UNIRIO
Universidade Federal do
Estado do Rio de Janeiro

PROFMAT

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

OS DEZ PROBLEMAS DE APOLÔNIO: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

MARCELA MELO AMORIM

MATEMÁTICA

2016

MARCELA MELO AMORIM

OS DEZ PROBLEMAS DE APOLÔNIO:
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Mestrado em MATEMÁTICA como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: FABIO LUIZ BORGES SIMAS

Rio de Janeiro
28 de Janeiro de 2016

Este trabalho está licenciado sob uma Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional. Para ver uma cópia desta licença, visite http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/.

Amorim, Marcela Melo

PROBLEMAS DE APOLÔNIO - UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO \ Marcela Melo Amorim – 2016

96 p.

1. Matemática 2. Geometria I.Título

CDU - xxxxx

MARCELA MELO AMORIM

OS DEZ PROBLEMAS DE APOLÔNIO: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovada em 28 de janeiro de 2016

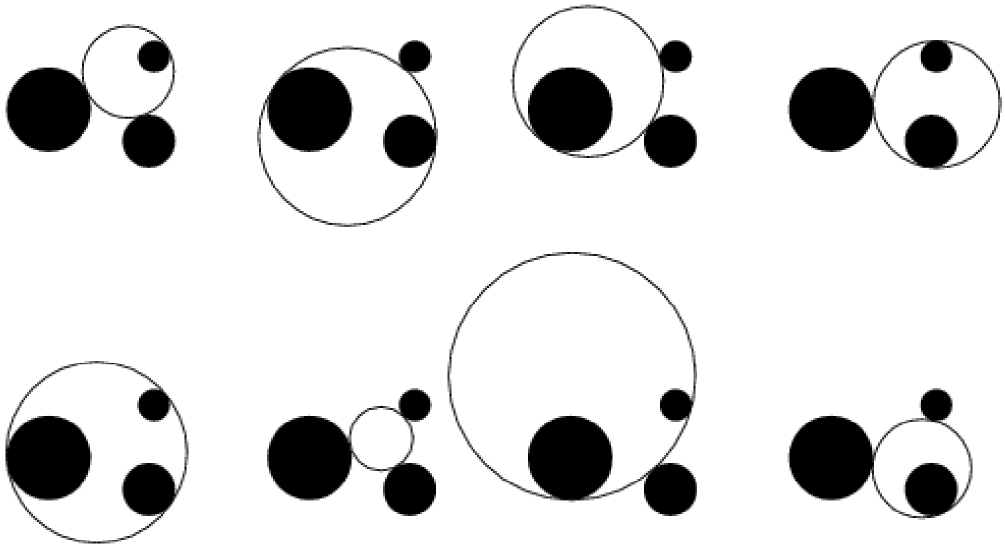
BANCA EXAMINADORA:

Dr. Fabio Luiz Borges Simas - UNIRIO

Dr. Marcelo Leonardo dos Santos Rainha - UNIRIO

Dr. Leonardo Tadeu Silvares Martins – UFF

Dr. Victor Augusto Giraldo – UFRJ



"A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida." (Jacques Bernoulli)

Agradecimentos

Após vinte e cinco anos lecionando sinto-me em dívida com o conhecimento e aí começa a luta de tentar conciliar o estudo e o trabalho. Aos quarenta e cinco anos não é fácil concentrar-se em um abstratismo que exige essa área que tanto respeito e admiro. Quando deixar o trabalho de lado para me dedicar ao estudo? Com certeza, estudar é muito mais contagiante e estressante. Porém, a realidade é outra: não posso dedicar de todo o tempo para realizar o sonho de me considerar uma verdadeira Matemática.

Esse trabalho é fruto de todos os congressos, minicursos e ideias adquiridos ao longo dos anos, inspirado em grandes nomes como João Bosco Pitombeira, Geraldo Ávila, José Paulo Carneiro, José Claudio Faulhaber, Eduardo Wagner, Victor Giraldo e tantos outros. Nada mais me contagia que utilizar conquistas da antiguidade com os recursos tecnológicos atuais.

Nesse caminho agradeço aos meus pais por todo amor e força e por aturarem meus telefonemas de autopiedade e minha ausência necessária. Agradeço a meus irmãos Guto e Rê e minhas cunhadas Dani e Lulu, por acreditarem em mim e superestimarem minha capacidade. Agradeço o mais novo membro da família, meu afilhado Jonas, minha maior inspiração. Agradeço a minha tia Rita, sinônimo de amor, carinho e amizade.

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por ter oferecido bolsa de estudo durante o curso, evitando assim um excesso de carga horaria para me manter estudando.

Agradeço a todos que permitiram que lecionasse mesmo não tendo a qualificação exigida. Agradeço ao meu orientador Fabio Simas, por ter me reensinado a estudar e escrever, com toda delicadeza e clareza. Um agradecimento especial por ter retornado ao trabalho nessa segunda chance, bem antes do resultado oficial ter sido divulgado. E, por último, agradeço aos professores da UNIRIO que, além de compreenderem a eterna ausência nas aulas, sempre me trataram com todo carinho e amizade.

Lista de Figuras

Resumo

Traçar um percurso do Problema de Apolônio ao longo da História ilustra a potencialidade de um problema clássico como motivador para novas investigações, além de possibilitar um olhar panorâmico sobre a própria Matemática e, em particular, sobre a Geometria.

O objetivo deste trabalho é preparar um estudo que possa ser utilizado por alunos que se interessem pelo tema ou, por professores, em forma de um pequeno projeto. A maior preocupação foi a de organizar os dez problemas de Apolônio em ordem crescente de dificuldade, transformando-os compatíveis ao programa da Educação Básica, com a utilização do software de Geometria Dinâmica *Geogebra*.

Em cada capítulo pode-se perceber a revisão de uma grande quantidade de tópicos da geometria. No problema *PPP*, revisamos a construção e a definição de mediatriz como lugar geométrico, ângulos alternos internos e congruência de triângulos. No segundo capítulo, o problema *RRR* trata-se da definição de bissetriz e das posições relativas de retas. No problema *PPR*, que compõe o terceiro capítulo, podemos revisar as relações métricas numa circunferência com suas secantes e tangentes. Estes são os três problemas mais fáceis de Apolônio. O quarto problema (*PRR*), apesar de ter um grau de dificuldade um pouco maior que os três primeiros, revisa os mesmos tópicos de geometria básica, priorizando o conceito de bissetriz como lugar geométrico.

A partir do quinto problema, o *PPC*, o grau de dificuldade das construções eleva-se substancialmente. Neste problema, revisamos o conceito de mediatriz e as relações métricas na circunferência. Já no sexto capítulo, que trata o problema *PRC*, revisamos posições de reta e circunferência, semelhança de triângulos, distâncias entre pontos e entre ponto e reta, além de relembrar as construções feitas nos capítulos anteriores. No sétimo problema, o *RRC*, retomamos a construção da bissetriz, além de utilizar posições de reta e circunferência.

Nos três últimos problemas, aqueles que incluem duas circunferências, veremos a dificuldade das construções aumentar, exigindo assim, a inclusão de novos conceitos. No oitavo problema, o *CCP*, é introduzido o conceito de homotetia, seus centros e as respectivas construções. Revisamos as posições relativas entre duas circunferências e a consequente relação entre os raios e a distância entre os centros. Ainda nesse capítulo recaímos no problema *PPC*. No estudo do problema *CCR* nenhum novo conceito é abordado, porém, o grau de dificuldade é recair no problema *PCR* que utiliza o *PPR*. Para isso utilizamos as construções de retas paralelas e circunferências concêntricas. E, por último, apresentamos o problema *CCC* que utiliza do mesmo artifício do *CCR* para recair no *CCP*.

Palavras Chave: Problema de Apolônio, Geometria Dinâmica, Geogebra.

Abstract

Tracing a course of the Apollonius Problem throughout History illustrates the potentiality of a classical problem as a motivator for further investigation, as well as providing a panoramic view of Mathematics itself and, in particular, of Geometry.

The objective of this work is to prepare a study that can be used by students who are interested in the subject or, by teachers, in the form of a small project. The main concern was to organize the ten problems of Apollonius in increasing order of difficulty, making them compatible with the basic education program, using the Geogebra Dynamic Geometry software.

In each chapter one can see the revision of a great quantity of topics of the geometry. In the PPP problem, we review the construction and definition of perpendicular bisector as locus, internal alternating angles and congruence of triangles. In the second chapter, the RRR problem is the definition of bisector and the relative positions of lines. In the PPR problem, which composes the third chapter, we can review the metric relations on a circumference with its secants and tangents. These are the three easiest problems of Apollonius. The fourth problem (PRR), despite having a degree of difficulty a little higher than the first three, revises the same topics of basic geometry, prioritizing the concept of bisector as a locus.

From the fifth problem, the PPC, the degree of difficulty of the constructions rises substantially. In this problem, we review the concept of perpendicular bisector and the metric relations in the circumference. In the sixth chapter, which deals with the PRC problem, we review positions of line and circumference, similarity of triangles, distances between points and between point and line, and recall the constructions made in previous chapters. In the seventh problem, the RRC, we resume the construction of the bisector, in addition to using positions of line and circumference.

In the last three problems, those that include two circumferences, we will see the difficulty of the constructions increase, thus requiring, the inclusion of new concepts. In the eighth problem, the CCP, is introduced the concept of homotetia, its centers and the respective constructions. We review the relative positions between two circles and the consequent relationship between the radii and the distance between the centers. Still in this chapter we revert to the PPC problem. In the study of the CCR problem no new concept is addressed, however, the degree of difficulty is to fall into the PCR problem that uses the PPR. For this we use the constructions of parallel lines and concentric circles. And finally, we present the CCC problem that uses the same CCR maneuver to fall into the CCP.

Keywords: Apollonius Problem, Dynamic Geometry, Geogebra.

Sumário

0. Histórico e considerações iniciais

Problemas de tangências surgem pela primeira vez no Livro IV da obra Elementos de Euclides de Alexandria (325 a. C). Nele o autor apresenta, entre tantas, duas proposições: A Proposição 4 propõe construir uma circunferência que passa por três pontos dados e, a Proposição 5, como construir uma circunferência tangente a três retas.

Neste período conhecido como Idade Áurea da Matemática Grega (cerca de 300 à 200 a.C), Apolônio de Perga propõe um problema, generalizando as duas Proposições de Euclides, que viria a ser conhecido pelo seu nome: encontrar um círculo tangente a três outros círculos dados, podendo estes ser degenerados em retas (circunferência de raio infinito) ou pontos (circunferência de raio zero). Deu-se assim origem aos dez casos do problema: *PPP*, *RRR*, *PPR*, *RRP*, *PPC*, *PCC*, *RRC*, *CCR*, *CPR e CCC.*

Os dois primeiros casos *PPP* e *RRR* são os mais simples, já vistos por Euclides (Proposições 4 e 5 do Livro IV), em conexão com o círculo inscrito e circunscrito do triângulo. Os seis casos seguintes *PPR*, *PPC*, *PCC*, *PCR*, *PRR e CCR* foram tratados no Livro I da obra *Sobre tangências*, enquanto os dois restantes *RRC e CCC* ocupavam todo o Livro II desta mesma obra.

Seguindo a trajetória do Problema de Apolônio ao longo da História da Matemática, pode-se perceber algumas descobertas na Geometria e os métodos diferentes para tentar resolvê-lo. Desde Euclides, diversos matemáticos têm se empenhado na busca de soluções para o atraente problema. As abordagens dadas ao problema estão ligadas principalmente ao instrumental matemático disponível em cada época, levando-nos a acompanhar a trajetória da Geometria ao longo do tempo, e apreciar algumas das descobertas daqueles que foram construindo e trilhando este caminho.

A obra na qual supostamente as soluções deste problema foram publicadas, o tratado *Sobre tangências* (do original *De tactionibus*), perdeu-se. As informações que se têm sobre sua existência e autoria são baseadas no trabalho Enciclopédia de Pappus de Alexandria (290 a.C)

Na época do Renascimento Italiano (século XVII) o interesse em restaurar e reconstruir obras dos matemáticos gregos atinge o seu auge. Apenas em meados do século XVII que o tratado *Sobre tangências* é recuperado. François Viète (1540 – 1603) restaurou e publicou esta obra com a qual considerou um número de casos especiais nos quais um ou todos os círculos são reduzidos a pontos ou retas.

Antes de publicá-la, Viète propôs como desafio a Romanus o problema *CCC*, rejeitando sua solução por tratar de cônicas – elementos não construtíveis com régua e compasso. Viète, em 1600, publicou o trabalho *L'Apollonius Français* que contém soluções para os dez casos juntamente com a demonstração de que não é possível construir com régua e compasso a solução de Romanus. Apesar de não se conhecer exatamente como Apolônio resolveu seu célebre problema, sabe-se que Viète tentou reconstruir a solução de Apolônio com bases em resultados de Pappus.

Isaac Newton (1642 – 1727) apresentou a solução para o problema em sua famosa obra *Principia.* Na formulação de Newton, a interseção de uma reta com circunferência foi utilizada para adaptar a prova de Romanus, que utilizava cônicas, contemplando assim, a construção desejada por Viète com régua e compasso. Newton tratou o problema sinteticamente em *Les Principia* e analiticamente em *Arithmetica universalis*.

O primeiro matemático a se preocupar com o número de soluções foi Euler. Ele dedicou-se à busca de uma solução algébrica para o Problema de Apolônio.

O Problema de Apolônio sempre esteve presente nas discussões dos dois métodos: analítico e sintético. Mas até o final do século XVIII as soluções ainda não satisfaziam a ideia de encontrar um método direto para todos os dez casos e que determinasse o número de soluções para cada situação.

Foi no início do século XIX, com o estudo das inversões, que Pederson sistematizou as possíveis configurações, bem como determinou o número de soluções nos diferentes casos. Com os resultados da Geometria das inversões foi possível sistematizar a análise das possíveis configurações dos três objetos dados no Problema de Apolônio, classificando-as e determinando o número efetivo de soluções nos diferentes casos.

Em um de seus livros, Heath procura resgatar o procedimento de Apolônio assumindo dois lemas de Pappus e um problema auxiliar:

- ✓ **Lema 1**: Se dois círculos se tocam externamente ou internamente, qualquer reta que passe pelo ponto de contato divide os círculos em segmentos respectivamente semelhantes.

- ✓ **Lema 2:** Dados três círculos, seus seis centros de semelhança[1] (externos e internos) pertencem, três a três, a quatro retas.

- ✓ **Problema Auxiliar:** Inscrever, em um círculo dado, um triângulo cujos lados, quando prolongados, passem por três pontos colineares dados.

O uso de softwares propiciou uma revitalização na busca de soluções para o Problema de Apolônio, a ferramenta computacional oferece uma ampliação dos recursos disponíveis para esta mesma busca. Fez-se necessário, porém, que o elemento humano criativo e indagador detectasse as propriedades essenciais e as combinasse com a potencialidade tecnológica, tornando-se capaz de produzir suas próprias soluções, através de problemas e construções auxiliares.

Profissionais fora do campo da Matemática estão descobrindo que as ideias geométricas têm uma utilização muito ampla, não só como fundamentação teórica dos seus domínios de trabalho, mas também na realização de novas tecnologias para o desenvolvimento destes domínios.

Problemas de tangências são frequentes na Engenharia em situações como cálculos de polias e engrenagens. Recentemente, métodos de resolução de problemas de tangência voltaram a receber atenção por causa de sua aplicação na construção de um diagrama de *Voronoi* para conjuntos de circunferências. Esses diagramas têm aplicações, por exemplo, em problemas de caminhos mais curtos e empacotamento de cabos.

Objetivos do trabalho

Hoje, há uma supervalorização da Geometria analítica, em contrapartida, queremos resgatar a Geometria sintética principalmente no Ensino Médio. Isso significa apresentar justificativas, demonstrações e organização de um raciocínio lógico e dedutivo.

Todos nós, perante um problema geométrico, fazemos um desenho como suporte concreto da situação como ponto de partida para a organização do nosso pensamento. Mas ele pode ser confundido com o próprio objeto. A utilização da geometria dinâmica no ensino da Geometria pode dar uma contribuição positiva na conjugação destes dois aspectos: o da figura e o do conceito resolvendo o problema de exatidão e tempo em construções geométricas.

A experiência traz a convicção que o aumento no uso de programas de Geometria Dinâmica não só vai permitir trabalhar com maior frequência conceitos ligados às novas

[1] Atualmente conhecido como centro de homotetias (ver cap. 8)

Geometrias como vai trazer de volta Euclides e dar a oportunidade de conhecer e resolver belos e grandiosos problemas de construções geométricas da Grécia Antiga.

A escolha do Problema de Apolônio como questão central deste trabalho deve-se à riqueza de conceitos e à beleza e a diversidade das construções que este problema acarreta e que, por isso, pode dar uma contribuição riquíssima na aprendizagem da Geometria.

Este trabalho é uma tentativa de diminuir o tratamento estereotipado e estático que é dado aos objetos geométricos, o qual contribui para que se confundam as propriedades de um desenho com as propriedades do objeto. Além disto, desejamos sistematizar procedimentos repetitivos na forma de macroconstruções utilizando o *software Geogebra* de geometria dinâmica, trabalhando de forma evolutiva e interligada do primeiro ao décimo problema.

Público Alvo

Os nossos alunos, de uma maneira geral, concluem o Ensino Médio com grandes dificuldades em fazer generalizações e deduções, processos tão característicos no estudo da Geometria e tão importantes para a vida. Vale reforçar que as figuras auxiliam muito a compreensão das demonstrações, mas estas não devem ser a ênfase no processo de demonstração. Supõe-se do aluno alvo, estudantes de qualquer série do Ensino Médio, uma familiaridade com conceitos e resultados de um curso básico de Geometria plana do Ensino Fundamental.

Hoje, há uma forte tendência na Educação Básica em resgatar objetivos perdidos para o ensino. Uma grande referência é o ENEM, que traz como alguns eixos cognitivos e em sua matriz de referência os dados como "*Enfrentar situações-problema: selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representadas de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema". Ou ainda, "Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente"*. Traz em uma de suas competências para o que denomina Área 2[2]*: "Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela"*. Dentro dessa competência exige a identificação de características de figuras planas ou espaciais e a resolução de situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

O grau de complexidade das construções geométricas envolvidas nas soluções do Problema de Apolônio pode ser considerado um impedimento se considerarmos sua

[2] Área 2 é referente à Matemática e suas tecnologias

realização com régua e compasso. Hoje em dia, estas limitações podem ser superadas com o uso de programas de Geometria Dinâmica como, no nosso caso, o Geogebra.

Materiais, tecnologias e recomendações metodológicas

Três componentes básicas determinam o êxito do bom ensino de Geometria quando equilibrados: conceitualização, manipulação e aplicação, uma espécie de tripé que sustenta o Ensino de Matemática. Defendemos uma Geometria que envolva um amplo espectro de atividades, iniciando-se pela exploração concreta e experimentação, passando pelo ato de conjecturar e chegando até as provas formais, analisando e sintetizando. A análise consiste em conceber um plano e a síntese, em concretizá-lo. Estas duas abordagens são comumente encontradas divorciadas e a utilização do software de Geometria dinâmica é uma tentativa de conciliá-las, além de criar o gosto pela Geometria e pela resolução de problemas puramente geométricos, construindo conceitos mais sólidos através do diálogo entre definições e propriedades.

A utilização do software representa um ambiente favorável à experimentação e familiar aos nossos alunos, e, se bem organizado, representa uma tentativa de estabelecer uma relação entre a Geometria analítica e sintética. De qualquer forma, mesmo com todas as facilidades que proporciona, o recurso computacional necessita de instruções precisas para se atingir o objetivo desejado. Além disto, para que o dinamismo dos objetos possa ser efetivado, é necessário que as construções estejam bem definidas e não tenham ambiguidades, para se adequarem ao paradigma 1-construção e n-testes.

Dentre as possibilidades que o ambiente de geometria dinâmica pode trazer, destacamos a linguagem visual, que estimula um novo meio de comunicação de conceitos abstratos, tornando a tarefa de compreensão da linguagem mais agradável, e a interatividade, que permite a investigação de propriedades, conjecturas de novas propriedades, confirmação dos resultados, entre outros.

No estudo da Geometria, principalmente no Ensino Médio, o aspecto de construção raramente é abordado. Nesta proposta de atividades esperamos com o Problema de Apolônio instigar a descoberta, a pesquisa e a criação, e mobilizar novas indagações. Os dez casos em que se subdivide o problema são em si novos problemas de níveis de dificuldades diferentes: quanto aos conceitos, às construções e às justificativas de que necessitam.

O exercício de demonstrar tem o efeito benéfico ao aluno, pois cria uma cultura de aprendizagem com mais autonomia na demonstração de fatos e construção de argumentos, apesar dele não estar acostumado com essa autonomia. Ao fomentar no estudante uma certa disciplina lógica e induzir o exercício de capacidades mentais para a solução de problemas lógico-geométricos, eles desenvolvem a habilidade de argumentação escrita e falada. Em outras palavras, a dificuldade maior é criar o hábito de se pensar com clareza e o treino da habilidade perceptiva de visualização.

Ciente da dificuldade de se programar aulas em laboratório de informática, sejam instituições da rede pública ou privada da Educação básica, propomos que o trabalho seja dividido em dois grandes momentos. O primeiro, relacionado à pesquisa e revisão de alguns conceitos geométricos, que pode ser realizado em sala de aula com atividades de estudo para casa. O segundo momento, das construções propriamente ditas, no laboratório de informática, de preferência com a turma dividida em duplas.

Antes de começar a mencionar os problemas propriamente ditos, vale à pena salientar que para as últimas construções, por serem muito mais elaboradas, foi indispensável impor alguns passos para que o trabalho não ficasse enfadonho. Além disso, como os últimos problemas apresentam muitos casos análogos, alguns foram deixados a cargo do leitor.

1. PPP : Traçar uma circunferência que passe por três pontos dados

As soluções de cada problema, além de terem acompanhado a evolução da Geometria, também mostram a contribuição que a Geometria Dinâmica pode oferecer. Mas é uma ilusão achar que, com a utilização do computador, os problemas se tornam mais fáceis. Pois, não basta saber uma lista de procedimentos para resolvê-los e sim, conhecimento suficiente para que as construções se tornem bem definidas.

Nesse momento é importante reconhecer que o atual modelo de ensino da Geometria (ou Desenho Geométrico) costuma se reduzir em passar essa lista de procedimentos vagos, quase sem nenhum questionamento ao aluno, o que torna o estudo praticamente entediante e pouco investigativo.

Como vimos anteriormente, o Problema de Apolônio pode ser dividido em dez problemas e, alguns deles, em casos, dependendo das posições relativas entre os três elementos *(ponto, reta ou circunferência)*. Os problemas serão vistos em uma ordem crescente de complexidade e utilizaremos no máximo o conhecimento de Geometria adquirido durante o Ensino Fundamental. Lembre-se que para se construir um ponto com régua e compasso é necessário que se tenha interseção entre duas retas, entre duas circunferências ou entre uma reta e uma circunferência.

Antes de começarmos com o primeiro problema, vamos pensar um pouco sobre a *mediatriz* de um segmento. Você deve saber que a mediatriz de um segmento é a reta que passa pelo ponto médio de um segmento e é perpendicular ao mesmo. Considere o segmento *AB*, trace duas circunferências de raio *AB*, uma centrada em *A* e outra em *B*. Denote por *C* e *D* as interseções entre os círculos. Afirma-se que a reta *CD* é mediatriz do segmento *AB*.

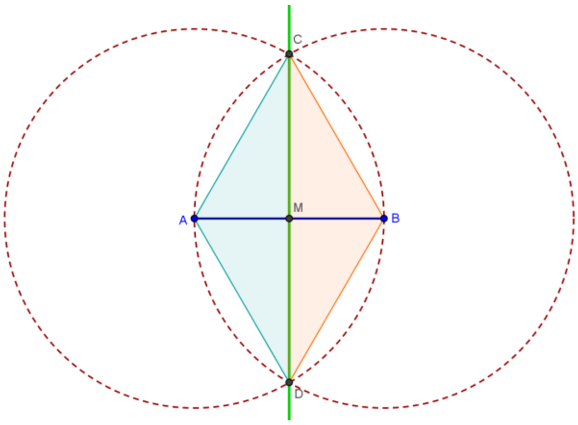


Figura 1: Mediatriz de um segmento

Por essa construção, que tipo de quadrilátero foi formado pelos pontos *A*, *C*, *D* e *B*? Qual é a posição relativa entre as retas *AC* e *BD*? Como se classificam os ângulos $C\hat{A}M$ e $D\hat{B}M$? O que se pode afirmar sobre suas medidas? Idem para os ângulos $C\hat{M}A$ e $D\hat{M}B$. Você consegue verificar a congruência dos triângulos *ACM* e *BDM*? E a congruência dos triângulos *CMB* e *CMA*? Por conseqüência, $\overline{AM} = \overline{BM}$, logo *M* é ponto médio do segmento *AB*. Por outro lado, os ângulos $B\hat{M}C$ e $A\hat{M}C$ são iguais e suplementares. Qual é a medida de cada um deles? Então a reta *CD* passa pelo ponto *M* (médio de *AB*) e é perpendicular a *AB*.

Agora, utilizando o *Geogebra*. Marque um ponto *P* sobre a reta *CD*. Use a função *"Comprimentos, Distâncias ou Perímetros"* para determinar as distâncias $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$. Mova o ponto *P* sobre a reta *CD*. O que você observou sobre as distâncias $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$? Podemos então identificar uma propriedade dos pontos pertencentes à mediatriz de um segmento. Você consegue justificar essa propriedade? Mais ainda, há algum ponto no plano que possui essa propriedade e não pertence à mediatriz? Podemos agora começar a trabalhar com o primeiro problema.

A discussão feita até aqui sobre a mediatriz pode ser resumida na seguinte frase: a mediatriz de um segmento *AB* é o conjunto de pontos *P* tais que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

TEOREMA 1 (T1): A mediatriz de um segmento AB é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e B.

Quantas circunferências você consegue traçar passando por um ponto *A* dado? E por dois pontos? Trace circunferências que passam por dois pontos *A* e *B* dados. Agora, tente construir uma circunferência que passe por três pontos dados *A*, *B* e *C*. Você deve ter percebido que uma circunferência que passe por três pontos é mais difícil de ser determinada, além disto, existe apenas uma quando os pontos não são colineares. E se *A*, *B* e *C* pertencerem à mesma reta? Consegue perceber que não existe a circunferência que passe por três pontos alinhados?

Voltando ao problema de determinar as circunferências que passam por três pontos, vamos imaginar o problema resolvido, ou seja, considere uma circunferência passando por três pontos não colineares. Seja *O* centro da circunferência procurada, temos $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ = *raio*. Classifique, com relação aos lados, o triângulo *BOC*. Por outro lado, se *O* pertence a *BC*, então $\overline{OB} = \overline{OC}$ e a argumentação serve também para o triângulo *AOC*. Qual é a propriedade que a mediana relativa à base de um triângulo isósceles qualquer possui? Ainda considerando o triângulo isósceles *BOC* de base *BC*, prolongue a reta *r* que contém a mediana relativa à base *BC*. Quais são as duas propriedades que *r* tem em relação ao segmento *BC*? Esta reta *r* é, então, a mediatriz do segmento *BC*. Concluímos que o centro da circunferência procurada deve pertencer à mediatriz do segmento *BC*. Determinamos assim nossa primeira Proposição:

PROPOSIÇÃO 1 (P1): Se uma circunferência passa por dois pontos A e B, então o seu centro se encontra na mediatriz do segmento AB.

Repita esse mesmo raciocínio utilizando o triângulo *AOC*. Você consegue concluir que o centro *O* também deve pertencer à mediatriz do segmento *CA*? Se o ponto *O* tem que pertencer a duas retas concorrentes, então esse ponto é a interseção das duas. Trace o triângulo com vértices em *A*, *B* e *C*. O que a circunferência construída é deste triângulo? O centro desta circunferência é chamado *circuncentro*. Deslize um dos vértices do triângulo e observe o que acontece com o centro da circunferência construída no caso do triângulo ser retângulo e obtusângulo. Agora, você já conhece o caminho que deve percorrer nessa construção?[3]

[3]Este é o problema mais simples entre os dez e já se encontrava na coleção *Os Elementos*, na Proposição 5, do livro IV, escrito por *Euclides* há mais de 24 séculos. Para saber mais esta coleção se encontra disponível na internet.

