UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

UM ESTUDO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO DAS PROGRESSÕES

Deusdete Gomes de Almeida Júnior

Professora Dra. Giovana Siracusa Gouveia
Orientadora

São Cristóvão-SE
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

UM ESTUDO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO DAS PROGRESSÕES

por

Deusdete Gomes de Almeida Júnior

Dissertação a ser apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFS, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Professora Dra. Giovana Siracusa Gouveia
Orientadora

São Cristóvão-SE
2017

Agradecimentos

Ao departamento de matemática da Universidade Federal de Sergipe-UFS, pelo apoio a minha participação no mestrado.

A minha orientadora, Professora Dra. Giovana Siracusa Gouveia, pela confiança demonstrada, além de sua dedicação, amizade, competência e zelo ao ensinar.

A todos os professores da pós-graduação que contribuíram de forma significativa na minha formação acadêmica.

A Carmelita Luciana Santos Almeida, minha querida mãe, grande incentivadora e exemplo de mulher guerreira, por todo apoio, dedicação e incentivo em todos os momentos do mestrado. Inspiro-me em você todos os dias.

A Deusdete Gomes de Almeida (*in memoriam*) meu grande pai, aquele que me educou e com o seu jeito me fez aprender e tornou-me um grande homem e pai de família.

A Larissa Almeida, minha esposa, por todo seu amor e confiança, juntos alcançaremos o topo. Agora é a sua vez de alcançar esse próximo passo em nossas vidas, futura mestra. Sou seu fã!

A João Matheus, saiba que tudo que faço é para você e por você. Te amo, meu filho!

A Deise Luciana, minha querida irmã e a Marcus Vinícius, meu cunhado/irmão e a minha sobrinha Júlia. Obrigado por vocês existirem! Amo vocês!

Por fim, aos meus colegas de turma, que me deram força e estadia (Wesley e Sostenes) ,rs!, quando precisei, Lazaro, Glauber, Canuto e Edson e amigos e familiares de forma geral.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma análise sobre sequências numéricas dando ênfase a aplicações de conceitos como convergência, limitação e monotonicidade no ensino das progressões aritmética e geométrica, contextualizando com alguns temas do ensino médio, a saber, funções, geometria e matemática financeira. Apresentamos propostas didáticas para abordagem em sala de aula das progressões relacionando com alguns problemas clássicos da matemática como por exemplo, o Paradoxo de Zenão.

Keywords: Sequências, Progressões, Limite de sequências, Matemática financeira.

Sumário

Introdução

Este trabalho é resultado do estudo realizado acerca da metodologia de ensino de sequências numéricas e suas aplicações durante as aulas sobre progressões aritméticas e geométricas. Diante das minhas experiências em sala de aula e em contato com os colegas, pude observar que o conteúdo supracitado tem se desenvolvido de forma tradicional, sem nenhuma aplicação ou contextualização, apenas ligada a aplicabilidade e à manipulação de fórmulas, sem a devida demonstração, o que tem sido o causador de inquietações em relação ao aprendizado. Percebendo a necessidade que tal conteúdo precisa ser trabalhado de forma mais incisiva e detalhada, sempre fazendo associação com outros conteúdos para uma melhor compreensão e mostrando a sua relação com o cotidiano e entendendo que possui uma grande importância no ensino fundamental, médio e superior, a presente pesquisa faz uma análise sobre sequências numéricas com aplicações de conceitos como convergência, limitação e monotonicidade no ensino das progressões aritmética e geométrica, contextualizando com assuntos do ensino fundamental e médio, como por exemplo, dízimas periódicas, função e matemática financeira.

O presente trabalho tem como um de seus propósitos se tornar material de apoio para as aulas referentes ao ensino de sequências, dando ênfase ao estudo de progressões, de forma a conduzir o professor a desenvolver e construir conceitos e procedimentos matemáticos de diferentes formas, sempre compreendendo e atribuindo significado ao que ele está fazendo, evitando a simples memorização e mecanização. Os conceitos serão desencadeados a partir de uma motivação no início de cada seção, seja com problemas, história ou algumas observações relevantes. Ainda nesse sentido, mostrar que o ensino da Matemática deve privilegiar todo o conhecimento e experiência de vida do aluno e entendendo que este consegue ter um raciocínio lógico para entender a construção de uma sequência numérica com referências presentes em nosso cotidiano, podendo elaborar atividades com história da matemática, uso de jogos e curiosidades, o que tornaria o aprendizado muito mais eficaz.

O trabalho está dividido em quatro partes: a primeira trata de uma abordagem histórica de sequências numéricas, onde encontra-se uma apresentação de problemas relacionados a tal conteúdo e tem como exemplos o paradoxo de Zenão, sobre o movimento que desconcertaram matemáticos por séculos, onde no final, eles desenvolvem a noção de soma de um número infinito de termos positivos a um número finito, o qual é a essência da convergência de uma série infinita de números e o Papiro Rhind que é uma fonte primária rica sobre a Matemática egípcia antiga, deixando evidências de que sabiam fazer a soma dos termos de uma progressão aritmética; o segundo é um estudo detalhado dos conceitos de sequências numéricas, discutindo sobre limitação e monotonicidade, o limite de uma sequência, Progressão Aritmética e Geométrica e interpretação geométrica; o terceiro apresentamos uma aplicação muito importante das progressões, a Matemática Financeira , onde foram apresentados conceitos e exemplos de juros simples e compostos, bem como o estudo dos sistemas de amortização e aplicados em financiamentos bancários atuais e por último, procuramos trazer algumas propostas didáticas que possam servir de exemplos para uma aula motivadora que proporcione ao aluno um melhor aprendizado, fazendo um elo entre os conteúdos e as suas respectivas realidades.

Desta forma, é de fundamental importância a associação dos conteúdos estudados com situações que envolvam também outras disciplinas afins, fazendo assim a interdisciplinaridade. A metodologia a ser utilizada para integração dos conteúdos poderá ser justificada, de acordo com o que é defendido pelo professor e matemático Elon Lages Lima [16] que diz que o ensino da matemática deve abranger três componentes fundamentais: Conceituação, Manipulação e Aplicações. Dosando adequadamente esses três componentes, alcançamos o equilíbrio do processo de aprendizagem. Assim, devemos incentivar os professores a trabalhar de maneira contextualizada, aprimorando o ensino da matemática e mostrando através da resolução de problemas, que tal conteúdo possui uma grande importância para o aprendizado de outros conteúdos.

Capítulo 1

Breve Histórico

Através das experiências em sala de aula, percebemos que o ensino tradicional está associado ao ensino de memorização, onde a única preocupação do aluno é a de copiar o que é explanado pelo professor, implicando assim na ausência do pensar sobre conceitos matemáticos e, consequentemente, dificultando o aprender, principalmente àqueles relacionados ao pensamento algébrico. Com isso, entendemos que a história da matemática passa a ter um papel fundamental na compreensão da relação entre a teoria e a prática.

Ao fazer a análise da História da Matemática compreendemos como estes resultados foram produzidos. Consideramos questões como a relatividade, a fluência, a flexibilidade, a interdependência, o processo, assumindo um importante papel de ligação entre a causa dos fatos e as possibilidades de novas ideias e definições que permitam entender os conteúdos estudados. Assim a ideia de que se não houverem estas conexões, os estudos e entendimento de conceitos científicos ficam comprometidos e, diferente do que muitos pensam, a Matemática não é uma disciplina que somente se trabalha com cálculos intermináveis e com um grande número de fórmulas aleatórias. Em particular estamos interessados em oferecer um embasamento teórico para o ensino de progressões. Observamos que os conceitos relacionados a este tema, em geral, não são abordados a partir da história e não tem ligação com a realidade. A matemática pode ser encontrada em todo o cotidiano como por exemplo, as estações do ano, que se repetem obedecendo a um padrão, os números das placas dos veículos também são exemplos de sequências ou progressões. A história das progressões inicia-se desde os povos muito antigos, como os babilônicos, com a finalidade de estabelecer padrões como o da enchente do Rio Nilo, onde os egípcios de 5.000 anos atrás tiveram que observar os períodos em que ocorriam enchentes nos rios, para assim poderem plantar à época correta e garantir a alimentação, tendo a certeza que não haveria inundação. Havia então, a necessidade de conhecer

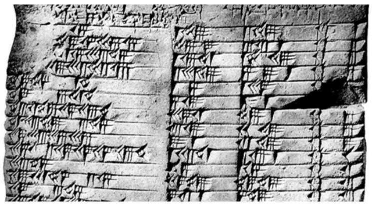


Figura 1.1: tableta plimpton
[16]

o padrão deste acontecimento. Notando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys. Dividiram ainda os doze meses em três estações de quatro meses cada uma, que seria o período de semeação, de crescimento e de colheita. Na Mesopotâmia surgiram várias tabletas babilônicas muito interessantes, mas nenhuma delas foi tão magnífica quanto a tableta Plimpton 322 (1900 a 1600 a.C)(FIGURA 1.1). Em uma destas tabletas, a progressão geométrica $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9$ é somada de forma que a série de quadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + ...10^2$ é achada. A matemática do Egito Antigo jamais alcançou o nível obtido pela matemática babilônica. Talvez porque os egípcios tenham se mantido em semi isolamento, enquanto a babilônia era o centro das rotas de navios e, consequentemente, um centro de troca de saberes. Porém, não deve ser esquecido que os egípcios desenvolveram um papel primordial na preservação de muitos papiros que contribuíram para o conhecimento atual sobre a história da Matemática.

Em um papiro que data de 1950 a.C. podemos encontrar alguns problemas teóricos a respeito de Progressões Aritméticas e Geométricas. O papiro Rhind (ou Ahmes)(figura 1.2) data aproximadamente de 1650 a.C. e nada mais é do que um texto matemático na forma de manual prático que Papiro Rhind expôs 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo.

O papiro Rhind é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga, deixando evidências de que sabiam fazer a soma dos termos de uma progressão aritmética. O seguinte problema envolvendo progressões se encontra no papiro Rhind: *"Divida* 100 *pães entre* 5 *homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores."* Muitos dos cálculos no Papiro Rhind são evidentemente exercícios para jovens estudantes. Embora uma grande parte deles seja de natureza prática, em algumas ocasiões o escriba parece ter tido em mente enigmas ou recreações matemáticas. O problema 79, por exemplo, cita apenas sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16807 hectares. É presumível que o escriba estava tratando de um problema bem conhecido, em que uma

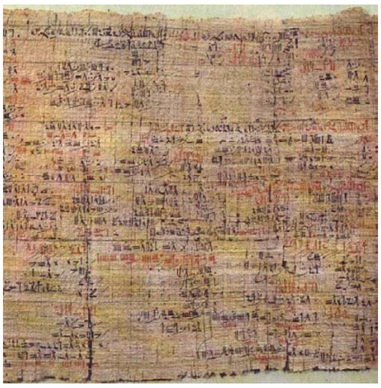


Figura 1.2: Papiro de Rhind
[16]

das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o numero de medidas de grãos poupadas, mas a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão. Neste Papiro, também temos um sequência em forma de progressão geométrica muito interessante formada pelas frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$. Os termos dessa sequência são conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus (ver Figura 1.3).

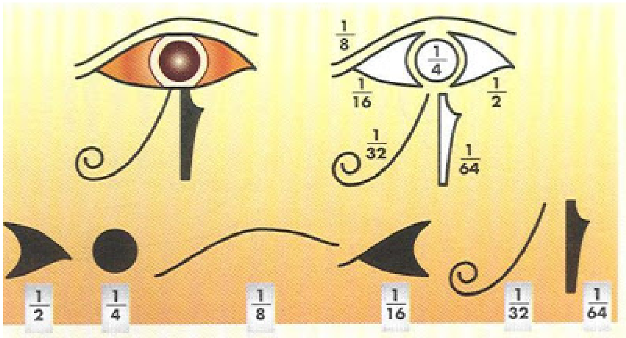


Figura 1.3: Frações dos olhos do deus Hórus.
[16]

Pitágoras (585 a.C.- 500 a.C.) (Figura 1.4) e os sábios gregos que viveram depois dele, conheciam as progressões aritméticas, as geométricas, as harmônicas e musicais, as proporções, os quadrados de uma soma ou de uma diferença.

Eles associaram o número à música e à mística, derivando-se dessa associação pitagórica os termos média harmônica e progressão harmônica. Como consequência de várias observações, con-

Figura 1.4: Pitágoras
[16]

cluíram que a relação entre a altura dos sons e a largura da corda da lira seria responsável pela existência da harmonia musical. Observaram também, que os intervalos musicais se colocam de modo que admite expressão através de progressões aritméticas. Os Números Figurados se originaram através dos membros mais antigos da escola pitagórica em aproximadamente 600 a.C.. Esses números, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam um elo de ligação entre a geometria e a aritmética. Vejamos dois exemplos:

Exemplo 1.1. *Números triangulares:*

Definimos o n-ésimo número triangular T_n como sendo a soma dos n primeiros números naturais, ou seja,

$$T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n.(n+1)}{2}.$$

Na figura 1.5 a relação dos números triangulares e os triângulos abaixo.

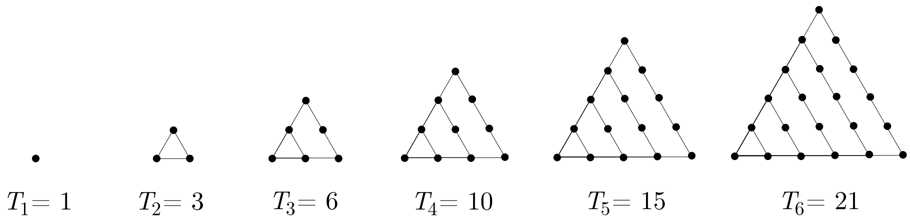


Figura 1.5: NÚMEROS TRIANGULARES

Exemplo 1.2. *Números Pentagonais: O n-ésimo número pentagonal P_n é também dado pela soma dos n primeiros números naturais que são descritos por $a_n = 3n - 2$, ou seja,*

$$P_n = 1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n.(3n-1)}{2}\cdot$$

Na figura 1.5 a relação dos números pentagonais e os pentágonos abaixo.

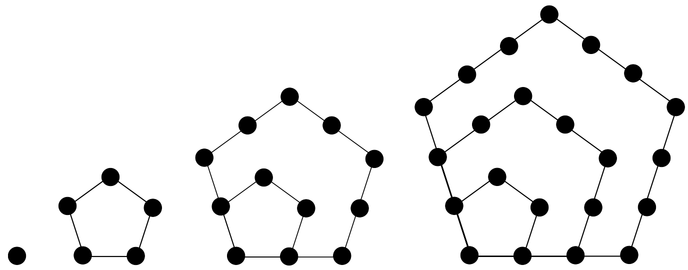


Figura 1.6: NÚMEROS PENTAGONAIS

Arquimedes de Siracusa ($287a.C - 212a.C$), um dos mais importantes matemáticos do século 12, teve sua contribução em um de seus tratados, o Lilavati, que contém problemas sobre o tópico favorito dos Hindus, dentre eles estão a Progressão Aritmética e Geométrica. As sequências também aparecem na obra de Leonardo de Pisa ($1180 - 1250$), mais conhecido como Fibonacci (filho de Bonnaccio) (Ver Figura 1.7), em seu livro denominado Liber Abaci (ou livro do ábaco), escreveu dentre outros assuntos, alguns problemas, sendo o mais conhecido, *"Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um par de coelhos, se em cada mês cada par gerar um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?"* (Ver Figura 1.8).

Esse problema deu origem à famosa "sequência de Fibonacci"

$$(u_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)$$

onde,

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, \\ u_2 &= 1, \\ u_n &= u_{n-1} + u_{n-2}, n > 2. \end{aligned}$$

Figura 1.7: Leonardo de Pisa(FIBONACCI)
https://www.mathsisfun.com/numbers/images/fibonacci.jpg

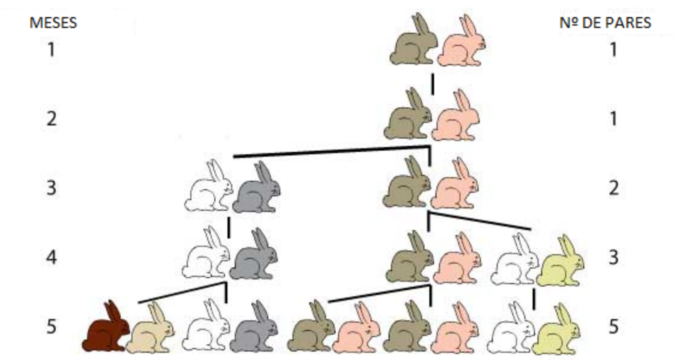


Figura 1.8: Reprodução de Coelhos e Sequência de Fibonacci

Capítulo 2

Sequências Numéricas e Progressões

2.1 Sequências Numéricas

Quando somos apresentados a alguns conceitos matemáticos no ensino médio que necessitam de conhecimentos de cálculo diferencial, somos levados a acreditar que faz-se necessário o estudo aprofundado do tema. Muitos autores discutem a respeito das dificuldades que os alunos ainda tem em conceitos e procedimentos fundamentais, tais como operar com números reais, interpretar gráficos e tabelas, dentre outros conteúdos e tentam justificar a necessidade da inserção do cálculo no ensino básico, afirmando que ao ingressar no Ensino Superior esses alunos confrontam-se com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, disciplina esta que figura como obrigatória em muitos cursos de diversas áreas e tem um alto índice de reprovação, sendo considerada de grande dificuldade de aprendizagem. Tais autores defendem também que o ensino da derivada é de grande importância, por colaborar no tratamento de inúmeras propriedades das funções, progressões, geometria e em outras áreas de conhecimento (ver [5],[10]). Porém, alguns autores discutem sobre a dificuldade de compreensão do cálculo, inclusive no ensino superior. Nesse sentindo, podemos destacar a tese de doutorado de Celestino [3], que procurou identificar as concepções do conceito de limite de sequências, por parte dos discentes de Engenharia Elétrica, de forma a contribuir no planejamento das aulas dos professores de Cálculo. A partir do desenvolvimento de um questionário (ver Apêndice A), foram considerados os obstáculos e concepções dos sujeitos. Nesta pesquisa foi percebida fortemente a presença de alguns obstáculos em relação ao conceito de limite, pois existe, de acordo com os respectivos estudantes, uma associação entre a existência do limite da sequência com sua monotonicidade também relacionado a ideia de movimento (Ver [3], p. 163). Uma das dificuldades observadas, foi os discentes admitirem que o limite de uma sequência se aproxima de um valor, não identificando que possa ser o mesmo. Outro obstáculo se refere aos significados diferenciados existentes entre o cotidiano e o contexto matemático, considerando termos como: "tende para", "converge", "se aproxima". Foram levantadas questões do tipo: Os termos da sequência "cabem"em um intervalo? Os termos da sequência se aproximam de um número? Sequência é monótona, crescente ou decrescente, limitada convergente ou não convergente? Tem limite?

