Universidade Federal de Sergipe
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROMAT
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Probabilidade para o Ensino Médio

por

César Augusto Vieira Lima
Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

Abril de 2013

César Augusto Vieira Lima

Probabilidade para o Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como requisito final para a obtenção de Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos

São Cristóvão
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

L732p

Lima, César Augusto Vieira
Probabilidade para o ensino médio / César Augusto Vieira Lima; orientador Almir Rogério Silva Santos – São Cristóvão, 2013.
47 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

1. Probabilidades. 2. Ensino médio. 3. Geometrial. I. Santos, Almir Rogério Silva, orient. II. Título

CDU 519.2:37.01

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Probabilidade para o ensino médio

por

Cesar Augusto Vieira Lima

Aprovada pela Banca Examinadora:

Almir Rogério Silva Santos
Prof. Dr. Almir Rogério Silva Santos - UFS
Orientador

Duílio Tadeu da Conceição Jr
Prof. Dr. Duílio Tadeu da Conceição Junior - UFRRJ
Primeiro Examinador

José Anderson Valença Cardoso
Prof. Dr. José Anderson Valença Cardoso - UFS
Segunda Examinadora

São Cristóvão, 12 de abril de 2013

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Sumário

Agradecimentos

Káta Cândida Pedrosa da Silva
Maria Izabel Vieira Lima
Familiares
Colegas de Turma

12 de Abril de 2013

Resumo

A presente monografia tem como objetivo mostrar os conceitos matemáticos sobre Probabilidade de maneira tal que ela ganhe um significado positivo no aluno do Ensino Médio, para que ele possa aplicar este conhecimento tanto no seu dia a dia na resolução de problemas corriqueiros, como na compreensão e resolução de problemas de maior complexidade.

Palavras Chaves: Probabilidade, Problemas de Probabilidade.

Introdução

Durante muitos séculos os matemáticos tentaram compreender os problemas que ocorrem de maneira aleatória, cujos resultados obtidos não dependem da intervensão humana, pois estes acontecem de maneira espontânea, sem que se possa estabelecer uma ordem para esses acontecimentos. Desta forma surge a probabilidade. No início estava associada apenas a jogos de azar, mas com o aprofundamento dos seus conteúdos passou a ser um dos mais importantes assuntos do conhecimento humano.

Contribuiram para essa transformação nomes como: Jerónimo Cardano (1501 - 1576) autor do trabalho - *"Libar de ludo aleal"*(Livros sobre jogos de azar), Pascal (1654) que se referia a probabilidade como a "Geometria do Acaso"e descreveu a famosa fórmula da probabilidade de um evento A:

$$P(A) = \frac{\text{total de casos favoravéis}}{\text{total de casos possíveis}}.$$

Fermat com seus esforços matemático deu o arranque definitivo a probabilidade, Jacques Bernoulli (1713) escreveu sobre a "Lei dos Grandes Números", Laplace (1749 - 1827) enunciou pela primeira vez a definição clássica de probabilidade, Gauss (1777 - 1855) dá uma aplicação científica a probabilidade na "teoria dos erros", Kolmogorov que propôs uma axiomática completa e consistente do cálculo de probabilidade, dentre outos nomes.

Notadamente, na maioria das salas de aula do Ensino Médio a probabilidade tenha se tornado mero problema de contagem. De fato a noção de contagem é essencial para a resolução de alguns problemas de probabilidade, o que não deve ser feito é reduzir um assunto tão importante apenas a exercícios de contagem. Afinal de contas o maior problema da educação é promover um conhecimento capaz de apreender os problemas globais e fundamentais, e não é reduzindo os conteúdos que alcançaremos esse objetivo.

Esta monografia pretende mostrar ao aluno do Ensino Médio de acordo com o que pede os parâmetros curriculares nacional (PCN), que a probabilidade é uma ferramenta essencial na compreesão de fenômenos presentes na convivência humana, mostrando a este não apenas a sua conceitualização formal mas a sua aplicabilidade no cotidiano humano, com a explanação de várias situações onde podemos utilizar os conceitos de probabilidade.

Tentando alcançar tal objetivo, a presente monografia está dividida em dois capítulos.

No primeiro, vamos fazer a conceitualização da probabilidade e de suas principais propriedades. No segundo resolvemos um apanhado de problemas que envolva o conceito de probabilidade, como:

- Ganhar na Mega-Sena.
- Coincidência de aniversário.
- Jogo de pôquer.
- Uso da probabilidade em pesquisa.
- Como usar a geometria para resolver problemas de probabilidade.
- Probabilidade do amigo oculto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo iremos trabalhar o conceito de probabilidade e descrever suas principais propriedades.

Definição 1 (Experimentos Aleatórios) *São aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza.*

Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento, em geral conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer.

Exemplos:

1. Lançar um dado sobre uma superfície plana e observar o número que aparece na face superior.

2. Numa cidade onde 15% dos habitantes possuem determinada moléstia, selecionar 20 pessoas e observar o número de portadores da moléstia.

3. O número de chamadas telefônicas que chega a uma central em um determinado intervalo de tempo.

4. Em um segmento de reta, selecionar um ponto.

5. Escolher uma lâmpada do proceso de fabricação e observar o seu tempo de duração.

6. No conjunto dos números naturais, selecionar um número e observar se ele é par ou ímpar.

Definição 2 (Espaço Amostral) *Conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Será indicado pela letra grega Ω. A menos que digamos o contrário, consideraremos apenas o caso em que o espaço amostral é finito ou infinito enumerável.*

Exemplo:

1. **Finito**

   (a) Lançar um dado e observar o número da face de cima.
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   (b) Três peças retiradas de uma linha de produção e cada peça é classificada em ótima (o) ou defeituosa (d).
   $\Omega = \{ooo, ood, odo, odd, doo, dod, ddo, ddd\}$

2. **Infinito**

   (a) Em um segmento de reta, selecionar um ponto.
   $\Omega = \{\text{qualquer ponto pertencente a esse segmento}\}$

   Neste caso o espaço amostral é infinito não enumerável.

   (b) No conjunto dos números naturais, selecionar um número e observar se ele é par ou ímpar.
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

Definição 3 (Evento) *Qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório. Será indicado por uma letra maiúscula do nosso alfabeto.*

Exemplo I:

Três peças retiradas de uma linha de produção e cada peça é classificada em ótima (o) ou defeituosa (d). $\Omega = \{ooo, ood, odo, odd, doo, dod, ddo, ddd\}$

- Evento A: ocorrência de duas peças defeituosas.

$$A = \{odd, dod, ddo\}$$

- Evento B: ocorrência de pelo menos uma peça defeituosa.

$$B = \{ood, odo, odd, doo, dod, ddo, ddd\}$$

Exemplo II:

Lançar um dado e observar o número da face de cima: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Evento A: ocorrência de número par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$
- Evento B: ocorrência de número primo $\Rightarrow B = \{2, 3, 5\}$
- Evento C: ocorrência de número menor que 3 $\Rightarrow C = \{1, 2\}$
- Evento D: ocorrência de número menor que 7 $\Rightarrow D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Evento E: ocorrência de número maior que 7 $\Rightarrow E = \emptyset$

Observação I: *Se o número de elementos do espaço amostral for* $n(\Omega) = n$ *então* Ω *terá* 2^n *subconjuntos e, portanto* 2^n *eventos. Entre os eventos, salientamos o conjunto vazio (chamado evento* **impossível***) e o próprio* Ω *(chamado evento* **certo***).*

Observação II: *Como os eventos são subconjuntos do espaço amostral podemos representar a união, a interseção de dois conjuntos e o complementar de um evento pelos diagramas.*

- A união de dois eventos A e B, representada por$A \cup B$, é o evento que ocorre se pelo menos um deles ocorre.

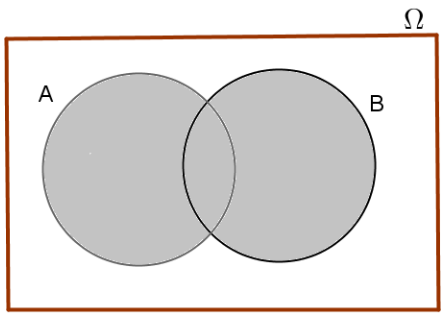


Figura 1.1: $A \cup B$

- A interseção de dois eventos A e B, representada por $A \cap B$, é o evento que ocorre se ambos ocorrem.

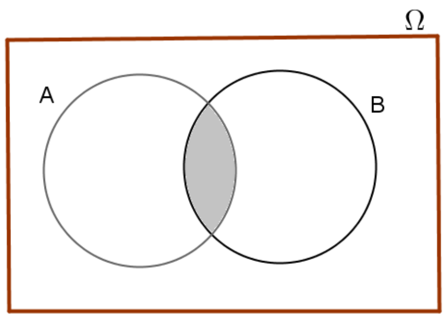


Figura 1.2: $A \cap B$

- O complementar do evento A, representado por $\overline{A}$, é o evento que ocorre quando A não ocorre.

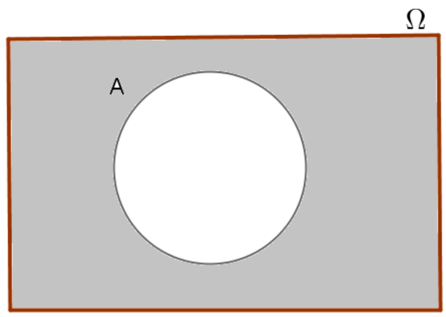


Figura 1.3: $\overline{A}$

Definição 4 (Probabilidade) *Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A, do espaço amostral Ω um número real, indicado por $\rho(A)$, chamado probabilidade do evento A, satisfazendo as seguintes condições:*

1. $0 \leq \rho(A) \leq 1$;

2. $\rho(\Omega) = 1$;

3. *Para cada sequência de eventos mutuamente exclusivos $A_1, A_2, ...$ (isto é eventos para os quais $A_i \cap A_j = \emptyset$ quando $i \neq j$), tem-se*

$$\rho(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i).$$

Dizemos que os números ρ definem uma distribuição de probabilidade sobre Ω.

A probabilidade de um evento A constituído por m elementos, pertencente a um espaço amostral Ω com n eventos simples, que suporemos igualmente possíveis, onde $(m \leq n)$ é dada por:

$$\rho(A) = \frac{m}{n}.$$

Este conceito axiomático de probabilidade baseado no conceito de frequência relativa dá a teoria da probabilidade um caráter, a princípio, mais empírico que matemático. Basta relembrar as experiências históricas feitas por Buffon, que lançou uma moeda 4.048 vezes e observou o resultado do evento cara 2048 vezes, chegando a conclusão que a frequência de cara é 0,5059.

O teorema a seguir contém as propriedades da probabilidades e está demonstrado no livro: "A Matemática do Ensino Médio", citado na bibliografia.