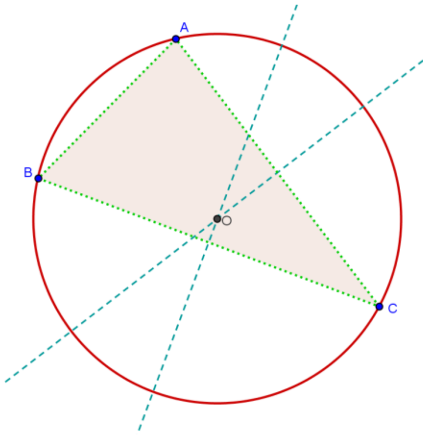


Figura 2: Circunferência que passa por três pontos dados

A resolução do problema proposto é a seguinte: Dados pontos A, B e C, não colineares, trace a mediatriz de AC e de BC. Seja O, o ponto de interseção das duas mediatrizes. A circunferência procurada tem centro em O e raio $\overline{OA}$. Como O pertence à mediatriz de AC, então $\overline{OA} = \overline{OC}$. Da mesma forma, se O é ponto da mediatriz BC, então $\overline{OB} = \overline{OC}$. Assim $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ e O é centro da única circunferência que passa por A, B e C. E se os três pontos fossem alinhados, qual seria a posição relativa entre as mediatrizes? Nesse caso, você conseguiria determinar o ponto O?

No problema, para que o ponto O, equidistante de A, B e C, fosse determinado, foi preciso encontrar a interseção das duas mediatrizes. Concluímos que é impossível traçar uma circunferência que passe por três pontos colineares e só existe uma que passe por três não colineares. Chegamos então à nossa segunda Proposição:

PROPOSIÇÃO 2 (P2): Se uma circunferência passa por três pontos não alinhados A, B e C, então o seu centro é a interseção das mediatrizes do triângulo ABC.

Para terminar esse capítulo, apenas uma consideração. As construções feitas até aqui foram inspiradas nos autores Wagner, E. e Bicudo, I.

2. RRR: Traçar uma circunferência tangente a três retas dadas

A solução deste problema depende da caracterização da bissetriz como lugar geométrico, Teorema 2 que veremos mais adiante. Por isso antes da solução faremos uma breve revisão deste tema. As demais construções foram elaboradas através dos mesmos autores do problema *PPP*.

Considere um ângulo *AÔB* e marque um ponto *P* sobre a semireta $\overrightarrow{OA}$. Trace uma circunferência de centro em *O* e raio $\overline{OP}$ e marque *Q* sobre $\overrightarrow{OB}$, interseção com a circunferência traçada. Trace mais duas circunferências de centros *P* e *Q* com raio $\overline{OP} = \overline{OQ}$. Seja *M* o ponto, diferente de *O*, de interseção dessas duas circunferências. Justifique a congruência dos triângulos *MOP* e *MOQ*. Qual é a relação entre os ângulos *MÔP* e *MÔQ*? Conclua que a reta *OM* divide o ângulo *AÔB* ao meio, essa reta é denominada *bissetriz do ângulo AÔB.*

Marque um ponto *N* sobre a reta *OM*. Trace perpendiculares aos lados do ângulo que passam por *N* para determinar as distâncias de *N* a *OA* e *OB*. Use a função *"Comprimentos, Distâncias ou Perímetros"* para determinar essas distâncias. Mova o ponto *N* sobre a reta *OM*. O que acontece com as distâncias? Podemos então enunciar: *Os pontos da bissetriz são equidistantes dos lados do ângulo*. Justifique este fato (Sugestão: use o caso de congruências *LAAo* – Lado, Ângulo, Ângulo oposto – para dois triângulos retângulos com lado comum *ON*).

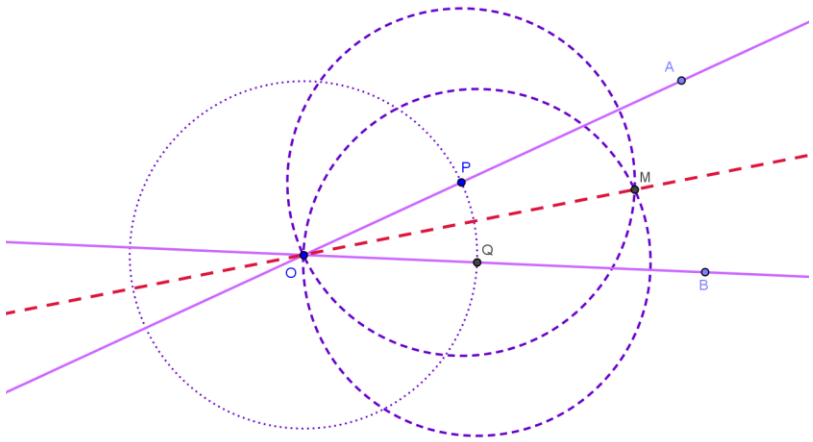


Figura 3: Bissetriz de um ângulo

Será possível encontrar um ponto do plano, fora da bissetriz, que seja equidistante das semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$? Para responder a essa pergunta sugerimos considerar um ponto *N'* com a propriedade de ser equidistante das semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Defina *C* e *D*, pés das perpendiculares baixadas de *N'* sobre $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ respectivamente. Justifique a congruência dos triângulos retângulos *OCN'* e *ODN'* e conclua que *N'* pertence à bissetriz do ângulo *AÔB*. De modo que todo ponto que é equidistante das semirretas pertence à bissetriz. Podemos resumir a discussão dos dois últimos parágrafos no resultado a seguir.

TEOREMA 2 (T2): A bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados do ângulo.

Observe que, pelo teorema *T2*, o conjunto dos pontos que equidistam de duas retas concorrentes é formado por duas bissetrizes dos ângulos formados. Retomando o problema de determinar todas as circunferências tangentes a três retas dadas, quais são as posições relativas de duas retas no plano? Descreva as posições relativas para três retas distintas no plano. Justifique por que em dois dos quatro casos o problema não possui solução.

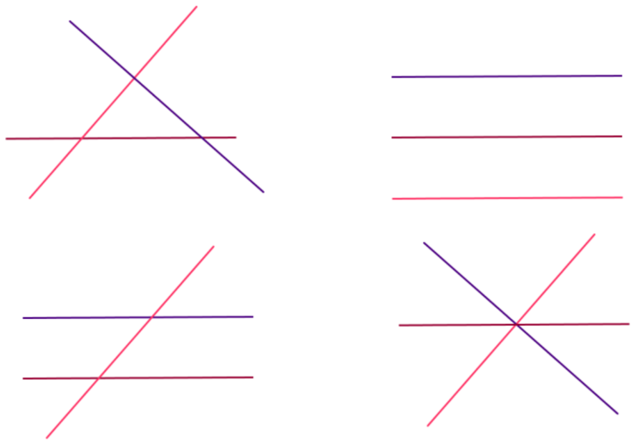


Figura 4: Posições relativas de três retas

Consideremos inicialmente a situação de uma circunferência tangente a uma reta. Qual é a distância do centro da circunferência à reta? Seguindo adiante, considere duas retas concorrentes e tangentes a uma circunferência. Qual é a distância do centro da circunferência a cada uma das retas? Use o Teorema 2 acima para concluir que o centro da circunferência deve pertencer a uma das bissetrizes de *r* e *s*. Assim chegamos à nossa terceira proposição.

PROPOSIÇÃO 3 (P3): Se uma circunferência é tangente às retas concorrentes r e s, então seu centro pertence a uma das bissetrizes de r e s.

Suponha agora que tenhamos três retas, digamos *r*, *s* e *t* formando um triângulo e uma circunferência tangente às três. Dado que a circunferência é tangente às retas *r* e *s*, sobre quais retas pode estar o centro da circunferência? (Sugestão: P3). A circunferência também deve ser tangente a *s* e a *t*, argumente de modo análogo para determinar quais são os possíveis centros das circunferências que formam a solução do problema. Uma vez determinados os centros das soluções, basta baixar do centro uma perpendicular a quaisquer das três retas para determinar um ponto por onde passa a circunferência e, portanto, encontrar o raio.

Considere três retas *r*, *s* e *t* concorrentes duas a duas, formando um triângulo. Trace as bissetrizes internas e externas deste triângulo. Os pontos de interseção das bissetrizes de vértices diferentes serão os centros das quatro circunferências procuradas.

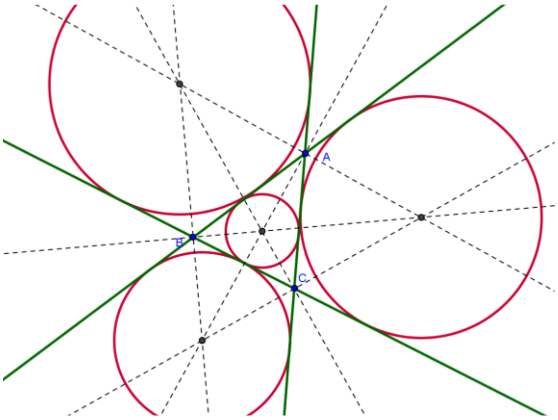


Figura 5: Circunferência tangente a três retas concorrentes duas a duas

Observando a Fig. 5 repare que se considerarmos três bissetrizes por três vértices distintos do triângulo ABC, elas sempre se intersectam em um só ponto e não formando um triângulo. Use *T2* para justificar este fato.

Agora vamos nos fixar no caso de duas retas paralelas entre si com a terceira concorrente às demais. Considere *r* e *s* retas paralelas e seja α circunferência tangente às duas retas. Observe que o centro de α deve estar à mesma distância de *r* e de *s*. Sobre que reta deve estar o centro da circunferência *α*? Determinamos assim nossa quarta proposição:

PROPOSIÇÃO 4 (P4): Se uma circunferência é tangente às retas paralelas r e s, então o seu centro está sobre a reta paralela equidistante a ambas.

Seja *t* reta concorrente com *r* e *s*. Se α é tangente às retas concorrentes *r* e *t*, sobre que retas pode estar o centro de α? (Sugestão: P3). Do mesmo modo, sendo α tangente às retas concorrentes *s* e *t*, sobre que retas pode estar o centro de α? Quantas são as circunferências tangentes às três retas?

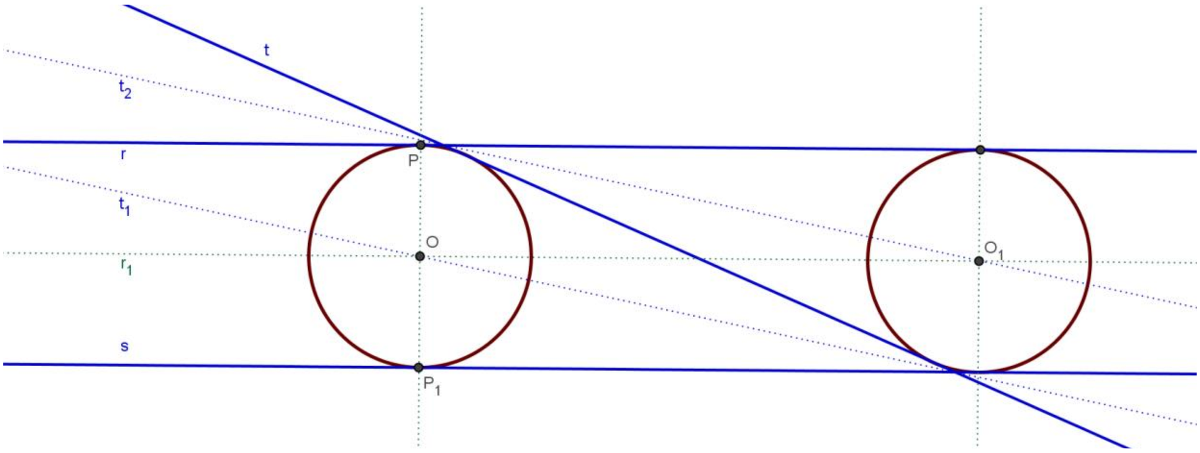


Figura 6: Circunferência tangente a três retas, sendo duas paralelas

Dadas as retas paralelas *r* e *s* e uma reta *t* concorrente a ambas, trace uma reta r_1 paralela a *r* e *s* dadas, de tal forma que seja equidistante das duas. Trace t_1 e t_2 uma das bissetrizes do ângulo formado por *t* com *r* e *s*, respectivamente. Faz diferença qual das duas bissetrizes você vai escolher em cada vértice? (Sugestão: T2) Considere *O* e O_1 os pontos de interseção de t_1 e r_1 e de t_2 e r_1, respectivamente. Os pontos *O* e O_1 serão os centros das circunferências procuradas. Isto ocorre, pois, ao traçar a paralela r_1 garante-se que a distância de qualquer ponto de r_1 a *r* ou a *s* será o raio da circunferência pedida e o decorrer da demonstração é análogo à da situação anterior.

Antes de passar para o próximo problema, observe que ainda trabalhamos com interseção de duas retas para determinar o centro da circunferência, porém, num caso foi utilizada a interseção *bissetriz-bissetriz* e, no outro, *mediatriz-mediatriz*. Os próximos seis problemas foram tratados no Livro I da obra *Sobre tangências* recuperada por *Viète*, porém todas as construções elaboradas nos problemas três a sete foram inspirados no trabalho de SANTOS, J. no site do Instituto de Matemática da UNICAMP.

3. PPR: Traçar as circunferências tangentes a uma reta que passem por dois pontos dados

Dados dois pontos *A* e *B* e uma reta *r* qualquer quais são as cinco posições relativas possíveis entre os pontos *A*, *B* e a reta *r*? Quais são as posições relativas entre uma reta e uma circunferência?

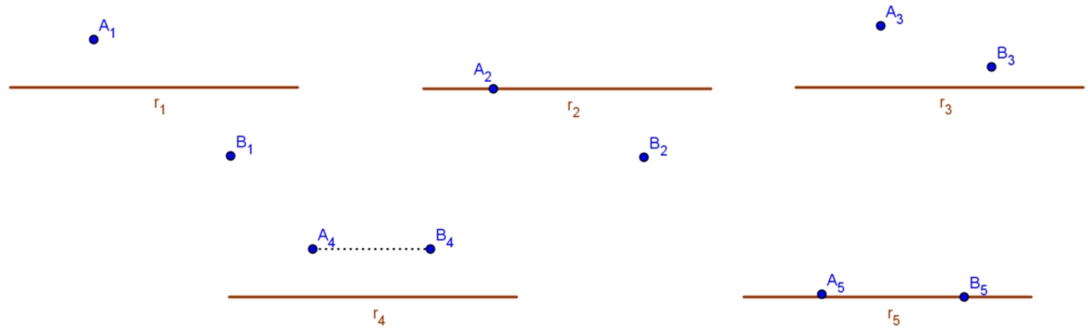


Figura 7: Posições entre dois pontos e uma reta

Explique por que é impossível traçar uma circunferência que seja tangente a *r* e que passe por *A* e *B*, quando *A* e *B* pertencem à reta *r*. Explique também a impossibilidade de se traçar a circunferência procurada quando *A* e *B* pertencem a semiplanos opostos determinados pela reta *r*. Temos três casos a serem considerados dependendo das posições relativas dos três objetos.

3.1. As retas r e AB concorrem em A (ou em B)

Vamos nos concentrar no caso em que as retas *AB* e *r* são concorrentes num dos dois pontos dados. Digamos que *A* pertença à reta *r* e *B* não. Faça um esboço de uma circunferência que passe por *A* e *B* e seja tangente à *r*. Desta forma, o que você tem a dizer sobre o ponto A em relação à circunferência procurada?

Seja *O* centro da circunferência procurada. O que se pode afirmar da distância de *O* aos pontos *A* e *B*? Com isso você deve lembrar que o centro *O* da circunferência deve pertencer a uma reta específica. Qual é esta reta? (Sugestão: P1). Se *A* é ponto de tangência, então qual é o ângulo que a reta *AO* faz com a reta *r*? Com as respostas das perguntas você é capaz de construir a circunferência? Quantas são as soluções deste problema?

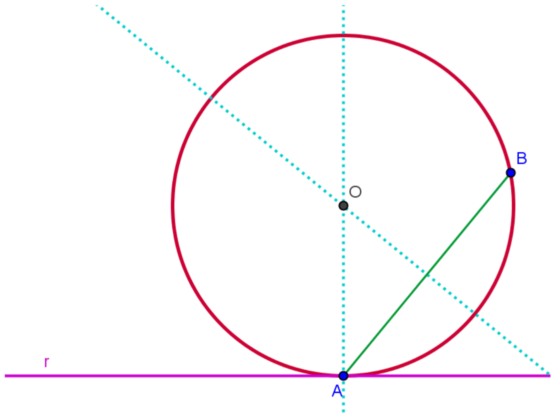


Figura 8: Circunferência tangente à reta r que passa por A e B quando r e AB são concorrentes

Por fim, para traçar a única circunferência que resolve este problema, trace a mediatriz do segmento *AB* e a perpendicular à reta *r* passando pelo ponto *A* pertencente a ela. Seja *O* ponto de interseção da mediatriz com a perpendicular. Trace a circunferência com centro em *O* que passa por *A*. Sendo *AO* perpendicular à reta *r* dada, então *AO* é raio da circunferência. Por outro lado, o ponto *O* pertence à mediatriz de *AB*, logo *B* também pertence à circunferência (conforme Teorema 1).

3.2. As retas r e AB são paralelas

Agora vamos supor que os pontos *A* e *B* estão numa reta paralela à reta *r* dada. Trace as retas paralelas *r* e *AB*. Qual é o ângulo que a mediatriz de *AB* faz com *r*? Esboce uma circunferência que passe por *A* e *B* e seja tangente à reta *r*. Marque o ponto *C* de interseção da mediatriz de *AB* com a reta *r*. O que se pode afirmar do ponto *C* em relação à circunferência procurada? Então a circunferência procurada tem que passar por *A*, *B* e *C*. Você já viu este problema antes? Sabe resolvê-lo?

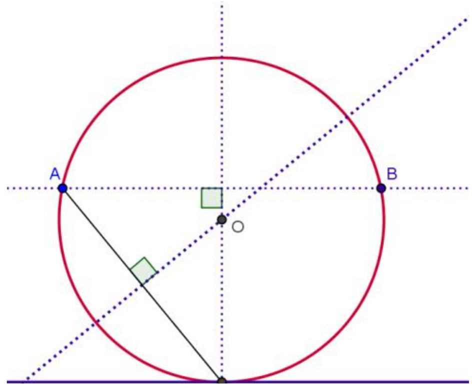


Figura 9: Circunferência tangente à reta r que passa por A e B quando r e AB são paralelas

A resolução desse caso é traçar a mediatriz do segmento *AB*. Determinar o ponto *C*, interseção da mediatriz com a reta r, e recair no caso *PPP*. Isso é explicado pelo fato do centro da circunferência procurada pertencer à mediatriz de *AB*, por equidistar de *A* e *B* (ver Teorema 1). Além disso, a reta *r*, sendo tangente à circunferência, deve ser perpendicular ao segmento *OC*. Como *r* é paralela a *AB*, a mediatriz de *AB* é perpendicular a *r*.

3.3. As retas r e AB concorrem e A e B pertencem ao mesmo semiplano em relação à r

O caso mais elaborado deste problema é quando *A* e *B* são pontos exteriores a *r*, situados no mesmo semiplano em relação à *r* e as retas *r* e *AB* são concorrentes. Antes de começarmos a construção, lembramos uma propriedade métrica sobre secantes e tangentes a uma circunferência. Sejam dadas uma circunferência α e um ponto *M* externo a α. Por *M* traçamos dois segmentos secantes a α como na Figura 10. Lembre-se que numa circunferência dois ângulos inscritos que determinam o mesmo arco são iguais. Use este fato para explicar por que os triângulos *MBA'* e *MB'A* são semelhantes. Use esta semelhança para obter a relação $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MA'}.\overline{MB'}$. Essa relação continua válida se fizermos o ponto *A'* coincidir com o ponto *B'* e a justificativa é análoga. Neste caso a expressão fica $\overline{MA}.\overline{MB} = \left(\overline{MA'}\right)^2$ quando *A'* é ponto de tangência do segmento *MA'*.

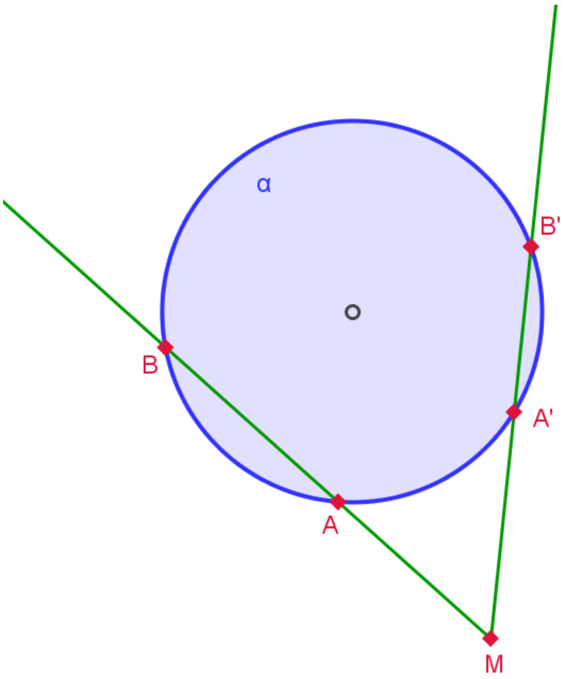


Figura 10: Secantes a uma circunferência por um ponto externo

PROPOSIÇÃO 5 (P5): Se por um ponto M externo a uma circunferência são traçados dois segmentos secantes como na Figura 10, temos:

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MA'}.\overline{MB'}$$

Se A' = B' o segmento MA' se torna tangente à circunferência e temos

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MA'}^2$$

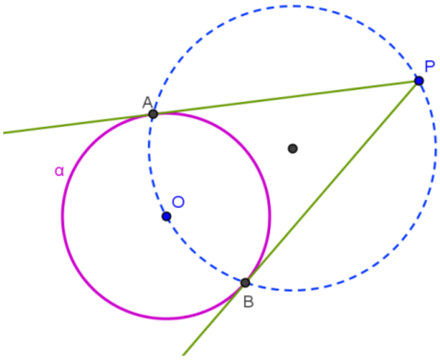


Figura 11: Retas tangentes à circunferência por um ponto externo a ela

Dados uma circunferência α e um ponto *P* externo a α, você sabe construir uma reta tangente a α por *P*? Lembre-se que qualquer ponto *A* em uma semicircunferência com diâmetro *PO* forma um ângulo reto $P\hat{A}O$. Então, sendo *O* centro de α, basta traçar a circunferência de diâmetro *PO* e os pontos *A* e *B* de tangência serão as interseções das duas circunferências. Assim as tangentes a α por *P* são as retas *PA* e *PB*, pois *A* e *B* pertencem a α e $P\hat{A}O = P\hat{B}O = 90º$. Daqui pra frente quando quisermos nos referir a esta construção evocaremos a

CONSTRUÇÃO T (CT): Construção das retas tangentes a uma circunferência por um ponto externo à mesma.

Voltando ao problema original, imagine a figura pronta. As retas *AB* e *r* são concorrentes com interseção que denominaremos de *M*. Qual é a posição da reta *AB* em relação à circunferência procurada? Você consegue perceber que a dificuldade agora é determinar o ponto *P* em que a reta *r* tangencia a circunferência solução? Lembre-se que esse ponto *P* deve satisfazer a relação $\overline{MP}^2 = \overline{MA}.\overline{MB}$. Considere uma circunferência auxiliar de diâmetro *AB*. Trace por *M* uma tangente a esta circunferência auxiliar e seja *T* o ponto de tangência. Como vimos acima temos $\overline{MT}^2 = \overline{MA}.\overline{MB}$, logo $\overline{MP} = \overline{MT}$. Tente utilizar a construção da tangente para construir o ponto *P* e recair no caso *PPP*.

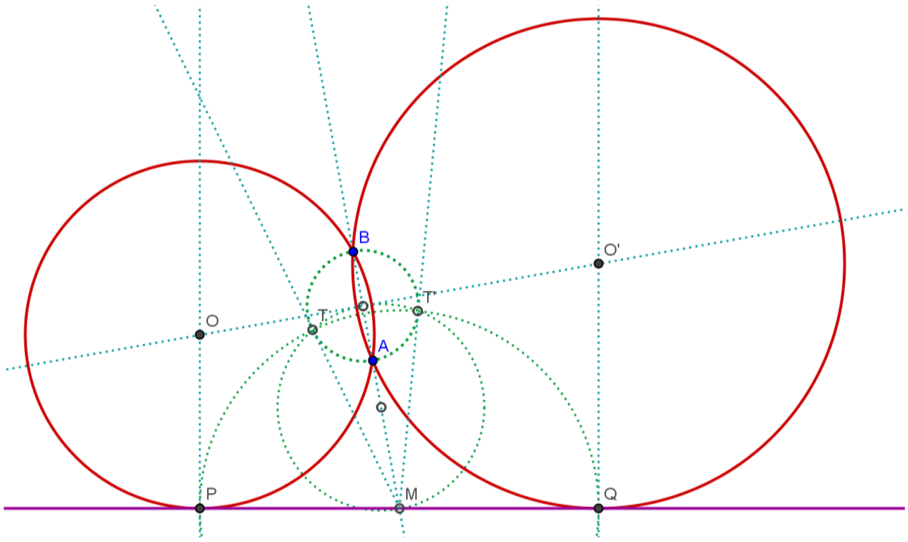


Figura 11: Circunferências tangentes à reta r que passam pelos pontos A e B quando AB e r concorrem

No final a construção seria assim: seja *M* a interseção das retas *AB* e *r*. Trace a circunferência de diâmetro *AB*, determine os pontos *T* e *T'* de tangência à circunferência de diâmetro *AB* passando por *M*. Trace a circunferência de centro *M* que passa por *T*, e marque os pontos *P* e *Q* de interseção da circunferência traçada com a reta *r*. Utilize o caso *PPP* para traçar duas circunferências, uma que passe por *A*, *B* e *P* e a outra, por *A*, *B* e *Q*.

Apesar de tradicionais, essas construções foram inspiradas no trabalho de TINOCO, L., pag. 76. Um último comentário antes de passar para o próximo problema é que foi a primeira vez em nosso estudo que um ponto foi determinado pela interseção de reta-circunferência e não como reta-reta visto nos casos anteriores.

4. PRR: Traçar as circunferências que passam por um ponto e são tangentes a duas retas dadas

Sabemos que duas retas distintas pertencentes ao mesmo plano podem ser concorrentes ou paralelas e que um ponto pode ou não pertencer a uma reta. Quais são as posições relativas de um ponto *A* e duas retas *r* e *s* distintas? A tabela abaixo representa os casos possíveis, descreva-os.

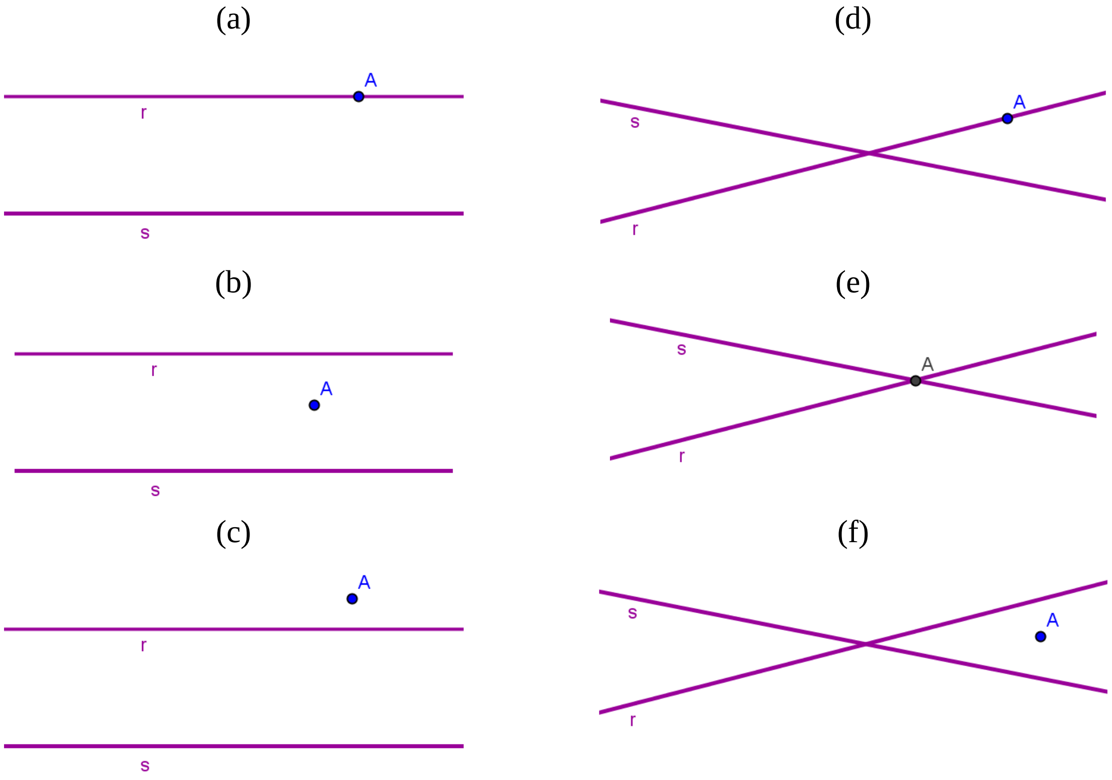


Figura 12: Posições relativas de um ponto e duas retas

Em cada um dos casos da Figura 13, tente identificar se é possível traçar a tal circunferência e, caso seja possível, você é capaz de determinar a quantidade de soluções? Vamos estudar cada um isoladamente.

