Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

Lucas José Oliveira

Análise Combinatória e Probabilidades nos Concursos Públicos de Nível Médio

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2018

Lucas José Oliveira

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES NOS CONCURSOS PÚBLICOS DE NÍVEL MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae.*

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2018

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T
510
2018

Oliveira, Lucas José, 1984-
Análise combinatória e probabilidades nos concursos públicos de nível médio / Lucas José Oliveira. – Florestal, MG, 2018.
viii, 50f. ; 29 cm.

Orientador: Mehran Sabeti.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.48-50.

1. Análise combinatória. 2. Probabilidades. 3. Concursos públicos. I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado em Matemática - Profissional. II. Título.

O048a

Lucas José Oliveira

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES NOS CONCURSOS PÚBLICOS DE NÍVEL MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

Aprovada: 23 de fevereiro de 2018.

Edney Augusto Jesus de Oliveira

Luiz Gustavo Perona Araújo

Mehran Sabeti
(Orientador)

Dedicatória

Dedico este trabalho aos nobres colegas servidores públicos que enfrentaram e venceram o desafio da seleção de um concurso público.

Agradecimentos

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a consecução deste trabalho, mas de modo especial ao meu orientador Mehran Sabeti pela parceria e inspiração, aos colegas do PROFMAT pelo intercâmbio de ideias e à Universidade Federal de Viçosa pela ampla e sólida formação que me proporcionou.

Biografia

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais (2008) e bacharel em Administração Púbica pela Fundação João Pinheiro (2012). Tem experiência docente em Matemática e atualmente é Especialista em Políticas Públicas e Gestão Governamental na Secretaria de Estado de Planejamento e Gestão de Minas Gerais.

Resumo

OLIVEIRA, Lucas José, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2018. **Análise Combinatória e Probabilidades nos Concursos Públicos de Nível Médio**. Orientador: Mehran Sabeti .

O conteúdo de análise combinatória e probabilidades é apresentado nesta dissertação sob o aspecto relativo à sua aplicação no processo dos concursos públicos de nível médio. Para tanto, desenvolveu-se um estudo do conteúdo de análise combinatória e probabilidades com uma ampla apresentação da sua história, seus principais resultados e o contexto institucional das orientações oficiais de ensino bem como uma descrição do processo de avaliação nos concursos públicos por meio de questões desse conteúdo aplicadas nesses certames.

Abstract

OLIVEIRA, Lucas José, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2018. **Combinatory Analisis and Probability in Middle Level Civil Service Examinations**. Adviser: Mehran Sabeti .

The content of combinatorial analysis and probabilities is presented in this dissertation in the aspect related to its application in the process of the civil service entrance examination of high school level. For that, a study of the content of combinatorial analysis and probabilities was developed with a broad presentation of its history, its main results and the institutional context of the official teaching guidelines as well as to describe the evaluation process in the public tendering through applied questions in these examinations that use this content.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Concursos Públicos **3**

2.1 Introdução 3

2.2 O concurso público 4

2.3 O edital do concurso público 4

2.4 A prova do concurso público 5

3 O Ensino de Análise Combinatória e Probabilidades **7**

3.1 Introdução 7

3.2 A organização do ensino de Matemática no Ensino Médio 8

3.3 Base Nacional Curricular Comum 10

3.3.1 Proposta oficial de ensino de análise combinatória e probabilidades . . . 10

3.4 Conteúdos Básicos Comuns de Minas Gerais 11

3.5 A resolução de problemas no ensino de matemática 13

4 O Conteúdo de Análise Combinatória e Probabilidades **15**

4.1 Introdução 15

4.2 Análise Combinatória 16

4.2.1 Permutações simples 20

4.2.2 Permutações com objetos repetidos 20

4.2.3 Permutações circulares 21

4.2.4 Combinações simples 22

4.2.5 Combinações completas 23

4.2.6 Fórmulas combinatórias 24

4.3 Probabilidades 26

4.3.1 Espaço Amostral 26

4.3.2 Evento 27

4.3.3 Probabilidades de Laplace 27

4.3.4 Espaço de probabilidade 28

4.3.5 Combinação de eventos 29

4.3.6 Probabilidades condicionais 30

5 Aplicação de questões de concurso no ensino de Análise Combinatória e Probabilidades **33**

5.1 Questões de Análise Combinatória 34

5.2 Questões de Probabilidades 37

6 Conclusões **46**

Bibliografia **48**

1

Introdução

As provas de seleção de concursos públicos para a constituição dos quadros da burocracia estatal são temidas pelo grau de dificuldade das questões que as compõe, notadamente as questões de matemática.

Não por acaso, multiplica-se país afora cursos preparatórios e publicações especializadas sobre a preparação para enfrentar esse grande desafio de conquistar uma vaga de trabalho no serviço público.

A escola e, mais especificamente, o ensino de matemática na educação básica não deve furtar-se do seu papel social de promover os instrumentos necessários à emancipação plena do estudante no mundo do trabalho, nas relações sociais e na cultura, conforme previsto nos documentos oficiais de orientação do ensino básico.

Nesse sentido, este trabalho busca apresentar o conteúdo de análise combinatória e probabilidades sob o aspecto relativo à sua aplicação em questões de concursos públicos de nível médio.

No primeiro capítulo, o processo dos concursos públicos é apresentado destacando a sua exigência legal para o ingresso no serviço público bem como o seu objetivo de selecionar os candidatos mais preparados.

Já no segundo capítulo, o contexto institucional das orientações e propostas oficiais de ensino é apresentado em destaque para a abordagem da resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática e, em especial, do conteúdo de análise combinatória e probabilidades.

Daí, no terceiro capítulo, o conteúdo de análise combinatória e probabilidades é amplamente estudado com exemplos e seus principais resultados.

Com isso, no quarto capítulo, questões sobre o conteúdo específico de análise combinatória e probabilidades aplicadas em certames estadual mineiro e federal são coligidas e propostas de solução a essas questões são discutidas.

Por fim, conclui-se buscando promover com este estudo uma valiosa possibilidade de aprofundamento do conteúdo matemático desenvolvido no PROFMAT e, especificamente, no domínio das disciplinas de MA12-Matemática Discreta e MA21-Resolução de Problemas com relevante contribuição à prática docente.

Ademais, cabe destacar a pertinência do tema na finalidade de impactar positivamente a realidade da sala de aula sob a égide do currículo oficial e das orientações pedagógicas de matemática da educação básica promovidas pelos órgãos governamentais, uma vez que o conhecimento das ideias básicas da matemática é condição-chave para a realização da cidadania e de extrema relevância no processo de seleção dos agentes públicos.

2

Concursos Públicos

2.1 Introdução

A seleção de quadros para a administração pública possui remota referência já na China Imperial dos primeiros séculos da era cristã com exames de conhecimentos para selecionar candidatos para a burocracia estatal. [2]

No Brasil, a Constituição Federal de 1934 marca o surgimento da previsão de seleção por meio de provas para o ingresso no serviço público. Antes disso, no Império e no início da República, a nomeação de funcionários públicos era discricionária.[4][35]

A Constituição Federal de 1967 traz a obrigatoriedade da aprovação prévia em concurso público para a nomeação em cargo público que é mantida pela Constituição Federal de 1988 com provas de acordo com a natureza e a complexidade do cargo ou emprego. [5] [6]

O recrutamento aos cargos públicos dá-se por meio da publicação de edital contento as regras do concurso e o conteúdo que será exigido na seleção, que ocorre com a aplicação de provas e títulos quando o desempenho de cada candidato será comparado e classificado. [3]

A natureza, escolaridade e complexidade do cargo são os elementos que determinam o rol de matérias cobradas no certame que, em regra, são aferidos seus conhecimentos por meio de provas escritas. [3]

Nos concursos de nível médio, o objetivo da avaliação segundo mencionado expressamente em alguns editais e tacitamente em outros é medir as habilidades de compreensão, aplicação, análise, síntese e avaliação dos candidatos relativo aos seus conhecimentos do conteúdo programático perante questões que valorizam a capacidade de raciocínio. [7][9][18][30][31]

Especificamente ao conteúdo de matemática, observa-se nas questões de concurso a busca por verificar a habilidade do candidato de interpretar, correlacionar e aplicar o conhecimento de raciocínio lógico e quantitativo em exemplos contextualizados em consonância com o previsto nas diretrizes oficiais de ensino. [13] [14] [15]

A apresentação do processo do concurso público com suas características formais e legais que será promovida nas seções seguintes deste capítulo é fundamentada nas referências [3] [32] que apresentam farto e valioso material para o objetivo do presente estudo.

2.2 O concurso público

A qualidade dos quadros que ingressam na administração púbica é fundamental para que as entregas de políticas públicas sejam satisfatórias e, por isso, a seleção desse pessoal é extremamente importante. O despreparo dos agentes públicos é um grande obstáculo que pode impedir o eficiente atendimento das demandas sociais e a adequada prestação de serviços públicos.

O concurso público é o instrumento democrático de seleção do candidato que mais se enquadre nas exigências da função pública a ser exercida e de suas atribuições tendo como garantia uma justa seleção.

A modulação do instrumento do concurso público para ser um meio de seleção que conjugue os objetivos da administração pública, dos candidatos e da sociedade promoverá o alcance de sua finalidade pública e a garantia dos princípios apregoados na Constituição da República.

Esses princípios são, entre outros, o da moralidade, da impessoalidade e da razoabilidade e fundamentam a realização dos concursos públicos que promovem o acesso às funções públicas de maneira ampla e democrática.

As gerações de agentes públicos selecionados sob a égide desse instrumento tem constituído um quadro de pessoal consciente de seu compromisso com a realização de um projeto de nação.

2.3 O edital do concurso público

As regras da competição que irá promover o concurso são apresentadas pelo edital, que é o documento escrito destinado a divulgar as principais informações do certame.

O edital contém todas as suas disposições e regras, exigências e fases, com necessária observância à impessoalidade, isonomia, eficiência, publicidade, moralidade e razoabilidade.

O chavão de que o edital é a lei do concurso é aceitável na medida em que os princípios constitucionalmente consagrados acima sejam garantidos sob o risco de haver vicissitudes através de manipulações e fraudes.

Não obstante as possíveis arbitrariedades e desvios na sua formulação, o edital possui papel de enorme relevância por fixar as regras tanto para os candidatos quanto para a administração pública atentando, quando na sua confecção, para as especificidades do concurso e do cargo que se pretende prover .

A Constituição da República de 1988 prevê amplo acesso às funções públicas e contém princípios explícitos e implícitos que são materializados pelo expediente do concurso público quando é necessária a provisão de recursos humanos no âmbito da Administração Pública. O arcabouço de princípios e os dispositivos normativos materialmente constitucionais é a espinha dorsal no regramento de qualquer certame.

A ampla acessibilidade às funções públicas, a impessoalidade na seleção do candidato e a moralidade administrativa fundamentam a exigência da realização do concurso público. Como princípios de qualquer processo administrativo e, portanto, aplicáveis ao concurso público, o devido processo legal, o contraditório, a ampla defesa e os meios e recursos a ela inerente e a transparência sustêm a legalidade do processo administrativo do concurso público.

Desse modo, pelo argumento encampado inicialmente, é garantida a eficácia no atendimento e prestação do serviço público e rechaçada formas desvirtuadas do uso do concurso público para o preenchimento das vagas.

O edital deve conter a nomenclatura e o quantitativo das vagas oferecidas, a descrição sumária das atividades, seu regime jurídico, remuneração inicial, o local e a jornada de trabalho, bem como o local, data, horário e prazo para realização das inscrições para participação.

Além disso, deve constar de modo claro no edital os requisitos para provimento das vagas devendo esses guardarem relação com as atribuições da função pública em concorrência e a época de sua comprovação, como a conclusão do ensino médio, por exemplo. Esses requisitos devem ser compatíveis com o próprio exercício e natureza da função e estarem intimamente relacionados com o nível de escolaridade mínimo exigido.

O edital prevê regras básicas relativas aos conhecimentos exigidos e programas das disciplinas cobradas, se o concurso será de provas e títulos ou somente provas conforme a natureza e complexidade da função pública a ser preenchida.

Também versa no edital os critérios para a avaliação das provas de modo detalhado com a pontuação atribuída a cada uma delas e se classificatórias ou eliminatórias, a previsão da divulgação dos gabaritos, a pontuação mínima e máxima e a ponderação na composição da nota final devendo sempre guardar uma relação necessária com as atribuições do exercício do cargo.

Adicionalmente, as informações sobre a pontuação mínima para classificação ou o número de candidatos que serão habilitados às etapas seguintes e critérios de desempate, prazos de validade do concurso e possibilidade ou não de sua prorrogação também estão, em regra, presentes no edital.

2.4 A prova do concurso público

A seleção dos candidatos em concursos públicos dá-se pela aplicação de provas para aferir a capacidade intelectual, física ou psíquica dos candidatos. Na disputa é quando são comparados os desempenhos dos concorrentes e, assim, poderão ser escolhidos os melhores.

As provas poderão ser escritas, orais, práticas, provas de capacidade física, de títulos e, também, através de entrevistas e avaliações psicológicas ou exames psicotécnicos.

Esses vários métodos de avaliação podem ser conjugados na medida em que cada tipo é limitado em sua capacidade de aferição das habilidades do candidato de sorte a promover a eficácia na sua qualificação.

Contudo, via de regra, as funções de nível médio de escolaridade que implicam atribuições administrativas gerais e operacionais são mais compatíveis com a realização de provas objetivas sem a presença de outros tipos de prova na seleção.

De qualquer maneira, deve-se pautar qualquer método pela objetividade, padronização e guardar relação com a natureza do cargo e com as atribuições da função a ser exercida.

Importante destacar a delimitação do programa com os pontos a serem cobrados e a sua divulgação em um razoável prazo de antecedência da realização das provas viabilizando a melhor preparação dos candidatos, pois torna-se-ia humanamente impossível o conhecimento completo de todas as nuances do programa de determinada área do conhecimento, especialmente da matemática, em um prazo exíguo.