Teorema 1 *Se A e B são eventos de Ω, então:*

1. $\rho(A) = 1 - \rho(\overline{A})$;

2. $\rho(\emptyset) = 0$;

3. $\rho(A - B) = \rho(A) - \rho(A \cap B)$;

4. $\rho(A \cup B) = \rho(A) + \rho(B) - \rho(A \cap B)$;

5. Se $A \supset B$ *então* $\rho(A) \geq \rho(B)$.

Definição 5 (Probabilidade Condicional) *Sejam* $A \subset \Omega$ *e* $B \subset \Omega$. *Definimos a probabilidade condicional de* A*, dado que* B *ocorre, denotado por* A/B*, como segue:*

$$\rho(A/B) = \frac{\rho(A \cap B)}{\rho(B)}, \text{ se } \rho(B) \neq 0.$$

Obeserve o diagrama da interseção de dois eventos, $A \cap B$, e verifique que a probabilidade condicional de A, dado que B ocorre, está sendo representada pela região hachurada da figura. Assim temos que:

$$\rho(A \cap B) = \rho(B).\rho(A/B).$$

Exemplo I:

Consideremos 200 alunos que cursam o primeiro ciclo de uma faculdade. Destes alunos, 125 são homens (H) e 75 são mulheres (M); 110 cursam geografia (G) e 90 cursam biologia (B). Um aluno é sortedo ao acaso. Qual a probabilidade de que esteja cursando biologia, dado que é mulher?

Vamos construir uma tabela com essas informações.

Sexo-Disciplina	Geografia	Biologia	Total
Homem	60	65	125
Mulher	50	25	75
Total	110	90	200

Temo que:

- $\rho(B \cap M) = \dfrac{25}{200}$
- $\rho(M) = \dfrac{75}{200}$
- $\rho(B/M) = \dfrac{\rho(B \cap M)}{\rho(M)}$

Logo,

$$\rho(B/M) = \frac{\frac{25}{200}}{\frac{75}{200}} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo II:

Um baralho comum de 52 cartas é dividido aleatoriamente em 4 pilhas de 13 cartas cada. Calcule a probabilidade de que cada pilha tenha exatamente um ás.

Vamos definir os seguintes eventos:

- $A = \{$o ás de espadas está em qualquer uma das pilhas$\}$
- $B = \{$o ás de espadas e o ás de copas estão em pilhas diferentes$\}$
- $C = \{$os ases de espadas, copas e ouros estão em pilhas diferentes$\}$
- $D = \{$todos os 4 ases estão em pilhas diferentes$\}$

Aplicando a definição da probabilidade condicional para obter a probabilidade desejada no problema temos,

$$\rho(((A \cap B) \cap C) \cap D) = \rho(A).\rho(B/A).\rho(C/(A \cap B)).\rho(D/((A \cap B) \cap C).$$

Vamos encontrar o valor de cada uma das parcelas do segundo membro da equação afim de determinar o valor dessa probabilidade.

- $\rho(A) = 1$, todas as cartas serão distribuidas entre as 4 pilhas, logo o ás de espadas pertencerá a uma dessas pilhas.
- $\rho(B/A) = \frac{39}{51}$, como a pilha que contém o ás de espadas receberá 12 cartas, restam 39 cartas das 51 cartas possíveis.(lembre-se estamos considerando que o ás de espadas e o ás de copas estão em pilhas distintas)
- $\rho(C/(A \cap B)) = \frac{26}{50}$, como as pilhas que contêm os ases de espadas e copas, receberão 12 cartas cada uma, restam 26 cartas das 50 cartas possíveis.(lembre-se estamos considerando que os ases de espadas, copas e ouros estão em pilhas diferentes)
- $\rho(D/((A \cap B) \cap C) = \frac{13}{49}$, como as pilhas que contêm os ases de espadas, copas e ouros receberão 12 cartas cada uma, restam 13 cartas das 49 cartas possíveis.(lembre-se estamos considerando todos os 4 ases estão em pilhas diferentes)

Portanto, a probabilidade de que cada pilha receba exatamente um ás é:

$$\rho(((A \cap B) \cap C) \cap D) = 1.\frac{39}{51}.\frac{26}{50}.\frac{13}{49} \cong 0,105.$$

Capítulo 2

Resolvendo Problemas de Probabilidade

Neste capítulo estudaremos situações bem próximas da realidade do aluno do Ensino Médio, onde ele poderá de maneira contextualizada aplicar os conceitos adquiridos sobre probabilidade. Tendo assim a oportunidade de estabelecer uma compreensão mais centrada nos conhecimentos matemáticos do mundo que o rodeia.

2.1 Probabilidade na Mega Sena

Os jogos de azar sempre despertaram o interesse dos homens ao longo dos tempos. Logo não poderia ser diferente em nossa sociedade atual, afinal de contas a possibilidade de amealhar uma boa quantia alimenta o sonho de muitas pessoas. Como podemos constatar pelos vários jogos oficiais ou não, Mega Sena, Lotomania, Lotofácil, Tele Sena, Bingos, Jogo do Bicho entre outras variedades.

Não é muito difícil entender esse interesse incessante das pessoas pelos jogos de azar. Caso uma pessoa esteja disposta a aplicar R$ 2,00 toda semana, durante 50 anos, ela não ficará rica embora consiga acumular certa quantia para sua aposentadoria. Vamos considerar todos os meses com 4 semanas, logo teremos R$ 8,00 a serem aplicados todos os meses durante 600 meses. Supondo uma taxa fixa de 0,6% ao mês teríamos então:

Ano	Valor Acumulado
1 ano	R$ 99,83
2 anos	R$ 207,08
10 anos	R$ 1.408,42
20 anos	R$ 4.295,72
30 anos	R$ 10.145,80
40 anos	R$ 22.348,80
50 anos	R$ 47.223,86

Vale lembrar que atualmente, Abril de 2013, a taxa da poupança gira em torno de 0,41%.

Mas, se resolver apostar R$ 2,00 toda semana na Mega Sena durante 50 anos, a possibilidade de ficar rica é quase zero, mas não é zero. Talvez seja essa uma explição matemática para esse fenômeno.

Segundo, Francis Bacon [3], "o conhecimento das causas secretas e do movimento das coisas aumenta os limites do império humano tornando tudo possível". Temos então uma boa justificativa para esclarecer duas dúvidas recorrentes entre as pessoas sobre o jogo da Mega Sena.

- Jogar vários cartões com seis dezenas ou cartões com sete, oito, nove ou dez dezenas em um concurso?
- Jogar vários cartões em um único concurso ou jogar um cartão por concurso em vários concursos?

Temos então a seguinte pergunta:

$$\boxed{\text{Em qual das duas situações uma pessoa teria maior possibilidade de ficar rica?}}$$

Primeiramente vamos relembrar que probabilidade, no caso da Mega Sena, é um número ω determinado pelo quociente entre número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis. Logo $0 \leqslant \omega \leqslant 1$. E que a possibilidade de sair uma dezena qualquer não depende do dia da aposta, nem da roupa que você está usando no dia do sorteio, nem das dezenas mais sorteadas em concursos anteriores, nem as menos sorteadas.

O sorteio é feito com seis globos giratórios, cada um dos globos contendo 60 bolas idênticas quanto ao tamanho e ao peso, mas numeradas de 1 a 60. Então, feito um jogo simples com seis dezenas teremos a seguinte situação:

- No sorteio da primeira bola pode sair qualquer uma das seis dezenas, logo sua probabilidade é $\dfrac{6}{60}$.
- No sorteio da segunda bola, há 60 bolas no globo, mas só 59 serão aceitas, visto que uma já saiu no sorteio anterior, logo sua probabilidade é $\dfrac{5}{59}$.
- No sorteio da terceira bola, há 60 bolas no globo, mas só 58 serão aceitas, visto que duas já saíram nos sorteios anteriores, logo sua probabilidade é $\dfrac{4}{58}$.
- No sorteio da quarta bola, há 60 bolas no globo, mas só 57 serão aceitas, visto que três já saíram nos sorteios anteriores, logo sua probabilidade é $\dfrac{3}{57}$.
- No sorteio da quinta bola, há 60 bolas no globo, mas só 56 serão aceitas, visto que quatro já saíram nos sorteios anteriores, logo sua probabilidade é $\dfrac{2}{56}$.

- No sorteio da sexta bola, há 60 bolas no globo, mas só 55 serão aceitas, visto que cinco já saíram nos sorteios anteriores, logo sua probabilidade é $\frac{1}{55}$.
- Como os seis sorteios são independentes temos que a probabilidade para que o jogo simples feito antes dos sorteios seja o jogo premiado é

$$\omega = \frac{6}{60}.\frac{5}{59}.\frac{4}{58}.\frac{3}{57}.\frac{2}{56}.\frac{1}{55} = \frac{720}{36.045.979.200}.$$

Portanto, a probabilidade de acertar na Mega Sena com um único jogo de 6 dezenas é de apenas $0,000019974\%$.

Voltando ao nosso primeiro questionamento, vamos observar a tabela que existe atrás do cartão de aposta.

Quantidade de dezenas	Valor
6	R$ 2,00
7	R$ 14,00
8	R$ 56,00
9	R$ 168,00
10	R$ 420,00

Então, caso o apostador escolha 7 dezenas para preencher cartões simples, ou seja, cartões de seis dezenas, ele teria de preencher 7 cartões para cobrir todas as possibilidades de combinações com essas dezenas ($C_{7,6}$) e acabaria gastando os mesmos R$ 14,00. O mesmo fato acontece com os cartões com oito, nove e dez dezenas. Logo, a única vantagem em jogar sete, oito, nove e dez dezenas seria não precisar fazer todas as combinações, nem preencher todos os cartões com essas combinações.

Para o segundo questionamento, vamos considerar apenas o prêmio principal (que é acertar as seis dezenas) para efeito de facilitar o entendimento do leitor chamaremos de Apostador I aquele que joga vários cartões em um único concurso e Apostador II aquele que joga um cartão por concurso em vários concursos. Então temos:

Apostador I

- $n \rightarrow$ o número de jogos distintos feito pelo Apostador I ou número de casos favoráveis.
- $\rho \rightarrow$ o número de resultados possíveis para o concurso (este valor já foi calculado anteriormente, 36.045.979.200).
- $\omega_1 \rightarrow$ probabilidade do Apostador I ganhar o prêmio. Então temos,

$$\omega_1 = \frac{n}{\rho}.$$

Apostador II

- $n \rightarrow$ o número de concursos no qual o Apostador II participou com apenas um cartão em cada concurso.

- $\rho \rightarrow$ o número de resultados possíveis para cada concurso (este valor já foi calculado anteriormente, 36.045.979.200).

- $\omega_2 \rightarrow$ probabilidade do Apostador II ganhar o prêmio.

- $\phi_2 \rightarrow$ probabilidade do Apostador II não ganhar o prêmio.

