.11.2	Segmento de medida a^2	14
2.11.3	Segmento de medida $\frac{1}{a}$	14
2.11.4	Segmento de medida ab	15
3	Números construtíveis com régua e compasso	17
3.1	Os três problemas clássicos gregos	27
3.1.1	Problema da duplicação do cubo (problema deliano)	27
3.1.2	Problema da quadratura do círculo	28
3.1.3	Problema da trissecção de um ângulo arbitrário	30

4	Dobraduras	32
4.1	Axiomas de Huzita-Hatori	32
4.2	Construções geométricas com dobraduras	36
4.2.1	Perpendicular a uma reta r dada passando por um ponto $G \notin r$	37
4.2.2	Mediatriz de um segmento AB	38
4.2.3	Bissetriz	39
4.2.4	Triângulo equilátero com medida igual ao lado menor da folha.	40
4.2.5	Hexágono Regular	41
4.2.6	Soma dos ângulos internos de um triângulo	42
4.2.7	Obtenção de uma folha quadrada a partir de uma folha retangular	43
4.2.8	Obtendo dois segmentos em razão áurea:	44
4.2.9	Trissecção de um ângulo e duplicação do cubo	47
5	Roteiros de aula e aplicação	52
5.1	Conteúdo trabalhado por aula	54
5.2	Avaliação e análise dos resultados	54
6	Considerações finais	57
A	Material escrito	58
	Bibliografia	90

Introdução

Provavelmente, o leitor, em sua vida escolar, já manipulou um compasso, mediu um ângulo utilizando o transferidor e até tenha se deparado com um jogo de esquadros. Porém, já pensou nas possibilidades dos problemas que podem ser resolvidos com esses instrumentos? Que as impossibilidades podem ser justificadas algebricamente? Que alguns problemas envolvendo o desenho geométrico demoraram quase 2500 anos para serem resolvidos? E ainda, que todas essas construções realizadas com régua não graduada e compasso (e muitas outras) podem ser realizadas apenas dobrando papéis? Esta dissertação tratará desses assuntos, entre outros. E, para isso, apresenta a estrutura descrita abaixo.

No capítulo 2, serão apresentadas algumas construções geométricas feitas com régua e compasso, bem como suas justificativas.

No capítulo 3, trataremos das extensões de corpos de \mathbb{Q} em \mathbb{R} , dos números construtíveis com régua e compasso dentre os números reais e da impossibilidade da resolução dos três problemas clássicos da Grécia antiga: a duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trissecção de um ângulo arbitrário.

No capítulo 4, apresentaremos, de forma axiomática, a geometria das dobraduras e algumas possibilidades de construções, incluindo soluções para os problemas da duplicação do cubo e da trissecção de um ângulo arbitrário.

Por fim, no capítulo 5, serão apresentados os relatos das aulas práticas de desenho geométrico, nas quais foi utilizado um material escrito (Apêndice A), elaborado a partir dos estudos realizados nos capítulos 2, 3 e 4 voltado para alunos das séries finais do ensino fundamental.

As principais fontes utilizadas ao longo do desenvolvimento do trabalho foram [20] e [15] no capítulo 2, [3] e [7] no capítulo 3, [14] e [9] no capítulo 4.

Construções geométricas com régua e compasso

O desenho geométrico com régua e compasso surgiu na Grécia antiga, provavelmente por volta do século V a.C.

Apesar de não apresentar nenhuma figura, é possível notar sua presença na mais bem sucedida obra sobre Matemática da antiguidade, os Elementos de Euclides. Nela há instruções não só para as construções, mas também do que pode ser feito com cada um dos instrumentos euclidianos (régua e compasso). Com a régua só é possível traçar retas de comprimento indefinido (não se pode usar sua escala) e com o compasso permite-se traçar apenas circunferências com centro em um ponto passando por outro ponto.

O objetivo das construções eram os de resolver problemas teóricos e práticos com o uso desses instrumentos.

Neste capítulo, serão apresentadas algumas construções elementares, bem como suas justificativas, que serviram de base na elaboração do material que foi aplicado em sala de aula.

2.1 Adição e subtração de segmentos

Dados dois segmentos de medidas a e b , com $a > b$. Para a construção de segmentos de medidas $a + b$ e $a - b$, devemos (Figura 2.1):

1. traçar uma reta r e nela marcar um ponto A ;
2. traçar uma circunferência com centro em A e raio medindo a , determinando em uma das interseções, à direita por exemplo, o ponto B ;
3. traçar uma circunferência com centro em B e raio medindo b , determinando os pontos C , à esquerda, e D , à direita;
4. temos $\overline{AC} = a - b$ e $\overline{AD} = a + b$.

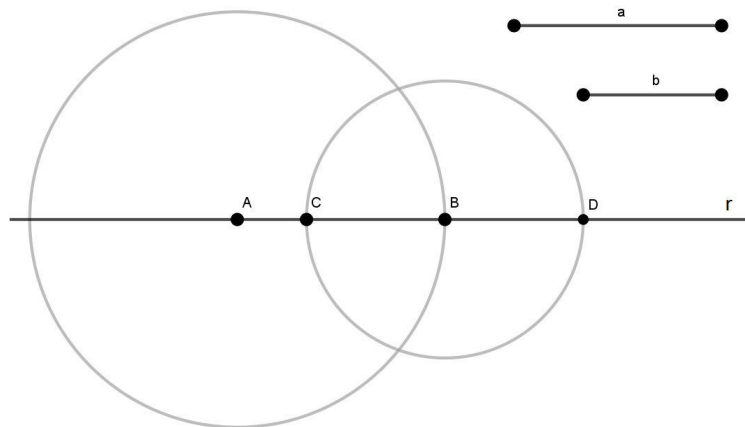


Figura 2.1: Construção de um segmento $\overline{AC} = a - b$ e um segmento $\overline{AD} = a + b$ a partir de dois segmentos de medidas a e b , com $a > b$.

As operações de adição e subtração são inteiramente intuitivas.

2.2 Retas Perpendiculares

Duas retas são perpendiculares se têm um ponto em comum e formam um ângulo de 90° nesse ponto. Nesta sessão será apresentada a construção de uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto pertencente e também por um ponto não pertencente a essa reta.

2.2.1 Perpendicular a uma reta passando por um ponto pertencente a essa reta

Para construir uma reta perpendicular a uma reta r dada passando por um ponto $P \in r$, devemos (Figura 2.2):

1. traçar uma circunferência com raio qualquer e centro em P , determinando na interseção com r os pontos A e B ;
2. traçar duas circunferências de mesmo raio \overline{AB} , uma com centro em A e outra com centro em B , determinando em suas interseções os pontos C e D ;
3. traçar a reta \overleftrightarrow{CD} perpendicular à r .

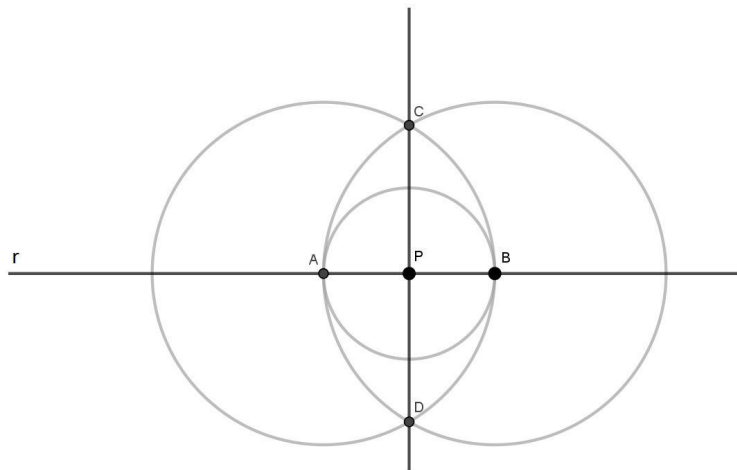


Figura 2.2: Construção de uma perpendicular a uma reta r passando por $P \in r$.

Justificativa. Por construção, $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD}$ e, portanto, $ABCD$ é um losango, implicando que suas diagonais AB e CD são perpendiculares. \square

2.2.2 Perpendicular a uma reta passando por um ponto não pertencente a essa reta

Para construir uma reta perpendicular a uma reta r dada passando por um ponto $P \notin r$, devemos (Figura 2.3):

1. traçar uma circunferência com centro em P com raio maior que a distância de P à r , determinando na interseção com r os pontos A e B ;
2. traçar duas circunferências de mesmo raio \overline{PA} , uma com centro em A e outra com centro em B , determinando em suas interseções, além do ponto P , o ponto C ;
3. traçar a reta \overleftrightarrow{PC} perpendicular à r .

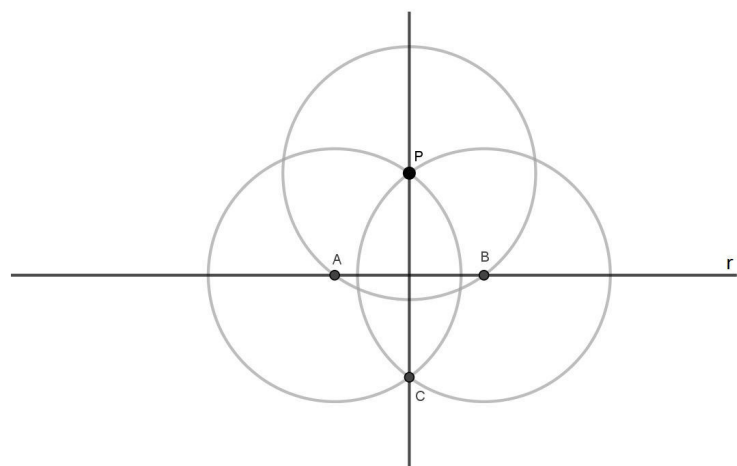


Figura 2.3: Construção de uma perpendicular a uma reta r passando por $P \notin r$.

Justificativa. Por construção, $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ e, portanto, $PABC$ é um losango, implicando que suas diagonais PC e AB são perpendiculares. \square

2.3 Construção de uma reta paralela

Duas retas são paralelas quando não têm nenhum ponto em comum. Para construir uma reta $s // r$ (s paralela à r) dada passando por um ponto $P \notin r$, devemos (Figura 2.4):

1. traçar uma circunferência com centro em P e raio maior que a distância de P à r , determinando em uma das interseções, à direita por exemplo, o ponto A ;
2. traçar uma circunferência com centro em A e o mesmo raio usado anteriormente, determinando na interseção, à sua direita, com r o ponto B ;
3. traçar uma circunferência com centro em B e raio \overline{AB} , interceptando a primeira circunferência em C ;
4. traçar a reta s passando pelos pontos P e C , paralela à r .

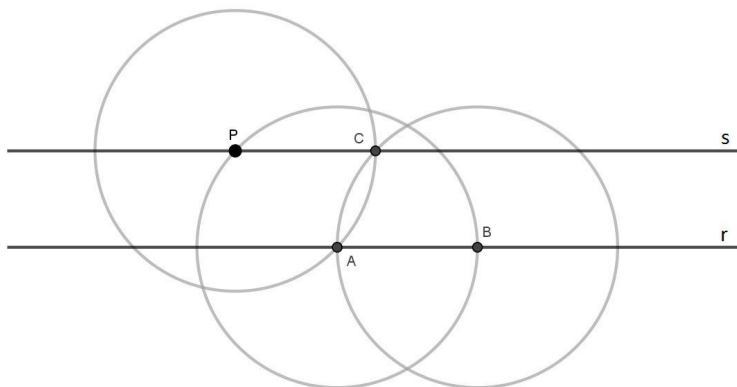


Figura 2.4: Construção de uma reta paralela a uma reta r passando por $P \notin r$.

Justificativa. Por construção, $\overline{PA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CP}$ e, portanto, $PABC$ é um losango, implicando que seus lados AB e PC são paralelos. \square

2.4 Triângulo equilátero

Um triângulo equilátero é aquele que possui os três lados com a mesma medida. Para construir um triângulo equilátero de lado a dado, devemos (Figura 2.5):

1. traçar uma reta r e nela marcar um ponto A ;
2. com centro em A , traçar uma circunferência de raio medindo a , determinando em uma das interseções, à direita por exemplo, o ponto B ;

3. traçar uma circunferência com centro em B e raio medindo a , determinando em uma das interseções com a primeira circunferência, acima por exemplo, o ponto C ;
4. traçar os lados AC e BC . O triângulo ABC é equilátero.

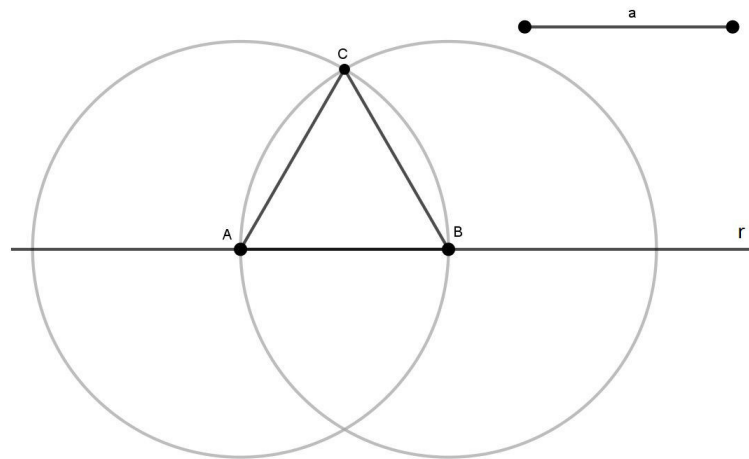


Figura 2.5: Construção de um triângulo equilátero de lado a .

Justificativa. Devemos observar que na construção das circunferências foi usada a mesma medida de raio, logo $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$. \square

2.5 Transporte de ângulos

Dado um ângulo de medida α e uma semirreta \overrightarrow{OP} , para construir o ângulo $\widehat{AOB} = \alpha$, com $B \in \overrightarrow{OP}$, devemos (Figura 2.6):

1. traçar uma circunferência de raio qualquer com centro no vértice Q do ângulo de medida α , determinando na interseção com os lados do ângulo os pontos X e Y ;
2. traçar uma circunferência com centro em O e mesmo raio usado anteriormente, determinando na interseção com a semirreta \overrightarrow{OP} o ponto B ;
3. traçar uma circunferência com centro em B e raio \overline{XY} , determinando em uma das interseções com a outra circunferência o ponto A ;
4. traçar a semirreta \overrightarrow{OA} . Temos $\widehat{AOB} = \alpha$.

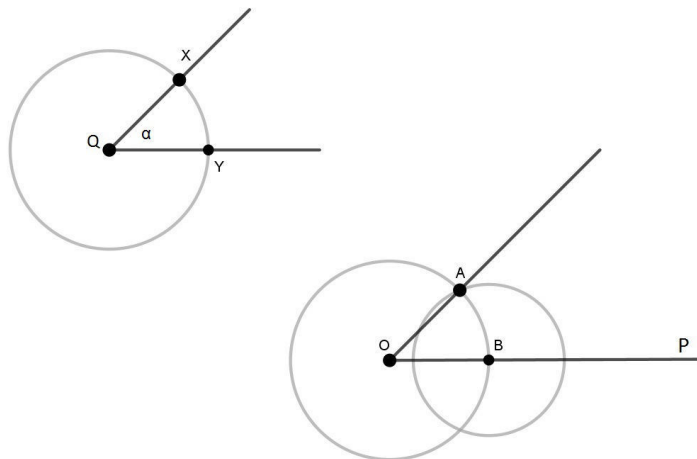


Figura 2.6: Construção de um ângulo $\widehat{AOB} = \alpha$.

Justificativa. Por LLL, os triângulos QXY e OAB são congruentes e, portanto, $\widehat{XQY} = \widehat{AOB}$. \square

2.6 Mediatrix

A mediatrix de um segmento é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos extremos desse segmento (a mediatrix determina em sua interseção o ponto médio do segmento). Para construir a mediatrix de um segmento AB , devemos (Figura 2.7):

1. escolhendo uma medida maior que $\frac{\overline{AB}}{2}$, traçar duas circunferências com essa mesma medida de raio, uma com centro em A e outra com centro em B , determinando nas interseções os pontos C e D ;
2. traçar uma reta por C e D , mediatrix do segmento AB . A interseção entre a mediatrix e o segmento determina o ponto M , ponto médio do segmento AB .

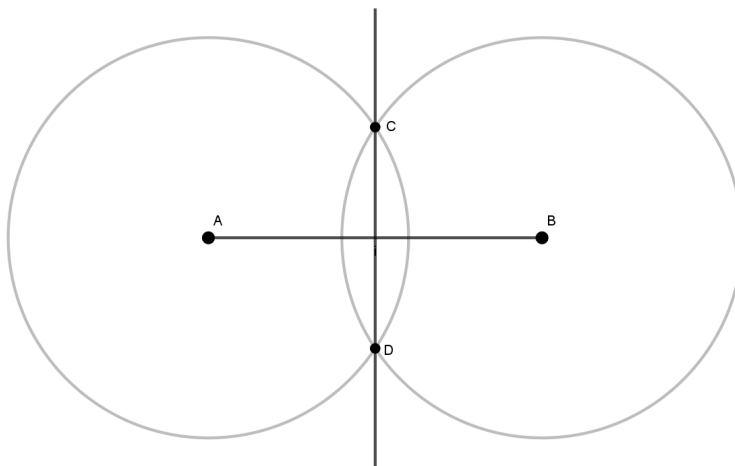


Figura 2.7: Construção da mediatrix de um segmento AB .

Justificativa. Por construção $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD}$, implicando que $ADBC$ é um losango. Logo, suas diagonais AB e CD são perpendiculares e se interceptam em seus respectivos pontos médios. Portanto, a reta \overleftrightarrow{CD} é a mediatriz de AB . \square

2.7 Bissetriz

A bissetriz é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados de um ângulo que pertencem à região interior desse ângulo. Para construir a bissetriz de um ângulo $\angle ABC$, devemos (Figura 2.8):

1. traçar uma circunferência com uma medida de raio qualquer e centro em B , determinando, na interseção com os lados do ângulo, os pontos X e Y ;
2. traçar duas circunferências de raio \overline{XY} : uma com centro em X e outra com centro em Y , determinando em uma das interseções o ponto W ;
3. traçar a semirreta \overrightarrow{BW} , bissetriz do ângulo $\angle ABC$.

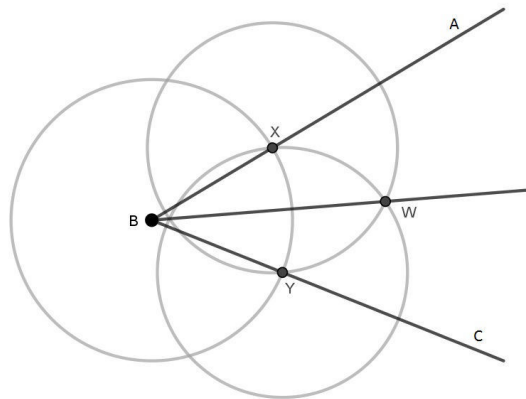


Figura 2.8: Construção da bissetriz de um ângulo $\angle ABC$.

Justificativa. Por construção, $\overline{BX} = \overline{BY}$ e $\overline{XW} = \overline{YW}$. BW é um lado comum dos triângulos BXW e BYW . Assim, por LLL, estes triângulos são congruentes e, portanto, $\widehat{XBW} = \widehat{YBW}$. \square

2.8 Arco capaz

Dados um segmento de medida m e um ângulo α , o lugar geométrico dos pontos P tais que $\widehat{APB} = \alpha$ é a reunião de dois arcos de circunferência, simétricos em relação à reta \overleftrightarrow{AB} e tendo os pontos A e B em comum. Tais arcos são os arcos capazes de α em relação a AB .

Para construirmos o arco capaz superior de um ângulo de medida α sobre um segmento de medida m , devemos (Figura 2.9):

1. traçar uma reta r e sobre ela um segmento $\overline{AB} = m$;

2. traçar a reta s mediatriz do segmento AB , determinando na interseção com r o ponto M ;
3. traçar a reta \overleftrightarrow{AC} , tal que $\widehat{BAC} = \alpha$;
4. traçar a reta perpendicular à \overleftrightarrow{AC} passando por A , determinando na interseção com s o ponto D ;
5. traçar \widehat{AB} com centro em D e raio igual a \overline{AD} .

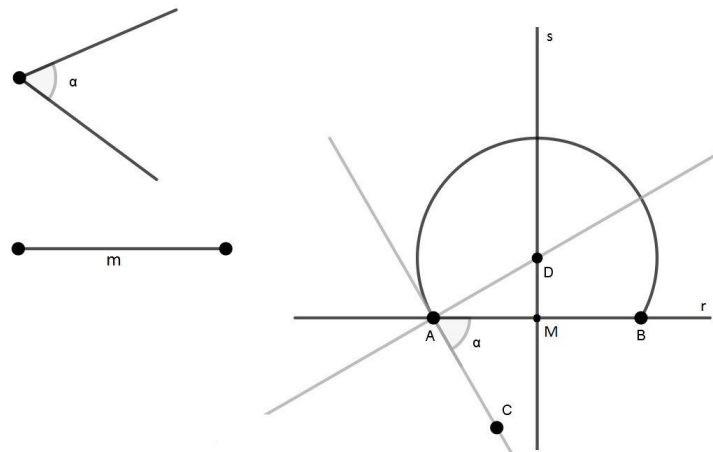


Figura 2.9: Construção do arco capaz.

Justificativa. Devemos mostrar que para todo $P \in \widehat{AB}$, temos $\widehat{APB} = \alpha$.

Como $\widehat{BAC} = \alpha$, então $\widehat{BAD} = 90^\circ - \alpha$. Sendo $M = r \cap s$, temos $\widehat{AMD} = 90^\circ$ e assim $\widehat{ADM} = \alpha$. Os triângulos ADM e BDM são congruentes (LAL). Logo, temos $\widehat{ADB} = 2\alpha$. Como um ângulo inscrito em uma circunferência mede a metade do ângulo central correspondente, temos que $\widehat{APB} = \alpha$ para todo $P \in \widehat{AB}$. \square

2.9 Pontos notáveis do triângulo

2.9.1 Incentro

As três bissetrizes internas de um triângulo se interceptam em um ponto denominado incentro (I). Esta demonstração pode ser encontrada na página 124 do livro Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana [5].

Para determinar o incentro de um triângulo ABC , basta traçar as bissetrizes de dois dos ângulos internos do triângulo, $\angle ABC$ e $\angle ACB$ por exemplo (Figura 2.10).

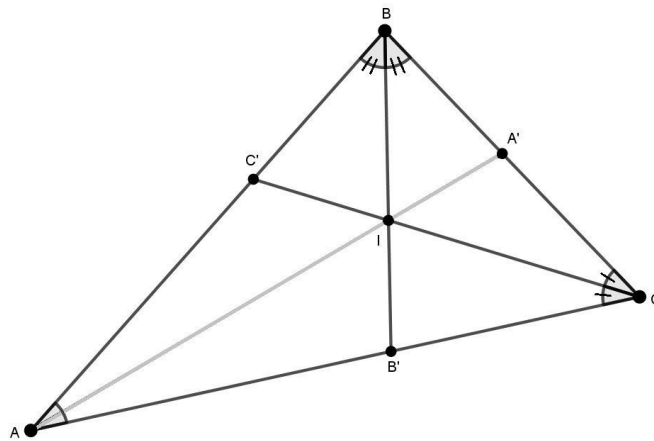


Figura 2.10: Para determinar o incentro I do triângulo ABC , basta traçar a bissetriz interna de dois dos seus ângulos.

2.9.2 Baricentro

As três medianas de um triângulo se interceptam em um ponto denominado baricentro (G). Esta demonstração pode ser encontrada na página 122 do livro Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana [5].

Para determinarmos o baricentro de um triângulo ABC , devemos (Figura 2.11):

1. traçar duas das mediatrizes dos lados do triângulo, dos lados AB e AC por exemplo, determinando assim seus pontos médios M e N respectivamente;
2. traçar os segmentos \overline{BN} e \overline{CM} , duas das medianas do triângulo, determinando na interseção o ponto G , baricentro do triângulo.

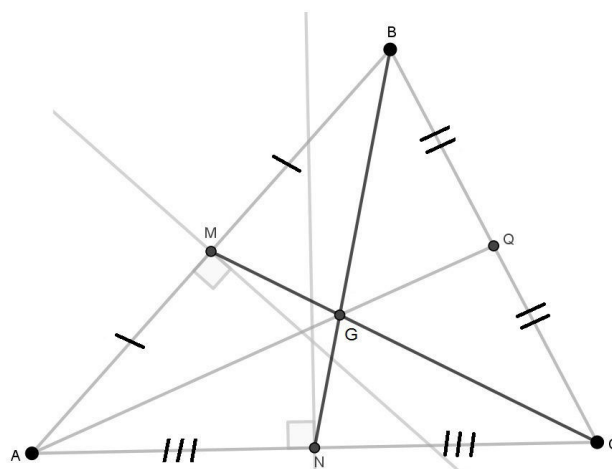


Figura 2.11: Para determinar o baricentro G do triângulo ABC , basta traçar duas de suas medianas.

2.9.3 Circuncentro

As três mediatrizes de um triângulo se encontram em um ponto denominado circuncentro (O). Esta demonstração pode ser encontrada na página 125 do livro Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana [5].

Para determinarmos o circuncentro de um triângulo ABC , basta traçarmos as mediatrizes de dois dos seus lados, dos lados AB e BC por exemplo (Figura 2.12).