A comprovação, através da aplicação da prova, da capacidade do candidato de ordenação e organização de ideias, o seu raciocínio lógico empregado na solução das questões propostas e, o mais importante, da possibilidade do candidato valer-se dos conhecimentos acumulados para a resolução dos variados desafios que advirão no exercício da função pública é o grande desafio da seleção no concurso público.

A execução do concurso e o julgamento realizado nas suas fases é responsabilidade das bancas examinadoras e das comissões de concursos que determinam de modo claro as regras do certame quanto à compatível duração das provas com respeito ao tipo e quantidade. Essa quantidade de questões e as suas formulações devem guardar relação com o programa de disciplinas de maneira a garantir a seleção dos melhores candidatos.

3

O Ensino de Análise Combinatória e Probabilidades

3.1 Introdução

A origem da matemática é umbilicalmente ligada ao desenvolvimento da sociedade e foi gestada na busca de respostas e criação de novas perguntas vindo a tornar-se, assim, ciência, linguagem, método e raciocínio capaz de promover o avanço social, econômico e tecnológico. [15][14]

Nessa esteira, a denominada sociedade da informação, em que se baseiam as relações cada vez mais globais, aponta para a importância da Educação para o desenvolvimento de capacidades múltiplas como as de comunicação, trabalho cooperativo para a solução de problemas e tomada de decisões. [13]

A escola deve garantir as condições necessárias para fomentar a matemática escolar com o propósito de criar no estudante o ânimo de investigar rigorosamente e perquirir obstinadamente, de fazer inferências, criar e aperfeiçoar conhecimentos e valores. [15] [13]

No dia-a-dia, nas diversas circunstâncias das variadas necessidades da vida cotidiana, exige-se a habilidade de contagem. Mesmo isolado, o homem precisa contar, quiçá para a plenitude de sua cidadania. [21]

Da simples contagem das pessoas em uma sala a contar todos os ladrilhos necessários para cobrir todo o piso, a utilização de técnicas de contagem mais elaboradas do que uma simples enumeração direta dos objetos é necessária. [23]

Para tanto, a habilidade de leitura e interpretação de textos e o uso das operações elementares dos números naturais são condições para o ensino da contagem de uma listagem, uma tabela, um diagrama de árvore e da utilização intuitiva do princípio fundamental da contagem.[23]

O estudo dos conceitos básicos de probabilidade já no início da educação básica promove as bases para o seu aprofundamento posterior de modo a criar uma consciência crítica sobre situações de interesse do estudo das probabilidades.[23]

De fato, a familiaridade com as operações com números racionais e a manipulação de razões entre números é adicionada às habilidades técnicas de contagem e ao princípio fundamental da contagem para tratar de conceitos como eventos e espaço amostral, e o conceito básico de probabilidade relacionado com o de razão pelo cálculo da probabilidade de um evento. [23]

A seção a seguir apresenta as ideias contidas na seção dos Conhecimentos de Matemática do capítulo Competências e habilidades dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. [13]

3.2 A organização do ensino de Matemática no Ensino Médio

As exigências da vida em sociedade e, em especial, do mundo do trabalho com sua dinâmica própria e mutável requerem da escola a adequada organização dos conteúdos, dos métodos de ensino, das abordagens e motivações com o fito na necessária promoção social, cultural e profissional do aluno.

Não há área do conhecimento cujo exercício profissional não requeira alguma competência em matemática em que a compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos aliada à segurança para adaptá-los a diferentes contextos e oportunidades garante ao estudante, e futuro trabalhador, a possibilidade de conclusões matemáticas que impactam diretamente o resultado da sua atividade.

A matemática usada como uma linguagem permite interpretar a realidade e agir sobre ela de modo que os números e as equações compõem um sistema de códigos, as figuras geométricas representam o espaço e as probabilidades promovem a compreensão de fenômenos aleatórios.

Não obstante o caráter instrumental de ferramenta a que serve a matemática no cotidiano, a matemática no Ensino Médio tem caráter e dever formativo, estrutura o pensamento e desenvolve o raciocínio lógico-dedutivo.

Essa matemática deve ser vista como um corpo organizado de conhecimento, ou seja, como ciência com sua história, seu desenvolvimento e suas características estruturais específicas que lhe definem os limites de atuação. As definições, axiomas, demonstrações e encadeamentos lógicos são a base de estruturas a partir das quais outras são construídas num desenvolvimento racional de argumentos.

Com isso, a capacidade própria de resolução de problemas, o hábito salutar de investigação e a confiança sólida em abordar situações novas se aliam ao desenvolvimento da criatividade e capacidades pessoais de percepção do universo do estudante.

A aquisição do conhecimento matemático é uma longa jornada escolar sedimentada sobre a resolução de problemas diversos permeada pela elaboração de conjecturas, a busca de regularidades, a generalização de padrões e a capacidade de argumentação. São elementos fundamentais que garantem a formalidade do conhecimento matemático e sustentam o desenvolvimento da leitura e interpretação da realidade.

Os objetivos do ensino escolar da matemática no nível médio de ensino para promover uma aprendizagem significativa para o aluno, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, são:

> "• compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
>
> • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
>
> • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
>
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
>
> • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
>
> • expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
>
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
>
> • reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
>
> • promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação."[13]

Esses objetivos educacionais que organizam o aprendizado de matemática nas escolas de ensino médio também promovem competências gerais segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias como as de representação, comunicação, investigação, compreensão, e contextualização sócio-cultural.[14]

Nessa última, destaque-se a devida atenção a ser dada aos valores, habilidades e atitudes dos alunos com respeito ao conhecimento sob o risco de prejuízo da significação do aluno frente às atividades matemáticas desenvolvidas e sobre a natureza da própria ciência, que se constrói permanente e concomitantemente ao desenvolvimento social, econômico e cultural.[13][14]

Nesse bojo, as ciências humanas e naturais bebem da fonte matemática e, em especial, de conceitos matemáticos que dizem respeito a conjuntos finitos de dados e raciocínios probabilísticos aplicando ideias de probabilidades e combinatória a fenômenos do cotidiano em uma articulação didática e pedagógica.[13][14]

Disso, não resta dúvida quanto à importância da abordagem de conteúdos de contagem e probabilidades no Ensino Médio e os seus vínculos e aspectos comuns entre o aprendizado da matemática e das demais ciências e áreas do saber.[13][14]

3.3 Base Nacional Curricular Comum

De acordo com o capítulo “A Etapa do Ensino Médio”, seção “A Área de Matemática no Ensino Médio”e sua subseção “A Matemática no Ensino Médio”, bem como o capítulo “As Unidades Curriculares de Matemática”, a Base Nacional Curricular Comum para a Educação Básica orienta o planejamento e a ação pedagógica através de uma base formada por um currículo escolar determinado por conhecimentos matemáticos escolhidos. [15]

Essa elaboração curricular é imperativo da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e cerra fileiras com outros documentos oficiais constituindo um esforço no sentido do desenvolvimento da educação.

Essa escolha acontece sob a perspectiva de desenvolver no estudante uma capacidade de interpretar o mundo e a sociedade buscando qualificá-lo para a inserção no mercado de trabalho em que a capacidade de argumentação e a confiança em abordar problemas é essencial. [15]

Para tanto, o ensino deve ser contextualizado e abordar diversas disciplinas sem, contudo, deixar de lado a capacidade de abstração e de generalização, tão peculiares ao conhecimento matemático.

O processo de contextualizar e abstrair no ensino de matemática mobiliza as aptidões dos estudantes relativas ao questionamento, imaginação, visualização, decisão, representação e criação que são concretizados no processo de ensino e aprendizagem por meio da resolução de problemas.

Também a elaboração de problemas desenvolve a capacidade de reflexão sobre seus conhecimentos e sobre a resposta encontrada confrontada com o contexto de criação do problema.

Ademais, as atividades coletivas e solidárias na proposição e resolução de problemas com aperfeiçoamento da comunicação e da capacidade de argumentação e de expressar opiniões são encorajadas pelo documento da Base Nacional Curricular Comum.

3.3.1 Proposta oficial de ensino de análise combinatória e probabilidades

Há cinco eixos que orientam a formulação de objetivos de aprendizagem e desenvolvimento no ensino da matemática escolar segundo a Base Nacional Curricular Comum para a Educação Básica, são eles: Números e Operações, Geometria, Grandezas e Medidas, Álgebra e Funções, Estatística. [15]

Cada qual recebe uma atenção maior ou menor em conformidade com os anos escolares promovendo o gradual desenvolvimento do conhecimento matemático do estudante através de retomadas de assuntos com ampliações e aprofundamentos.[15]

No Ensino Fundamental, o primeiro contato com o conhecimento relativo ao conteúdo de probabilidades supõe despertar a atenção dos estudantes para a presença da incerteza na matemática e a aplicação da matemática em fenômenos aleatórios promovendo uma melhor compreensão dos acontecimentos sociais, cujo conteúdo de probabilidades é fortemente relacionado junto às informações estatísticas.[15]

Ao final dessa etapa, espera-se que os estudantes consigam identificar eventos em que não é certo acontecer, ou seja, pode ou não acontecer, são eventos aleatórios. A partir dessa noção, o estudante poderá construir os espaços amostrais de situações simples como lançamentos de dados e moedas e calcular a probabilidade de ocorrência de determinado evento através da razão entre o número de casos favoráveis de um evento e o número de elementos do espaço amostral. Também a resolução de problemas envolvendo situações simples de análise combinatória através de métodos de contagem já deve estar consolidado.[15]

No Ensino Médio, o conteúdo de análise combinatória e probabilidades é ampliado através de novos tipos de eventos e a relação entre eles, como eventos dependentes e independentes, eventos condicionais, sucessivos, retiradas com e sem reposição, a abordagem do espaço amostral como conjunto de elementos que satisfazem um evento ou condição.[15]

Desse modo, o domínio desses novos conhecimentos no Ensino Médio promove uma possibilidade enriquecedora de resolução de problemas mais elaborados relativos ao princípio de contagem e ao cálculo de probabilidades e de conteúdos intimamente relacionados a esses como razão e porcentagem. [15]

Em qualquer nível de ensino, fundamental ou médio, um dos principais objetivos da matemática é a solução de problemas. As habilidades necessárias para esse objetivo podem ser empregadas em situações de problemas contextualizados em que a observação e interpretação são exploradas ou no próprio domínio do conteúdo da matemática aprofundando conhecimentos. [22]

A tradução do enunciado de uma questão em termos matemáticos e a decisão de tomar um caminho na sua resolução é o conhecido por situação-problema. Esse processo promove a compreensão da matemática formal relacionada com a intuitiva permitindo o diálogo crítico e o confronto dos resultados obtidos perante o problema. Além disso, tais situações-problemas podem motivar novos conceitos e ideias aplicáveis em outros problemas. [22]

As questões propostas pelos livros ou aplicadas nas avaliações cujos problemas privilegiam em sua solução a atribuição de significado a partir da abstração dos conteúdos estudados comportam muitas estratégias de desenvolvimento das habilidades do estudante.[22]

Essas estratégias, que podem ser o uso de figuras, a expressão verbal, a percepção de padrões, o estudo de casos especiais, a tentativa e erro, entre outras, devem ser empregadas habitualmente para o aprimoramento da capacidade de resolução de problemas.[22]

Contudo, não se deve menosprezar os exercícios de fixação. Geralmente, são bastante repetitivos, mas possuem o mérito de garantir a confiança do estudante em resolver automaticamente questões ou parte delas deixando-o livre para discutir e interpretar o problema. [22]

3.4 Conteúdos Básicos Comuns de Minas Gerais

Os Conteúdos Básicos Comuns – CBC propostos para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio pelo Governo de Minas Gerais constitui um parâmetro mínimo de conteúdos que o aluno da rede estadual de ensino mineira deve aprender e o professor não deve deixar de ensinar sem esgotar, porém, os conteúdos a serem abordados.[22]

Os tópicos dos CBC para o 1º Ano do Ensino Médio relativos ao Eixo Temático I-Números, Contagem e Análise de Dados especificamente aos temas de Contagem e Probabilidades apresentam as seguintes habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes:

"- Resolver problemas elementares de contagem utilizando o princípio multiplicativo.

- Reconhecer o caráter aleatório de variáveis em situações-problema.

- Identificar o espaço amostral em situações-problema.

- Resolver problemas simples que envolvam o cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis.

- Utilizar o princípio multiplicativo no cálculo de probabilidades."[22]

Já os conteúdos de aprofundamento para o 2º Ano do Ensino Médio relativos ao Eixo Temático IV-Números, Contagem e Análise de Dados especificamente aos temas de Contagem e Probabilidades apresentam, entre outras, as seguintes habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes:

"- Resolver problemas utilizando o princípio multiplicativo.

- Reconhecer situações em que os agrupamentos são distinguíveis pela ordem de seus elementos ou não.

- Resolver problemas que envolvam arranjos, combinações e/ou permutações sem repetição.

- Identificar o espaço amostral em situações-problema.

- Resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidade de eventos."[22]

Nota-se uma evolução com respeito ao grau de complexidade das situações-problema bem como a ampliação dos tópicos. Tal evolução é também verificada, finalmente, nas sugestões de tópicos complementares para o 3º Ano do ensino médio com previsão de no Eixo Temático VII-Números, Contagem e Análise de Dados especificamente com respeito aos temas de Contagem e Probabilidades apresentar as seguintes habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes:

"- Resolver problemas que envolvam arranjos, combinações e permutações com repetições e permutações cíclicas.

- Utilizar propriedades combinatórias dos números binomiais.

- Utilizar o binômio de Newton para calcular potências de binômios.

- Identificar eventos independentes e não independentes em situações-problema.

- Resolver problemas que envolvam o conceito de probabilidade condicional.