A partir das respostas do questionário, também observa-se a não percepção de que uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$. Também foi observado neste trabalho, a dificuldade dos estudantes em representar números racionais na reta real.

Neste trabalho, estaremos fornecendo a fundamentação teórica referente ao estudo de sequências numéricas, a fim de reduzir os problemas conceituais observados.

Definição 2.1. *Uma sequência de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que associa a cada número natural* n*, um número real* $x(n)$*.*

O valor da sequência x no número natural n é denominado n-ésimo termo ou termo geral da sequência x e é representado por x_n. Para simplificar, faremos uma referência a sequência de x como sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n), desde que $x(n) = x_n$. Em algumas situações, existe um padrão de fácil identificação no termo geral da sequência e, nestes casos, descrevemos a sequência listando seus primeiros elementos, isto é, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

Exemplo 2.1. *Vejamos alguns exemplos:*

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1 + (-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (2, 0, 2, 0, \ldots)$;

(ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, \ldots)$.

Definição 2.2. *Dada uma sequência* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, uma subsequência de* x *é a restrição da função* x *a um subconjunto infinito* $\mathbb{N}'$ *de* $\mathbb{N}$*, onde uma restrição de* x *a* $\mathbb{N}'$ *é uma função* $x_{|\mathbb{N}'} : \mathbb{N}' \to \mathbb{R}$*, tal que* $x_{|\mathbb{N}'}(n) = x(n)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}'$*.*

A maneira como definimos subsequência não é prática, então vamos utilizar a seguinte notação, similar a de sequência, para descrever uma subsequência. Se a sequência x é descrita por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto infinito, então descrevemos a subsequência $x_{|\mathbb{N}'}$ por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$. Naturalmente, toda sequência é uma subsequência dela própria, basta considerar $\mathbb{N}' = \mathbb{N}$.

Dentre as subsequências de uma dada sequência (x_n) destacamos duas, a subsequência par $(x_n)_{n\in\mathcal{P}}$ e a subsequência ímpar $(x_n)_{n\in\mathcal{I}}$, sendo $\mathcal{P} = \{2n;\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ e $\mathcal{I} = \{2n-1;\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$. Algumas referências utilizam a seguinte notação $(x_n)_{n\in\mathcal{P}} = (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_n)_{n\in\mathcal{I}} = (x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 2.2. *As subsequências par e ímpar, da sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *são sequências constantes* $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}} = (1,\ 1,\ 1,\ \ldots)$ *e* $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}} = (-1)_{n\in\mathbb{N}} = (-1,\ -1,\ -1\ \ldots)$.

No questionário citado (ver [3]), observamos que ao realizar o seguinte questionamento, "Considere as sequências cujo termo geral é dado. Escreva cada sequência designando seus oito primeiros termos, represente na reta real (use uma escala adequada quando necessário) ", a questão tinha por objetivo verificar qual o tratamento que os alunos dão a sequências no que diz respeito à representação de seus termos, além de possibilitar verificar se algumas formas distintas de representar sequências. No entanto, foram percebidas dificuldades em resolver questões nas seguintes situações:

1. O termo geral descrito por meio de duas sentenças, como no exemplo a seguir:
$$y_n = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \leq 3 \\ 4 & \text{se } n > 3 \end{cases}$$
2. Notação de função expressa por $x\,(n)$ e não por x_n, como no exemplo a seguir:
$$\begin{aligned} x : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x(n) = 2n-1 \end{aligned}$$
3. Dificuldade na representação de frações na reta real.

2.1.1 Limitação e Monotonicidade

Com o objetivo de estudar o comportamento dos termos de uma sequência a medida que variamos n, faz-se necessário entender o que significa uma sequência ser limitada. Separamos em três situações:

Definição 2.3. *Uma sequência de números reais* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é dita limitada superiormente quando existir um número real* M*, denominado cota superior da sequência, que atende a seguinte condição:*
$$x_n \leq M, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Definição 2.4. *Uma sequência de números reais* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é dita limitada inferiormente quando existir um número real* N*, denominado cota inferior da sequência, que atende a seguinte condição:*
$$N \leq x_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Observação 2.1. *Observe que se* M *for cota superior da sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, então qualquer número real* K *que satisfaça* $M \leq K$*, também será cota superior. Assim como se* N *for cota inferior da sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, então qualquer número real* L *satisfazendo* $L \leq N$ *também será cota inferior.*

Observação 2.2. *Se existir uma menor cota superior da sequência* (x_n), *esta será denominada de supremo da sequência e denotada por* $\sup x_n$. *Analogamente, se existir uma maior cota inferior da sequência* (x_n), *esta será denominada de ínfimo da sequência e denotada por* $\inf x_n$.

Exemplo 2.3. *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a sequência cujo termo geral é definido por* $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, *ou seja,*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, \ldots).$$

Como $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $0 < x_n < 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *ou seja,* 0 *é cota inferior e* 1 *é cota superior para a sequência* (x_n).

Observação 2.3. *Destacamos dois fatos fundamentais: primeiro, que toda sequência limitada superiormente admite supremo e toda sequência limitada inferiormente tem ínfimo; depois, que para cada* $\epsilon > 0$, *o número real* $\sup x_n - \epsilon$, *por ser menor do que o supremo da sequência* x_n, *não pode ser cota superior e por essa razão, existe algum termo da sequência, por exemplo* x_{n_1}, *tal que* $\sup x_n - \epsilon < x_{n_1}$. *Para o ínfimo ocorre um fato análogo. Sendo* $\inf x_n + \epsilon$ *um número real maior do que ínfimo da sequência* x_n, *existe algum termo da sequência, por exemplo* x_{n_2}, *tal que* $\inf x_n + \epsilon > x_{n_2}$.

Exemplo 2.4. *A sequência de termo geral* $x_n = n$ *é limitada inferiormente, mas não superiormente. Temos que* $\inf x_n = 1$.

Exemplo 2.5. $x_n = \frac{n+1}{n}$, *é limitada inferiormente pois* $\frac{n+1}{n} \geqslant 1$, *para todo* $n \geqslant 1$.

Exemplo 2.6. *A sequência de termo geral* $x_n = 1 - n^2$ *é limitada superiormente, mas não inferiormente. Temos que* $\sup x_n = 0$.

Exemplo 2.7. $x_n = \frac{n-1}{n}$, *é limitada superiormente pois* $\frac{n-1}{n} \leqslant 1$, *para todo* $n \geqslant 1$.

Definição 2.5. *Dizemos que uma sequência é limitada se ela for ao mesmo tempo limitada inferiormente e superiormente.*

Exemplo 2.8. *A sequência de termo geral* $x_n = (-1)^n$ *é limitada, sendo* $\sup x_n = 1$ *e* $\inf x_n = -1$.

Exemplo 2.9. *A sequência* $x_n = cos(n)$ *é limitada pois* $-1 \leqslant x_n \leqslant 1$, *para todo* $n \geqslant 1$.

Ainda com o intuito de analisar comportamento de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quando variamos n, podemos destacar as situações em que os valores da sequência são crescentes ou decrescentes.

Definição 2.6. *Uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é denominada crescente ou (não decrescente) quando* $x_n \leq x_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *isto é,* $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \cdots$

Exemplo 2.10. *A sequência de termo geral* $x_n = 5n$*, é crescente pois* $5n \leqslant 5(n+1)$ *para todo* $n \geqslant 4$.

Exemplo 2.11. *A sequência de termo geral* $x_n = \frac{n}{n+1}$ *é crescente. De fato,*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} \geq 1, \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Isso implica que $x_{n+1} \geq x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.7. *Uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é denominada decrescente (ou não crescente) quando* $x_{n+1} \leq x_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, isto é,* $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \cdots$

Exemplo 2.12. *A sequência* $x_n = \frac{2}{n}$*, é decrescente pois* $\frac{2}{n} \geqslant \frac{2}{n+1}$ *para todo* $n \geqslant 1$.

Exemplo 2.13. *As sequências* $x_n = n$ *e* $y_n = \ln n$ *são crescentes, enquanto* $z_n = -n^3$ *e* $w_n = \frac{1}{n}$ *são decrescentes.*

Observação 2.4. *Dizemos que uma sequência é monótona, se ela for crescente ou descrescente, assim todos os exemplos citados acima são sequências monótonas,*

2.1.2 Limite de uma sequência

Zenão de Eléia $(495 - 430 a.C.)$ contou uma história acerca de uma corrida entre Aquiles e uma tartaruga. Aquiles, o herói grego, e a tartaruga decidem apostar uma corrida. Como a velocidade de Aquiles é maior que a da tartaruga, esta recebe uma vantagem, começando a corrida a frente da linha de largada de Aquiles.

Aquiles nunca sobrepassa à tartaruga, pois quando ele chegar à posição inicial A da tartaruga, esta encontra-se mais a frente, numa outra posição B. Quando Aquiles chegar a B, a tartaruga não estará mais lá, pois avançou para uma nova posição C, e assim sucessivamente, indefinidamente.

Observa-se que a distância entre Aquiles e a tartaruga é cada vez menor e se aproxima rapidamente de zero, porém nessa linha de raciocínio de Zenão, não importa quanto tempo se passe, Aquiles nunca alcançará a tartaruga nem poderá ultrapassá-la.

A conclusão de que a tartaruga sempre estará a frente se sustenta sobre o argumento de infinitos deslocamentos simultâneos de Aquiles e da tartaruga (ver Figura 2.1), que representam sempre um décimo em relação ao deslocamento anterior. Analogamente, o tempo transcorrido para cada deslocamento irá ser de um décimo do tempo do deslocamento anterior. Logo, tem-se que o tempo

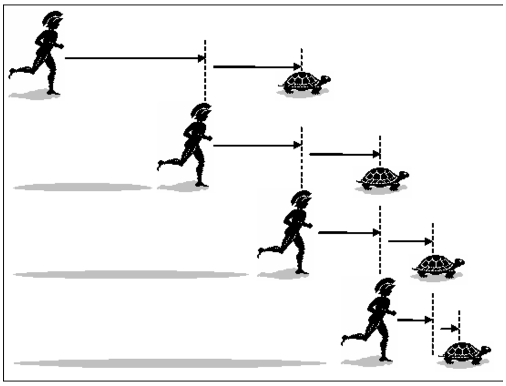


Figura 2.1: Aquiles e a Tartaruga

transcorrido é uma progressão geométrica de razão inferior a um, o que significa que somando-se os infinitos intervalos de tempo dessa progressão, haverá um valor limite ao qual o somatório converge. Encontra-se, então, uma incoerência no paradoxo, porque ele define que a tartaruga nunca será alcançada, porém a análise temporal demonstra que isto acontecerá apenas neste intervalo de tempo fixo.

A situação acima apresenta a dificuldade de analisarmos o comportamento no infinito de uma sequência. Nesse sentido, temos a necessidade de uma formalização matemática para uma melhor análise de situações desse tipo.

Definição 2.8. *Diz-se que um número real L é limite de uma sequência (x_n), ou que x_n converge para L, quando a seguinte condição for atentida: para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Denotamos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$*

Observação 2.5. *O número natural n_0 da definição de limite em geral depende do número ϵ dado.*

De fato, se considerarmos as sequências (x_n) e (y_n), cujos termos gerais são definidos por $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{n^2}$ mostremos que $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$, mas o número n_0 da Definição 2.8 será diferente em cada uma das situações. Dado $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |x_n - 0| < \epsilon &\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon \\ &\Leftrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Ou seja, se considerarmos $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor$(O menor inteiro maior ou igual a $\frac{1}{\epsilon}$), temos $|x_n - 0| < \epsilon$ se $n \geq n_0$. Por outro lado,

$$|y_n - 0| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2} < \epsilon$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad n^2 > \frac{1}{\epsilon} \\
&\Leftrightarrow \quad n^2 - \frac{1}{\epsilon} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (n + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}})(n - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (n - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}.
\end{aligned}
$$

Ou seja, se considerarmos $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right\rfloor$, *temos* $|y_n - 0| < \epsilon$ *se* $n \geq n_0$.

Considerando $\epsilon = 0.04$ *na sequência* (x_n) *teríamos* $n_0 = 25$ *enquanto na sequência* (y_n), *teríamos que considerar* $n_0 = 5$.

Observação 2.6. *A desigualdade* $|x_n - L| < \varepsilon$ *é equivalente a desigualdade* $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$, *ou ainda que* $x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. *A Desigualdade* $|x_n - L| < \varepsilon$ *estabelece que fora do intervalo aberto* $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ *existe no máximo uma quantidade finita de termos da sequência ou, em outras palavras, que todos os termos da sequência a partir do termo de ordem* n_0 *estão dentro do intervalo aberto* $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$*;*

Observação 2.7. *A convergência e o valor limite de uma sequência não são alterados quando se acrescenta ou diminui uma quantidade finita de termos. Por essa razão, dizemos que a convergência de uma sequência é determinada pelo comportamento de uma sequência no infinito.*

Teorema 2.1. *O limite de uma sequência convergente é único.*

Demonstração. Considere a sequência convergente (x_n) tal que $L_1 = \lim_{n\to\infty} x_n$ e $L_2 = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dado um número real positivo ε existem, de acordo com a Definição 2.8, números naturais n_1 e n_2 tais que

$$|x_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } n \geq n_1$$

e

$$|x_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } n \geq n_2.$$

Se considerarmos $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, temos:

$$|L_1 - L_2| \leq |x_{n_3} - L_1| + |x_{n_3} - L_2| < \varepsilon$$

E essa desigualdade só é possível para qualquer ε positivo quando $L_1 = L_2$, pois se $L_1 \neq L_2$ teríamos $|L1 - L_2| > 0$, considerando $\epsilon = |L_1 - L_2|$, teríamos $\epsilon < \epsilon$, o que seria uma contradição, resultando assim na unicidade do limite. □

Exemplo 2.14. *A sequência cujo termo geral é* $x_n = \frac{2n^2}{n^2-4}$*, com* $n \geq 3$*, converge para* 2*. De fato, dado* $\epsilon > 0$*, temos*

$$\left|\frac{2n^2}{n^2-4} - 2\right| < \epsilon \Leftrightarrow \left|\frac{8}{n^2-4}\right| < \varepsilon.$$

Para $n \geq 3$*, temos* $n^2 - 4 \geq 5$ *e para estabelecer a desigualdade desejada, basta considerarmos* $n^2 - 4 > \frac{8}{\varepsilon}$ *ou* $n > \sqrt{4 + \frac{8}{\varepsilon}}$*. Ou seja, basta escolher* n_0 *como primeiro número natural maior ou igual a* $\sqrt{4 + \frac{8}{\varepsilon}}$*.*

A seguir relacionaremos a noção de convergência com limitação e monotonicidade da sequência.