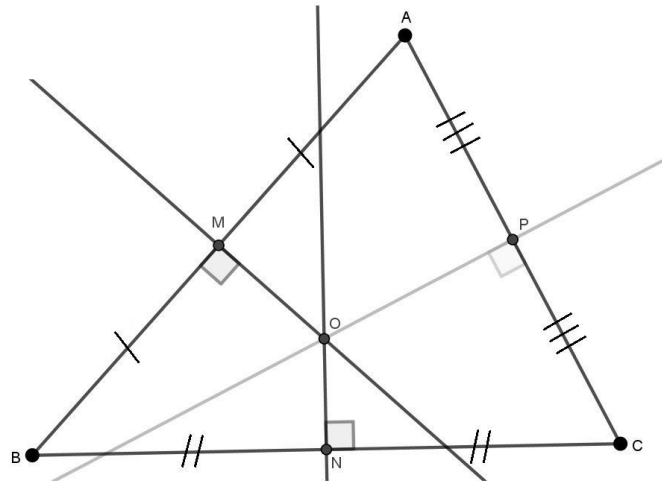


Figura 2.12: Para determinar o circuncentro O do triângulo ABC , basta traçar a mediatriz de dois de seus lados.

2.9.4 Ortocentro

As três retas suportes que contêm as alturas de um triângulo se interceptam em um ponto denominado ortocentro (H). Essa demonstração pode ser encontrada na página 126 do livro Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana [5].

Para determinarmos o ortocentro de um triângulo ABC , basta traçarmos duas dessas retas suportes, dos lados AB e AC por exemplo (Figura 2.13).

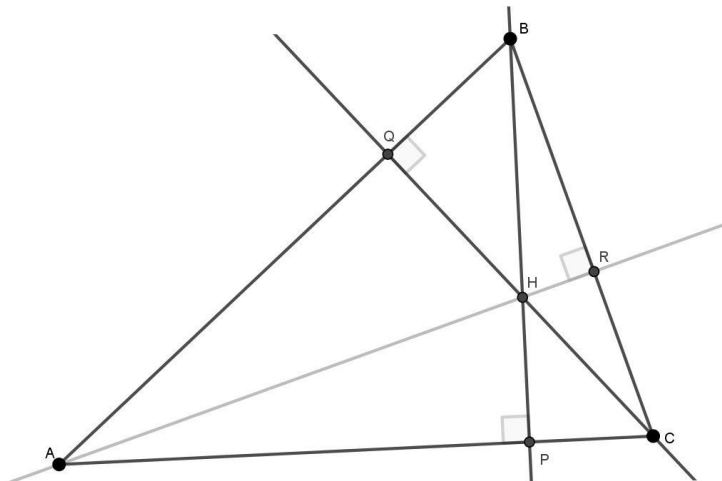


Figura 2.13: Para determinar o ortocentro H de um triângulo ABC , basta traçar duas das retas suportes de suas alturas.

2.10 A 4ª proporcional

Dados três segmentos de medidas a , b e c , dizemos que um segmento de medida d é a quarta proporcional desses segmentos, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Para construirmos a 4ª proporcional dos segmentos de medidas a , b e c devemos (Figura 2.14):

1. sobre um ângulo qualquer de vértice O , tomemos sobre um dos lados os segmentos $\overline{OA} = a$ e $\overline{OC} = c$ e sobre o outro lado o segmento $\overline{OB} = b$;
2. traçar uma reta passando pelos pontos A e B ;
3. traçar uma paralela à \overleftrightarrow{AB} passando pelo ponto C , determinando na interseção com a semirreta \overrightarrow{OB} o ponto D ;
4. temos $\overline{BD} = d$ solução do problema.

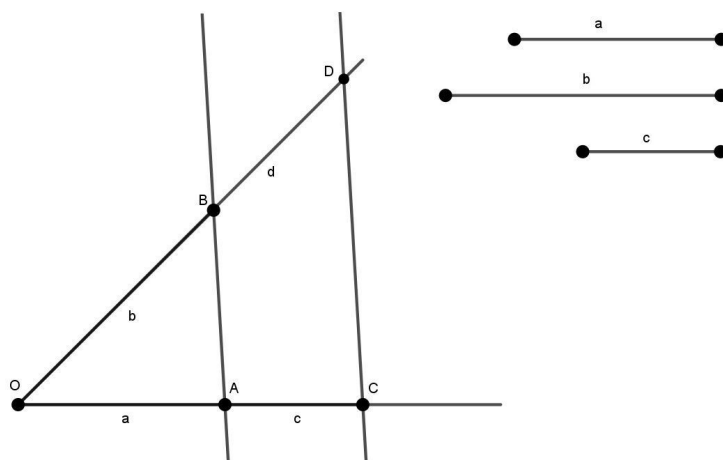


Figura 2.14: Construção da 4ª proporcional dos segmentos a , b e c .

A justificativa é direta e se dá pelo Teorema de Tales.

2.11 Construções utilizando um segmento unitário

Se a é a medida de um segmento, temos que a^2 é uma medida de área, porém \sqrt{a} ou $\frac{1}{a}$ (entre outras expressões) não tem sentido geométrico. Ao estabelecermos um segmento unitário $u = 1$, que será usado como unidade de medida na construção, essas expressões passam a fazer sentido. Por exemplo, podemos interpretar a expressão $x = \sqrt{a}$ como $x = \sqrt{a \cdot 1} = \sqrt{a} \cdot 1$.

2.11.1 Segmento de medida \sqrt{a}

Estabelecido um segmento unitário e dado um segmento de medida a , para construir um segmento de medida \sqrt{a} , devemos (Figura 2.15):

1. sobre uma reta r , determinar um segmento $\overline{AB} = a$ e um segmento $\overline{BC} = 1$;
2. através da construção da mediatriz, determinar o ponto M , ponto médio de AC ;
3. com centro em M , traçar, com raio \overline{MA} , a semicircunferência superior à r ;
4. traçar uma perpendicular à r passando por B , determinando na interseção com a semicircunferência o ponto D ;
5. $\overline{DB} = \sqrt{a}$ é a solução do problema.

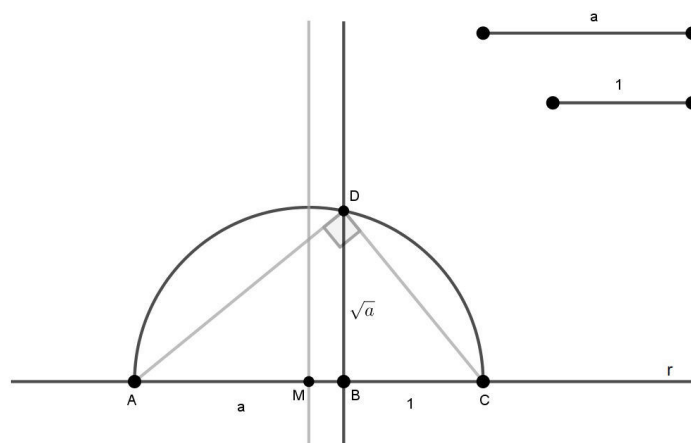


Figura 2.15: Construção de um segmento de medida \sqrt{a} a partir de dois segmentos de medidas a e 1 .

Justificativa. Como um triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo, o triângulo ADC é retângulo. Temos ainda que BD é a altura do triângulo, AB é a projeção de AD sobre AC e BC é a projeção de DC sobre AC . Daí, pelas relações métricas dos triângulos retângulos, temos $\overline{BD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$, logo $\overline{BD}^2 = a \cdot 1$ e, portanto, $\overline{BD} = \sqrt{a}$. \square

2.11.2 Segmento de medida a^2

Estabelecido um segmento unitário e dado um segmento de medida a , para construir o segmento de medida a^2 basta construir a quarta proporcional entre os segmentos de medidas 1, a e a (Figura 2.16).

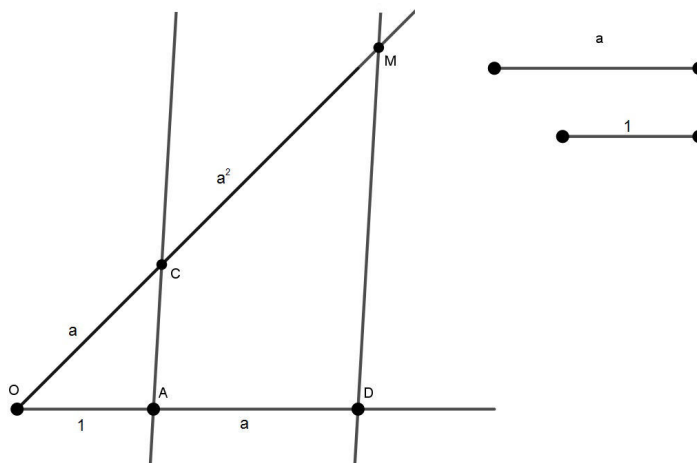


Figura 2.16: Construção do segmento de medida a^2 pela 4ª proporcional dos segmentos de medidas 1, a e a .

Justificativa. A justificativa se dá pelo fato que, $\frac{1}{a} = \frac{a}{CM}$, logo, $1 \cdot CM = a^2$ e portanto $CM = a^2$. □

2.11.3 Segmento de medida $\frac{1}{a}$

Estabelecido um segmento unitário e dado um segmento de medida a , para construir o segmento de medida $\frac{1}{a}$, devemos (Figura 2.17):

1. traçar uma reta r e sobre ela determinar o segmento $\overline{AH} = a$;
2. traçar por H uma perpendicular à reta r ;
3. determinar na reta perpendicular o segmento $\overline{HB} = 1$;
4. traçar a reta \overleftrightarrow{AB} ;
5. traçar uma reta perpendicular à reta \overleftrightarrow{AB} passando por B , determinando na interseção com a reta r o ponto C . Temos $\overline{HC} = \frac{1}{a}$.

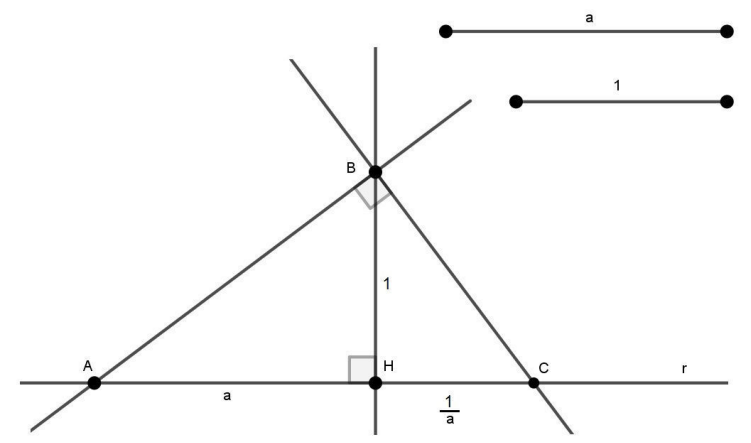


Figura 2.17: Construção do segmento $\overline{HC} = \frac{1}{a}$.

Justificativa. Por construção, o triângulo ABC é retângulo com $\widehat{ABC} = 90^\circ$ e altura $\overline{HB} = 1$, assim, pelas relações métricas dos triângulos retângulos, temos $\overline{BH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HC}$. Logo $1^2 = a \cdot \overline{HC}$ e, portanto, $\overline{HC} = \frac{1}{a}$. \square

2.11.4 Segmento de medida ab

Estabelecido um segmento unitário e dados dois segmentos de medidas a e b , para construir o segmento de medida ab , devemos (Figura 2.18):

1. traçar uma reta r e sobre ela determinar um segmento $\overline{AB} = b$;
2. traçar, por A , uma reta s e nela determinar os segmentos $\overline{AC} = 1$ e $\overline{AD} = a$;
3. traçar uma reta m pelos pontos B e C ;
4. traçar uma reta n paralela à reta m passando pelo ponto D , determinando na interseção com a reta r o ponto E . Temos $\overline{AE} = ab$.

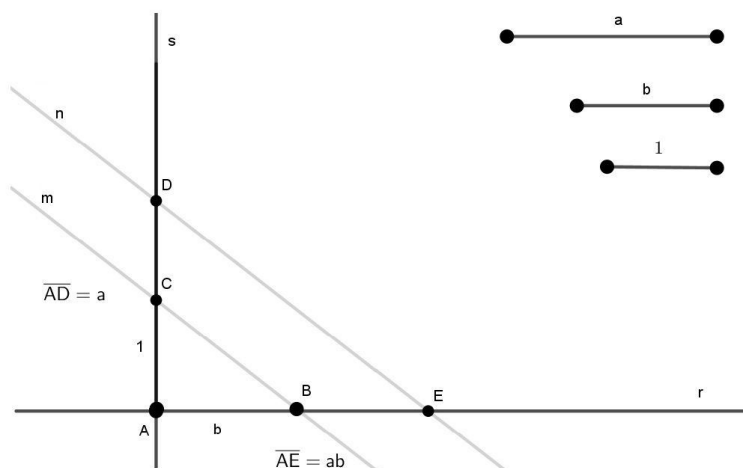


Figura 2.18: Construção do segmento de medida ab .

Justificativa. Pelo teorema de Tales, temos $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$, ou seja, $\frac{1}{a} = \frac{b}{\overline{AE}}$ e, portanto, $\overline{AE} = ab$. \square

3

Números construtíveis com régua e compasso

Neste capítulo, estudaremos extensões de corpos, em especial, as extensões de \mathbb{Q} em \mathbb{R} , e mostraremos a impossibilidade de cada um dos três problemas clássicos da geometria grega. Para isso, deixando um pouco de lado a formalidade e o rigor matemático, para que fique mais acessível a um futuro leitor, apresentaremos os conceitos de corpos, subcorpos e as extensões de corpos (mais especificamente as extensões de \mathbb{Q} em \mathbb{R}). Um estudo mais aprofundado nesses temas pode ser visto em [7].

Consideraremos a régua como um instrumento sem qualquer marca e, portanto, só nos permite ligar pontos do \mathbb{R}^2 .

Definição 3.1: Seja \mathcal{P} um subconjunto de $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) | a,b \in \mathbb{R}\}$ contendo pelo menos os pontos $(0,0)$ e $(1,0)$. Uma reta $r \subset \mathbb{R}^2$ está em \mathcal{P} quando existem dois pontos distintos A e B de r , tais que A e B pertencem a \mathcal{P} .

Quanto ao compasso, seu uso se restringe a traçar circunferências (ou arcos) conhecendo seu centro e um de seus pontos.

Definição 3.2: Uma circunferência \mathcal{C} está em \mathcal{P} quando o seu centro pertence a \mathcal{P} e um dos pontos de \mathcal{P} pertence à circunferência.

Operações elementares em \mathcal{P}

1. Interseção de retas em \mathcal{P} ;
2. Interseção de circunferências em \mathcal{P} ;
3. Interseção de uma reta em \mathcal{P} com uma circunferência em \mathcal{P} .

Definição 3.3: Um ponto $A = (a,b)$ de \mathbb{R}^2 é construtível quando pode ser obtido a partir de um número finito de operações elementares em \mathcal{P} .

Definição 3.4: Um número real a é construtível quando $(a,0)$ é construtível.

Teorema 3.1: Um ponto $A = (a,b)$ é construtível se, e só se, a e b são construtíveis.

Demonstração. Tomando o ponto $A = (a,b)$, podemos traçar uma reta paralela ao eixo y e outra paralela ao eixo x , ambas passando por A , determinando na interseção com o eixo x o ponto $(a,0)$ e na interseção com o eixo y o ponto $(0,b)$, respectivamente, implicando que a e b são construtíveis.

Por outro lado, se a e b são construtíveis, os pontos $(a,0)$ e $(0,b)$ são construtíveis. Traçando uma reta paralela ao eixo y passando por $(a,0)$ e uma reta paralela ao eixo x passando por $(0,b)$, temos na interseção o ponto (a,b) , implicando que A é construtível. \square

Construções elementares

1. Soma e subtração de segmentos (seção 2.1).
2. Se a e b são reais positivos construtíveis, então ab também é construtível (subseção 2.11.4).
3. Seja a um número real positivo construtível, então $\frac{1}{a}$ é construtível (subseção 2.11.3).
4. Seja a um número real positivo construtível, então \sqrt{a} é construtível (subseção 2.11.1).

Equação de uma circunferência \mathcal{C}

$$\mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, r > 0. \tag{3.1}$$

Sendo que, (x_0, y_0) são as coordenadas do centro da circunferência e r é a medida de seu raio (3.1).

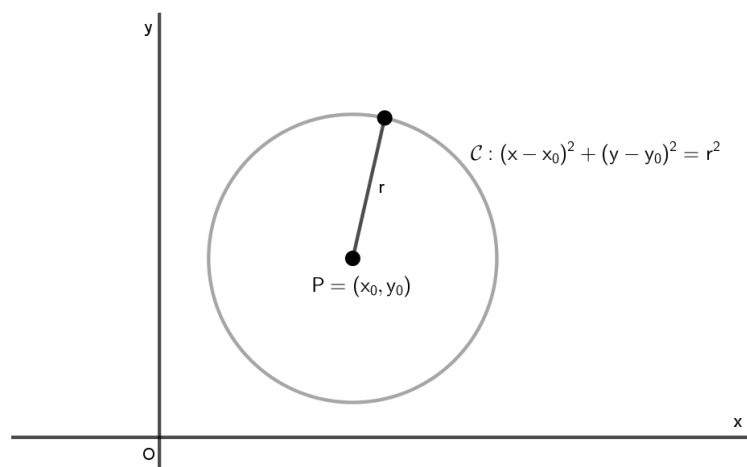


Figura 3.1: Equação da circunferência $\mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Equação de uma reta r

$$r : ax + by + c = 0 \tag{3.2}$$

Sendo que a e b são as coordenadas do vetor normal $\vec{u} = (a,b)$ à reta r . a e b não podem ser simultaneamente nulos (Figura 3.2).

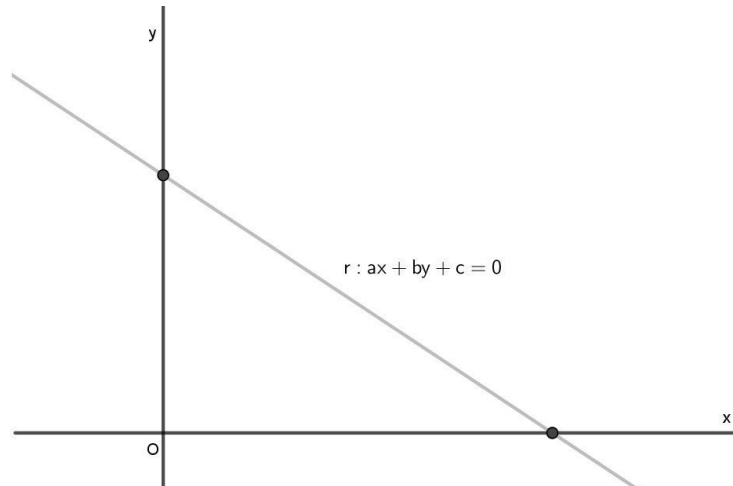


Figura 3.2: Equação da reta $r : ax + by + c = 0$.

Interseção entre duas retas

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

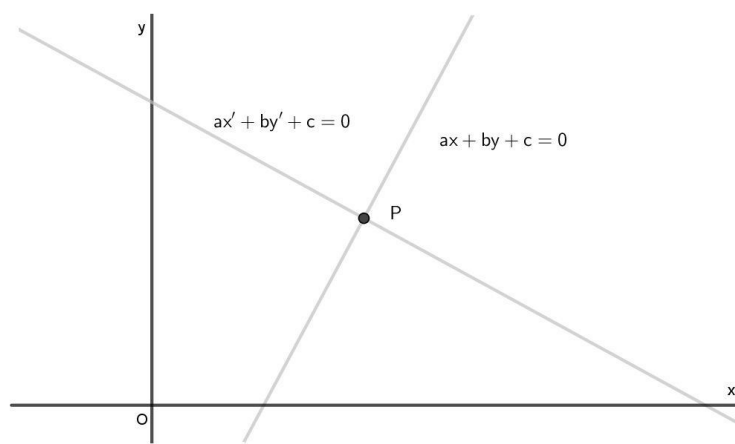


Figura 3.3: Interseção entre duas retas.

Duas retas podem ter 0 ou 1 ponto de interseção, logo, para determiná-lo, resolvemos equações do 1º grau.

Interseção entre uma reta e uma circunferência

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases}$$

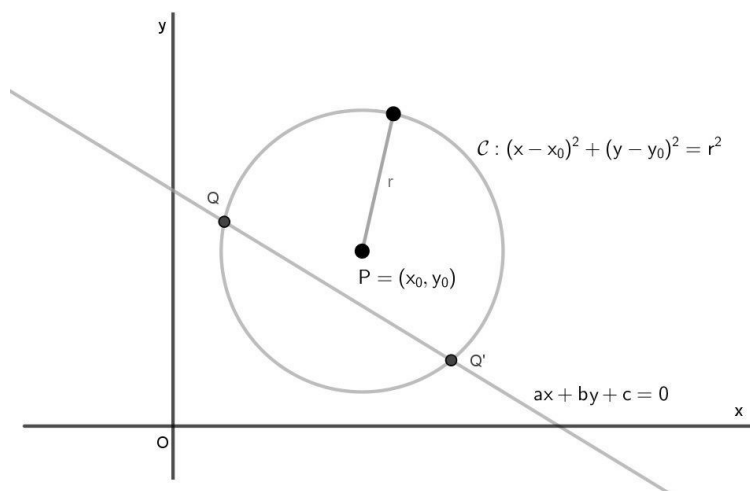


Figura 3.4: Interseção entre uma reta e uma circunferência.

Uma reta e uma circunferência podem ter 0, 1 ou 2 pontos de interseção, logo, para determiná-lo(s), resolvemos equações do 2º grau.

Interseção entre duas circunferências

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r_1^2 \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_2^2 \end{cases}$$

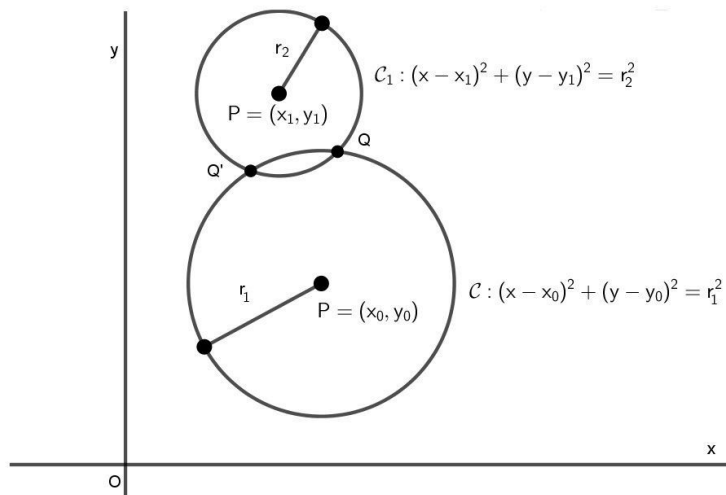


Figura 3.5: Interseção entre duas circunferências.

Duas circunferências podem ter 0, 1 ou 2 pontos de interseção, logo, para determiná-lo(s), resolvemos equações do 2º grau.

Corpos

Definição 3.5: Um conjunto \mathcal{F} (com pelo menos dois elementos), equipado com uma operação de soma $+$ e uma de multiplicação \cdot , diz-se um corpo quando as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. $a + b \in \mathcal{F}$ para todo $a, b \in \mathcal{F}$;
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ para todos $a, b, c \in \mathcal{F}$;
3. $\exists 0 \in \mathcal{F}$, tal que $0 + a = a + 0 = a$ para todo $a \in \mathcal{F}$;
4. para todo $a \in \mathcal{F}$, existe $-a \in \mathcal{F}$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$;
5. $a + b = b + a$ para todos $a, b \in \mathcal{F}$;
6. $a \cdot b \in \mathcal{F}$ para todos $a, b \in \mathcal{F}$;
7. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para todos $a, b, c \in \mathcal{F}$;
8. $a \cdot b = b \cdot a$ para todos $a, b \in \mathcal{F}$;
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ para todos $a, b, c \in \mathcal{F}$;
10. $\exists 1 \in \mathcal{F}$, tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathcal{F}$;
11. para todo $a \in \mathcal{F} - \{0\}$, existe $b \in \mathcal{F}$, tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

Exemplo 3.0.1: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são corpos. Já $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não são corpos.

Definição 3.6: Um subconjunto não vazio \mathcal{F}' de um corpo $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ é chamado subcorpo de \mathcal{F} quando $(\mathcal{F}', +, \cdot)$ é um corpo.

Exemplo 3.0.2: Os conjuntos \mathbb{Q} e $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ são subcorpos de \mathbb{R} .