Então, temos que a probabilidade do Apostador II não ganhar é

$$\phi_2 = \frac{(\rho-1)^n}{\rho^n},$$

pois como os concursos ocorrem de maneira independentes temos que a probabilidade de não ganhar em nenhum dos n concursos é dada pelos n produtos de parcelas iguais a $\frac{\rho-1}{\rho}$, onde $\rho-1$ representa o número de resultados favoráveis que são todos os resultados possíveis menos o cartão do Apostador II, o que nos dá

$$\phi_2 = \frac{(\rho-1)}{\rho}.\frac{(\rho-1)}{\rho}.\frac{(\rho-1)}{\rho}...\frac{(\rho-1)}{\rho} = \frac{(\rho-1)^n}{\rho^n}.$$

Sendo assim a probabilidade do Apostador II ganhar é dada por

$$\phi_2 + \omega_2 = 1,$$

o que resulta em

$$\omega_2 = 1 - \frac{(\rho-1)^n}{\rho^n}.$$

Vamos provar por indução que o Apostador I tem mais possibilidade de ser premiado do que o Apostador II.

Assim queremos provar que $\omega_1 > \omega_2$, ou seja,

$$\frac{n}{\rho} > 1 - \frac{(\rho-1)^n}{\rho^n}.$$

Para $n = 1$ é fácil ver que temos uma igualdade, pois nas duas situações temos um único jogo.

Para $n = 2$ temos,

$$\frac{2}{\rho} > 1 - \frac{(\rho-1)^2}{\rho^2}$$

$$\frac{2}{\rho} > 1 - \frac{\rho^2}{\rho^2} + \frac{2\rho}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}$$
$$\frac{2}{\rho} > 1 - 1 + \frac{2}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}$$
$$\frac{2}{\rho} > \frac{2}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}.$$

Logo, verdadeiro par $n = 2$.

Suponhamos que é verdadeiro para algum n, vamos mostrar a veracidade para $n + 1$,

$$\frac{n+1}{\rho} > 1 - \frac{(\rho - 1)^{n+1}}{\rho^{n+1}}.$$

Multiplicando a inequação

$$\frac{n}{\rho} > 1 - \frac{(\rho - 1)^n}{\rho^n}$$

por

$$\frac{\rho - 1}{\rho}$$

temos

$$\frac{n}{\rho} . \frac{(\rho - 1)}{\rho} > \frac{(\rho - 1)}{\rho} - \frac{(\rho - 1)^{n+1}}{\rho^{n+1}}$$
$$\frac{n\rho}{\rho^2} - \frac{n}{\rho^2} > \frac{\rho}{\rho} - \frac{1}{\rho} - \frac{(\rho - 1)^{n+1}}{\rho^{n+1}}$$
$$\frac{n}{\rho} + \frac{1}{\rho} - \frac{n}{\rho^2} > 1 - \frac{(\rho - 1)^{n+1}}{\rho^{n+1}}$$
$$\frac{n+1}{\rho} > 1 - \frac{(\rho - 1)^{n+1}}{\rho^{n+1}} + \frac{n}{\rho^2}.$$

Logo, podemos concluir que

$$\frac{n+1}{\rho} > 1 - \frac{(\rho - 1)^{n+1}}{\rho^{n+1}}.$$

Assim, conseguimos demonstrar que jogar vários cartões em um único concurso, matematicamente é melhor do que jogar um cartão em cada concurso. Caso esta demonstração esteja um pouco acima da capacidade de percepção do aluno do Ensino Médio, podemos desenvolver o seguinte raciocínio.

Caso o número de jogos fosse 2, é fácil perceber que o Apostator I tem mais possibilidade que o Apostador II, basta fazer a verificação numérica. Agora imagine que o número de apostas fosse suficientemente grande a ponto de se tornar igual a 36.045.979.200, a probabilidade de ser contemplado iria ser de 100%, enquanto um cartão em cada concurso não lhe daria esta certeza.

2.2 Probabilidade nos Aniversários

Nesta seção iremos mostrar uma situação que acaba intrigando o aluno do Ensino Médio por encontrar um resultado inusitado.

Na Copa do Mundo de Futebol de 2014 que será realizada no Brasil, considerando apenas os atletas e o juiz que participarão da final, qual a probabilidade de que pelo menos duas dessas pessoas façam anivérsario na mesma data (dia e mês)?

Antes de responder a esse questionamento vamos observar o que aconteceu nos últimos onze jogos de final de Copa do Mundo de Futebol.

Ano	Aniversariante em campo	Data
2010	Gregoy Kurtley (Holanda) e Joan Capdevila (Espanha)	3 de fevereiro
2006	Patrick Vieira (França e Zinedine Zidade (França)	23 de junho
2002	Ninguém	
1998	Emmanoel Petit (França) e Ronaldo (Brasil)	22 de setembro
1994	Franco Baresi (Itália) e Taffarel (Brasil)	8 de maio
1990	Ninguém	
1986	Sergio Batista (Argentina) e Andreas Brehme (Alemanha)	9 de novembro
1982	Ninguém	
1978	Johnny Rep (Holanda) e Jan Jongbloed (Holanda)	25 de novembro
1974	Johnny Rep (Holanda) e Jan Jongbloed (Holanda)	25 de novembro
1970	Piazza (Brasil) e Perluigi Cera (Itália)	25 de fevereiro

A princípio podemos achar que é uma mera coincidência, pois raciocinamos que pelo fato do ano ter 365 dias e são apenas 23 aniversários, existem mais combinações em que não há nenhuma coincidência de datas do que as que existem algum tipo de coincidência de data. E ficamos surpresos quando determinamos que essa probabilidade é superior a 50%.

Considerando probabilidade como a razão entre o número de casos desejados pelo número de casos possíveis e que dois acontecimentos independentes têm probabilidade final dada pelo produto de cada uma das probabilidades. Vamos então responder a seguinte pergunta. Qual a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário na mesma data (dia e mês) em um grupo com n pessoas?

Seja ϕ_1 a probabilidade de que não haja duas pessoas fazendo aniversário na mesma data (dia e mês). Logo para um grupo com n pessoas temos

$$\phi_1 = \frac{365}{365}.\frac{364}{365}.\frac{363}{365}\cdots\frac{365-n+1}{365}.$$

Chamando de ω_1 a probabilidade de que pelo menos duas pessoas do grupo façam aniversário na mesma data, essa probabilidade é dada pela diferença entre 1 e ϕ_1, ou seja,

$$\omega_1 = 1 - \phi_1.$$

Então vamos construir uma tabela com o auxílio de uma planilha eletrônica para facilitar a visualização desta situação.

N° de pessoas	Prob. de não ter coincidência	Prob. de ter coincidência
1	100	0
2	99,726	0,274
3	99,179	0,821
10	88,305	11,695
20	58,856	41,144
21	55,631	44,369
22	52,430	47,570
23	49,270	50,730
24	46,165	53,835
25	43,13	56,87
30	29,368	70,632
40	10,876	89,124
50	2,963	97,037

Percebemos pela visualização da tabela que a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas fazendo aniversário no mesmo dia com 23 pessoas é maior que 50%. Já para um grupo de 50 pessoas, ela ultrapassa os 97%. Logo, qual será o seu palpite para a Copa de 2014? Estamos nos referindo a coincidência de aniversários e não ao campeão da Copa.

2.3 Probabilidade no Jogo de Pôquer

Nesta seção vamos mostrar as diversas maneiras de se combinar as cartas no jogo de pôquer para em seguida mostrar alguns aspectos desse jogo do ponto de vista da probabilidade.

Para tanto vamos de maneira superficial, mas suficiente a nossa pretenção, mostrar a forma de se jogar duas versões do pôquer: o pôquer aberto e o pôquer fechado. Ambos com um baralho tradicional de 52 cartas.

Pôquer fechado

- Cada jogador recebe de forma individual cinco cartas, sem que seus oponentes possam vê-las;

- Cada jogador decide se continua ou não no jogo, compactuando ou não com as apostas;
- Caso continue no jogo ele pode efetivar a troca de até três de suas cinco cartas;
- Cada jogador decide se continua ou não no jogo, compactuando ou não com as apostas.

Pôquer aberto

- Cada jogador recebe de forma individual duas cartas, sem que seus oponentes possam vê-las;
- Cada jogador decide se continua ou não no jogo, compactuando ou não com as apostas;
- Para os jogadores que decidiram continuar, são postas sobre a mesa três cartas com a face voltada para cima afim que sejam observadas;
- Cada jogador decide se continua ou não no jogo, compactuando ou não com as apostas;
- Para os jogadores que decidiram continuar, são postas sobre a mesa duas cartas com a face voltada para cima afim que sejam observadas;
- Cada jogador decide se continua ou não no jogo, compactuando ou não com as apostas.

O jogo de pôquer tanto o aberto como o fechado tem por objetivo combinar as cartas de modo a permitir que o jogador faça o melhor jogo possível, seguindo a hierarquia estabelecida. Vejamos:

1. *Straight Flush*
   Cinco cartas em sequência, do mesmo naipe. Na eventualidade de um empate, o valor mais alto no topo da sequência ganha. Vale ressaltar que caso o Straight Flush seja de 10 ao ás, o jogo recebe o nome de *Royal Straight Flush*.

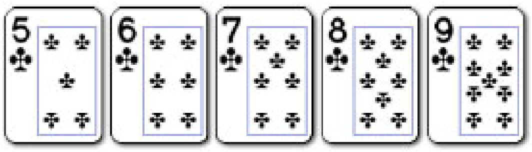


Figura 2.1: Straight Flush

2. **Quadra**

   Quatro cartas de valor idêntico e uma carta qualquer. Na eventualidade de um empate, a guadra mais alta ganha. Persistindo o empate, o valor mais alto da quinta carta desempata.

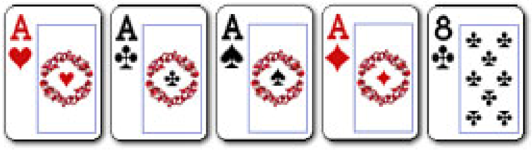


Figura 2.2: Quadra

3. *Full House*

   Três cartas de valor idêntico e as outras duas carta com valor idêntico mas diferente das três primeiras. Na eventualidade de um empate, a trinca mais alta ganha. Persistindo o empate, o par mais alto desempata.

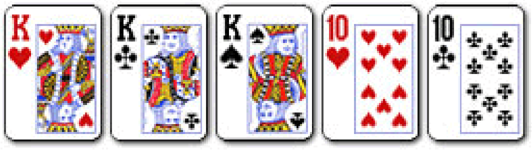


Figura 2.3: Full House

4. *Flush*

   Cinco cartas do mesmo naipe. Na eventualidade de um empate, a carta mais alta ganha. Persistindo o empate a segunda, terceira, quarta e quinta cartas mais altas desempata.