- Utilizar probabilidades para fazer previsões aplicadas, em diferentes áreas do conhecimento."[22]

Nesse documento, há menção ao conteúdo sobre tratamento de dados no Ensino Fundamental, em que o tema da probabilidade deve ser apresentado destacando a necessidade de técnicas que vão além da simples enumeração de objetos contextualizado através de exemplos simples que exijam o emprego de novos métodos e o esclarecimento do conceito de certeza geralmente atribuído pelo senso comum à probabilidade. [23]

Na resolução de problemas, a compreensão da relação entre o contexto do problema e os cálculos a serem feitos através da decisão por utilizar uma estratégia que se considere mais adequada deve ser confirmada pela resposta encontrada quanto à sua adequação ao contexto do problema.[23]

O ensino através de questões abertas, fechadas ou trabalhos em grupo sobre contagem e probabilidades e a escolha por utilizar questões fechadas, como as de concursos públicos, por exemplo, quando das suas soluções deverão ser bem comentadas quando da correção para que os alunos entendam o porquê das opções incorretas valendo destacar que em muitos casos essas opções são construídas baseadas em entendimentos equivocados dos alunos.[23]

A ampliação do estudo da análise combinatória e probabilidades no Ensino Médio esbarra nas dificuldades dos alunos em trabalhar com a disposição dos valores do numerador ou do denominador na fração que define a probabilidade e seu cálculo que, em geral, utilizam conceitos de contagem como arranjos, combinações ou permutações. [23]

A dificuldade na percepção das diferenças entre a probabilidade da união de eventos ou da interseção deles também é motivo de dificuldades e erros na resoluções de problemas.[23]

Para contornar essas dificuldades já previstas, existe a orientação no sentido do trabalho cuidadoso dos conceitos básicos de probabilidade com atenção especial à descrição de todos os casos possíveis nos problemas mais simples, que permitam esse expediente, identificando os casos favoráveis e, só então, partir para problemas com métodos mais elaborados que exijam técnicas de contagem mais sofisticadas.[23]

3.5 A resolução de problemas no ensino de matemática

A abordagem da resolução de problemas nos processos de ensino e aprendizagem, embora haja tendências contrárias, ainda desperta interesse de estudiosos da educação matemática comprovada pela literatura na área especialmente com respeito ao tema em estudo da análise combinatória e probabilidades.[20]

As questões aplicadas nos concursos públicos constituem farto material de estudo pela disponibilidade e pode contribuir no processo de ensino na medida em que atende o apregoado pelas orientações oficiais quanto à resolução de problemas. [13, 14, 15]

A resolução de um problema é um desafio e uma descoberta, uma vez que não existe um método rígido e único para encontrar a solução de uma situação-problema. Contudo, pode-se destacar algumas etapas na resolução de uma situação-problema, quais sejam, a compreensão do problema seguida do estabelecimento de um plano partindo para a execução do plano e a verificação do resultado. [33]

Para tanto, é de grande importância o entendimento do enunciado que pode ser estimulado pela descrição do problema destacando os dados e o objetivo da questão valendo-se para isso do auxílio de desenhos, figuras e esquemas. [33]

Na busca pelas possibilidades de solução do problema em questão, a criatividade para encontrar o maior número possível de formas de abordar o problema e a competência geral de investigação e compreensão são promovidas pela reflexão sobre as técnicas mais adequadas para sua realização. [33][14]

Dada a escolha da abordagem mais coerente para a resolução da questão, traça-se um plano podendo dividir o problema em etapas trazendo ao raciocínio as semelhanças com algum problema parecido ou com pequenas diferenças. [33]

Partindo para a execução do plano estabelecido, aplicam-se as técnicas dos conteúdos matemáticos disponíveis no arcabouço intelectual do estudante dando sentido ao seu conhecimento matemático pela concretude dos resultados perante a abstração dos conceitos. [33]

Por fim, a verificação do resultado é um ato de autonomia do estudante para verificar se está correto ou se houve erro. Caso haja, interpretar o resultado e promover a correção e sempre se posicionando criticamente em relação ao tema.[33][13][14]

A busca por atender exigências sociais e, em especial, das organizações públicas, relativas ao domínio de competências gerais que podem ser desenvolvidas por meio da matemática poderá ser conciliada no seu ensino com os temas que estruturam o seu conteúdo disciplinar adicionalmente à criação de um espaço com ênfases e características próprias como, por exemplo, as competências e habilidades exigidas em provas de concurso. [14]

A oportunidade dos estudantes de conhecerem e se posicionarem diante de problemas práticos constitui motivação importante para o aprendizado sendo produto complementar e parte necessária da função da educação básica.[14]

Por isso, as áreas do conhecimento com presença frequente nos processos de seleção em concursos públicos pode ser um valioso aprendizado com contexto através de seu processo histórico, social, cultural e o reconhecimento e discussão de aspectos práticos e éticos desse importante instrumento de promoção da democracia. [3][14][32]

4

O Conteúdo de Análise Combinatória e Probabilidades

4.1 Introdução

A análise combinatória possui remota origem no desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$ já na seminal obra *Os elementos* de Euclides três séculos antes da era cristã e a referência a assuntos de combinatória também pode ser verificada nas obras de estudiosos chineses, hindus e árabes dos primeiros séculos do ano mil. [25]

O cálculo de probabilidades possui sua origem clássica no século XVII na correspondência cultivada entre os matemáticos Blaise Pascal e Pierre de Fermat com o foco em solucionar problemas relacionados a jogos de azar, que estavam na moda nos salões da França da época frequentados pela aristocracia. [29] [25]

Contudo, antes desse foco na obtenção do vil metal no lazer aristocrático, matemáticos como Niccolò Fontana Tartaglia e Girolamo Cardano, italianos do século XVI, e o também italiano, e bem mais ilustre, Galileu Galilei entre os séculos XVI e XVII interessaram-se por problemas de probabilidades relacionados com o também mundano jogo de dados. [29]

Enfim, os primórdios das probabilidades estavam intimamente ligados à análise combinatória aplicada aos jogos de azar através do exame dos diferentes modos em que arranjos e combinações podiam ser empregados na enumeração dos casos favoráveis.[29][25]

A abordagem desses problemas adotavam o raciocínio de considerar os casos igualmente possíveis determinando aprioristicamente a probabilidade da ocorrência dos casos favoráveis. [29][25]

Ao final do século XVII, o famoso matemático Jacob Bernoulli, primeiro de uma profícua família que legou às ciências exatas gênios valiosíssimos, propôs de modo pioneiro determinar a probabilidade dos casos favoráveis pela sua frequência relativa determinada empiricamente. Suas contribuições também foram marcadas pela enfase aos grandes números abordando as combinações, permutações e a classificação binomial. [29][25]

Vale destacar também o papel dos matemáticos Abraham de Moivre no século

XVII e Pierre-Simon Laplace e Carl Friedrich Gauss já em meados do fim do século XVIII e início do XIX estabelecendo teorias e formulando métodos na teoria das probabilidades. [25]

Como instrumento de poder político dos Estados, a estatística utilizada desde tempos imemoriáveis com finalidades demográficas, tributárias e bélicas passou a valer-se do estudo da análise combinatória e probabilidades de tal modo a adquirir feições verdadeiramente científicas a partir do suporte teórico apresentado pela Matemática.[29] [25]

4.2 Análise Combinatória

Na seara do raciocínio lógico matemático e lógico quantitativo, o estudo da análise combinatória pode desenvolver o raciocínio e contribuir para o desenvolvimento de uma estrutura mental capaz de ser empregada na análise de assuntos com aspectos combinatórios na arimética, na lógica, na teoria dos conjuntos, na topologia e até na linguística. [36]

Em particular, a análise combinatória possui importante papel na teoria das probabilidades em fornecer a enumeração das combinações possíveis para se aplicar as fórmulas que calculam a probabilidade, uma vez que a análise combinatória é o estudo dos agrupamentos que se podem formar com os elementos de um determinado conjunto. [36]

A Análise Combinatória, ou simplesmente Combinatória, é a parte da matemática que estuda as estruturas e relações discretas na realização de contagens de subconjuntos de um conjunto que satisfazem certas condições dadas. [25][24]

O senso comum entre os estudantes é o de que a Análise Combinatória é o estudo dos arranjos, combinações e permutações, mas isto é apenas alguns assuntos do objeto de estudos da Combinatória, mas é o necessário e suficiente para enfrentar uma prova de concurso público como será visto.

Esses outros assuntos e problemas do universo da Análise Combinatória, embora sejam de grande interesse e possivelmente acessíveis no nível da educação básica, não serão abordados porque dificilmente são ou serão empregados em questões de concursos públicos.

Não obstante a restrição a apenas alguns tópicos, a análise combinatória tem sido um dos assuntos mais abordados nas questões produzidas por diversas bancas organizadoras dos concursos bastando observar os editais e as próprias provas dos certames. [10] [9] [31] [30] [18] [7] [12]

No intuito de nortear o desenvolvimento deste trabalho, vale refletir sobre o seguinte trecho extraído do livro *A Matemática do Ensino Médio – Volume 2*:

> “Você quer mostrar que é o bom ou quer que seus alunos aprendam? Se você prefere a segunda alternativa, resista a tentação de em cada problema buscar a solução mais elegante. O que deve ser procurado é um método que permita resolver muitos problemas e não um truque que resolva maravilhosamente um problema. A beleza de alguns truques só pode ser apreciada por quem tem domínio dos métodos. Combinatória

> não é difícil; impossível é aprender alguma coisa apenas com truques em vez de métodos."[28].

Assim, não será apresentada a expressão dos famigerados arranjos por entender-se que seja pouco didático utilizar fórmulas e casos particulares em demasia. [24]

A experiência de quem troca o princípio fundamental da contagem pela memorização de fórmulas de arranjos é a fatal dificuldade em resolver problemas de análise combinatória nos concursos públicos.

De fato, conforme se pode depreender da avaliação realizada pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA no Brasil, estudantes cuja memorização é a técnica predominante de aprendizagem apresentam a pior atitude em relação à matemática através de ansiedade, baixa motivação e pouca perseverança. Disso decorre um pior desempenho em todos os níveis de dificuldade de problemas. [37]

Passa-se, agora, ao escrutínio de alguns exemplos introdutórios do assunto de análise combinatória.

Exemplo 4.2.1: Quantos são os resultados possíveis que se obtém ao jogar-se uma moeda não-viciada duas vezes consecutivas para cima?

A resposta é 4 resultados possíveis. De fato, no primeiro lançamento há duas possibilidades, cara ou coroa, e no segundo lançamento, que ocorre imediatamente depois e de forma independente, há duas possibilidades, cara ou coroa, gerando os seguintes resultados:

- Cara no primeiro lançamento e Cara também no segundo lançamento;
- Cara no primeiro lançamento e Coroa no segundo lançamento;
- Coroa no primeiro lançamento e Cara no segundo lançamento;
- Coroa no primeiro lançamento e Coroa também no segundo lançamento.

Assim, pode-se representar essas configurações de resultados possíveis como a seguir: (CARA,CARA), (CARA,COROA), (COROA,CARA), (COROA,COROA).

Exemplo 4.2.2: Em uma urna, há bolas vermelhas (V), pretas (P) e azuis (A). Uma bola é retirada, observada e, em seguida, é devolvida para a urna. Qual o número de resultados possíveis em 3 extrações sucessivas?

Há três possibilidades para a primeira extração (V, P ou A), três possibilidades para a segunda extração (V, P ou A) e três possibilidades para a terceira extração (V, P ou A). Tem-se um total de $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ possibilidades.

Exemplo 4.2.3: Numa sala há 2 mulheres e 3 homens. De quantos modos é possível selecionar um casal?

Para a escolha da mulher tem-se duas possibilidades e para a escolha do homem tem-se três possibilidades.

Dividindo o processo de seleção em etapas, existem duas possibilidades para a primeira etapa, que é escolher a mulher, e três possibilidades para a segunda etapa, que é escolher o homem.

O número de diferentes casais que podem ser formados é, então, igual a $2 \cdot 3 = 6$.

Esses exemplos motivam a definição do doravante chamado Princípio Fundamental da Contagem, que será enunciado a seguir. [24] [25]

Definição 4.1 (Princípio Fundamental da Contagem): Se um experimento pode ocorrer em várias etapas sucessivas e independentes de tal modo que:

p_1 é o número de possibilidades da 1ª etapa;

p_2 é o número de possibilidades da 2ª etapa;

$\vdots$

p_n é o número de possibilidades da n-ésima etapa.

O número total de possibilidades de o acontecimento ocorrer é igual a:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$

Embora a bibliografia básica sobre esse conteúdo, que está sedimentada nas obras [24] e[25], apresente o Princípio Fundamental da Contagem como definição, a demonstração desse princípio básico pode ser dada como na ideia desenvolvida a seguir com base no apresentado em [34].

Seja a realização de um experimento com n etapas em que cada uma delas pode gerar p_r, com $r = 1,2,3,\ldots,n$, resultados possíveis.

Para $n = 2$, a realização de um experimento com duas etapas com p_1 e p_2 resultados possível, respectivamente, em cada etapa resulta na enumeração como a seguir:

$$\begin{array}{cccc}
(1,1); & (1,2); & \ldots; & (1,p_2) \\
(2,1); & (2,2); & \ldots; & (2,p_2) \\
\ldots & & & \\
(p_1,1); & (p_1,2); & \ldots; & (p_1,p_2)
\end{array}$$

Em que (i,j) denoda que a primeira etapa levou ao i-ésimo resultado possível e a segunda etapa levou ao j-ésimo resultado possível. Assim, o conjunto de resultados possíveis é composto por p_1 linhas contendo p_2 elementos cada uma, de maneira que o total de resultados é dado pelo produto $p_1 \cdot p_2$.

Supondo como hipótese de indução a validade do Princípio Fundamental da Contagem na realização de experimentos com k etapas, quando da realização de um experimento com $k+1$ etapas basta considerar o experimento em duas partes.

A primeira parte é a realização das k etapas e segunda parte é a realização da $(k+1)$-ésima etapa. Assim, o total de resultados possíveis é dado pelo produto $(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k) \cdot p_{k+1} = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot p_{k+1}$.

Desse modo, demonstra-se indutivamente a validade do Princípio Fundamental da Contagem.

Com essa definição pode-se prever alguns passos no processo de resolução de problemas de Combinatória com o Princípio Fundamental da Contagem 4.1 como a seguir:

1º passo - Identificar as etapas sucessivas e independentes do problema.

2º passo - Calcular o número de possibilidades de cada etapa identificada.

3º passo - Multiplicar os números de possibilidades de cada etapa identificada.