Vamos à demonstração que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um subcorpo de \mathbb{R} . Para isso devemos mostrar a validade das 11 propriedades listadas na definição 3.5. Tomemos $a_1 + b_1\sqrt{2}$, $a_2 + b_2\sqrt{2}$ e $a_3 + b_3\sqrt{2}$ elementos de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

1. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ é fechado em relação à adição:

$$a_1 + b_1\sqrt{2} + a_2 + b_2\sqrt{2} = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}, \text{ como } (a_1 + a_2), (b_1 + b_2) \in \mathbb{Q}, \\ \text{então } (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

2. Associatividade da adição:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1\sqrt{2} + a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_3 + b_3\sqrt{2}) &= a_1 + b_1\sqrt{2} + a_2 + b_2\sqrt{2} + a_3 + b_3\sqrt{2} \\ &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2} + a_3 + b_3\sqrt{2}).\end{aligned}$$

3. Existência do elemento neutro da adição:

$$0 + a_1 + b_1\sqrt{2} = a_1 + b_1\sqrt{2} + 0 = a_1 + b_1\sqrt{2}.$$

4. Existência do inverso aditivo:

$$a_1 + b_1\sqrt{2} - (a_1 + b_1\sqrt{2}) = a_1 - a_1 + b_1\sqrt{2} - b_1\sqrt{2} = 0.$$

5. Comutatividade da adição:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) &= a_1 + b_1\sqrt{2} + a_2 + b_2\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2} + a_1 + b_1\sqrt{2} \\ &= (a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2}).\end{aligned}$$

6. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ é fechado em relação à multiplicação:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) &= a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{2} + a_2b_1\sqrt{2} + 2b_1b_2 = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + \\ &= (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}], \text{ visto que } (a_1a_2 + 2b_1b_2), (a_1b_2 + a_2b_1) \in \mathbb{Q}.\end{aligned}$$

7. Associatividade da multiplicação:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot [(a_2 + b_2\sqrt{2}) \cdot (a_3 + b_3\sqrt{2})] \\ &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot [a_2a_3 + a_2b_3\sqrt{2} + a_3b_2\sqrt{2} + 2b_2b_3] \\ &= a_1a_2a_3 + a_1a_2b_3\sqrt{2} + a_1a_3b_2\sqrt{2} + 2a_1b_2b_3 + a_2a_3b_1\sqrt{2} + 2a_2b_1b_3 + 2a_3b_1b_2 + \\ &+ 2b_1b_2b_3\sqrt{2} \\ &= (a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{2} + a_2b_1\sqrt{2} + 2b_1b_2) \cdot (a_3 + b_3\sqrt{2}) \\ &= [(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2})] \cdot (a_3 + b_3\sqrt{2}).\end{aligned}$$

8. Comutatividade da multiplicação

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) &= a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{2} + a_2b_1\sqrt{2} + 2b_1b_2 = a_2(a_1 + b_1\sqrt{2}) + \\ &= b_2\sqrt{2}(a_1 + b_1\sqrt{2}) = (a_2 + b_2\sqrt{2}) \cdot (a_1 + b_1\sqrt{2}).\end{aligned}$$

9. Distributividade da multiplicação em relação à adição:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot [(a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_3 + b_3\sqrt{2})] \\ &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot [a_2 + b_2\sqrt{2} + a_3 + b_3\sqrt{2}] \\ &= a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{2} + a_1a_3 + a_1b_3\sqrt{2} + a_2b_1\sqrt{2} + 2b_1b_2 + a_3b_1\sqrt{2} + 2b_1b_3 \\ &= a_1 \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) + a_1 \cdot (a_3 + b_3\sqrt{2}) + b_1\sqrt{2} \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) + b_1\sqrt{2} \cdot (a_3 + b_3\sqrt{2}) \\ &= (a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_3 + b_3\sqrt{2}).\end{aligned}$$

10. Existência do elemento neutro da multiplicação:

$$1 \cdot (a_1 + b_1\sqrt{2}) = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot b_1\sqrt{2} = (a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot 1 = a_1 + b_1\sqrt{2}.$$

11. Existência do inverso multiplicativo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 + b_1\sqrt{2}} &= \frac{1}{a_1 + b_1\sqrt{2}} \cdot \frac{a_1 - b_1\sqrt{2}}{a_1 - b_1\sqrt{2}} = \frac{a_1 - b_1\sqrt{2}}{a_1^2 - 2b_1^2} \\ &= \left(\frac{a_1}{a_1^2 - 2b_1^2} \right) + \left(-\frac{b_1}{a_1^2 - 2b_1^2} \right) \sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Logo, existe $b \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, tal que $a \cdot b = 1$.

Extensões de corpos

Definição 3.7: Uma extensão \mathcal{L} de \mathbb{Q} é um subcorpo de \mathbb{R} tal que $\mathcal{L} \supset \mathbb{Q}$.

Exemplo 3.0.3: Exemplos de extensões de \mathbb{Q} em \mathbb{R} :

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \\ | \\ \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\} \\ | \\ \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

Exemplo 3.0.4: Extensões de \mathbb{Q} em \mathbb{R} (via régua e compasso):

Sejam r_1, r_2, \dots, r_n números positivos, tais que $r_1 \in E_0 = \mathbb{Q}$, mas $\sqrt{r_1} \notin E_0$; $r_2 \in E_1 = \mathbb{Q}[r_1]$, mas $\sqrt{r_2} \notin E_1$; ...; $r_n \in E_{n-1} = \mathbb{Q}[\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}, \dots, \sqrt{r_{n-1}}]$, mas $\sqrt{r_n} \notin E_{n-1}$.

Temos as extensões:

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \\ | \\ \mathbb{Q}[\sqrt{r_1}, \dots, \sqrt{r_n}] = \{c_0 + c_1\sqrt{r_n} \mid c_0, c_1 \in E_{n-1}\} = E_n \\ | \\ \dots \\ | \\ \mathbb{Q}[\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}] = \{b_0 + b_1\sqrt{r_2} \mid b_0, b_1 \in E_1\} = E_2 \\ | \\ \mathbb{Q}[\sqrt{r_1}] = \{a_0 + a_1\sqrt{r_1} \mid a_0, a_1 \in \mathbb{Q}\} = E_1 \\ | \\ \mathbb{Q} = E_0 \end{array}$$

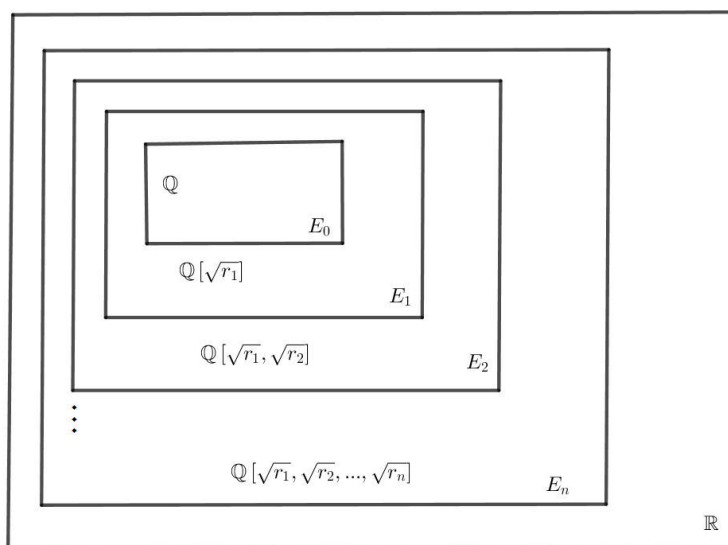


Figura 3.6: Extensões de \mathbb{Q} em \mathbb{R} (via régua e compasso).

Teorema 3.2: Se número real a é construtível, então existem r_1, r_2, \dots, r_n , como no Exemplo 3.0.4, tais que a pertence ao subcorpo $E_n = \mathbb{Q}[\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}, \dots, \sqrt{r_n}]$. Para mais detalhes, sugerimos a leitura do capítulo 5 do livro [7].

Teorema 3.3: Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ um polinômio com coeficientes inteiros. Se $x = \frac{a}{b}$, sendo que $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$ e $(a, b) = 1$, é uma raiz do polinômio p , então $a|a_0$ e $b|a_n$.

Demonstração. Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Como $x = \frac{a}{b}$ é uma raiz, temos:

$$p\left(\frac{a}{b}\right) = a_0 + a_1\left(\frac{a}{b}\right) + a_2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \dots + a_n\left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$

Multiplicando a equação por b^n ficamos com:

$$a_0b^n + a_1ab^{n-1} + a_2a^2b^{n-2} + \dots + a_na^n = 0 \quad (1).$$

De (1), podemos escrever:

$$a_na^n = -(a_0b^n + a_1ab^{n-1} + a_2a^2b^{n-2} + \dots + a_{n-1}a^{n-1}b)$$

o que implica em:

$$a_na^n = -(a_0b^{n-1} + a_1ab^{n-2} + a_2a^2b^{n-3} + \dots + a_{n-1}a^{n-1})b$$

e como $(a, b) = 1$, temos $b|a_n$.

De (1), podemos escrever também:

$$a_0b^n = -(a_1ab^{n-1} + a_2a^2b^{n-2} + a_3a^3b^{n-3} + \dots + a_na^n)$$

o que implica em:

$$a_0 b^n = -(a_1 b^{n-1} + a_2 a b^{n-2} + a_3 a^2 b^{n-3} + \dots + a_n a^{n-1}) a$$

e como $(a, b) = 1$, temos $a | a_0$.

□

Relações de Girard

Consideremos uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, cujas raízes são r_1 e r_2 .

Essa equação pode ser escrita na forma:

$$a(x - r_1)(x - r_2) = 0.$$

Temos então a identidade:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2), \forall x.$$

Isto é:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2, \forall x.$$

Portanto:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

Consideremos agora a equação do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$, cujas raízes são r_1 , r_2 e r_3 .

Essa equação pode ser escrita na forma:

$$a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0, \forall x.$$

Temos então a identidade:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3), \forall x.$$

Isto é:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3)x - r_1 r_2 r_3, \forall x.$$

Portanto:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}, r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 = \frac{c}{a} \text{ e } r_1 r_2 r_3 = -\frac{d}{a}.$$

De forma geral, dada a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$, cujas raízes são $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$, temos a identidade:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\dots(x - r_n) \\ &= a_n x^n - a_n(r_1 + r_2 + \dots + r_n)x^{n-1} + a_n(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n)x^{n-2} \\ &\quad - a_n(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n)x^{n-3} + \dots + (-1)^h a_n S_h x^{n-h} \\ &\quad + \dots + (-1)^n a_n (r_1 r_2 r_3 \dots r_n), \forall x. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + \dots + r_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}; \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ S_h &= (\text{soma de todos os } C_{n,h} \text{ produtos de } h \text{ raízes da equação}) = (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n}; \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ r_1 r_2 r_3 \dots r_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Corolário 3.1: Seja $x^3 + cx = d$ uma equação do terceiro grau. Suponha que α, β e γ sejam as raízes da equação. Então $d = \alpha\beta\gamma$.

Teorema 3.4: Seja $x^3 + cx = d$ uma equação do 3º grau, com $c, d \in \mathbb{Z}$ e seja \mathcal{F} uma extensão de \mathbb{Q} . Se $a + b\sqrt{r}$, com $a, b \in \mathcal{F}$, $r \in \mathcal{F} \cap \mathbb{R}_+$ e $\sqrt{r} \notin \mathcal{F}$, é uma raiz da equação, então $a - b\sqrt{r}$ também é uma raiz.

Demonstração. Elevando $x = a + b\sqrt{r}$ ao cubo, temos:

$$x^3 = a^3 + 3a^2(b\sqrt{r}) + 3ab^2r + b^3r\sqrt{r}.$$

Acrescentando $cx + d = c(a + b\sqrt{r}) + d$, teremos:

$$x^3 + cx + d = (a^3 + 3ab^2r + ac + d) + \sqrt{r}(3a^2b + b^3r + bc).$$

Sejam $A = a^3 + 3ab^2r + ac + d$, $B = (3a^2b + b^3r + bc) \in \mathcal{F}$. Assim:

$$x^3 + cx + d = A + B\sqrt{r} = 0, (\sqrt{r} \notin \mathcal{F}).$$

Se $B \neq 0$, então $\sqrt{r} = -\frac{A}{B}$. Contudo, $\sqrt{r} \notin \mathcal{F}$ e $-\frac{A}{B} \in \mathcal{F}$, portanto, não podemos ter $B \neq 0$, o que implica que A também é igual a zero. Logo:

$$a^3 + 3ab^2r + ac + d = 0 \text{ e } 3a^2b + b^3r + bc = 0.$$

Ao substituir $x = a - b\sqrt{r}$ na equação $x^3 + cx + d = 0$, conclui-se que $A - B\sqrt{r} = 0$. Como $A = B = 0$, a última igualdade é verdadeira. Portanto $a - b\sqrt{r}$ também é raiz.

□

3.1 Os três problemas clássicos gregos

Os três problemas clássicos gregos surgiram por volta do século V a.C. São eles:

1. A quadratura do círculo;
2. A duplicação do cubo;
3. A trissecção de um ângulo arbitrário.

Uma lenda conta que a origem do problema da duplicação do cubo surgiu a partir do aparecimento de uma peste que matou, talvez, um quarto da população em Atenas por volta do século V a.C. Diz-se que uma delegação foi enviada ao oráculo de Apolo em Delos para perguntar como essa peste poderia ser combatida. O oráculo respondeu que para isso o altar de Apolo, que era cúbico, deveria ser duplicado. Os Atenienses obedientemente dobraram as dimensões do altar, o que não funcionou visto que ao dobrar suas dimensões o altar não foi duplicado e sim octuplicado.

A demonstração algébrica da impossibilidade da resolução dos problemas da duplicação do cubo e da trissecção de um ângulo foi obtida em 1837 pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel. Já o problema da quadratura do círculo foi resolvido em 1882 pelo matemático alemão Ferdinand Von Lindemann ao demonstrar que π é transcendente (ou seja, não é solução de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros não todos nulos) o que implica a impossibilidade da construção em questão.

3.1.1 Problema da duplicação do cubo (problema deliano)

Esse problema consiste em construir, com régua não graduada e compasso, um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado. Assim, se a aresta do cubo inicial mede a , seu volume medirá a^3 . Logo, o novo cubo terá volume $2a^3$ e a aresta procurada medirá $a\sqrt[3]{2}$ (Figura 3.7).

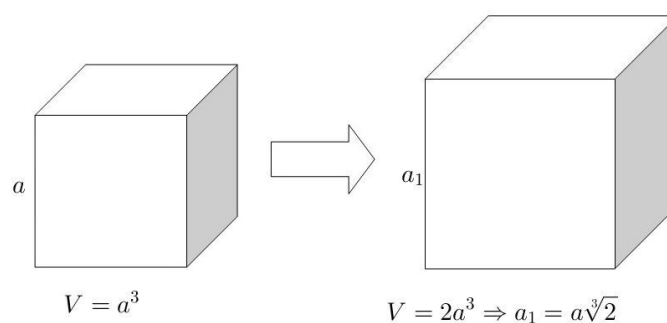


Figura 3.7: Problema da duplicação do cubo.

Teorema 3.5: O número $\sqrt[3]{2}$ não é um número construtível.

Demonstração. Vamos supor que $\sqrt[3]{2}$ é um número construtível. Logo, existe uma extensão E_n de \mathbb{Q} em \mathbb{R} construída via régua e compasso, tal que $\sqrt[3]{2} \in E_n - E_{n-1}$, sendo que $E_n = \mathbb{Q}[\sqrt{r_1}, \dots, \sqrt{r_n}]$ e $E_{n-1} = \mathbb{Q}[\sqrt{r_1}, \dots, \sqrt{r_{n-1}}]$.

Logo, existem $a, b \in E_{n-1}$, tais que $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{r_n}$, com $b \neq 0$.

É claro que $\sqrt[3]{2}$ é uma raiz da equação $x^3 - 2 = 0$. Pelo teorema 3.4, segue que $a - b\sqrt{r_n}$ também é raiz de $x^3 - 2 = 0$.

Ora, a função $f(x) = x^3 - 2$ é crescente e intercepta o eixo x apenas uma vez (Figura 3.8). Absurdo. □

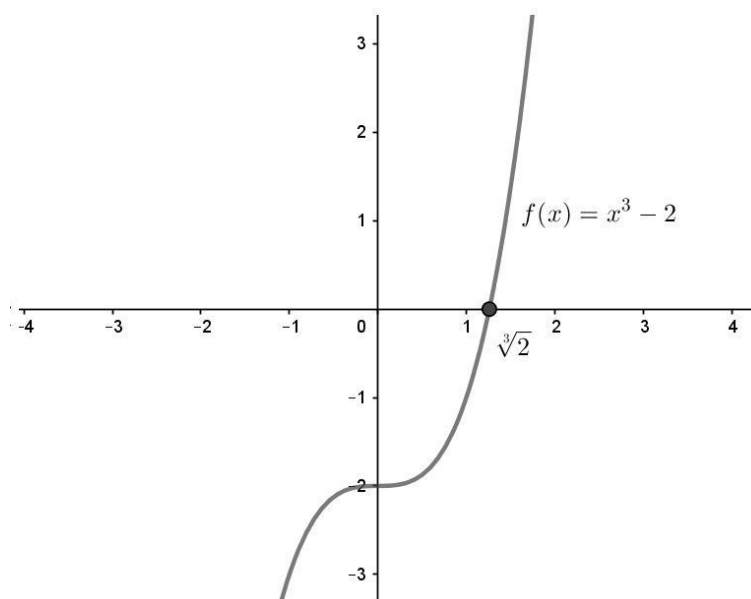


Figura 3.8: A função $f(x) = x^3 - 2$ tem apenas uma raiz.

Corolário 3.2: O número real $a\sqrt[3]{2}$ não é construtível.

Demonstração. Suponhamos que $b = a\sqrt[3]{2}$, com a e b construtíveis, é construtível.

Como $\sqrt[3]{2} = \frac{b}{a}$ e $\frac{b}{a}$ é construtível, então $\sqrt[3]{2}$ também é construtível. Absurdo. □

3.1.2 Problema da quadratura do círculo

Esse problema consiste em construir, com régua não graduada e compasso, um quadrado com área igual ao de um círculo dado. Logo, se o círculo tem raio igual a r , o problema consiste em construir um segmento de medida $r\sqrt{\pi}$ (Figura 3.9).

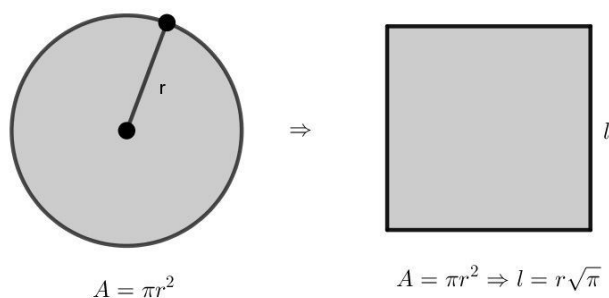


Figura 3.9: Problema da quadratura do círculo.

Definição 3.8: Um número real é algébrico se ele é raiz de uma equação $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$, com $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente todos nulos.

Caso a não seja raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros, então a é dito transcendente.

Exemplo 3.1.1: Exemplos de números algébricos:

1. racionais;
2. $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$;
3. $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, visto que:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \\ x^2 &= 2 + \sqrt{3}, \\ x^2 - 2 &= \sqrt{3}, \\ x^2 &= 2 + \sqrt{3}, \\ x^4 - 4x^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Proposição 3.1: Todo número construtível é algébrico.

A demonstração deste teorema pode ser visto em [4].

Teorema 3.6: O número π é transcendente.

A demonstração desse teorema pode ser visto em [16].

Corolário 3.3: O número $\sqrt{\pi}$ não é construtível.

Demonstração. Vamos supor que o número $\sqrt{\pi}$ é construtível. Então π também é construtível, o que implica que π é um número algébrico. Absurdo. \square

Corolário 3.4: Não é possível resolver o problema da quadratura do círculo.

Demonstração. Vamos supor que $a = r\sqrt{\pi}$, com a e r construtíveis, é construtível. Como $\frac{a}{r} = \sqrt{\pi}$ e $\frac{a}{r}$ é construtível, então $\sqrt{\pi}$ também o é. Absurdo. \square

3.1.3 Problema da trissecção de um ângulo arbitrário

Esse problema consiste em, com régua não graduada e compasso, dividir um ângulo arbitrário dado em três ângulos de medidas iguais (Figura 3.10). Vale ressaltar que a trissecção de alguns ângulos, como por exemplo o de 90° , é possível.

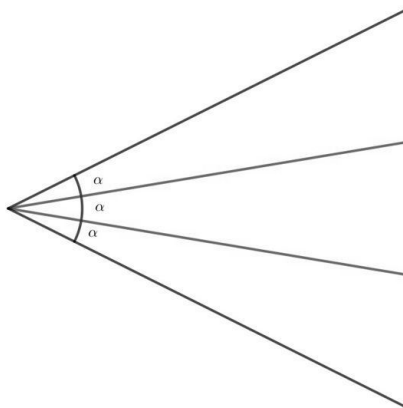


Figura 3.10: Problema da trissecção de um ângulo arbitrário.

Trissecção do ângulo de 60°

Só é possível dividir o ângulo de 60° em três partes iguais se, e só se, $(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$ é construtível. Vamos mostrar que $\cos 20^\circ$ não é construtível.

Inicialmente, verificaremos que $\cos 20^\circ$ é raiz da equação $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \cos(20^\circ + 40^\circ) \\ \frac{1}{2} &= \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ, \\ \frac{1}{2} &= \cos 20^\circ \cos(20^\circ + 20^\circ) - \sin 20^\circ \sin(20^\circ + 20^\circ), \\ \frac{1}{2} &= \cos 20^\circ (\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ) - \sin 20^\circ (2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ), \\ \frac{1}{2} &= \cos^3 20^\circ - \cos 20^\circ \sin^2 20^\circ - 2 \sin^2 20^\circ \cos 20^\circ, \\ \frac{1}{2} &= \cos^3 20^\circ - \cos 20^\circ (1 - \cos^2 20^\circ) - 2(1 - \cos^2 20^\circ) \cos 20^\circ, \\ \frac{1}{2} &= \cos^3 20^\circ - \cos 20^\circ + \cos^3 20^\circ - 2 \cos 20^\circ + 2 \cos^3 20^\circ, \\ \frac{1}{2} &= 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ. \end{aligned}$$

Temos então:

$$\begin{aligned} 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ - \frac{1}{2} &= 0 \\ 8(\cos 20^\circ)^3 - 6(\cos 20^\circ) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $\cos 20^\circ$ é solução da equação $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

Observação: Isso mostra que nem todo número algébrico é construtível.

Comentários a respeito da equação $8x^3 - 6x - 1 = 0$:

1. aplicando o teorema das raízes racionais, pode-se verificar que $8x^3 - 6x - 1 = 0$ não possui raízes racionais;
2. é conhecido que as raízes da equação do terceiro grau $x^3 + px + q = 0$ são números reais distintos quando $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ (isso pode ser visto em [11]);
3. se x_1, x_2 e x_3 são as três raízes distintas de $x^3 - \frac{3x}{4} - \frac{1}{8} = 0$, então $x_1x_2x_3 = \frac{1}{8}$.

Teorema 3.7: O número real $\cos 20^\circ$ não é construtível.

Demonstração. Vamos supor que $\cos 20^\circ$ é construtível. Deste modo, existe uma extensão E_n de \mathbb{Q} , tal que $\cos 20^\circ \in E_n - E_{n-1}$. Logo, existem $a, b \in E_{n-1}$, tais que $\cos 20^\circ = a + b\sqrt{r_n}$, com $b \neq 0$.

Pelo teorema 3.4, constatamos que $a - b\sqrt{r_n}$ também é raiz de $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

Note que $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{a^2 - b^2r_n}$ também é raiz.

Existe um natural t , com $1 \leq t \leq n - 1$, tal que $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{a^2 - b^2r_n} \in E_t - E_{t-1}$.

Assim, existem $c, d \in E_{t-1}$, tais que $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{a^2 - b^2r_n} = c + d\sqrt{r_t}$.

Ora, pelo teorema 3.4, $c - d\sqrt{r_t} \in E_{t-1}$, também é raiz da equação do terceiro grau $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Absurdo, pois a equação teria quatro raízes. \square

Dobraduras

O interesse dos matemáticos pela geometria das dobraduras tem início no século XX. Uma publicação de grande relevância desta época é a obra *Geometric Exercises in Paper Folding* do matemático indiano Tandalam Sundara Rao, publicada em inglês em 1901.

Ao Final da década de 1970, Humiaki Huzita, matemático nascido no Japão e emigrado para a Itália, descreve seis axiomas conhecidos como axiomas de Huzita, que podem ser entendidos como operações básicas que definem através de uma única dobra (vinco) as várias combinações de incidências entre pontos e retas já existentes. Esses axiomas deram origem a primeira descrição formal dos tipos de construções geométricas possíveis com origami.

Em 2002, Koshiro Hatori apresentou uma dobragem que não era descrita pelos axiomas de Huzita dando origem a um sétimo axioma. Estes sete axiomas passaram a se chamar axiomas de Huzita-Hatori.

A busca por novos axiomas terminou em 2003, após o físico americano Robert J. Lang publicar, na sua página da internet [10], um estudo que mostra que não seriam necessários mais axiomas.

4.1 Axiomas de Huzita-Hatori

Na Geometria de dobraduras, as retas são formadas pelos vincos ou dobras que são as marcas deixadas no papel resultantes das dobraduras (ato de dobrar). Nas interseções de dois vincos temos os pontos.

Os sete axiomas de Huzita-Hatori definem o que é possível construir com uma única dobragem, através da incidência de pontos e retas.

Axioma 4.1: Dados dois pontos, P_1 e P_2 , há uma dobra que passa pelos dois pontos (Figura 4.1).

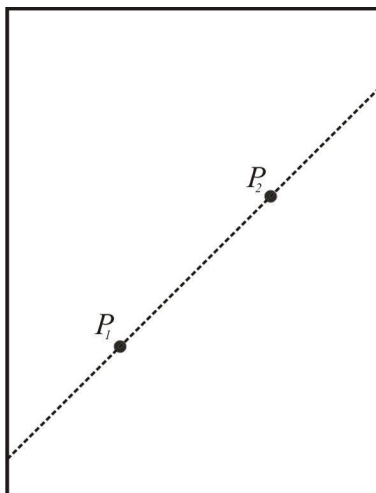


Figura 4.1: Primeiro axioma de Huzita-Hatori.

Axioma 4.2: Dados dois pontos, P_1 e P_2 , há uma dobradura que os torna coincidentes (Figura 4.2).

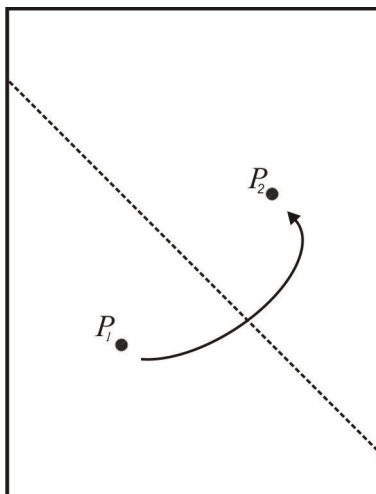


Figura 4.2: Segundo axioma de Huzita-Hatori.

Axioma 4.3: Dadas duas retas, l_1 e l_2 , há uma dobradura que as torna coincidentes (Figura 4.3).