Teorema 2.2. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Considere (x_n) uma sequência convergente. Então, existe um número real L, tal que $L = \lim x_n$. Escolhendo $\epsilon = 1$ na Definição 2.8, existe um número natural n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \in (L-1, L+1).$$

Consideremos o conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, L-1, L+1\}$, definamos c como o menor e d como o maior elemento de F. Então todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[c, d]$. Portanto a sequência (x_n) é limitada. □

Teorema 2.3. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Consideremos (x_n) uma sequência limitada e monótona não decrescente, isto é,

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$$

Defina $L = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ (Isso é possível pois a sequência é limitada). Afirmamos que $L = \lim x_n$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, como $L - \varepsilon < L$, o número $L - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto $\{x_n\}$. Logo existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < x_{n_0}$. Como a sequência é monótona, $n > n_0 \Rightarrow x_{n_0} \leq x_n$ e, portanto $L - \varepsilon < x_n$ para $n \geq n_0$. Como $x_n \leq L$ para todo n, vemos que $n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$. Assim, temos que $\lim x_n = L$, como queriamos demonstrar. □

O trabalho de Celestino (ver [3]) tinha por objetivo um estudo sobre a percepção de alunos do 5º semestre da Faculdade de Engenharia de uma Universidade particular da cidade de São Paulo sobre o conceito de limites apresentando algumas dificuldades relacionadas a disciplina de cálculo. A partir da análise das respostas dos questionários supracitados (ver Apêndice), observa-se a dificuldade na compreensão dos conceitos de limitação, monotonicidade e convergência (a sequência possuir ou não limite) de sequências numéricas. Observa-se que sequências que são monótonas e convergentes foram as únicas nas quais houve a percepção de convergência por parte dos discentes. Além disso, houve dificuldade em identificar a convergência de sequências constantes e o autor defende que isso se deve ao fato de tais sequências não apresentarem um caráter dinâmico que a expressão “se aproximar”sugere. Sequências que são descritas por sentenças e por funções também causaram dificuldades na descrição dos seus primeiros elementos. Outra característica interessante observada nas respostas, é que os alunos associam convergência com monotonicidade. Nas questões onde as sequências não eram monótonas, grande parte dos alunos classificaram como sequências que não convergiam, mesmo a sequência sendo convergente. Além disso, também se observou que os alunos não entendiam que o limite da sequência pudesse ser atingido. Acreditamos que tais conceitos de cálculo diferencial não deva ser ensinado no ensino básico, uma vez que sua compreensão exigiria uma análise detalhada com bastante exemplos e isso não teria como ser feito em poucas aulas. Como observado no parágrafo anterior, inclusive alguns estudantes de ensino superior que obtiveram êxito na disciplina de Cálculo, apresentam dificuldades em identificar os conceitos supracitados. Porém, isso não quer dizer que seus elementos não possam ser abordados em diversas situações no ensino médio. Como por exemplo, introduzir o infinito, sequências, limitações de sequências, entre outros. Mas isso seria feito mediante um bom embasamento teórico do professor, que traria para sala de aula tais elementos de forma empírica (através de exemplos), prática e em algumas situações, lúdicas. Algumas propostas se encontram nas sessões seguintes.

O trabalho de celestino [3] foi realizado através de uma pesquisa investigando e analisando a existência obstáculos em relação a concepção de limites que foram apontados em algumas pesquisas na área de educação matemática, trabalhando as dificuldades relacionadas ao cálculo de uma forma mais ampla, bem como que tratassem especificamente dos obstáculos ligados à noção de limite. Ficou bem claro a associação de convergência com monotonicidade e, em geral, foi percebido que o limite é visto como um valor do qual os termos de uma sequência se aproximam cada vez mais e esta aproximação deve ser obtida com valores crescendo ou decrescendo até que estejam bem próximos de um certo número, no entanto não atingido ou ultrapassado o que descreve a própria noção intuitiva do limite.

2.2 Progressão Aritmética

Nessa seção, iremos discutir sobre uma importante classe de sequências numéricas, que são as progressões aritméticas.

São muito comuns no cotidiano grandezas que sofrem aumentos iguais em intervalos de tempos iguais.

Exemplo 2.15. *A população de certa cidade aumenta anualmente de 100 habitantes. Se chamarmos de P_0 a população atual e de P_n a população da cidade daqui a n anos, $(P_0, P_1, P_2, ...)$ será uma progressão aritmética de razão 100.*

Definição 2.9. *Uma sequência de números reais (a_n), na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior, a partir do segundo termo é constante é chamada de Progressão Aritmética Essa diferença constante é chamada de razão da progressão aritmética e representada pela letra r.*

Observação 2.8. *Escrevemos PA para abreviar a expressão Progressão Aritmética.*

Em uma progressão aritmética para encontrarmos os seus termos a partir do primeiro termo, basta adicionarmos ao termo a razão, e assim, sucessivamente a cada termo encontrado, ou seja, dada uma PA $(a_1, a_2, a_3, ...)$, temos que

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= a_3 - a_2 \\ &= a_4 - a_3 \\ &= ... \\ &= a_n - a_{n-1} \\ &= r, \end{aligned}$$

ou simplesmente

$$a_{n+1} = a_n + r, n \geq 1$$

Exemplo 2.16. *Considere um triângulo retângulo cujos lados formam uma progressão aritmética crescente. A razão dessa progressão é igual ao raio R do círculo inscrito*

Chamemos os lados do triângulo de $x-r$, x e $x+r$. Como a progressão é crescente, a hipotenusa é o último termo. Então pelo teorema de Pitágoras, temos que

$$(x + r)^2 = (x - r)^2 + x^2$$

Daí, $x^2 = 4xr$ e, ja que $x \neq 0$, pois x é um dos catetos, $x = 4r$. Os lados são $3r$, $4r$ e $5r$. O perímetro é $2p = 12r$ e o semiperímetro é $p = 6r$ e a área de um triângulo é

$$S = \frac{b.h}{2} = \frac{3r.4r}{2} = \frac{12r^2}{2} = 6r^2.$$

O raio do círculo inscrito é $\frac{S}{p} = \frac{6r^2}{6r} = r$.*(Ver Observação* 1.7 *)*

Observação 2.9. *Vamos demonstrar que a razão é* r *igual ao raio* R *do círculo inscrito*

Demonstração. Observe o triângulo retângulo ABC da Figura 2.2 e a circunferência de centro O, inscrita neste triângulo o teorema de Pitágoras garante que

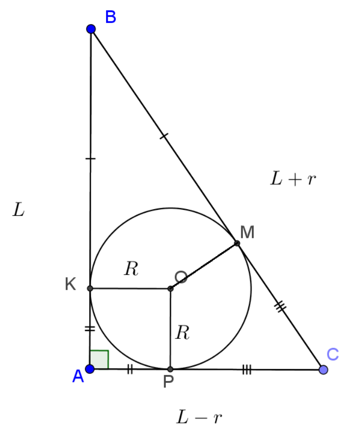


Figura 2.2: Triângulo retângulo ABC

$$
\begin{aligned}
(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (L+r)^2 = L^2 + (L-r)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad L^2 + 2Lr + r^2 = L^2 + L^2 - 2Lr + r^2 \\
&\Leftrightarrow \quad L^2 = 4Lr \\
&\Leftrightarrow \quad L = 4r. \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Afirmação 2.1. *BM=BK*

Observe na Figura 2.2 que os segmentos BM *e* BK *tangenciam a circunferência de centro* O *e raio* R *e que os triângulos retângulos* BKO *e* BMO *são equivalentes, pois* $OK = OM = R$ *e pelo Teorema de Pitágoras temos* $BM = BK$. *De forma análoga, mostra-se que* $AK = AP$ *e* $CP = CM$.

Temos pelo teorema das retas tangentes a uma circunferência, que as retas partindo de um mesmo ponto são iguais, ou seja, $AK = AP = R$, $PB = BM = L - R$ e $CK = CM = L - r - R$. Então, temos

$$BC \quad = \quad BM + MC \qquad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow L + r &= L - R + L - r - R && (2.3)\\
\Leftrightarrow L + r &= 2L - 2R - r && (2.4)\\
\Leftrightarrow L &= 2R + 2r. && (2.5)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.1) em (2.5), teremos

$$\begin{aligned}
4r &= 2R + 2r\\
2r &= 2R\\
r &= R.
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

2.2.1 Termo geral de uma Progressão Aritmética

Consideremos a progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ de razão r, então temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r\\
a_3 &= a_2 + r\\
a_4 &= a_3 + r\\
&\vdots\\
a_n &= a_{n-1} + r
\end{aligned}$$

Somando-se membro a membro as igualdades, obtemos

$$a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + (n-1).r$$

Assim, subtraindo $a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1}$ de ambos os membros, encontramos uma equação do termo geral da PA, descrita por

$$a_n = a_1 + (n-1)r \tag{2.6}$$

Observe que o termo geral de uma PA é dado por um polinômio na variável n, $a_n = rn + (a_1 - r)$. Se $r \neq 0$ temos um polinômio de grau um e por esta razão são chamadas de progressões aritméticas de primeira ordem, caso contrário, ou seja, $r = 0$ teríamos uma progressão estacionária ou constante.

Observação 2.10. *Notações especiais: Quando procuramos uma PA de* $3, 4$ *ou mais termos, a notação é prática:*

- *Para 3 termos, consideramos* $(x-r, x, x+r)$.
- *Para 4 termos, consideramos* $(x-3y, x-y, x+y, x+3y)$*, onde* $y = \frac{r}{2}$,
- *Em geral, para* $n = 2k+1$ *termos, consideramos* $(x-kr, ..., x-r, x, x+r, ..., x+kr)$
- *Em geral, para* $n = 2k$ *termos, consideramos* $(x-ky, ..., x-y, x, x+y, ..., x+ky)$*, onde* $2y = r$.

Exemplo 2.17. *As sequencias (5,8,11,...) e (7,5,3,1,...) são progressões aritméticas cujas razões valem respectivamente 3 e -2.*

Para classificarmos o comportamento de uma progressão aritmética, devemos observar o valor de sua razão usando a Equação 2.2.

- Uma progressão aritmética (a_n) é constante se cada termo é igual ao sucessor, ou seja, $a_{n+1} = a_n$, e portanto

$$a_{n+1} = a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = 0 \Leftrightarrow a_n + r - a_n = 0 \Leftrightarrow r = 0$$

.

- Uma progressão aritmética (a_n) é decrescente se, a partir do segundo termo, cada termo é menor que o anterior, ou seja, $a_{n+1} < a_n$, e portanto

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \Leftrightarrow a_n + r - a_n < 0 \Leftrightarrow r < 0$$

.

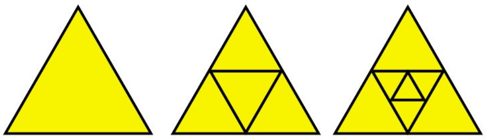
- Uma progressão aritmética (a_n) é crescente se, a partir do segundo termo, cada termo é maior que o anterior, ou seja, $a_{n+1} > a_n$, e portanto

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow a_n + r - a_n > 0 \Leftrightarrow r > 0$$

.

Exemplo 2.18. *Jean desenhou o triângulo equilátero da Figura 1. Ana desenhou outro triângulo equilátero, ligando os pontos médios dos lados do triângulo por Jean, e obteve a figura 2. Gustavo fez o mesmo, com base no triângulo desenhado por Ana, e obteve a figura 3.*

Procedendo desse mesmo modo, calcularemos quantos triângulos equiláteros Dávila, que é a 50^a *pessoa a fazer o mesmo processo, terá na sua figura.*



Observe nos triângulos abaixo, que a figura de Jean tem 1 *triângulo equilátero, a figura de Ana tem* 5 *triângulos equiláteros, a figura de Gustavo tem* 9 *triângulos, percebemos então que esse processo gera uma PA de primeiro termo* $a_1 = 1$ *e razão* $r = 4$*, portanto a da* 50^a *posição será o* 50^a *termo da PA, então, aplicando (2.6)*

$$\begin{aligned} a_{50} &= a_1 + 49r \\ &= 1 + 49.4 \\ &= 197. \end{aligned}$$

Exemplo 2.19. *O preço de um carro novo é de* $R\$32.000,00$ *e seu valor diminui* $R\$3.000,00$ *a cada ano de uso. Encontraremos o seu preço após 4 anos de uso.*

Vamos apresentar 2 maneiras de resolver este problema.

1. *Os preços do automóvel a cada ano de uso, a partir do ano da compra, são* $R\$32000,00$*;* $R\$29.000,00$*;* $R\$26.000,00$*;* $R\$23.000,00$*;* $R\$20000,00$*. Com quatro anos de uso o carro terá seu valor reduzido a* $R\$20.000,00$*.*

2. *Podemos resolver usando a fórmula do termo geral da PA, descrita em (2.6). observando que a razão é dada por* $r = -3000$*, e que o termo* a_n *corresponde a* $n - 1$ *anos de uso. Portanto, como estamos interessados em saber o valor do automóvel após quatro anos de uso, é suficiente encontrarmos o quinto termo da sequência.*

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + 4r \\ &= 32000 + 4(-3000) \\ &= 20.000 \end{aligned}$$

Observação 2.11. *Em toda PA , a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual ao soma dos extremos.*

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} + ...$$

Observação 2.12. *Em toda PA, o dobro de cada termo, a partir do segundo, é a soma entre o antecedente e o consequente, ou seja, o termo central é a média aritmética entre os extremos. Dada* *uma PA* (a_{n-1}, a_n, a_{n+1})*, observe que pela equação 2.2*

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \Leftrightarrow a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

Observação 2.13. ***Interpolação Aritmética*** *Em toda sequência finita* $x_n = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *os termos* a_1 *e* a_n *são chamados de extremos e todos os outros de meios. Interpolar k meios aritméticos entre os números* a_1 *e* a_n *significa obter uma PA de extremos* a_1*,* a_n *e para determinar os meios dessa PA é necessário calcular o número de termos* $n = k + 2$

e a razão é obtida usando a Equação 2.6, então encontraremos a relação

$$r = \frac{a_n - a_1}{k + 1}$$

.

2.2.2 Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética.

Quando o grande matemático Carl F. Gauss(1777-1855) tinha sete anos de idade, seu professor, afim de ocupar a classe, lhe pediu que calculasse a soma dos inteiros de 1 a 100. O professor, esperando que o trabalho durasse pelo menos uma hora, ficou surpreso quando, em poucos minutos, o pequeno Gauss anunciou que o valor da soma era 5050. A resposta estava correta e, curioso, o professor lhe perguntou como conseguira fazer o cálculo tão rapidamente. Gauss, explicou-lhe que somando-se de forma crescente os números,

$$1 + 2 + 3.... + 99 + 100$$

ou somando-se de forma decrescente os números

$$100 + 99 + 98 + ... + 2 + 1$$

obteria o mesmo resultado, e que se juntasse as duas somas, parcela a parcela, encontraria 100 parcelas iguais a 101 resultando em 10100, mas ele queria apenas uma soma, então tal resultado deveria sera a metade do valor encontrado, ou seja, 5050. Baseado nessa mesma idéia, calcularemos a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer.

Teorema 2.4. *Considere uma progressão aritmética descrita por* $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$*. A soma dos n primeiros termos desta progresão é dada por*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \tag{2.7}$$

Demonstração. Seja $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, vamos encontrar uma função que descreva o valor desta soma em termos dos elementos da progressão. $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, então

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (a_n + a_{n-1} + ... + a_1) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_n + a_1) \end{aligned}$$

Note que as parcelas da soma acima correspondem a expressão $a_k + a_{n-(k-1)}$ e tal valor é sempre o mesmo, uma vez que aplicando a equação 2.6 nos fornece

$$\begin{aligned} a_k &= a_1 + (k-1)r \\ &= a_1 + kr - r \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_{n-(k-1)} &= a_1 + [n - (k-1) - 1]r \\ &= a_1 + [n - k]r \\ &= a_1 + nr - kr. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} a_k + a_{n-(k-1)} &= a_1 + kr - r + a_1 + nr - kr \\ &= 2a_1 - r + nr \\ &= a_1 + a_n - nr + r - r + nr \\ &= a_1 + a_n. \end{aligned}$$

Assim, temos que todos as somas das parcelas são iguais, ou seja, teremos n parcelas de valor $a_1 + a_n$. Então

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

□

Exemplo 2.20. *Um professor de Educação Física pretende dispor seus alunos em formato de triângulo, colocando um aluno na primeira linha, dois na segunda, três na terceira e assim por diante.*

Para formar esse triângulo ele usou 231 *alunos. Faremos uma analise do problema para mostrar quantas linhas de alunos ele precisou.*

Notamos que os alunos foram dispostos em forma de um triângulo, colocando um aluno na primeira linha, dois na segunda, três na terceira e assim por diante e que a sequência indica uma

PA de razão $r = 1$ onde o total de alunos é igual a 231, então se quiséssemos saber o número de filas, devemos aplicar a fórmula da soma de n termos de uma PA, dada pela Equação 2.7,

$$
\begin{aligned}
231 = \frac{(1+1+(n-1)1)n}{2} \quad &\Rightarrow \quad 231 = \frac{n+n^2}{2} \\
&\Rightarrow \quad n+n^2 = 462 \\
&\Rightarrow \quad n+n^2-462 = 0 \\
&\Rightarrow \quad n = -22 \ ou \ n = 21
\end{aligned}
$$

Logo, o número de filas necessárias para que o professor consiga executar a atividade é 21.

Consideremos outra situação onde o número de alunos seja 500 e suponha que o professor queira formar um triângulo igual ao anterior. Será que conseguiria? Caso não fosse possível, quantos alunos sobrariam? Quantas linhas haverá? Notamos que os alunos foram dispostos em forma de um triângulo, colocando um aluno na primeira linha, dois na segunda, três na terceira e assim por diante e que a sequência indica uma PA de razão $r = 1$ onde o total de alunos é igual a 500, então para descobrirmos o número de filas, novamente devemos aplicar a fórmula da soma de n termos de uma PA, dada pela Equação 2.7,

$$
\begin{aligned}
500 = \frac{(1+1+(n-1)1)n}{2} \quad &\Rightarrow \quad 500 = \frac{n+n^2}{2} \\
&\Rightarrow \quad n+n^2 = 1000 \\
&\Rightarrow \quad n+n^2-1000 = 0
\end{aligned}
$$

Ao calcular o valor do discriminante $\triangle$ da equação polinomial do segundo grau acima, encontramos $\triangle = 4001$ e, como esse número não é um quadrado perfeito logo não seria possível construir um triângulo com essa quantidade de alunos, então sabemos que deverão sobrar alunos. Devemos então calcular quantos. Abaixo de 4001 o maior número que é um quadrado perfeito é o 3969, com isso temos que para que o discriminante $\triangle = 3969$, o número de alunos deverá ser 496, logo sobrariam 4 alunos. Calculando então, o número de linhas, temos

$$
\begin{aligned}
496 = \frac{(1+1+(n-1)1)n}{2} \quad &\Rightarrow \quad 231 = \frac{n+n^2}{2} \\
&\Rightarrow \quad n+n^2 = 992 \\
&\Rightarrow \quad n+n^2-992 = 0 \\
&\Rightarrow \quad n = -32 \text{ ou } n = 31.
\end{aligned}
$$

Logo, o número de filas necessárias para que o professor consiga executar a atividade é 31.