A seguir, a aplicação do passo-a-passo para a solução de um exemplo sobre o questionamento do número de possibilidades de uma determinada situação:

Exemplo 4.2.4: Para fazer uma viagem de ida e volta da cidade de Divinópolis-MG para a capital de todos os mineiros, Belo Horizonte, pode-se escolher utilizar como meio de transporte o ônibus, o carro, a moto ou o avião. De quantos modos é possível escolher os meios de transporte se não for usado na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?

Abordando a situação apresentada com os passos descritos pode-se identificar a etapa de escolha do transporte de ida e a etapa de escolha do transporte de volta.

Seguindo os passos, tem-se quatro possibilidades de escolha do meio de transporte da ida e três possibilidades para a volta, uma vez que não se utilizará o mesmo meio de transporte da ida.

Por fim, basta multiplicar $4 \cdot 3 = 12$ que se encontra a quantidade de modos de fazer essa viagem. São eles:

(ônibus, carro);	(ônibus, moto);	(ônibus, avião);
(carro, ônibus);	(carro, moto);	(carro, avião);
(moto, ônibus);	(moto, carro);	(moto,avião);
(avião, ônibus;)	(avião, carro);	(avião, moto).

Antes de continuar, passa-se a uma definição de substancial importância no estudo da Análise Combinatória, qual seja, o Fatorial:

Definição 4.2 (Fatorial): Sendo n um número natural, define-se fatorial de n e indica-se $n!$ como a seguir:

$$1! = 1 \quad \text{e} \quad (n+1)! = n!(n+1)$$

Convém observar que a leitura correta da expressão $n!$ é fatorial de n e não n fatorial. Esse erro de leitura pode gerar ambiguidades como, por exemplo, a expressão $2 + 3!$ ser erroneamente lida como: dois mais três fatorial, quando deveria ser corretamente lida como: dois mais o fatorial de três.

Pode-se verificar aplicando a definição 4.2 resultados muito interessantes e cuja memorização, pelo uso frequente, é fácil.

Exemplo 4.2.5:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

4.2.1 Permutações simples

Dispor de modo ordenado uma sequência de objetos é uma tarefa de escolha de qual ocupará a primeira posição e em seguida a escolha de qual ocupará a segunda, terceira e quarta posições sucessivamente até a escolha do último objeto restante que ocupará o derradeiro lugar. Disso decorre o questionamento motivador desta subseção que é o de quantas maneiras é possível ordenar esses n objetos distintos? [24]

De modo exploratório, seja o exemplo particular de um problema como esse com $n = 2$ objetos. O problema pode ser separado em duas etapas: escolher o primeiro objeto e escolher o segundo objeto.

Tem-se dois objetos possíveis para o primeiro lugar e um objeto possível para o segundo lugar. O total de maneiras é, por isso, igual ao produto $2 \cdot 1 = 2!$.

No caso geral, supondo válido para $n = k$ o total de modos distintos de dispor de maneira ordenada a sequência de k objetos ser igual a $k!$, a tarefa de ordenar $k + 1$ objetos pode-se obter através da recorrência do conceito de fatorial 4.2:

$$k! \cdot (k + 1) = (k + 1)!$$

Portanto, indutivamente, o número de modos de ordenar n objetos distintos é: $n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$, que motiva e fundamenta a definição a seguir:

Definição 4.3 (Permutação Simples): Cada uma das ordenações dos elementos de um conjunto finito é denominada permutação simples de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos é representado por $P_n = n!$.

Um exemplo de aplicação imediata desse conceito é visto a seguir:

Exemplo 4.2.6: Quantos são os anagramas da palavra PROVA? A resolução do questionado reside na quantidade de ordenações das letras P, R , O, V e A, que pode ser obtido pela permutação simples dessas cinco letras que resulta em $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ anagramas.

4.2.2 Permutações com objetos repetidos

As permutações de elementos nem todos distintos, como na exemplar formação de anagramas com a palavra $ARARAQUARA$, enfrentam o problema que surge quando há elementos repetidos.

No exemplo destacado no parágrafo anterior, a letra A aparece cinco vezes e a letra R aparece três vezes. Em uma análise mais imediata da palavra de dez letras pode-se alegar equivocadamente que a quantidade de anagramas seria 10!, no entanto, deve-se considerar as letras repetidas para encontrar o resultado correto.

Para se calcular esse resultado, deve-se dividir o 10! por 5! e por 3! que são as quantidades de letras repetidas.

De fato, considere a representação $A_1R_1A_2R_2A_3QUA_4R_3A_5$ que destaca as letras repetidas com índices.

Apesar de haver possibilidades diferentes de dispor essas letras como $A_3R_1A_2R_3A_1QUA_4R_2A_5$ e $A_1R_3A_2R_2A_3QUA_5R_1A_4$, elas são na realidade indistintas.

Assim, para cada uma das possibilidades de ordenar as cinco letras A e as três letras R há, na realidade, apenas uma disposição no anagrama.

Como o número de possibilidades de ordenar A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 é 5! e de R_1, R_2, R_3 é 3!, o número de anagramas da palavra $ARARAQUARA$ é igual a $\frac{10!}{5!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 5040$.

Vale notar que ao expandir o 10! pode-se expandi-lo na medida do necessário para efetuar os cancelamentos de fatores no numerador e denominador.

Desse modo, a definição seguir revela o ajuste que deve ser promovido quando da permutação de objetos em que haja elementos repetidos.

Definição 4.4 (Permutação com Objetos Repetidos): A permutação de n elementos com α, β, ..., λ deles repetidos resulta em $P_n^{\alpha,\beta,\ldots\lambda} = \frac{n!}{\alpha!,\beta!,\ldots\lambda!}$ modos distintos.

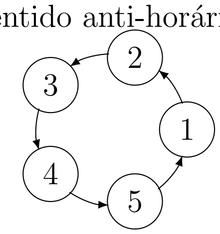
4.2.3 Permutações circulares

O questionamento que motivará essa discussão é o de quantos modos pode-se colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, considerando equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação.

Considere a tarefa de dispor três objetos denotados por a_1, a_2 e a_3 em volta de uma mesa circular. Dispô-los na ordem $a_1a_2a_3$ não difere da disposição $a_2a_3a_1$ nem da disposição $a_3a_1a_2$. Isso ocorre porque pode-se obter a segunda e a terceira disposições por uma simples rotação da primeira disposição o que torna as três posições acima equivalentes desse ponto de vista.

Note que no caso de permutações simples importam os lugares que os objetos ocupam ao passo que nesse caso o que importa é apenas a posição relativa dos objetos entre si.

O diagrama a seguir ilustra no caso de cinco objetos dispostos circularmente que a posição relativa dos círculos numerados não se altera quando gira, por exemplo, no sentido anti-horário.



Note que as configurações possíveis para essa disposição coincide com o número de objetos. De fato, no caso da ilustração acima a posição em que figura o círculo de numeração 1 pode ser ocupado pelas demais sem que haja qualquer alteração na posição relativa entre eles.

Por isso, a resposta do problema inicial, que é o número de permutações circulares de n objetos distintos, é a permutação simples dos objetos salvo as configurações equivalente em que se preservam as posições relativas. Esse ajuste é obtido pela razão $\dfrac{n!}{n}$ como definido a seguir.

Definição 4.5 (Permutação Circular): O número PC_n de permutações circulares de n objetos distintos é dado por:

$$PC_n = (n-1)!$$

4.2.4 Combinações simples

Suponha que se dispõe dos seguintes objetos: a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 e busca-se agrupar três desses objetos para formar um conjunto de três elementos.

Tomando, por exemplo, na seguinte ordem os elementos (a_2,a_3,a_4) ou (a_3,a_4,a_2) tem-se, obviamente, o resultado desejado em ambas as ordenações.

Agrupamentos como esse, que possuem a característica de não mudar quando altera-se a ordem de seus elementos, são chamados de combinações.

As combinações simples de classe 3 dos objetos a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são dadas a seguir:

$$\begin{array}{ccccc} \{a_1, a_2, a_3\} & \{a_1, a_2, a_4\} & \{a_1, a_2, a_5\} & \{a_1, a_3, a_4\} & \{a_1, a_3, a_5\} \\ \{a_1, a_4, a_5\} & \{a_2, a_3, a_4\} & \{a_2, a_3, a_5\} & \{a_2, a_4, a_5\} & \{a_3, a_4, a_5\} \end{array}$$

O questionamento aqui é o seguinte: dispondo-se de um conjunto com n elementos, de quantos modos pode-se escolher esses elementos de modo a formar um subconjunto deste conjunto com p elementos?

Note que a utilização da linguagem dos conjuntos é a apropriada para tratar desse tipo de agrupamento, porque não existe ordem entre os elementos de um conjunto.

Para ilustrar o raciocínio empregado, veja-se o exemplo a seguir:

Exemplo 4.2.7: Seja o conjunto {1,2,3,4,5} e a formação de subconjuntos com dois elementos desse conjunto.

As possibilidades podem ser evidenciadas pelo processo a seguir:

- {1,2},{1,3},{1,4} e {1,5}, fixando o número 1;
- {2,3},{2,4} e {2,5}, fixando o número 2;
- {3,4} e {3,5}, fixando o número 3;
- {4,5}, fixando o número 4.

Resulta daí um total de 4+3+2+1=10 subconjuntos com 2 elementos.

Note que se corre o risco de algum subconjunto ser esquecido nesse processo, sobretudo se houver um número grande de elementos. Por isso, a análise combinatória é uma ferramenta poderosa na obtenção do resultado seguro da contagem sem a necessidade de descrever os agrupamentos. A definição dada a seguir garante esse resultado:[25][24]

Definição 4.6 (Combinação Simples): Seja um conjunto com n elementos, o número de subconjuntos com p elementos é igual ao número de combinações de n elementos tomados p a p dado por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, 0 < p \leq n$$

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} \text{ (notação mais comum em textos mais avançados)}$$

A maneira mais prática de utilizar essa expressão é atentando para o seguinte fato: o número de combinações é sempre um número natural que resulta da expressão de uma fração cujo denominador é o produto de dois fatoriais.

Colocar no denominador o fatorial expandido do menor fator de forma que a expansão do fatorial do numerador cesse no fatorial do maior fator do denominador facilita a execução da simplificação dos fatores comuns ao numerador e ao denominador da fração.

No caso do ilustrado no exemplo 4.2.7 apresentado, tem-se cinco elementos no conjunto, ou seja, $n = 5$ e escolhe-se dois desses cinco elementos sendo $p = 2$. Daí:

$$\begin{aligned} C_{5,2} &= \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} \\ &= \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Que é exatamente o número de subconjuntos que fora encontrado no exemplo 4.2.7 e ilustra a maneira prática de lidar com os fatores da fração.

4.2.5 Combinações completas

Considere a tarefa de escolher três elementos do conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ podendo para tanto repetir o elemento escolhido. Para tanto, são vinte os resultados possíveis:

$$\begin{array}{ccccc} \{a_1,a_1,a_1\} & \{a_1,a_1,a_2\} & \{a_2,a_2,a_1\} & \{a_3,a_3,a_1\} & \{a_4,a_4,a_1\} \\ \{a_1,a_2,a_3\} & \{a_2,a_2,a_2\} & \{a_1,a_1,a_3\} & \{a_2,a_2,a_3\} & \{a_3,a_3,a_2\} \\ \{a_4,a_4,a_2\} & \{a_1,a_2,a_4\} & \{a_3,a_3,a_3\} & \{a_1,a_1,a_4\} & \{a_2,a_2,a_4\} \\ \{a_3,a_3,a_4\} & \{a_4,a_4,a_3\} & \{a_1,a_3,a_4\} & \{a_4,a_4,a_4\} & \{a_2,a_3,a_4\} \end{array}$$

Enquanto as combinações simples abordam questões relativas à escolha de p objetos distintos entre n objetos distintos disponíveis, as combinações completas, ou com repetição, abordam o problema de escolher p objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados.

Desse modo, como lecionado em [24] e [25], determinar o número de soluções inteiras e não-negativas da equação $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p$ é objeto da atenção das combinações completas e uma forma alternativa de interpretação do fenômeno da combinação completa.

Pode-se colocar o problema de como encontrar valores inteiros não-negativos para as variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4 em que x_i, $i = 1{,}2{,}3{,}4$ é a quantidade em que o elemento a_i é tomado na escolha de modo que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$.

Daí, para o caso $a_1a_1a_2$ tem-se $2+1+0+0=3$ e para o caso $a_1a_3a_4$ tem-se $1+0+1+1=3$. Assim, representando as soluções possíveis (e, consequentemente, as possibilidades de combinações) com sinais positivos $+$ que juntos representam o valor da incógnita e por barras ($|$) que servem para separar as incógnitas, pode-se visualizar essas soluções como a seguir: $++|+||$ e $+||+|+$, respectivamente.

Portanto, cada solução será representada por uma fila com $n-1$ barras($|$) e p sinais positivos ($+$). Logo, escolhendo no $n+p-1$ lugares da fila os p lugares onde estarão os sinais positivos ($+$), os demais serão ocupados pelas barras ($|$). Isto pode ser feito de $C_{n+p-1,p}$.

Então, a interpretação de questões de combinações completas ou com repetição ensejam a definição a seguir:

Definição 4.7: O número de combinações completas ou com repetição de n objetos tomados p a p é denotado por $CR_{n,p}$ e dado por:

$$CR_{n,p} = P^{p,n-1}_{p+n-1} = \frac{(n+p-1)}{p!(n-1)!} = C_{n+p-1,p}$$

4.2.6 Fórmulas combinatórias

O emprego de relações e expressões para permutações e combinações podem ser ferramentas muito úteis na resolução de grande parte dos problemas para quem memoriza esse repertório de técnicas.