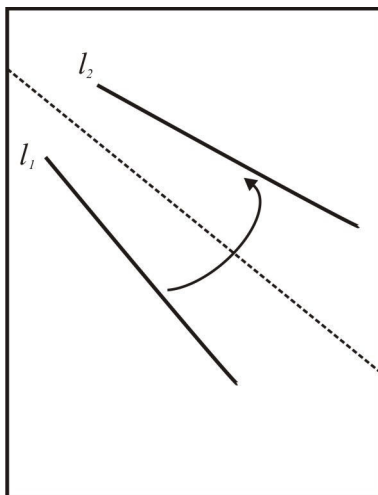


Figura 4.3: Terceiro axioma de Huzita-Hatori.

Axioma 4.4: Dados um ponto P e uma reta l , há uma dobra perpendicular à l que passa por P (Figura 4.4).

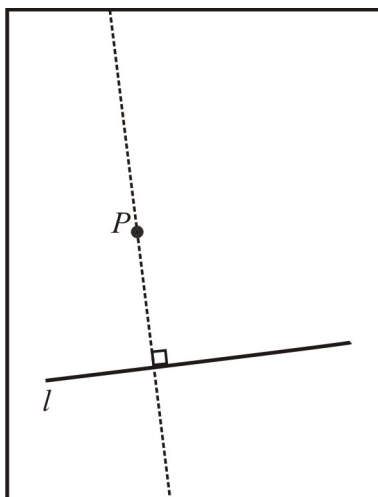


Figura 4.4: Quarto axioma de Huzita-Hatori.

Axioma 4.5: Dados dois pontos, P_1 e P_2 , e uma reta l , se a distância de P_1 a P_2 for igual ou superior a distância de P_2 a l , há uma dobradura que faz incidir P_1 em l cuja dobra passa por P_2 (Figura 4.5).

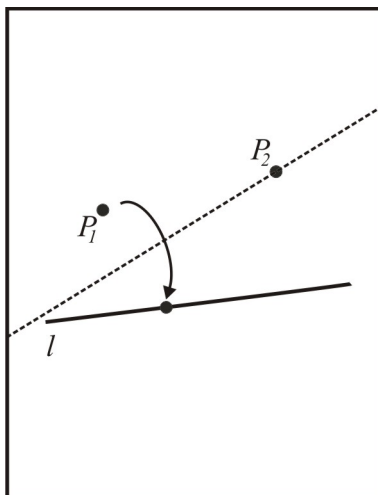


Figura 4.5: Quinto axioma de Huzita-Hatori.

Axioma 4.6: Dados dois pontos, P_1 e P_2 , e duas retas, l_1 e l_2 , se as retas não forem paralelas, há uma dobradura que faz incidir P_1 em l_1 e P_2 em l_2 (Figura 4.6).

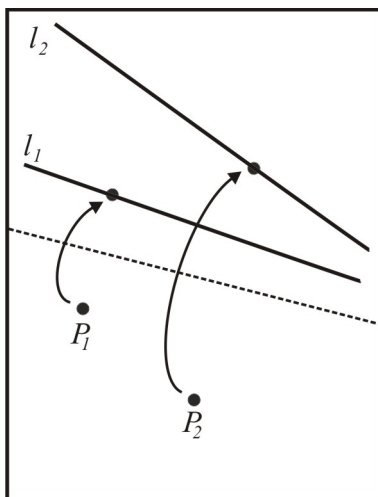


Figura 4.6: Sexto axioma de Huzita-Hatori.

Axioma 4.7: Dado um ponto P , e duas retas, l_1 e l_2 , se as retas não forem paralelas, há uma dobradura que faz incidir P em l_1 tal que a dobra é perpendicular a l_2 (Figura 4.7).

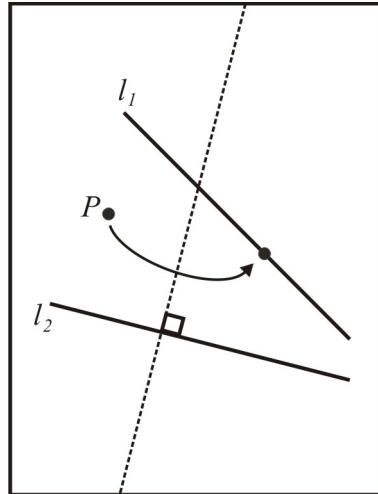


Figura 4.7: Sétimo axioma de Huzita-Hatori.

4.2 Construções geométricas com dobraduras

Inicialmente, vamos a algumas definições e propriedades que serão utilizadas nas construções geométricas com dobraduras, bem como em suas justificativas.

Isometrias

Definição 4.1: Isometrias são transformações no plano que preservam distâncias, isto é, se T é uma isometria, para qualquer pontos de A e B , vale a relação $\overline{AB} = \overline{T(A)T(B)}$.

Uma isometria (T) possui as seguintes propriedades (suas demonstrações podem ser vistas em [18]):

Propriedade 1: T leva pontos colineares em pontos colineares. Além disso, se A , B e C são pontos tais que B está entre A e C , então $T(B)$ está entre $T(A)$ e $T(C)$.

Propriedade 2: T leva retas em retas.

Propriedade 3: T preserva a medida de ângulos.

Propriedade 4: T preserva o paralelismo entre retas e, como consequência, T leva semirretas em semirretas, ângulos em ângulos e segmentos em segmentos.

Propriedade 5: T leva circunferências em circunferências.

Reflexões em retas

Definição 4.2: Consideremos uma reta r . A isometria dada pela transformação, que leva cada ponto P do plano em seu simétrico P' em relação à reta r , é chamada reflexão na reta r , ou simetria de reflexão na reta r , a qual vamos indicar R_r . A reta r é chamada eixo de reflexão. Na Geometria das Dobraduras as dobras (ou vincos) são os eixos de reflexão (Figura 4.8).

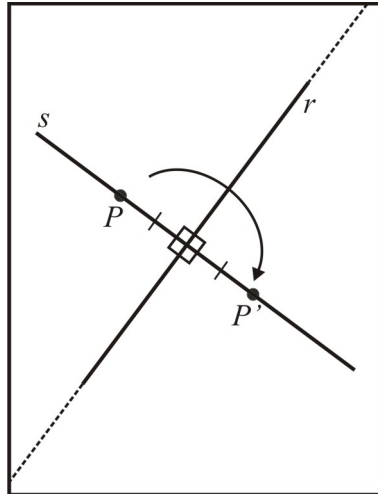


Figura 4.8: Reflexão em relação à reta r levando o ponto P ao ponto P' , simétrico de P .

Além das propriedades das isometrias, as reflexões em retas possuem as seguintes propriedades:

Propriedade 6: $R_r(P) = P$ se e somente se P é um ponto de r .

Propriedade 7: Se s é uma reta perpendicular à reta r , então $R_r(s) = s$.

Propriedade 8: $R_r(R_r(P)) = P$, para todo ponto P do plano.

Propriedade 9: A transformação inversa de uma reflexão numa reta r é uma reflexão nessa mesma reta.

Para uma referência sobre reflexões em reta, incluindo as demonstrações de suas propriedades, consulte [12].

4.2.1 Perpendicular a uma reta r dada passando por um ponto $G \notin r$.

Pra obter uma dobra perpendicular a uma reta r dada passando por um ponto $G \notin r$, devemos (Figura 4.9):

1. fazer uma dobradura de tal forma que o ponto G pertença a dobra e a reta r se sobreponha;
2. desdobrar.

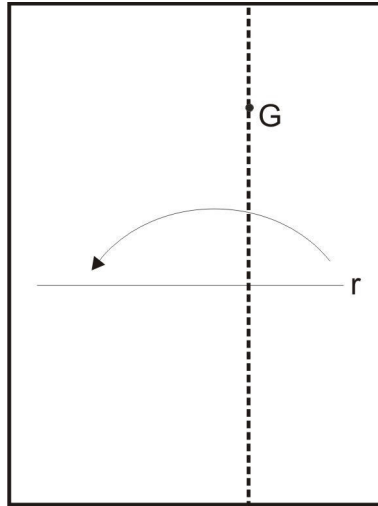


Figura 4.9: Perpendicular a uma reta r dada passando por um ponto $G \notin r$.

Justificativa. Como a reflexão preserva ângulos, ao sobrepormos r sobre r , os dois ângulos obtidos possuem a mesma medida. Como a soma desses ângulos é igual a 180° , temos que cada um deles mede 90° . \square

4.2.2 Mediatriz de um segmento AB

Para dobrarmos a mediatriz de um segmento AB , devemos (Figura 4.10):

1. fazer uma dobradura de tal forma que os pontos A e B se sobreponham;
2. desdobrar.

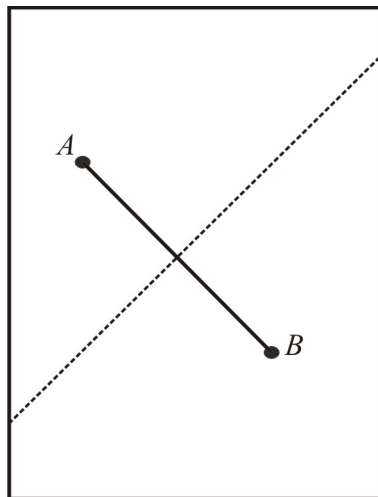


Figura 4.10: Mediatriz de AB .

Justificativa. Sejam r a reta obtida na construção e O a sua interseção com AB . Pela justificativa anterior, sabemos que r e AB são perpendiculares e pelas propriedades das reflexões em reta, temos $\overline{AO} = \overline{OB}$. Se Q é um ponto da reta r , então os triângulos QOA e QOB são congruentes pelo caso LAL, implicando que $\overline{QA} = \overline{QB}$, ou seja, Q equidista de A e de B e, portanto, está na mediatriz (Figura 4.11). \square

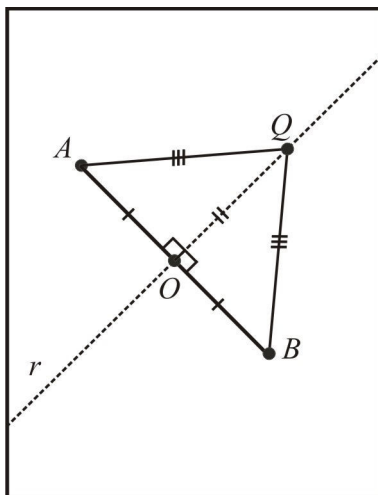


Figura 4.11: Como Q e O equidistam de A e de B , r é a mediatriz de AB .

4.2.3 Bissetriz

Para dobrarmos a bissetriz de um ângulo $\angle ABC$ dado, devemos (Figura 4.12):

1. fazer uma dobradura de tal forma que as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} se sobreponham;
2. desdobrar.

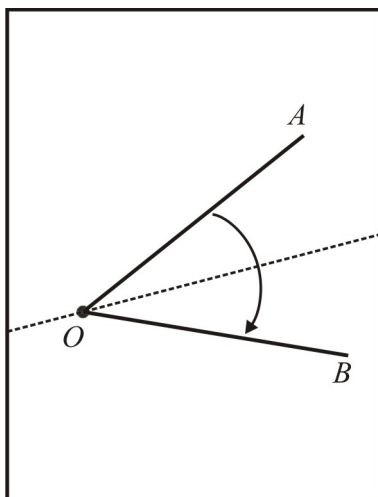


Figura 4.12: Bissetriz do ângulo $\angle AOB$.

Justificativa. Sejam m a dobra obtida na construção, Q um ponto de \overrightarrow{OA} , Q' a imagem de Q em \overrightarrow{OB} obtida pela reflexão e P a interseção de m e QQ' . Pela justificativa anterior (mediatriz) temos que $\overline{QP} = \overline{PQ'}$, $\widehat{OPQ} = \widehat{OPQ'} = 90^\circ$. Assim, por LAL, os triângulos OPQ e OPQ' são congruentes implicando que $\widehat{QOP} = \widehat{Q'OP}$. Logo, m é bissetriz do ângulo $\angle AOB$ (Figura 4.13). \square

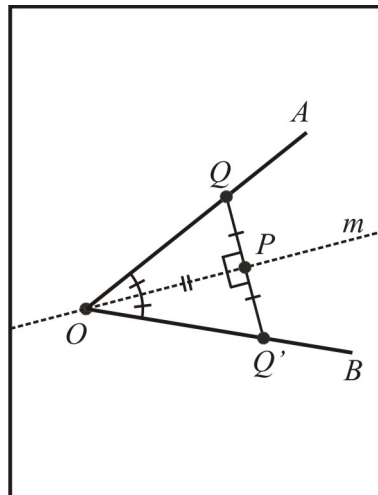


Figura 4.13: Como $\widehat{QOP} = \widehat{Q'OP}$, m é a bissetriz do ângulo $\angle AOB$.

4.2.4 Triângulo equilátero com medida igual ao lado menor da folha.

Para dobrar um triângulo equilátero ABC , devemos (Figura 4.14):

1. marcar nas pontas da base da folha os pontos A e B ;
2. dobrar a folha verticalmente ao meio, encontrando assim a mediatriz da base AB ;
3. fazer uma dobra por A levando B até a mediatriz. O ponto refletido de B sobre a mediatriz será o ponto C ;
4. desdobrar;
5. fazer uma dobra por AC , desdobrar, e outra por BC , desdobrar. O triângulo ABC é equilátero.

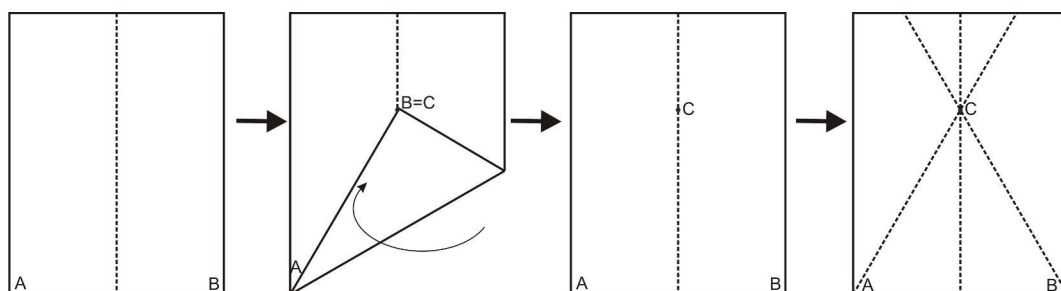


Figura 4.14: Triângulo equilátero ABC .

Justificativa. Por construção a reta que passa por C é a mediatriz do segmento AB e o ponto C é o ponto B refletido, pela dobra, sobre a mediatriz. Pelas propriedades das reflexões em reta, temos $\overline{AB} = \overline{AC}$. Como C pertence a mediatriz do segmento AB , temos $\overline{AC} = \overline{BC}$ e, portanto, A , B e C são vértices de um triângulo equilátero.

□

4.2.5 Hexágono Regular

Para obtermos um hexágono regular $ABCDEF$, devemos (Figura 4.15):

1. dobrar a folha ao meio verticalmente;
2. sem desdobrar a folha, dobrá-la ao meio horizontalmente;
3. sem desfazer as dobras anteriores, dobrar um triângulo equilátero;
4. ao desdobrar, teremos quatro triângulos equiláteros congruentes: AFO , BCO , EFO e DCO (figura D);
5. fazer uma dobra por A e B e outra por E e D , obtendo os triângulos equiláteros AOB e EOD (figura E);
6. os seis triângulos equiláteros formam o hexágono regular $ABCDEF$ (figura F).

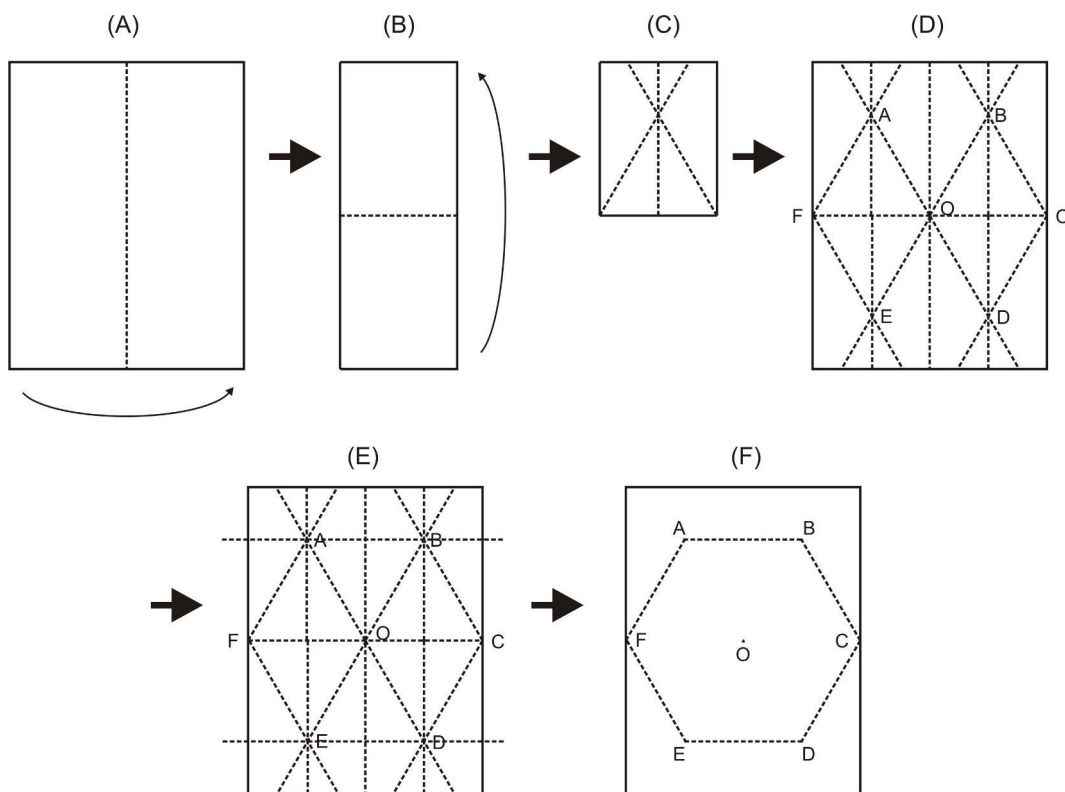


Figura 4.15: Hexágono regular $ABCDEF$.

Justificativa. Foram dobrados quatro triângulos equiláteros congruentes: AFO , BCO , EFO e DCO . Além disso, como as dobras verticais são equidistantes, temos $\overline{AB} = \overline{ED} = \overline{FO}$, implicando que os triângulos AOB e EOD são equiláteros e congruentes aos outros citados anteriormente. Esses seis triângulos equiláteros formam um hexágono regular de lado AB .

□

4.2.6 Soma dos ângulos internos de um triângulo

Para mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer ABC é igual a 180° , devemos (Figura 4.16):

1. recortar um triângulo qualquer de vértices A , B e C ;
2. determinar o ponto médio M de AB . Para isso, dobrando o papel, levar o ponto B ao ponto A , determinando na interseção da dobra com o lado AB o ponto M (Figura A). Desdobrar;
3. determinar o ponto médio N de AC . Para isso, dobrando o papel, levar o ponto C ao ponto A , determinando na interseção da dobra com o lado AC o ponto N (Figura A). Desdobrar;
4. fazer uma dobra por M e N , levando o vértice A ao lado BC (Figura C). A possibilidade desta dobra está associada ao fato de que MN é a base média do triângulo ABC e, portanto, a distância do vértice A até o segmento MN é igual a distância do segmento MN até o lado BC . Assim, ao realizar a dobra, o vértice A incidirá sobre o lado BC ;
5. fazer uma dobra por M , levando o vértice B ao vértice A (Figura D);
6. fazer uma dobra por N , levando o vértice C ao vértice A (Figura D);
7. os ângulos A , B e C formam um ângulo raso e, portanto, juntos, medem 180° (Figura E).

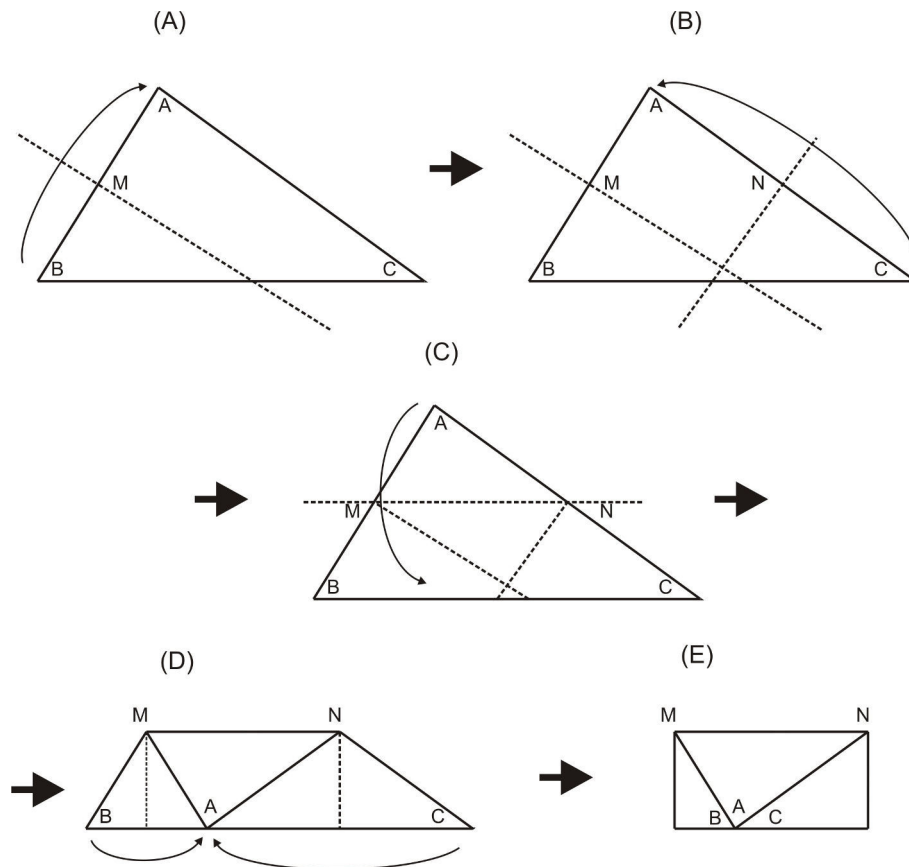


Figura 4.16: Os três ângulos internos de um triângulo formam um ângulo raso.

Justificativa. M e N são pontos médios de AB e AC respectivamente (subseção 4.2.2), logo $\overline{MA} = \overline{MB}$ e $\overline{NA} = \overline{NC}$ o que implica que os triângulos BMA e ANC (figura 4.16 D) são isósceles e, portanto, $\widehat{MBA} = \widehat{MAB}$ e $\widehat{NAC} = \widehat{NCA}$. Isso, associado ao fato dos ângulos $\angle MAB$, $\angle MAN$ e $\angle NAC$ formarem um ângulo raso, mostra que a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180° (Figura 4.17).

□

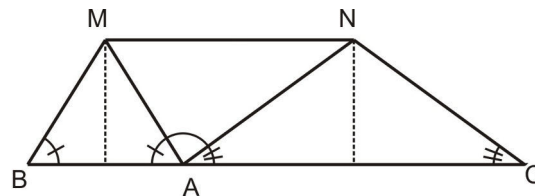


Figura 4.17: A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

4.2.7 Obtenção de uma folha quadrada a partir de uma folha retangular

Para obtermos uma folha quadrada a partir de uma folha retangular de extremidades A , B , C e D , devemos (Figura 4.18):

1. fazer uma dobra por D , levando a extremidade C até o lado AD ;

- recortar a parte da folha que não ficou sobreposta. A parte restante forma um quadrado.

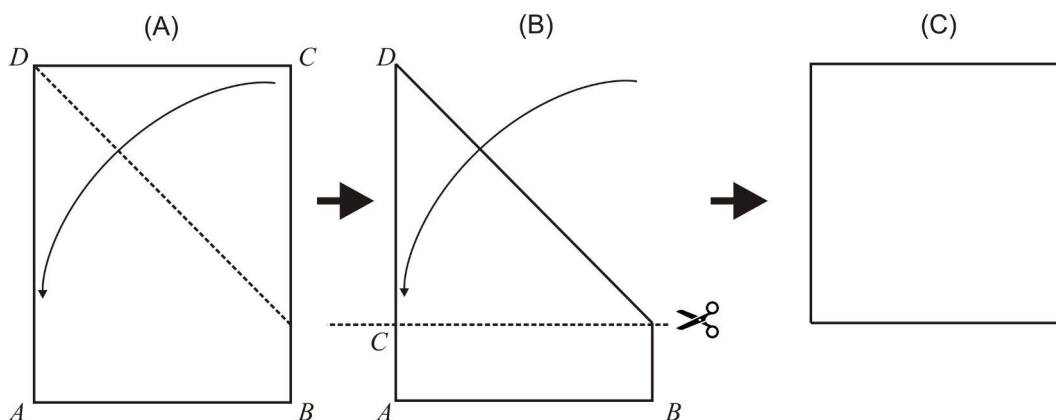


Figura 4.18: Obtenção de uma folha quadrada a partir de uma folha retangular.

Justificativa. Ao fazermos uma dobra por D , levando C ao lado AD , determinamos na sobreposição de B o ponto E e na interseção da dobra com o lado CB o ponto F . Pelas propriedades das reflexões em reta, temos que $\widehat{DEF} = \widehat{DCF} = \widehat{EDC} = 90^\circ$ e $\overline{CD} = \overline{DE}$. Como um quadrilátero com três ângulos internos retos e dois lados consecutivos congruentes é um quadrado, os vértices C, D, E e F são os vértices de um quadrado (Figura 4.19).

□

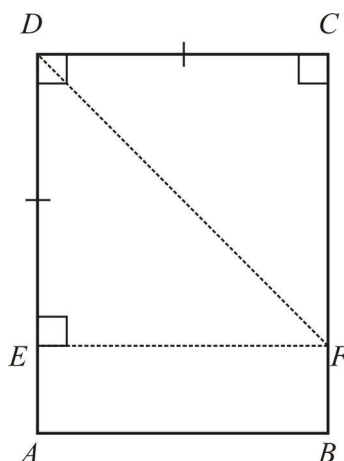


Figura 4.19: Os vértices C, D, E e F formam um quadrado.