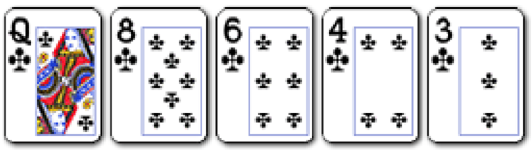


Figura 2.4: Flush

5. **Sequência**

   Cinco cartas em sequência. Na eventualidade de um empate, a carta com o valor mais alto do topo da sequência ganha. (O Ás é a única carta que pode ser utilizado na parte superior ou inferior da sequência.)

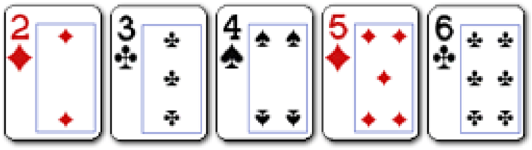


Figura 2.5: Sequência

6. **Trinca**
   Três cartas de valor idêntico e duas cartas não relacionadas. Na eventualidade de um empate, a trinca mais alta ganha. Persistindo o empate as duas cartas não relacionadas com valor mais alto desempata.

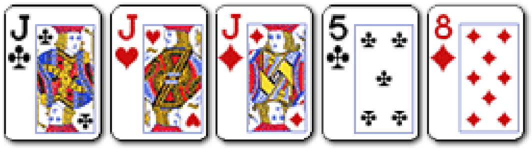


Figura 2.6: Trinca

7. **Dois Pares**
   Duas cartas de valor idêntico, outras duas cartas de outro valor idêntico entre si (mas diferente do valor das duas primeiras cartas) e outra carta não relacionada com as quatro primeiras. Na eventualidade de um empate, o par mais alto ganha. Persistindo o empate o segundo par mais alto ganha e, se necessário, a carta não relacionada com valor mais alto desempata.

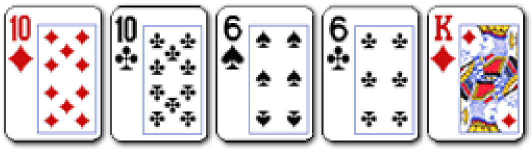


Figura 2.7: Dois Pares

8. **Um Par**
   Duas cartas de valor idêntico e três cartas não relacionadas. Na eventualidade de um empate, o par mais alto ganha. Persistindo o empate a carta não relacionada mais alta ganha e, se necessário, a segunda e terceira carta mais alta podem ser usadas para resolver o empate.

9. **Carta Alta**
   Qualquer mão que não se qualifique numa categoria listada acima. A carta mais alta ganha e, se necessário, a segunda, terceira, guarta e quinta carta mais alta pode ser utilizada para resolver o empate.

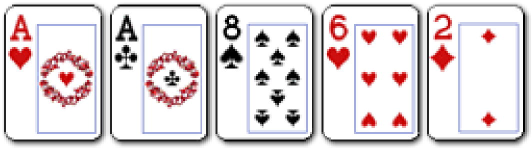


Figura 2.8: Par

Figura 2.9: Carta Alta

Vamos estabelecer o número de jogos de cada jogada tanto no pôquer fechado quanto no pôquer aberto, afim de percebermos a razão pela qual uma jogada é melhor que a outra e em seguida iremos construir uma tabela com a probabilidade de cada jogada.

Considerando o pôquer fechado, temos o número de casos possíveis dado pela combinação de cinquenta e duas cartas, tomadas cinco a cinco, ou seja, 2.598.960. Já para o número de casos desejados temos:

1. *Royal Straight Flush*
   São as sequência formadas por (10-J-Q-K-A) e como temos quatro naipes, o número de casos favoráveis é 4.

2. *Straight Flush*
   As sequências para formar o Straight Flush podem começar com Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, ou seja, de nove formas diferentes e como temos quatro naipes, o número de casos favoráveis é 36.

3. **Quadra**
   Treze cartas com valores diferentes e todas podendo formar quadras. Se a carta para a quadra for o rei, restam quarenta e oito cartas com valores diferentes ao do rei para compor o grupo de cinco cartas e valendo o mesmo raciocínio para as doze cartas restantes que completam o grupo de cartas de valores diferentes. Logo, temos 13 x 48, ou seja, 624 casos favoráveis.

4. *Full House*
   Treze cartas com valores diferentes e todas podendo formar trinca, a qual pode ser formada de 4 maneiras diferentes ($C_{4,3}$). Restam doze cartas com valores diferentes ao da trinca para formar o par, esse por sua vez pode ser formado de 6 maneiras diferentes ($C_{4,2}$). Logo, temos $13 \times 4 \times 12 \times 6$, ou seja, 3.744 casos favoráveis.

5. *Flush*

   Temos a combinação de treze cartas, tomadas cinco a cinco, $C_{13,5}$, podendo ser de 4 naipes diferentes. Lembrando de retirar os 4 Royal Straight Flush e os 36 Straight Flush. Logo, temos $1287 \times 4 - 40$, ou seja, 5.108 casos favoráveis.

6. **Sequência**

   As sequências podem começar com Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, ou seja, de dez formas diferentes e cada carta da sequência pode ser de quatro naipes diferentes. Lembrando de retirar os 4 Royal Straight Flush e os 36 Straight Flush. Logo temos 10×4^5 - 40, ou seja, 10.200 casos favoráveis.

7. **Trinca**

   Treze cartas com valores diferentes e todas podendo formar trinca, a qual pode ser formada de 4 maneiras diferentes ($C_{4,3}$). Restam doze carta de valores diferentes para compor grupos de dois, $C_{12,2}$, cada uma das duas cartas de valores diferentes pode ser escolhida de quatro maneiras diferentes, 4^2. Logo, temos $13.C_{4,3}.C_{12,2}.4^2$, ou seja, 54.912 casos favoráveis.

8. **Dois Pares**

   Temos a combinação de treze cartas, tomadas dois a dois, para compor os dois pares. Esses pares por sua vez podem ser formados de 6 maneiras diferentes cada um deles, 6^2. Restando quarenta e quatro cartas com valores diferentes, as cartas que formam par para compor o grupo de cinco cartas. Logo, temos $C_{13,2} \times 6^2 \times 44$, ou seja, 123.552 casos favoráveis.

9. **Um Par**

   Treze cartas com valores diferentes e todas podendo formar par, o par pode ser formado de 6 maneiras diferentes ($C_{4,2}$). Restam doze cartas de valores diferentes para compor grupos de três, $C_{12,3}$, cada uma das três cartas de valores diferentes pode ser escolhida de quatro maneiras diferentes, 4^3. Logo, temos $13 \cdot C_{4,2}.C_{12,3}.4^3$, ou seja, 1.098.240 casos favoráveis.

10. **Carta Alta**

    Treze cartas com valores diferentes, tomadas cinco a cinco $C_{13,5}$. Logo não temos par, trinca ou quadra, mas temos dez sequências, $(C_{13,5} - 10)$. Cada uma das cinco cartas de valores diferentes pode ser escolhida de quatro maneiras diferentes, 4^5, menos as quatro em que todas tem o mesmo naipe, $(4^5 - 4)$. Logo, temos $(C_{13,5} - 10).(4^5 - 4)$, ou seja, 1.302.540 casos favoráveis.

Considerando o pôquer aberto, temos o número de casos possíveis dado pela combinação de cinquenta e duas cartas, tomadas sete a sete, ou seja, 133.784.560. Já para o número de casos desejados, temos:

1. *Royal Straight Flush*

   São as quatro sequências formadas por (10-J-Q-K-A) para serem combinadas com duas outras cartas de um total de 47 cartas restantes, $C_{47,2}$. Logo, temos 4×1081, ou seja, 4.324 casos favoráveis.

2. *Straight Flush*

   As sequências para formar o Straight Flush podem começar com Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, ou seja, de nove formas diferentes e ter quatro naipes distintos, 4×9, para serem combinadas com duas outras cartas de um total de 46 cartas restantes, $C_{46,2}$. Visto que a carta subsequente não pode participar dessa escolha, temos 36×1035, ou seja, 37.260 casos favoráveis.

3. **Quadra**

   Treze cartas com valores diferentes e todas podendo formar quadras. Se a carta para a quadra for o rei, restam quarenta e oito cartas com valores diferentes ao do rei para compor o grupo de sete cartas, ou seja, uma combinação de quarenta e oito cartas três a três, $C_{48,3}$, e valendo o mesmo raciocínio para as doze cartas restantes que completam o grupo de cartas de valores diferentes. Logo, temos 13×17.298, ou seja, 224.848 casos favoráveis.

4. *Full House*

   - **Uma trinca, um par e duas cartas** - Treze cartas com valores diferentes e todas podendo formar trinca, a qual pode ser formada de 4 maneiras diferentes ($C_{4,3}$). Restam doze cartas com valores diferentes ao da trinca para formar o par, esse por sua vez pode ser formado de 6 maneiras diferentes ($C_{4,2}$). Para serem combinados com duas outras cartas de onze valores diferentes, $C_{11,2}$, cada uma das duas cartas de valores diferentes pode ser escolhida de quatro maneiras diferentes, 4^2. Logo, temos $13 \times 4 \times 12 \times 6 \times C_{11,2} \times 4^2$, ou seja, 3.294.720 casos favoráveis.
   - **Uma trinca e dois pares** - Treze cartas com valores diferentes e todas podendo formar trinca, a qual pode ser formada de 4 maneiras diferentes ($C_{4,3}$). Restam doze cartas com valores diferentes ao da trinca para formar dois pares, $C_{12,2}$, esses pares por sua vez podem ser formados de 6 maneiras diferentes cada um deles, 6^2. Logo, temos $13 \times 4 \times C_{12,2} \times 6^2$, ou seja, 123.552 casos favoráveis.
   - **Duas trincas e uma carta** - Temos a combinação de treze cartas, tomadas dois a dois, para compor as duas trincas, $C_{13,2}$. Esses pares por sua vez podem ser formados de 4 maneiras diferentes cada um deles, 4^2. Restando quarenta e quatro cartas com valores diferentes as cartas que formam trincas para compor o grupo de sete cartas. Logo, temos $C_{13,2} \times 4^2 \times 44$, ou seja, 54.912 casos favoráveis.

Então, temos um total de 3.473.184 casos favoráveis ao Full House.

5. *Flush*

    - **Com sete cartas do mesmo naipe** - Temos a combinação de treze cartas, tomadas sete a sete, $C_{13,7}$, podendo ser de 4 naipes diferentes. Logo, temos 1.716×4, ou seja, 6.864 casos.
    - **Com seis cartas do mesmo naipe** - Temos a combinação de treze cartas, tomadas seis a seis, $C_{13,6}$, podendo ser de 4 naipes diferentes. Restando trinta e nove cartas diferentes as do *Flush* para compor o grupo de sete cartas. Logo, temos $1.716 \times 4 \times 39$, ou seja, 267.696 casos.
    - **Com cinco cartas do mesmo naipe** - Temos a combinação de treze cartas, tomadas cinco a cinco, $C_{13,5}$, podendo ser de 4 naipes diferentes. Restando trinta e nove cartas diferentes as do *Flush* para serem combinadas duas a duas, $C_{39,2}$, e compor o grupo de sete cartas. Logo, temos $1.287 \times 4 \times C_{39,2}$, ou seja, 3.814.668 casos.