Exemplo 2.21. *A soma dos n primeiros números naturais é* $S_n = \frac{(1+n)n}{2}$ *uma vez que* $a_1 = 1$,a_n *e* $r = 1$. *Aplicando a Equação 2.6, temos*

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + (n-1).1 \\ &= n \end{aligned}$$

a partir da Equação 2.7, teremos que a soma pretendida é dada por :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \\ &= \frac{(1+n)n}{2} \\ &= \frac{n+n^2}{2} \end{aligned}$$

Observamos que esta sequência é uma sucessão de segunda ordem pois é um polinômio de segundo grau.

2.2.3 Progressão aritmética de ordem superior

Outras sequências particulares e interessantes serão descritas na seção a seguir.

Definição 2.10. *Operador diferença Denotaremos por* $\triangle$ *o operador diferença em sequência, definido por*

$$\triangle a_n := a_{n+1} - a_n.$$

Observe que o operador diferença define uma nova sequência (b_n), onde o $b_n = \triangle a_n$.

Lema 2.1. *Uma sequência* (a_n) *é uma PA se, e somente se, a sequência* $(\triangle a_n)$ *é constante.*

($\Rightarrow$) Suponha que a sequência (a_n) seja uma PA, então

Demonstração.

$$\begin{aligned} \triangle a_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= a_1 + (n+1-1)r - [a_1 + (n-1)r] \\ &= r. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Suponha que $\triangle a_n = r$, com r fixo. Como $\triangle a_n = a_{n+1} - a_n = r$, temos que a progressão (a_n) é uma PA. $\square$

Exemplo 2.22. *Progressão Aritmética de Segunda Ordem*

Definimos PA de segunda ordem uma sequência de números na qual a sequência das diferenças entre um termo e seu anterior ($\triangle a_n$) é uma PA de primeira ordem.

Se o termo a_n é dado por um polinômio do segundo grau em n, então a sequência (a_n) é uma PA de segunda ordem, e, reciprocamente, se (a_n) é uma PA de segunda ordem, então (a_n) é um polinômio de segunda ordem em n. De fato, seja $(a_n) = an^2 + bn + c$, com $a \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\triangle a_n &= a_{n+1} - a_n \\
&= a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c) \\
&= 2an + (a+b),
\end{aligned}$$

que é um polinômio do primeiro grau na variável n.

Exemplo 2.23. *Considere a sucessão $(b_n) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, ..)$, concluiremos que esta sucessão é uma PA de segunda ordem, pois $(c_n) = (b_2 - b_1, b_3 - b_2, b_4 - b_3, ...) = (3, 5, 7, 9, ..)$ é uma PA de primeira ordem.*

Exemplo 2.24. *Progressão Aritmética de Terceira Ordem*

Definimos PA de terceira ordem, uma sequência de números na qual a sequência das diferenças, entre um termo e seu anterior $(a_{n-1} - a_n)$ é uma PA de segunda ordem.

Observação 2.14. *Analisemos a sequência $(a_n) = (1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, \ldots)$, observe que não é uma PA, pois não possui razão constante. Note que as diferenças entre seus termos consecutivos geram a sequência $b_n = (7, 19, 37, 61, 91, 127, \ldots)$ que também não é uma PA. Mas a sequência gerada pelas diferenças dos termos da sequência anterior $c_n = (12, 18, 24, 30, 36, ...)$ é uma PA de razão $r = 6$. Assim, podemos afirmar que a sequência (b_n) é uma PA de ordem 2 e, portanto, denominamos a sequência (a_n) como PA de ordem 3.*

Exemplo 2.25. *Consideremos a sequência $(c_n) = (n^3)$. Verificamos que esta sequência é uma progressão de terceira ordem pois temos um polinômio do terceiro grau, para tal calcularemos os operadores diferenças sucessivos, teremos*

$$\begin{aligned}
\triangle a_n &= a_{n+1} - a_n \\
&= (n+1)^3 - n^3 \\
&= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 \\
&= 3n^2 + 3n + 1
\end{aligned}$$

$$\triangle\triangle := \triangle^2 a_n = 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - 3n^2 - 3n - 1$$
$$= 3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 + 1 - 3n^2 - 3n - 1$$
$$= 6n + 6$$
$$\triangle^3 a_n = 6(n+1) + 6 - 6n - 6$$
$$= 6.$$

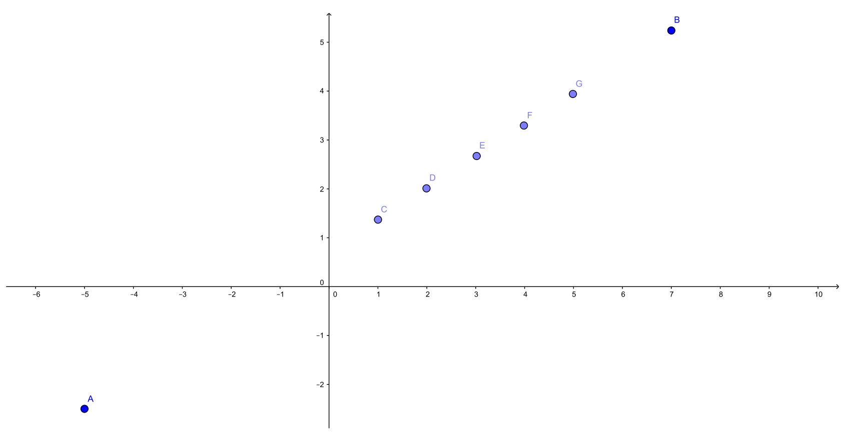
Concluímos então que $(\triangle^3 a_n)$ é constante, então a sequência (a_n) é uma progressão de terceira ordem.

Observação 2.15. *De modo geral, uma Progressão Aritmética de k-ésima ordem, com $k > 2$ é uma sequência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $k - 1$.*

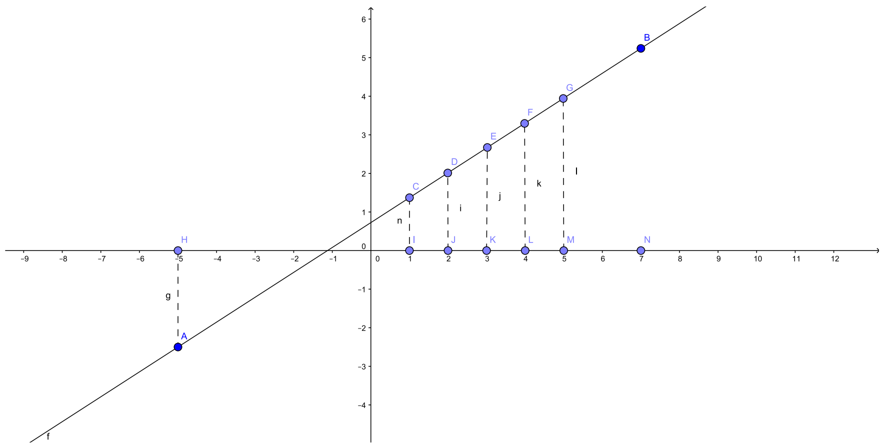
Observação 2.16. *Interpretação geométrica da Progressão Aritmética*

Uma PA é uma função que associa um número natural n a um número a_n, dado pela Equação (2.6).

Observe que a Equação 2.6 estabelece que o termo a_n é associada a uma função a de n descrita por $a(n) = a_n = a_1 + (n-1)r$ e esta função é polinomial de primeiro grau na variável n, sendo o domínio da função a, o conjunto dos números naturais.



O gráfico da função a está contido no gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a_1 + (x-1)r$, sendo esta função afim real e de gráfico conhecido.



2.3 Progressão Geométrica

Neste seção, trataremos de sequências que variam com a taxa crescimento constante. A taxa de crescimento de uma grandeza, que passa do valor a para o valor b, é definida por $\frac{b-a}{a}$, isto é, a taxa de crescimento é a razão entre o aumento da grandeza e seu valor inicial.

Exemplo 2.26. *Suponha que a população de certo país aumente 2% ao ano. Então, a população P_n do país no ano n será igual à população P_{n-1} do ano anterior mais o aumento de população, que é igual a 2% da população P_{n-1}, isto é,*

$$P_n = P_{n-1} + 0,02P_{n-1} = 1,02P_{n-1}$$

Em suma, a população em cada ano é igual à população do ano anterior multiplicada pela constante $1,02$. Note que a taxa de crescimento de P_n é $2\% = 0,02$

Definição 2.11. *Uma sequência de números reais (a_n), na qual o quociente entre cada termo e o termo anterior, a partir do segundo termo é uma constante. Esse quociente constante é chamado de razão e representado pela letra q.*

Observação 2.17. *Escrevemos PG para abreviar o termo progressão geométrica*

Dada um PG $(a_1, a_2, a_3, ...)$, temos que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

ou simplesmente

$$a_{n+1} = a_n.q, n \geq 1$$

Observação 2.18. *Notações especiais: Quando procuramos uma PA de 3, 4 ou mais termos, a notação é prática:*

- *Para* 3 *termos, consideramos* $(\frac{x}{q}, x, xq)$.
- *Para* 4 *termos, consideramos* $(\frac{x}{y3}, \frac{x}{y}, xy, xy^3)$*, onde* $y = \frac{q}{2}$.
- *Em geral, para* $n = 2k+1$ *termos, consideramos* $(\frac{x}{q^k}, ..., \frac{x}{q}, x, xq, ..., xq^k)$
- *Em geral, para* $n = 2k$ *termos, consideramos* $(\frac{x}{y^k}, ..., \frac{x}{y}, x, xy, ..., xy^k)$*, onde* $y = \frac{q}{2}$.

2.3.1 Termo geral de uma Progressão Geométrica

Em uma progressão geométrica, para encontrarmos os seus termos a partir do primeiro termo, basta multiplicarmos ao termo a razão, e assim, sucessivamente a cada termo encontrado. Vamos considerar a sequência $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão q, então temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1.q \\ a_3 &= a_2.q \\ a_4 &= a_3.q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1}.q \end{aligned}$$

Multiplicando-se membro a membro as igualdades, obtemos

$$a_2.a_3.a_4.....a_{n-1}.a_n = a_1.a_2.a_3.....a_{n-1}.q^{n-1}$$

Assim, dividindo $a_2.a_3....a_{n-1}$ dos membros, encontramos a fórmula do termos geral da PG

$$a_n = a_1.q^{n-1},$$

com $a_n \neq 0$.

Exemplo 2.27. *As sequências* $(1, 2, 4, 8, 16, ...)$ *e* $(18, 6, 2, \frac{2}{3}, ...)$ *são progressões geométricas cujas razões valem respectivamente* 2 *e* $\frac{1}{3}$.

Observação 2.19. *Para classificarmos o comportamento de uma PG, devemos observar o valor de sua razão usando a fórmula 2.8*

- Uma progressão geométrica (a_n) é constante se cada termos é igual ao sucessor, isto ocorre em duas situações:

  (1) Todos os termos nulos: $a_1 = 0$ e q qualquer.

  (2) Todos os termos $a_n \neq 0$: $a_{n+1} = a_n$. então

  $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Leftrightarrow \frac{a_n.q}{a_n} = 1 \Leftrightarrow q = 1$$

  .

- Uma progressão geométrica (a_n) é decrescente se,a partir do segundo termo, cada termo é menor que o anterior, isto ocorre em duas situações:

  (1) PG com termos positivos: Fazendo então $a_{n+1} < a_n$ teremos

  $$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow 0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{a_n.q}{a_n} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1$$

  .

  (2) PG com termos negativos: Fazendo então $a_{n+1} < a_n$ teremos

  $$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Leftrightarrow \frac{a_n.q}{a_n} > 1 \Leftrightarrow q > 1$$

  .

- Uma progressão geométrica (a_n) é crescente se, a partir do segundo termo, cada termo é maior que o anterior, isto ocorre em duas situações:

  (1) PG com termos positivos: Fazendo então $a_{n+1} > a_n$ teremos

  $$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Leftrightarrow \frac{a_n.q}{a_n} > 1 \Leftrightarrow q > 1$$

  .

  (2) PG com termos negativos: Fazendo então $a_{n+1} < a_n$ teremos

  $$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow \frac{a_n.q}{a_n} < 1 \Leftrightarrow q < 1$$

  .

- Uma progressão geométrica (a_n) é alternante se cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior, ou seja, $q < 0$.

- Uma progressão geométrica (a_n) é estacionária se $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$, ou seja, $q = 0$.

Exemplo 2.28. *Se a população de certa cidade é hoje 500 mil habitantes e cresce a taxa de 3% ao ano, vamos determinar a população dessa cidade daqui a 10 anos. Observamos que o crescimento é percentual da população, então isso indica multiplicação, logo o número de habitantes cresce geometricamente. O primeiro termos da PG será a população inicial, ou seja,* $a_0 = 500000$ *e a* $q = 1,03$,

Aplicando a fórmula do termo geral,

$$a_n = a_0.q^{n-0}$$

Temos que,

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1.q^{10-0} \\ a_{10} &= 500000.(1,03)^{10} \\ a_{10} &= 500000.1,344 \\ a_{10} &= 672000 \end{aligned}$$

Logo a população será de aproximadamente 652387 habitantes.

Observação 2.20. *Em toda PG finita, o produto dos termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.*

$$a_1.a_n = a_2.a_{n-1} = a_3.a_{n-2} = ...$$

Observação 2.21. *Em toda PG, o quadrado de cada termo, a partir do segundo, é o produto entre o antecedente e o consequente, ou seja, é a média geométrica entre os extremos.*

Dada uma PG (a_{n-1}, a_n, a_{n+1}), *observe que pela equação 2.8*

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Leftrightarrow a_n = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$$

Observação 2.22. *Em toda sequência finita* $x_n = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *os termos* a_1 *e* a_n *são chamados de extremos e todos os outros de meios. Interpolar* K *meios aritméticos entre os números* a_1 *e*

a_n significa obter uma PG de extremos a_1, a_n e para determinar os meios dessa PG é necessário calcular o número de termos $n = K + 2$ e

a razão usando a fórmula 2.8, então encontraremos a relação

$$q = \sqrt[k+1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

2.3.2 Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica

Para encontramos a fórmula que define a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$,

temos que,

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + ... + a_1.q^{n-1}$$

Multiplicando ambos os membros da equação pela razão q, tem-se:

$$q.S = q.a_1 + q.a_2 + q.a_3 + ... + q.a_n = q.a_1 + a_1.q^2 + a_1.q^3 + a_1.q^4 + a_1.q^5 + ... + a_1.q^n$$

Subtraindo as equações, , membro a membro, tem-se:

$$q.S - S = a_1.q^n - a_1 = a_1.(q^n - 1) \Rightarrow S(q-1) = a_1.(q^n - 1) \Rightarrow S = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$$

Exemplo 2.29. *Segundo uma lenda, o inventor do xadrez teria pedido ao seu rei, como recompensa pela sua invenção, um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos pela segunda casa, quatro pela terceira e assim sucessivamente, dobrando a quantidade pedida de uma casa pela outra. Como o tabuleiro de xadrez tem* 64 *casas o problema apresentado resume-se na soma dos* 64 *termos de uma progressão geométrica de razão $q = 2$. Temos então,*

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} \\ &= \frac{1.(1 - 2^{64})}{1 - 2} \\ &= \frac{1 - 2^{64}}{-1} \\ &= 2^{64} - 1. \end{aligned}$$

Exemplo 2.30. *Uma praga atacou uma criação de aves. No primeiro dia, uma ave adoeceu; no segundo dia, duas outras aves adoeceram; no terceiro dia, adoeceram mais quatro e assim por diante, até o oitavo dia. Nenhuma das aves morreu. Sabendo-se que ao fim do oitavo dia não havia nenhuma ave sem a doença, determinemos o número inicial de aves dessa criação. Ao observar o problema, percebemos que o número de aves adoecidas a cada que passa dobra, denotando-se assim uma PG, onde $a_1 = 1$ e $q = 2$, como a questão pede o total de aves devemos encontrar a soma de todas as aves adoecidas,*

aplicando a fórmula da soma de n termos da Progressão Geométrica 2.3.2,

$$S = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}$$

temos que,

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} \\ S_8 &= \frac{1.(2^8 - 1)}{2 - 1} \\ S_8 &= \frac{64 - 1}{1} \\ S_8 &= 63 \end{aligned}$$

2.3.3 Soma de termos de uma Progressão Geométrica infinita

Na seção anterior, descrevemos a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão q e primeiro termos a_1 por:

$$S_n = a_1.\frac{(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1}{q - 1}.q^n - \frac{a_1}{q - 1}$$

Dessa forma, podemos considerar o comportamento assintótico da progressão nas demais situações:

(1) $0 < q < 1$: Nesse caso, temos $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ e portanto

$$S_n = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

(2) $q > 1$

Nesse caso, temos $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ e portanto

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_1 > 0 \\ -\infty & \text{se } a_1 < 0 \end{cases}$$

ou seja, nessa situação as somas parciais S_n assumem valores absolutos cada vez maiores a medida que consideramos n crescendo. È importante observamos a partir dessa análise que esse comportamento pode ser observado pelo aluno de maneira empírica. Por exemplo, se considerarmos $a_1 = 10$ e $q = 2$ façamos as somas parciais:

$$\begin{array}{rcl} S_1 &=& 10 \\ S_2 &=& 10.\dfrac{(2^2-1)}{2-1} = 30 \\ S_3 &=& 10.\dfrac{(2^3-1)}{2-1} = 70 \\ S_4 &=& 10.\dfrac{(2^4-1)}{2-1} = 150 \\ S_5 &=& 10.\dfrac{(2^5-1)}{2-1} = 310 \\ &.& \\ &.& \\ &.& \\ S_{100} &=& 10.\dfrac{(2^{100}-1)}{2-1}. \end{array}$$

Ou seja, os alunos conseguem observar o comportamento que S_n descreve suficientemente grande.