4.2.8 Obtendo dois segmentos em razão áurea:

Dizemos que um ponto C divide um segmento AB na razão áurea (também conhecida como razão de ouro, divina proporção, proporção em extrema razão ou divisão em média e extrema razão, entre outros nomes) se $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$. Esta razão é geralmente representada pela letra grega ϕ (Figura 4.20).



Figura 4.20: Um ponto C divide o segmento AB na razão áurea se $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

Tomando $\overline{AC} = a$ e $\overline{BC} = b$, com $a > b$, temos $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ que é equivalente à $a^2 - ba - b^2 = 0$ e, portanto, $a = \frac{b \pm b\sqrt{5}}{2}$. Considerando apenas a raiz positiva, ficamos com $a = \frac{b + b\sqrt{5}}{2}$. Logo, $a = \frac{b(\sqrt{5} + 1)}{2}$ implicando que $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, ou seja, dois segmentos estão em razão áurea se a razão entre suas medidas é igual a $\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

Para obtermos dois segmentos em razão áurea (ϕ), devemos (Figura 4.21):

1. obter uma folha quadrada;
2. assinalar as extremidades inferiores da folha por A e B (Figura A);
3. dobrar a folha ao meio horizontalmente, determinando nas extremidade da dobra os pontos D e C . Desdobrar (Figura A);
4. fazer uma dobra por A e C . Desdobrar (Figuras B e C);
5. fazer uma dobradura sobrepondo o segmento BC à dobra AC . O ponto sobreposto por B será o ponto E . Desdobrar (Figuras D e E);
6. fazer uma dobradura sobrepondo o lado AB à dobra AC . O ponto que sobrepõe o ponto E será o ponto F . Desdobrar (Figuras F e G);
7. Os segmentos AF e FB estão em razão áurea, ou seja, $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \phi$.

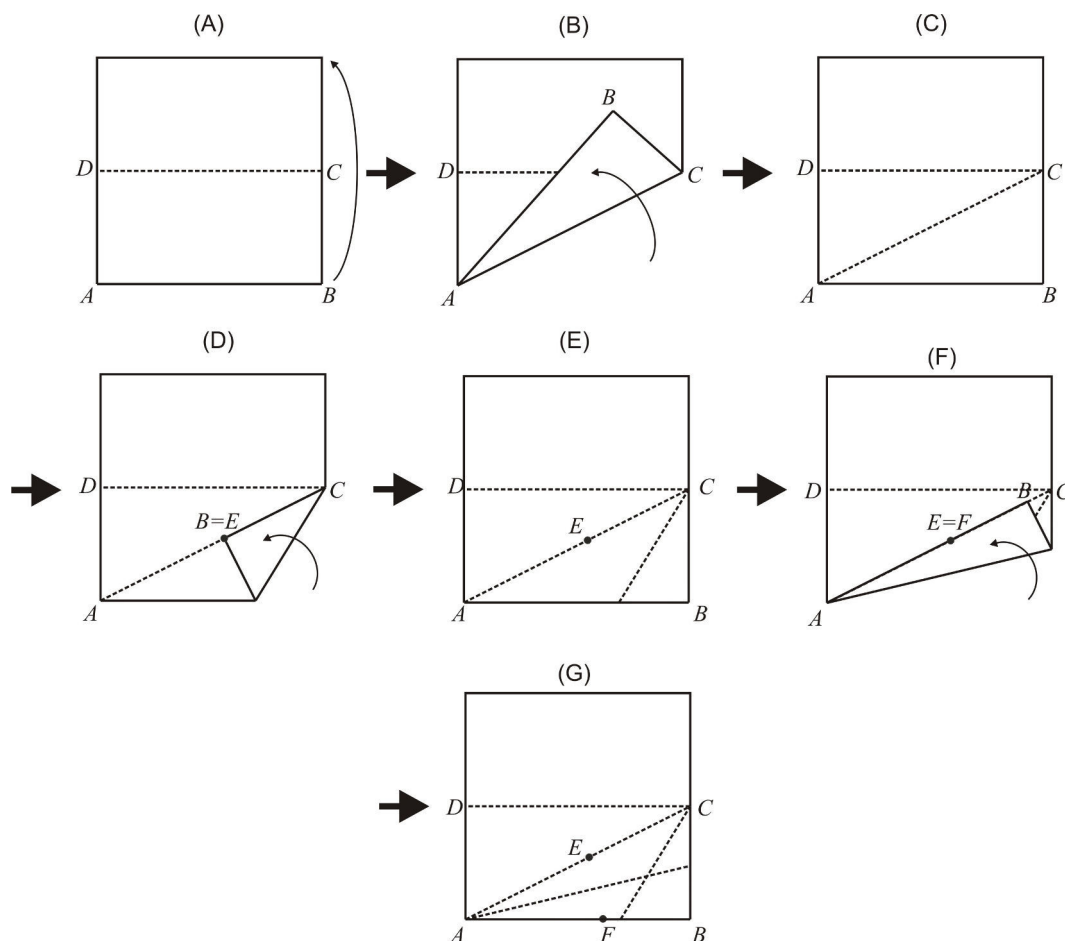


Figura 4.21: Obtenção de dois segmentos AF e FB tal que $\frac{AF}{FB} = \phi$.

Justificativa. Sejam A e B as extremidades inferiores de uma folha quadrada. Ao dividirmos a folha ao meio, obtemos os pontos D e C , onde $\overline{CB} = \frac{\overline{AB}}{2}$. Seja o ponto E a sobreposição do ponto B ao fazermos uma dobradura levando o segmento BC sobre o segmento AC . Pelas propriedades das reflexões em reta, temos $\overline{EC} = \overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC , temos $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. Como $\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2}$, então $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{4} = \frac{5}{4}\overline{AB}^2$, o que implica em $\overline{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AB}$.

Por outro lado $\overline{AE} = \overline{AC} - \overline{CE} = \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{AB} - \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{AB}$, logo $\overline{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overline{AE}$.

Ao fazermos uma dobradura levando o segmento AB sobre o segmento AC , determinamos o ponto $F \in AB$ que sobrepõe E . Pelas propriedades das reflexões em reta, temos $\overline{AE} = \overline{AF}$.

Por fim, como $\overline{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overline{AE}$ e $\overline{AE} = \overline{AF}$, então $\overline{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overline{AF}$ e

$$\text{portanto } \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

□

4.2.9 Trisseccção de um ângulo e duplicação do cubo

Como visto no capítulo 3, a trisseccção de um ângulo arbitrário e a duplicação do cubo fazem parte dos problemas clássicos gregos antigos. Não é possível realizar estas construções utilizando apenas régua e compasso, porém, é possível resolver esses problemas através de dobraduras (um estudo aprofundado sobre as possibilidades de construções através da geometria das dobraduras pode ser visto em [19]).

Trisseccção de um ângulo agudo

A construção que será apresentada é creditada a Hisashi Abe. Dado um ângulo agudo $\angle AOB$, para trisseccioná-lo, devemos (Figura 4.22):

1. dobrar uma perpendicular ao segmento OB , passando por O . Desdobrar (Figuras A e B);
2. determinando um ponto F qualquer sobre a perpendicular, dobrar a mediatriz de FO , determinando na interseção com a reta \overleftrightarrow{OF} o ponto E . Desdobrar (Figura C);
3. fazer uma dobradura levando o ponto F à semirreta \overrightarrow{OA} e o ponto O à mediatriz de FO , obtendo uma dobra m e determinando os pontos F' , sobreposição de F , E' , sobreposição de E , e O' , sobreposição de O . Desdobrar (Figura D);
4. dobrar uma reta pelos pontos O e E' e, ao desdobrar, outra por O e O' . Desdobrar (Figura G). As semirretas $\overrightarrow{OE'}$ e $\overrightarrow{OO'}$ trisseccionam o ângulo $\angle AOB$, ou seja, $\widehat{AOE'} = \widehat{E'OO'} = \widehat{O'OB}$.

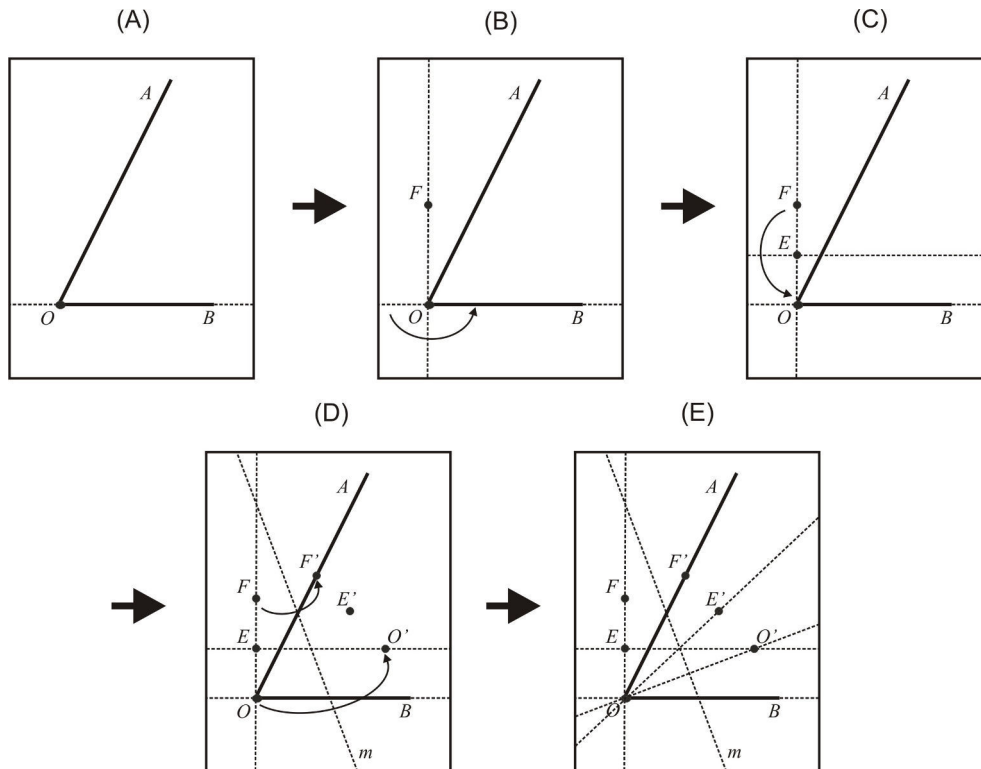


Figura 4.22: As semirretas $\overrightarrow{OE'}$ e $\overrightarrow{OO'}$ trissecionam o ângulo $\angle AOB$, ou seja, $\widehat{AOE'} = \widehat{E'OO'} = \widehat{O'OB}$.

Justificativa. A partir da construção concluída, temos, pelas propriedades das reflexões em reta, que os pontos F' , E' e O' são colineares, que $\overline{FO} = \overline{F'O'}$, $\overline{EO} = \overline{E'O'}$ e $\overline{EF} = \overline{E'F'}$ e ainda que m é a mediatriz dos segmentos OO' , EE' e FF' , implicando que $OO' \parallel EE' \parallel FF'$.

Seja P a interseção de m com a reta $\overleftrightarrow{EO'}$, devemos mostrar inicialmente que $P \in E'O$, ou seja, P , O e E' são colineares. Como $EE' \parallel OO'$ e $\overline{EO} = \overline{E'O'}$, $OEE'O'$ é um trapézio isósceles e m é a mediatriz das bases OO' e EE' . As diagonais de um trapézio isósceles se encontram na mediatriz, portanto, em m . Como $P \in m$ e $P \in EO'$, então $P \in E'O$, daí $E'O \cap EO' = P$, o que implica na colinearidade dos pontos (Figura 4.23).

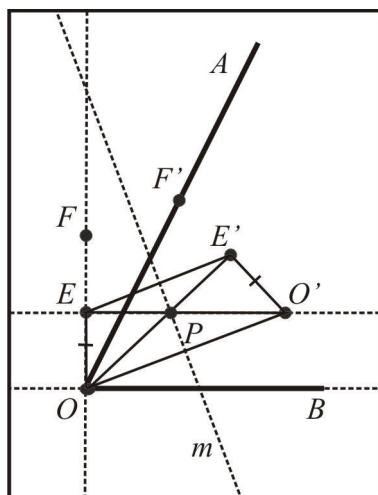


Figura 4.23: $E'O \cap EO' = P$ o que implica na colinearidade dos pontos O, P e E' .

Como $\overleftrightarrow{EO'} \parallel \overleftrightarrow{OB}$, então $\angle EO'O = \angle O'OB$ (ângulos alternos internos).

Como P está na mediatriz do triângulo OPO' , temos $\overline{OP} = \overline{O'P}$, logo, o triângulo OPO' é isósceles e portanto $\widehat{POO'} = \widehat{PO'O}$.

Por construção $EP \perp FO$, assim, como a dobradura preserva a medida de ângulos, temos $E'P \perp F'O'$.

Finalmente, como $\overline{E'O'} = \overline{E'F'}$, o triângulo $F'OO'$ é isósceles, implicando que $\widehat{F'OE'} = \widehat{E'OO'}$. Logo, $\widehat{F'OE'} = \widehat{E'OO'} = \widehat{O'OB}$ (Figura 4.24).

□

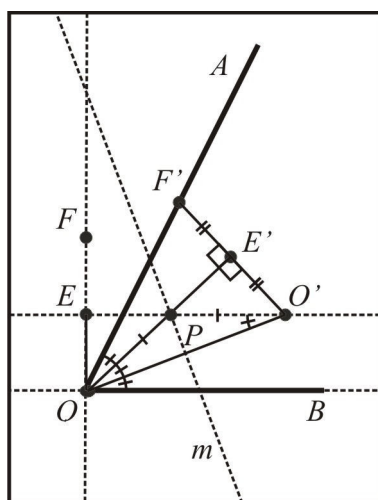


Figura 4.24: $\widehat{F'OE'} = \widehat{E'OO'} = \widehat{O'OB}$.

Duplicação do cubo

Como visto no capítulo 3, o problema da duplicação do cubo equivale em, a partir de um segmento de medida conhecida a , obter um segmento com medida $a\sqrt[3]{2}$.

A construção que será apresentada, encontra-se em [2]. Inicialmente, dados um segmento unitário AB e um segmento $\overline{BC} = a$, construiremos um segmento de medida a^3 . Para isso devemos (Figura 4.25):

1. sobre uma dobra m , construir o segmento unitário $\overline{AB} = 1$, e, passando por B , dobrar uma perpendicular n à m , marcando nela o segmento $\overline{BC} = a$ (Figura A);
2. fazer uma dobra o por A e C e depois dobrar uma perpendicular p à o passando por C , determinando o ponto D na interseção com m (Figura B). Aplicando as relações métricas dos triângulos retângulos ao triângulo ACD , temos $\overline{BC}^2 = \overline{AB} \times \overline{BD}$, ou seja, $a^2 = 1 \times \overline{BD}$, implicando que $\overline{BD} = a^2$;
3. fazer uma dobra q perpendicular à p passando por D , determinando na interseção com n o ponto E (Figura C). Aplicando novamente as relações métricas dos triângulos retângulos, agora ao triângulo CDE , temos $\overline{BD}^2 = \overline{BC} \times \overline{BE}$, ou seja, $(a^2)^2 = a \times \overline{BE}$ implicando que $\overline{BE} = a^3$.

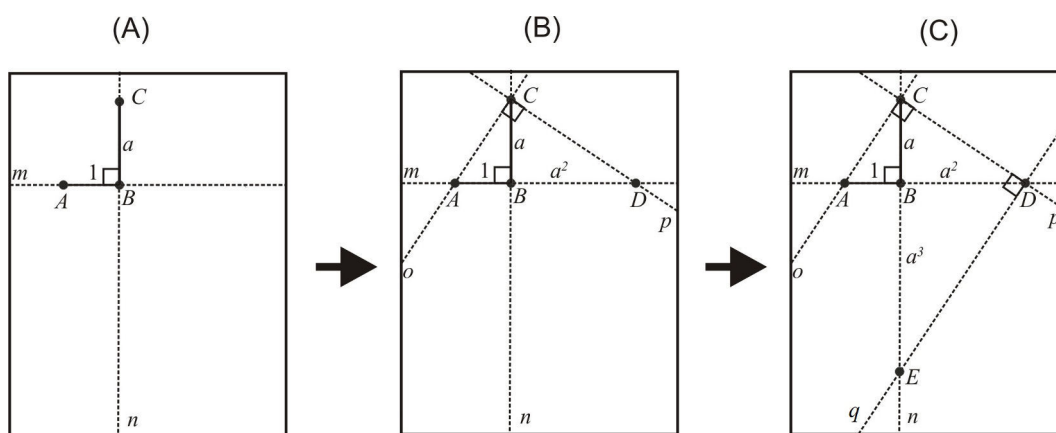


Figura 4.25: Construção de um segmento de medida $\overline{BE} = a^3$ a partir de um segmento unitário $\overline{AB} = 1$ e de um segmento de medida conhecida $\overline{BC} = a$.

Obtido o segmento de medida a^3 , devemos agora determinar um segmento de medida $b = a\sqrt[3]{2}$. Para isso, devemos (Figura 4.26):

1. em uma folha retangular suficientemente grande (uma folha de $6a^3$ de altura por $2a^3 + 2$ de largura atenderia todos os casos) de extremidades A, B, C e D , marcar E e F sobre AB , tal que $\overline{AE} = 1$ e $\overline{AF} = 2$ (Figura A);
2. dobrar EG e FH , com G e H sobre CD , tal que EG e FH sejam paralelos a AD (Figura A);
3. em AD , marcar os pontos I e A' , tal que $\overline{AI} = \overline{IA'} = 2a^3$ (Figura B);
4. dobrar IJ e $A'B'$, com J e B' sobre BC , tal que IJ e $A'B'$ sejam paralelos a AB . Seja $O = IJ \cap EG$ (Figura B);
5. fazer uma dobradura levando I sobre FH e E sobre $A'B'$, obtendo a dobra l e determinando o ponto P em $l \cap EG$ e o ponto Q em $l \cap EE'$ (Figura C). Temos $\overline{OP} = a\sqrt[3]{2}$, solução do problema.

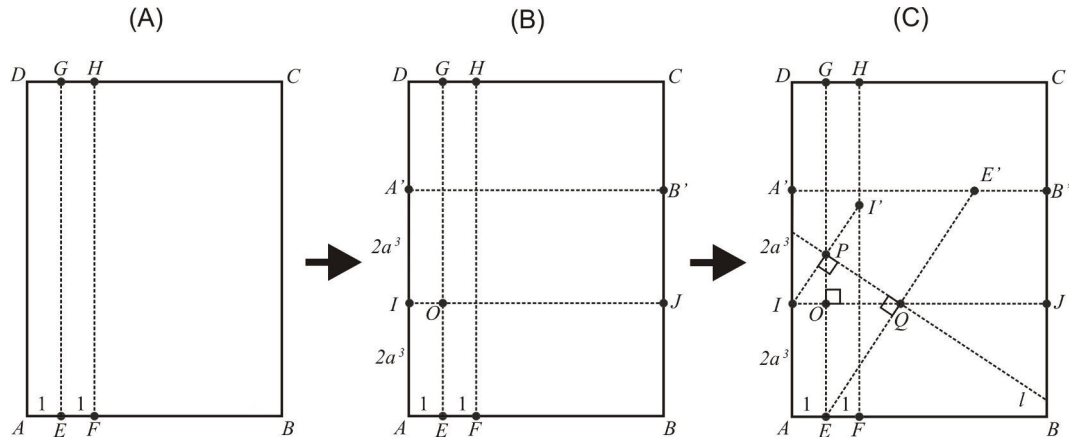


Figura 4.26: Construção de um segmento de medida $a^3\sqrt{2}$ a partir de um segmento unitário e de um segmento de medida a^3 .

Justificativa. Como l é a mediatriz de II' e EE' , temos $\widehat{IPQ} = \widehat{PQE} = 90^\circ$. Assim, aplicando as relações métricas dos triângulos retângulos ao triângulo IPQ , temos que $\overline{OP}^2 = \overline{IO} \times \overline{OQ}$, ou seja, $\overline{OP}^2 = 1 \times \overline{OQ}$, implicando que $\overline{OP}^2 = \overline{OQ}$ e, portanto, $\overline{OP}^4 = \overline{OQ}^2$.

Aplicando novamente as relações métricas dos triângulos retângulos, agora ao triângulo PQE , segue que $\overline{OQ}^2 = \overline{OP} \times \overline{EO}$, ou seja, $\overline{OQ}^2 = \overline{OP} \times 2a^3$. Como $\overline{OP}^4 = \overline{OQ}^2$, então $\overline{OP}^4 = \overline{OP} \times 2a^3$ e, portanto, $\overline{OP}^3 = 2a^3$. Conclui-se, então, que $\overline{OP} = \sqrt[3]{2a^3} = a^3\sqrt{2}$.

□

Roteiros de aula e aplicação

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dos terceiros e quartos ciclos do ensino fundamental de Matemática, na seção seleção de conteúdos, alertam sobre a importância dos procedimentos matemáticos e dos conceitos geométricos:

Os procedimentos por sua vez estão direcionados à consecução de uma meta e desempenham um papel importante pois grande parte do que se aprende em Matemática são conteúdos relacionados a procedimentos. Os procedimentos não devem ser encarados apenas como aproximação metodológica para aquisição de um dado conceito, mas como conteúdos que possibilitem o desenvolvimento de capacidades relacionadas com o saber fazer, aplicáveis a distintas situações. Esse saber fazer implica construir as estratégias e os procedimentos, compreendendo os conceitos e processos neles envolvidos. Nesse sentido, os procedimentos não são esquecidos tão facilmente. Exemplos de procedimentos: resolução de uma equação, traçar a mediatriz de um segmento com régua e compasso, cálculo de porcentagens etc. (PCN, 1998, pp. 49-50)

E ainda:

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (PCN, 1998, p. 51)

As construções geométricas nos permitem trabalhar conceitos e procedimentos importantes, além de desenvolver a capacidade argumentativa, e, até mesmo, a elaborar algumas demonstrações.

A partir da pesquisa realizada nos capítulos 2, 3 e 4, foi desenvolvido um material de desenho geométrico (Apêndice A) que foi aplicado aos alunos do 7º ano da Escola Municipal Maria da Penha dos Santos Almeida em Betim (MG), onde leciono, abordando, além de alguns conceitos geométricos elementares, algumas construções geométricas com régua e compasso e também através de dobraduras.

O conteúdo foi dividido em sete tópicos, cada um dando origem a uma aula:

1. Construções elementares com régua e esquadros; ângulos e utilização do transferidor;
2. Construções elementares utilizando régua e compasso;
3. Triângulos;
4. Lugar geométrico;
5. Pontos notáveis dos triângulos;
6. Construções geométricas através de dobraduras;
7. Razão Áurea.

Devido ao fato de que grande parte do conteúdo presente no material desenvolvido ter relação com os conteúdos planejados para essas turmas neste ano, optou-se por apresentar as cinco primeiras aulas a todos os alunos no tempo regular das aulas de matemática, uma vez por semana. Já as duas últimas aulas foram aplicadas a um grupo de 10 alunos que demonstraram interesse em continuar com esses estudos.

O material (roteiros de aulas) foi distribuído aula a aula aos alunos.

Nas cinco primeiras aulas, os conteúdos foram abordados utilizando os instrumentos convencionais de desenho geométrico, ou seja, régua, compasso, transferidor e esquadros. Foi solicitado aos alunos que se sentassem em duplas para facilitar a discussão dos problemas e, também, para que aqueles com mais destreza pudessem ajudar os que possuem maior dificuldade. As construções foram feitas simultaneamente, no quadro e pelos alunos, para isso foi utilizado o material de desenho geométrico para quadro branco.

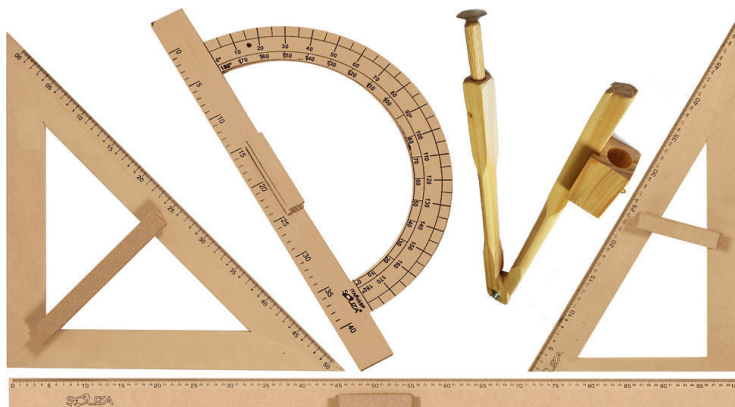


Figura 5.1: Material de desenho geométrico para quadro branco.

Nas duas últimas aulas, foi realizada a abordagem do desenho geométrico através das dobraduras. Foram utilizados papéis de rascunho e canetas para reforçar as marcas deixadas pelas dobras. Foi utilizado também, na última aula, uma TV para passar o vídeo descrito no roteiro.

5.1 Conteúdo trabalhado por aula

Na primeira aula, foi discutido o 1º postulado de Euclides: “Dados dois pontos distintos, há um único segmento de reta que os une”. Foram apresentadas as possíveis posições relativas das retas em um plano, as construções de retas paralelas e perpendiculares utilizando régua e esquadros, a classificação dos ângulos e a utilização do transferidor para medição e construção de ângulos.

Na segunda aula, foi apresentado o compasso, sua função e forma de uso. Foram trabalhados as operações de adição e subtração de segmentos, a construção de retas paralelas e perpendiculares e a divisão de segmentos em partes iguais. Como exercício, foi solicitado aos alunos que construíssem um quadrado descrevendo todos os passos.

Na terceira aula, foi exposto a classificação dos triângulos quanto a medida dos lados, a construção de um triângulo escaleno e um isósceles a partir das medidas dos lados e, também, o transporte de ângulos. Como exercício, solicitou-se aos alunos que construíssem um triângulo equilátero dado um de seus lados e um triângulo escaleno dados as medidas de dois de seus ângulos e de um de seus lados, descrevendo os passos.