    Então, temos um total de 4.089.228 casos, lembrando de retirar os 4.324 Royal Straight Flush e os 37.260 Straight Flush, ficamos com 4.047.644 casos favoráveis.

6. **Sequência**

    - **Sequências com 7 cartas.**

      São oito sequências, que podem começar com Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8.
    - **Sequências com 6 cartas sem formar par.**

      Temos duas sequências de seis cartas que podem ser associadas com uma sétima carta de seis modos diferentes, 2×6, e sete sequências de seis cartas que podem ser associadas com uma sétima carta de cinco modos diferentes, 7×5.
    - **Sequências com 5 cartas sem formar par.**

      Temos duas sequências de cinco cartas que podem ser associadas com duas outras cartas de sete modos diferentes, $2 \times C_{7,2}$), e oito sequências de cinco cartas que podem ser associadas com duas outras cartas de seis modos diferentes, $8 \times C_{6,2}$.

      Cada uma das sete cartas de valores diferentes desse grupo (8 + 12 + 35 + 42 + 120 = 217) pode ser escolhida de quatro maneiras diferentes (7^4), menos as que formam *Flush*:

      * As 4 que tem sete cartas do mesmo naipe.
      * As 84 que tem seis cartas do mesmo naipe. O naipe das seis cartas pode ser escolhido de 4 maneiras diferentes; as seis cartas do grupo de sete que

terão o mesmo naipe podem ser escolhidas pela $C_{7,6}$; e a carta de naipe diferente das outras seis cartas pode ser escolhida de 3 maneiras diferentes, $(4 \times C_{7,6} \times 3)$.

* As 756 que tem cinco cartas do mesmo naipe. O naipe das cinco cartas pode ser escolhido de 4 maneiras diferentes; as cinco cartas do grupo de sete que terão o mesmo naipe podem ser escolhidas pela $C_{7,5}$; e as duas cartas de naipe diferente das outras cinco cartas, podem ser escolhido de 3 maneiras diferentes cada uma, $(4 \times C_{7,5} \times 3^2)$.

$$7^4 - 844 = 15.540$$

Logo, temos 217×15.540 ou seja 3.372.180 casos.

- **Sequências com 6 cartas formando par.**

  São nove sequências, onde podemos escolher uma dessas seis cartas para formar o par, que pode ser formado pela combinação de quatro dois a dois, $(9 \times 6 \times C_{4,2})$.

- **Sequências com 5 cartas formando par com umas das cartas da sequência.**

  Temos duas sequências de cinco cartas, onde podemos escolher uma dessas cinco cartas para formar o par, que pode ser formado pela combinação de quatro dois a dois e sete maneiras de escolher a útima carta, $(2 \times 5 \times C_{4,2} \times 7)$, e oito sequências de cinco cartas, onde podemos escolher uma dessas cinco cartas para formar o par, que pode ser formado pela combinação de quatro dois a dois e seis maneiras de escolher a útima carta, $(8 \times 5_{4,2} \times 6)$.

- **Sequências com 5 cartas formando par com uma carta fora da sequência.**

  Temos duas sequências de cinco cartas, onde podemos escolher uma das sete cartas com valores diferentes que não fazem parte da sequência para formar o par, que pode ser formado pela combinação de quatro dois a dois, $(2 \times 7 \times C_{4,2})$, e oito sequências de cinco cartas, onde podemos escolher uma das seis cartas com valores diferentes que não fazem parte da sequência para formar o par, que pode ser formado pela combinação de quatro dois a dois, $(8 \times 6 \times C_{4,2})$.

  Cada uma das cinco cartas de valores diferentes desse grupo $(9 \times 6 \times C_{4,2} + 2 \times 5 \times C_{4,2} \times 7 + 8 \times 5 \times C_{4,2} \times 6 + 2 \times 7 \times C_{4,2} + 8 \times 6 \times C_{4,2})$ pode ser escolhida de quatro maneiras diferentes, menos as quatro em que todas as cinco cartas tem o mesmo naipe e as trinta onde quatro dessas cinco cartas estejam no mesmo naipe de uma das cartas que formam o par,$(4^5 - 4 - 30)$. Logo, temos $(324 + 420 + 1440 + 84 + 288) \times 990$, ou seja, 2.530.440 casos.

- **Sequências com 5 cartas formando uma trinca.**

  Temos dez sequências de cinco cartas, onde podemos escolher uma dessas cinco cartas para formar a trinca, que pode ser formada pela combinação de quatro três a três e cada uma das quatro cartas de valores diferentes desse grupo pode ser escolhida de quatro maneiras diferentes, menos as três em que todas elas estejam no mesmo naipe de uma das cartas que formam a trinca. Logo, temos $10 \times 5 \times 4 \times 253$, ou seja, 50.600 casos favoráveis.

- **Sequências com 5 cartas formando dois pares.**

  Temos dez sequências de cinco cartas, onde podemos escolher duas dessas cinco cartas para formar os pares ($C_{5,2}$), esses pares por sua vez podem ser formados de 6 maneiras diferentes cada um deles, e cada uma das três cartas de valores diferentes desse grupo pode ser escolhida de quatro maneiras diferentes, menos uma em que todas elas estejam no mesmo naipe de uma das cartas que formam par, nos dois pares. Logo, temos $10 \times 10 \times 6 \times 6 \times 63$, ou seja, 226.800 casos favoráveis.

Então, temos um total de 6.180.020 casos favoráveis a Sequências.

7. **Trinca**
A combinação de treze cartas com valores diferentes, tomadas cinco a cinco, $C_{13,5}$, lembrando de retirar as dez sequências, $(C_{13,5} - 10)$, permite escolher uma dessas cinco cartas para formar a trinca, que pode ser formada de 4 maneiras diferentes, $5 \times C_{4,3}$. Cada uma das quatro cartas de valores diferentes desse grupo pode ser escolhida de quatro maneiras diferentes, menos as três em que todas elas estejam no mesmo naipe de uma das cartas que formam a trinca, $(4^4 - 3)$. Logo, temos $(C_{13,5} - 10) \times 5 \times C_{4,3} \times (4^4 - 3)$, ou seja, 6.461.620 casos favoráveis.

8. **Dois Pares**

- **Três pares e uma carta** - Temos a combinação de treze cartas, tomadas três a três, para compor os três pares, $C_{13,3}$. Esses pares por sua vez podem ser formados de 6 maneiras diferentes cada um deles, 6^3. Restando quarenta cartas com valores diferentes das cartas que formam par para compor o grupo de sete cartas. Logo, temos $C_{13,3} \times 6^3 \times 40$, ou seja, 2.471.040 casos favoráveis.
- **Dois pares e três cartas** - A combinação de treze cartas com valores diferentes, tomadas cinco a cinco, $C_{13,5}$, lembrando de retirar as dez sequências, $(C_{13,5} - 10)$, permite escolher duas dessas cinco cartas para formar os dois pares, que podem ser formados de 6 maneiras diferentes cada um, $C_{5,2} \times 6^2$. Cada uma das três cartas de valores diferentes desse grupo pode ser escolhida de quatro maneiras diferentes, menos uma que forma *Flush*, $(4^3 - 1)$. Logo, temos $(C_{13,5} - 10) \times C_{5,2} \times 6^2 \times (4^3 - 1)$, ou seja, 28.962.360 casos favoráveis.

Então, temos um total de 31.433.400 casos favoráveis a Dois Pares.

9. **Um Par**

   A combinação de treze cartas com valores diferentes, tomadas seis a seis, $C_{13,6}$, lembrando de retirar:

   - As nove sequências de seis cartas;
   - As duas sequências de cinco cartas que podem ser associadas com uma sexta carta de sete modos diferentes;
   - As oito sequências de cinco cartas que podem ser associadas com uma sexta carta de seis modos diferentes.

   $$C_{13,6} - 9 - 2 \times 7 - 8 \times 6$$

   Permite escolher uma dessas seis cartas para formar o par, que pode ser formado pela combinação de quatro dois a dois, $6.C_{4,2}$. Cada uma das cinco cartas de valores diferentes desse grupo pode ser escolhida de quatro maneiras diferentes, menos as quatro em que todas as cinco cartas tem o mesmo naipe e as trinta onde quatro dessas cinco cartas estejam no mesmo naipe de uma das cartas que formam o par,$(4^5 - 4 - 30)$. Logo, temos $(C_{13,6} - 9 - 2 \times 7 - 8 \times 6) \times 6 \times C_{4,2} \times (4^5 - 4 - 30)$, ou seja, 58.627.800 casos favoráveis.

10. **Carta Alta**

    A combinação de treze cartas com valores diferentes, tomadas sete a sete, $C_{13,7}$, lembrando de retirar:

    - As oito sequências de sete cartas;
    - As duas sequências de seis cartas que podem ser associadas com uma sétima carta de seis modos diferentes;
    - As sete sequências de seis cartas que podem ser associadas com uma sétima carta de cinco modos diferentes;
    - As duas sequências de cinco cartas que podem ser associadas com duas outras cartas de sete modos diferentes;
    - As oito sequências de cinco cartas que podem ser associadas com duas outras cartas de seis modos diferentes.

    $$C_{13,7} - 8 - 2 \times 6 - 7 \times 5 - 2 \times C_{7,2} - 8 \times C_{6,2} = 1.499$$

    Cada uma das sete cartas de valores diferentes desse grupo pode ser escolhida de quatro maneiras diferentes (7^4), menos as que formam *Flush*:

    - As 4 que tem sete cartas do mesmo naipe;

- As 84 que tem seis cartas do mesmo naipe. O naipe das seis cartas pode ser escolhido de 4 maneiras diferentes, as seis cartas do grupo de sete que terão o mesmo naipe podem ser escolhidas pela $C_{7,6}$ e a carta de naipe diferente das outras seis cartas podem ser escolhidas de 3 maneiras diferentes, $(4 \times C_{7,6} \times 3)$;
- As 756 que tem cinco cartas do mesmo naipe. O naipe das cinco cartas pode ser escolhido de 4 maneiras diferentes, as cinco cartas do grupo de sete que terão o mesmo naipe podem ser escolhidas pela $C_{7,5}$ e as duas cartas de naipe diferente das outras cinco cartas podem ser escolhidas de 3 maneiras diferentes cada uma, $(4 \times C_{7,5} \times 3^2)$.

$$7^4 - 844$$

Logo, temos $1.499 \times (7^4 - 844)$, ou seja, 23.294.460 casos favoráveis.