4.1. As retas são paralelas

Esboce um ponto *A* e uma reta *r*, tal que $A \notin r$ e trace uma circunferência que passe por *A* e seja tangente a *r*. Agora trace uma reta *s* paralela a *r* no semiplano determinado por *r* que não contém *A*. Quais são as possíveis posições entre *s* e a circunferência traçada? Existe a possibilidade de *s* ser tangente à circunferência? Então sendo dadas duas retas paralelas *r* e *s* e um ponto *A*, tal que uma das retas separa o ponto da outra, caso (c), é impossível traçar uma circunferência que seja tangente às retas passando pelo ponto *A*.

No caso (a) temos que *r* e *s* são retas paralelas e *A* é um ponto pertencente a *r*. Visualize o problema resolvido. Qual é a posição do ponto *A* em relação à circunferência? Então, pode-se perceber que a reta perpendicular a reta *r* que passa por *A* fará parte de nossa construção. Por outro lado, se *B* é o ponto de interseção dessa perpendicular com a reta *s*, o que o segmento *AB* é da circunferência? Você conseguiria explicar por que esse caso tem apenas uma solução?

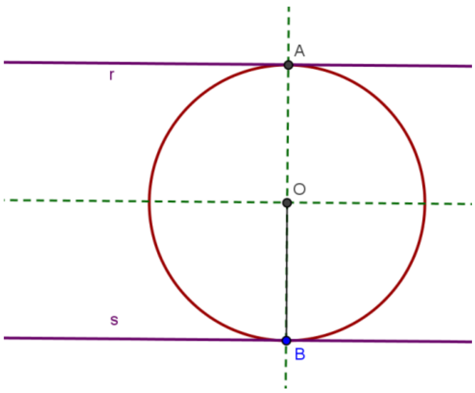


Figura 13: Circunferência tangente a duas retas paralelas que passa por um ponto quando este pertence a uma das retas

Considere as retas paralelas *r* e *s* e um ponto *A* pertencente a *r*. Trace uma perpendicular a *r* passando por *A*. Considere *B* o ponto de interseção da perpendicular com a reta *s*. Marque *O*, ponto médio de *AB*. Trace a circunferência de centro *O* e raio $\overline{OA}$, que será a solução do problema.

Agora, suponha que o ponto *A* está entre as retas, caso (b). Já vimos que para que uma circunferência seja tangente a duas retas paralelas *r* e *s*, seu centro deve pertencer à reta *t* também paralela e equidistante às mesmas. Falta encontrar outra propriedade para que o centro da circunferência seja determinado como interseção de dois objetos. Expresse o raio da solução em termos de *r* e *s*. Qual é a distância de *A* ao centro de uma solução em função de *r* e *s*? Lembrando que a distância entre o ponto *A* e o centro da circunferência procurada é igual à distância de *r* a *t*, como encontramos o conjunto de pontos a uma distância fixa do ponto *A*? Os centros das circunferências procuradas estão nas interseções desses dois objetos. Quantas são essas interseções? Como construir tais circunferências?

Há duas soluções para o problema nessa situação. Considere as retas paralelas *r* e *s* e um ponto *A* entre elas. Trace a reta *t* paralela equidistante de *r* e *s*. Trace um círculo com centro em *A* e raio igual à metade da distância entre as retas *r* e *s* e determine *B* e *C* os pontos de interseção da circunferência com a reta *t*. Estes pontos *B* e *C* são os centros das soluções do problema.

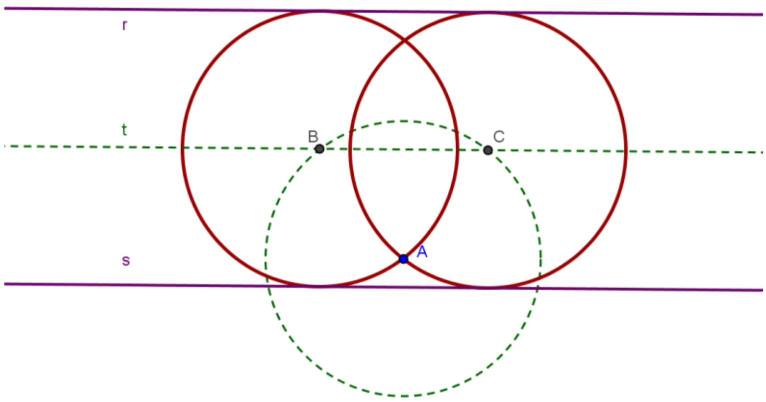


Figura 14: Circunferência tangente a duas retas paralelas que passa por um ponto quando este se encontra entre as retas

4.2. As retas são concorrentes

Na situação (e), trace uma circunferência de centro *O* que passe por *A* e seja tangente à reta *r*. Qual é o ângulo entre *OA* e *r*? O que se pode dizer sobre o ângulo entre *OA* e *s*? Quantos pontos essa circunferência e a reta s têm em comum? Você deve ter notado que nessa situação (e), o problema não tem solução, ou seja, não existe uma circunferência tangente a duas retas concorrentes que passe pelo ponto de interseção entre elas.

Vamos para o caso (d), na qual as retas são concorrentes e o ponto pertence a apenas uma dessas retas. Imagine o problema resolvido e seja *O* centro da circunferência. Qual é a distância de *O* à reta *r*? E à reta *s*? Qual é o conjunto dos pontos que têm essa propriedade? (Dica: T2). Por outro lado, qual é o ângulo entre as retas *OA* e *r*? Então, o centro da circunferência procurada deve ser interseção entre duas retas. Que retas são essas?

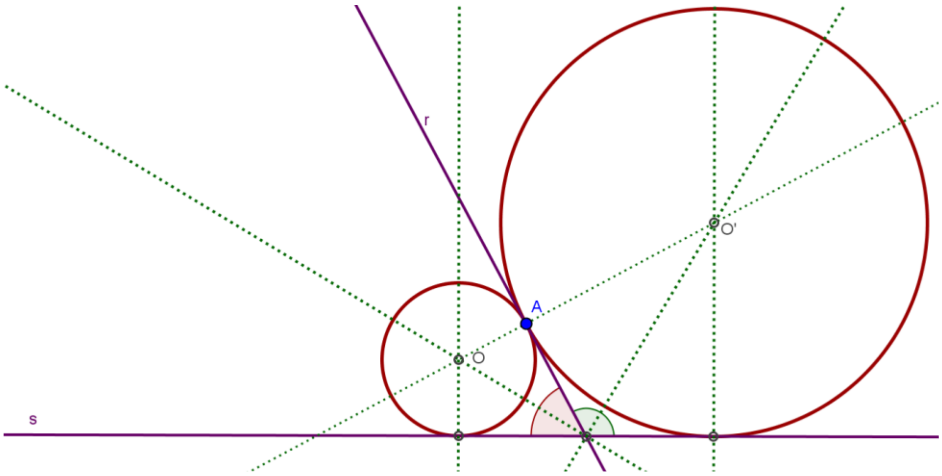


Figura 15: Circunferências tangentes a duas retas concorrentes que passa por um ponto quando este pertence a apenas uma delas

Dadas as retas *r* e *s* e o ponto $A \in r$, trace as bissetrizes dos ângulos com lados em *r* e *s*. Trace também a perpendicular a *r* que passa por *A*. Determine *O* e *O'* os pontos de interseção da perpendicular com as bissetrizes. Trace as circunferências de centros *O* e *O'* e raios $\overline{OA}$ e $\overline{O'A}$, respectivamente. Pelo fato de qualquer ponto da bissetriz equidistar de *r* e *s* e, em particular, o ponto de interseção com a perpendicular passando pelo ponto *A*, fica garantido que este será ponto de tangência.

Na situação (f), sejam uma reta e um ponto, trace a perpendicular à reta que passe pelo ponto. O ponto que pertencente à perpendicular e está a uma mesma distância da reta dada é chamado *simétrico do ponto dado com relação à reta*. Construa o ponto *A*,*'* simétrico do ponto *A* com relação à bissetriz de *r* e *s*. O que a bissetriz é do segmento *AA'*? Explique por que uma circunferência solução também deve passar por *A'*. Como construir uma circunferência que passe por *A*, *A'* e seja tangente a *r*? Você já viu este problema antes? Justifique que esta circunferência é tangente a *s* (Sugestão: P3).

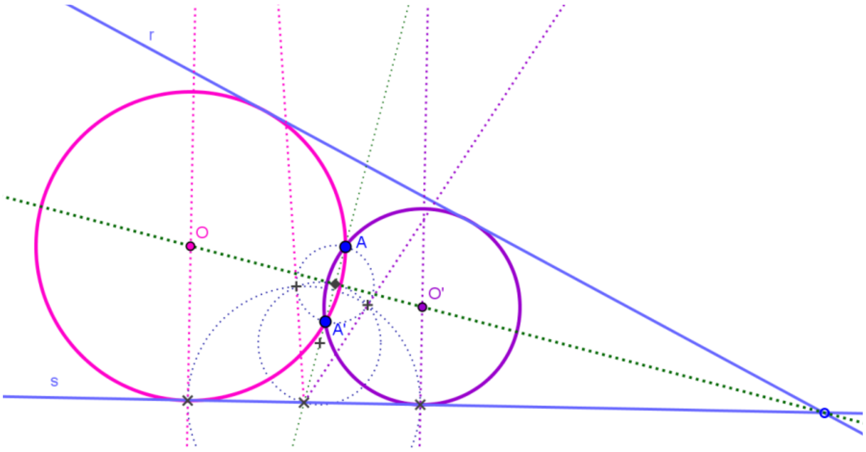


Figura 16: Circunferências tangentes a duas retas concorrentes que passa por um ponto quando este se encontra entre elas

Então para traçar uma circunferência tangente às retas concorrentes e que passa por um ponto que está entre elas, trace a bissetriz do ângulo formado pelas retas dadas. Sabemos que o centro da solução pertence a bissetriz. Apesar de um ângulo ter duas bissetrizes, a construção se refere àquela que está na mesma região do ponto *A*. Considere *A'* simétrico do ponto *A* dado em relação a essa bissetriz. Considerando *A*, *A'* e uma das retas dadas, recaia sobre a terceira situação do problema *PPR*. Isso ocorre porque determinando *A'* o simétrico do ponto *A* em relação à bissetriz, garantimos que a bissetriz é mediatriz de *A* e *A'*, logo *A'* pertence à circunferência, pois *A* e *A*' equidistam dos pontos da bissetriz.

Antes de passar para o próximo Problema de Apolônio, aproveite o dinamismo do *Geogebra* e deslize o ponto *A* para visualizar as situações deste problema. Os próximos três problemas – *PPC*, *PRC e RRC* ao serem comparados aos quatro primeiros, apresentam um grau maior de complexidade. Então, antes de passarmos a eles, volte ao texto e recorde as proposições citadas, pois serão utilizadas nos próximos capítulos.

5. PPC: Traçar as circunferências tangentes a uma circunferência dada que passem por dois pontos dados

Dada uma circunferência α de centro O e dois pontos A e B, procuramos uma circunferência β de centro O' que passe por A, B e seja tangente a α. Quais são as posições relativas entre um ponto e uma circunferência? Quais são as relações entre a distância do centro ao ponto dado e o raio em cada um dos três casos? E as posições entre dois pontos e uma circunferência? Se os dois pontos A e B pertencem à circunferência α, quantas soluções tem o nosso problema? E se A é interno a α e B é externo, é possível traçar tal circunferência?

A partir deste problema, para diferenciar da circunferência dada, passaremos a preencher a circunferência solução nas ilustrações. Agora analisemos o caso em que apenas um ponto pertence à circunferência dada.

5.1. Apenas um dos pontos pertence à circunferência

Imagine duas circunferências que possuem apenas um ponto em comum. Como se denomina a posição relativa entre elas? Qual é a relação entre os raios e a distância entre os centros? O que se pode afirmar sobre os centros e o ponto de tangência? Justifique.

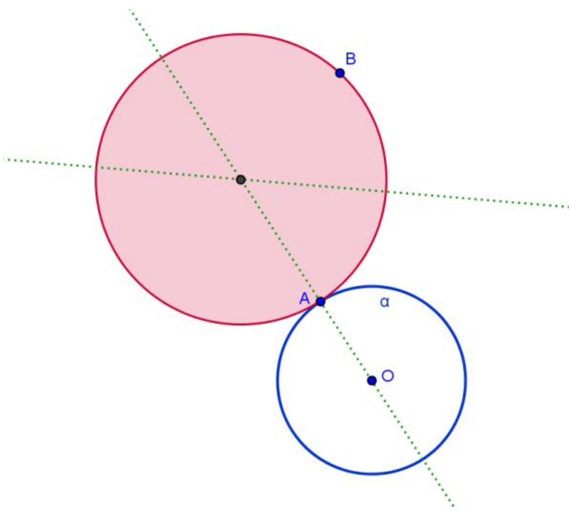


Figura 17: Circunferência tangente à circunferência dada passando por dois pontos um deles pertence a ela e o outro é externo

Estamos procurando uma circunferência β, que passe por $A \in \alpha$ e por $B \notin \alpha$ e seja tangente à circunferência α dada, de centro *O*. Para determinar o centro da circunferência β podemos pensar na interseção de duas retas. Quais são elas? O ponto *O'*, centro da circunferência β deve pertencer à reta *AO*. Além disso, sabemos que os pontos *A* e *B* pertencem a β. Qual é o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por *A* e *B*? (Sugestão: Veja a Proposição 1[4]). Tente agora determinar o ponto *O'*. Este ponto estará definido para qualquer posição do ponto *B*? Use o dinamismo do *Geogebra* para investigar.

[4]P1: Se uma circunferência passa por dois pontos A e B, então o seu centro se encontra na mediatriz do segmento AB.

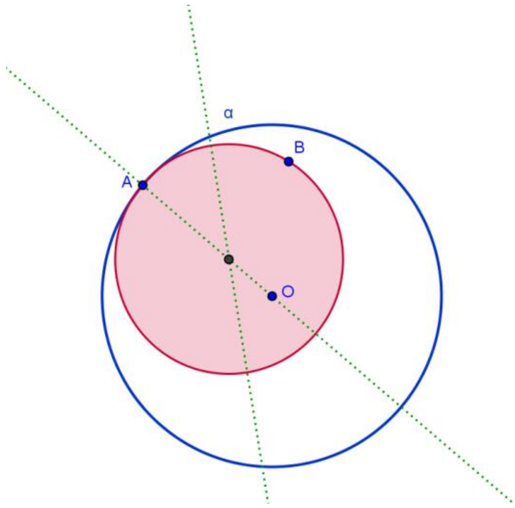


Figura 18: Circunferência tangente à circunferência dada passando por dois pontos um deles pertence a ela e o outro é interno

Então, vamos recordar a construção. Como *A* é o único ponto de interseção entre α e β, é ponto de tangência. Traçamos a reta *AO* e podemos garantir que *O'*, centro de β pertence à reta *AO*. Além disso, sabendo que β passa por *B* e por *A*, então trace a mediatriz de *AB*. O ponto *O'* é a interseção dessas duas retas traçadas. Observe que se *OÂB* é reto, então a mediatriz de *AB* será paralela a *AO*, logo o problema não terá solução.

5.2. Nenhum dos pontos pertence à circunferência

Já vimos que se um ponto é externo e outro interno o problema não tem solução. Os casos em que ambos são externos e ambos internos são resolvidos de maneiras análogas.

O problema não possui solução para certas posições especiais dos pontos *A*, *B* e *O*, encontre todas elas. A resolução do problema consiste em determinar o ponto de tangência entre as circunferências e então usar o caso *PPP* já conhecido. Imaginemos que β já foi construída. Denominando *T* a interseção de α e β, trace por *T* a perpendicular à *OT* e seja *C* a interseção dessa perpendicular com a reta *AB* (veja Figura 20 a seguir). Será que sempre existirá essa interseção *C*? Quando o ponto *C* não está definido?

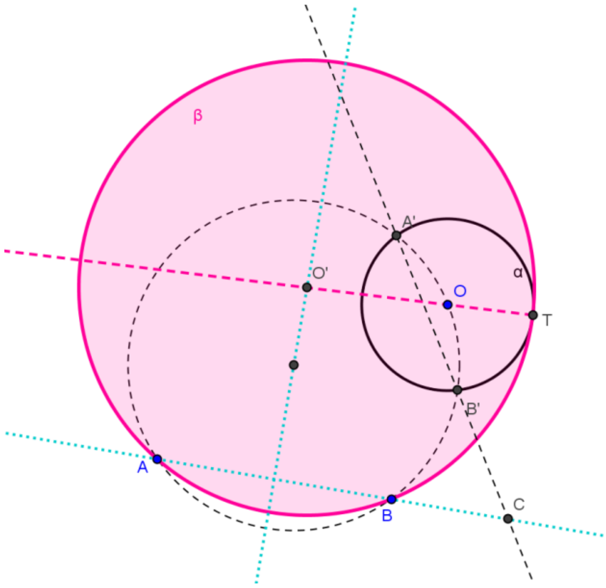


Figura 20: Circunferência tangente à circunferência dada passando por dois pontos ambos externos a ela

Suponha primeiro que o ponto *C* não esteja definido. Nesta situação, lembrando que *T* é o ponto de tangência das circunferências α e β, qual é a posição relativa das retas *OT* e *AB*? Construa o ponto *T* pertencente a α tal que as retas *OT* e *AB* tenham a propriedade verificada na última pergunta. Uma vez determinado o ponto *T*, o problema fica reduzido a um dos casos já resolvidos, que caso é este?

Admita agora que o ponto *C* esteja definido. Quais são as posições relativas das retas *AB* e *CT* em relação à circunferência β? Lembrando as relações métricas de uma secante e uma tangente partindo de um mesmo ponto numa circunferência (ver Construção *CT*), podemos afirmar que $\overline{CT}^2 = \overline{CA}\,.\overline{CB}$. Agora seja *A'* um ponto de α não colinear com *A* e *B*.

Trace uma circunferência α' que passe pelos pontos *A*, *B* e *A'* (*PPP*). Seja *B'* a outra interseção de α' com α (se α' fosse tangente a α, o problema estaria resolvido). Com relação à circunferência α, quais são as posições relativas das retas *A'B'* e *CT*? Logo, da mesma forma, $\overline{CT}^2 = \overline{CA'}.\overline{CB'}$, ou seja, $\overline{CA}\,.\overline{CB} = \overline{CA'}\,.\overline{CB'}$. Então para a construção de β se faz necessário construir uma terceira circunferência α', dita anteriormente, para que possamos chegar às relações métricas e assim determinar o ponto de tangência *T*.

A partir de tudo o que foi dito, nossa construção terá os seguintes passos:

1. Trace a reta *AB* e a mediatriz do segmento *AB*;

2. Utilizando o problema *PPP*, trace uma circunferência auxiliar α' que passe por *A*, *B* e seja secante a α. Sejam *A'* e *B'* os pontos interseção de α' e $\boldsymbol{\alpha}$;

3. Trace a reta *A'B'* e determine o ponto *C* de interseção das retas *AB* e *A'B'*;

4. Trace a circunferência de centro *C* e raio $\overline{CA}.\overline{CB}$ e chame de *T* um dos pontos de interseção desta circunferência com α.

5. Trace a circunferência β, utilizando o caso *PPP*, que passe por *A*, *B* e *T*.

Seja *O'* o centro da circunferência β, podemos determiná-lo a partir da interseção de duas retas. Quais são essas retas? O que se pode afirmar a respeito dos pontos *O, O'* e *T*? O ponto *O'* pertence a uma reta importante em relação ao segmento *AB*, que reta é essa?

Na verdade, por um ponto externo a uma circunferência, podemos traçar quantas tangentes? Logo, quantas são as soluções para o nosso problema nesta situação? A figura a seguir ilustra a outra solução.

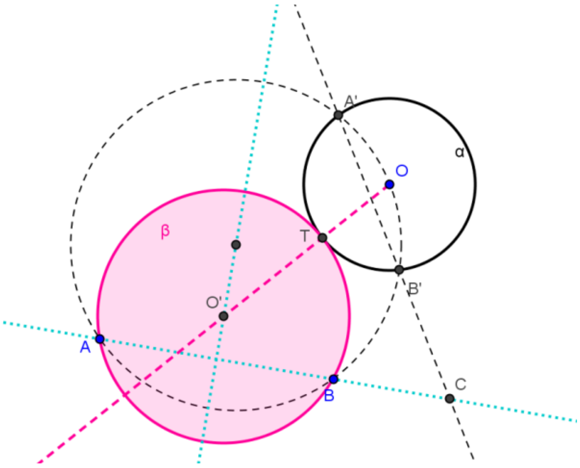


Figura 19: Circunferência tangente à circunferência dada passando por dois pontos ambos externos a ela

Utilizando os mesmos elementos do item anterior e com o dinamismo do *Geogebra* deslize *A* e *B* para o interior de α. Será que há alguma diferença da construção atual para a anterior? Agora, tente repetir o processo e observe o que acontece.

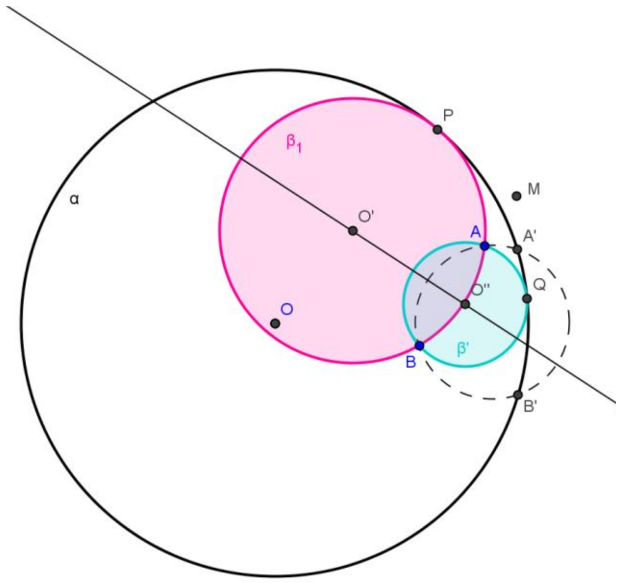


Figura 20: Circunferências tangentes à circunferência dada passando por dois pontos ambos internos a ela

6.PCR: Traçar as circunferências tangentes a uma circunferência e uma reta dadas e que passem por um ponto dado

Quais são as posições entre uma reta e uma circunferência? E um ponto em relação à reta e à circunferência? Existe uma posição específica entre os três elementos em que o número de soluções é infinito, você saberia identificar qual é? Observando a Figura 23, tente perceber quantas soluções tem nosso problema. Repare que, ao deslocar *P*, o número de soluções pode alterar.

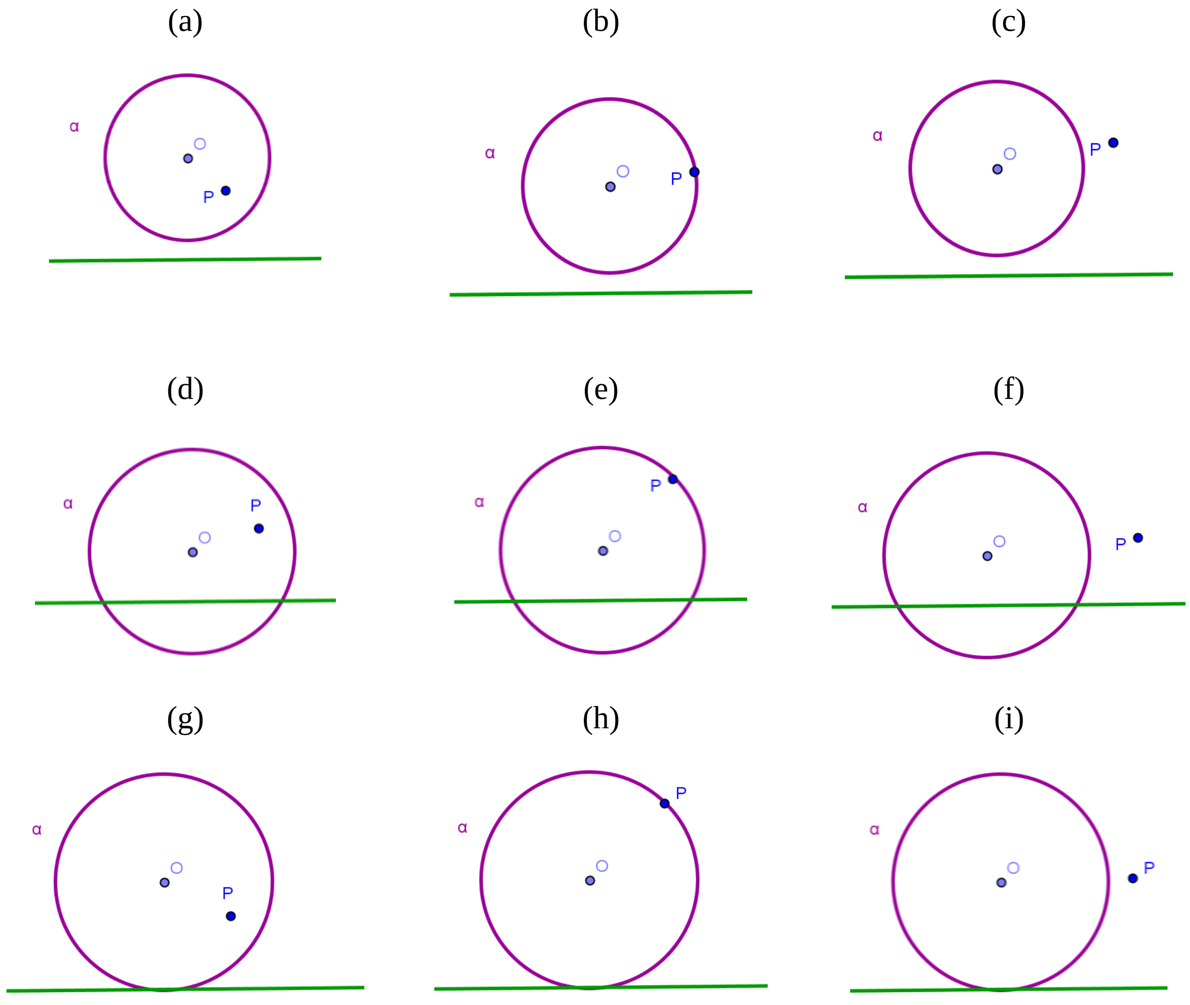


Figura 21: Posições entre ponto, reta e circunferência

Vamos restringir todos os casos nas três situações a seguir: quando o ponto pertence à circunferência, casos (b), (e) e (h), quando ele pertence à reta *r* e quando ele não pertence nem à reta nem à circunferência, demais casos.

6.1. O ponto pertence à circunferência

Sejam P, r e α respectivamente o ponto, a reta e a circunferência, supondo $P \in r$. A circunferência procurada β de centro O_1 tem que ser tangente à circunferência α de centro O e passar pelo ponto P, logo P é o ponto de tangência entre α e β. Qual deve ser a posição entre O, P e O_1 para que isso aconteça? Qual é a relação entre as distâncias desses três pontos? Além disso, qual é a posição de β em relação à r? Logo, o que se pode afirmar da distância de O_1 à reta r?