De início, seja o ilustre triângulo aritmético de Tartaglia-Pascal formado pelos números binomiais $C_{n,p}$ (também conhecidos como coeficientes binomiais ou números combinatórios) dispostos em um quadro como na definição a seguir:[25][24]

Definição 4.8 (Triângulo de Pascal): Denomina-se *Triângulo de Pascal* o quadro formado pelos números binomiais $C_{n,p}$ dispostos como segue:

$$\begin{array}{lllll}
C_{0,0} & & & & \\
C_{1,0} & C_{1,1} & & & \\
C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} & & \\
C_{3,0} & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & \\
C_{4,0} & C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} \\
\ldots & & & &
\end{array}$$

Que pela definição 4.6 fornece:

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
\ldots & & & &
\end{array}$$

Contando as linhas e as colunas a partir de zero, o elemento que figura na linha

n e na coluna p é denotado por $C_{n,p}$.[25][24]

A Relação de Stifel apresentada a seguir irá promover um método prático e rápido de construção do *Triângulo de Pascal*.[25][24]

Proposição 4.1 (Relação de Stifel):

$$C_{n,p} + C_{n,p+1} = C_{n+1,p+1}$$

Demonstração. A prova dessa importante relação mobiliza conceitos básicos e imediatos de combinatória. Para tanto basta considerar um conjunto A que possua $n+1$ elementos sendo um dos elementos desse conjunto o elemento a.

A combinação de $p+1$ elementos desse conjunto fornece o número de subconjuntos de A com $p+1$ elementos, logo, tem-se $C_{n+1,p+1}$.

Esse resultado obtido de modo imediato pela definição 4.6 de combinação é igual à soma do número de subconjuntos nos quais a não figura, dado pela relação $C_{n,p+1}$, com o número de subconjunto nos quais a figura, dado por $C_{n,p}$. [24] □

A demonstração da Relação de Stifel 4.1 reforça o aspecto basilar do Princípio Fundamental da Contagem 4.1 na abordagem de problemas e fornece o elemento do quadro do *Triângulo de Pascal* a partir da soma dos elementos da linha anterior que ocupam a mesma coluna e a coluna anterior.

Proposição 4.2 (Relação das Combinações Complementares):

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}$$

Demonstração. Seja um conjunto com n elementos, o número de subconjuntos com p elementos é igual ao número de combinações de n elementos tomados p a p dado por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-(n-p))!(n-p)!} = C_{n,n-p}$$

que é igual ao número de combinações de n elementos tomados $n-p$ a $n-p$, ou seja, o número de subconjuntos com $n-p$ elementos do conjunto com n elementos. [25]

A ideia principal ensejada por essa relação é a de que o número de modos de tomar p elementos entre n elementos de um conjunto é igual ao número de modos de não tomar $n-p$ elementos. [24] □

Proposição 4.3 (Teorema das Linhas):

$$C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,n} = 2^n$$

Demonstração. A soma dos elementos da linha n vale 2^n, que é igual ao número de subconjuntos de um conjunto com n elementos. [25][24]

De fato, uma vez que $C_{n,p}$ fornece o número de subconjuntos com p elementos de uma conjunto com n elementos, então $C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,n}$ resulta no número total de subconjuntos obtidos a partir de um conjunto com n elementos, que é 2^n.

$\square$

4.3 Probabilidades

Desenvolvido o arcabouço central do importante estudo da Análise Combinatória, a teoria das Probabilidades faz uso desse expediente de modo fundamental. Inicialmente, contemple a seguir a inspiradora citação de Pierre Simon Laplace em sua obra *Ensaio filosófico sobre as Probabilidades*:

> "A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida desta probabilidade, a qual é portanto uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis".[27]

Conforme [25] e [26], a teoria das probabilidades é o ramo da matemática em que são desenvolvidos estudos para serem utilizados na análise de experimentos aleatórios.

Ainda nessas referências, um experimento é dito aleatório quando ele pode ser repetido sob as mesmas condições inúmeras vezes e os resultados não podem ser previstos com absoluta certeza.

Embora não se possa afirmar qual é o resultado do experimento aleatório, em geral pode-se descrever o conjunto que abriga todos os resultados possíveis.

Quando é possível fazer uma previsão do resultado de um experimento, ele é chamado de determinístico.

Experimentos ou fenômenos aleatórios acontecem com bastante frequência no cotidiano como pode-se facilmente verificar nos questionamentos sobre se choverá amanhã ou de qual a chance de se ganhar na loteria.

Segue alguns exemplos de experimentos aleatórios:

- Jogar um dado e observar o número mostrado na face superior;
- Jogar uma moeda e observar a face de cima.

O que os experimentos acima apresentam em comum são as características que definem um experimento aleatório, quais sejam, cada experimento poderá ser repetido indefinidamente sob condições essencialmente idênticas e, embora não se possa afirmar qual é o resultado do experimento, é possível descrever o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento.

4.3.1 Espaço Amostral

Para cada experimento aleatório, define-se o espaço amostral S como o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento.

Considerando os experimentos aleatórios descritos anteriormente, considere a tarefa de descrever o espaço amostral para cada um deles.

O experimento de jogar um dado e observar o número mostrado na face superior pode resultar em uma das seguintes numerações de face do dado: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Portanto, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

Já o experimento de jogar uma moeda e observar a face de cima, tem-se: $S = \{Cara, Coroa\}$.

Ou seja, ao efetuar um experimento aleatório, o primeiro passo consiste em descrever todos os resultados possíveis explicitando o conjunto de possíveis resultados, que é denominado Espaço Amostral, e assim determinar o número de elementos que pertencem a ele.

4.3.2 Evento

Todo subconjunto do Espaço Amostral é chamado de evento.

Recordando o experimento aleatório do lançamento do dado, jogando um dado e observando o número mostrado na sua face superior, o subconjunto $A = \{2,3,5\}$ é o evento que acontece se o número mostrado na referida face superior é um número primo.

Outros eventos relativos a esse mesmo Espaço Amostral $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ do dado podem ser, por exemplo:

- Ocorrência de número menor que 5, $B = \{1,2,3,4\}$;
- Ocorrência de número menor que 7, $C = \{1,2,3,4,5,6\} = S$;
- Ocorrência de número maior que 6, $D = \emptyset$.

Diz-se evento certo o evento que é igual ao Espaço Amostral, e evento impossível quando o evento é igual ao conjunto vazio.

4.3.3 Probabilidades de Laplace

Ainda considerando o caso do evento $A = \{2,3,5\}$, visto anteriormente, dos resultados possíveis de numeração na face superior no lançamento de um dado. Uma vez que são três números de um total de seis possíveis, intuitivamente esperara-se que ao repetir o experimento um grande número de vezes obtém-se algum desses números na face superior do dado em aproximadamente a metade das vezes. De fato, os experimentos não causam interferências um no outro nem o dado é viciado privilegiando qualquer resultado.

O que está por trás desse raciocínio intuitivo é o seguinte: cada um dos elementos que compõem o espaço amostral são igualmente prováveis de se observar quando da realização do experimento e o número de elementos do evento, denotado por $n(A) = 3$, é justamente a metade dos elementos do Espaço Amostral, denotado por $n(S) = 6$.

Essas considerações motivam a definição de probabilidade de um evento A da seguinte forma:[25]

Definição 4.9 (Probabilidade de Laplace): Seja S o espaço amostral composto por um número finito de eventos equiprováveis e A um evento desse espaço amostral.

Sendo $P(A)$ a probabilidade do evento A, $n(A)$ o número de elementos do evento A e $n(S)$ o número de elementos do Espaço Amostral, tem-se:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Como visto no trecho extraído da obra de Laplace [27] que ilustrou o início desta seção 4.3, observa-se a referência aos elementos do evento como os casos favoráveis, ou desejados. Uma vez que os elementos do espaço amostral são chamados de casos possíveis, tem-se:

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número de casos possíveis}} \tag{4.1}$$

4.3.4 Espaço de probabilidade

Uma vez desenvolvido o caso particular da probabilidade como quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis ensejada pelas primeiras definições formais de probabilidade e que resolve boa parte dos exercícios e problemas encontrados na educação básica, desenvolver-se-á a situação geral a partir da seguinte definição:[25][24]

Definição 4.10: Seja um conjunto S denominado Espaço Amostral e uma função P definida em todos os eventos de S. A função P é uma probabilidade se associa a cada evento A de S um número $P(A)$ tal que:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento $A \subset S$;

2) $P(\emptyset) = 0$ (Evento impossível), $P(S) = 1$ (Evento certo);

3) Se os conjuntos A e B, subconjuntos de S, forem disjuntos (chamados eventos mutuamente exclusivos), ou seja, $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Daí seguem proposições que encerram resultados úteis, embora às vezes até simples, que podem ser ferramentas valiosas na resolução de problemas de probabilidades.

Proposição 4.4: Seja um evento A do espaço amostral S e o seu complementar A^C, então:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

Demonstração. Uma vez que $A \cup A^C = S$ e obviamente são disjuntos os conjuntos A e A^C, tem-se diretamente dos itens 2 e 3 da definição 4.10:

$$P(S) = 1 \Leftrightarrow P(A \cup A^C) = 1 \Leftrightarrow P(A) + P(A^C) = 1 \Leftrightarrow P(A^C) = 1 - P(A)$$

□

Proposição 4.5: Sejam A e B os subconjuntos do espaço amostral S. Se $A \subset B$, então $P(A) = P(B) - P(B - A)$.

Demonstração. Dado que $A \subset B$, então pode-se escrever $B = A \cup (B - A)$ de maneira que os conjuntos A e $(B - A)$ não possuem elementos comuns.

Assim, o item 3 da Definição 4.10 garante, pelo fato de serem disjuntos os conjuntos A e $(B - A)$, que:

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A).$$

Então $P(A) = P(B) - P(B - A)$. □

Desse resultado obtém-se imediatamente o corolário a seguir:

Corolário 4.1: Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração. Uma vez que, pela proposição 4.5, $P(A) = P(B) - P(B - A) \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$ e $P(B - A) \geq 0$, pela definição 4.10, tem-se:

$$P(B - A) \geq 0 \Rightarrow P(B) - P(A) \geq 0 \Rightarrow P(B) \geq P(A).$$

□

Proposição 4.6 (Probabilidade da União):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demonstração. Como pode-se escrever $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ como a união de conjuntos disjuntos e $B = (B - A) \cup (B \cap A)$ da mesma forma, tem-se, pelo item 3 da definição 4.10, que:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

$$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$$

Cuja soma membro a membro fornece:

$$P(A) + P(B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) + P(A \cap B).$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ &= P((A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)) \Leftrightarrow \\ &= P(A \cup B) \end{aligned}$$

□

4.3.5 Combinação de eventos

Pode-se empregar as várias técnicas vistas na seção anterior para combinar conjuntos, mais especificamente eventos, para formar novos conjuntos e consequentemente novos eventos.

Considere dois eventos A e B e a união desses dois eventos. O evento união denotado por $A \cup B$ ocorre se, e somente se, ao menos um dos eventos ocorrer. Ou seja, $A \cup B$ ocorre se, e somente se, ou A, ou B, ou ambos ocorrerem.

Considerando ainda os dois eventos A e B e a interseção desses dois eventos, denotado por $A \cap B$, ocorre se, e somente se, os dois eventos ocorrerem, ou seja, A e B ocorrerem.

Por fim, o evento complementar de A, denotado por A^C, ocorre se, e somente se, não ocorre A.

Resgatado da seção anterior os principais conceitos nessa breve introdução, seguem os exemplos.

Exemplo 4.3.1: Jogando um dado e observando o número mostrado na face superior, tem-se: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Considerando os seguintes eventos:

- Ocorrência de um número ímpar, $A = \{1,3,5\}$;
- Ocorrência de um número par, $B = \{2,4,6\}$;
- Ocorrência de um número menor ou igual a 3, $C = \{1,2,3\}$.

Desta forma, tem-se os seguintes eventos obtidos pela combinações dos anteriormente vistos:

- Ocorrência de um número ímpar "ou"um número par, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$;
- Ocorrência de um número ímpar ou de um número menor ou igual a 3, $A \cup C = \{1,2,3,5\}$;
- Ocorrência de um número par ou de um número menor ou igual a 3, $B \cup C = \{1,2,3,4,6\}$;
- Ocorrência de um número ímpar "e"par $A \cap B = \emptyset$.

Note que nesse último caso, o resultado foi o conjunto vazio porque não existe número que seja simultaneamente par e ímpar. Nesse caso diz-se que os eventos A e B são mutuamente exclusivos.

Tem-se, ainda, os seguintes exemplos de eventos:

- Ocorrência de um número ímpar e menor ou igual a 3, $A \cap C = \{1,3\}$;
- Ocorrência de um número par e menor ou igual a 3, $B \cap C = \{2\}$;
- Não ocorrer um número ímpar, $A^C = \{2,4,6\}$;
- Não ocorrer um número par, $B^C = \{1,3,5\}$;
- Não ocorrer um número menor ou igual a 3, $C^C = \{4,5,6\}$.

4.3.6 Probabilidades condicionais

Considere a seguinte situação ilustrativa: há 400 homens e 600 mulheres disputando uma única vaga de um concurso público cujo critério de seleção é o sorteio.

Dessa forma, como há 1.000 candidatos na concorrência, a probabilidade de um homem ser sorteado é igual a $400/1000 = 0{,}4 = 40\%$ e a probabilidade de uma mulher ser sorteada é igual a $600/1.000 = 0{,}6 = 60\%$

A chance de ganhar essa vaga de um candidato singular é de $1/1.000 = 0{,}001 = 0{,}10\%$.

Estas são as probabilidades *a priori*, isto é, antes que o concurso ocorra, que o experimento aleatório se realize.

Suponha que a divulgação preliminar do concurso informa que o candidato sorteado é um homem. A frustração entre as candidatas é compreensível porque a chance de alguma mulher conseguir a vaga agora é igual a 0. Essa é uma probabilidade *a posteriori*, isto é, depois de realizado o experimento.

Contudo, as chance de um homem conquistar a vaga aumentou, pois não há mais 1.000 concorrentes, e sim 400. Os casos possíveis agora totalizam 400 pessoas. A chance de um candidato singular do sexo masculino vencer que antes era de 0,10% passa a ser de $1/400 = 0{,}0025 = 0{,}25\%$. Note que o Espaço Amostral foi reduzido.

Considere agora o experimento que consiste em jogar um dado não-viciado. Sejam o espaço amostral $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ e os eventos $A = \{2,4,6\}$ e $B = \{1,2,5\}$.