Na quarta aula, foi introduzido o conceito de lugar geométrico, as construções da mediatriz, bissetriz e do arco capaz.

Na quinta aula, foram apresentados os pontos notáveis dos triângulos, (incentro, circuncentro, baricentro e ortocentro), suas determinações com régua não graduada e compasso e a construção do hexágono regular.

Na sexta aula, foram abordadas, através das dobraduras, a construção de uma reta perpendicular à uma reta dada, da mediatriz, da bissetriz, de um triângulo equilátero e de um hexágono regular. Foi mostrado, também, que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Na sétima aula, foram trabalhados a razão áurea e sua relação com o retângulo áureo, a espiral de ouro, o pentágono regular, o pentagrama e a sequência de Fibonacci. Além disso, foi apresentada a construção de dois segmentos em razão áurea.

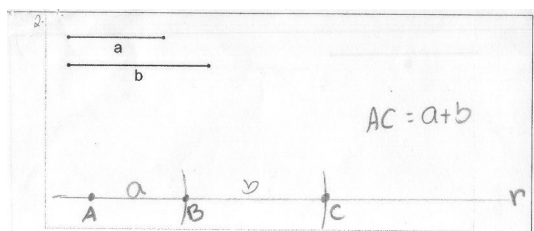
Ao final do curso de construções geométricas, o material foi recolhido para avaliação e análise.

5.2 Avaliação e análise dos resultados

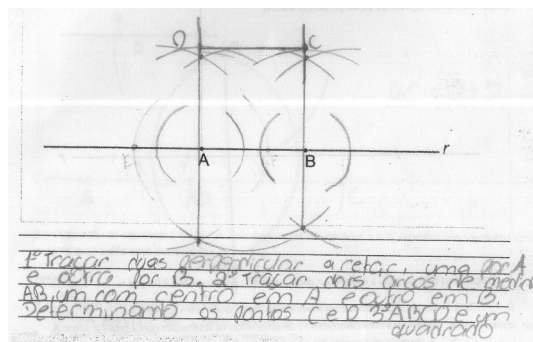
Com relação às aulas, foi perceptível o interesse manifestado pela maioria dos alunos. Ao encontrá-los pelos corredores e, até mesmo, durante as aulas “regulares”, perguntavam sobre as aulas de desenho geométrico.

Analisando as construções realizadas com os instrumentos tradicionais pelos alunos, é possível perceber, nas primeiras, uma falta de destreza, porém com o avanço das aulas, mesmo as construções mais elaboradas, como o arco capaz e as de

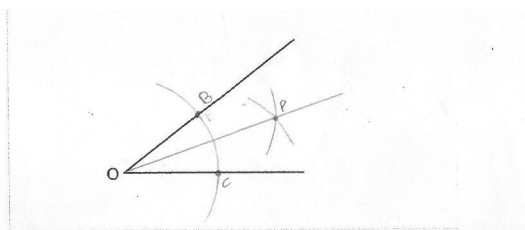
determinação dos pontos notáveis dos triângulos, foram feitas corretamente e com esmero (Figura 5.2).



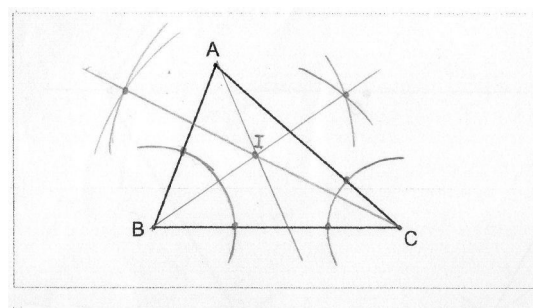
(a) Adição de segmentos.



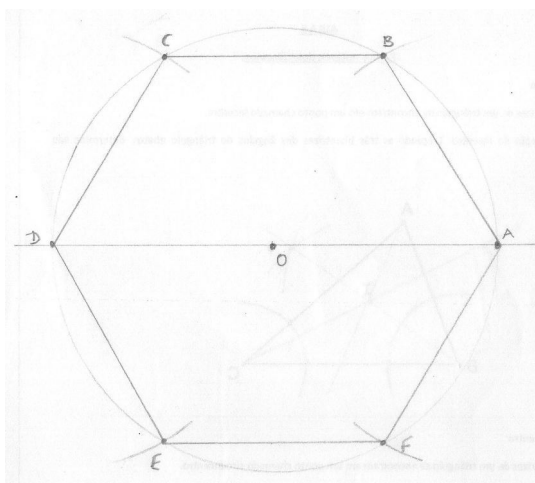
(b) Construção de um quadrado.



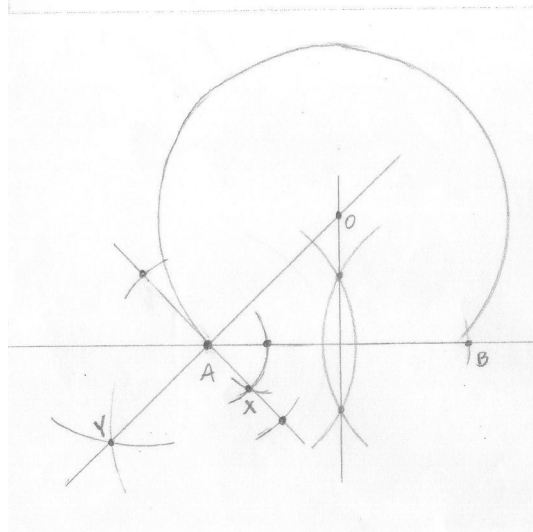
(c) Construção da bissetriz.



(d) Construção do incentro.



(e) Construção do hexágono regular.

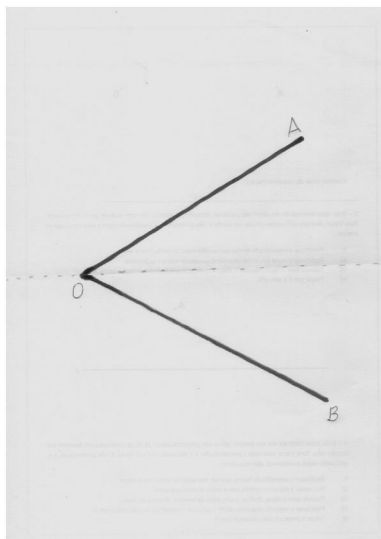


(f) Construção do arco capaz.

Figura 5.2: Construções realizadas pelos alunos com régua e compasso.

Uma dificuldade apresentada durante as aulas foi a falta dos instrumentos de desenho geométrico, já que alguns dos alunos não os possuíam ou os esqueciam, mas, como o número era pequeno, esse transtorno pôde ser contornado.

Com relação as dobraduras, também foi percebida, no início, a falta de agilidade ao dobrar o papel por pontos dados, porém com o avanço das aulas esse problema foi quase que totalmente sanado.



(a) Bissetriz.



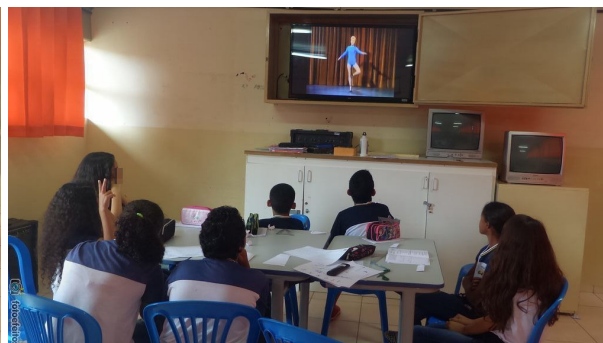
(b) Triângulo equilátero.

Figura 5.3: Dobraduras realizadas pelos alunos.

Como vantagem, pode-se perceber a ausência de problemas com material, visto que foram utilizadas folhas de rascunho cedidas pela Escola e, também, nos procedimentos. Como exemplo, enquanto que na construção da bissetriz, com os instrumentos tradicionais, deve-se traçar vários arcos, com dobraduras só é necessária uma dobra.



(a) Realizando dobraduras.



(b) Assistindo ao vídeo proposto.

Figura 5.4: Alunos durante as aulas de dobraduras.

Como muitas das construções com dobraduras foram feitas anteriormente com régua e compasso, foi possível perceber a fixação dos conceitos geométricos pelos alunos. Ao comparar os dois métodos de construção, em geral, acharam aquelas realizadas pela segunda forma mais simples.

Considerações finais

O material produzido de desenho geométrico (Apêndice A), tanto usando os instrumentos tradicionais quanto as dobraduras, mostrou-se uma boa ferramenta, não só no auxílio ao ensino de conceitos geométricos, mas, também, no desenvolvimento matemático do aluno de forma geral.

Através dele, os alunos puderam perceber a importância da clareza em que devem ser expostos os procedimentos matemáticos e da elaboração de estratégias nas resoluções de problemas.

Com relação aos tipos de instrumentos utilizados, o trabalho com dobraduras se apresentou como uma boa alternativa para trabalhar as construções geométricas em sala de aula, visto que não necessita de instrumentos específicos, apresenta boas possibilidades de construções e, de certa forma, procedimentos mais simples.


Fato é que, em ambos os casos, é perceptível um maior interesse por boa parte dos alunos por esse tipo de aula do que nas aulas “regulares”.

Assim, espera-se que esse trabalho, tanto a parte de pesquisa quanto o material desenvolvido, possa ajudar tanto a professores em seu ofício quanto a alunos interessados em aprofundar seus conhecimentos em construções geométricas.

Material escrito

O material desenvolvido foi dividido em 7 tópicos, cada um correspondendo a uma aula. São eles:

1. Construções elementares com régua e esquadros; ângulos e utilização do transferidor;
2. Construções elementares utilizando régua e compasso;
3. Triângulos;
4. Lugar geométrico;
5. Pontos notáveis dos triângulos;
6. Construções geométricas através de dobraduras;
7. Razão Áurea.

E. M. MARIA DA PENHA DOS SANTOS ALMEIDA BETIM – MG	DISCIPLINA: Matemática	2ª Etapa	
	Desenho geométrico	DATA: __/__/2017	
ALUNO (A):			Nº:
PROFESSOR: Henrique		7º Ano do Ensino Fundamental	

AULA 1

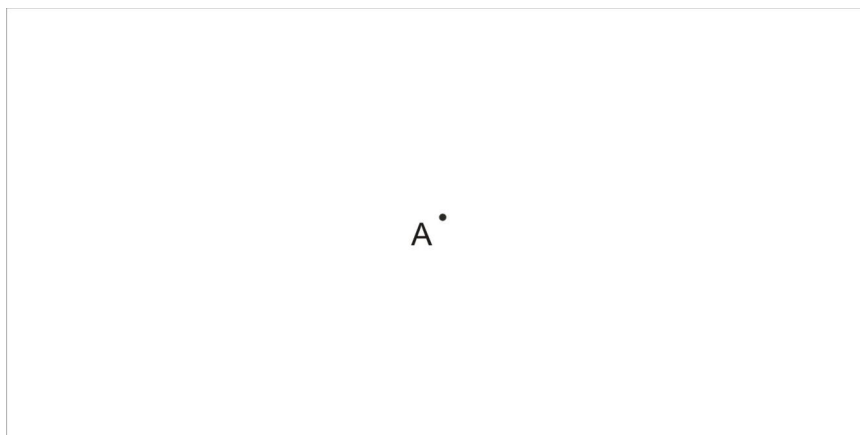
Considerações iniciais:

Neste material de desenho geométrico serão abordadas construções elementares envolvendo régua, compasso, esquadros e o transferidor.

Vale ressaltar que nas resoluções “clássicas” dos problemas de desenho geométrico, devemos restringir os instrumentos à régua e ao compasso (instrumentos euclidianos), bem como o que pode ser feito com cada um deles. Com a régua só é possível traçar retas de comprimento indefinido (não se pode usar sua escala) e com o compasso permite-se traçar apenas circunferências com centro em um ponto passando por outro ponto.


Construções elementares com régua e esquadros

- 1- Dado o ponto A , trace, utilizando a régua, retas passando por esse ponto:



Quantas retas são possíveis traçar?

- 2 – Dados dois pontos, A e B , trace retas passando, simultaneamente pelos dois pontos.

E. M. MARIA DA PENHA DOS SANTOS ALMEIDA BETIM – MG	DISCIPLINA: Matemática	2ª Etapa	
	Desenho geométrico	DATA: __/__/2017	
ALUNO (A):			Nº:
PROFESSOR: Henrique		7º Ano do Ensino Fundamental	

AULA 1

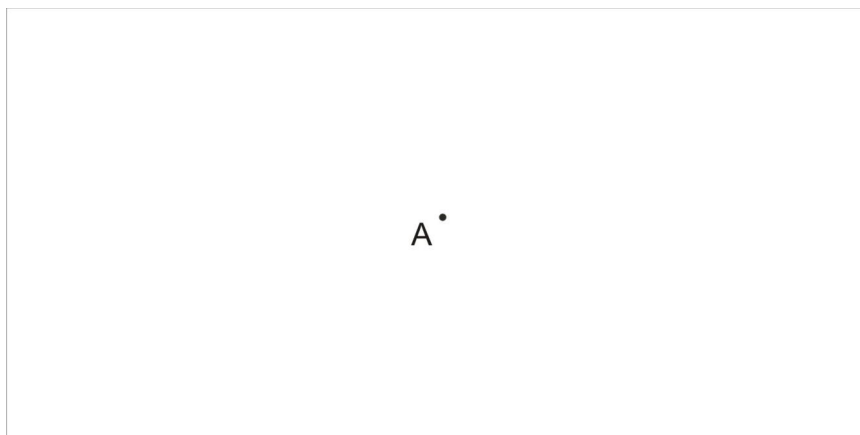
Considerações iniciais:

Neste material de desenho geométrico serão abordadas construções elementares envolvendo régua, compasso, esquadros e o transferidor.

Vale ressaltar que nas resoluções “clássicas” dos problemas de desenho geométrico, devemos restringir os instrumentos à régua e ao compasso (instrumentos euclidianos), bem como o que pode ser feito com cada um deles. Com a régua só é possível traçar retas de comprimento indefinido (não se pode usar sua escala) e com o compasso permite-se traçar apenas circunferências com centro em um ponto passando por outro ponto.

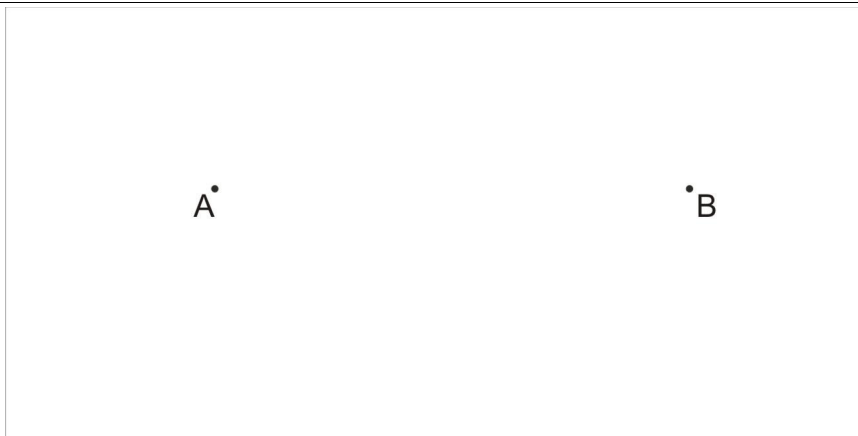
Construções elementares com régua e esquadros

- 1- Dado o ponto A , trace, utilizando a régua, retas passando por esse ponto:



Quantas retas são possíveis traçar?

- 2 – Dados dois pontos, A e B , trace retas passando, simultaneamente pelos dois pontos.



Quantas retas são possíveis traçar?

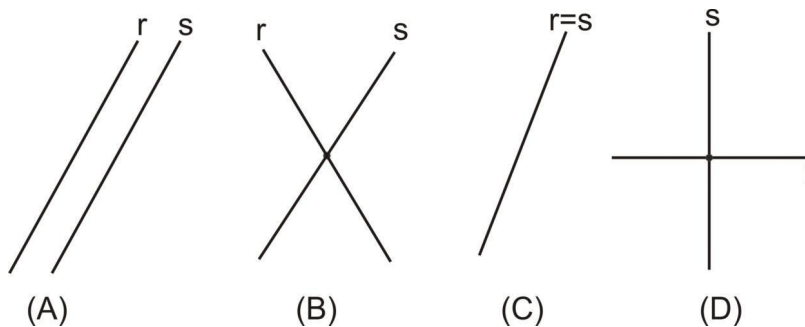
Posições relativas de duas retas no plano

Duas retas, em um mesmo plano, podem ser paralelas, concorrentes ou coincidentes.

Duas retas são chamadas de *paralelas* (A) quando não têm nenhum ponto em comum, ou seja, em toda a sua extensão infinita, elas não se interceptam. Para indicar que duas retas são paralelas, usamos o símbolo //.

Duas retas são chamadas de *concorrentes* (B) quando possuem um único ponto em comum. Um caso especial de retas concorrentes acontece quando o ângulo formado entre elas é ângulo reto. Dizemos então que as retas são *perpendiculares* (D). Para indicar que duas retas são perpendiculares usamos o símbolo \perp .

Duas retas são coincidentes se possuem todos os pontos em comum (C).



3 – Para traçar uma reta $s//r$, passando por um ponto A não pertencente à reta s utilizando régua e esquadro, siga os passos abaixo:

- I. posicione o esquadro de forma que um dos lados coincida com a reta r ;
- II. posicione a régua (ou outro esquadro) encostada sobre o outro lado;
- III. fixando bem a régua, deslize o esquadro até que o lado coincida com o ponto A ;
- IV. trace por A a reta $s//r$.

A.



4 – Para traçar uma reta s perpendicular a uma reta r passando por um ponto P não pertencente à r , utilizando régua e esquadro, siga os passos abaixo:

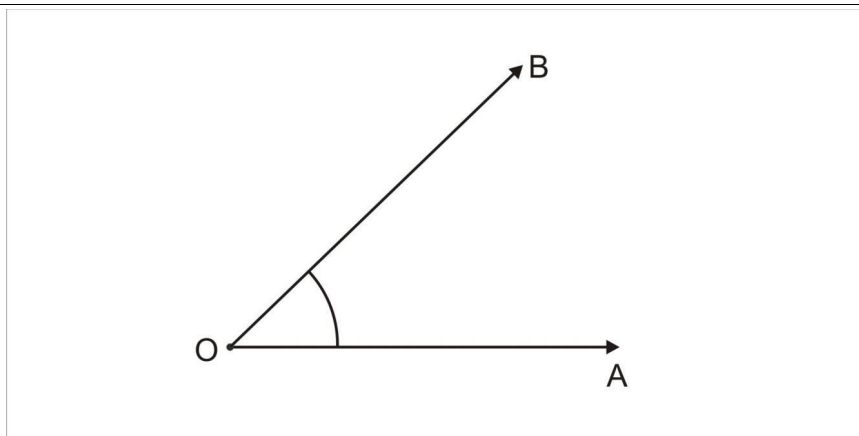
- I. posicione o esquadro de forma que um dos lados coincida com a reta r ;
- II. posicione a régua encostada sobre outro lado do esquadro;
- III. fixando bem a régua, deslize o esquadro de forma a afastá-lo da reta r ;
- IV. posicione o segundo esquadro sobre o primeiro coincidindo um dos lados com P ;
- V. trace a perpendicular passando por P .

P.

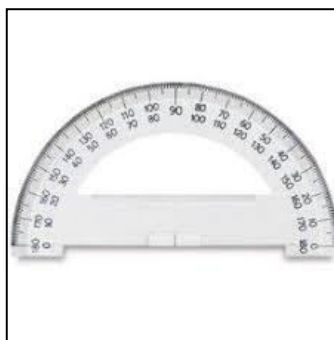


Utilizando o transferidor para medir e construir ângulos

Ângulos: Dadas no plano duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é uma das regiões do plano limitadas pelas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .



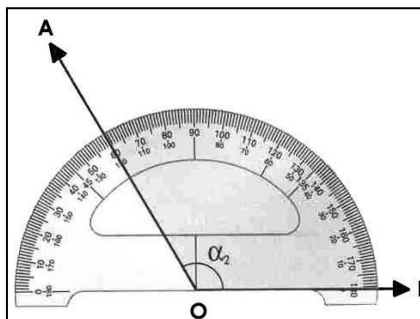
Transferidor é um instrumento que serve para medir e traçar ângulos. É composto por uma escala circular, ou de seções de círculo, dividida e marcada em ângulos espaçados regularmente, tal qual numa régua. Em nosso curso utilizaremos o transferidor de forma semicircular.



Transferidor semicircular

Para medir ângulos com o transferidor, proceda da seguinte forma:

- I. coincida o centro do transferidor com o vértice do ângulo a ser medido;
- II. gire o transferidor até que sua base coincida com um dos lados do ângulo;
- III. verifique em qual valor o outro lado do ângulo coincide com a escala do transferidor, essa será a medida do ângulo.



Ângulo $\angle AOB$ de medida 120°

Classificação dos ângulos com relação à sua medida:

I) **Ângulos Convexos:** Ângulos com medida maior ou igual a 0° e menor ou igual a 180° .

a) *Ângulo nulo:* é todo ângulo cuja medida é igual a 0° .

b) *Ângulo agudo:* é todo ângulo cuja medida é menor que 90° .

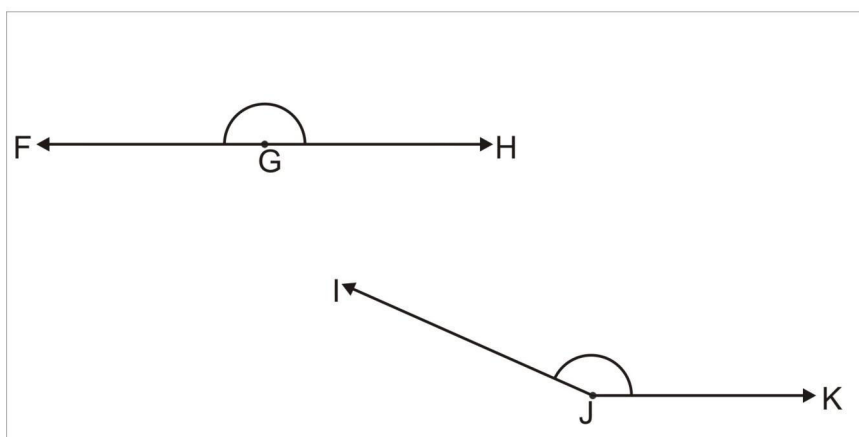
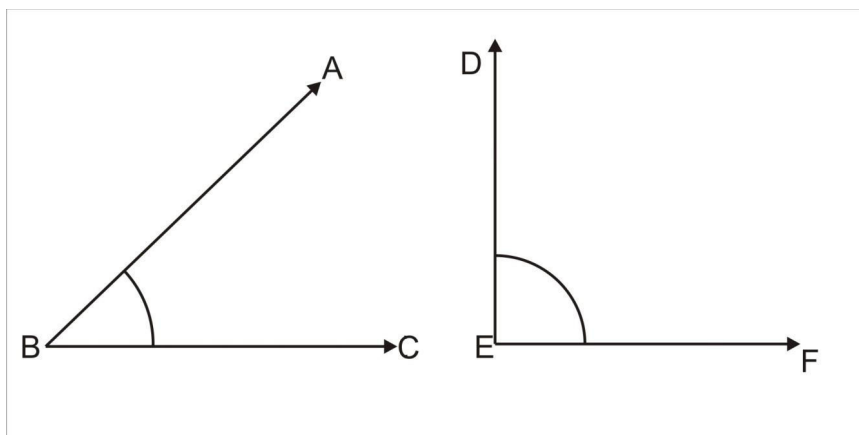
c) *Ângulo reto:* é todo ângulo cuja medida é igual a 90° .

d) *Ângulo obtuso:* é todo ângulo cuja medida é maior que 90° e menor que 180° .

e) *Ângulo raso:* é todo ângulo cuja medida é igual a 180° .

II) **Ângulo côncavo:** é todo ângulo cuja medida é maior que 180° e menor ou igual a 360° .


1 – Meça os seguintes ângulos, circule o de maior medida, faça um x no de menor medida e classifique-os de acordo com as suas medidas.



Construção de ângulos com o transferidor

- 2) Baseando-se no item anterior, construa, utilizando a régua e o transferidor, os ângulos $\angle FOG$ e $\angle CAO$ de medidas 60° e 135° respectivamente.



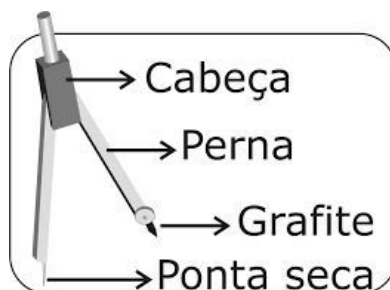
E. M. MARIA DA PENHA DOS SANTOS ALMEIDA BETIM – MG	DISCIPLINA: Matemática	2ª Etapa	
	Desenho geométrico	DATA: __/__/2017	
ALUNO (A):			Nº:
PROFESSOR: Henrique		7º Ano do Ensino Fundamental	

AULA 2

Construções elementares usando o compasso

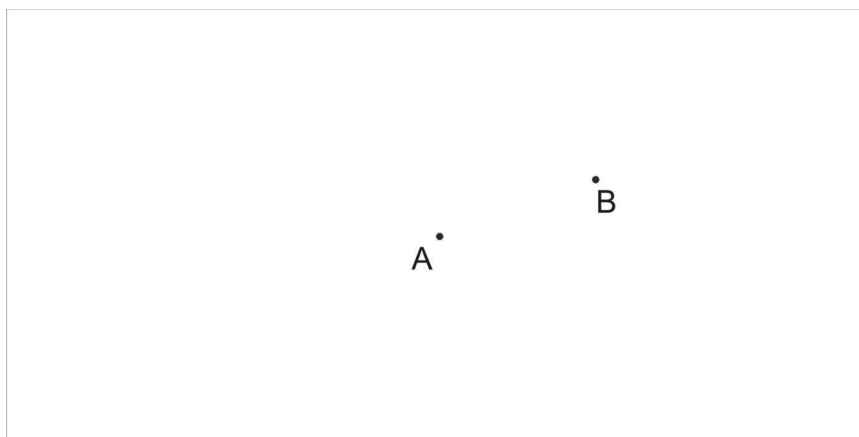
O compasso é um instrumento de desenho que faz arcos de circunferência. Também serve para marcar um segmento numa reta com comprimento igual a outro segmento dado e auxiliar na resolução de problemas geométricos.