Jogada	Pôquer Fechado		Pôquer Aberto	
	N° de jogos	Probabilidade (%)	N° de jogos	Probabilidade (%)
Royal Straight Flush	4	0,00015	4.324	0,00323
Straight Flush	36	0,00139	37.260	0,02785
Quadra	624	0,02401	224.848	0,16807
Full House	3.744	0,14406	3.473.184	2,59610
Flush	5.108	0,19654	4.047.644	3,02549
Sequência	10.200	0,39246	6.180.020	4,61938
Trinca	54.912	2,11285	6.461.620	4,82987
Dois Pares	123.552	4,75390	31.433.400	23,49554
Par	1.098.240	42,25690	58.627.800	43,82255
Carta Alta	1.302.540	50,11774	23.294.460	17,41192
Total	2.598.960	100	133.784.560	100

Percebemos que no pôquer fechado a hierarquia obdece fielmente ao grau de dificuldade em se fazer determinada jogada, ou seja, quanto menor a probabilidade de realização de uma jogada, maior é o seu posicionamento na hierarquia do jogo. Mas, no pôquer fechado esta relação (grau de dificuldade - hierarquia) é quebrada com a jogada “Carta Alta”que embora tenha uma probabilidade menor que a jogada “Par”, tem um posto menor na hierarquia do jogo.

Outra diferença entre o pôquer fechado e o pôquer aberto no âmbito da probabilidade é que com a introdução de mais duas cartas para se compor uma jogada no pôquer aberto, a distribuição das probabilidades por jogada se altera de uma maneira não uniforme, ou seja, há um aumento ou diminuição na probabilidade de cada jogada dependendo da natureza dessa jogada.

2.4 Probabilidade em Pesquisa

Vamos agora mostrar uma utilização prática para o aluno do Ensino Médio no uso da probabilidade, tentando desta forma desmistificar a matemática como um instrumento inacessível as pessoas comuns. Ao mesmo tempo em que a apresentamos como uma ferramenta capaz de solucionar de maneira eficiente problemas do nosso cotidiano através de uma aproximação suficientemente embasada da probabilidade. Permitindo assim uma tomada de decisão.

Supondo que um sociólogo deseje fazer uma pesquisa estatística sobre o uso de drogas entre os estudantes da rede estadual de um determinado bairro de sua cidade. Como proceder com essa pesquisa? Perguntar diretamente aos estudantes pode causar constrangimento aos entrevistados e fazer com que eles recusem a participar da pesquisa por medo de se expor diante do entrevistado ou de emitir respostas falsas com medo de sofrer algum tipo de punição após a pesquisa.

Então a matemática através da probabilidade pode dar uma solução aproximada, mais confiável para esse impasse. Basta o pesquisador pedir aos pesquisados que procedam da seguinte maneira:

- Lançar uma moeda e verificar o seu resultado sem que o pesquisador possa ver o resultado obtido.
- Caso o resultado obtido tenha sido cara, o pesquisado deve responder a pergunta, "Sua idade é um número par?", com um simples "sim"ou "não".
- Caso o resultado obtido tenha sido coroa, o pesquisado deve responder a pergunta, "Você usa droga?", com um simples "sim"ou "não".

Desta maneira o pesquisador não saberá distinguir se o pesquisado está dizendo "sim", porque sua idade é par ou porque ele usa droga, ou se ele está dizendo "não"porque sua idade não é par ou porque ele não usa drogas.

O λ representado na figura 2.11 abaixo representa o percentual de estudantes que fazem uso de drogas.

Chamando o percentual de Sim de θ, podemos escrever esta equação:

$\theta =$(Percentual de cara)$\times$(Percentual de idade par) + (Percentual de coroa)$\times$(Percentual de pessoas que usam drogas).

Assim,

$$\theta = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \lambda.$$

Multiplicando os dois membros por 2 temos

$$2\theta = 0,5 + \lambda.$$

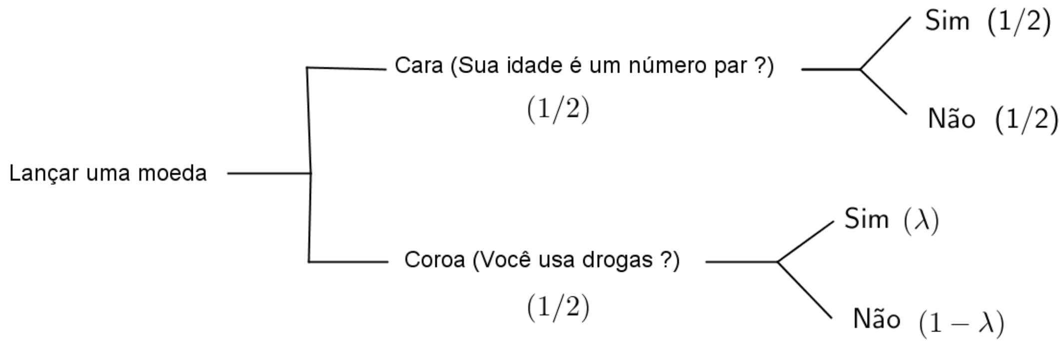


Figura 2.10: Diagrama da Pesquisa

Que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\lambda = 2\theta - 0,5.$$

Como no final da pesquisa temos a quantidade de pesquisados e a quantidade de respostas SIM fica fácil determinar o valor de θ e substituindo-o na última equação acima podemos encontrar um valor aproximado para o percentual de pesquisado que faz uso de droga, no ambiente da pesquisa.

O valor encontrado é uma aproximação, pois sabemos que ao lançar uma moeda os resultados possíveis são "cara"ou "coroa"e a medida que o número de lançamentos aumenta, temos a tendência e não a certeza de obter a mesma quantidade de "caras"e "coroas", ou seja, o evento "cara"vai ocorrer mais ou menos a metade das vezes. O que está por trás dessa intuição é o seguinte:

- Os eventos elementares são todos igualmente "prováveis".
- O número de elemento de "cara"é justamente a metade do elemento de "não cara".

Como também podemos supor que o número de pessoas nascidas em um ano seja bem próximo do número de pessoas nascidas no ano seguinte.

2.5 Probabilidade Geométrica

Resolveremos a seguir alguns problemas de determinação de probabilidade onde os métodos geométricos são os mais apropriados.

Nesta seção iremos mostrar o uso da geometria para a resolução de problemas de probabilidade, mostrando ao aluno do Ensino Médio que a probabilidade não está resumida na contagem numérica dos casos possíveis e favoráveis.

Então, imagine que você vai participar de uma brincadeira inocente de tiro ao alvo, onde os seus olhos serão vendados. Sabendo que o alvo tem a forma de um círculo e dentro deste existe um outro círculo menor que o primeiro, pintado de vermelho. Caso você venha a acertar o alvo mesmo com os olhos vendados, então, qual a probabilidade de ter acertado o círculo menor?

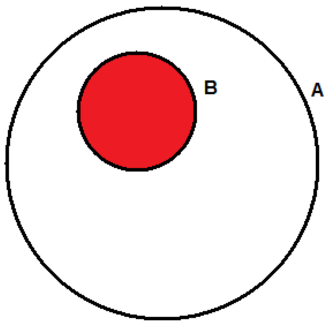


Figura 2.11: Diagrama da Pesquisa

Para a resolução deste problema vamos utilizar o seguinte conceito para probabilidade. Caso uma região B esteja contida em uma outra região A, a probabilidade de se escolher um ponto da região A que seja também um ponto da região B, é dada pelo quociente entre a área da região B e a área da região A.

Portanto, a probabilidade de acertar o círculo menor na certeza de que acertou o círculo maior é:

$$\phi = \frac{\text{Área da região B}}{\text{Área da região A}}.$$

2.5.1 O encontro

Caso dois amigos, Aldo e Beatriz, tenham marcado um almoço em determinado restaurante entre 12 e 13 horas, mas tinham combinado que ao chegar no restaurante um só esperaria o outro 20 minutos no máximo para fazer o seu pedido. Qual seria a probabilidade de iniciarem juntos a refeição ?

Como o momento de chegada dos amigos ao restaurante é imprevisível no intervalo de 12 e 13 horas, podemos associar um par ordenado (a,b) para que expresse esses momentos de chegada. Onde a é o horário de chegada de Aldo e b é o horário de Beatriz, temos assim que os casos possíveis para o par ordenado (a,b) é representado por um quadrado de lado unitário, no Plano Cartesiano.

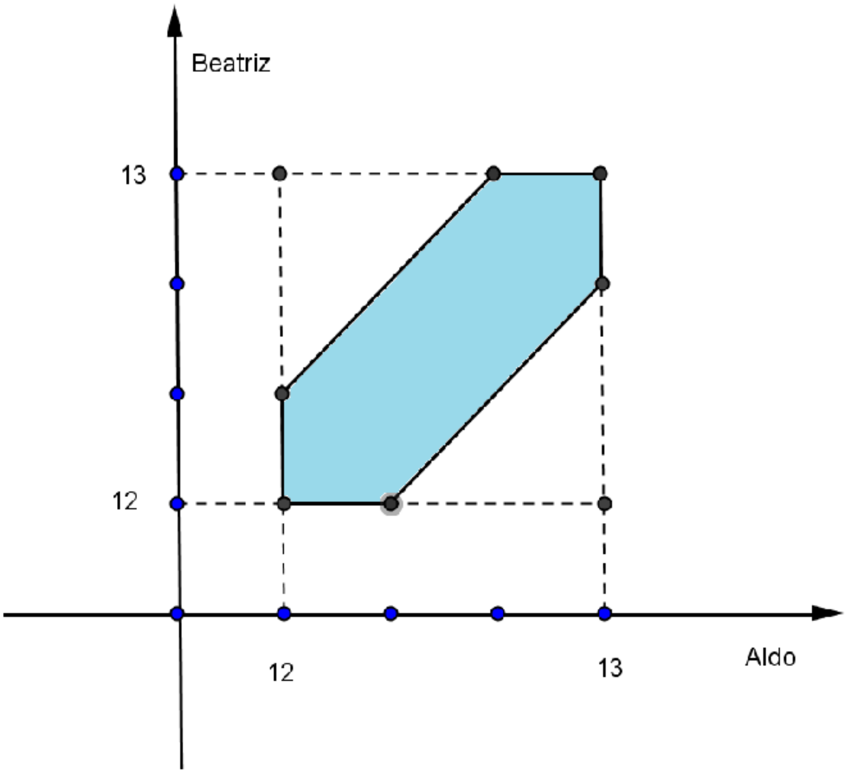


Figura 2.12: Probabilidade Geométrica

É fácil ver que nem todos os pontos dessa região serão favoráveis a condição do nosso problema. Apenas aqueles que satisfazem a inequação:

$$|a-b| \leq \frac{1}{3}, \tag{2.1}$$

pois queremos que a diferença dos horários de chegada não ultrapasse 20 minutos, ou seja, $\frac{1}{3}$ de hora. Porém, a inequação (2.1) é equivalente a

$$a-b \leq \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad a-b \geqslant \frac{1}{3}.$$

Representados pela região pintada de azul na figura 2.12.