Também pode-se trabalhar com o aluno a questão da convergência de forma descritiva. Se tomarmos $a_1 = 10$ e $q = \frac{1}{2}$. Analisemos algumas somas parciais

$$\begin{array}{rcl} S_1 &=& 10 \\ S_2 &=& 10.\dfrac{((\frac{1}{2})^2-1)}{\frac{1}{2}-1} = 150 \\ S_3 &=& 10.\dfrac{((\frac{1}{2})^3-1)}{\frac{1}{2}-1} = 17,5 \\ S_4 &=& 10.\dfrac{((\frac{1}{2})^4-1)}{\frac{1}{2}-1} = 18,75 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
S_5 &= 10.\frac{((\frac{1}{2})^5 - 1)}{\frac{1}{2} - 1} = 19,375 \\
&. \\
&. \\
&. \\
S_{10} &= 10.\frac{((\frac{1}{2})^{10} - 1)}{\frac{1}{2} - 1} = 19,98046875 \\
&. \\
&. \\
&. \\
S_{100} &= 10.\frac{((\frac{1}{2})^{100-1})}{\frac{1}{2} - 1} = 19.999...9^{84}
\end{aligned}
$$

ou seja, observa-se que a medida que aumenta-se o valor de n, a soma parcial S_n torna-se um valor cada vez mais próximo de 20 e observa-se que

$$20 = \frac{10}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{a_1}{1 - q}$$

.

Uma aplicação de Soma infinita está presente no conteúdo das dízimas periódicas, quando queremos encontrar a fração geratriz. Faremos um breve estudo dessa aplicação.

Exemplo 2.31. *Dizimas Periódicas*

Definição 2.12. *Uma expressão decimal $x = a_0, a_1a_2a_3...a_n...$, onde a_0 é um número inteiro maior ou igual a zero e $a_1, a_2, ..., a_n, ...$são dígitos inteiros tais que, $0 \leq a_n \leq 9$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se um dígito a_n, chamado de n-ésimo dígito da expressão x, quando esse dígitos se repetem infinitamente dizemos então que essa expressão decimal é uma **dízima periódica**.*

Observação 2.23. *O conjunto dos números racionais $(\mathbb{Q})$, Por definição os números racionais são aqueles que podem ser representados por uma fração, isto é, $\frac{p}{q}$, com p e q números inteiros $q \neq 0$.*

Observação 2.24. *As frações que geram dízimas periódicas são chamadas de fração geratriz.*

Observe que $\frac{1}{3} = 0,3333...$ observamos então a regularidade dos elementos nas casas decimais e que essas casas decimais podem ser obtidas através da soma $0,3333... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,003 + ...$, então percebemos que essa soma é uma sequência de termos de uma progressão geométrica,e temos então uma soma de infinitos termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 0,3 e razão 0,1.

As dízimas periódicas, em geral, representam uma soma infinita de termos de uma progressão geométrica com razão entre 0 e 1, e podem ser classificadas em simples, que apresentam o período logo após a vírgula: $1,4444...$, *ou composta, que possuem uma parte não periódica após a vírgula:* $1,523333...$, *dependendo do comportamento dos termos de suas casas decimais.*

Definição 2.13. ***Dízima Periódica Simples:*** *Uma expressão decimal* $x = 0, a_1a_2...$ *chama-se dízima periódica simples, de período* $a_1a_2...a_p...$, *quando os dígitos* a_p *após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem.*

Definição 2.14. ***Dízima Periódica Composta:*** *Uma expressão decimal* $x = 0, a_1a_2...$ *chama-se dízima periódica composta, se depois da vírgula os tem uma parte que não se repete, seguida por uma parte infinta e periódica.*

Observação 2.25. *Podemos determinar as frações geratriz aplicando a Equação 2.3.3. Veremos alguns casos dessa aplicação:*

(1)

$$0,3333... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,003 + ...$$

Temos que $a_1 = 0,3$ *e* $q = 0,1$, *logo aplicando a equação 2.3.3, temos que*

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,3}{1-0,1} = \frac{1}{3}.$$

(2)

$$1,444... = 1 + (0,4 + 0,04 + 0,004 + 0,004 + ...)$$

Nesse caso, temos uma dízima periódica onde existe uma soma de um inteiro com a parte decimal periódica então, devemos encontrar a fração geratriz da parte decimal e adicionar a parte inteira igual a 1, *então temos que Na parte decimal observamos que* $a_1 = 0,4$ *e* $q = 0,1$, *logo aplicando a equação 2.3.3, temos que*

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,4}{1-0,1} = \frac{4}{9}.$$

Então

$$S = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}.$$

(3)

$$1,523333... = 1,52 + (0,003 + 0,0003 + 0,00003 + ...)$$

Nesse caso, temos uma dízima periódica composta onde existe uma soma de um número decimal exato e a parte decimal periódica então, devemos encontrar a fração geratriz da parte decimal periódica e adicionar a parte do número decimal exato igual a $1,52$, *então temos que Na parte decimal observamos que* $a_1 = 0,003$ *e* $q = 0,1$, *logo aplicando a equação 2.3.3, temos que*

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,003}{1-0,1} = \frac{3}{900}.$$

Então

$$S = 1,52 + \frac{3}{900} = \frac{152}{100} + \frac{3}{900} = \frac{1371}{900}.$$

Exemplo 2.32. *Determine E, sabendo que* $E = \sqrt{2\sqrt{7\sqrt{2\sqrt{7\sqrt{2\sqrt{7\sqrt{\ldots}}}}}}}$

Para determinar o valor de E, iniciaremos transformando todas as raízes em forma de potência, então teremos

$$\begin{aligned} E &= 2^{\frac{1}{2}}.7^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{8}}.7^{\frac{1}{16}}.2^{\frac{1}{32}}.7^{\frac{1}{64}}\ldots \\ &= (2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{8}}.2^{\frac{1}{32}}\ldots).(7^{\frac{1}{4}}.7^{\frac{1}{16}}.7^{\frac{1}{64}}\ldots) \\ &= (2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots}).(7^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots}). \end{aligned}$$

Percebemos que os expoentes das bases 2 e 7 são somas infinitas de PG e aplicando 2.3.3, então temos que

Na base 2, teremos expoente igual a

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Na base 7, teremos expoente igual a

$$S = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Substituindo em 2.8 , teremos

$$E = 2^{\frac{2}{3}}.7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{28}.$$

Então, temos que $E = \sqrt[3]{28}$.

Exemplo 2.33. *No interior de uma sala, na forma de um paralelepípedo com altura h, empilham-se cubos com arestas de medidas* $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$ *e assim por diante, como mostra a figura.*

O menor valor para a altura h, se o empilhamento pudesse ser feito indefinidamente, é

Aplicando a da soma dos termos da PG infinita temos,

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Exemplo 2.34. *O limite da soma* $0,3 + 0,03 + 0,003 + ...$ *é o limite da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão* $q = 0,1$. *Esse limite vale*

$$0,3 + 0,03 + 0,003 + ... = \frac{0,3}{1-0,1} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 2.35. *Dada a PG* $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...)$, *obtenha a soma de todos os seus termos.*

Solução: Temos que:

Observamos que o $a_1 = 1$ *e a razão* $q = \frac{1}{2}$,

Aplicando na fórmula.

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Exemplo 2.36. *Resolva a equação:*

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + ... = 16$$

Solução:

Observe que o primeiro membro da igualdade é a soma dos infinitos termos de uma PG decrescente de razão $q = \frac{1}{2}$. *Para resolvermos a equação precisamos determinar qual a soma dos termos do primeiro membro da igualdade. Para isso utilizaremos a fórmula da soma dos termos da PG infinita.*

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{1-q} \\ S &= \frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} \\
S &= \frac{x}{2}.\frac{2}{1} \\
S &= x
\end{aligned}
$$

Dessa forma teremos que x=16, logo a solução será 16.

2.3.4 Produto dos n primeiros termos de uma PG

Considere a PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de razão q, como a ordem dos fatores não altera o produto, podemos escrever

$$P_n = a_1.a_2.a_3....a_{n-1}.a_n$$

ou

$$P_n = a_n.a_{n-1}....a_3.a_2.a_1$$

Multiplicando membro a membro essas duas igualdades e associando os fatores, tem-se:

$$(P_n)^2 = (a_1.a_n).(a_2.a_{n-1}).(a_3.a_{n-2})...(a_{n-1}.a_2).(a_n.a_1)$$

Observe que os fatores dentro dos parênteses são termos equidistantes dos extremos e pela propriedade 2.20 o produto deles é igual a $(a_1.a_n)$, então temos que

$$(P_n)^2 = \underbrace{(a_1.a_n)\cdots(a_1.a_n)}_{n \text{ vezes}} \leftrightarrow (P_n)^2 = (a_1.a_n)^n$$

Também poderíamos calcular o produto, fazendo o seguinte,

$$
\begin{aligned}
P_n &= a_1.a_2.a_3....a_{n-1}.a_n \Leftrightarrow \\
&= a_1.(a_1.q).(a_1.q^2)....(a_1.q^{n-1}) \Leftrightarrow \\
&= a_1^n.q^{1+2+3+...+(n-1)} \Leftrightarrow \\
&= a_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.37. *Determine o produto dos* 10 *primeiros termos da PG* $(10, 10^2, 10^3, ...)$.

Solução: Aplicando 2.8, temos que

$$
\begin{aligned}
P_n &= 10^{10}.10^{\frac{10(10-1)}{2}} \\
&= 10^{10}.10^{45} \\
&= 10^{55}.
\end{aligned}
$$

2.3.5 Aplicações da definição de PG

Alguns problemas de taxa de crescimento podem ser resolvidos aplicando-se diretamente a definição de PG , conforme será visto nos exemplos a seguir:

Exemplo 2.38. *O deficit habitacional é um dos grandes problemas sociais que vem afetando o Brasil nas últimas décadas. Para saber mais sobre isso e apontar soluções é de fundamental importância que se tenha informações a respeito do crescimento populacional brasileiro. Considerando que a população Brasileira em* 2030 *SERÁ de aproximadamente* 240.000.000 *e que a partir desse ano passará a crescer a uma taxa de 1% a cada década, qual será a população em 2060?*

Solução:

Sabendo que a população em 2030 de aproximadamente 240.000.000, vamos considerar como primeiro termo então $a_1 = 240.000.000$ e a o crescimento a cada década é 1% então a razão $q = 1,01$, queremos encontrar a população em 2060 que será o termo a_4 da sequência, logo aplicando 2.3.1 temos

$$\begin{aligned} a_n &= a_1.q^{n-1} \\ a_4 &= 240.000.000.1,01^3 \\ &= 249.744.962,4 \end{aligned}$$

A população em 2060 será de aproximadamente 249.744.962 pessoas.

Exemplo 2.39. *Uma metalúrgica produziu, no ano de* $2013, 200$ *peças de grande porte para a indústria naval. As vendas dessas peças têm projeção de crescimento de* 5% *ao ano, em decorrência do crescimento da indústria naval no mesmo patamar para os próximos anos. Qual deverá ser a produção anual de peças de grande porte dessa metalúrgica, para atendimento à demanda da industrial naval em* 2020*, considerando que a sua carteira de cliente se manteve inalterada?*

Solução:

Sabendo que a produção em 2013 foi de 200 peças, vamos considerar como primeiro termo então $a_1 = 200$ e a o crescimento anual é 5% então a razão $q = 1,05$, queremos encontrar a produção em 2020 que será o termo a_8 da sequência, logo aplicando 2.3.1 temos

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

$$
\begin{aligned}
a_8 &= 200.1,05^7 \\
&= 281,42.
\end{aligned}
$$

A produção em 2030 será de aproximadamente 281 pessoas.

Observação 2.26. *Progressão Geométrica de Ordem Superior* ***Operador Quociente*** *Denotemos por $\bigtriangledown$ o operador quociente em sequências:*

$$\bigtriangledown b_n := \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

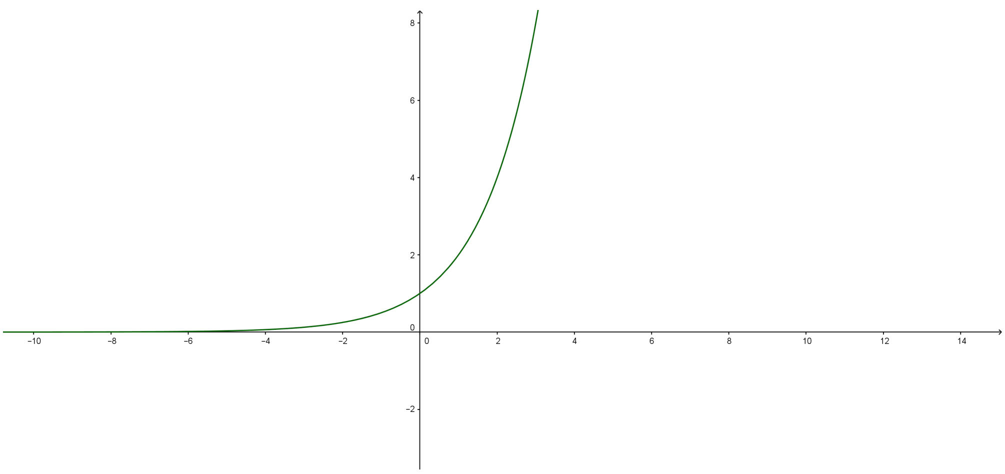
Logo a sequência (b_n) é uma progressão geométrica se e só se $(\bigtriangledown b_n) = (\frac{b_{n+1}}{b_n})$ é constante.

Uma sequência (b_n) na qual a sequência dos quocientes $(\bigtriangledown b_n)$=$(\frac{b_{n+1}}{b_n})$ é uma progressão geométrica de primeira ordem, denominamos por progressão geométrica de segunda ordem.

Generalizando, podemos dizer que uma progressão geométrica de ordem K, com $K \geq 2$, é uma sequência na qual os quocientes entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão geométrica de ordem $k-1$.

2.3.6 Interpretação Geométrica de uma Progressão Geométrica

Já vimos que o termo geral de uma progressão geométrica é dsdo por $a_n = a_1.q^{n-1}$ ou por $a_n = a_0.q^n$ quando começamos a enumeração dos temos por a_0. Nesse caso, podemos pensar em PG como uma função que associa a dada número natural n o valor dado por $a_n = a_0.q^n$. Essa função é a restrição aos números naturais da função exponencial $a(x) = a_n.q^x$. O gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma exponencial.



2.4 Matemática Financeira e Progressões

Matemática Financeira é um ramo da Matemática Aplicada que estuda a variação do dinheiro em função do tempo, tendo como objetivo principal verificar e quantificar as transações do mercado financeiro, tomando como base a variável tempo, onde o indivíduo adquire o conhecimento e recursos que lhe possibilite decidir como utilizar seu dinheiro. A sua importância é indiscutível no cotidiano das pessoas.

Nesta seção, apresentaremos a relação entre os conceitos da Matemática Financeira e progressões aritmética e geométrica no Ensino Médio. Trataremos de maneira especial os conceitos de juros simples e compostos, que serão apresentados relacionando juro simples com progressão aritmética, enquanto os juros compostos são relacionados com a ideia de progressões geométricas. O juro simples é mais utilizado em situações de curto prazo, como na cobrança do cheque especial pelos bancos, enquanto em situações de prazo maior, a utilização dos juros compostos é dominante no mercado financeiro, devido a sua maior lucratividade.

Numa situação em que há empréstimo de dinheiro para devolução depois de um certo número de períodos, este poderá ocorrer de duas formas:

- Baseado no sistema de juros simples, em que os juros correspondentes a cada período são constantes e iguais ao valor calculado no fim do primeiro período. Dessa forma, no fim do primeiro período, os juros são calculados sobre o capital inicial C e acrescidos a este resultando no montante M_1. No fim do segundo período, o mesmo juros serão acrescidos ao montante M_1, resultando montante M_2, e assim por diante até o fim dos períodos contratados, em que o capital emprestado terá se transformado no montante M_n e esses montantes serão crescentes formando uma progressão aritmética.