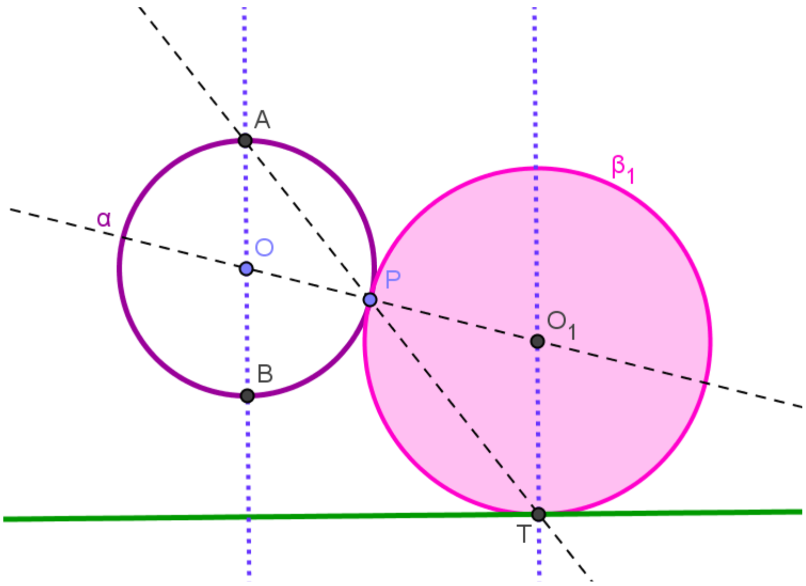


Figura 22: Circunferência tangente a uma reta e a uma circunferência, passando por um ponto da circunferência dada

Imagine a circunferência β_1 já construída e T o ponto de tangência de β_1 com r, prolongue TP e encontre o ponto A, interseção de TP com α. Se A, O e P são colineares, o problema fica mais simples e a construção é parecida. Este é o caso PO perpendicular a r, ele só possui uma solução e deixaremos este caso para o leitor. Suponha agora que AOP forme um triângulo, como se classifica, em relação aos lados, o triângulo PO_1T? Você conseguiria provar a semelhança entre os triângulos AOP e PO_1T? Como consequência desse fato, o que se pode afirmar a respeito dos ângulos $O\hat{A}P$ e $O_1\hat{T}P$? Então, qual é a posição relativa entre as retas *AO* e TO_1? Sendo *T* ponto de tangência de β_1 com *r*, qual é o ângulo que essas retas fazem com a reta *r*? Qual é a posição entre os pontos *O*, *P* e O_1?

Voltando à construção. Dados *P*, *r* e *α*, com $P \in \alpha$, como construir o ponto *A*? Após construir *A*, como identificar *T*? Já que O_1 é equidistante de *P* e *T*, qual é a reta a que este ponto deve pertencer? Por outro lado, O_1, *P* e *O* são colineares, então para determinar O_1 como interseção de duas retas, qual seria o procedimento? Tente terminar o problema sozinho a partir daqui. Quando você traçou a reta perpendicular a *r* passando por *O* foi determinado outro ponto, digamos *B*, de interseção com *α*. Se usarmos este ponto no lugar de *A*, teremos outra solução.

Trace uma reta perpendicular à *r* passando por *O*, determine os pontos *A* e *B*, interseções dessa reta com *α* e trace a reta *OP*. Trace a reta *AP*, determinando *T* como interseção entre as retas *r* e *AP*. Trace uma perpendicular à *r* passando por *T* e a mediatriz de *PT*. Defina O_1 o ponto de interseção entre a mediatriz e a perpendicular. Trace a circunferência β_1 de centro O_1 e raio O_1T. Repita a construção anterior utilizando *B* em vez de *A*, o que você observa? Quantas soluções têm esse problema quando *P* pertence a *α*?

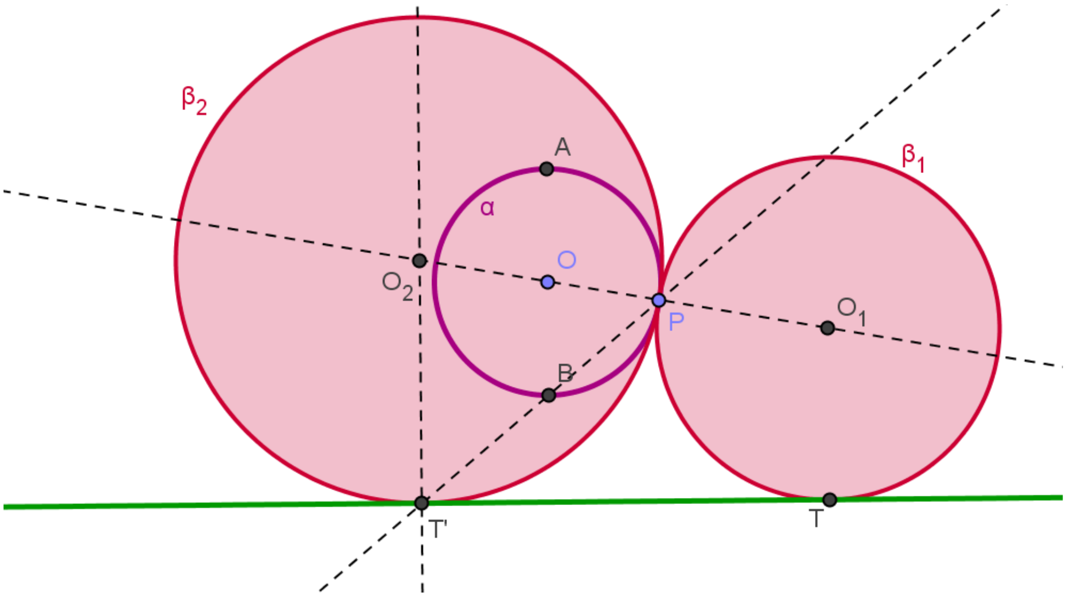


Figura 23: As duas soluções para o caso PCR, quando P pertence a C

E se *r* for tangente a *α* num ponto diferente de *P*, será que altera o número de soluções? Você consegue justificar que é apenas uma? Repita a construção anterior para o caso de *r* ser secante a *α*. O que você observa em relação às circunferências soluções?

Aproveite o dinamismo do *Geogebra* para observar os casos particulares quando P é o ponto de tangência entre α e r e quando ele é uma das interseções no caso de r ser secante a α.

6.2. O ponto pertence à reta

Este caso é bem semelhante ao anterior, porém P deve ser o ponto de tangência da reta r com a circunferência β procurada. Você seria capaz de construir tal circunferência? Para lhe auxiliar trace a reta perpendicular a r que passa por O, determinando novamente os pontos A e B. Trace também as retas AP e BP e proceda de forma análoga ao caso anterior. Observe que agora se torna imprescindível a construção das mediatrizes. Deixamos como exercício essa situação. Na dúvida, retorne ao item anterior.

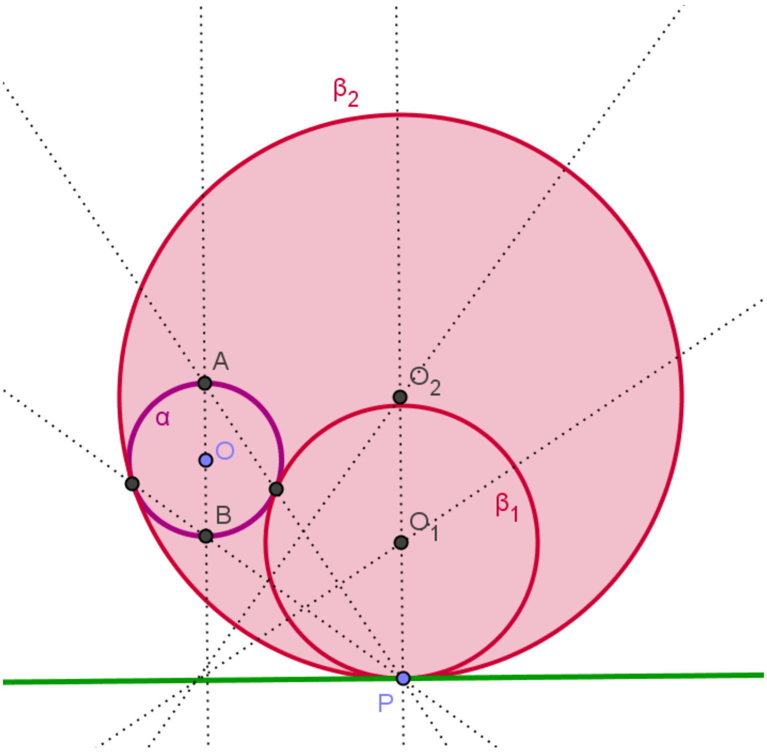


Figura 24: Circunferências do caso PCR, quando P pertence a r

6.3. O ponto não pertence nem à reta nem à circunferência

Neste caso apresentamos a construção da solução diretamente. Os exercícios estão apenas nas justificativas. Sejam dados uma circunferência α de centro O, uma reta r e um ponto P, tal que P não pertença nem à reta nem à circunferência. Trace a reta t perpendicular à r passando por O. Denomine A e B os pontos de interseção de t com α e seja M o ponto de interseção de t com r. Use *PPP* e trace a circunferência α_1 que passa por P, B e M. Identifique Q, distinto de P, ponto de interseção da reta AP com a circunferência α_1. Lembre-se que para existir Q é necessário que a reta AP não seja tangente à circunferência em P. Use *PPR* para traçar a circunferência β_1 que passa por P e Q e seja tangente a r. Afirma-se que β_1 é tangente a α. Isso é o que passaremos a justificar agora.

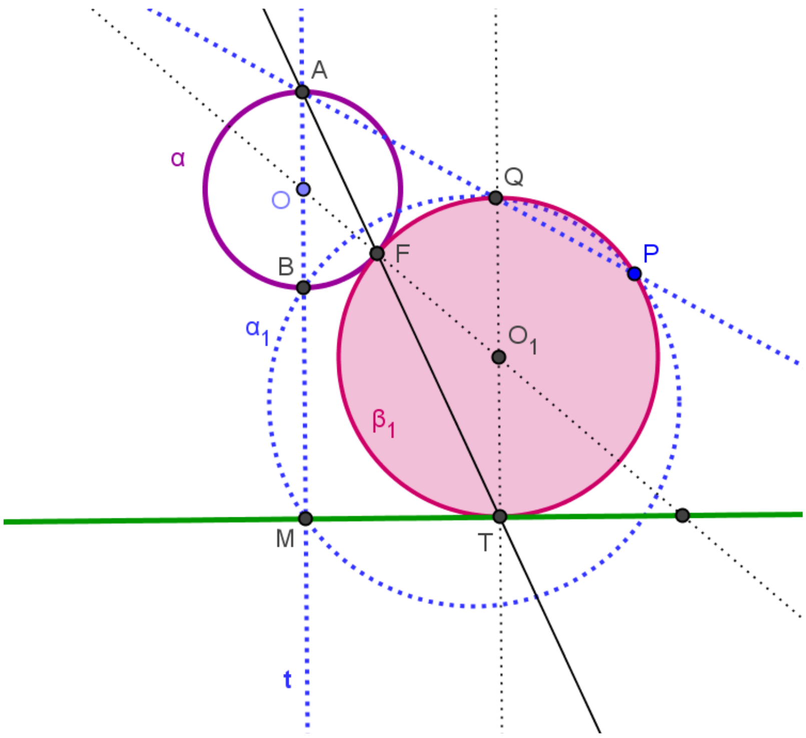


Figura 25: Circunferência tangente à reta e à circunferência, passando por um ponto dado

Quais são as posições relativas das retas AM e AP em relação a α_1? Logo,

$$\overline{AB} \cdot \overline{AM} = \overline{AQ} \cdot \overline{AP} \qquad (1)$$

Considere T ponto de tangência entre β_1 e r e o ponto F de interseção entre a reta AT e α. Observando os triângulos AFB e AMT, quanto medem os ângulos com vértices F e M? Prove a semelhança desses dois triângulos. Pela semelhança, podemos concluir que

$$\overline{AT} \cdot \overline{AF} = \overline{AB} \cdot \overline{AM} \qquad (2)$$

Igualando (1) e (2), temos $\overline{AT} \cdot \overline{AF} = \overline{AQ} \cdot \overline{AP}$. Portanto $F \in \beta_1$. Falta justificar que F é o único ponto de interseção de α e β. Como podemos classificar a concorrência das retas OA e O_1T com r? Use este fato para garantir que os ângulos $\widehat{AFO}$ e $\widehat{TFO_1}$ são iguais. Conclua que O, F e O_1 são colineares, logo F é ponto de tangência entre as circunferências α e β. Então β_1 é uma das soluções procuradas. Porém, pelo caso *PPR*, há duas circunferências soluções. Além disso, repita o processo da construção trocando A por B. A Figura 28 engloba todas as soluções procuradas.

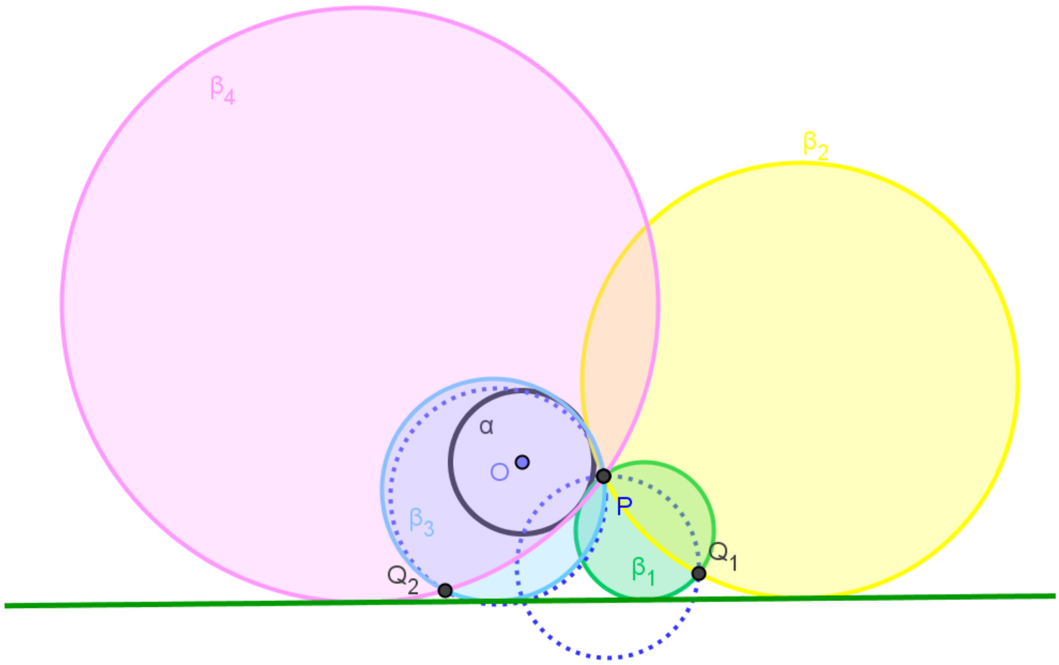


Figura 26: As quatro soluções do problema PRC

7. RRC: Traçar as circunferências tangentes a uma circunferência e a duas retas dadas

Quais são as posições entre duas retas? E uma reta e uma circunferência? Quais são as posições entre duas retas e uma circunferência? O que deve acontecer com a distância entre o centro da circunferência procurada e as retas? Observe que uma reta não pode separar o centro da outra reta.

Tal como nos problemas anteriores o número de soluções depende das posições dos três elementos. Esse número varia de zero a oito, excetuando sete. Sejam as circunferências α e β, tais que α é a circunferência dada de centro O e raio r e β é a procurada de centro O' e raio r'. Em todos os casos que trabalharemos neste capítulo, o centro O' de β será determinado pela interseção de uma reta com uma circunferência. Que reta seria essa? Lembre-se que O' é equidistante das retas dadas, então, no caso de serem paralelas, que reta é essa? E no caso de serem concorrentes? E que circunferência estamos falando?

Para responder a última pergunta, dadas as retas t e s e a circunferência α e supondo o problema resolvido, ou seja, a circunferência β tangente à t, à s e à α já construída. Aumentando em r o raio r' de β, quais serão as novas posições relativas de β em relação a α, t e s. E se tomarmos retas t' e s', paralelas a t e s, respectivamente, a uma distância de $r + r'$ de O'? Você consegue recair a algum problema já visto, para determinar O'? (Vide fig 15, pag 24)

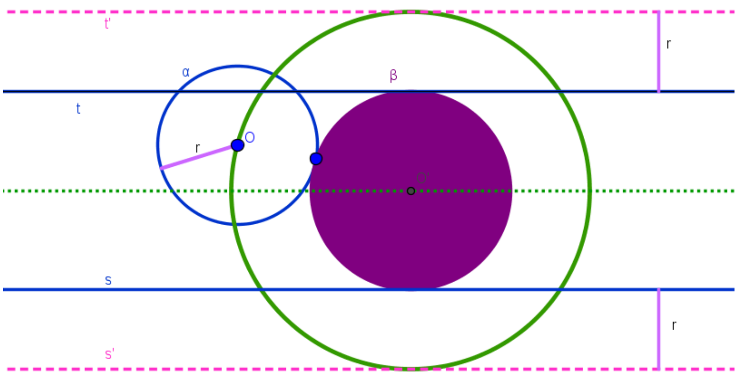


Figura 27: Circunferência de centro O', passando por O e raio r + r', quando t e s são paralelas

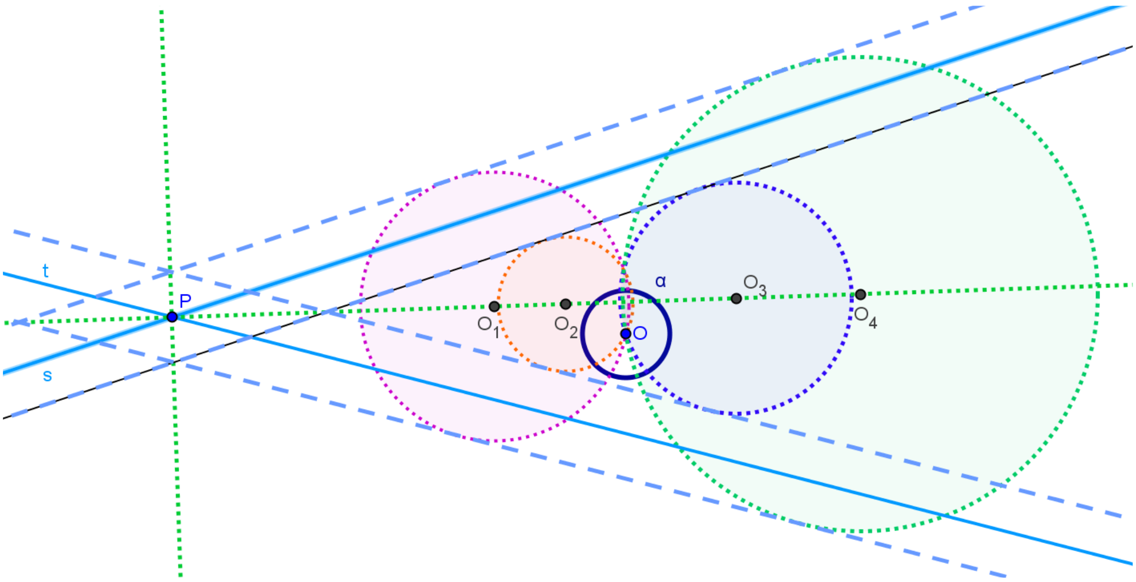


Figura 28: Circunferências de raios r + r' e r - r' tangentes às retas paralelas à t e à s

Vamos fixar nossos casos nas posições das duas retas dadas *t* e *s*. Elas podem ser paralelas ou concorrentes e, daí, a circunferência α pode ser externa, tangente ou secante a cada uma delas.

7.1. As retas dadas são paralelas

Observando a figura a seguir, tente caracterizar cada uma das situações e esboçar as soluções (se existirem). O centro de cada uma das circunferências deve pertencer a qual reta?[5] E qual deve ser o raio dessas circunferências soluções?

[5] Vide 4.1, página 23

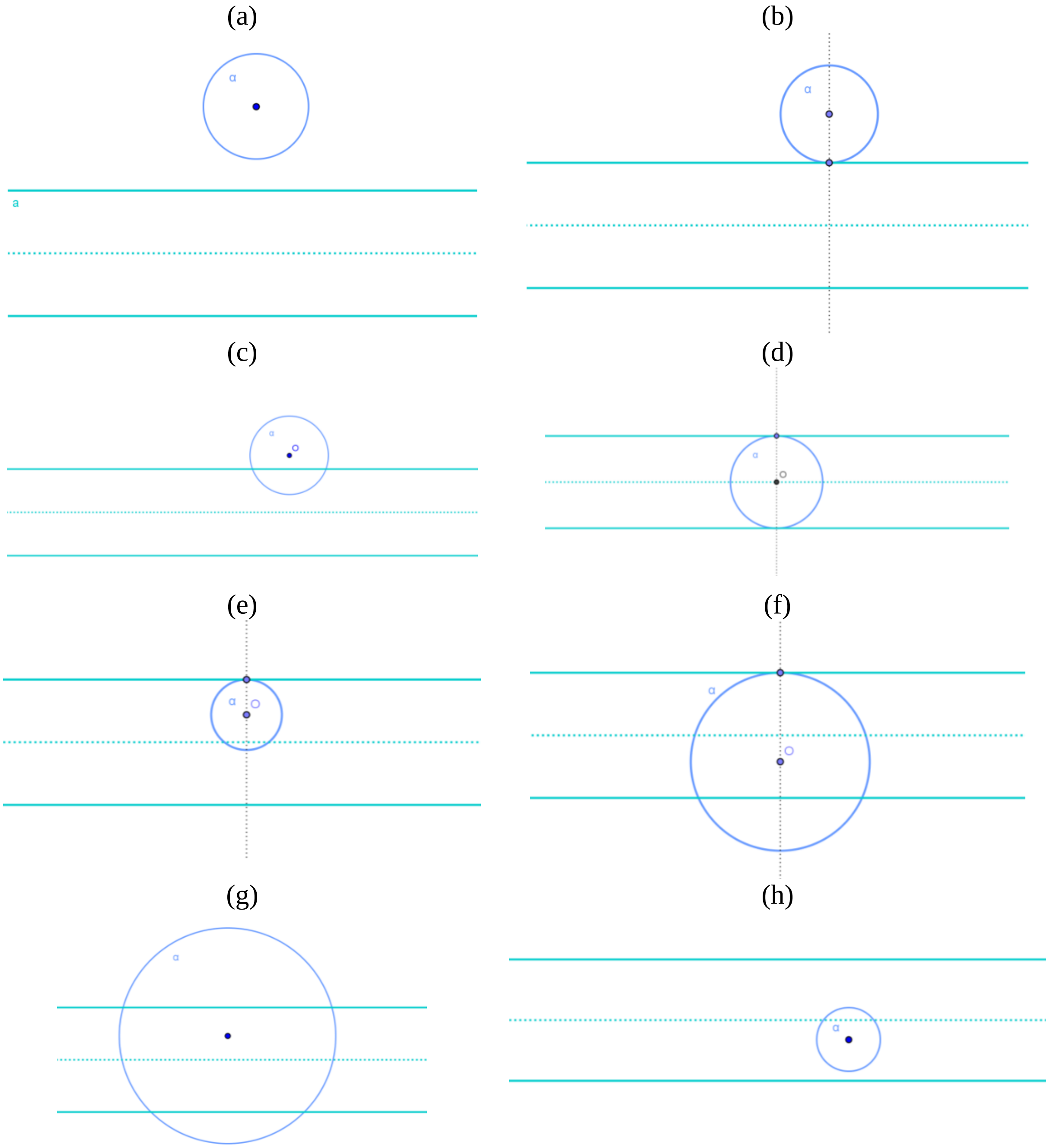


Figura 29: Posições entre duas retas paralelas e uma circunferência

Já que o centro da circunferência procurada β deve pertencer à reta paralela equidistante às duas dadas, pode-se perceber que quando t e s são exteriores à α e α não está entre t e s (a), o problema não tem solução, você saberia justificar?

Considere agora a situação (b). Como α é tangente à reta t (ou a s) e nenhum ponto de α está estritamente entre t e s, a circunferência β deve tangenciar as retas dadas s e t em que pontos? Quantas circunferências β existem com essa propriedade? Faça a construção dela(s).

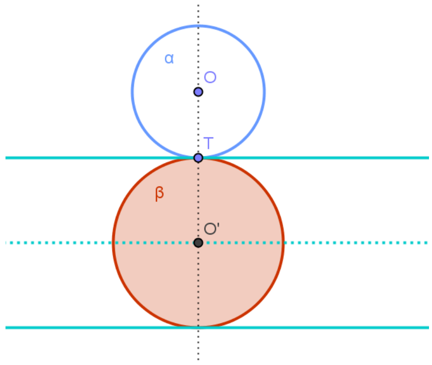


Figura 30: Circunferência tangente a duas retas paralelas e a uma circunferência quando a circunferência é tangente a uma das retas

Considere dada a circunferência *α* de raio *r* que seja secante a *s* e não intersecte a reta *t*, como em (c). Considerando *r'* o raio da circunferência *β* procurada, então se deve traçar uma circunferência de centro *O* e raio *r' + r*. Os pontos de interseção dessa circunferência auxiliar com a paralela à *s* e à *t* são os centros das circunferências procuradas. Justifique. Qual deve ser a distância entre *O* e O_1, sendo O_1 o centro de uma das circunferências procuradas? Sobre qual circunferência estão os centros das soluções?

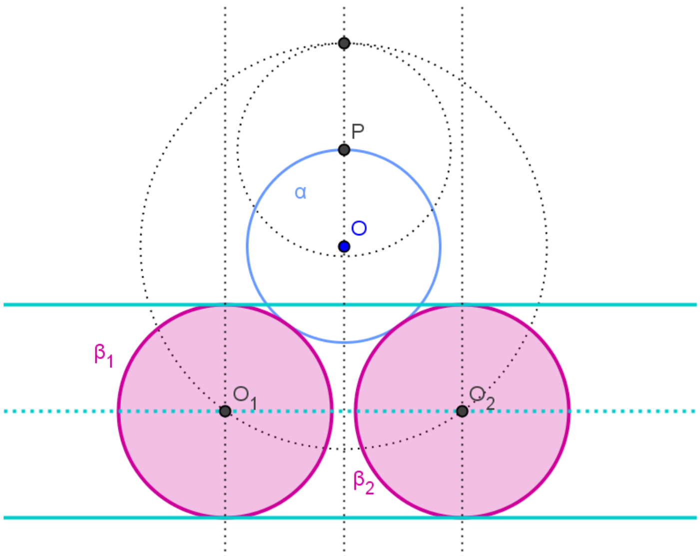


Figura 31: Circunferência tangente a duas retas paralelas e a uma circunferência quando a circunferência é secante a uma das retas

Na situação (d) da figura, que é o caso que *α* é tangente a *s* e *t*, como devemos proceder para determinar os centros das circunferências procuradas? Observando a Figura 34, você saberia identificar uma terceira solução? Por que a circunferência α não pode ser considerada uma das soluções?

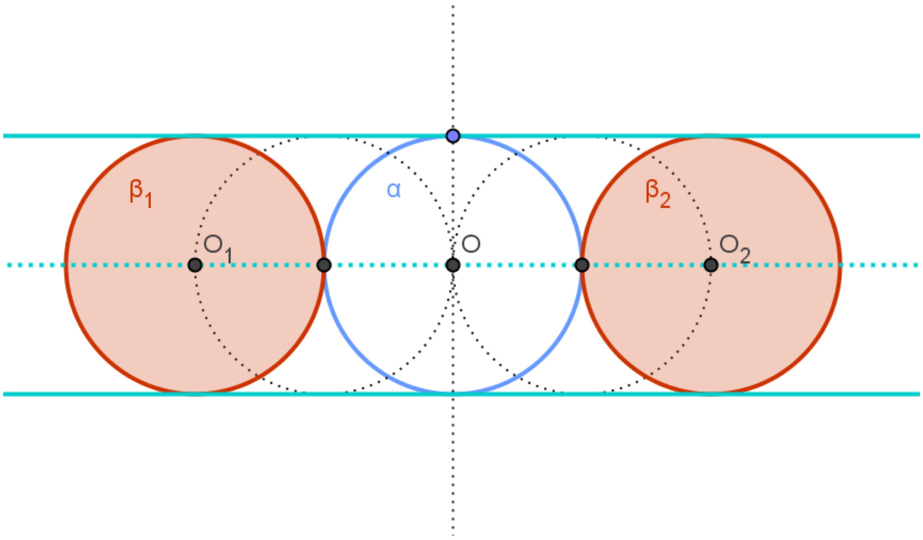


Figura 32: Circunferência tangente a duas retas paralelas e a uma circunferência quando a circunferência é tangente às retas

No caso que α é tangente a uma das retas, externa à outra e seu centro O está entre s e t (e), temos três soluções. Como determinar os centros das circunferências procuradas?