Logo, a probabibidade de Aldo e Beatriz iniciarem juntos a refeição, é dada pela razão entre a área da região azul e a área do quadrado.

$$\rho = \frac{\text{Área da região azul}}{\text{Área do quadrado}}.$$

Portanto,

$$\rho = \frac{1-(\frac{2}{3}.\frac{2}{3})}{1},$$

ou seja
$$\rho = \frac{5}{9}.$$

2.5.2 Retas Paralelas e a moeda

Considere um feixe de retas paralelas onde a distância entre elas seja constante. Qual a probabilidade de se jogar ao acaso uma moeda sobre esse feixe de paralelas e essa moeda não venha a interceptar nenhuma das retas do feixe?

É fácil ver que se a distância entre as retas for menor que o diâmetro da moeda, ela sempre irá interceptar pelo menos uma das retas. Logo a probabilidade seria igual a zero. Mas, caso a distância entre as retas seja maior que o diâmetro da moeda, ela pode vir a interceptar ou não uma das retas.

Considerando:

- $r \rightarrow$ o raio da moeda;
- $2a \rightarrow$ a distância entre duas retas;
- $2a > 2r$;
- $l \rightarrow$ eixo equidistante entre duas retas paralelas adjacentes;
- $x \rightarrow$ a distância entre o centro da moeda e o eixo l;

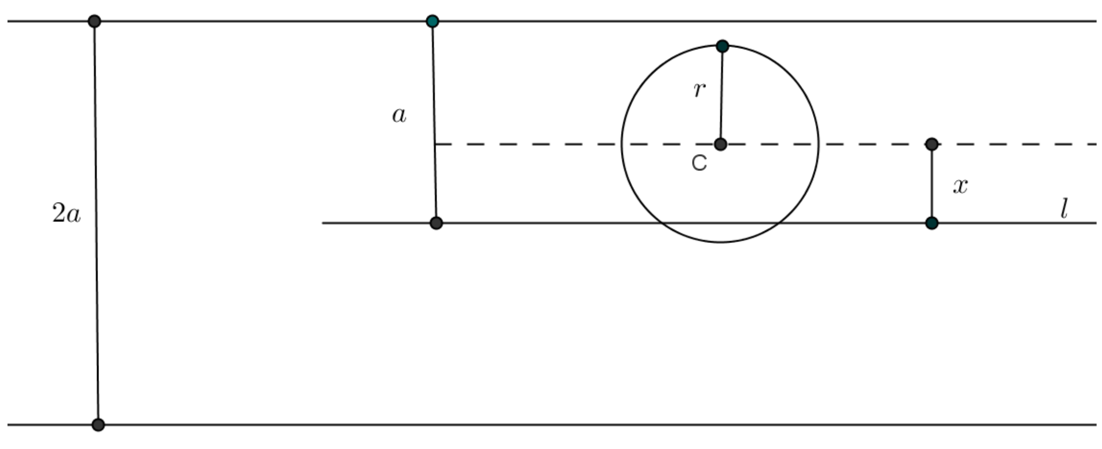
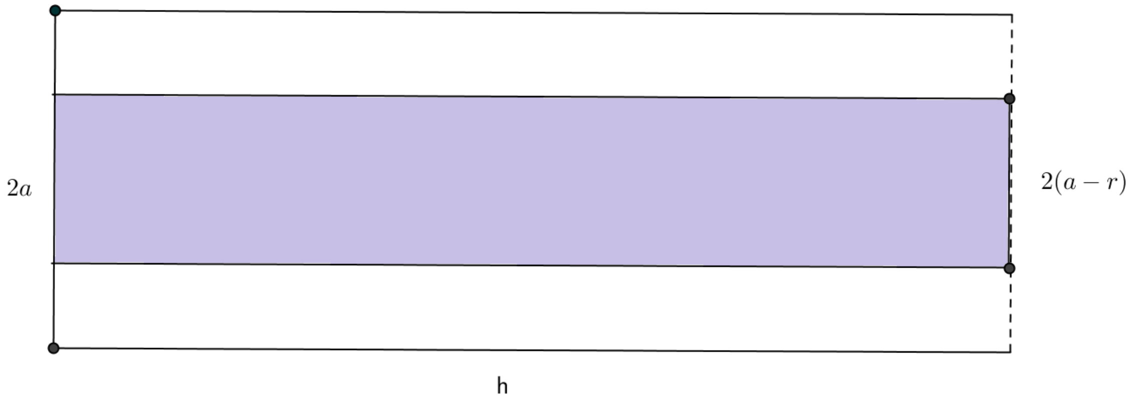


Figura 2.13: Probabilidade Geométrica

Logo, a moeda não intercepta quaisquer das retas do feixe, desde que $x < a - r$. Daí, o lugar geométrico do centro da moeda deverá ser a região retangular infinita representada pelo retângulo pintado na figura abaixo.



Então a probabilidade de se jogar ao acaso uma moeda sobre esse feixe de paralelas e essa moeda não venha a interceptar nenhuma das retas do feixe será dada por:

$$P(A) = \frac{\text{Área retangular pintada}}{\text{Área retangular total}} = \lim_{h\to\infty} \frac{2(a-r)h}{2ah} = \frac{a-r}{a}.$$

2.5.3 A agulha de Buffon

O conde de Buffon queria saber qual a probabilidade de uma agulha de comprimento l lançada no plano marcado por linhas paralelas tocar em uma dessas linhas marcadas. Considere que estas linhas estão separadas por uma distância a uma das outras e que $l \leq a$.

Faça:

- $x \to$ distância entre o ponto médio da agulha e a linha mais próxima.
- $\theta \to$ o ângulo formado entre a agulha e a linha.

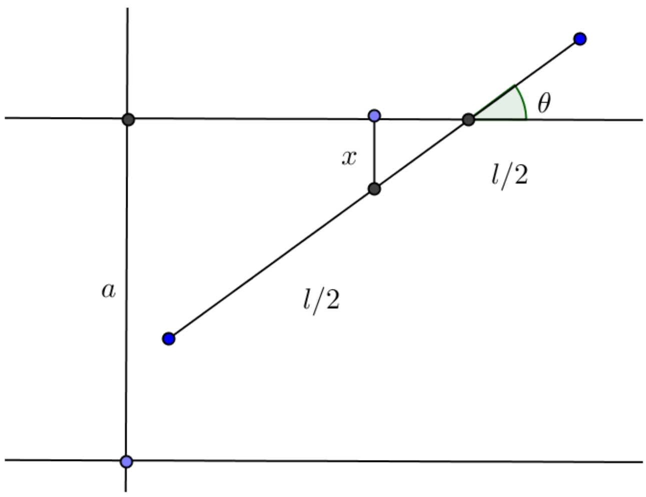


Figura 2.14: A agulha de Buffon.

A distância x não depende do comprimento da agulha. Logo, temos o menor valor quando $x = 0$, ou seja, o ponto médio da agulha está sobre a linha e o maior valor quando $x = a/2$, ou seja, o ponto médio da agulha está sobre a metade da distância entre as linhas. Assim temos:

$$0 \leq x \leq \frac{a}{2}.$$

O ângulo θ não depende da posição do ponto médio da agulha e seu valor está no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$.

Daí, o lugar geométrico que representa a relação posição da agulha e reta mais próxima está representado na figura 2.15.

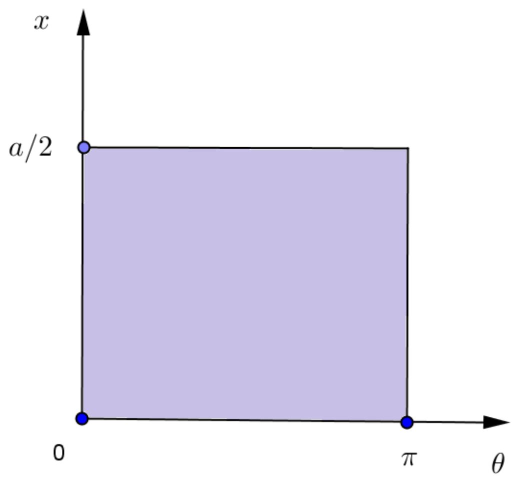
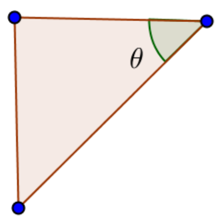


Figura 2.15: Área A

Observe o triângulo retirado da figura I acima.



O segmento que representa a distância do ponto médio da agulha e a linha mais próxima com medida igual a x é perpendicular a linha (a menor distância de um ponto a uma reta é dada por um segmento perpendicular a reta). Chamando de K o segmento oposto ao ângulo reto, com extremos no ponto médio da agulha e no ponto onde a agulha toca a linha (quando existir o toque), podemos ter as situações da figura 2.16.

A agulha interceptará a linha mais próxima se $x \leq \frac{l}{2} sen\theta$. Logo, o lugar geométrico que representa a relação onde existe o encontro da agulha com a linha está representado na figura 2.17.

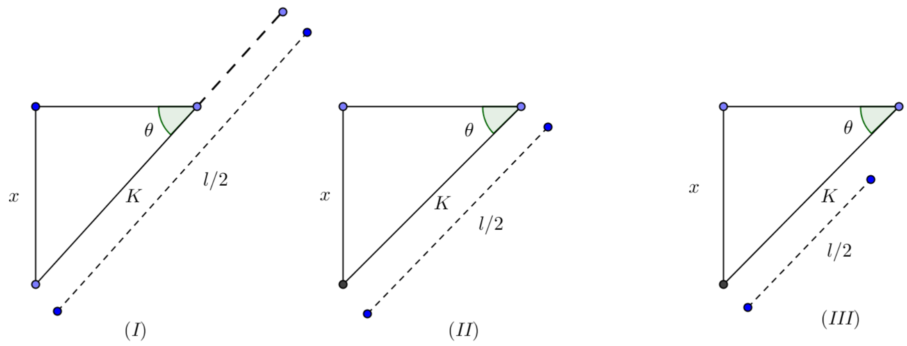


Figura 2.16: A Agulha de Buffon.

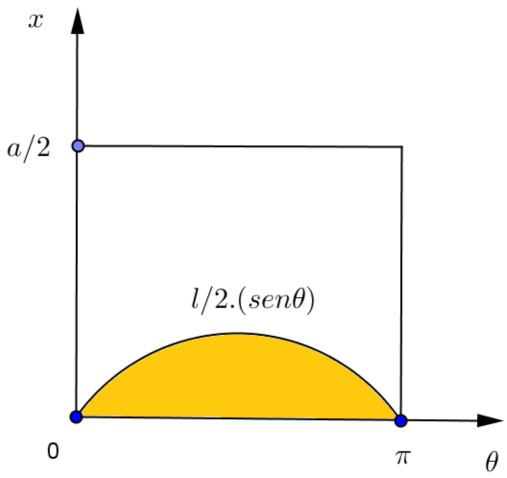


Figura 2.17: Area B

Assim a probabilidade de uma agulha de comprimento l lançada no plano marcado por linhas paralelas tocar em uma dessas linhas marcadas é dada pela probabilidade $P(l)$,

$$P(l) = \frac{\text{Área B}}{\text{Área A}}.$$

O cálculo da Área A é direto por se tratar de uma região elementar, mas para o cálculo da Área B vamos necessitar do uso de integral.