- Baseado no sistema de juros compostos, em que os juros correspondentes a cada período são crescentes e o valor calculado no fim de cada período sobre o montante. Dessa forma, no fim do primeiro período, os juros são acrescidos ao capital inicial C, resulta no montante M_1. No fim do segundo período, o juros serão calculados sobre o montante M_1 e acrescidos a ele, resultando montante M_2, e assim por diante até o fim dos períodos contratados, em que o capital emprestado terá se transformado no montante M_n e esses montantes serão crescentes formando uma progressão geométricas.

2.4.1 Juros Simples

Definição 2.15. *Definimos como juros simples, aquele que a taxa de juros incide sempre sobre o capital inicial, obtendo assim o mesmo juro por período.*

Consideremos C o capital inicial, i a taxa de juros sob forma unitária e n o tempo de aplicação, expresso em número de períodos a que se refere a taxa considerada, o total de juros J, é dado pela seguinte Equação

$$J = C.i.n.$$

Consequentemente, a soma do capital inicial acrescido dos juros, é chamado de montante. Denotado por M, é dado por

$$M = C(1 + in)$$

Podemos obter o montante a partir da Equação termo geral da progressão aritmética, observando que $a_1 = C$ e o juro é constante, logo $J = C.i = r$ e além disso que como os juros são sempre positivo teremos uma PA crescente. Vamos observar que a cada mês teremos um novo montante e o n-ésimo termo da sequência dos montantes corresponde ao $(n+1)$-ésimo termo da PA. Aplicando-se a Equação 2.6, temos

$$M_n = a_{n+1} = a_1 + [(n+1) - 1]r = a_1 + nr.$$

Substituindo $a_1 = C$ e $r = C.i$ na Equação 2.4.1, temos que

$$M = C + C.i.n = C(1 + i.n).$$

Exemplo 2.40. *Considere que um determinado banco conceda um empréstimo na quantia de* $R\$100,00$*, a um taxa de* 10% *ao mês, a juros simples durante* 12 *meses, vamos encontrar o valor a ser devolvido pelo cliente após o período*

Aplicando a Equação 2.4.1 temos que,

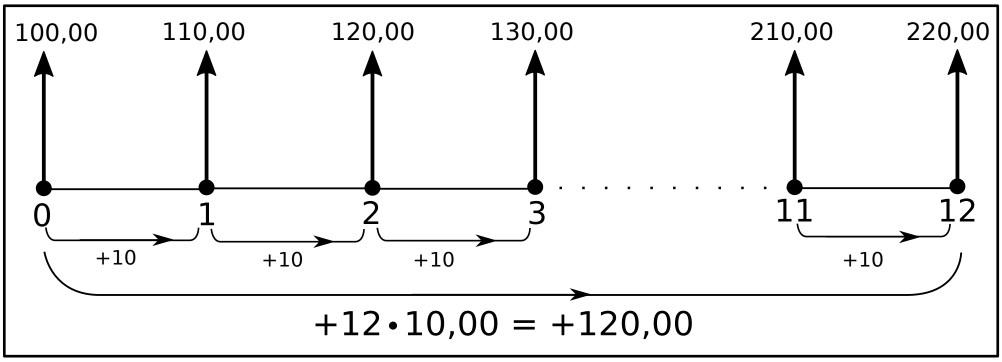
$$J = cin = 100.0, 1.12 = 120$$

. Portanto o juros é R$ 120,00. Agora, calculando o montante e aplicando a Equação 2.4.1 temos que

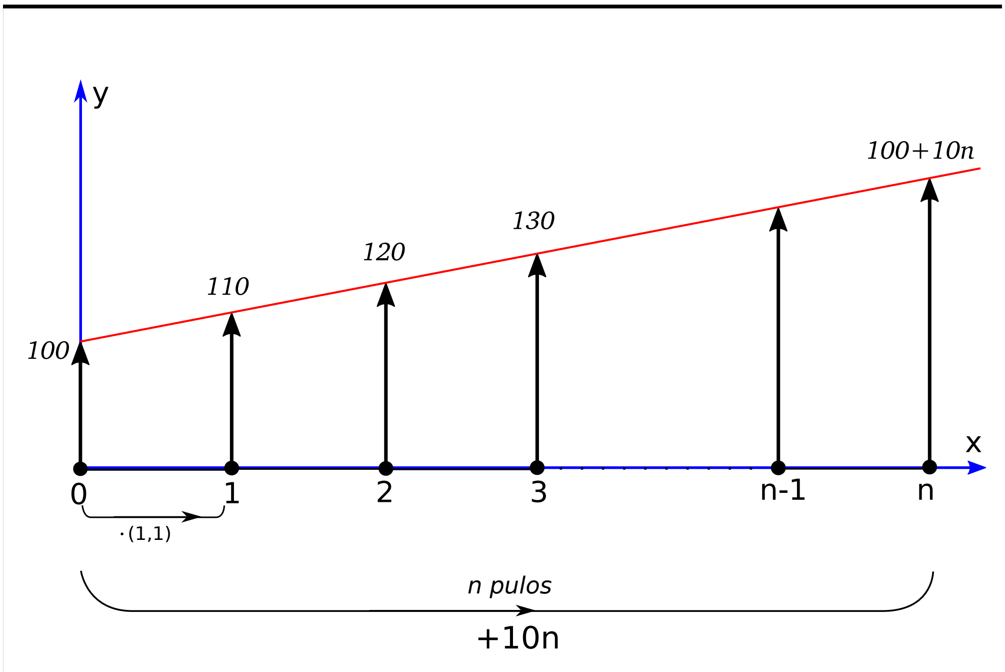
$$M = C(1 + in) = 100(1 + 0, 1.12) = 220.00$$

.

logo o Montante a ser pago será R$220,00. Vamos vê essa mesma situação na tabela abaixo



Generalizando para n períodos, teríamos o seguinte gráfico



Exemplo 2.41. *Um cidadão aplica, mensalmente, e durante oito meses, uma quantia fixa de $R\$200,00$, a juros simples de 5%. Ao final, depois dos oito meses de aplicação, quanto terá acumu-*

lado essa pessoa? Os $R\$200,00$ *depositados no primeiro mês tornam-se* $R\$210,00$*, no segundo mês,* $R\$220,00$*, no terceiro mês, e assim por diante, tornando-se, ao final,* $R\$280,00$*. Os* $R\$200,00$ *depositados no segundo mês, de modo análogo, convertem-se em* $R\$270,00$*, ao final de sete meses de aplicação. Seguindo o raciocínio, o saldo final da aplicação será o resultado da adição dos valores da última coluna da tabela, que são os termos de uma progressão aritmética:*

$$Saldofinal = 210 + 220 + 230 + 240 + 250 + 260 + 270 + 280$$

A soma dos valores da última coluna da tabela fornece o total capitalizado. trata-se da soma dos termos de uma progressão aritmética de razão 10*.*

Observe a tabela 2.1

Mês	0	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
capital	200	210	220	230	240	250	260	270	280
		200	210	220	230	240	250	260	270
			200	210	220	230	240	250	260
				200	210	220	230	240	250
					200	210	220	230	240
						200	210	220	230
							200	210	220
								200	210

Tabela 2.1: Tabela de Capitalização Juros Simples.

Exemplo 2.42. *Qual o montante final de uma aplicação de R\$ 5000,00, a juros simples contratados à 1,5% ao mês, por 10 meses?*

Temos que $i = 0,015$, $n = 10$ e $C = 5000$

Então,

$$M = 5000(1 + 0,015.10) = 5000.1,15 = 5750$$

Logo o montante final será R\$5750,00.

Observação 2.27. *No exemplo acima, outra solução seria a seguinte: Como a taxa de juros é de* $1,5\%$ *ao mês, então o crescimento mensal e constante(razão) que será de* $J = 0,015.5000 = 75$*, que ao multiplicarmos pelo período* $n = 10$*, encontramos o juros total R\$750. Assim somando-se este valor ao inicial, teríamos então o valor procurado.*

2.4.2 Juros compostos

Definição 2.16. *Definimos como juros compostos, aquele que a taxa de juros incide sempre sobre o montante ao final de cada período.*

Pela definição no fim do primeiro período teremos juros devido somente ao capital, então, podemos usar a Equação de juros simples com $n = 1$ para calcular o montante ao fim do primeiro mês, ou seja, $M_1 = C(1+i.1)$. No período seguinte, segue-se que serão formados juros iguais a $i.M_1$. Logo o montante ao final do período M_2 será de $M_2 = M_1.(1 + i) = C.(1 + i).(1 + i) = C.(1 + i)^2$. Então percebemos que o total de capital no final de n períodos a taxa i, denotado por M_n e que se denomina montante (M) da aplicação do principal C, será dado por

$$M = C.\underbrace{((1+i))\cdots((1+i))}_{n\text{ vezes}} = C(1+i)^n$$

.

Além disso, sabemos que $M = C + J$, então concluímos que $J = M - C$, portanto

$$\begin{aligned} J &= C(1+i)^n - C \\ &= C[(1+i)^n - 1]. \end{aligned}$$

Exemplo 2.43. *Vamos entender mais um pouco resolvendo o seguinte problema: A quantia de R*$\$100,00$*, emprestada a* 10% *ao ano, durante* 12 *meses a juros compostos, determine o juro do período e o montante ao final.*

Solução: Aplicando 2.8 temos que,

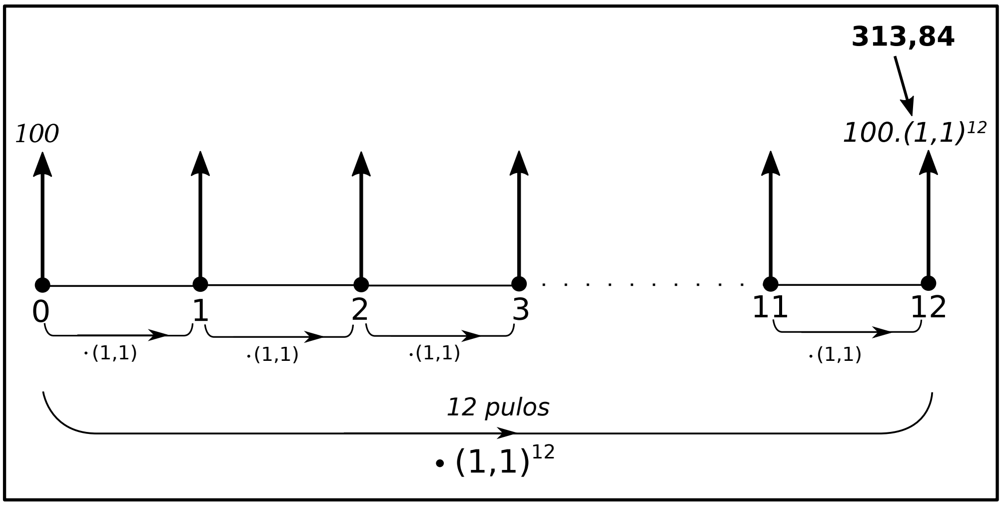
$$J = C[(1+i)^n - 1] = 100[(1+0,1)^{12} - 1] = 213,84.$$

Portanto o juros é R$ 213,84.

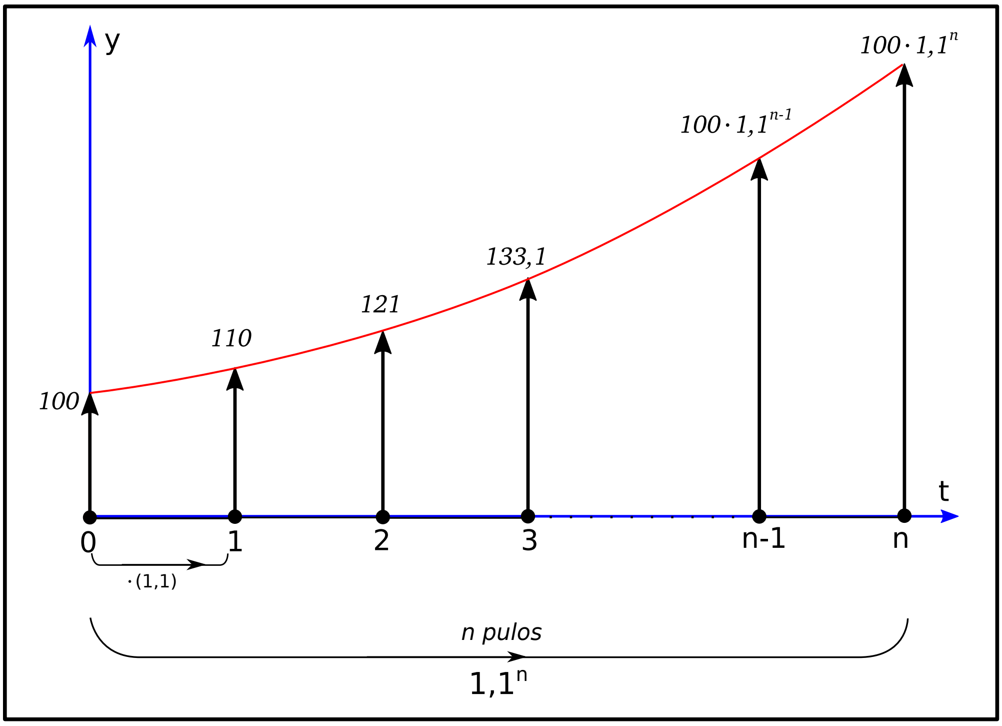
Agora, calculando o montante e aplicando 2.4.2 temos que

$$M = C(1+i)^n = 100(1+0,1)^{12} = 313,84.$$

logo o Montante a ser pago será R$313,84. Vamos vê essa mesma situação na tabela abaixo



Generalizando para n períodos, teríamos



Exemplo 2.44. *Um cidadão aplique, mensalmente, e durante oito meses, uma quantia fixa de $R\$200,00$, a juros compostos de 5%. Ao final, depois dos oito meses de aplicação essa pessoa terá um capital acumulado de*

Uma capitalização a juros compostos, o esquema de resolução será similar ao juros simples, variando apenas a forma de crescimento das parcelas aplicadas. Em relação ao problema anterior, *alterando apenas a forma de incidência da taxa de juros, de simples para compostos, temos a seguinte tabela A tabela 2.2 abaixo refere-se ao problema resolvido acima*

Mês	0	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
capital	200,00	$210,00$	$220,50$	$231,52$	$243,1$	$255,26$	$268,02$	$281,42$	$295,49$
		200,00	$210,00$	$220,50$	$231,52$	$243,10$	$255,26$	$268,02$	$281,42$
			200,00	$210,00$	$220,50$	$231,52$	$243,10$	$255,26$	$268,02$
				200,00	$210,00$	$220,50$	$231,52$	$243,10$	$255,26$
					200,00	$210,00$	$220,50$	$231,52$	$243,10$
						200,00	$210,00$	220,50	$231,52$
							200,00	$210,00$	$220,50$
								200,00	$210,00$

Tabela 2.2: Tabela de Capitalização Juros Compostos.

A soma dos valores da última coluna da tabela fornece o total capitalizado. Trata-se da soma dos termos de uma progressão geométrica de razão 1,05.

$$S = 200.(1,05 + 1,05^2 + 1,05^3 + 1,05^4 + 1,05^5 + 1,05^6 + 1,05^7 + 1,05^8) = 2005,31$$

2.4.3 Sistemas de amortização

Um financiamento ou um empréstimo são praticados o uso de tabelas para calcular os valores a serem pagos pelos clientes das financeiras, nesse tipo de crédito são aplicados Juros Compostos, ou seja, o pagamento dos juros incidirão sobre o saldo devedor. Cada prestação corresponderá à soma da parcela de amortização da dívida com os juros decorrentes do período. Nesse contexto, a amortização de uma dívida pode ser definida como um processo de sua extinção por meio de pagamentos periódicos para a instituição financeira, essas formas de devolução do principal agregadas com os juros denominam-se Sistemas de Amortização. No Brasil, usam-se comumente as Tabelas Price (Sistema Francês) e SAC (Sistema de Amrortização Constante). Iremos fazer um breve estudo sobre tais tabelas e mostraremos um exemplo para cada situação.

Conceitos básicos das tabelas:

- Capital ou Principal (C): é o valor emprestado. ´
- Parcelas de Amortização(A): Corresponde as parcelas de devolução do principal, ou seja, do capital emprestado.
- Juro (J): é o ganho sobre capital investido.

- Taxa de juro (i): Capitalização percentual sobre o saldo devedor no período.
- Período (n): Tempo para devolução do Capital.
- Saldo Devedor (S_k): é o valor devido em um certo período k. ´
- Prestação (P_k): é o pagamento da amortização mais o juro relativo ao saldo devedor imediatamente anterior ao período referente a prestação. Neste ponto é importante observar que a prestação referente a um período k pode ser representada como $P_k = A_k + J_k$.

Observação 2.28. *Escrevemos PMT para abreviar Prestação Mensal Temporária*

TABELA PRICE

Neste sistema valor das prestações é realizados em uma série de pagamentos iguais e sucessivos, onde cada prestação é calculada pela seguinte equação

$$PMT = C.\frac{[(1+i)^n.i]}{[(1+i^n)-1]}$$

e o Juros mensal é calculado pela fórmula

$$J = i.S_k$$

A Tabela Price se caracteriza por apresentar juros decrescentes e amortização crescente, de forma que o valor da prestação, que é a soma da parcela de amortização e de juros seja constante.