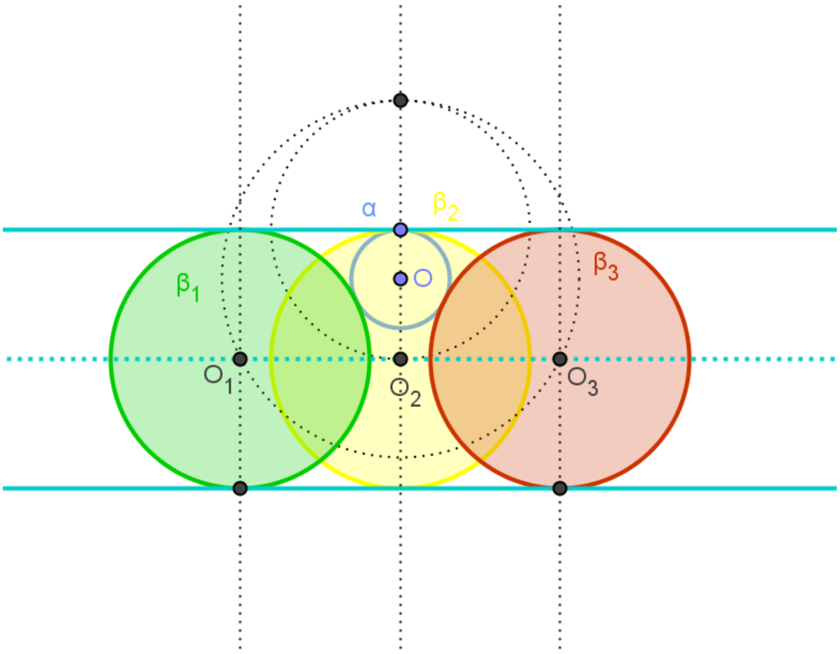


Figura 33: Circunferência tangente a duas retas paralelas e a uma circunferência quando a circunferência dada é tangente a apenas uma das retas

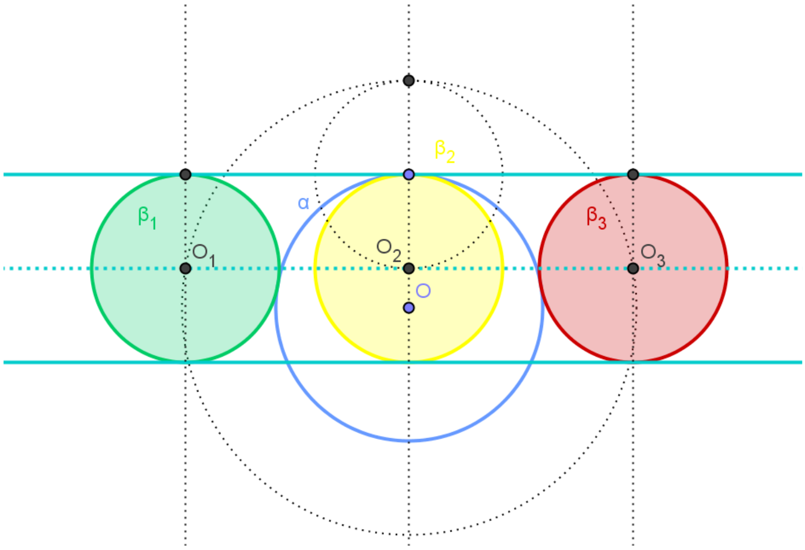


Figura 34: Circunferência tangente a duas retas paralelas e a uma circunferência quando a circunferência dada é secante a uma e tangente a outra reta

Observe a Figura 36. Ela ilustra o caso de α ser tangente a uma das retas e secante à outra (situação (f)) também haverá três soluções. O que diferencia na determinação dos centros dessas soluções?

Das quatro soluções do caso (g), duas delas têm distância entre seu centro e *O* (centro de α) igual à diferença entre os raios e as outras duas têm a distância igual à soma dos raios. Sobre que circunferências devem estar os centros das soluções? Então, quando α é secante às retas *s* e *t*, quais são as posições das circunferências soluções em relação à α?

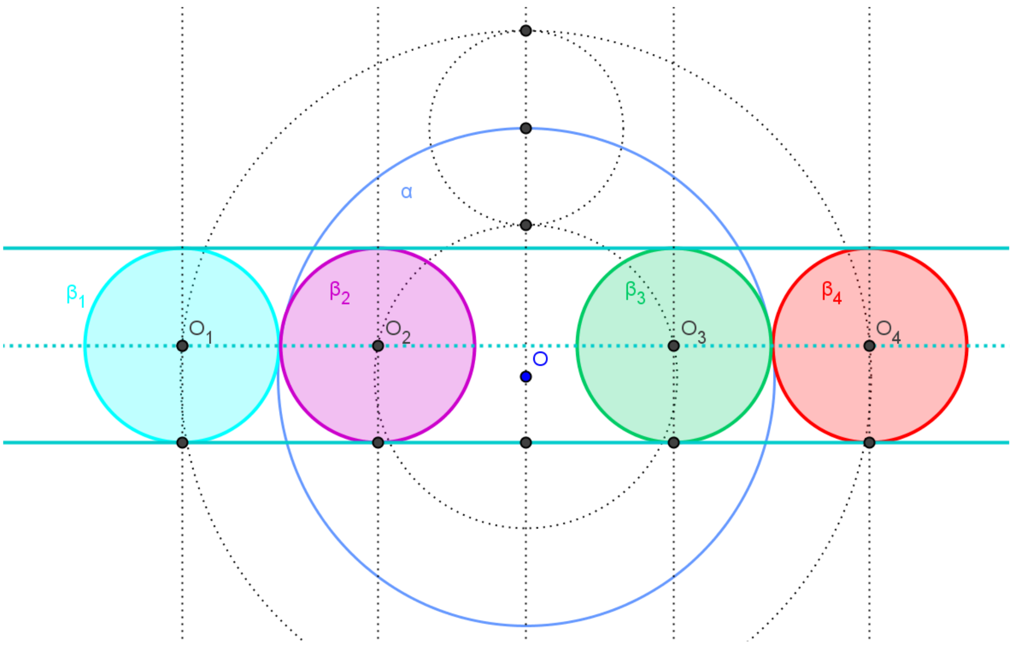


Figura 35: Circunferência tangente a duas retas paralelas e a uma circunferência secante às retas

A última situação no caso das retas serem paralelas é a que α está entre t e s (ver Figura 38). De forma análoga ao caso anterior, todas as quatro soluções são determinadas construindo circunferências auxiliares de raios iguais a $r' + r$ e $|\, r' - r \,|$.

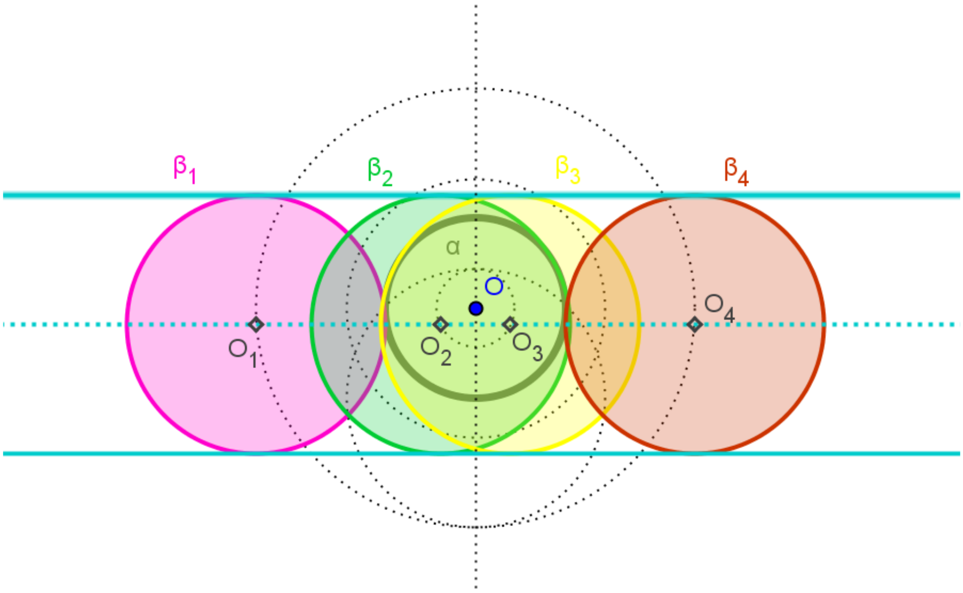


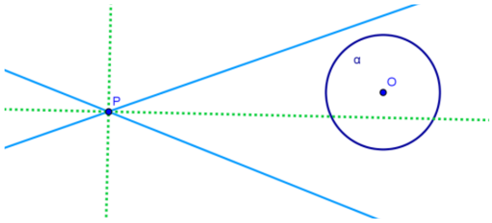
Figura 36: Circunferência tangente a duas retas paralelas e a uma circunferência que está entre as retas

7.2. As retas dadas são concorrentes

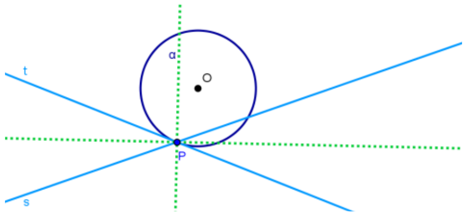
Sejam dadas a circunferência α de centro O e raio r e as retas concorrentes t e s que se intersectam no ponto P. Observando a figura a seguir, tente caracterizar cada uma das situações e esboçar a quantidade de soluções estabelecidas. O centro de cada uma das circunferências deve pertencer a qual reta?[6] E qual deve ser a distância entre os centros de α e β?

[6] Vide 4.2, página 24

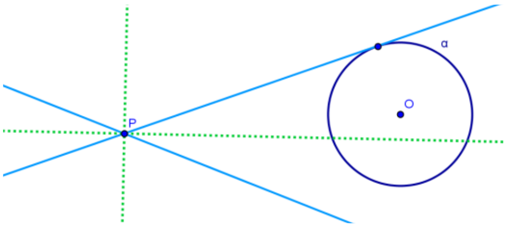
(a) 4 soluções



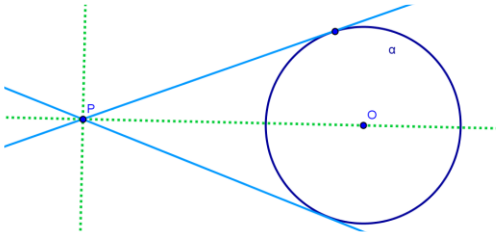
(b) 1 solução



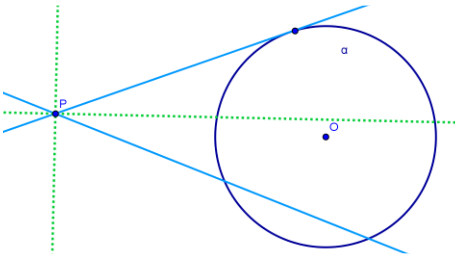
(c) 3 soluções



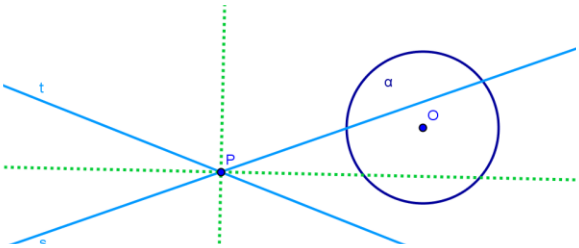
(d) 4 soluções



(e) 6 soluções



(f) 4 soluções



(g) 8 soluções

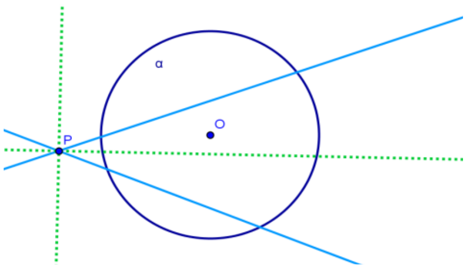


Figura 37: Posições entre duas retas concorrentes e uma circunferência

Para todas as situações acima é importante construir as paralelas a t e a s que distem r das retas. Vamos detalhar a situação quando α não intersecta nem t nem s (a), as demais situações são semelhantes. Como β é tangente às retas t e s, seu centro O' é equidistante das retas. A qual reta o centro O' deve pertencer? Quando você utilizará as duas bissetrizes?

Sendo r' o raio de β, essa será a distância do centro de β a t, a s e a α (de raio r). Logo, qual será a distância entre O e O'? Traça-se então as bissetrizes de t e s e as retas t' e t''

paralelas a *t* e *s'* e *s''* paralelas a *s* que distam *r* dessas retas, sendo *t''* e *s''* mais próximas de α. Quais devem ser as distâncias do centro *O'* a cada uma dessas seis retas?

Utilize o problema *PRR* para traçar circunferências auxiliares que passem por *O* e por *Q* e sejam tangentes à *s'* e *t'*, por exemplo, ao todo, são quatro circunferências auxiliares, pois poderíamos tomar *s''* e *t''*, *s''* e *t'* ou *s'* e *t'*. Denominando O_1, O_2, O_3 e O_4 os centros dessas circunferências auxiliares, afirma-se que são também os centros das circunferências soluções. Como se deve proceder para encontrá-las?

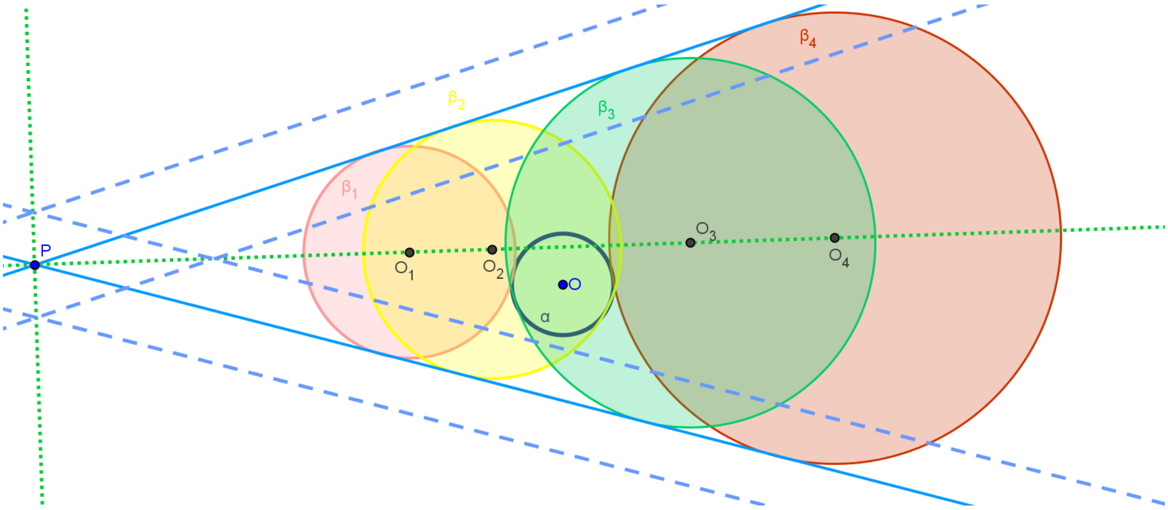


Figura 38: Circunferências tangentes a circunferência e a duas retas quando a circunferência não intersecta qualquer das retas

Considere agora a situação (b). Como α é tangente à reta *t*, temos que o ponto *O* centro de α pertence a *t''*. Novamente podemos usar o caso *PRR* para obter uma circunferência *β'* que passe por *O* e seja tangente às retas *t''* e *s'* (veja a Figura 37). Obtenha uma solução para o problema original a partir de *β'* e justifique que a circunferência encontrada é, de fato, solução. Experimente usar *PRR* com *O*, *t'* e *s''* dessa vez. O que você obtém?

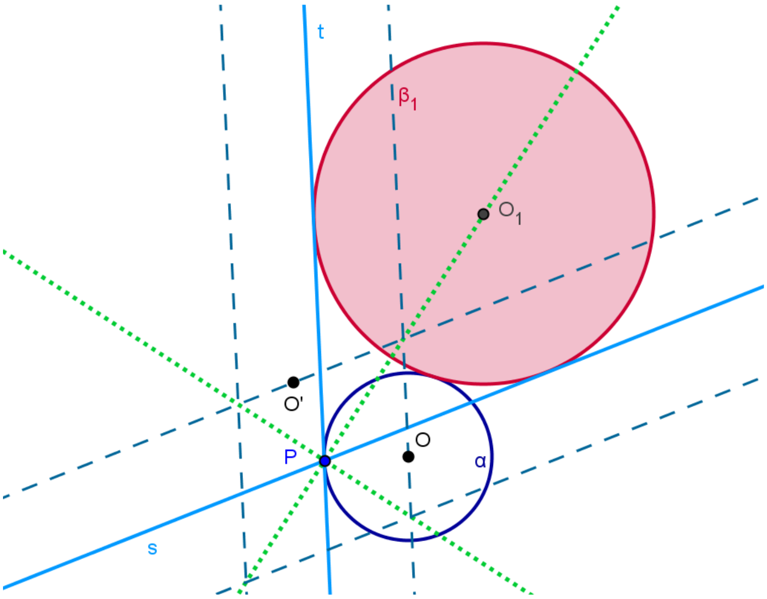


Figura 39: Circunferência tangente a circunferência e a duas retas quando a circunferência é tangente a uma das retas no ponto de interseção das retas

Em (c), a circunferência α é tangente a t em T e não intersecta s. As soluções nesta situação são encontradas de maneira análoga às duas anteriores, exceto o caso mais simples em que a circunferência solução, digamos β_3 é tangente a α em T. Seja O_3 o centro desta solução. Qual é a posição relativa dos pontos T, O e O_3? Lembrando que β_3 é tangente a s e a t, sobre que reta deve estar O_3?

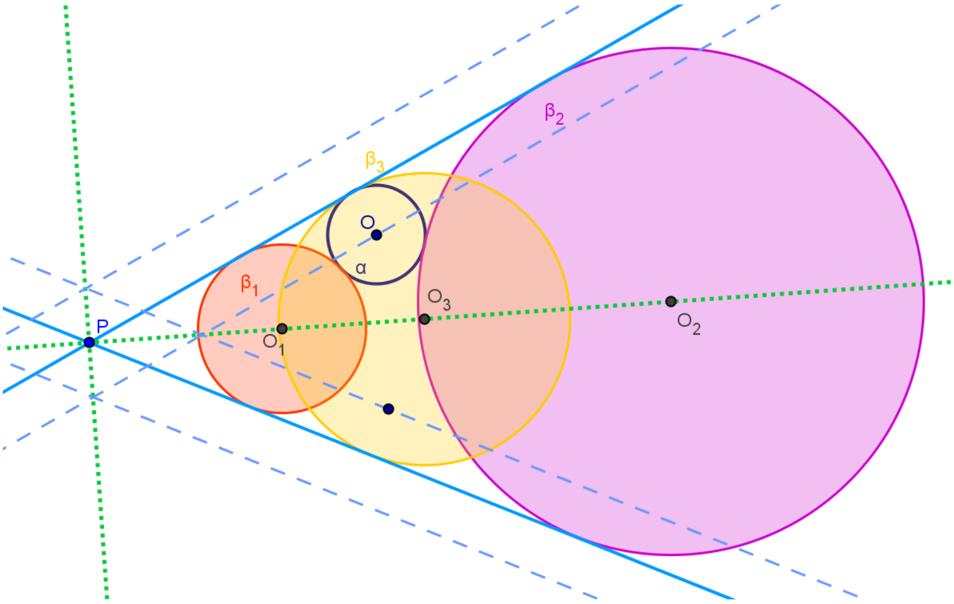


Figura 40: Circunferências tangentes a circunferência e a duas retas quando a circunferência é tangente a uma delas e não intersecta a outra

Quando α é tangente a t e a s (d), há quatro soluções, duas delas β_1 e β_2 têm centros - O_1 e O_2 - sobre a bissetriz que contém O, ou seja são colineares com P e O, já as outras duas soluções, β_3 e β_4, têm centros na outra bissetriz.

Sejam P_1 e P_2 interseções de α com a reta PO. A circunferência β_1 tem quais relações com α, s e t? A solução, daqui pra frente, recai no problema *PRR*[7]. Repita esse procedimento, para determinar β_2, utilizando P_2 em vez de P_1. Já as soluções β_3 e β_4 têm centros O_3 e O_4 e as retas OO_3 e OO_4 intersectam t e s em que pontos? Então como devemos proceder para determinar esses centros? (Dica: *PRR*)

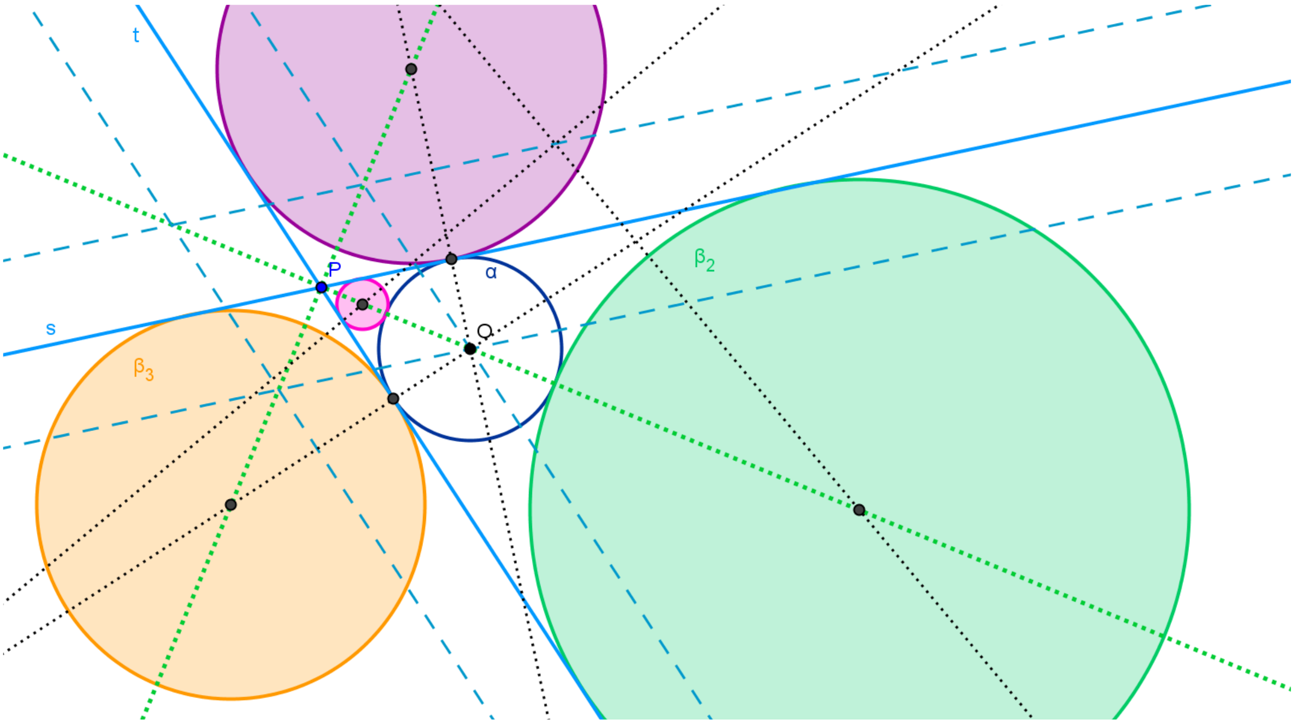


Figura 41: Circunferências tangentes a circunferência e a duas retas quando a circunferência é tangente a ambas as retas

Observe a Figura 44, que representa as cinco soluções da situação (e), quando α tangencia s e é secante a t. Sendo T o ponto em que α tangencia a reta s, use um dos Problemas de Apolônio já resolvidos anteriormente para construir as circunferências β_3 e β_4. Todas as outras soluções podem ser obtidas com o mesmo truque usado nas situações (b) e (c) desta seção, usando *PRR* para construir uma circunferência auxiliar com o mesmo centro da circunferência procurada. Deixaremos os detalhes para o estudante.

[7] Vide página 22

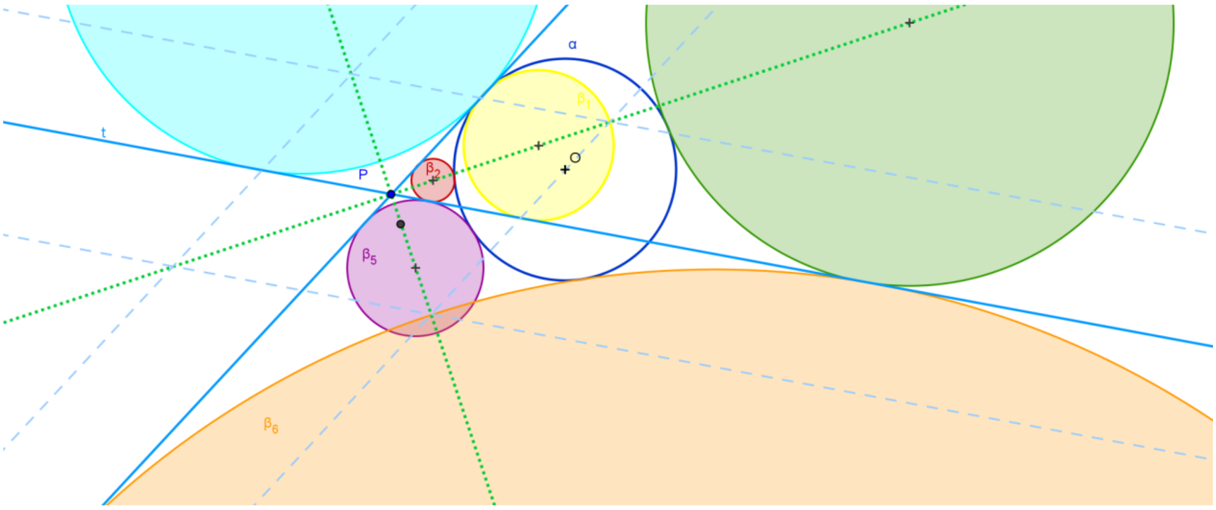


Figura 42: Circunferências tangentes a circunferência e a duas retas quando a circunferência é tangente a uma delas e secante a outra

As situações (f) e (g) são resolvidas com os mesmos passos utilizados nos casos anteriores. Por isso, apresentamos apenas as figuras das soluções.

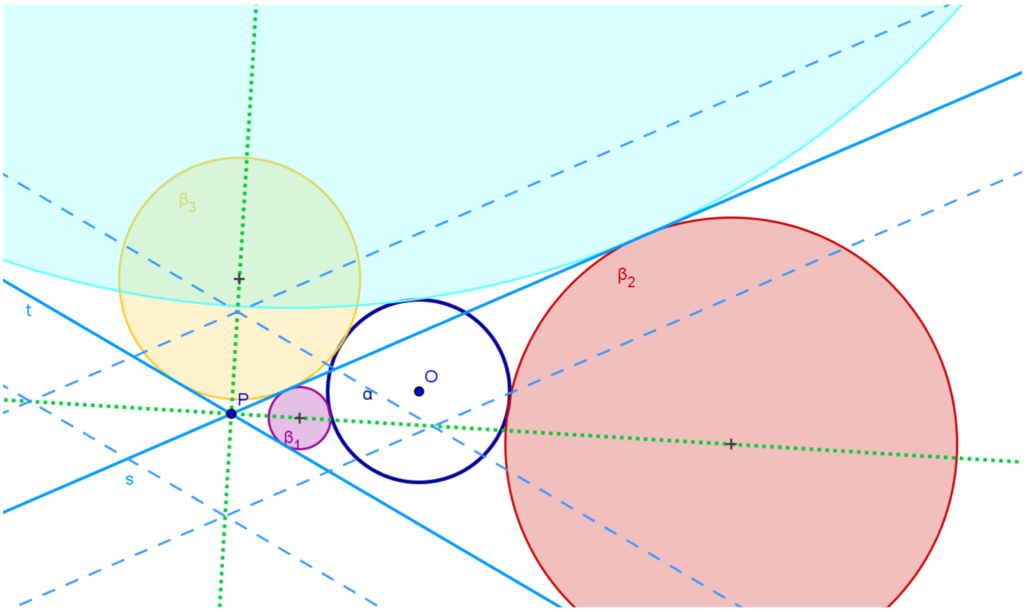


Figura 43: Circunferências tangentes a circunferência e a duas retas quando a circunferência é secante a uma delas e não intersecta a outra

Na última situação desse problema (g) é a primeira vez em nosso estudo que o problema apresenta oito soluções. Por que só nessa situação aparecem as oito circunferências? A resolução é análoga às demais.

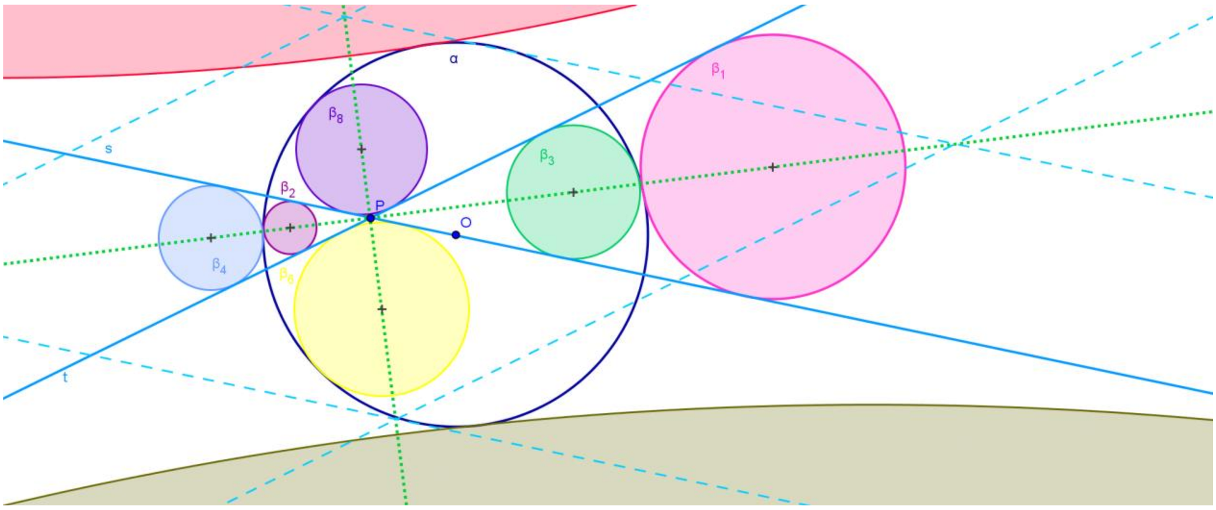


Figura 44: Circunferências tangentes a circunferência e a duas retas quando a circunferência é secante a ambas

Antes de passar para o próximo problema, utilize o dinamismo do *Geogebra* e, nessa construção, deslize a circunferência α para percorrer as situações vistas anteriormente.