Partes do compasso:



1 – Construir uma circunferência com centro em A e raio \overline{AB} . Passos:

- I. fixe a ponta seca do compasso em A ;
- II. abra o compasso até que o grafite coincida com o ponto B , fixando assim o raio \overline{AB} ;
- III. mantendo a ponta seca fixada, gire o compasso traçando a circunferência.



2 – Adição de segmentos: Dados dois segmentos com medidas a e b , construa um segmento com medida igual à soma das medidas dos segmentos dados. Passos:

- I. trace uma reta r e marque sobre ela um ponto A ;

- II. com abertura a , fixe a ponta seca em A e trace uma circunferência, determinando na interseção com a reta r o ponto B ;
- III. Com abertura b , fixe a ponta seca em B e trace uma circunferência, determinando na interseção com a reta r o ponto C , externo ao segmento \overline{AB} ;
- IV. temos $\overline{AC} = a + b$.



3 – Subtração de segmentos: Dados os dois segmentos de medidas a e b , construa um segmento com medida igual a diferença das medidas entre eles. Passos:

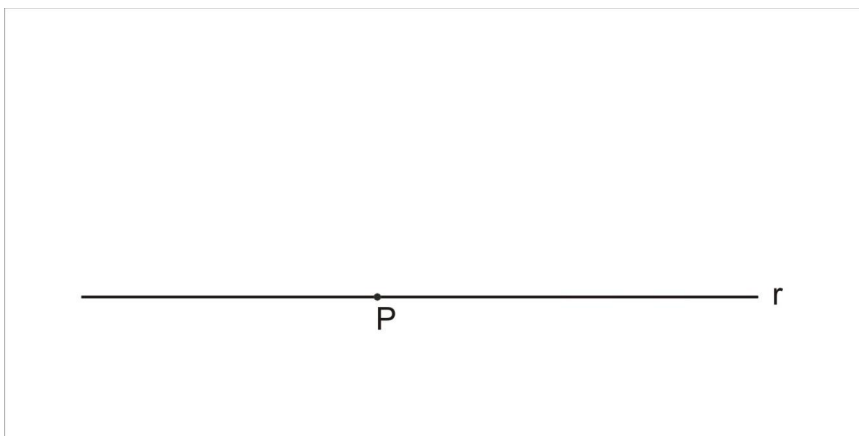
- I. trace uma reta r e marque sobre ela um ponto A ;
- II. com abertura a , fixe a ponta seca em A e trace uma circunferência, determinando na interseção com a reta r o ponto B ;
- III. com abertura b , fixe a ponta seca em B e trace uma circunferência, determinando na interseção com a reta r o ponto C entre A e B ;
- IV. temos $\overline{AC} = a - b$.



4) Traçar uma reta perpendicular a uma reta r dada, passando por um ponto P em r .

Passos:

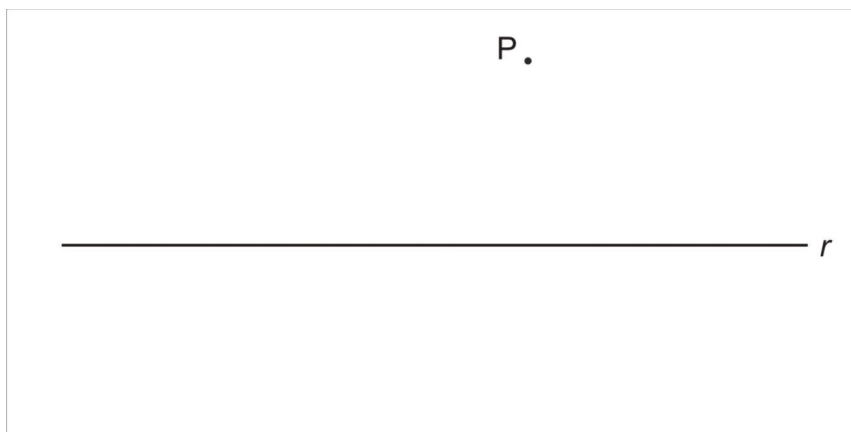
- I. com centro em P , trace uma circunferência com raio qualquer, determinando na interseção com r os pontos A e B ;
- II. com abertura medindo \overline{AB} , trace duas circunferências, uma com centro em A e outra com centro em B , determinando em uma das interseções o ponto Q ;
- III. trace uma reta pelos pontos P e Q . Ela será perpendicular à reta r .



5) Traçar uma reta perpendicular a uma reta r dada, passando por um ponto P fora de r . Passos:

- I. com centro em P , trace uma circunferência com raio maior que a distância de P à r , determinando na interseção com r os pontos A e B ;
- II. mantendo a mesma abertura do item anterior, trace duas circunferências, com centros em A e em B , determinando na interseção o ponto Q ;
- III. trace uma reta pelos pontos P e Q . Ela será perpendicular à reta r .

Justificativa: $APBQ$ é um losango e uma das características do losango é que suas diagonais são perpendiculares, logo AB e PQ são perpendiculares.

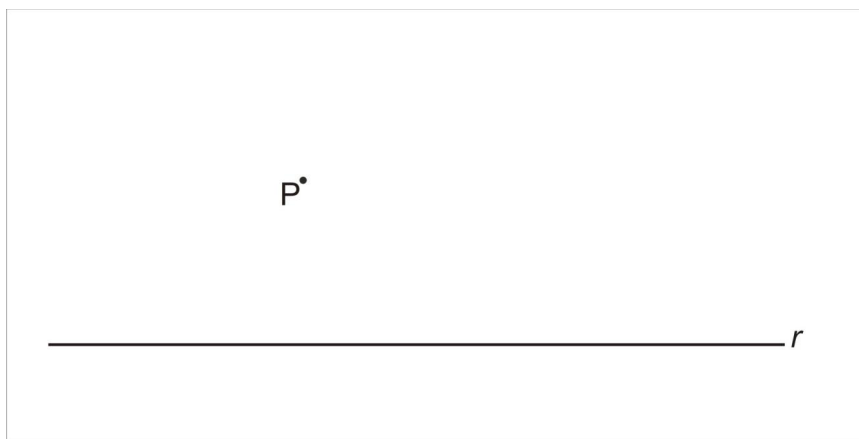


6 – Traçar uma reta paralela a uma reta r dada, passando por um ponto P fora de r .

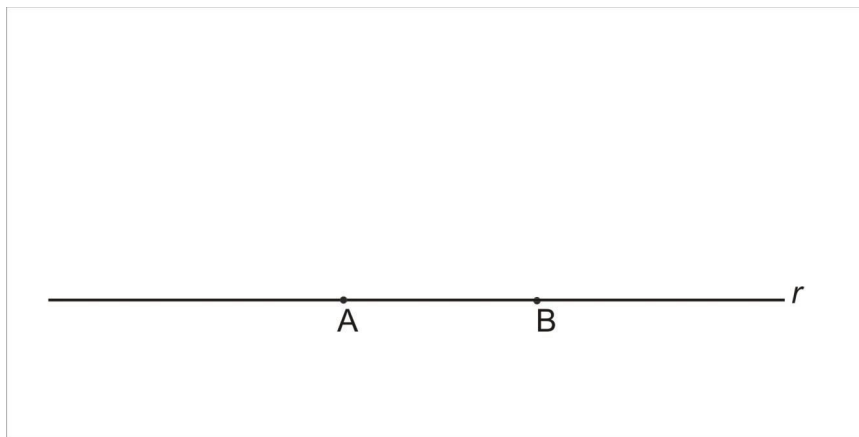
Passos:

- I. trace três circunferências com mesmo raio maior que a distância de P à r :
 - a primeira com centro em P , determinando em uma das interseções com a reta r (à direita por exemplo) o ponto A ;
 - a segunda com centro em A , determinando na interseção, à direita, com a reta r o ponto B ;
 - a terceira com centro em B , determinando na interseção com a primeira circunferência o ponto Q ;
- II. trace uma reta s passando pelos pontos P e Q . Temos $s \parallel r$.

Observe que $PABQ$ é um losango, portanto, seus lados opostos são paralelos.



7) Usando da construção de perpendiculares e paralelas, construa um quadrado de base AB . Escreva os passos.




8) Divisão de um segmento em partes iguais:

Divida o segmento \overline{AB} em 3 partes iguais:

Passos:

- I. trace uma reta s passando por A ;
- II. fixando a ponta seca do compasso em A , trace uma circunferência com um raio de medida qualquer, determinando na interseção com a reta s o ponto P ;
- III. fixando a ponta seca do compasso em P , trace uma circunferência com mesmo raio do item anterior, determinando na interseção com a reta s o ponto Q ;
- IV. fixando a ponta seca do compasso em Q , trace uma circunferência com mesmo raio do item anterior, determinando na interseção com a reta s o ponto R ;
- V. trace um reta por B e R ;
- VI. trace uma reta paralela à reta \overline{BR} passando por Q , determinando na interseção com AB o ponto N ;
- VII. trace uma reta paralela à reta \overline{BR} passando por P , determinando na interseção com AB o ponto M ;
- VIII. temos $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NB}$.



E. M. MARIA DA PENHA DOS SANTOS ALMEIDA BETIM – MG	DISCIPLINA: Matemática	2ª Etapa	
	Desenho geométrico	DATA: __/__/2017	
ALUNO (A):			Nº:
PROFESSOR: Henrique		7º Ano do Ensino Fundamental	

AULA 3

Triângulos

Podemos classificar os triângulos de acordo com as medidas dos seus lados:

1) Um triângulo é isósceles se possui dois lados congruentes.

Construa um triângulo isósceles tal que $\overline{AB} = \overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$.

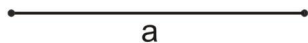
Passos:

- I. trace uma reta r e sobre ela determine um segmento $\overline{BC} = a$;
- II. trace duas circunferências de raio $\overline{AB} = b$:
 - a primeira com centro em B ;
 - a segunda com centro em C , determinando na interseção com a primeira circunferência o ponto A ;
- III. trace os segmentos AB e AC . O triângulo ABC é isósceles.



2) Um triângulo é equilátero se possui os três lados congruentes.

Baseado na construção anterior, construa o triângulo equilátero de lados $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = a$. Escreva os passos.

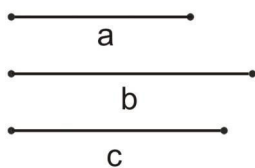


3) Um triângulo escaleno é aquele em que todos os três lados têm medidas diferentes.

Dadas as medidas $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, construa o triângulo escaleno ABC .

Passos

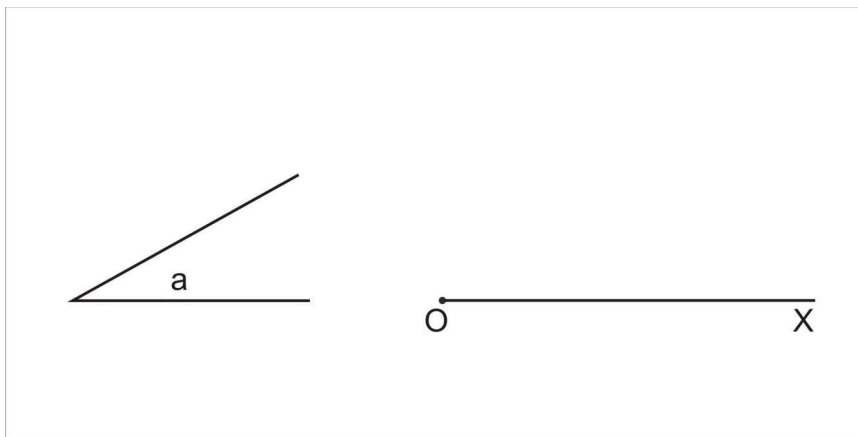
- I. trace uma reta r e sobre ela determine o segmento BC de medida a ;
- II. fixe a ponta seca do compasso em B e trace uma circunferência de raio c ;
- III. fixe a ponta seca do compasso em C e trace uma circunferência de raio b , determinando na interseção com a primeira circunferência o ponto A ;
- IV. trace os segmentos AB e AC . O triângulo ABC tem as medidas pedidas.



4) Dado um ângulo de medida a e uma semirreta \overrightarrow{OX} , construa um ângulo $\angle AOB$ de medida a .


Passos:

- I. fixe a ponta seca do compasso no vértice do ângulo de medida a e trace uma circunferência de raio qualquer, determinando na interseção com os lados do ângulo os pontos M e N ;
- II. utilizando o mesmo raio do item anterior, fixando a ponta seca em O , trace uma circunferência, determinando na interseção com \overrightarrow{OX} o ponto B ;
- III. fixando a ponta seca do compasso em B , trace uma circunferência de raio \overline{MN} , determinando em uma das interseções o ponto A ;
- IV. trace a semirreta \overrightarrow{OA} . O ângulo $\angle AOB$ tem medida a .



5) Dados um segmento BC e os ângulos de vértices B e C , construa um triângulo ABC . Escreva os passos.



E. M. MARIA DA PENHA DOS SANTOS ALMEIDA BETIM – MG	DISCIPLINA: Matemática	2ª Etapa	
	Desenho geométrico	DATA: __/__/2017	
ALUNO (A):			Nº:
PROFESSOR: Henrique		7º Ano do Ensino Fundamental	

AULA 4

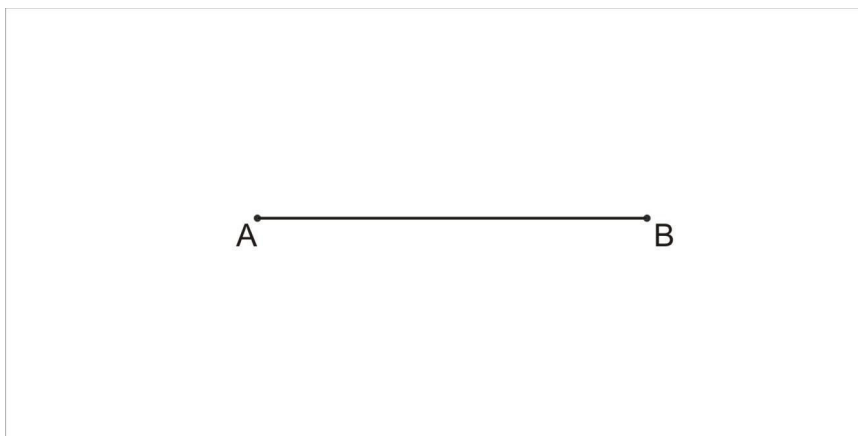
Lugar geométrico

É o conjunto dos infinitos pontos em um plano que gozam de uma mesma propriedade. Por exemplo, a circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão situados a uma distância r de um ponto fixo O .

1) Mediatriz de um segmento: É o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos extremos desse segmento. Para traçar a mediatriz de um segmento dado AB :

- I. fixe a ponta seca do compasso em A e trace uma circunferência com raio maior que a metade da distância de A até B ;
- II. fixe a ponta seca do compasso em B e trace uma circunferência com o mesmo raio usado anteriormente, determinando na interseção com a outra circunferência os pontos C e D ;
- III. trace uma reta pelos pontos C e D , essa reta será a mediatriz de AB .

Uma observação importante é que o ponto de interseção entre o segmento e a mediatriz é o ponto médio do segmento AB .

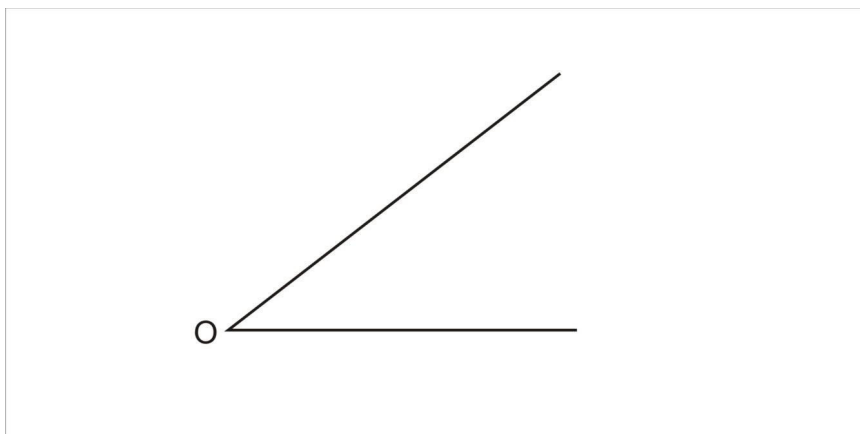


2) Bissetriz: é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas concorrentes e consequentemente divide um ângulo em dois ângulos congruentes.

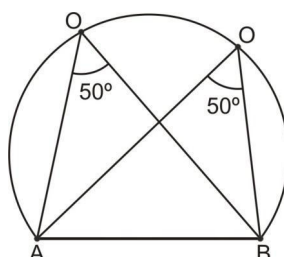
Para construir a bissetriz de um ângulo de vértice O :

- I. fixe a ponta seca do compasso no vértice O e trace uma circunferência com raio qualquer, determinando na interseção com os lados do ângulo os pontos A e B ;

- II. trace duas circunferências de mesmo raio maior que a metade da distância de A até B :
 - a primeira com centro em A ;
 - a segunda com centro em B , determinando na interseção com a primeira circunferência o ponto P ;
- III. trace a semirreta \overrightarrow{OP} , bissetriz do ângulo dado.



3) **Arco capaz:** É o lugar geométrico dos pontos que enxergam um segmento AB num determinado ângulo. Os pontos A e B não compartilham das propriedades do lugar geométrico.

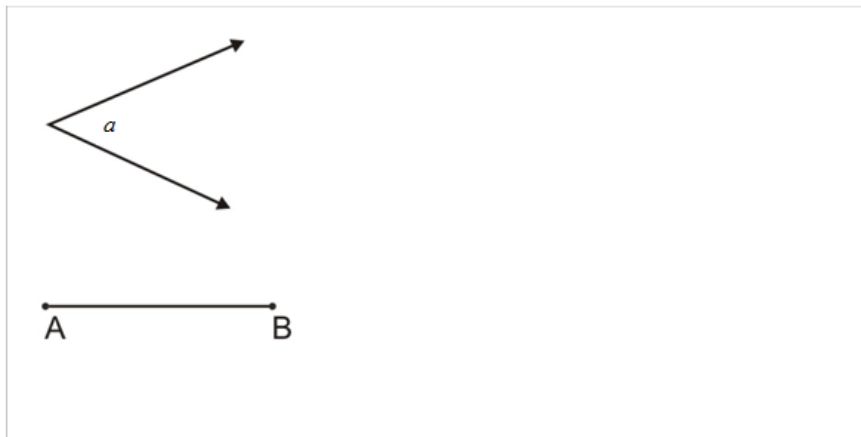



Arco capaz do ângulo de 50° sobre o segmento AB – Independente da posição do ponto O no arco AB , temos $\widehat{AOB}=50^\circ$.

Construção do arco capaz de um ângulo α :

Dados o segmento AB e o ângulo α , para construir o arco capaz do ângulo α sobre o segmento AB :

- I. sobre uma reta r , trace o segmento AB ;
- II. trace a mediatriz de AB ;
- III. trace uma semirreta \overrightarrow{AX} , tal que $\widehat{BAX}=\alpha$;
- IV. trace, por A , a reta \overrightarrow{AY} , perpendicular à reta \overrightarrow{AX} ;
- V. a interseção de \overrightarrow{AY} com a mediatriz de AB é o ponto O , centro do arco capaz, portanto, trace um arco de centro O , raio \overline{AO} , com extremidades em A e B .



E. M. MARIA DA PENHA DOS SANTOS ALMEIDA BETIM – MG	DISCIPLINA: Matemática	2ª Etapa	
	Desenho geométrico	DATA: __/__/2017	
ALUNO (A):			Nº:
PROFESSOR: Henrique		7º Ano do Ensino Fundamental	

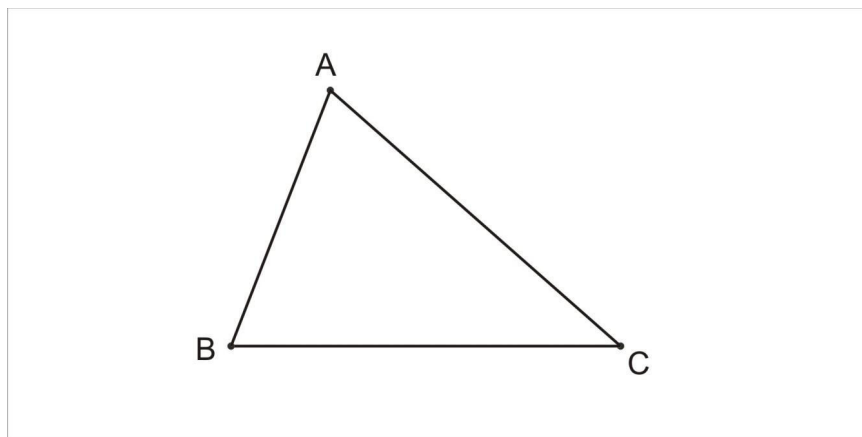
AULA 5

Pontos notáveis dos triângulos:

1) Incentro

As três bissetrizes de um triângulo se encontram em um ponto chamado incentro.

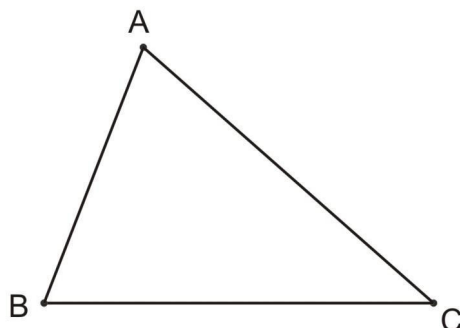
Determinação do incentro: trace as bissetrizes dos ângulos do triângulo abaixo, determinando o ponto I , incentro do triângulo.



2) Circuncentro

As três mediatrizes de um triângulo se encontram em um ponto chamado circuncentro.

Determinação do circuncentro: trace as mediatrizes dos lados do triângulo abaixo, determinando o ponto O , circuncentro do triângulo.

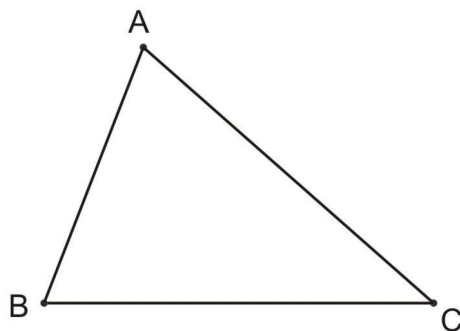


3) Mediana e baricentro

Mediana de um triângulo é um segmento que possui uma extremidade no vértice do triângulo e a outra no ponto médio do lado oposto a esse vértice. As três medianas do triângulo se encontram em um ponto chamado baricentro.

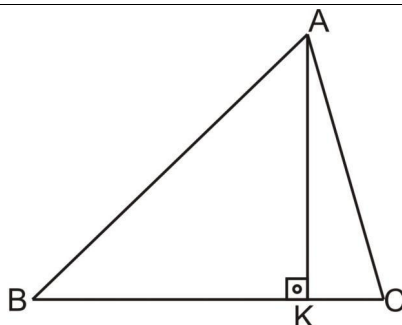
Para determinar o ponto G , baricentro de um triângulo dado:

- I. trace as mediatrizes do triângulo (determinando assim os pontos médios dos lados do triângulo);
- II. trace as medianas;
- III. determine na interseção das medianas o ponto G , baricentro do triângulo.



4 – Altura e ortocentro.

A altura de um triângulo é o segmento perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo, tendo extremidades nesta reta e no vértice oposto a esse lado.

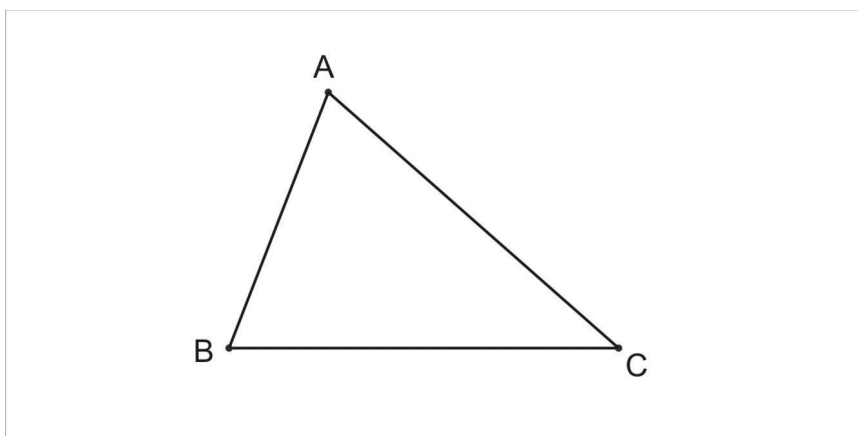


AK é a altura relativa ao lado BC do triângulo ABC

As três alturas do triângulo se encontram no ponto H , ortocentro do triângulo.

Determinação do ortocentro:

- I. trace as perpendiculares aos lados passando por seus vértices opostos;
- II. determine na interseção das três alturas o ponto H , ortocentro do triângulo.