Tem-se que a probabilidade de ocorrer o evento B é igual a $P(B) = n(B)/n(S) = 3/6 = 1/2$, que é a probabilidade de B *a priori*, antes que o experimento se realize.

Suponha que, uma vez realizado o experimento, seja informado que o resultado do mesmo é um número par.

A expectativa sobre a ocorrência do evento B se modifica com essa informação, uma vez que somente poderá ter ocorrido o evento B se o resultado do experimento tiver sido o número 2.

Essa expectativa é quantificada com a introdução de uma probabilidade *a posteriori* ou, como será denominada doravante, probabilidade condicional de B dado A, definida a seguir:

Definição 4.11 (Probabilidade Condicional): Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de B dado A é o número $P(A \cap B)/P(A)$ representado por $P(B|A)$ como segue:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Daí, no caso do experimento dos dados visto anteriormente, tem-se $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = 1/3$. Esse resultado é obtido sabendo que, no caso, ocorreu um número par e, por isso, o Espaço Amostral, que são os casos possíveis, deixa de ser S e passa a ser A.

A probabilidade de ocorrer B sabendo que A ocorreu pode ser obtida através da ideia de que o novo Espaço Amostral é o conjunto A e caso seja finito, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathrm{P(B|A)} &= \frac{\text{Casos desejados}}{\text{Casos possíveis}} \\ &= \frac{\text{Casos desejados em } A}{n(A)} \end{aligned}$$

Para calcular a probabilidade de ocorrer o evento B, deve-se restringir aos elementos comuns de A e B. Portanto, os casos desejados são os elementos da interseção entre

A e B.

$$\text{Probabilidade de ocorrer } B \text{ sabendo que } A \text{ ocorreu} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{3}$$

A expressão da probabilidade de ocorrer B sabendo que A ocorreu expressa por $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ pode ser apresentada da seguinte forma, denominado *Teorema da Multiplicação*:

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A). \tag{4.2}$$

Ou seja, a probabilidade de ocorrerem os eventos A e B é igual a probabilidade de ocorrer A vezes a probabilidade de ocorrer B sabendo que A ocorreu.

Se a ocorrência do evento A não influir no cálculo da probabilidade do evento B, os eventos são ditos independentes e neste caso, tem-se:

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B). \tag{4.3}$$

5

Aplicação de questões de concurso no ensino de Análise Combinatória e Probabilidades

A presente proposta é destinada a professores de matemática do Ensino Médio com a finalidade de apresentar e desenvolver atividades envolvendo os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidades desse grau de ensino com base na metodologia de resolução de problemas, dentro da linha das questões de concursos públicos de nível médio de escolaridade.

As atividades propostas para aplicação de questões de concurso no ensino de matemática pode ser uma oportunidade de o estudante desenvolver estratégias de pensamento crítico atentando para a importância da matemática como uma ferramenta que lhe permite uma melhor compreensão da realidade que o cerca. Invariavelmente um caminho para este objetivo é propor situações problemas a partir dessa realidade de sorte que o estudante melhore seu desempenho na resolução de problemas. [33][13][14][15][22]

As questões de concurso escolhidas para essa proposta permitem explorar as estratégias de resolução de problemas como, por exemplo, o passo-a-passo apresentado quando na abordagem da combinatória na seção 4.2 ou as Probabilidades de Laplace apreciadas na seção 4.3, bem como resolver por meio de expedientes como a tentativa e erro, a organização de uma lista, confecção de uma tabela ou figura, conjecturar uma lei de formação e testá-la, abordar o problema de trás para frente. [33]

A escolha das questões seguiu o mesmo critério utilizado pelo brilhante professor Augusto Morgado na coluna “O que cai por aí ”da Revista do Professor de Matemática em meados da década de noventa em que questões de concursos públicos e vestibulares país afora eram publicadas em razão de sua criatividade, nível de dificuldade ou baixo aproveitamento com o intuito de fomentar o ensino da matemática. [1]

Ao resolver os problemas sugeridos nas questões com o conteúdo de Análise Combinatória e Probabilidades nos concursos públicos, tem-se como objetivo analisar as etapas e os processos utilizados na sua resolução e também discutir alguns aspectos da resolução de problemas usados como metodologia no ensino de matemática em consonância com as propostas oficiais de ensino apresentadas previamente. [33][13][14][15][22]

Coligiu-se questões de concursos públicos de nível médio do governo estadual mineiro e federal para ilustrar quão rica pode ser essa abordagem em sala de aula e como esse instrumento de seleção dos quadros para o ingresso no serviço público pode ser estimulante para o ensino de matemática.

5.1 Questões de Análise Combinatória

De início, seja a questão do concurso público destinado a selecionar candidatos para o provimento de cargos de Técnico Administrativo da Agência Nacional De Energia Elétrica - ANEEL, a seguir:[8]

Questão 5.1.1: Em um campeonato de tênis participam 30 duplas, com a mesma probabilidade de vencer. O número de diferentes maneiras para a classificação dos 3 primeiros lugares é igual a:

(A) 24.360

(B) 25.240

(C) 24.460

(D) 4.060

(E) 4.650

Com base no passo a passo apresentado como consequência da definição 4.1 do Princípio Fundamental da Contagem, deve-se identificar as etapas do problema que são: escolher o primeiro, o segundo e o terceiro colocado.

Daí, a etapa seguinte é calcular a quantidade de possibilidades em cada etapa. Tem-se 30 possibilidades para o primeiro colocado, 29 possibilidades para o segundo colocado e 28 possibilidades para o terceiro colocado.

Finalmente, basta multiplicar $30 \cdot 29 \cdot 28 = 24.360$ que é o número de diferentes maneiras para a classificação requerida.

Devido ao modesto nível de dificuldade da questão, nota-se o imediato emprego da habilidade de resolver problemas elementares de contagem utilizando o princípio multiplicativo previsto nos Conteúdos Básicos Comuns da rede estadual mineira. Contudo, não será menor a satisfação do estudante pela superação de encontrar a resposta correta. [33] [22]

Contudo, caso o estudante considere, equivocadamente, que as permutações nas posições da classificação possam ser equivalentes, ou seja, não importa a ordem da classificação, mas apenas quais duplas figuram nos três primeiro lugares, o problema passa a ter um caráter de Combinação Simples 4.6 em que dado trinta duplas toma-se três. Assim, obtém-se como a seguir: $C_{30,3} = \frac{30!}{3!(30-3)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3!} = 4060$.

Um valor incorreto que figura capciosamente no rol de opções causando uma possível dificuldade para o estudante acertar a resposta certa.

Segue uma questão do concurso público para provimento da carreira de Técnico (nível médio) do Ministério Público da União - MPU. [19]

Questão 5.1.2: Paulo possui três quadros de Gotuzo e três de Portinari e quer expô-los em uma mesma parede, lado a lado. Todos os seis quadros são assinados e datados. Para Paulo, os quadros podem ser dispostos em qualquer ordem, desde que os de Gotuzo apareçam ordenados entre si em ordem cronológica, da esquerda para a direita. O número de diferentes maneiras que os seis quadros podem ser expostos é igual a

(A) 20.

(B) 30.

(C) 24.

(D) 120.

(E) 360.

A questão envolve a disposição dos seguintes quadros: três quadros de Gotuzo e três de Portinari, e o número de diferentes maneiras que esses seis quadros podem ser expostos, desde que os de Gotuzo apareçam ordenados entre si em ordem cronológica, da esquerda para a direita.

Vale lembrar que a descrição do problema em termos matemáticos é o princípio da resolução de uma situação-problema. Daí passa-se a essa tradução.

Os três quadros de Gotuzo serão denotados por G_1, G_2 e G_3 e os três quadros de Portinari serão designados por P_1, P_2 e P_3.

O número de diferentes maneiras na qual os seis quadros podem ser expostos, em qualquer ordem, é a permutação simples de seis, que é igual a $6! = 720$.

Dentro dessas 720 maneiras em que os seis quadros aparecem, os três quadros de Gotuzo se apresentam em seis diferentes ordens, que é o resultado da permutação simples dos três quadros em que os quadros de Gotuzo não estão necessariamente um ao lado do outro.

Qualquer que seja a exposição dos seis quadros, uma das disposições dos quadros de Gotuzo estará presente e todas as sequências dos quadros de Gotuzo se repetirão a mesma quantidade de vezes.

Daí, como se tem um total de 720 maneiras diferentes em que os seis quadros podem ser apresentados e há seis possíveis sequências para os quadros de Gotuzo, pois é a permutação dos três, então cada uma dessas sequências aparecerá $720/6 = 120$ vezes.

Então a sequência que representa os quadros de Gotuzo em ordem cronológica se repetirá 120 vezes.

Outro modo de abordar a questão seria lembrar que existe um único modo de dispor os quadros de Gotuzo em ordem cronológica e, das seis posições disponíveis, três posições serão ocupadas.

A Combinação Simples 4.6 de 6 tomados 3 a 3 fornece quantos modos as três posições poderão ser ocupadas como a seguir: $C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.

Daí resta colocar os quadros de Portinari nas três posições restantes. Essa tarefa constitui uma Permutação Simples 4.3 de três objetos $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Finalmente, uma vez que a etapa de dispor os três quadros de Gotuzo possui 20 possibilidades e a etapa seguinte de dispor os três quadros de Portinari possui 6, tem-se, pelo Princípio Fundamental da Contagem 4.1, $20 \cdot 6 = 120$ possibilidades totais.

A ordenação dos quadros de Gotuzo cronologicamente como solicitado no enunciado pode ser equivocadamente interpretado pelo estudante de maneira que pareça imperativo que eles figurem um ao lado do outro da esquerda para a direita. Caso isso ocorra, os três quadros de Gotuzo figurariam como se fossem apenas um quadro.

Daí, o problema da questão tornar-se-ia permutar os três quadros de Portinari e um conjunto de quadros de Gotuzo, ou seja, uma permutação de quatro objetos, que resulta em $P_4 = 4! = 24$ possibilidades.

Essa conclusão está errada e, por isso, consta nas opções para atrair os estudantes que de maneira impensada optaram por esse raciocínio errôneo.

Outro raciocínio que encaminha o estudante para o erro e também figura nas opções da questão é o de desconsiderar as ordenações possíveis dos quadros de Portinari.

Nesse caso, o problema da questão resume-se a encontrar as três posições em que figurará os quadros de Gotuzo em ordem cronológica da esquerda para a direita. Isso pode ser feito pela Combinação Simples 4.6 de seis posições tomadas três a três cujo resultado obtido são 20 possibilidades.

Segue uma questão do concurso público destinado a selecionar candidatos para o provimento de cargos de Técnico de Finanças e Controle da Secretaria Federal de Controle Interno do Ministério da Fazenda.[16]

Questão 5.1.3: Em uma circunferência são escolhidos 12 pontos distintos. Ligam-se quatro quaisquer destes pontos, de modo a formar um quadrilátero. O número total de diferentes quadriláteros que podem ser formados é:

(A) 128

(B) 495

(C) 545

(D) 1.485

(E) 11.880

A ordem dos vértices dos quadriláteros formados conforme descrito no enunciado da questão acima apresentada não é relevante na sua determinação e uma vez havendo doze pontos distintos (estes pontos não são colineares porque estão em uma circunferência), deve-se escolher quatro para determinar cada quadrilátero.

Conforme a definição 4.6 de Combinações Simples e sendo o conjunto formado pelos 12 pontos, o número de subconjuntos com 4 pontos é igual ao número de Combinações Simples 4.6 de 12 pontos tomados 4 a 4 e pode-se fazer isso de $C_{12,4} = \frac{12!}{4!(12-4)!} = \frac{12!}{4!8!} = 495$ maneiras.

Caso o estudante considere enganosamente relevante a ordem de escolha dos vértices do quadrilátero, tem-se para cada uma das 495 possibilidades de escolha dos vértices, $P_4 = 4! = 24$ formas de permutá-los. Assim, seriam $495 \cdot 24 = 11.880$ maneiras de formar um quadrilátero. Não por acaso, astuciosamente consta no rol de assertivas esse valor incorreto.

Segue mais uma questão do concurso público para provimento de cargos de Técnico de Finanças e Controle da Controladoria-Geral da União - CGU. [11]

Questão 5.1.4: Ágata é decoradora e precisa atender o pedido de um excêntrico cliente. Ele - o cliente - exige que uma das paredes do quarto de sua filha seja dividida em uma sequência de 5 listras horizontais pintadas de cores diferentes, ou seja, uma de cada cor. Sabendo-se que Ágata possui apenas 8 cores disponíveis, então o número de diferentes maneiras que a parede pode ser pintada é igual a:

(A) 56

(B) 5760

(C) 6720

(D) 3600

(E) 4320

Na situação-problema apresentada no enunciado da questão acima há 8 possibilidades de cores para a primeira listra horizontal pintada na parede, 7 possibilidades para segunda listra, 6 possibilidades para a terceira listra, 5 possibilidades para a quarta listra e 4 possibilidades para a quinta listra.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem 4.1, Ágata pode pintar a sua parede de $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6.720$ maneiras.

Caso o estudante se precipite ao fazer os cálculos do produto do número de cores disponíveis, que são oito, pelas sete restantes obtém-se o valor $8 \cdot 7 = 56$ que logo se apresenta nas opções da questão. O açodamento na apreciação de uma assertiva compatível com algum cálculo realizado pode induzir ao erro como nesse caso.

Vale destacar a semelhança entre o resultado da permutação P_8 com a assertiva figurada na letra "E"da questão. Não obstante a óbvia diferença, o estudante mais afobado pode ignorar a notável diferença e incorrer em erro ao assinalar essa opção ao obter equivocadamente o resultado da permutação das oito cores disponíveis.