8. CCP: Traçar as circunferências tangentes a duas circunferências dadas que passem por um ponto dado

Ainda restam os três problemas que envolvem pelo menos duas circunferências - *CCP*, *CCR* e *CCC*. A dificuldade encontrada nas construções a seguir tomam uma outra dimensão. Esses três últimos capítulos foram elaborados com base no trabalho: *Um passeio proveitoso pelos círculos de Apolônio* de SARMENTO, M.I. A seguir vamos estudar um novo conceito que será muito útil nas próximas construções: centros de homotetia.

Antes de começarmos a tratar do problema *CCP*, vamos definir homotetia, seus centros e as respectivas construções. Fixando um ponto *H* e um número real *k* não nulo, a homotetia de centro *H* e razão *k* é a transformação que a cada ponto *A* do plano associa o ponto *A'* tal que

$\overrightarrow{HA'} = k \cdot \overrightarrow{HA}$, onde $\overrightarrow{HA'}$ e $\overrightarrow{HA}$ são vetores de origem em *H*.

Uma homotetia transforma uma circunferência de raio *r* em uma circunferência de raio $|k\,r|$ cujo centro é a imagem do centro da primeira.

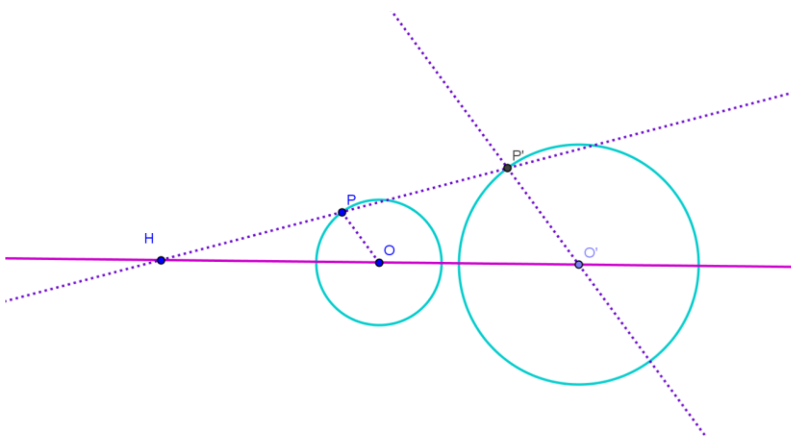


Figura 45: Homotetia de uma circunferência

Na Figura 47 a circunferência β de centro O' é uma homotetia de centro H e razão k da circunferência α de centro O. Sejam P e Q pertencentes a α e P' e Q' pertencentes a β, não colineares com O e H. O que você pode afirmar a respeito dos triângulos HOP e $HO'P'$? Qual é a razão de semelhança? O conceito de homotetia será importante para simplificar nossas próximas construções, porém, em nossos problemas serão dados as circunferências e o centro de homotetia deverá ser identificado. Então, como construir esse ponto H?

Sejam dadas duas circunferências α e β de centros O e O' e raios r e r', respectivamente, tais que $r < r'$. Sendo H o centro da homotetia com $k > 0$, isto é, aquela que transforma α em β, como devem estar dispostos os pontos O, O' e H? Considere P e Q pontos de α *diametralmente opostos*, porém não pertencentes à reta OO'. Para que se utilize uma semelhança de triângulos, qual deve ser a reta traçada a partir de O'? Agora você consegue determinar H? (Veja a Figura 48). Trata-se então da homotetia de centro H e razão k, onde k é a razão entre r' e r, que transforma α em β.

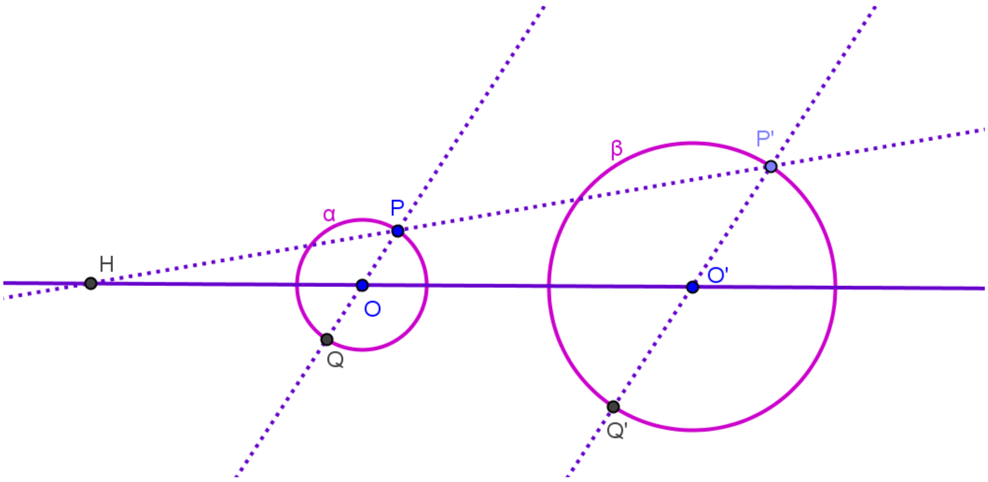


Figura 46: Centro de homotetia com k > 0

Como determinar o centro da homotetia com $k < 0$, que transforma α em β? Dados os mesmos P e Q, definimos P' e Q' interseções de β com a paralela a PQ por O'. Para que a homotetia tenha razão negativa, onde deve estar localizado o centro H' da homotetia? Justifique. Nesse caso, precisamos de H' tal que os triângulos $H'QO$ e $H'P'O'$ sejam semelhantes. Volte na Figura 48. Como você pode utilizar os pontos P, P', Q e Q' para determinar H'? Neste caso, a razão é $k = -r'/r$.

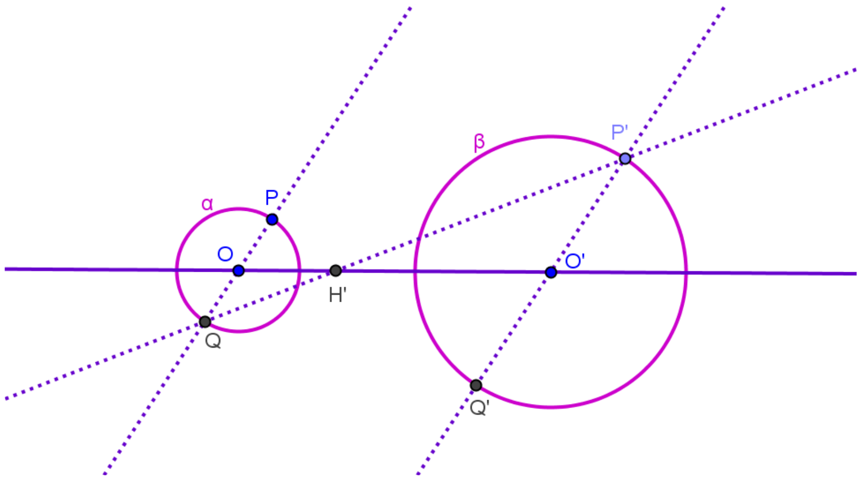


Figura 47: Centro de homotetia com k < 0

Agora que já sabemos construir os centros de homotetia de duas circunferências, vamos voltar ao nosso problema. Quais são as posições relativas de duas circunferências? E de um ponto e uma circunferência? Quais são as posições relativas de um ponto dado *P* e duas circunferências dadas α e α'? Descreva todos os casos possíveis.

Em cada um dos casos, tente identificar se é possível traçar uma circunferência solução e, se for possível, você é capaz de determinar a quantidade de soluções? Afirmamos que o número de soluções varia: nenhuma, uma, duas, três, quatro ou infinitas.

Lembremos que duas circunferências são tangentes se possuem apenas um ponto em comum. Logo, nenhuma das duas circunferências dadas é solução do problema. Dos casos anteriores, há dois que recaem nesse caso, ou seja, que uma das circunferências dadas poderia ser solução do problema, você saberia identificar quais deles nos referimos?

Além disso, quando uma circunferência isola o ponto da outra não há solução. Identifique quais são esses casos. Vamos estudar cada um dos demais casos. Vale a pena lembrar que representamos as circunferências soluções como círculos nas respectivas figuras.

8.1. As circunferências são externas

Sejam *O* e *O'* os centros e *r* e *r'* os raios das circunferências α e α' dadas. Suponha que α e α' sejam externas, isto é, $\overline{OO'} > r + r'$. Seja *P* o ponto dado, este ponto pode ser exterior a ambas, pertencente a uma delas ou interior a uma delas. No caso do ponto *P* ser interno à circunferência α, por exemplo, qualquer circunferência que passe por P e seja tangente à circunferência α' possui quantos pontos de interseção com α? Logo, o problema *CCP* com duas circunferências externas não tem solução, caso o ponto seja interno a uma das circunferências. O caso de P ser externo a ambas é a base para a construção de todas as outras situações deste problema.

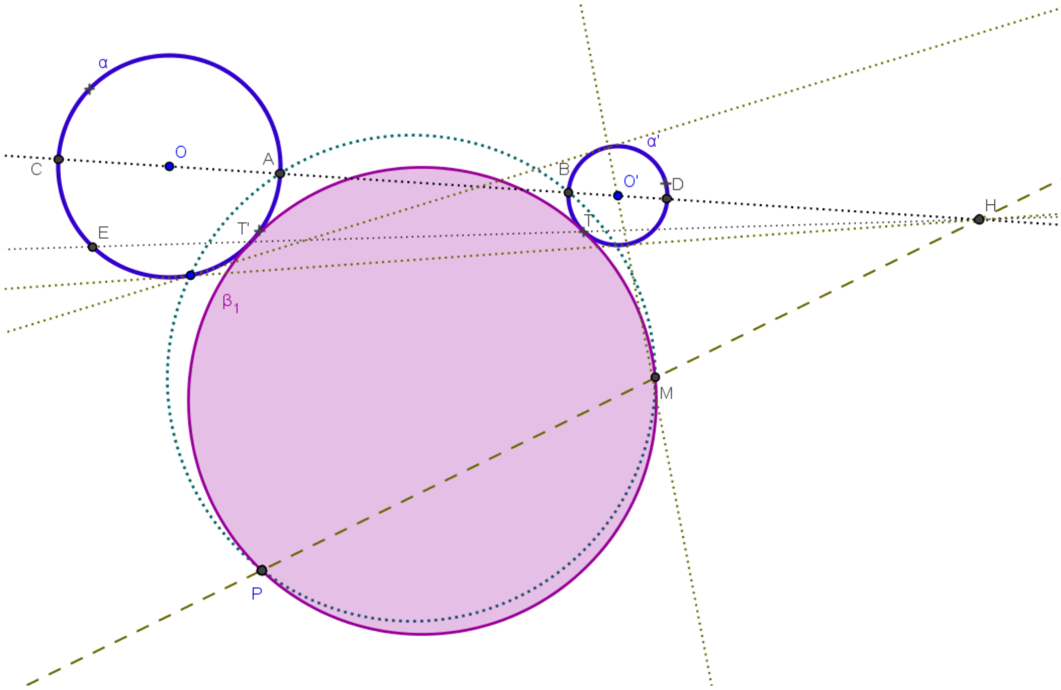


Figura 48: Uma das soluções do problema CCP

Construa o centro da homotetia positiva H que leva α em α' e determine as interseções da reta OO' com as circunferências α e α', denominando por A, B, C e D, de tal forma que A e B estejam entre C e D, como na Figura 50. Por se tratar de uma homotetia, qual é a relação entre $\overline{AH}$ / $\overline{DH}$ e $\overline{CH}$ / $\overline{BH}$? Compare com a razão entre os raios r e r'. Trace a circunferência β' que passa pelos pontos A, B e P (problema *PPP*) e marque o ponto M (diferente de P) de interseção dessa circunferência com a reta HP. O ponto M, definido desse modo, será importante para as demais construções. Lembrando que A, B, P e M pertencem a β' e recordando a Proposição *P5*, qual é a relação existente entre $\overline{HA}$, $\overline{HP}$, $\overline{HB}$ e $\overline{HM}$?

Trace a circunferência β_1 que passa por M e P e seja tangente a α (problema *PPC*, quando os pontos são externos à circunferência[8]) e marque o ponto de tangência T'. Trace a reta HT' e denomine por E e T os pontos de interseção da reta com α e α', respectivamente. (veja a Figura 50). Vamos mostrar que β_1 é tangente a α' em T', logo é solução do problema.

[8] Observe as Figuras 19 e 20 que se encontram a partir da pág. 27

Utilizando as circunferências dadas α e α' e a auxiliar β', os conceitos de potência de ponto e homotetia, podemos concluir várias relações entre os pontos definidos e completar a tabela a seguir.

número	relação	justificativa
(1)	$\frac{AH}{DH} = \frac{EH}{TH} \Rightarrow AH \cdot TH = DH \cdot EH$	homotetia
(2)	$AH \cdot CH = T'H \cdot EH$	potência do ponto T em α
(3)	$\frac{AH}{DH} = \frac{CH}{BH} \Rightarrow AH \cdot BH = DH \cdot CH$	homotetia
(4)	$AH \cdot BH = PH \cdot MH$	potência do ponto T em β’
(5)	$\frac{TH}{CH} = \frac{DH}{T'H} \Rightarrow TH \cdot T'H = DH \cdot CH$	dividindo (1) por (2)
(6)	$DH \cdot CH = PH \cdot MH$	igualando (3) com (4)
(7)	$TH \cdot T'H = PH \cdot MH$	igualando (5) com (6)

Pela relação (7) podemos afirmar que o ponto T que já sabemos pertencer a α' também pertence à circunferência β_1 de centro O_1, ou seja, as circunferências α' e β_1 são tangentes ou secantes. Seja E' o ponto em α', cuja imagem pela homotetia é T' (Figura 50). Como “*a homotetia preserva ângulos*” (WAGNER, E., 1993, p.81), os triângulos EOT' e $TO'E'$ são semelhantes, além de isósceles. Observando o triângulo EOT', os ângulos $O\hat{E}T'$ e $O\widehat{T'}E$ são congruentes, pois o triângulo é isósceles. Pelo mesmo motivo, temos $O\widehat{E'}T$ e $O\hat{T}E'$ congruentes e, por homotetia, os quatro ângulos são iguais. Por último, pelo triângulo isósceles $T'O_1T$ você consegue identificar a congruência de mais dois ângulos com esses quatro? Para que isso aconteça, os pontos O_1, T e O' devem estar alinhados. Logo β_1 é tangente a α' e é solução do problema. O que nos faz concluir a proposição a seguir.

Proposição 6 (P6): Partindo do problema CCP, para recair no problema PPC, basta determinar a interseção M da circunferência auxiliar com a reta PH, onde H é o centro da homotetia definida a partir das duas circunferências e traçar a circunferência que passa pelos pontos P e M e é tangente a qualquer uma das duas circunferências dadas.

Será que faz diferença se traçar essa circunferência tangente a α' em vez de α? E se, para traçar a circunferência auxiliar, escolhêssemos os pontos C e D em vez de A e B?

Teríamos uma nova solução? Quando estudamos o problema *PPC* havia quantas soluções? E quando estudamos homotetia, quantos eram os centros?

A figura a seguir mostra as quatro soluções. Já sabemos que o problema *PPC* tem duas soluções quando os pontos são externos à circunferência dada. Por outro lado as duas circunferências α e α' determinam dois centros de homotetia. Duas das soluções encontradas foram determinadas utilizando o ponto *M*, interseção entre a circunferência auxiliar e a reta *HP*, e as outras duas, utilizando *M'*, interseção entre a circunferência auxiliar e a reta *H'P*.

Utilizando o dinamismo do *Geogebra*, movimente o ponto *B*. O que ocorre quando *A* = *B*? E quando *A* fica entre *B* e *H*? Movimente, agora, o ponto *P* e responda as mesmas perguntas feitas anteriormente.

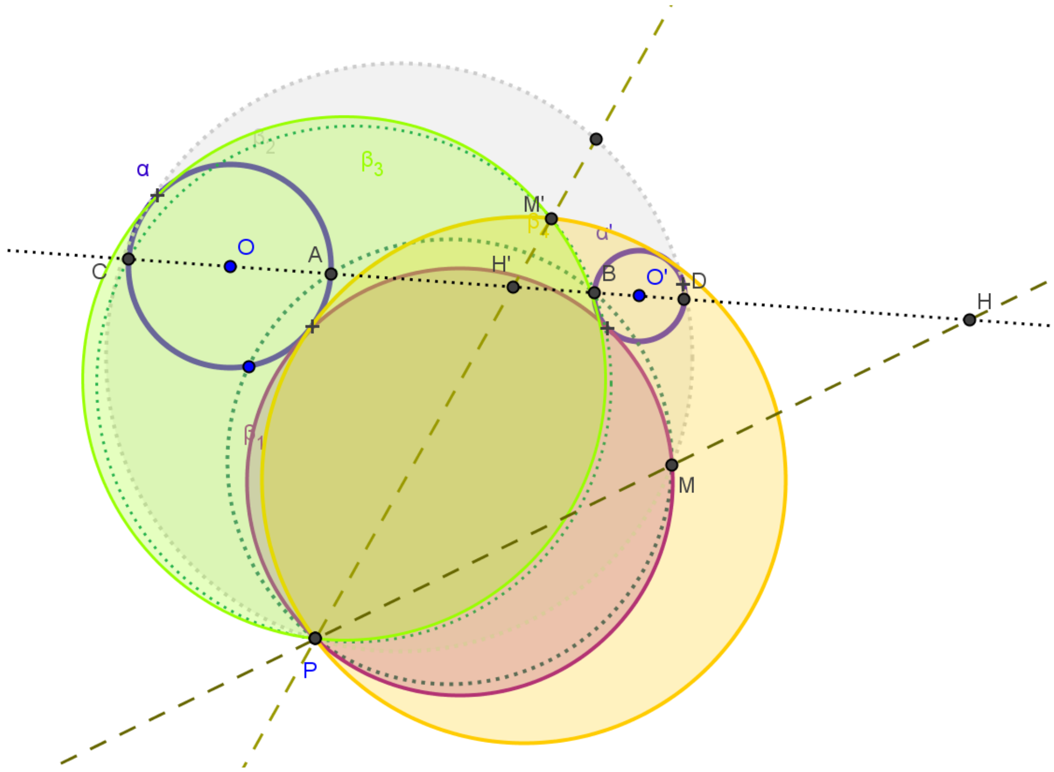


Figura 49: As quatro circunferências tangentes a duas circunferências dadas que passam por um ponto quando as circunferências são externas e o ponto externo a ambas

Volte à Figura 16 da pág. 25. Ela representa o problema *PPC* quando um dos pontos pertence a uma das circunferências. Para reduzirmos o problema atual *CCP* quando o ponto *P* pertence a uma das circunferências dadas, como podemos proceder para determinarmos o segundo ponto? Quantas soluções serão encontradas para o nosso problema? Veja a Figura 52. Você consegue identificar o que são as retas pontilhadas?

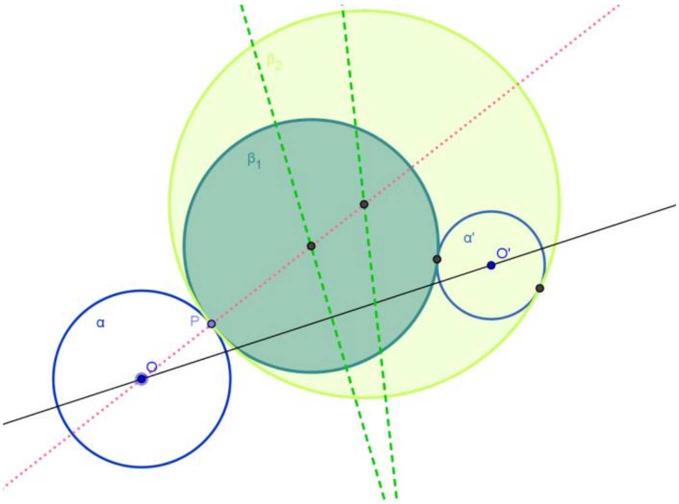


Figura 50: As duas soluções de CCP quando as circunferências são externas e o ponto pertence a uma delas

8.2. As circunferências são tangentes externamente

Quando as duas circunferências dadas são tangentes externas, o que se pode afirmar sobre o centro de homotetia de razão negativa? Tente relacionar a localização desse centro com o fato do número de soluções ter reduzido para três circunferências. Duas das soluções são encontradas do mesmo modo, visto anteriormente, utilizando o centro de homotetia *H*. Como você deve proceder para construir a terceira solução? A terceira solução é encontrada utilizando *PPC*, com *P*, *H'* e α. Como *H'* pertence a α, temos apenas uma solução. Além disso, se o ponto *P* pertence a uma reta específica, o problema apresenta duas soluções. Qual seria essa reta? Existe uma posição para o ponto *P* o qual há infinitas soluções. Qual seria essa posição?

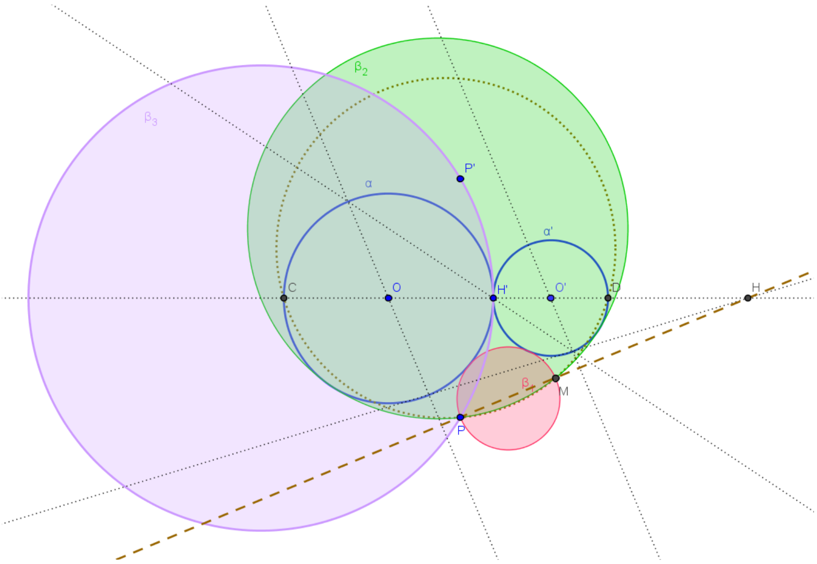


Figura 51: Circunferências tangentes a duas circunferências dadas que passam por um ponto quando as circunferências são tangentes externas e o ponto externo a ambas

Quando *P* for interno a uma das circunferências, haverá apenas uma solução. Como determiná-la? Os centros de homotetia são indispensáveis nesse caso?

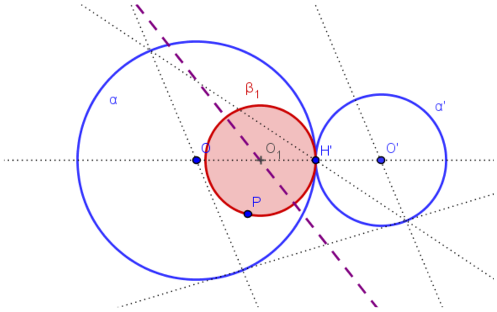


Figura 52: Circunferência tangente a duas circunferências dadas que passa por um ponto quando as circunferências são tangentes externas e o ponto interno a uma delas

8.3. As circunferências são secantes

Quando as duas circunferências dadas são secantes, o que se pode afirmar do centro de homotetia de razão negativa? Existe alguma maneira de traçar uma circunferência tangente a ambas quando *P* é externo através do centro de homotetia *H’* com k < 0?

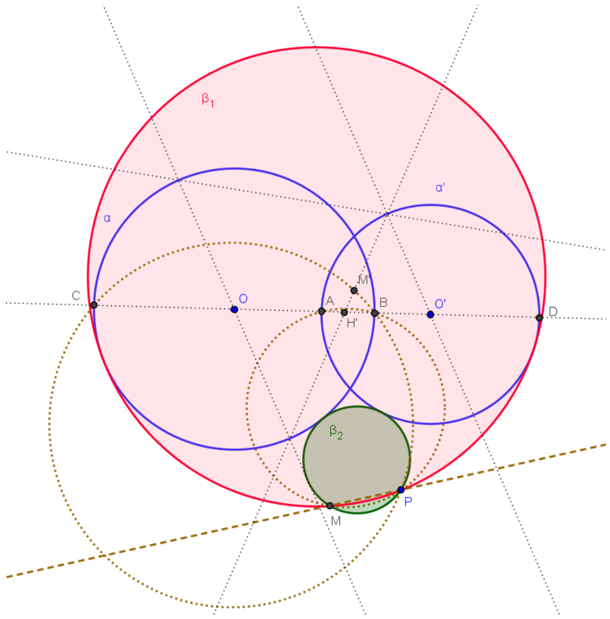


Figura 53: Circunferências tangentes a duas circunferências dadas que passam por um ponto quando as circunferências são secantes e o ponto externo a ambas

O que ocorre quando *P* é interno a uma das circunferências? Perceba que agora as circunferências são construídas através do centro *H’* de homotetia de razão negativa, há alguma solução através de *H*?

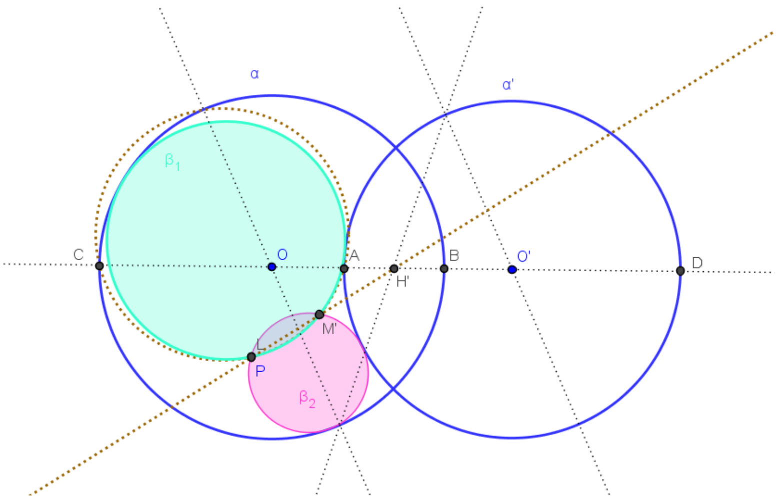


Figura 54: Circunferências tangentes a duas circunferências dadas que passam por um ponto quando as circunferências são secantes e o ponto interno a uma delas

8.4. As circunferências são tangentes internamente

Quando α e α' são tangentes internamente tendo um ponto, digamos T, como interseção, qual deve ser a posição de T em relação a uma circunferência solução? E o centro dessa solução, qual é a posição em relação aos centros O e O'? Vamos supor que r' menor que ou igual a r. No caso de P ser interno a α', a quais retas deve pertencer o centro de β?

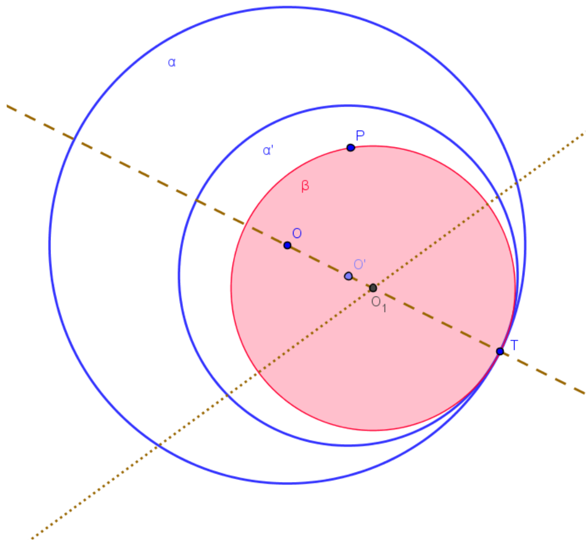


Figura 55: Circunferência tangente a duas circunferências dadas que passa por um ponto quando as circunferências são tangentes internas e o ponto interno a ambas

Há diferença na construção quando P é externo a α e a α'?