Exemplo 2.45. *Um empréstimo de R\$250.000, 00 deve ser devolvido pelo Sistema Price em 50 prestações mensais, sendo a primeira um mês após a contratação do empréstimo, à taxa de juros compostos de 2% ao mês.*

Solução:

Devemos calcular a PMT usando a fórmula 2.4.3, então temos

$$\begin{aligned} PMT &= C.\frac{[(1+i)^n.i]}{[(1+i^n)-1]} \\ &= 250000.\frac{[(1+0,02)^{50}.0,02]}{[(1+0,02^{50})-1]} \\ &= 7955,80. \end{aligned}$$

Calcularemos o juros mensal aplicamos a fórmula 2.4.3, a Amortização que é a diferença entre a PMT e o juros. Resolvendo esses cálculos teremos a seguinte tabela 2.3.

K	P_k	J_k	A	S_d
0	-	-	-	$250000,00$
1	$7955,80$	$5000,00$	$2955,80$	$247044,20$
2	$7955,80$	$4940,88$	$3014,92$	$244029,28$
3	$7955,80$	$4880,58$	$3075,21$	$240954,06$
...	...	...	...	...
49	$7955,80$	$308,94$	$7646,86$	$7800,01$
50	$7955,80$	$156,00$	$7799,80$	$0,21$

Tabela 2.3: SISTEMA FRÂNCES

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

Neste sistema de amortização as parcelas são iguais entre si, ou seja,

$$A = \frac{C}{n}$$

Por definição, como a amortização é constante e o juro incide sobre o saldo devedor, as prestações tem valores decrescentes a cada período, sob forma de progressão aritmética. A última de amortização igual ao saldo devedor após o pagamento da penúltima prestação. Vamos utilizar o mesmo anterior

Exemplo 2.46. *Um empréstimo de R\$250.000, 00 deve ser devolvido pelo SAC em 50 prestações mensais, sendo a primeira um mês após a contratação do empréstimo, à taxa de juros compostos de 2% ao mês.*

Solução:

Devemos calcula a amortização usando a fórmula 2.4.3, então temos

$$\begin{aligned} A = \frac{C}{n} & \\ &= \frac{250000}{50} \\ &= 5000. \end{aligned}$$

Calcularemos o juros mensal aplicamos a fórmula 2.4.3, a PMT que é a soma entre a amortização e o juros. Resolvendo esses cálculos teremos a seguinte tabela 2.3.

K	P_k	J_k	A	S_d
0	-	-	-	$250000,00$
1	$10000,00$	$5000,00$	$5000,00$	$245000,00$
2	$9900,00$	$4900,00$	$5000,00$	$240000,00$
3	$9800,00$	$4800,00$	$5000,00$	$235000,00$
...	...	...	...	...
49	$5200,00$	$200,00$	$5000,00$	$10000,00$
50	$5100,00$	$100,00$	$5000,00$	$0,00$

Tabela 2.4: SISTEMA AMORTIZAÇÃO CONSTANTE

Capítulo 3

Propostas Didáticas

Algumas propostas didáticas que servirão de base aos professores de matemática no ensino médio:

As propostas não tratam de atividades meramente expositivas, durante as quais o professor explica e exemplifica, sem a participação ativa do estudante, mas de momentos com interação e construção a partir da análise e elaboração de respostas, desenvolvendo habilidades de raciocínio lógico, de maneira lúdica, através de trabalhos em grupo, tornando, assim 0 processo de ensino e aprendizagem muito mais produtivo.

Atividades:

PROPOSTA 1: Dinâmica da torre de Hanói

SÉRIE: 2º ano do ensino Médio.

TEMPO PREVISTO: 50 minutos

CONTEÚDO: Sucessões ou Sequência Numérica

OBJETIVO:

- Organizar sequências numéricas a partir das regras ligadas ao jogo Torre de Hanói.
- Explorar conceitos matemáticos que estão inteiramente ligadas às regras do problema.

RECURSO: Material manipulável (torre de Hanói); vídeo retirado do site e livro didatico.

PROCEDIMENTOS:

Será feita uma sondagem sobre o que os alunos entendem por sequências numéricas e classificação. Posteriormente, exploraremos o conteúdo com exemplos. Os alunos serão convidados a refletirem em que situação do cotidiano é encontrada a exemplificação de sequências de qualquer tipo. Previamente, os alunos serão orientados a prestar atenção nos movimentos de cada peça, nas regras, na organização estrutural do jogo Torre de Hanói; analisando as estratégias e fazendo associação com o conteúdo inicial da aula. Em seguida, será exibido um vídeo retirado da internet, contando um pouco sobre a lenda da torre de Hanói (https://www.youtube.com/watch?v=BUGmNmaY8qM).

Depois de ter passado o vídeo, os alunos terão 5 minutos para fazer o conhecimento do material manipulável. Pediremos que a turma organize-se em grupos de 4 alunos (de acordo com o número de alunos em sala) e cada grupo recebera o material manipulável, os grupos serão desafiados a realizar a atividade sugerida.

Resolver o problema da Torre de Hanói utilizando seis discos, com regras propostas no vídeo:

Só é possível mover um disco por vez.

Um disco deve estar sempre em uma das três hastes ou em movimento.

Um disco maior não pode ser colocado sobre o disco menor.

Obviamente terão dificuldades em jogar, sugerimos que iniciem com menos peças. Primeiro com uma peça e observar qual o número mínimo de movimentos necessários para transportar a torre da primeira para a terceira haste (pino).Fazer o mesmo com duas peças, depois com três, até usarem todas as seis

Utilizando uma tabela oferecida pelo docente, os alunos anotarão os movimentos dos discos, para depois realizar uma discussão com seus componentes de grupos, para descobrir a estratégia ideal na resolução da sequência que forma a torre, utilizando um tempo de 10 minutos.

Por fim, proporemos aos grupos que descrevam a expressão geral da sequência da torre de Hanói, a partir das observações, investigações e discussões realizadas por eles dentro da sala de aula, utilizando a linguagem simbólica presente nos livros didáticos. Para exercitarem este conhecimento adquirido, será lançado o desafio trocando ideias que são questionamento baseado no recurso torre de Hanói.

É possível chegar ao objetivo desejado?

Caso seja possível atingir o objetivo, qual o menor número de movimentos necessários para tal?

Existe, nessa atividade, alguma relação matemática entre o número de peças da torre n e o número necessário para efetuar a sua transferência T_n da primeira haste para terceira haste? Existe uma função matemática T_n da variável n?

Se caso as peças estejam organizada em ordem crescente, a expressão geral será a mesma?

Como seria a estratégias mais simples para atingirmos o objetivo final quando mudamos o número de peças?

Esse número mínimo T_n é o mesmo quando tomamos como haste final qualquer das duas hastes que se encontra vazio no inicio da atividade?

AVALIAÇÃO: A avaliação é um processo contínuo e acontecerá desde o início da aula, com a verificação da participação, interesse e envolvimento com etapas propostas.

REFERÊNCIA:

SILVA, Cledvan Marques da. et al. *LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA*. Universidade Federal de Sergipe.

PROPOSTA 2: O paradoxo de Aquiles e a tartaruga.

Como exemplo de uma atividade instigante para tratar do conteúdo, segue a proposta elaborada por Ana Cecília Sanches Cerqueira [4], aqui utilizada com algumas adaptações.

O famoso paradoxo de Zenão sobre a corrida fantasiosa entre Aquiles e uma tartaruga.

Para mostrar a seus adversários no que consistia a unidade ou repouso do ser, evidenciando que o movimento ou pluralidade é impossível, Zenão inventou os paradoxos(para= contra; doxo: opinião). A solução clássica para esse paradoxo envolve a utilização do conceito de limite e convergência e pode ser satisfatoriamente trabalhado com alunos do Ensino médio. O paradoxo surge ao supor intuitivamente que se a soma de infinitos intervalos de tempo é infinita, de tal forma que seria necessária passar o tempo infinito para Aquiles alcançar a tartaruga. No entanto, os infinitos intervalos de tempo descritos no paradoxo, formam uma progressão Geométrica e sua soma converge para um valor finito, em que Aquiles encontra a tartaruga. A proposta à ser desenvolvida com os alunos encontra-se detalhada no plano de aula abaixo:

PÚBLICO ALVO: ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

CONTEÚDO: SOMA DE INFINITOS TERMOS DA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

RECURSOS PEDAGÓGICOS: LABORATÓRIO DE INFORMÁTICA, LOUSA

REFERÊNCIAL TEÓRICO:

OBJETIVO GERAL: DESENVOLVER COM OS ALUNOS A NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITES DE UMA SEQUÊNCIA

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1. Apresentar o paradoxo de Zenão, enfocando especialmente o problema da corrida entre Zenão e a tartaruga.

2. Explicar a aparente incapacidade de Aquiles em alcançar a tartaruga, utilizando a noção intuitiva de limites e a ideia de soma de infinitos termos de uma progressão geométrica.

Conteúdo: Soma de infinitos termos de uma progressão geométrica; noção intuitiva de limite.

Desenvolvimento: A sequencia proposta desenvolver-se-à durante 3 aulas.

- Na primeira aula, os alunos pesquisarão no laboratório de informática sobre Zenão e seus paradoxos. Em grupos, farão a exposição e, ao final da aula, do resultado da pesquisa feita e, num debate mediado pelo professor, os alunos entenderão a importância do pensamento de Zenão e seus problemas (corrida de Aquiles, arco e flecha, fileiras em movimento, entre outros).

- Na segunda aula, o professor trará para classe uma variante do problema de Aquiles e da tartaruga pedindo aos alunos que, em grupo, elaborem estratégias matemáticas para explicar a aparente contradição existente. Após a discussão nos grupos, os alunos apresentarão as justificativas encontradas para a contradição. Após ouvir todos os grupos, o professor argumentará que a aparente contradição se explica porque a distância entre Aquiles e a tartaruga vai sempre diminuindo e que, apesar de serem considerados infinitos intervalos de espaços percorridos, a soma desses infintos intervalos é finita!

- Na terceira aula, o problema será abordado de maneira matemática com os alunos. Quando Aquiles vencer os 10000 m que o separa da tartaruga, terá avançado mais 100 m; quando Aquiles avançar os próximos 100 m que o separa da nova posição da tartaruga, terá avançado mais 1 m e assim sucessivamente. Por mais que sejamos capazes de medir infinitamente a distância entre Aquiles e a tartaruga, a sensação de que ela está sempre na frente se desfaz quando considera-se as somas dos espaços percorridos por Aquiles e pela tartaruga.

AVALIAÇÃO: A avaliação é um processo contínuo e acontecerá desde o início da aula, com a verificação da participação, interesse e envolvimento com etapas propostas.

PROPOSTA 3:

PÚBLICO ALVO: ENSINO MÉDIO

Esta proposta objetiva apresentar aos alunos procedimentos para se encontrar sequência por meio de equações e situações problematizadas do nosso cotidiano, com o uso de computadores para resolução dos problemas propostos pelo professor e depois formulando suas questões com seus conhecimentos adquiridos. Parte da atividade a ser desenvolvida será com o auxílio de planilhas eletrônicas (excel) onde os alunos serão incentivados a aprender a colocar fórmulas nas células para calcular os valores das sequências e representar na reta numérica.

REFERÊNCIAL TEÓRICO: Durante o desenvolvimento do trabalho, percebemos a dificuldade do entendimento do conceito e representação de sequência na reta numérica, sendo assim nota-se a necessidade de se deixar bem claro a definição de Sequências numéricas como uma sequência de números reais é definida a partir de um termo geral, que associa a cada número natural n a um número real x(n), deixando bem claro a representação do termo geral de uma sequência e sua representação na reta real.

CONTEÚDO: Sequências numéricas

META: Ao final dos estudos da disciplina espera-se que os alunos tenham entendido o conteúdo de sequência numérica de forma contextualizada com o seu cotidiano para que ser útil em sua vida real.

OBJETIVOS: **GERAL:** Apresentar o conceito de sequência numéricas e sua representação na reta real.

ESPECÍFICOS:

- Entender a definição de sequências numéricas;
- Representar sequências em reta numéricas;
- Ensinar a manipulação de planilhas eletrônicas (Excel);
- Retomar a resolução de problemas de aplicação de sequência numéricas.

DESENVOLVIMENTO: Esta é uma proposta para ser realizada em quatro aulas.

Na primeira aula, os alunos assistiram um vídeo sobre a história de sequência numéricas e discutiram sobre sequências sem ainda ter o conceito pré-definido para uma possível definição intuitiva onde ocorrerão debates sobre o vídeo. A turma será dividida em grupos e solicitado aos mesmos uma pesquisa sobre o conceito de sequência e alguns exemplos.

Na segunda aula, o professor abrirá o debate solicitando a algumas definições encontradas em suas pesquisas. Após esse momento o professor apresentará a definição formal, citará alguns exemplos e representações fazendo comparações com a pesquisa realizada, solicitará que os alunos resolvam esses exemplos propostos com as seguintes perguntas: Observando as sequências percebe-se alguma regularidade? Modifique os valores dados a n. A regularidade observada se mantém?

Na terceira aula o professor ensinará o uso de fórmulas, o cálculo de equações matemáticas e as ferramentas básicas para que o aluno use a planilha eletrônica corretamente. Na última aula desta proposta de trabalho, os alunos, em grupos, deverão construir as sequências estudadas na planilha e sua representação na reta.

METODOLOGIA: A disciplina será desenvolvida através de aulas expositivas, debates e pesquisa em grupo.

AVALIAÇÃO: A avaliação será contínua durante o desenvolvimento da aula, sendo considerada a participação do aluno nas atividades realizadas. Pretendemos usar os seguintes instrumentos de avaliação no decorrer da aula: atividade individual escrita; atividade em grupo escrita e oral.

RECURSO PEDAGÓGICOS: Laboratório de informática, Lousa digital, internet.

REFERÊNCIAS:

CELESTINO, Marcos Roberto. Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior, Tese de doutorado, São Paulo, 2008.

OLIVEIRA, Fábio Barbosa de. Modelagem e Sequências Numéricas. Universidade Federal do Piauí. 2013.

PROPOSTA 4:

PÚBLICO ALVO: ENSINO MÉDIO

Esta proposta objetiva apresentar aos alunos, um dos sistemas de pagamentos de um financiamento, o Sistema de amortização Constante (SAC) criando uma planilha de pagamentos, amortização, juros e Saldo devedor, com isso faz-se necessário entender o que significa "amortizar", ou seja, pagar aos poucos a dívida. E que essa dívida é paga em parcelas que são compostas pela amortização e os juros, e que os juros são calculados sobre o saldo devedor. Relacionar esse sistema de pagamentos com Progressão Aritmética é o objetivo principal desta atividade, observando os pagamentos. Parte da atividade a ser desenvolvida será com o auxílio de planilhas eletrônicas (Excel) onde os alunos serão incentivados a aprender a colocar fórmulas nas células para calcular os valores e criar uma tabela para representar os valores encontrados.

REFERÊNCIAL TEÓRICO: Durante o desenvolvimento do trabalho, mostra-se a ligação a real entre o Sistema de financiamento SAC e Progressão Aritmética.

CONTEÚDO: Progressão Aritmética e Sistema de Amortização Constante.

META: Ao final dos estudos da disciplina espera-se que os alunos tenham entendido o conteúdo de Progressão Aritmética de forma contextualizada com o seu cotidiano para que ser útil em sua vida real.

OBJETIVOS:

GERAL: Apresentar o conceito de Progressão Aritmética e sua relação com o cotidiano.

ESPECÍFICOS:

- Entender a definição de Progressão Aritmética;
- Desenvolver cálculos usando a equação do Termo Geral;
- Desenvolver cálculos usando a equação da Soma de n termos;
- Ensinar a manipulação de planilhas eletrônicas (Excel);
- Retomar a resolução de problemas de aplicação de equações da Progressão Aritmética;
- Criar uma Planilha para o cálculo das parcelas de um financiamento pela sistema de amortização constante.

DESENVOLVIMENTO: Esta é uma proposta para ser realizada em três aulas. Na primeira aula, uma breve revisão sobre sequências numéricas e a partir desse conceito já pré-definido introduzirmos a definição de que toda sequência de números reais (a_n), na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior, a partir do segundo termo é constante é chamada de Progressão Aritmética. Essa diferença constante é chamada de razão da Progressão Aritmética e representada pela letra r. A turma será dividida em grupos e solicitado aos mesmos uma pesquisa sobre o conceito de Progressão Aritmética, classificação do comportamento e alguns exemplos. Na segunda aula, os alunos em grupos, deverão construir a planilha referente ao sistema de amortização constante, usando a planilha eletrônica (Excel): Divida a turma em grupos e apresente o caso de SAC, conforme abaixo.

O atual mercado financeiro oferece variadas operações de crédito para quem deseja financiar carro, imóveis, constituir um negócio próprio, investir na empresa, entre outras opções. As instituições financeiras oferecem um capital que deverá ser devolvido com juros durante o período pré-determinado. As formas de quitar o empréstimo são inúmeras, vamos abordar o funcionamento do sistema de amortizações constantes, que consiste no pagamento da dívida baseada em parcelas de amortizações iguais com prestações e juros decrescentes. Para entendermos melhor o SAC vamos construir uma tabela detalhada envolvendo uma determinada situação.

http://brasilescola.uol.com.br/matematica/sac-sistema-amortizacoes-constantes.htm

Vamos analisar o Caso de Silvio Antônio Costa: Silvio quer comprar um carro e decidiu comprar pelo SAC. O valor do carro é de $R\$40.000,00$ e ele dará de entrada o valor de seu carro, estimado em $R\$16.000,00$ pela própria agência que venderá o carro novo. Ele optou por um parcelamento em apenas 12 prestações, para usufruir de uma taxa de juros menor, igual a $0,8\%$ ao mês, e além disso não pagar TAC nem outras despesas adicionais. Preencha a tabela de amortização para esse sistema. Analisando o sistema de financiamento:

(a) Qual o primeiro passo para se montar a tabela de amortização no sistema SAC.