5.2 Questões de Probabilidades

Passa-se agora à apreciação das questões de concurso que abordam o conteúdo de Probabilidades começando a seguir com uma questão do concurso público para provimento de cargos da carreira de Fiscal Assistente de Transportes e Obras Rodoviários do quadro de pessoal do Departamento de Estradas de Rodagem do Estado de Minas Gerais - DER/MG. [30]

Questão 5.2.1: Num molho há dez chaves e duas abrem um certo cadeado. Se Antônio pegar ao acaso uma chave, a probabilidade de que ele consiga abrir o cadeado com essa chave é de:

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{1}{10}$

(E) $\frac{1}{20}$

A resolução da questão é a aplicação imediata do cálculo de probabilidades de eventos equiprováveis fornecido pela equação 4.1. A probabilidade procurada é de:

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número de casos possíveis}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Contudo, o raciocínio do estudante pode enveredar pelo erro. Dado que a retirada ao acaso é de apenas uma chave de um total de dez chaves, o resultado da probabilidade pode ser equivocadamente calculado como $\frac{1}{10}$, causando o erro na marcação da resposta certa da questão.

Segue mais uma questão dos concursos públicos do Governo do Estado de Minas Gerais, desta vez do concurso público para provimento de cargos da carreira de Técnico Universitário do quadro de pessoal da Fundação Helena Antipoff - FHA. [31]

Questão 5.2.2: Numa urna há 6 bolas pretas numeradas de 1 a 6 e 4 bolas brancas numeradas de 1 a 4. A probabilidade de sortear-se somente uma bola da urna e que ela seja branca ou que sua numeração seja um número primo é:

(A) 90%

(B) 70%

(C) 60%

(D) 20%

O Espaço Amostral desse experimento é composto por 10 bolas e o cálculo dos casos desejados pode ser obtido pelo emprego da probabilidade de eventos equiprováveis fornecido pela equação 4.1 resultado da definição 4.9 da Probabilidade de Laplace .

Pela proposição 4.6 da Probabilidade da União, obtém-se considerando a união dos eventos A de a bola sorteada ser uma bola branca e B de a bola sorteada possuir uma numeração com um número primo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = 70\%$$

Note que se o estudante não considerar a interseção dos dois eventos A e B em que a bola sorteada é uma bola branca e possui uma numeração com número ímpar o cálculo será erroneamente executado como segue:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} = 90\%$$

Para isso, o estudante deveria garantir que os eventos A e B são disjuntos para empregar o item 3 da definição 4.10 de Espaço de Probabilidade. Assim, esse equívoco compromete a marcação da resposta certa da questão.

A seguir uma questão do concurso público para provimento de cargos de nível intermediário (antigo segundo grau) de Técnico Administrativo da Agência Nacional de Aviação Civil – ANAC. [7]

Questão 5.2.3: Uma caixa contém seis bolas brancas e quatro pretas. Duas bolas serão retiradas dessa caixa, uma a uma e sem reposição, então a probabilidade de uma ser branca e a outra ser preta é igual a

(A) $\frac{4}{15}$

(B) $\frac{7}{15}$

(C) $\frac{2}{15}$

(D) $\frac{8}{15}$

(E) $\frac{11}{15}$

A ordem em que se obtém uma bola branca e outra preta, ou vice-versa, são eventos distintos, mas atendem ao pedido do enunciado. Por isso, deve-se considerar separadamente a probabilidade de a primeira bola retirada ser branca e a segunda ser preta e vice-versa e, depois, adicioná-las para o resultado final.

Para tanto, considere os eventos:

- B_1={A bola obtida no primeiro lançamento é branca};

- P_1={A bola obtida no primeiro lançamento é preta};

- B_2={A bola obtida no segundo lançamento é branca};

- P_2={A bola obtida no segundo lançamento é preta}.

A probabilidade $P(B_1)$ de a primeira bola retirada ser branca é, conforme a equação 4.1, o quociente entre os casos favoráveis e os casos possíveis, ou seja, $P(B_1) = \frac{6}{10}$, pois do total de 10 bolas, 6 são brancas.

Uma vez que o Espaço Amostral para a segunda retirada foi condicionado pela retirada de uma bola branca, restando 9 bolas das quais 4 são pretas, tem-se novamente pela equação 4.1 o cálculo de $P(P_2|B_1) = \frac{4}{9}$, que resulta considerando a probabilidade condicional definida em 4.11 e sua forma conhecida como *Teorema da Multiplicação* 4.2 em:

$$P(B_1 \cap P_2) = P(P_2|B_1) \cdot P(B_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{6}{10} = \frac{24}{90}$$

Que é a probabilidade de a primeira bola retirada ser branca e a segunda ser preta.

Para o cálculo da probabilidade da primeira bola retirada ser preta e a segunda ser branca é análogo e resulta em:

$$P(P_1 \cap B_2) = P(B_2|P_1) \cdot P(P_1) = \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{24}{90}$$

Finalmente, para encontrar a resposta da questão, basta efetuar a soma dos cálculos das probabilidades das duas configurações possíveis:

$$\frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

Note que no rol das opções de resposta da questão encontra-se o valor de $\frac{4}{15}$, que é obtido erroneamente se o aluno desconsiderar a ordem em que se obtém uma bola branca e outra preta, ou vice-versa, como eventos distintos e que devem ser somados.

Segue uma questão do concurso público para provimento de cargos de Assistente Técnico-Administrativo do Ministério da Fazenda. [18]

Questão 5.2.4: Considere que há três formas de Ana ir para o trabalho: de carro, de ônibus e de bicicleta. Em 20% das vezes ela vai de carro, em 30% das vezes de ônibus e em 50% das vezes de bicicleta. Do total das idas de carro, Ana chega atrasada em 15% delas, das idas de ônibus, chega atrasada em 10% delas e, quando vai de bicicleta, chega atrasada em 8% delas. Sabendo-se que um determinado dia Ana chegou atrasada ao trabalho, a probabilidade de ter ido de carro é igual a

(A) 20%.

(B) 40%.

(C) 60%.

(D) 50%.

(E) 30%.

O enunciado da questão não deixa dúvidas quanto ao caráter condicional do problema. Para sua solução, considere os eventos:

- A={Ana vai ao trabalho de carro};
- B={Ana vai ao trabalho de ônibus};
- C={Ana vai ao trabalho de bicicleta};
- D={Ana chega atrasada ao trabalho}.

As probabilidades que o enunciado fornece podem ser expressas como a seguir:

- $P(A) = 20\%$;
- $P(B) = 30\%$;
- $P(C) = 50\%$;
- $P(D|A) = 15\%$;
- $P(D|B) = 10\%$;
- $P(D|C) = 8\%$.

Da definição 4.11 da Probabilidade Condicional, tem-se:

$$P(D|A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} \Rightarrow 15\% = \frac{P(A \cap D)}{20\%} \Rightarrow P(A \cap D) = 3\%$$

Analogamente, $P(B \cap D) = 3\%$ e $P(C \cap D) = 4\%$ e, então $P(D) = P((A \cup B \cup C) \cap D) = P((A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)) = 3\% + 3\% + 4\% = 10\%$, uma vez que os eventos de ir ao trabalho por um meio de transporte ou outro são disjuntos.

Daí, sabendo-se que Ana chegou atrasada ao trabalho, a probabilidade de ela ter ido de carro é dado por:

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{3\%}{10\%} = \frac{3}{10} = 30\%$$

Alternativamente, considere para a solução da questão a suposição de que Ana vá ao trabalho 100 vezes. Como são 20% de carro, 30% de ônibus e 50% de bicicleta, então tem-se 20 idas de carro, 30 idas de ônibus e 50 idas de bicicleta.

Uma vez que das 20 idas de carro, Ana chega atrasada em 15% das vezes, ou seja, 3 idas, das 30 idas de ônibus, Ana chega atrasada em 10% das vezes, ou seja, 3 idas e das 50 idas de bicicleta, Ana chega atrasada em 8% das vezes, ou seja, 4 idas, então Ana chega atrasada em $3 + 3 + 4 = 10$ vezes.

Sabendo que Ana chegou atrasada, a probabilidade de ela ter ido de carro é $P = 3/10 = 30\%$, que é a divisão das ida de carro com atraso pelo total de atrasos conforme equação 4.1 resultado da definição 4.9 da Probabilidade de Laplace .

Nesse caso, a estratégia de tomar um caso especial pela suposição de um determinado número promoveu a solução de modo que o emprego da equação 4.1 da probabilidade de eventos equiprováveis no contexto das probabilidades condicionais pudesse ser imediato.

Segue uma questão do concurso público para provimento da carreira de Técnico do Ministério Público da União - MPU. [19]

Questão 5.2.5: Maria ganhou de João nove pulseiras, quatro delas de prata e cinco delas de ouro. Maria ganhou de Pedro onze pulseiras, oito delas de prata e três delas de ouro. Maria guarda todas essas pulseiras – e apenas essas – em sua pequena caixa de joias. Uma noite, arrumando-se apressadamente para ir ao cinema com João, Maria retira, ao acaso, uma pulseira de sua pequena caixa de joias. Ela vê, então, que retirou uma pulseira de prata. Levando em conta tais informações, a probabilidade de que a pulseira de prata que Maria retirou seja uma das pulseiras que ganhou de João é igual a

(A) 1/3.

(B) 1/5.

(C) 9/20.

(D) 4/5.

(E) 3/5.

A questão ora apreciada aborda o tópico da Probabilidade Condicional.

Conforme sua definição 4.11, dados dois eventos A e B, a Probabilidade Condicional de B dado A é o número $P(A \cap B)/P(A)$ representado por $P(B|A)$ de sorte que $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$.

Daí, sejam os eventos:

A = {A pulseira retirada é de prata}

B = {A pulseira retirada é de João}

Assim, basta calcular a probabilidade $P(A \cap B)$ de a pulseira ser presente de João e também ser de prata e a probabilidade $P(A)$ de a pulseira retirada ser de prata.

Pela definição 4.1 fundamental de probabilidade (nº de casos favoráveis/nº de casos possíveis), calcula-se a probabilidade $P(A \cap B)$ de a pulseira ser uma das que ganhou de João e seja de prata como segue:

$$P(A \cap B) = \frac{4}{20} = 0{,}2$$

De fato, há quatro pulseiras de prata que foram dadas por João e há um total de vinte pulseiras dadas tanto por João quanto por Pedro.

Novamente, pela definição 4.1, calcula-se a probabilidade $P(A)$ de a pulseira retirada ser de prata notando que há no total de vinte pulseiras, quatro pulseiras de prata foram dadas por João e oito delas de prata dadas por Pedro.

$$P(A) = \frac{4+8}{20} = \frac{12}{20} = 0{,}6$$

Com esses resultados pode-se calcular a Probabilidade Condicional que é requerida na questão.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$$

De modo diverso, o estudante pode pensar apenas na quantidade de joias de prata perante o total de joias. Desse modo, a probabilidade obtida por esse pensamento incorreto é dado pela equação 4.1:

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número de casos possíveis}} = \frac{4+8}{9+11} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Ainda que ele considere apenas as joias recebidas de João, mas permaneça na ideia do total de joias, a probabilidade obtida como a seguir continua na seara do erro.

$$\text{Probabilidade} = \frac{4}{9+11} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Ambos os resultados incorretos constam nas assertivas da questão de maneira a acolher esses pensamentos improcedentes.

Segue uma questão do concurso público para provimento de cargos de Técnico de Finanças e Controle da Controladoria-Geral da União - CGU. [11]

Questão 5.2.6: Quando Paulo vai ao futebol, a probabilidade de ele encontrar Ricardo é 0,40; a probabilidade de ele encontrar Fernando é igual a 0,10; a probabilidade de ele encontrar ambos, Ricardo e Fernando, é igual a 0,05. Assim, a probabilidade de Paulo encontrar Ricardo ou Fernando é igual a:

(A) 0,04

(B) 0,40

(C) 0,50

(D) 0,45

(E) 0,95

A questão informou que:
– a probabilidade $P(R)$ de encontrar Ricardo é 0,40;
– a probabilidade $P(F)$ de encontrar Fernando é 0,10;
– a probabilidade $P(R \cap F)$ de encontrar Ricardo e Fernando é 0,05.

Busca-se encontrar a probabilidade $P(R \cup F)$ de encontrar Ricardo ou Fernando que pode ser facilmente obtida pela proposição 4.6 da Probabilidade da União. Daí, tem-se:

$$P(R \cup F) = P(R) + P(F) - P(R \cap F) = 0{,}40 + 0{,}10 - 0{,}05 = 0{,}45$$

Caso o estudante desconsidere o fato de que os eventos R e F possuem elementos comuns representados pela interseção $R \cap F$ e apenas efetue a soma das probabilidades conforme o item 3 da definição 4.10 de probabilidade da união de eventos disjuntos, obtém-se

$$P(R \cup F) = P(R) + P(F) = 0{,}40 + 0{,}10 = 0{,}50$$

Que é um valor incorreto e, por constar nas opções da questão, pode levar o estudante a escolher a assertiva errada da questão.

Por fim, uma questão do concurso público para provimento de cargos de Assistente Técnico-Administrativo do Ministério da Fazenda. [17]

Questão 5.2.7: Ao se jogar um determinado dado viciado, a probabilidade de sair o número 6 é de 20%, enquanto as probabilidades de sair qualquer outro número são iguais entre si. Ao se jogar este dado duas vezes, qual o valor mais próximo da probabilidade de um número par sair duas vezes?

(A) 20%

(B) 27%

(C) 25%

(D) 23%

(E) 50%

A probabilidade $P(6)$ de sair o número 6 é 20%, sobrando 80% para os demais. Para calcular a probabilidade de sair cada um dos números restantes, deve-se dividir os 80% por 5 obtendo 16% para cada número.

Deve-se calcular a probabilidade $P(par) = P(2 \text{ ou } 4 \text{ ou } 6)$ de, em um dado lançamento, sair par. Os eventos "sair 2", "sair 4" e "sair 6" são mutuamente excludentes, então a probabilidade da união é a soma das probabilidades:

$$P(par) = P(2 \text{ ou } 4 \text{ ou } 6) = P(2) + P(4) + P(6) = 0{,}16 + 0{,}16 + 0{,}20 = 0{,}52$$

Espera-se que dois números pares ocorram em dois lançamentos. Daí, seja A o evento que ocorre quando, no primeiro lançamento, o resultado é par e seja B o evento que ocorre quando, no segundo lançamento, o resultado também é par.