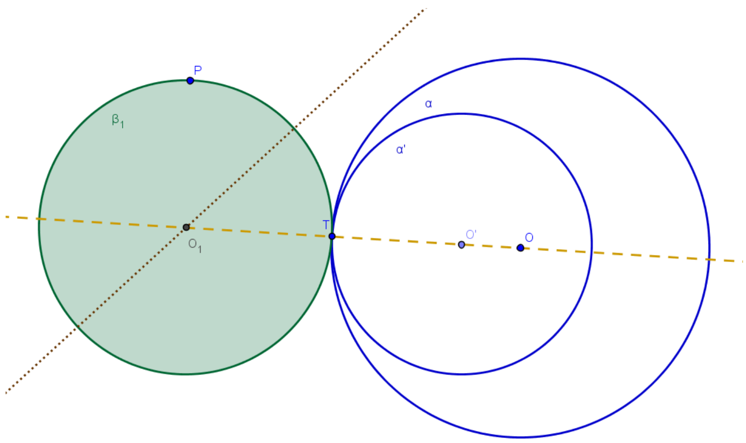


Figura 56: Circunferência tangente a duas circunferências dadas que passa por um ponto quando as circunferências são tangentes internas e o ponto externo a ambas

Quando α e α' são tangentes internamente, o centro de homotetia positiva H coincide com um certo ponto, qual seria esse ponto? Da mesma forma quando determinamos A, B, C e D interseções de OO' com α e α', dois deles também coincidem com qual ponto? Essa coincidência de pontos provoca uma alteração no número de soluções, explique esse fato.

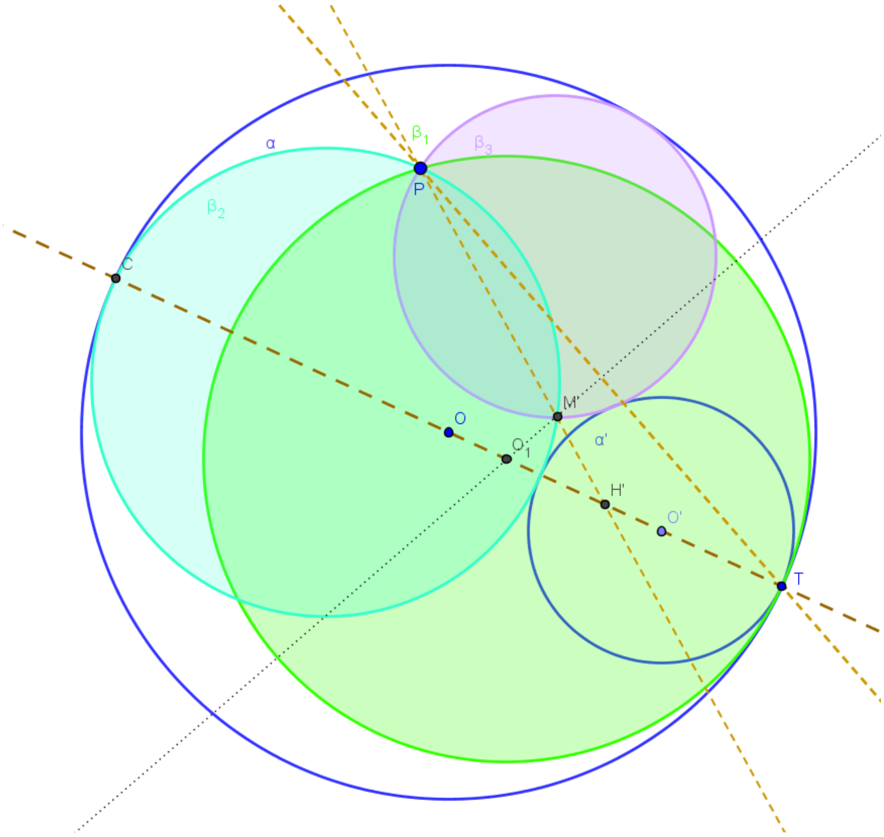


Figura 57: Circunferências tangentes a duas circunferências dadas que passam por um ponto quando as circunferências são tangentes internas e o ponto interno a uma e externo a outra

Quando as circunferências dadas são internas H e H' são pontos interiores a uma delas, tome bastante cuidado para determinar M e M', que são os pontos de interseção da circunferência que passa por A, B e P com as retas HP e $H'P$, respectivamente. A maneira de determinar as circunferências soluções é exatamente análoga ao caso em que são externas. O problema só tem solução se P está entre α e α', você saberia dizer o porquê?

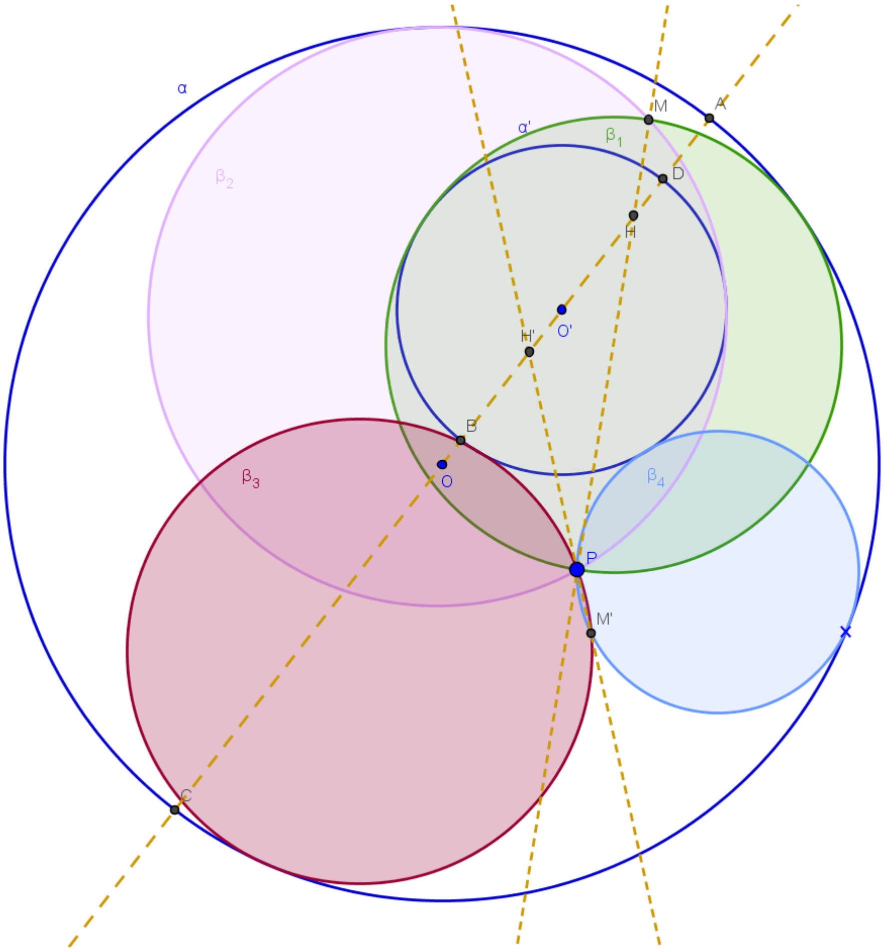


Figura 58: Circunferências tangentes a duas circunferências dadas que passa por um ponto quando as circunferências são internas e o ponto interno a uma e externo a outra

9. CCR: Traçar as circunferências tangentes a uma reta e a duas circunferências dadas

Quais são as posições relativas entre duas circunferências? E entre uma reta e uma circunferência? Quais são as posições relativas entre uma reta t dada e duas circunferências dadas α e α'? Quantos são os casos possíveis? Descreva-os. Para clarear a quantidade de casos, imagine que uma reta pode ter de zero a dois pontos de interseção com uma circunferência e entre duas circunferências são possíveis cinco posições[9]. Então, a princípio, temos 3 x 3 x 5 = 45 situações a serem estudadas. Veremos alguns destes casos para não tornar o trabalho enfadonho e repetitivo.

O número de soluções, da mesma forma que os casos anteriores, varia com as posições relativas da reta e das circunferências, podendo ser zero, duas, três, quatro, cinco, seis, oito ou infinitas soluções.

A construção se baseia no problema *PRC*[10] e em determinar retas e circunferências auxiliares de raios $r + r'$ e $r - r'$, onde r e r' são raios de α e α', vamos considerar $r \geq r'$. As construções, nos casos não tratados nesse capítulo, são muito parecidas.

9.1. As circunferências e a reta não se intersectam

Considere duas circunferências α e α' de centros O e O' e raios r e r', respectivamente, de tal forma que elas sejam externas e uma reta t também externa a α e α'. A reta t divide o plano em dois semiplanos, se α e α' estão em semiplanos opostos, o problema tem solução? Agora, vamos estudar o caso em que as circunferências estão no mesmo semiplano, não se intersectam e nenhuma delas toca a reta. Essa construção será base para as demais situações dos três elementos.

[9] Duas circunferências podem ser internas, tangentes internas, secantes, tangentes externas e externas.
[10] Vide página 33

Trace, no semiplano oposto a α e α', a reta t' paralela à t que dista r' de t, como ilustrado na Figura 61 e trace a circunferência α_1 de centro O e raio $r - r'$. Utilizando o problema *PRC* construa as circunferências auxiliares tangentes à circunferência α_1, à reta t' e que contenham o ponto O'. Caso aconteça r = r', o que se pode afirmar de α_1? Nesse caso, qual o problema dos anteriores utilizaríamos? Agora você consegue vislumbrar uma solução para o problema original? Vamos considerar os centros e raios dessas circunferências como O_1, O_2, x_1 e x_2, nessa ordem. Por fim, trace as circunferências β_1 e β_2 de centros O_1 e O_2, tangentes à reta t.

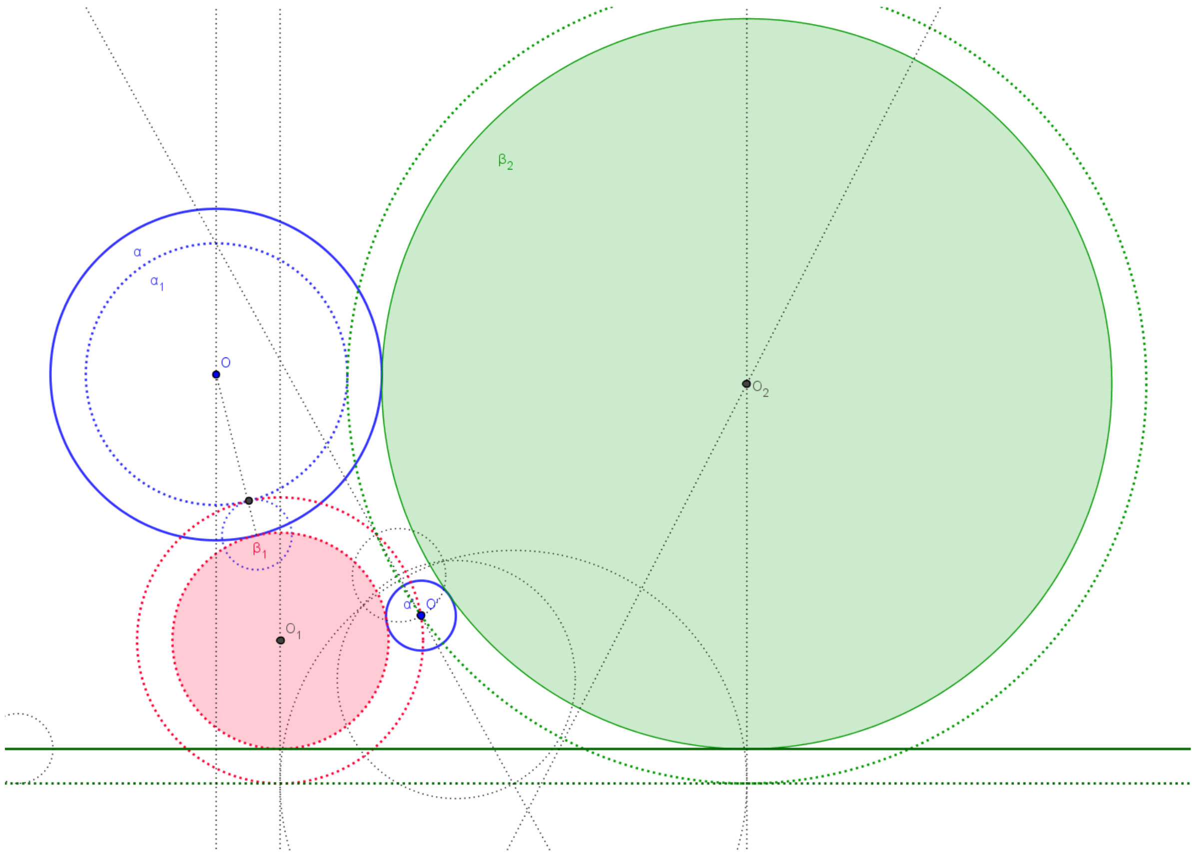


Figura 59: Duas circunferências tangentes às duas circunferências e à reta dadas quando são externas e não intersectam a reta

Lembrando que a distância entre t e t' é r', quais são as distâncias de O_1 e O_2 à reta t? Como as circunferências auxiliares passam por O', quais as distâncias de O_1 e O_2 ao centro O'? Então, quais são as distâncias de O_1 e O_2 à circunferência α'? As circunferências auxiliares, soluções do *PRC* acima, são tangentes à circunferência α_1, então quais as distâncias de O_1 e O_2 ao centro O? Quais são as distâncias de O_1 e O_2 à circunferência α? Você consegue perceber que as circunferências β_1 e β_2 são, de fato, soluções?

Verifique as respostas dadas com a tabela a seguir e conclua que O_1 e O_2 são realmente os centros das circunferências soluções.

ponto	objeto	distância
O_1	reta t	$x_1 - r'$
O_1	ponto O’	x_1
O_1	circunferência α’	$x_1 - r'$
O_1	ponto O	$x_1 + r - r'$
O_1	circunferência α	$x_1 - r'$

As respostas para O_2 são dadas de forma análoga. Para encontrar mais duas soluções, basta utilizar uma reta *t’’* em vez de *t’*, que dista *r’* de *t*, porém *t’’* se encontra no mesmo semiplano das circunferências.

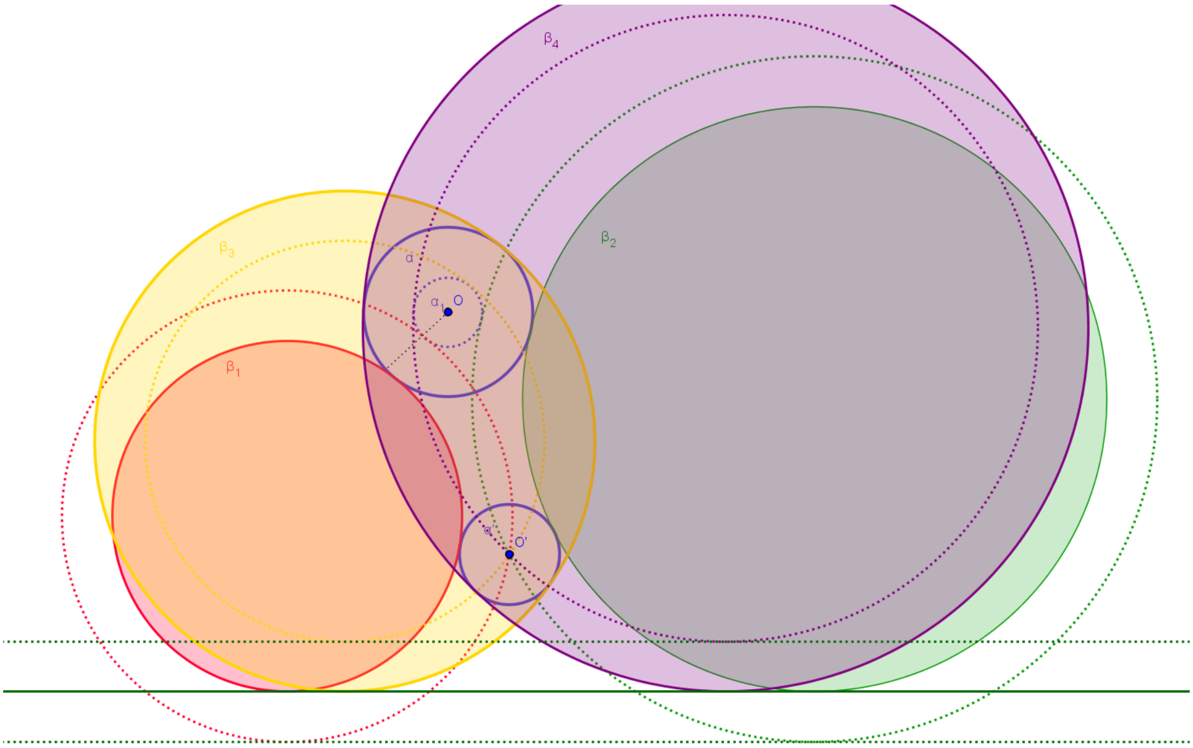


Figura 60: Quatro circunferências tangentes às duas circunferências e à reta dadas quando são externas e não intersectam a reta

Para encontrar as outras quatro soluções, basta tomar uma circunferência auxiliar de centro *O* e raio *r + r’* em vez de *r – r’* e repetir todo o processo anterior.

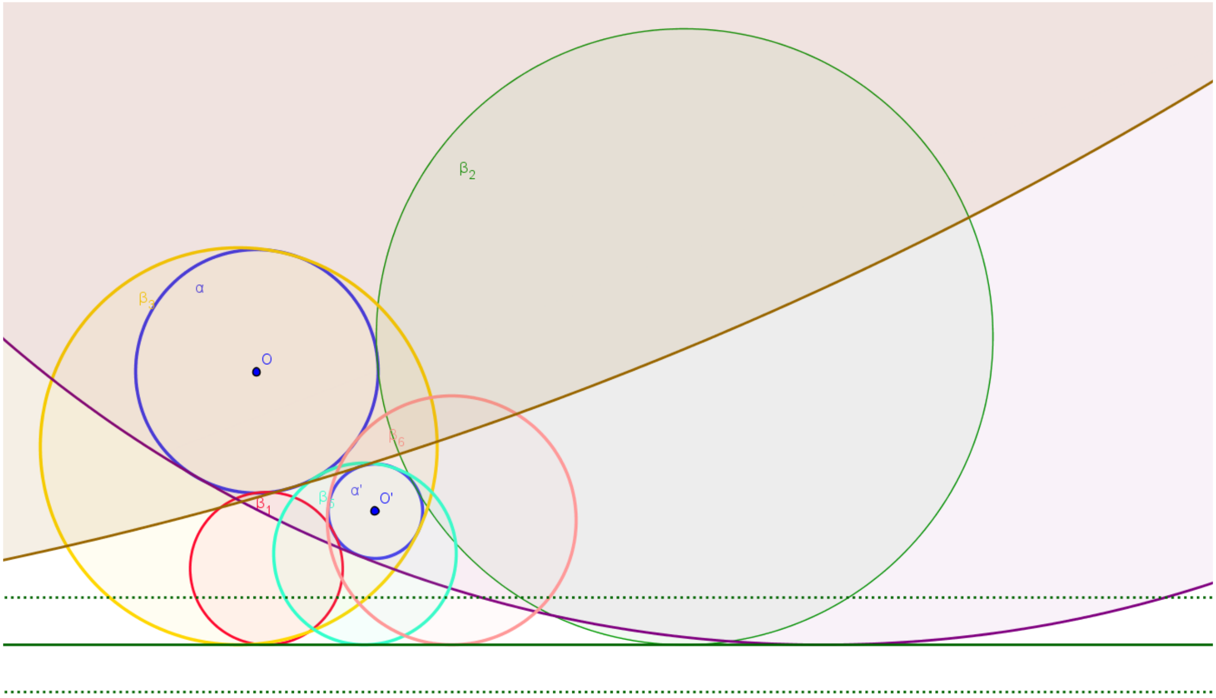


Figura 61: Todas as circunferências tangentes às duas circunferências e à reta dadas quando são externas e não intersectam a reta

São várias as posições entre os três elementos *α*, *α'* e *t*. A seguir apresentamos três delas para mostrar a variação no número de soluções. Todas as construções são feitas de maneira análoga a anterior.

9.2. As circunferências são tangentes

Quando *α*, *α'* e *t* são tangentes (exterior ou interiormente) no mesmo ponto de tangência *A*, sobre que reta deve estar o centro das soluções? Quantas são as soluções nesse caso? Será que todas as soluções recairão no caso *PRC*?

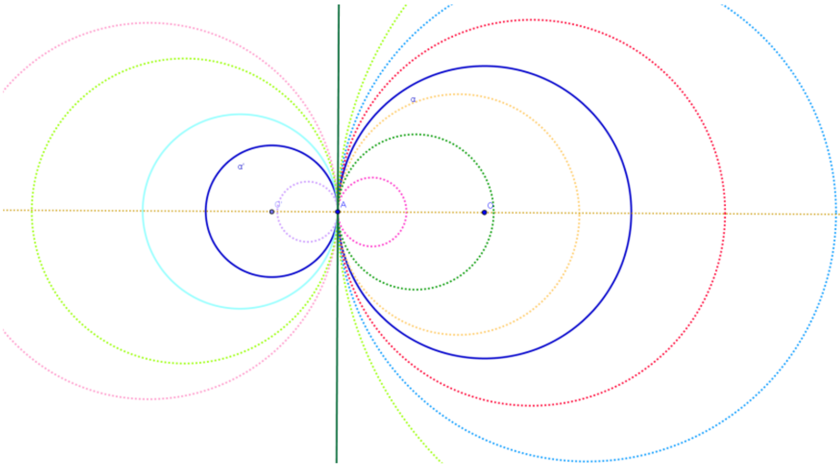


Figura 62: Circunferências tangentes a duas circunferências e à reta quando as circunferências são tangentes e a reta passa pelos seus centros

Se a reta *t* for externa a ambas, quantas soluções terá o nosso problema? Retomando o problema *PRC*, podemos perceber que, quando o ponto pertencer à circunferência, o número de soluções diminuirá. Quando as circunferências dadas forem tangentes, ao construir a circunferência de raio $r + r'$, onde estará o centro O'? Consegue perceber que o número de soluções diminuirá?

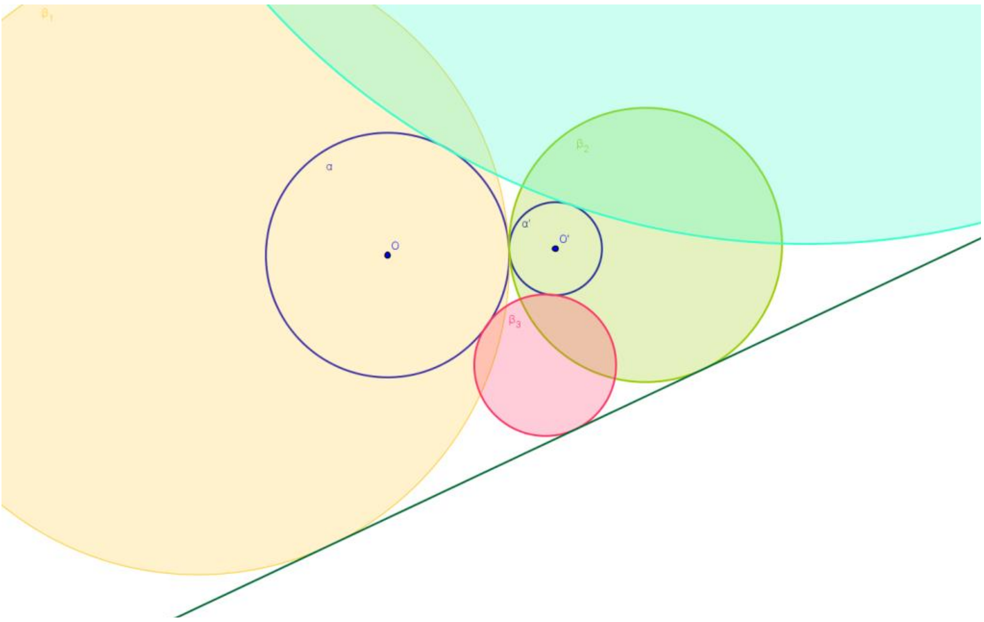


Figura 63: Circunferências tangentes a duas circunferências e à reta quando as circunferências são tangentes e a reta é externa a ambas

Um último comentário nesse caso: dependendo da distância que os centros estiverem da reta em relação aos centros, o problema pode ter cinco ou seis soluções. Essa observação serve para outras situações em todo o trabalho.

Mantendo as posições relativas, variando os raios e as distâncias entre três objetos, o número de soluções pode variar.

Aproveite o dinamismo do *Geogebra* para comprovar o fato acima.

9.3. As circunferências são secantes

Sendo α e α' secantes e t externa a ambas, quantas soluções existirão? Pense um pouco sobre as soluções e como encontrá-las a partir dos resultados anteriores. Dessas, quantas possuem α e α' em seu interior? Existe alguma solução que tenha raio igual a $r + r'$?

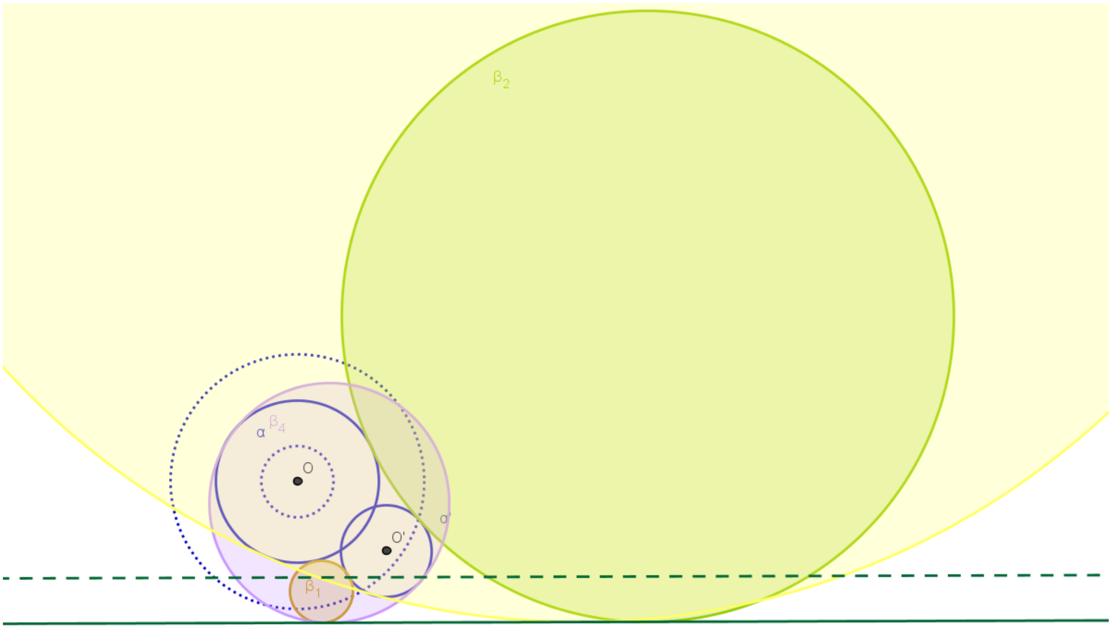


Figura 64: Circunferências tangentes a duas circunferências e à reta quando as circunferências são secantes e a reta é externa a ambas

10. CCC: Traçar as circunferências tangentes a três circunferências dadas

Este é o último Problema de Apolônio, que engloba todos os outros quando se considera reta e ponto como circunferências de raios infinito e zero, respectivamente, extrapolando assim a noção de circunferência. Da mesma forma que os problemas anteriores, o número de soluções depende das posições relativas das três circunferências. É infinito se as três circunferências se tangenciam num mesmo ponto e, sem solução, caso uma seja interna e outra externa à terceira.

Os autores são unânimes em afirmar que não há como encontrar uma posição entre as três circunferências dadas que ofereça uma ou sete soluções. Por outro lado, uns afirmam que a quantidade de soluções é um número par entre zero e oito, outros, que é possível encontrar três ou cinco soluções (SANTOS, J.C.). Preferimos trabalhar com o fato que o número de soluções, além de depender da posição relativa entre elas, é alterado pelos raios e pela distância entre os centros. Assim, três ou cinco soluções seriam casos particulares de quatro ou seis soluções, respectivamente.

Poucos autores apresentam a solução completa desse problema e, dentre estes, a maioria trabalha com cônicas (SANTOS, S.A.), inversão (BARISON, M.B.) ou centro radical (ROVILSON, M.). Preferimos manter o mesmo padrão dos outros capítulos e resolver o último problema recaindo no *CCP*.