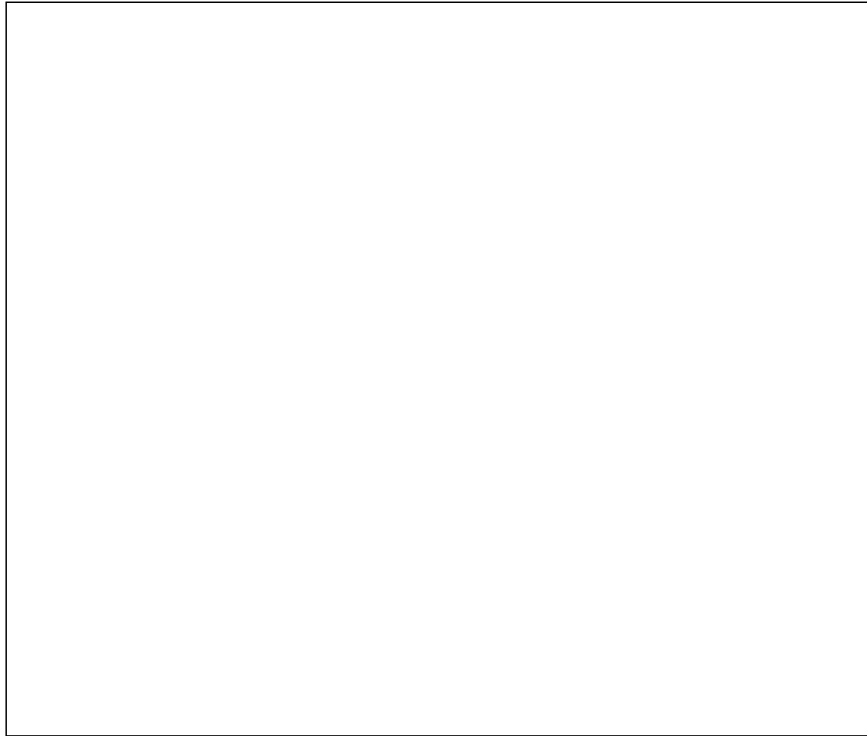
Construção do hexágono regular


O Hexágono regular é o polígono de seis lados que apresenta todos os lados e todos os ângulos internos com a mesma medida.

Passos:

- I. trace um círculo de centro O e raio qualquer (a medida desse raio será a medida do lado do hexágono);
- II. trace uma reta passando por O e marque as intersecções com a circunferência com os pontos A e D ;
- III. com centro em A , trace uma circunferência de raio \overline{AO} e marque as intersecções com a primeira circunferência com os pontos B e F ;

- IV. com centro em D , trace uma circunferência de raio \overline{DO} e marque as intersecções com a primeira circunferência com os pontos C e E . Os pontos $ABCDEF$ definem um hexágono regular.



E. M. MARIA DA PENHA DOS SANTOS ALMEIDA BETIM – MG	DISCIPLINA: Matemática	2ª Etapa	
	Desenho geométrico	DATA: __/__/2017	
ALUNO (A):			Nº:
PROFESSOR: Henrique		7º Ano do Ensino Fundamental	

AULA 6

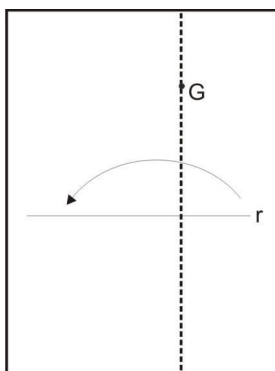
Dobraduras

Na geometria de dobraduras, as retas são formadas pelos vincos ou dobras, que são as marcas deixadas no papel resultantes das dobraduras (ato de dobrar). Nas interseções de dois vincos temos os pontos.

As construções geométricas realizadas com dobraduras são fundamentadas nos sete axiomas de Huzita-Hatori, que definem o que é possível construir com uma única dobragem através da incidência de pontos e retas, e também nas propriedades das reflexões em retas, que nos dizem que uma reflexão em reta preserva o comprimento de segmentos e a medida de ângulos.

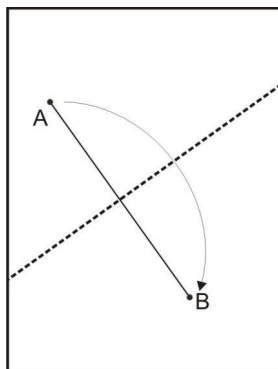
Construções

- 1) Perpendicular a uma reta dada passando por um ponto G não pertencente a esta reta:
 - I. faça uma dobra de tal forma que o ponto G pertença a ela e a reta r se sobreponha ;
 - II. desdobre.



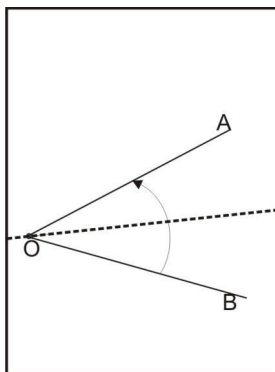
2) Mediatriz de um segmento AB :

- I. faça uma dobradura de tal forma que os pontos A e B se sobreponham;
- II. desdobre.



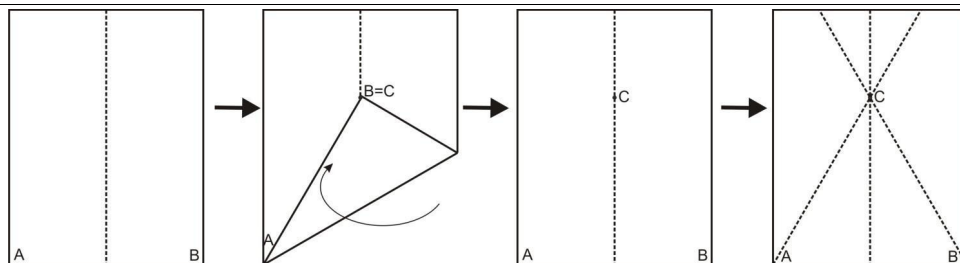
3) Bissetriz:

- I. faça uma dobra de tal forma que o vértice O pertença a ela e que um lado do ângulo se sobreponha ao outro lado;
- II. desdobre.



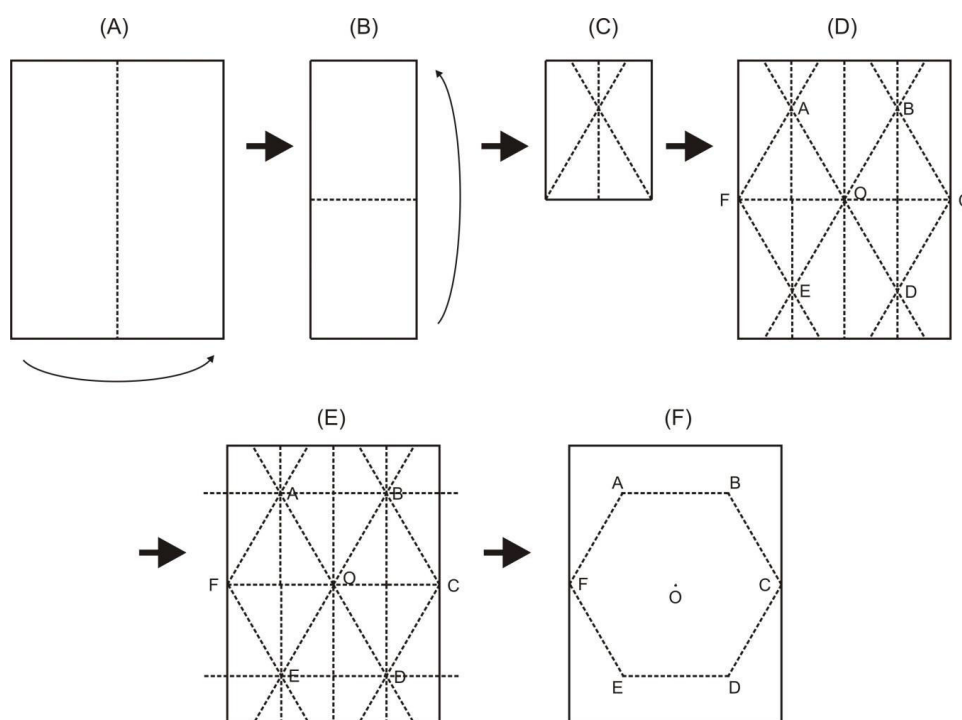
4) Triângulo equilátero com medida igual ao lado menor da folha:

- I. marque nas pontas da base da folha os pontos A e B ;
- II. dobre a folha verticalmente ao meio, encontrando assim a mediatriz da base AB ;
- III. faça uma dobra por A de modo que B encontre a mediatriz. Marque o ponto refletido de B sobre a mediatriz com C ;
- IV. desdobre;
- V. faça uma dobra por A e C , desdobre, e outra por B e C , desdobre. O triângulo ABC é equilátero.

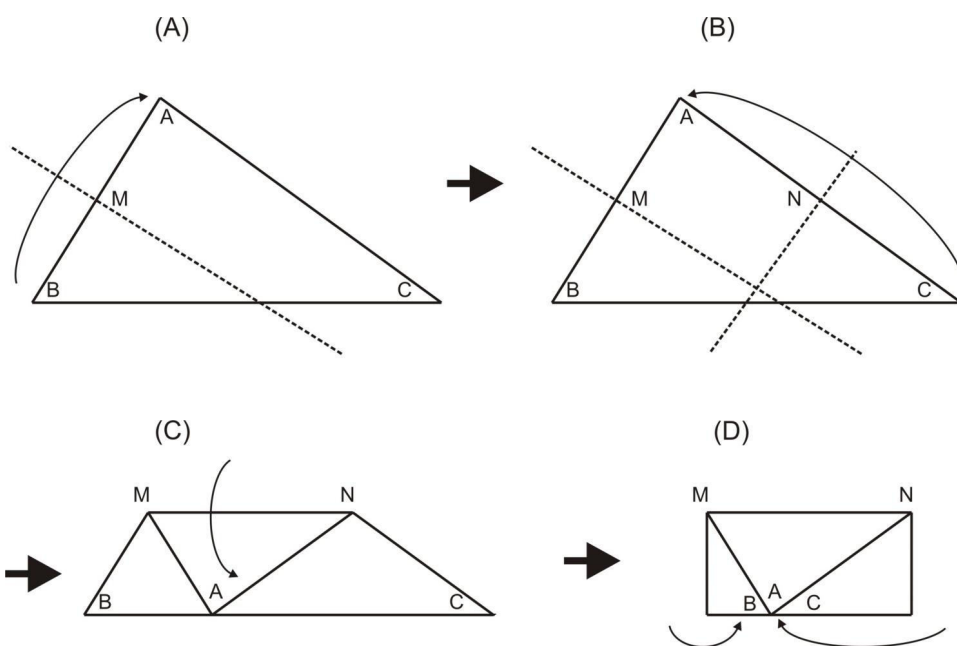



5) Hexágono Regular:

- I. dobre a folha ao meio verticalmente;
- II. sem desdobrar a folha, dobre-a ao meio horizontalmente;
- III. sem desfazer as dobras anteriores, dobre um triângulo equilátero;
- IV. desdobre, você terá quatro triângulos equiláteros: AFO , BCO , EFO e DCO (figura D);
- V. faça uma dobra por A e B e outra por E e D , obtendo os triângulos equiláteros AOB e EOD (figura E);
- VI. os seis triângulos equiláteros formam o hexágono regular $ABCDEF$ (figura F).



- 6) Mostrar, com dobraduras que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180° :
- I. recorte um triângulo qualquer de vértices A , B e C ;
 - II. determine o ponto médio M de AB . Para isso, dobre o papel, levando o ponto B ao ponto A , determinando na interseção da dobra com o lado AB o ponto M . Desdobre;
 - III. determine o ponto médio N de AC . Para isso, dobre o papel, levando o ponto C ao ponto A , determinando na interseção da dobra com o lado AC o ponto N . Desdobre;
 - IV. faça uma dobra por M e N , levando o vértice A ao lado BC ;
 - V. faça uma dobra por M , levando o vértice B ao vértice A ;
 - VI. faça uma dobra por N , levando o vértice C ao vértice A ;
 - VII. observe que os ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} formam um ângulo raso e, portanto, juntos, medem 180° .



E. M. MARIA DA PENHA DOS SANTOS ALMEIDA BETIM – MG	DISCIPLINA: Matemática	2ª Etapa	
	Desenho geométrico	DATA: __/__/2017	
ALUNO (A):			Nº:
PROFESSOR: Henrique		7º Ano do Ensino Fundamental	

AULA 7

Razão entre segmentos

Dados dois segmentos, a razão entre suas medidas é igual ao número obtido ao dividirmos uma medida pela outra.

Exemplo: Dados os segmentos AB e CD com medidas 4 cm e 8 cm respectivamente:

- I. A razão entre as medidas AB e CD é:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{4}{8} = 4 : 8 = 0,5$$

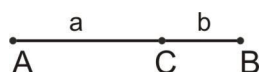
- II. A razão entre as medidas CD e AB é:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{8}{4} = 8 : 4 = 2$$

Razão Áurea

Introdução: Vídeo: O número de Ouro: a mágica por detrás do belo (Trabalho de Iniciação Científica de Ensino Médio do Colégio Móbile. Aluna: Roberta Alecrim Orientador: Walter Spinelli).

Dizemos que um ponto C divide o segmento AB na *razão áurea* (também conhecida como razão de ouro, divina proporção, proporção em extrema razão ou divisão de extrema razão, entre outros nomes) se:



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}, \text{ ou ainda, se } \overline{AC} = a \text{ e } \overline{CB} = b, \text{ então } \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Esta razão é representada pela letra grega ϕ (phi) e seu valor é:

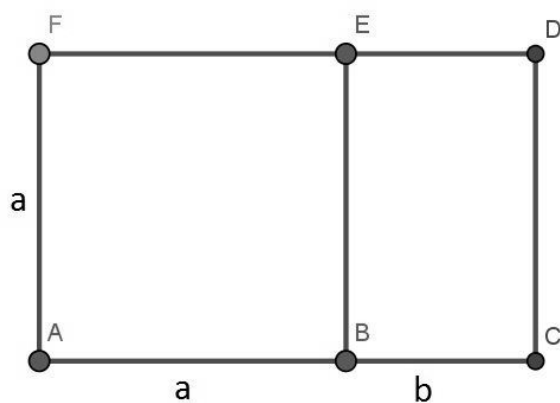
$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

O que equivale a aproximadamente a 1,61803398875...

O Retângulo áureo

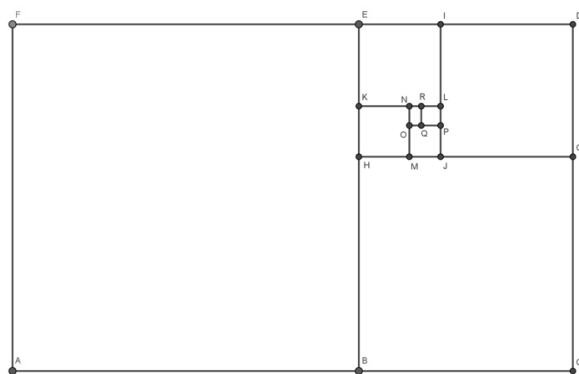
O retângulo áureo é aquele em que a razão entre seus lados é igual à razão áurea, ou seja, ao dividir o lado maior pelo lado menor obtêm-se $\phi = 1,6180339887 5...$

Uma característica desse retângulo é que ao retirarmos um quadrado de lado igual a altura, o retângulo restante é semelhante ao primeiro, ou seja, também é áureo.

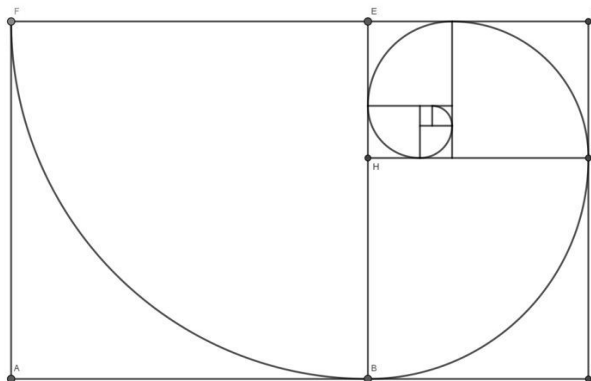


ACDF é um retângulo áureo. Ao retirarmos o quadrado *ABEF*, temos o retângulo áureo *BCDE*.

Retirando sucessivamente quadrados, temos:



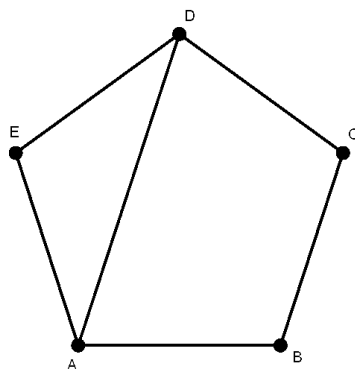
Traçando alguns arcos obtemos a espiral de ouro:



Espiral de ouro

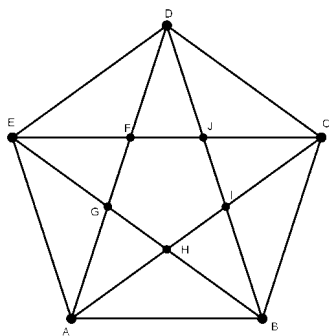
O pentágono regular e o pentagrama

A razão áurea também aparece no pentágono regular. Ao traçarmos uma diagonal de um pentágono, a razão entre essa diagonal e o lado é igual ao número de ouro.



$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \phi$$

Traçando todas as diagonais do pentágono, obtemos o pentagrama, símbolo da Escola Pitagórica, no qual também podemos encontrar a razão áurea.



$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} = \phi$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{FJ}} = \phi^2$$

A sequência de Fibonacci e a razão áurea

Sequência de Fibonacci é uma sequência proposta, mas já conhecida anteriormente, por Leonardo de Pisa, matemático italiano também conhecido por Fibonacci que viveu entre os séculos XII e XIII.

Nesta sequência (ou sucessão), o primeiro e o segundo termos são 1 e os outros termos, a partir do terceiro, é igual a soma dos dois termos anteriores. Temos então a sequência:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

A sequência de Fibonacci tem aplicações na análise de mercados financeiros, na ciência da computação e na teoria dos jogos. Também aparece em configurações biológicas.

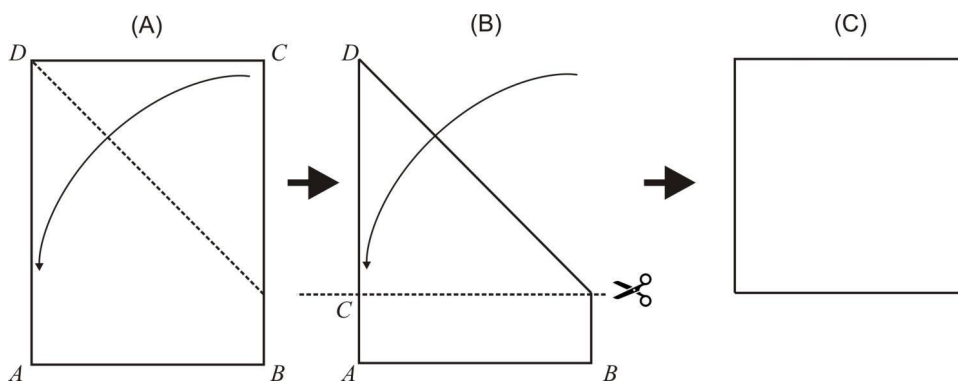
É interessante observar que a medida que dividirmos um termo por seu termo anterior, a razão aproxima-se da razão áurea. Veja:

1:1=1	21:13=1,615384615...
2:1=2	34:21=1,619047619...
3:2=1,5	55:34=1,617647059...
5:3=1,666...	89:55=1,618181818...
8:5=1,6	
13:8=1,625	

DOBRADURAS

1) Obtendo uma folha quadrada a partir de uma folha retangular de extremidades *A, B, C* e *D*:

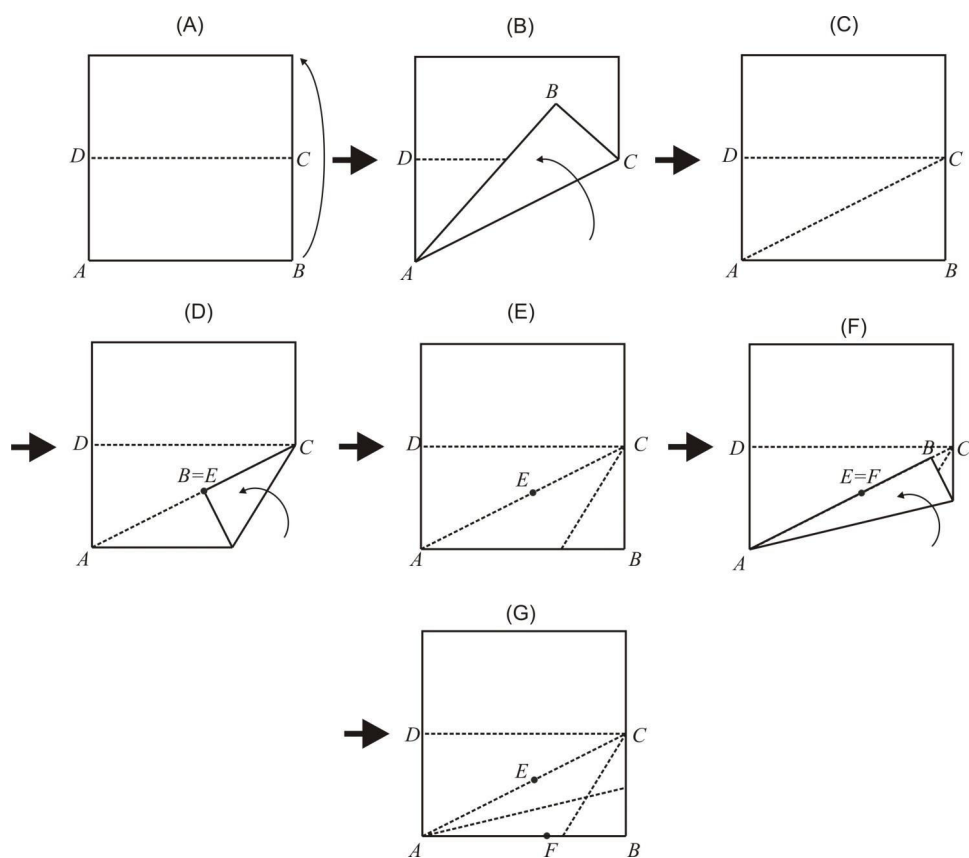
- i) faça uma dobra por *D*, levando a extremidade *C* até o lado *AD* (figuras A e B);
- ii) recorte a parte da folha que não ficou sobreposta. A parte restante forma um quadrado.



2) Obtendo dois segmentos em razão áurea:

- I. obtenha uma folha quadrada;
- II. assinale as extremidades inferiores da folha por *A* e *B* (figura A);
- III. dobre a folha ao meio, determinando nas extremidades da dobra os pontos *D* e *C*. Desdobre (figura A);
- IV. faça uma dobra por *A* e *C*. Desdobre (figuras B e C);

- V. faça uma dobradura sobrepondo o segmento BC à dobra AC . O ponto sobreposto por B será o ponto E . Desdobre (figuras D e E);
- VI. faça uma dobradura sobrepondo o lado AB à dobra AC . O ponto que sobrepõe o ponto E será o ponto F . Desdobre (figuras F e G);
- VII. os segmentos AF e FB estão em razão áurea, ou seja, $\frac{AF}{FB} = \frac{AB}{AF}$.



Bibliografia

- [1] Boyer, Carl B.: *História da Matemática*. Edgard Blücher, 2ª edição, 2003.
- [2] Cavacami, Eduardo e Yolanda Kioko Saito Furuya: *Explorando Geometria com Origami*. SBM, 2010.
- [3] Chesterton, Gilbert Keith: *Constructions with Compass and Straightedge*. <https://www.math.niu.edu/~richard/Math302/ch8.pdf>. Acessado em 08/01/2018.
- [4] Courant, Richard e Herbert Robbins: *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. 3.2 Constructible Numbers and Numbers Fields. Oxford University Press, 2ª edição, 1996.
- [5] Doce, Osvaldo e Nicolau Pompeo: *Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria plana*, volume 8. Atual Editora Ltda, 7ª edição, 1997.
- [6] Eves, Howard: *Introdução a história da Matemática*. Editora da Unicamp, 2004.
- [7] Gonçalves, Adilson: *Introdução à álgebra*. Projeto Euclides. IMPA, 5ª edição, 2015.
- [8] Iezzi, Gelson: *Fundamentos de Matemática Elementar - Complexos, Polinômios, Equações*, volume 6. Atual, 2ª edição, 1977.
- [9] Jorge, Mário e Michel Spira: *Oficina de Dobraduras. Apostila 9 da OBMEP*. SBM, 2015.
- [10] Lang, Robert J.: *Robert J. Lang Origami*. <https://www.langorigami.com/>. Acessado em 16/01/2018.
- [11] Lima, Elon Lages: *A equação do 3º grau*. Matemática universitária, (5):9–23, 1987.
- [12] Lima, Elon Lages: *Isometrias*. SBM, 1996.
- [13] MEC/SEF, Brasília: *Parâmetros curriculares nacionais (PCN's). Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Matemática*, 1998.
- [14] Monteiro, Cristina N. M.: *Origami: História de uma geometria axiomática*. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 2008.
- [15] Neto, Antonio Caminha Muniz: *Geometria*. Coleção PROFMAT. SBM, 2013.
- [16] Oliveira, João Milton de: *A Irracionalidade e Transcendência do Número π* . Tese de Mestrado, UNESP, 2013.
- [17] Rao, Tandalam Sundara: *Geometric Exercises in Paper Folding*. The Open Court Publishing Company, 3ª edição, 1917.
- [18] Rezende, Eliane Quelho Frota e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz: *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. Editora Unicamp, 2ª edição, 2008.
- [19] Roger C. Alperin, Robert J. Lang: *One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms*. <https://www.math.sjsu.edu/~alperin/AlperinLang.pdf>, 2006. Acessado em 22/01/2018.
- [20] Wagner, Eduardo: *Uma Introdução às Construções Geométricas - Apostila 8 da OBMEP*. SBM, 2015.