Para que ocorra dois números pares, A e B devem ocorrer. Mas é importante notar que o resultado do primeiro lançamento não interfere no resultado do segundo lançamento, portanto os eventos são independentes.

Como os dois eventos são independentes, a probabilidade da interseção é o produto das probabilidades conforme a equação 4.3:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}52 \cdot 0{,}52 = 0{,}2704 = 27{,}04\%$$

Contudo, vale destacar o caráter tendencioso que um dado viciado imprime no resultado. Caso não houvesse essa característica, teria-se para a probabilidade pedida o seguinte valor:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}50 \cdot 0{,}50 = 0{,}2500 = 25{,}00\%$$

Em que a probabilidade de obter-se um número par em cada lançamento é de 50%.

Assim, um estudante que negligenciasse o fato do dado ser viciado poderia facilmente chegar a esse resultado incorreto e optar pela assertiva errada.

Enfim, a abordagem no ensino de Combinatória e Probabilidades pelo uso de questões de concursos públicos pode sedimentar o domínio de procedimentos e conhecimentos aprendidos pelo estudante de forma que ele possa dar respostas a situações variadas e diferentes na resolução desses problemas.

Essa atividade deve incentivar os estudantes a aprender e a desenvolver o hábito de pensar criticamente, de indagar corretamente e esquadrinhar todos os conteúdos compatíveis com o seu nível de conhecimento. A partir daí, o seu raciocínio irremediavelmente o levará às conclusões necessárias para a solução dos mais diversos problemas.

6

Conclusões

Este trabalho apesentou a natural relação entre o ensino da matemática na educação básica e, em especial, no ensino médio (antigo segundo grau) com a seleção de candidatos aos quadros da administração pública.

Apresentou-se as regras sob as quais tais seleções ocorrem desde o seu recrutamento através do instrumento convocatório com o requisito de conclusão do ensino médio até o conteúdo do programa de matérias sobre cujas questões versará.

Estudou-se também a proposta oficial de ensino através das diretrizes contidas nos documentos que orientam os programas pedagógicos e a prática docente na sala de aula. Discutiu-se a abordagem da resolução de problemas como estratégia no processo de ensino-aprendizagem.

O conteúdo específico de Análise Combinatória e Probabilidades foi ampla e minuciosamente trabalhado com a apresentação não só de seus principais resultados, mas de como eles são obtidos.

E, por fim, a proposta do uso de questões de concurso público no ensino de Análise Combinatória e Probabilidades foi ilustrada com questões criativas e com variados graus de dificuldade demonstrando a relação entre ensino da matemática e seleção nos concursos públicos.

Essa relação permite uma salutar simbiose, quanto mais se usa questões de concursos públicos no ensino, melhor são as condições do estudante frente aos desafios dos próximos concursos e mais aderente será o ensino de matemática às propostas curriculares, base para o programa de concursos públicos de nível médio.

Sob uma lógica estritamente pública, o papel do processo do concurso público na consecução da isonomia e impessoalidade no acesso aos empregos oferecidos pelo Estado, a discussão pode ser ampliada por meio de questionamentos como se o nível de ensino oferecido pela escola pública é o mesmo exigido por esse mesmo poder público ao compor os seus quadros, ou se o ENEM poderia ser um instrumento adicional de seleção para o serviço público uma vez que o referido exame adota uma avaliação com base em competências oficialmente utilizadas para dirigir o ensino.

Por derradeiro, no presente estudo não se buscou reinventar a roda, mas apresentar o quadro do tema proposto sob os ombros de autores renomados e na bula de documentos oficiais de ensino.

Prescreveu-se pouco, mas descreveu-se bastante aquilo que pode ser um dos conteúdos matemáticos mais agregadores da atenção da sociedade. Não há exageros nessa afirmação, desde o operário que deposita sua fé inabalável no bilhete de uma loteria com uma probabilidade perversa, ao dirigente máximo da nação ao avaliar o seu apoio no congresso pelos arranjos espúrios dos parlamentares, a análise combinatória e as probabilidades os levam aos seus inexoráveis destinos.

Bibliografia

[1] *Revista do professor de matemática.* Rio de Janeiro: SBM, v. 25, 1994.

[2] *A Window on China's Past: Imperial Examination System.* China.org.cn, Beijing, 2005. http://www.china.org.cn/english/culture/129796.htm, acesso em 23/02/2018.

[3] Borges, Maria Cecília Mendes: *Editais de concursos públicos e seus elementos padrões diante dos princípios constitucionais.* Revista do Tribunal de Contas do Estado de Minas Gerais, v. 70, jan/mar., 2009. http://revista1.tce.mg.gov.br/Content/Upload/Materia/391.pdf, acesso em 23/02/2018.

[4] Brasil: *Constituição da República dos Estados Unidos do Brasil.* Brasília, 1934. http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/Constituicao34.htm, acesso em 30/07/2017.

[5] Brasil: *Constituição da República dos Estados Unidos do Brasil de 1967.* Brasília, 1967. http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao67.htm, acesso em 23/02/2018.

[6] Brasil: *Constituição da República Federativa do Brasil.* Brasília, 1988. http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/ConstituicaoCompilado.htm, acesso em 18/07/2017.

[7] Brasil, Agência Nacional de Aviação Civil: *Edital ESAF nº 76 de 04 de dezembro de 2015 - Concurso Público para Provimento de Cargos de Nível Superior e de Nível Intermediário da Agência Nacional de Aviação Civil – ANAC.* Brasília, 2015. http://www.esaf.fazenda.gov.br/assuntos/concursos_publicos/em-andamento-1/agencia-nacional-de-aviacao-civil-anac-1/edital_76_anac_4.pdf, acesso em 06/06/2017.

[8] Brasil, Agência Nacional de Energia Elétrica: *Edital ESAF nº 12, de 07 de fevereiro de 2006 - Concurso Público Para Provimento de Cargos de Analista Administrativo e de Técnico Administrativo Da Agência Nacional de Energia Elétrica - ANEEL.* Brasília, 2006. http://esaf.fazenda.gov.br/assuntos/concursos_publicos/encerrados/2006/agencia-nacional-de-energia-eletrica-aneel-1/edital-12-abertura.pdf, acesso em 15/08/2017.

[9] Brasil, Agência Nacional de Transportes Aquaviários: *Caderno de Provas Objetivas e Discursivas.* Brasília, 2014. http://www.cespe.unb.br/concursos/ANTAQ_14/arquivos/112ANTAQ14_CBNM03_01.pdf, acesso em 17/05/2017.

[10] Brasil, Agência Nacional de Transportes Aquaviários: *Edital nº 1/2014 - Concurso Público para Provimento de Vagas em Cargos de Nível Superior e de Nível Médio.* Brasília, 2014. http://www.cespe.unb.br/concursos/ANTAQ_14/arquivos/ANTAQ_2014_ED_1_ABERTURA.PDF, acesso em 11/07/2017.

[11] Brasil, Controladoria Geral da União: *Edital ESAF nº 02 de 08 de janeiro de 2008 - Concurso Público para Provimento de Cargos de Analista de Finanças e Controle e de Técnico de Finanças e Controle da Controladoria-Geral da União - CGU.* Brasília, 2008. http://www.esaf.fazenda.gov.br/assuntos/concursos_publicos/encerrados/2008/analista-de-financas-e-controle-e-tecnico-de-financas-e-controle-da-cgu-1/edital-2.pdf, acesso em 21/07/2017.

[12] Brasil, Instituto Nacional de Seguridade Social: *Edital nº 1/2015 - Concurso Público para Provimento de Vagas nos Cargos de Analista do Seguro Social e de Técnico do Seguro Social*. Brasília, 2015. http://www.cespe.unb.br/concursos/INSS_2015/arquivos/INSS_ED._1_ABT.PDF, acesso em 18/03/2017.

[13] Brasil, Ministério da Educação: *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, 2000. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf, acesso em 18/03/2017.

[14] Brasil, Ministério da Educação: *Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias*. Brasília, 2002. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf, acesso em 18/03/2017.

[15] Brasil, Ministério da Educação: *Base Nacional Comum Curricular - SEGUNDA VERSÃO - Revisada*. Brasília, 2016. https://www.educacao.mg.gov.br/images/documentos/Base%20Nacional%20Comum%20Curricular.pdf, acesso em 18/03/2017.

[16] Brasil, Ministério da Fazenda: *Edital ESAF nº 25, de 26 de outubro de 2000 -Concurso Público para Provimento de Cargos de Analista de Finanças e Controle – AFC e de Técnico de Finanças e Controle - TFC da Secretaria Federal de Controle Interno - SFC*. Brasília, 2000. http://www.forumconcurseiros.com/forum/forum/concursos/%C3%81rea-controle-e-gest%C3%A3o/cgu-stn-mpog/11972-edital-tfc, acesso em 21/07/2017.

[17] Brasil, Ministério da Fazenda: *Edital ESAF nº 15, de 26 de fevereiro de 2009 - Concurso Público para Provimento de Cargos de Assistente Técnico-Administrativo do Ministério da Fazenda*. Brasília, 2009. http://www.esaf.fazenda.gov.br/assuntos/concursos_publicos/encerrados/2009/backup/assistente-tecnico-administrativo-do-ministerio-da-fazenda-ata-2/edita-15.pdf, acesso em 21/07/2017.

[18] Brasil, Ministério da Fazenda: *Edital ESAF nº 05, de 28 de janeiro de 2014 - Concurso Público para Provimento de Cargos de Assistente Técnico-Administrativo do Ministério da Fazenda*. Brasília, 2014. http://www.esaf.fazenda.gov.br/assuntos/concursos_publicos/em-andamento-1/copy_of_ata/edital-5-ab.pdf, acesso em 29/06/2017.

[19] Brasil, Ministério Público da União: *Edital Esaf nº 26, de 24 de março de 2004 - Concurso Público para Provimento das Carreiras de Analista e de Técnico do Ministério Público da União*. Brasília, 2004. http://www.esaf.fazenda.gov.br/assuntos/concursos_publicos/encerrados/2004/analista-e-tecnico-do-ministerio-publico-da-uniao-1/edital-26-abertura.pdf, acesso em 21/07/2017.

[20] Brito, Márcia Regina Ferreira de (Org.): *Solução de Problemas e a Matemática Escolar*. ALINEA, 2010, ISBN 9788575164181. https://books.google.com.br/books?id=ofm5ygAACAAJ, acesso em 21/07/2017.

[21] Caraça, Bento de Jesus: *Conceitos Fundametais da Matemática*. Lisboa:Fotogravura Nacional, 1951.

[22] Carneiro, Mário Jorge Dias, Michel Spira e Jorge Sabatucci: *Conteúdos Básicos Comuns – CBC*. Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006. http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7B4DA513B4-3453-4B47-A322-13CD37811A9C%7D_Matem%C3%A1tica%20final.pdf, acesso em 18/03/2017.

[23] Carneiro, Mário Jorge Dias, Michel Spira e Jorge Sabatucci: *Orientações Pedagógicas - Matemática - Ensino Médio*. Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009. http://crv.educacao.mg.gov.br, acesso em 16/08/2011.

[24] Carvalho, Paulo Cezar Pinto e Augusto Cezar de Oliveira Morgado: *Matemática Discreta*. SBM, 2015, ISBN 9788583370154.

[25] Carvalho, Paulo Cezar Pinto, Augusto Cezar de Oliveira Morgado, Pedro Fernandez e João Bosco Pitombeira: *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, 2006, ISBN 9788585818012.

[26] Hazzan, S.: *Fundamentos de matemática elementar - vol. 5: combinatória, probabilidades.* Atual, 2004.

[27] Laplace, Pierre Simon: *Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades.* Contraponto Editora, 2010, ISBN 9788578660284.

[28] Lima, Elon Lages, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto Cezar de Oliveira Morgado: *A Matemática no Ensino Médio - volume 2.* SBM, 2006.

[29] Memória, José Maria Pompeu: *Breve História da Estatística.* Embrapa Informação Tecnológica, 2004. http://www2.ee.ufpe.br/codec/historia_estatistica.pdf, acesso em 23/02/2018.

[30] Minas Gerais, Departamento de Estradas de Rodagem do Estado de Minas Gerais: *Edital DER/MG nº 01/2008, de 28 de fevereiro de 2008 - Concurso Público para Provimento de Cargos das Carreiras de Fiscal de Transportes e Obras Rodoviários e Fiscal Assistente De Transportes e Obras Rodoviários do Quadro de Pessoal do Departamento de Estradas de Rodagem do Estado de Minas Gerais.* Minas Gerais, 2008. https://www.pciconcursos.com.br/concurso/der-departamento-de-estradas-de-rodagem-mg-234-vagas, acesso em 06/09/2017.

[31] Minas Gerais, Fundação Helena Antipoff: *Edital SEPLAG/FHA nº. 01/2012 - 25 de Junho de 2012 - Concurso Público para Provimento de Cargos das Carreiras de Técnico Universitário, Analista Universitário e Professor de Educação Superior, do Quadro de Pessoal da Fundação Helena Antipoff - FHA.* Minas Gerais, 2012. http://www2.ibfc.org.br/concurso/fha-1221/docs/fha-01-2012-edital.pdf, acesso em 15/10/2017.

[32] Minas Gerais, Tribunal de Contas do Estado de Minas Gerais: *Revista do Tribunal de Contas do Estado de Minas Gerais - Edição Especial Concursos Públicos.* Belo Horizonte, 2010. http://revista1.tce.mg.gov.br/Revista/RetornaRevista/401, acesso em 23/02/2018.

[33] Polya, G.: *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

[34] Ross, S.: *Probabilidade: Um Curso Moderno com Aplicações.* Bookman, 2009, ISBN 9788577806881.

[35] Sousa, Alice Ribeiro de: *O Processo Administrativo do Concurso Público.* https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/13186/1/d.pdf, acesso em 23/02/2018.

[36] Sérates, J.: *Raciocínio lógico*, volume 2. Olímpica, 1997.

[37] Viana, Marcelo: *Memorização tem lugar na sala de aula.* Folha, [São Paulo], 2017. http://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2017/07/1899113-memorizacao-tem-lugar-na-sala-de-aula.shtml, acesso em 20/10/2017.