(b) As prestações decrescem em Progressão Aritmética? Por que? Qual a razão?

(c) Qual o comportamento das prestações ao longo do tempo?

(d) Qual o comportamento dos juros mensais pagos ao longo do tempo?

(e) Qual o comportamento do saldo devedor ao longo do tempo?

(f) Explique a relação entre os três comportamentos anteriormente observados.

(g) Se ele não desse o carro de entrada, em quantos reais a mais primeira prestação subiria? E as outras?

K	P_k	J_k	A	S_d
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

(h) Quais as vantagens e desvantagens do sistema SAC?

Na terceira aula o professor, deverá iniciar uma aula retomando a tabela apresentada na aula anterior mostrando que os valores referentes a Saldo devedor, Juros e prestação mensal formam uma progressão aritmética decrescente, mostrando assim uma importante relação entre o conteúdo e o nosso cotidiano. Nesse momento já poderão ser inseridos a classe as equações que determinam o Termo Geral ($a_n = a_1 + (n-1)r$) fazendo cálculo entre todas as sequências de valores que se encontram em PA.

METODOLOGIA: A disciplina será desenvolvida através de aulas expositivas, debates e pesquisa em grupo.

AVALIAÇÃO: A avaliação será contínua durante o desenvolvimento da aula, sendo considerada a participação do aluno nas atividades realizadas. Pretendemos usar os seguintes instrumentos de avaliação no decorrer da aula: atividade individual escrita; atividade em grupo escrita e oral.

RECURSO PEDAGÓGICOS: Laboratório de informática, Lousa digital, internet.

REFERÊNCIAS:

SOUZA, Herbert José Cavalcanti (2013), *Matemática Financeira: Uma aplicação direta no cotidiano.* Universidade Federal da Paraíba.

LIMA, Valéria Scomparim de. et al.*HISTÓRIA, CONCEITOS E APLICAÇÕES SOBRE PA e PG*

Apêndice A

Questionário

Neste apêndice mostraremos o questionário citado anteriormente e proposto por Celestino (ver [3]). Realizado com parte dos discentes de Engenharia Elétrica como fonte de pesquisa para sua Tese de Doutorado, onde a partir deste foram considerados os obstáculos e concepções dos sujeitos em relação a presença de alguns obstáculos em relação ao conceito de limite.

Questão 1 Considere as sequências cujo termo geral é dado. Escreva cada sequência designando seus oito primeiros termos, represente na reta real (use uma escala adequada quando necessário) e responda às questões com sim ou não:

Questão 2 Suponha que uma sequência a_n tem limite L, qual ou quais afirmações descrevem melhor esse fato:

(a) Os termos de uma sequência se aproximam, mas não ultrapassam o número L.

(b) O limite de uma sequência é exatamente L.

(c) O limite de uma sequência se aproxima de L.

(d) A sequência tende para L.

(e) A sequência atinge o limite L.

(f) A sequência não atinge o limite L.

a) $x_n = \frac{1}{n}$	Termos: 0		
Os termos da seqüência "cabem" em um intervalo?		Os termos da seqüência se aproximam de um número?	
b) $b_n = \frac{1}{5}$	Termos: 0		
Os termos da seqüência "cabem" em um intervalo?		Os termos da seqüência se aproximam de um número?	
c) $y_n = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 3 \\ 4, & \text{se } n > 3 \end{cases}$	Termos:		
Os termos da seqüência "cabem" em um intervalo?		Os termos da seqüência se aproximam de um número?	
d) $f : \mathrm{N} \to \Re$, $n \mapsto a(n) = 2n - 1$	Termos: 0		
Os termos da seqüência "cabem" em um intervalo?		Os termos da seqüência se aproximam de um número?	

(g) A sequência aproxima-se cada vez mais de L.

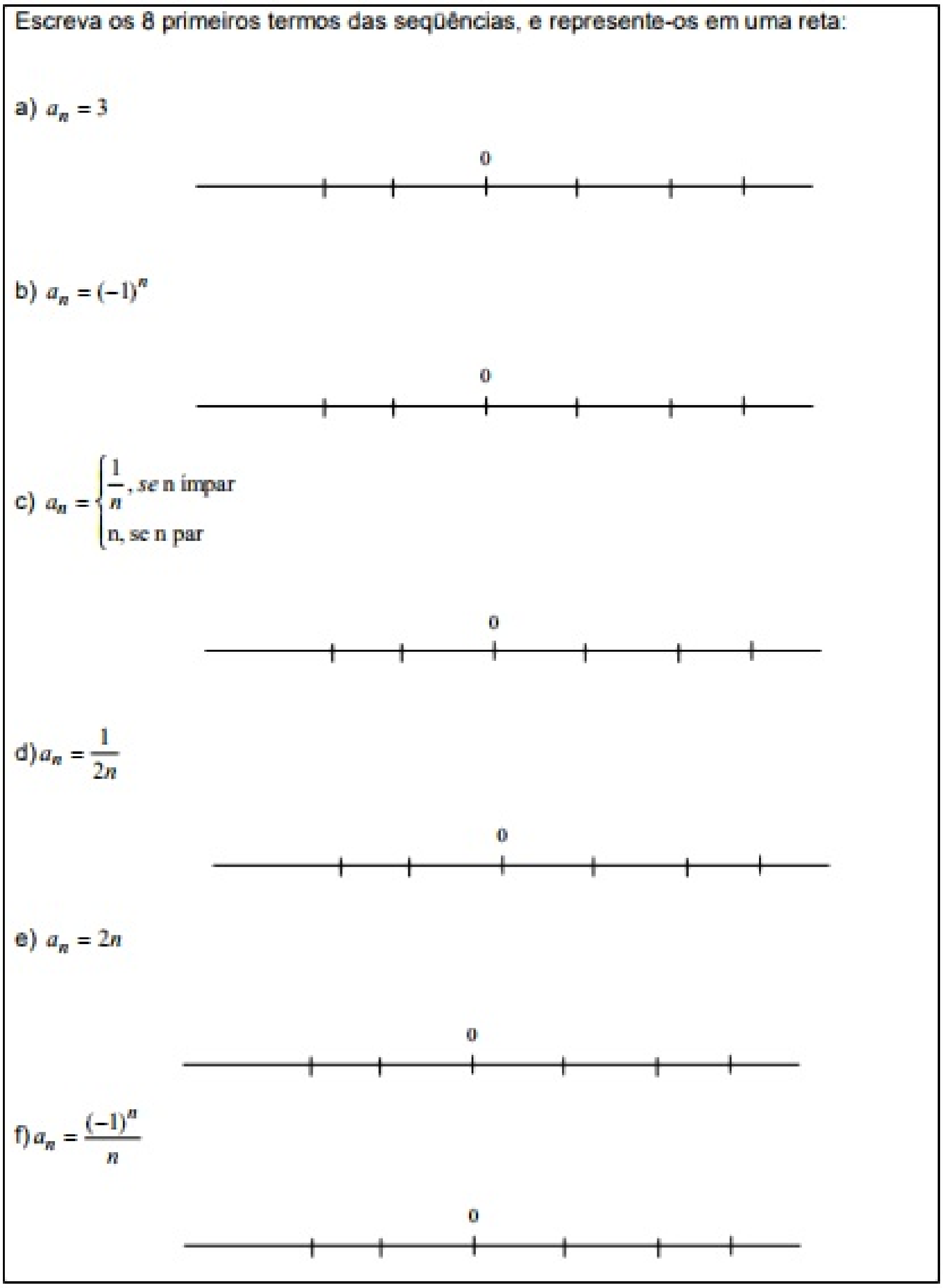
Questão 3

Questão 4 Classifique as sequências do exercício anterior de acordo com a tabela abaixo:(Complete todos os espaços escrevendo sim ou não)

Questão 5 Suponha que uma sequência a_n tem limite L, qual ou quais afirmações descrevem melhor esse fato:

(a) Os termos de uma sequência se aproximam, mas não ultrapassam o número L.

(b) O limite de uma sequência é exatamente L.



Escreva os 8 primeiros termos das seqüências, e represente-os em uma reta:

a) $a_n = 3$

b) $a_n = (-1)^n$

c) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, \textit{se}\ \text{n ímpar} \\ \text{n, se n par} \end{cases}$

d) $a_n = \dfrac{1}{2n}$

e) $a_n = 2n$

f) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

(c) O limite de uma sequência se aproxima de L.

(d) A sequência tende para L.

(e) A sequência atinge o limite L.

	Os termos "cabem" em um intervalo.	Seus termos "se aproximam" de algum número.	A seqüência tem limite.
(a) $a_n = 3$			
(b) $a_n = (-1)^n$			
(c) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, se \text{ n ímpar} \\ \text{n, se n par} \end{cases}$			
(d) $a_n = \frac{1}{2n}$			
(e) $a_n = 2n$			
$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$			

(f) A sequência não atinge o limite L.

(g) A sequência aproxima-se cada vez mais de L.

Questão 6 A finalidade aqui é confrontar se a definição escolhida se adequou bem a cada sequência anterior e obter do aluno uma definição para o limite que, na sua concepção, mostra-se adequada a todos os casos. Em cada item retomamos as afirmações apresentadas na Questão 5 juntamente com uma sequência. Diga se a sequência apresentada invalida a afirmação. Suponha que uma sequência a_n tem limite L , qual ou quais afirmações melhor descrevem este fato:

(a) A sequência $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ tem limite L? Qual o valor de L?

(b) A afirmação: "O limite de uma sequência é exatamente L"é adequada para descrever o limite da sequência, cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{2n}$?

(c) Para a sequência com termo geral $a_n = 3$, podemos afirmar que o limite da sequência se aproxima de L?

(d) Dada a sequência, cujo termo geral é $a_n = 2n$, podemos afirmar que "a sequencia tende para L"?

(e) Dada a sequência, cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{2n}$, podemos afirmar que "a sequencia atinge o limite L"?

(f) Dada a sequência, cujo termo geral é $a_n = 3$, podemos afirmar que "a sequencia não atinge o limite L"?

(g) Dada a sequência, cujo termo geral é $a_n = 3$, podemos afirmar que "a sequencia aproxima-se cada vez mais de L"?

Como vc descreveria o fato de uma sequência a_n ter limite L.

Questão 7 Assinale com VERDADEIRO (V) ou FALSO (F); explique sua resposta em cada caso (pode ser justificado exemplificando):

( ) Todas as sequências que tem seus termos contidos em um intervalo, tem limite.

( ) Quando n tende a infinito, o $\lim \frac{n}{n+1} = 1$

( ) Toda sequência que converge para um determinado L, tem limite.

( ) Uma sequência pode ter limite e não ser convergente.

( ) Quando n tende a infinito, o infinito o $\lim \frac{n}{n+1}$ se aproxima de 1.

( ) Uma sequência que é crescente, tem limite.

( ) Quando n tende a infinito, o infinito o $\lim \frac{n}{n+1}$ tende de 1.

( ) Uma sequência de termos estritamente positivos que tende a zero, é uma sequência decrescente.

( ) Uma sequência decrescente, cujos termos cabem em um intervalo, tem limite.

( ) Sempre é possível encontrar um intervalo que contenha os termos de uma sequência.

( ) Se uma sequência tem limite L qualquer intervalo que contêm L, também contém infinitos termos da sequência.

( ) Os termos de uma sequência constante se aproximam de um número.

Referências Bibliográficas

[1] ARAÚJO, Kécia Silva.*Uma proposta de abordagem dos conteúdos de sequências e séries no Ensino Médio*, Dissertação de Mestrado,Parnaíba, 2016.

[2] ARCHILIA, Sebastião. *Construção do termo geral da progressão aritmética pela observação e generalização de padrões.* Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

[3] CELESTINO, Marcos Roberto. *Concepções sobre limite: imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior*, Tese de doutorado, São Paulo, 2008.

[4] CERQUEIRA, Ana Cecília Sanches. *Um estudo sobre sequências e séries.* Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2013.

[5] CONCORDIDO, Cláudia Ferreira Reis.; BARBOSA, Augusto Cesar de Castro. *Uma proposta para o ensino de cálculo diferencial no ensino médio.* Disponível em: <http://www.editorarealize.com.br/revistas/ceduce/trabalhos/TRABALHO_EV047_MD1_SA3_ID1586_270520151 Acesso em 05 maio 2017.

[6] CHICONATO, Daniele Cristina. *Despoluição de um lago- progressão geométrica*, Dissertação de mestrado profissional , SÃO CARLOS,2013

[7] CUNHA, João Francisco Everton. *Sequências e séries: abordagem e aplicações no ensino médio.* Universidade Federal do Maranhão, 2014.

[8] CUNHA, Márcio Macário da (2013). *Progressão aritmética Geométrica e fractais.* Universidade Federal do Mato Grosso do Sul.

[9] ESCADA, Flávio Alberto Louro. *Teoria de Ramsey em Progressões e Recorrências de Ordem Superior. Planificação de Subunidade relativa ao Tema III - Sucessões reais.*, Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em Ensino da Matemática no 3° ciclo Básico e no Ensino Secundário, Covilhã, Julho de 2012.

[10] FERREIRA, Alexandre Maia.*Resgate da inserção das noções elementares do cáclculo em particular, das noções de limite) durante o ensino médio*, Dissertação de mestrado, Vitória, 2014.

[11] FONSECA, Daniel França(2013). *Aspectos estruturais e históricos que relacionam a música e a matemática: Uma abordagem interdisciplinar para a aplicação de médias, progressões e, em especial os logaritmos, no ensino médio.* Universidade Federal de Lavras.

[12] GARCIA, Roney Rojer Ortiz(2013). *Progressão aritmética aplicada no financiamento de imóveis.* Universidade Federal Da Grande Dourados.

[13] GOMES, E.B.(2005) *A história da Matemática como Metodologia de Ensino: Perspectiva Epistemológicas e Evolução de conceito.* Master´s degree dissertation. UFPA: Belém, Brazil.

[14] LIMA,Elon Lages. Conceituação,Manipulação e Aplicações. Revista do Professor de Matemática 41. IMPA RJ. (1999)

[15] LIMA,Elon L; CARVALHO,Paulo C P; WAGNER, Eduardo; e MORGADO,Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*(1998),1-64.

[16] LIMA, Valéria Scomparim de. et al.*História, conceitos e aplicações sobre PA e PG* Disponível em <https://matematica-online-clc.blogspot.com.br/2009/05/historia-conceitos-e-aplicacoes-sobre.html>. Acesso em 04 maio 2017.

[17] MACHADO, Ari Júnior dos Santos. *Limites e derivadas para o ensino médio* ,Dissertação de mestrado, Pará, 2013.

[18] MARIA,Otoniel Soares de. *Cálculo diferencial no ensino médio noções de limites, derivadas e aplicações.*, Dissertação de Mestrado, Rio Grande do Norte, 2013.

[19] OLIVEIRA, Fábio Barbosa de(2013) . *Modelagem e Sequências Numéricas.* Universidade Federal do Piauí.

[20] PEREIRA, Carolina Bonisson Cardoso(2013). *Sistemas de Amortização: uma abordagem para o ensino médio regular.* Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro.

[21] SANTOS, Gabriel Peres(2013). *Sequências Numéricas e Aplicações.* Universidade Federal do Espírito Santo.

[22] SENA, Anderson Silva. *Progressão Geométrica Integrada à função exponencial: Uma abordagem ao ensino médio*, Dissertação de mestrado, Pará, 2014.

[23] SILVA, Iramar Batista da. *Uma abordagem de Progressões para o Ensino Médio.*Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Maranhão, 2013.

[24] SILVA, Carlos Rodrigues da.; SOUZA,Kelia Rodrigues de Queiroz. *Cálculo: Uma proposta possível para o ensino médio.* NET, Barra do Garças-MT, vol. 17, p. 81-89, ago/dez. 2014. Revista Panorâmica On-line. Disponivel em: <http://revistas.cua.ufmt.br/index.php/revistapanoramica/article/viewFile/595/234>. Acesso em 06 jun 2017.

[25] SILVA, Thiago M. da. *Uma Abordagem de Sequências Numéricas no Ensino Médio*, Dissertação de mestrado, Alagoas, 2013.

[26] SPINASSÉ, Camila. *Introdução à matemática financeira para alunos na educação de jovens e adultos.* Universidade Federal do Espírito Santo.

[27] SOUZA, Herbert José Cavalcanti (2013), *Matemática Financeira: Uma aplicação direta no cotidiano.* Universidade Federal da Paraíba.

[28] SOUSA, M.C.(2004) *O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica: Um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental.* Unpublished doctorial dissertation, Campinas State University at Campinas, Brazil.

[29] VASCONCELOS, Claudio Fernandes. *Modelagem Matemática no Ensino Médio por Meio de Sequências e Séries Numéricas*,Dissertação de mestrado, Rio Claro, 2016.