Assim, a área sob a curva $sen\theta$ de θ a π é dada por:

$$\text{Área B} = \int_0^{\pi} \frac{l}{2} sen\theta d\theta = l.$$

.

Logo, a probabilidade $P(l)$ é

$$P(l) = \frac{\text{Área B}}{\text{Área A}} = \frac{\int_0^{\pi} \frac{l}{2} sen\theta d\theta}{\pi(a/2)} = \frac{l}{\pi(a/2)} = \frac{2l}{\pi a}.$$

2.6 Probabilidade do Amigo Oculto

Nesta seção iremos mostrar uma brincadeira comum do nosso cotidiano, principalmente nas festas de final de ano entre colegas de trabalho ou familiares que é o amigo oculto. A brincadeira consiste em escrever o nome de todas as pessoas do grupo em um papel, recortar o nome de cada pessoa de maneira individual e em seguida dobrar o papel para que não se possa identificar o nome contido nele e assim promover o sorteio, onde cada um retira um desses papelzinhos com o nome de seu amigo oculto, caso alguém do grupo retirar o seu próprio nome deverá ser promovido um novo sorteio. Nesta seção queremos responder a seguinte pergunta:

Qual a probabilidade de ser feito um único sorteio em um grupo com n pessoas?

Inicialmente vamos estabelecer que o grupo seja composto de seis pessoas: Aldo, Beatriz, César, Danilo, Élder e Fábio, que passaram a ser representados da seguinte forma A, B, C, D, E e F. Caso cada elemento do grupo { A, B, C, D, E, F} fosse se relacionar com um outro elemento do grupo $\{\bigstar, \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \blacksquare\}$, o elemento A poderia se relacionar de 6 maneiras diferentes, o elemento B de 5 maneiras diferentes e assim por diante, teríamos então uma permutação de seis elemento, ou seja, 6! sequências diferentes para realizar esses relacionamentos.

Mas como cada elemento do grupo {A, B, C, D, E, F} tem que se relacionar com um elemento do mesmo grupo sem que o elemento se relacione com ele mesmo, temos uma permutação caótica de seis elementos, ou seja, das 6! sequências diferentes para realizar esses relacionamentos necessitamos retirar todas as sequências em que haja um elemento se relacionando com ele mesmo.

Tomando:

- $n \to$ número de pessoas do grupo.
- $\rho_n \to$ probabilidade para que o sorteio seja válido em um grupo com n pessoas.
- $K_n \to$ número de sequências validas para o sorteio com n pessoas.
- $n! \to$ número de sequências possíveis para o sorteio com n pessoas.

A probabilidade de ser feito um único sorteio em um grupo com n pessoas é $\rho_n = \dfrac{K_n}{n!}$, logo o problema é encontrar o valor de K_n (o número de permutações caóticas com n elementos).

Vamos representar cada sorteio por meio de uma lista, como os exemplos abaixo.

Exemplo:

- (A B C D E) (F) $\to$ A se relaciona com B, B se relaciona com C, C se relaciona com D, D se relaciona com E, E se relaciona com A e F se relaciona com F.

- (A C F B) (D) (E) $\rightarrow$ A se relaciona com C, C se relaciona com F, F se relaciona com B, B se relaciona com A; D se relaciona com D; E se relaciona com E.

- (C E B) (A F D) $\rightarrow$ C se relaciona com E, E se relaciona com B e B se relaciona com C; A se relaciona com F, F se relaciona com D e D se relaciona com A.

- (C E B D F A) $\rightarrow$ C se relaciona com E, E se relaciona com B e B se relaciona com D; D se relaciona com F, F se relaciona com A e A se relaciona com C.

Percebemos que dos quatro exemplos apenas os dois últimos representam sequências com permutação caótica, pois não apresentam subgrupos com apenas um elemento. Logo, podemos concluir que as permutações caóticas com seis elementos K_6 advêm da soma de dois grupos:

- **As permutações caóticas com 5 elementos fazendo a introdução de um sexto elemento**

  Pegando uma permutação caótica qualquer do grupo {A, B, C, D, E}, por exemplo (C E B) (A D), caso o elemento F seja introduzido ao grupo, ele poderá ser inserido em cinco lugares distintos: (C F E B) (A D), (C E F B) (A D), (C E B F) (A D), (C E B) (A F D) e (C E B) (A D F). Como podemos fazer isso com qualquer uma das K_5 permutações caóticas, temos $5.K_5$.

- **As permutações com 5 elementos em que apenas um desses elemetos está se relacionando com ele mesmo**

  Pegando uma permutação qualquer do grupo { A, B, C, D, E}, com o formato descrito acima, por exemplo (C E B A) (D), caso o elemento F seja introduzido ao grupo para que esta permutação se torne uma permutação caótica, o elemento F terá que ser inserido no subgrupo que tem um único elemento. Como o número de elementos desse grupo é dado por $5.K_4$, então

$$K_6 = 5.K_5 + 5.K_4.$$

Repetindo o mesmo raciocínio para um grupo com n pessoas temos, K_n como a soma de dois grupos.

- As permutações caóticas com K_{n-1} elementos onde faremos a introdução de um novo elemento em cada uma de suas permutações caóticas e que por sua vez pode ser feita de $(n-1)$ maneiras em cada uma das permutações caóticas, então temos $(n-1).K_{n-1}$.

- As permutações com $(n-1)$ elementos em que apenas um desses elemetos está se relacionando com ele mesmo. Em cada uma dessas permutações faremos a introdução de um novo elemento no subgrupo que tem um único elemento. Como o número de elementos desse grupo é dado por $(n-1).K_{n-2}$.

Logo,

$$K_n = (n-1).K_{n-1} + (n-1).K_{n-2}. \tag{2.2}$$

Como se trata de uma recorrência de segunda ordem. Podemos determinar o número de permutações caóticas para um determinado valor de n, desde que saibamos o valor de duas permutações caóticas consecutivas anteriores a n. Por exemplo:

- Para $n = 1$, a única permutação existente é (A), onde $K_1 = 0$ e $\rho_1 = 0$.
- Para $n = 2$, as permutações são (A)(B) e (A B), onde $K_2 = 1$ e $\rho_2 = \frac{1}{2}$.
- Para $n = 3$, as permutações são (A)(B)(C), (A)(B C), (B)(A C), (C)(A B), (A B C) e (A C B), onde $K_3 = 2$ e $\rho_3 = \frac{1}{3}$. Note que, pela fórmula de recorrência (2.2), temos

$$K_3 = (3-1).K_{3-1} + (3-1).K_{3-2}$$

$$K_3 = 2.1 + 2.0 = 2.$$

E como $3! = 6$, segue que

$$\rho_3 = \frac{K_3}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

- Para $n = 4$, como são 24 permutações fica trabalhoso indentificá-las uma a uma para em seguida contar as que representam permutações caóticas. Assim, usaremos apenas a fórmula de recorrência (2.2). Logo,

$$K_4 = (4-1).K_{4-1} + (4-1).K_{4-2}$$

$$K_4 = 3.2 + 3.1$$

$$K_4 = 9 \quad \text{e} \quad \rho_4 = \frac{3}{8}.$$

Vamos agora obter uma fórmula fechada para ρ_n. Inicialmente note que, pela fórmula (2.2), obtemos

$$\rho_n = \frac{K_n}{n!}$$

$$\rho_n = \frac{(n-1)K_{n-1} + (n-1)K_{n-2}}{n!}$$

$$\rho_n = \frac{(n-1)K_{n-1}}{n(n-1)!} + \frac{(n-1)K_{n-2}}{n(n-1)(n-2)!}$$

$$\rho_n = \frac{(n-1)}{n}\rho_{n-1} + \frac{1}{n}\rho_{n-2}$$

$$
\begin{aligned}
\rho_n &= \rho_{n-1} - \frac{1}{n}\rho_{n-1} + \frac{1}{n}\rho_{n-2} \\
\rho_n - \rho_{n-1} &= -\frac{1}{n}(\rho_{n-1} - \rho_{n-2}). \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Faça

$$d_n = \rho_n - \rho_{n-1}.$$

Assim, a equação (2.3) pode ser reescrita da seguinte forma

$$d_n = -\frac{1}{n}d_{n-1}.$$

Note que

$$
\begin{aligned}
d_3 &= -\frac{1}{3}d_2 \\
d_4 &= -\frac{1}{4}d_3 \\
d_5 &= -\frac{1}{5}d_5 \\
&\vdots \\
d_n &= -\frac{1}{n}d_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Multiplicando, obtemos

$$d_n = \frac{2(-1)^n}{n!}d_2.$$

Porém,

$$d_2 = \rho_2 - \rho_1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\rho_n - \rho_{n-1} = d_n = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
\rho_2 - \rho_1 &= \frac{1}{2!} \\
\rho_3 - \rho_2 &= \frac{1}{3!} \\
&\vdots \\
\rho_n - \rho_{n-1} &= \frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

Somando estas equações obtemos a fórmula:

$$\rho_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Pela fórmula geral para ρ_n temos a seguinte tabela:

n	ρ_n
1	0
2	0,5000
3	0,3333
4	0,3750
5	0,3666
6	0,3680
7	0,3678

Percebemos pela tabela que quando inserimos um novo elemento num gurpo con n elementos a probabilidade aumenta quando $n+1$ é um número par e diminui quando $n+1$ é um número ímpar. Além disso, verificamos que quando n cresce o valor de ρ_n converge para $1/e \approx 0,36788$. Isso pode ser demonstrado rigorosamente, porém não o faremos aqui. Leitores interessados podem consultar a referência [8].

Referências Bibliográficas

[1] S. Hazzan, *Fundamentos de Matemática Elementar*, Editora Atual, 1998.

[2] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado, *A Matenática do Ensino Médio* vol. 2, SBM.

[3] Scientific American Brasil, edição n° 7 e n° 10, Editora Moderna, 2012.

[4] Cálculo Matemática para todos, edição n° 15, Editora Segmento, 2012.

[5] Matemática Universitária, edição n° 48 e n°49, SBM, 2012.

[6] E. Morin, *Os Sete Saberes Para a Educação do Futuro*, Instituto Piaget - Divisão Editorial.

[7] F. W. Rodrigues, *O jogo de pôquer e o cálculo de probabilidade*, Instituto de Matemática e Estatística - USP.

[8] J. P. Q. Carneiro, *O amigo oculto*, UFRJ. RPM **28**. SBM.

[9] L. G. Morettin, *Estatística Básica*, PEARSON, 2010.

[10] S. Ross, *Probabilidade - Um curso moderno com aplicaçõs*, Bookmen, 2010.