Independente das posições relativas às circunferências, todos os casos podem ser resolvidos da mesma maneira que resolveremos, com mais detalhes, o caso das três serem externas entre si. Dividiremos o capítulo de acordo com o número de soluções, oferecendo uma posição entre as circunferências como exemplo de cada situação.

10.1. Oito Soluções

Vamos estudar detalhadamente o caso em que cada circunferência é exterior em relação às outras. Considere dadas três circunferências α_1, α_2 e α_3, com respectivos centros O_1, O_2 e O_3 e raios r_1, r_2 e r_3. Vamos considerar $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. É importante que, após a construção e aproveitando o dinamismo do *Geogebra*, tente encontrar situações que nos dê os números possíveis de soluções.

A construção se baseia em determinar circunferências auxiliares de centro O_2 e raios $r_2 + r_1$ e $r_2 - r_1$ e centros O_3 e raios $r_3 + r_1$ e $r_3 - r_1$, para recair no problema *CCP*[11], como mostra a figura a seguir.

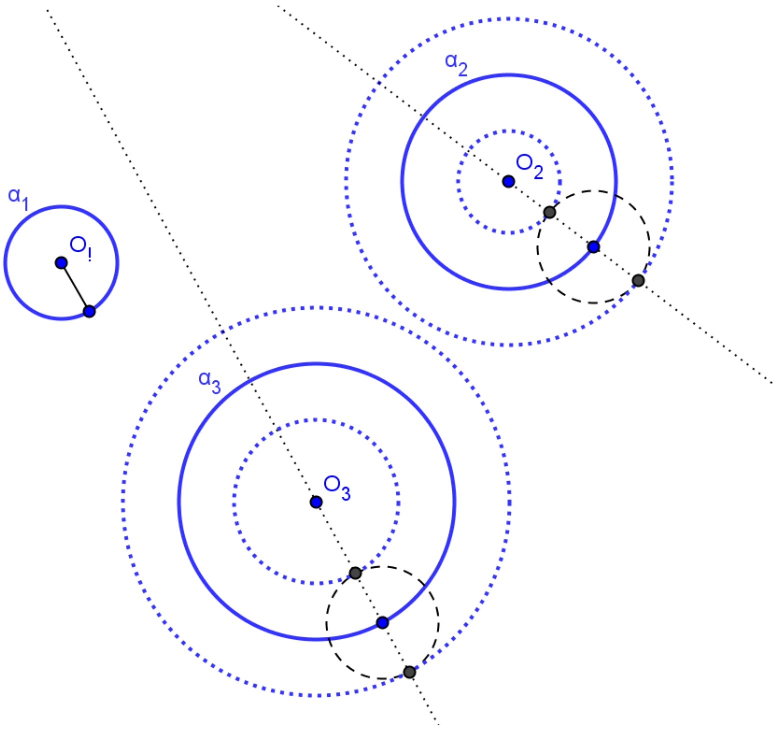


Figura 65: Circunferências concêntricas às circunferências dadas

Utilize o problema *CCP* para construir uma circunferência auxiliar β' que passa pelo ponto O_1 e é tangente às circunferências de centros O_2 e O_3 e raios $r_2 - r_1$ e $r_3 - r_1$, respectivamente. Você consegue determinar uma das soluções do problema original a partir de β'? Observe a Figura 68 e identifique quais são as distâncias do ponto O aos pontos O_1, O_2

[11] Vide pág. 52

e O_3? E as distâncias do mesmo centro O às circunferências α_1, α_2 e α_3? Confira suas respostas na tabela a seguir.

Ponto	Objeto	Distância
O	Ponto O_1	r
O	Ponto O_2	$r + r_2 - r_1$
O	Ponto O_3	$r + r_3 - r_1$
O	Circunferência α_1	$r - r_1$
O	Circunferência α_2	$r - r_1$
O	Circunferência α_3	$r - r_1$

Uma das soluções do nosso problema é construir uma circunferência de centro O e raio $r - r_1$. Para isso, trace a reta OO_1 e determine o ponto T de interseção com a circunferência α_1. Esse será o ponto de tangência entre a circunferência dada α_1 e uma das circunferências procuradas β.

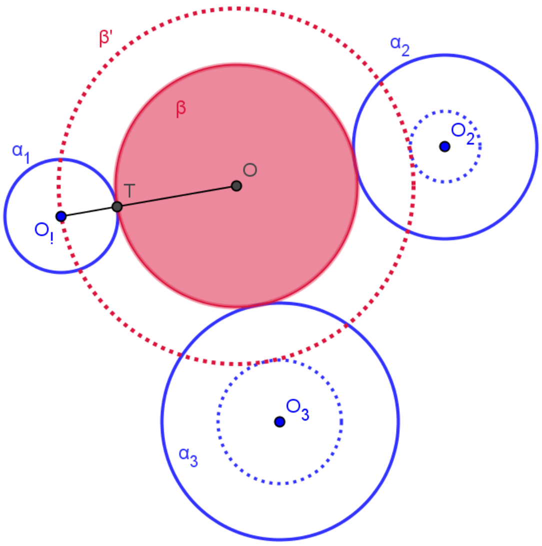


Figura 66: Uma das soluções do CCC

Para encontrar duas das oito soluções (β_1 e β_2) utilizaremos o oitavo problema, o *CCP*, com as circunferências de centros O_2 e O_3 e raios $r_2 - r_1$ e $r_3 - r_1$ e o ponto O_1. Observe, ao construir, que, apenas as circunferências que foram encontradas a partir do centro de homotetia com $k > 0$ serão soluções.

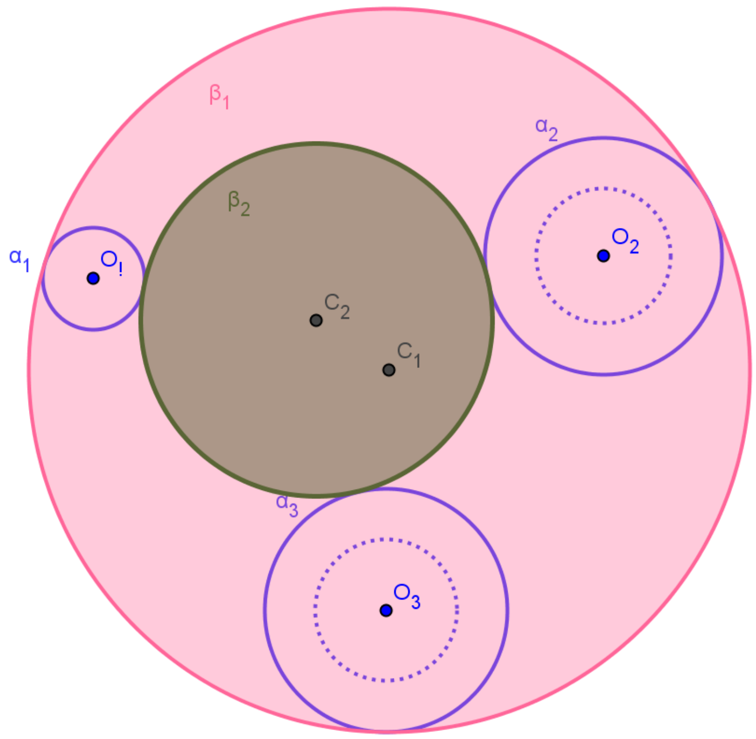


Figura 67: Duas soluções utilizando as circunferências menores e a homotetia com k > 0

Utilizando ainda o centro de homotetia com $k > 0$, com as circunferências de centros O_2 e O_3 e raios $r_2 + r_1$ e $r_3 + r_1$ e o ponto O_1, podemos determinar as soluções β_3 e β_4, mais duas das oito soluções.

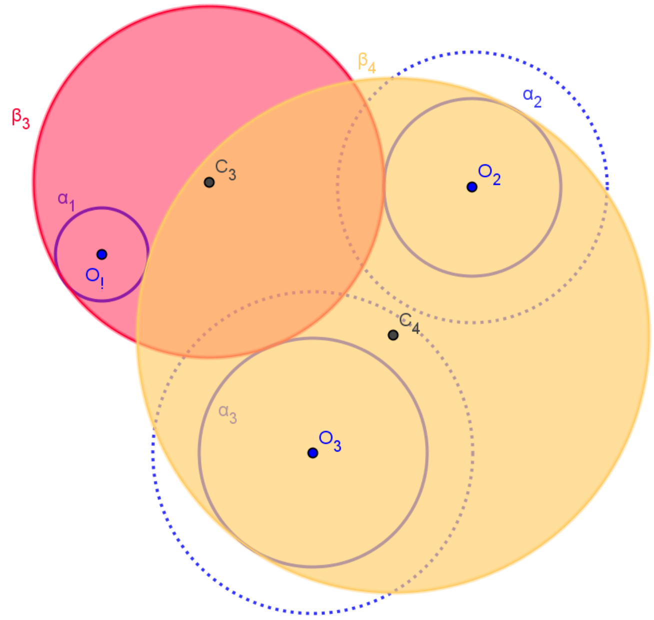


Figura 68: Duas soluções utilizando as circunferências maiores e a homotetia com k > 0

Agora, para encontrar mais duas das oito soluções (β_5 e β_6) utilizaremos as circunferências que foram encontradas a partir do centro de homotetia com $k < 0$, com as circunferências de centros O_2 e O_3 e raios $r_2 - r_1$ e $r_3 + r_1$ e o ponto O_1.

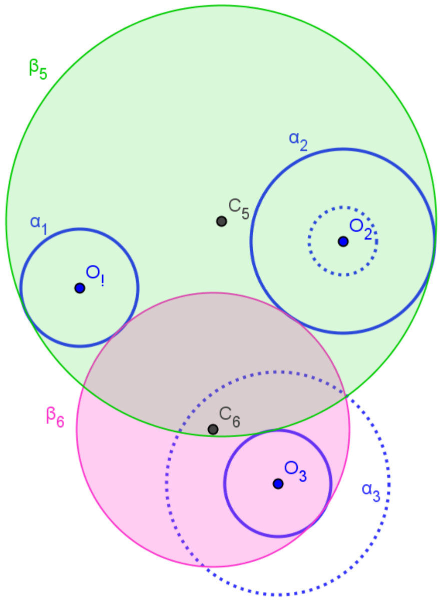


Figura 69: Duas soluções utilizando homotetia com k < 0

Para determinar as duas últimas soluções (β_7 e β_8) ainda utilizaremos as circunferências encontradas a partir do centro de homotetia com $k < 0$, com as circunferências de centros O_2 e O_3 e raios $r_2 + r_1$ e $r_3 - r_1$ e o ponto O_1.

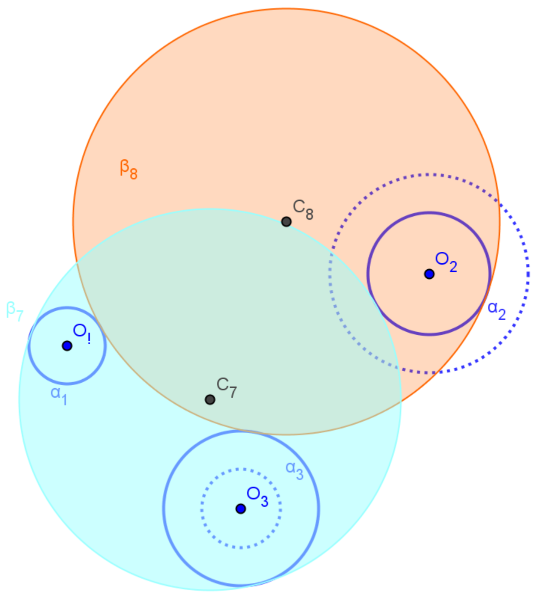


Figura 70: As outras duas soluções utilizando homotetia com k < 0

Para mostrar que não existe solução além das apresentadas, imagine o problema resolvido e observe que a solução recai sempre no problema *CCP*. Observe que, das oitos soluções, a circunferência procurada deixa as três dadas externas a ela em uma solução, engloba as três em apenas uma solução também. Engloba apenas uma circunferência em três das oito e engloba duas nas últimas três soluções. A figura a seguir engloba as oito soluções. Verifique os quatro tipos de solução.

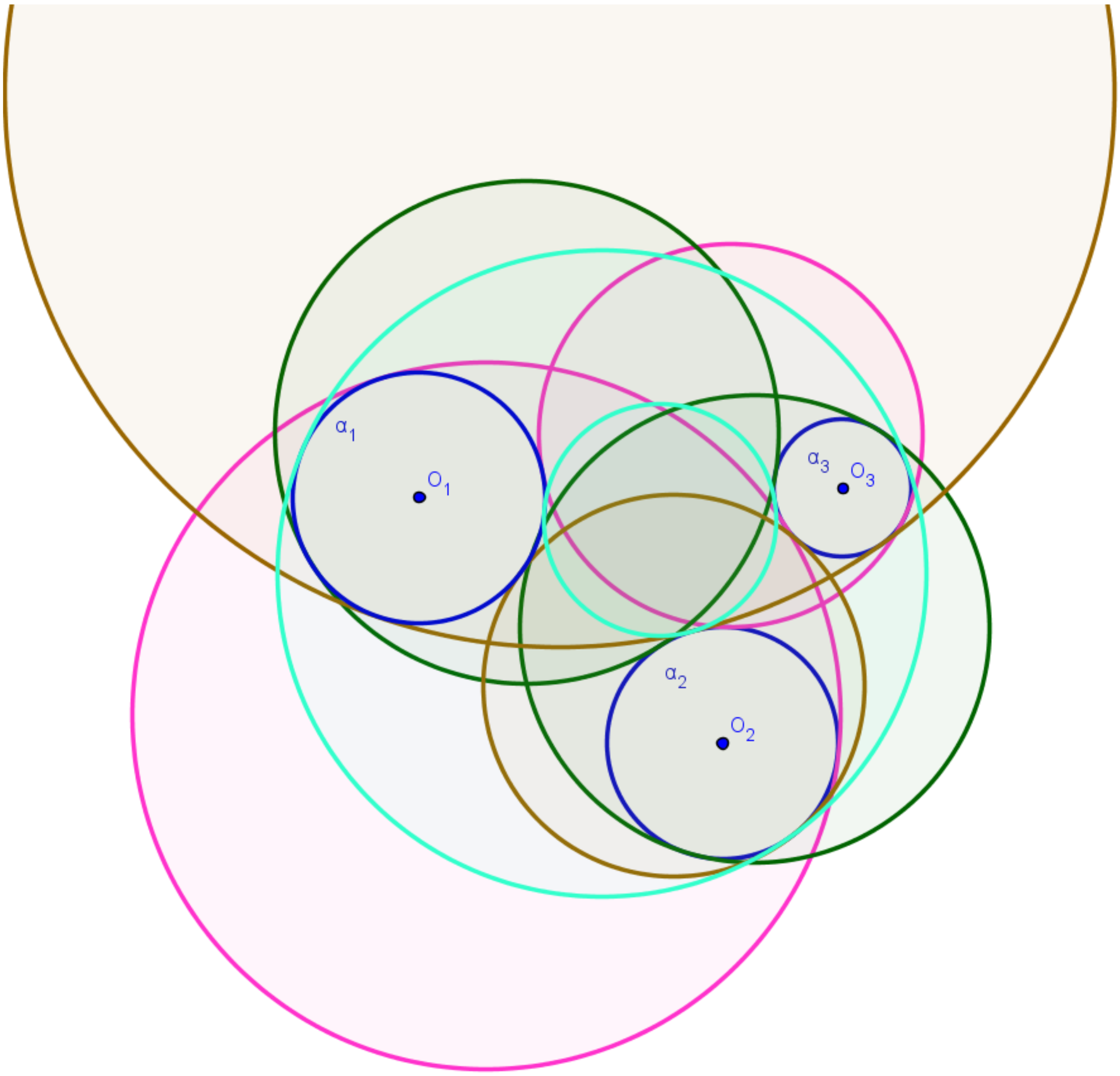


Figura 71: Circunferências tangentes a três circunferências dadas

Em todos os casos de cada um dos problemas vistos, a distância entre os elementos influencia o número de soluções, além, obviamente da posição dos três objetos. A partir daqui veremos um exemplo para cada número de soluções. Todas as construções são inspiradas nas circunferências concêntricas auxiliares utilizadas nesse caso e o número de soluções pode variar nas mesmas posições relativas, variando o tamanho dos raios e as distâncias entre os centros.

10.2. Seis Soluções

Vamos considerar α_1 e α_2 tangentes em O_3, internas a α_3, $r = r_1 = r_2 < r_3 = R$ e O_3 está entre O_1 e O_2, Como um dos exemplos de seis soluções, observe a figura a seguir, você consegue perceber uma simetria nesse caso? Então cada uma das soluções terá uma simétrica em relação à reta O_1O_2 ou em relação à reta t perpendicular a primeira passando por O_3. Observe a solução azul (1), a laranja (2) e a amarela (3). A solução (1) é tangente a α_3 e passa em O_3, então qual é a medida do seu raio? E qual é a localização do seu centro? Observe também que não há solução que englobe as três circunferências dadas, nem que deixe as três de fora.

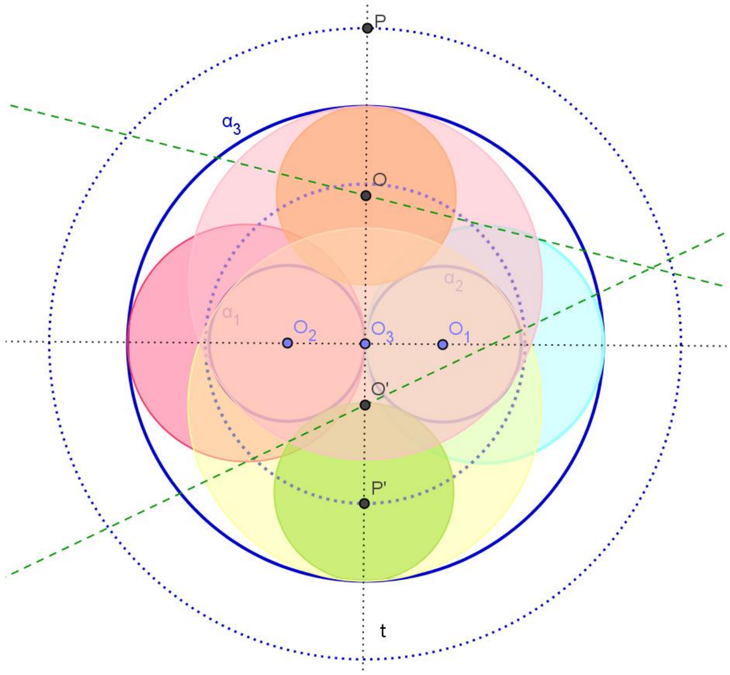


Figura 72: Exemplo de um caso do CCC com seis soluções

Agora observe a solução (2) de centro O e raio x. Qual é a distância de O à circunferência α_3? E ao ponto O_2? Ao traçar a circunferência auxiliar de centro O_3 e raio $R + r$, qual é a distância de O a essa circunferência? Considerando P o ponto de interseção dessa circunferência com a reta t, qual é o comprimento dos segmentos OP e OO_2? Então o ponto O deve pertencer à mediatriz de P e O_2, além de pertencer à reta t.

De forma análoga, para traçar a solução (3) de centro O' e raio y é preciso traçar a circunferência auxiliar $R – r$, determinar P' e traçar a mediatriz de $P'O_2$. As demais soluções são encontradas utilizando simetria em relação às retas t ou O_1O_2. Esse é apenas um dos exemplos do *CCC* que apresenta seis soluções.

10.3. Quatro Soluções

Vamos apresentar agora um exemplo com quatro soluções. Considerando os centros O_1, O_2 e O_3 colineares, $r_1 = r_2 = r < r_3 = R$, α_1 e α_2 secantes entre si e tangentes internas a α_3 (ver a figura a seguir). Observe cada solução e identifique a medida de seu raio e a localização do seu centro.

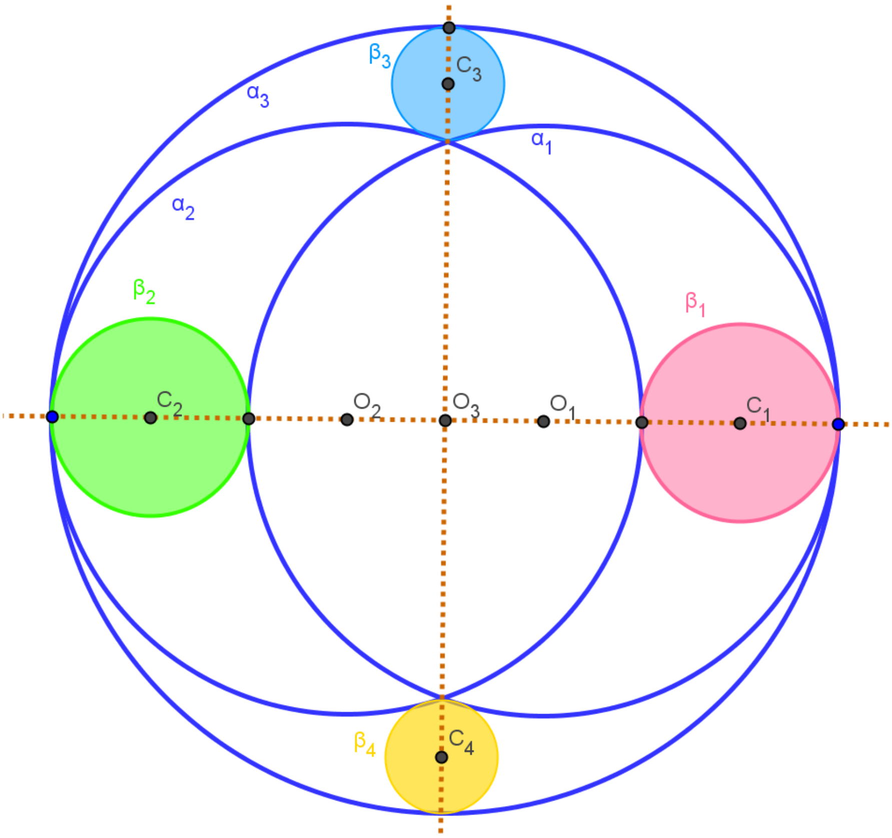


Figura 73: Exemplo de um caso do CCC com quatro soluções

Existe a possibilidade da circunferência solução ser externa a α_3? Com essa impossibilidade descarta-se quatro das oito soluções. As duas primeiras soluções passam pelo ponto de tangência e devem tangenciar a terceira, então como devemos determinar o seu centro? Por outro lado, as outras duas soluções devem ser encontradas repetindo o processo anteriormente utilizado, obtendo as circunferências concêntricas.

10.4. Duas Soluções

Observe a Figura 76 que representa um exemplo com duas soluções. Como você caracteriza a posição das três circunferências dadas α_1, α_2 e α_3, de centros O_1, O_2 e O_3, respectivamente? Se as circunferências α_1 e α_2 são tangentes em T, a solução deverá conter qual ponto? Além disso, para ser tangente à circunferência α_3, a solução deverá conter também qual ponto? Qual é a relação entre as medidas dos segmentos formados pelos pontos A, C_2, T, C_1 e B?

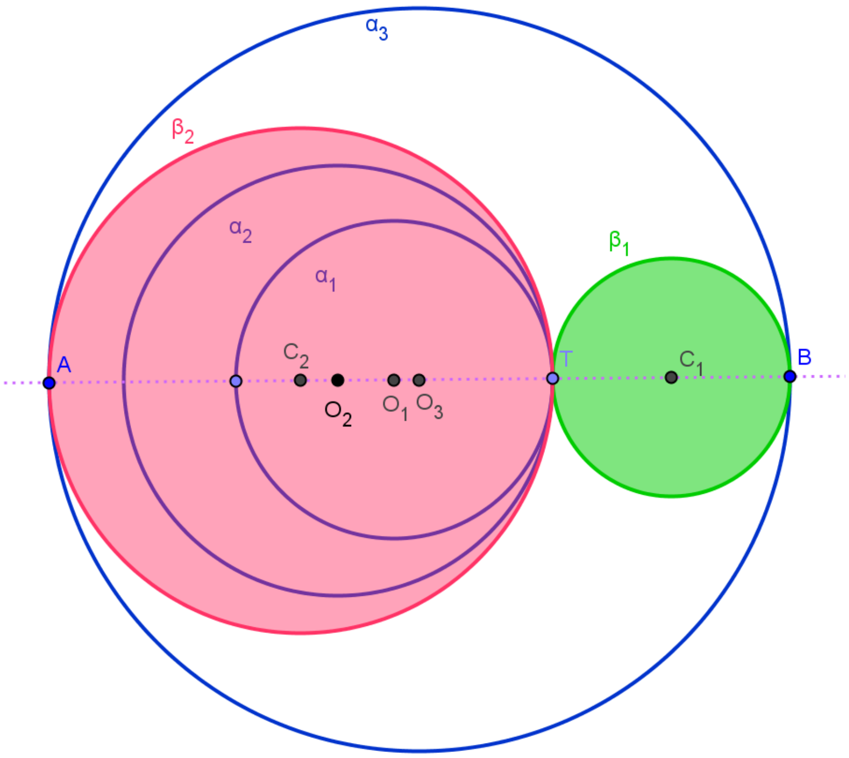


Figura 74: Exemplo de um caso do CCC com duas soluções

Como uma última atividade, utilize o dinamismo do *Geogebra* para encontrar situações que apresentem cinco e três soluções. Os autores são unânimes em afirmar que não é possível encontrar sete soluções ou apenas uma. Faça alguns testes e observe esse fato. A seguir, apresentamos uma aplicação desse problema apenas como curiosidade.

10.5. Circunferências de Soddy

Frederik Soddy (1877 – 1956), químico britânico elaborou as trajetórias das desintegrações radioativas e demonstrou a possibilidade da existência dos isótopos. Na verdade foi ele que criou o termo isótopo que deriva do grego e significa "no mesmo lugar" (na Tabela Periódica). Ganhou o Prêmio Nobel de Química em 1921.

Curiosamente, Frederick Soddy mostrou uma fórmula que envolve circunferências tangentes, com um poema intitulado ***O beijo preciso***, publicado na revista *Nature* em 20 de junho de 1936. A segunda estrofe do poema tem os versos a seguir: *"Quatro círculos veio a beijar /é menor o mais curvo / A curvatura é simplesmente o inverso /da distância a partir do centro / Embora este enigma surpreso Euclides / Regras empíricas não são necessárias / Uma vez que a linha tem curvatura zero / e curvas côncavas têm sinal negativo / a soma dos quadrados das quatro curvaturas / é igual a metade do quadrado da soma."*

As circunferências denominadas Circunferências de Soddy são as soluções do décimo Problema de Apolônio, no caso em que as três circunferências dadas são tangentes entre si. Nessa situação, o problema apresenta apenas duas soluções.

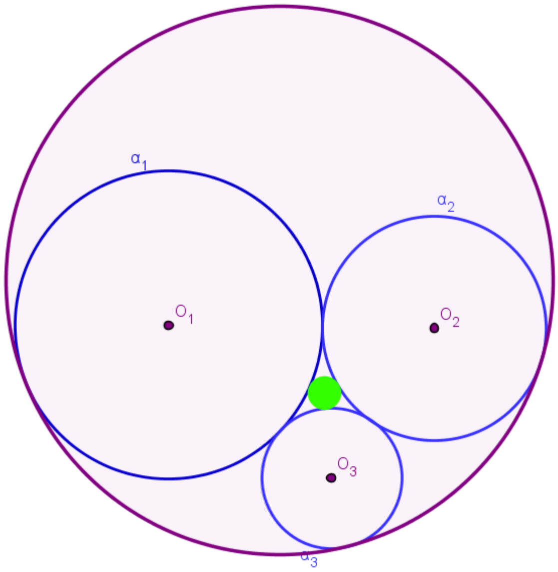


Figura 75: Circunferências de Soddy

11. Considerações finais

Vale a pena instigar a imaginação dos alunos refazendo alguns desses problemas, considerando a reta como circunferência de raio infinito e o ponto como uma circunferência de raio nulo. Questionar, principalmente, sobre o número de soluções de cada um dos casos. E, trabalhando assim, pode-se considerar todos os 10 problemas resumidos apenas ao último - *CCC*.

Ao analisarmos os processos de formação do conceito de objeto geométrico e da transição entre o experimental e o abstrato, evidenciamos o quanto os softwares de Geometria dinâmica podem ser ferramentas poderosas na superação das dificuldades. Surge, dessa forma, um novo auxílio na aprendizagem de Geometria, onde, a partir da exploração experimental viável apenas em ambientes informatizados, é possível que se façam conjecturas e, com o *feedback* constante oferecido pela máquina, sejam corrigidas ou refinadas, chegando-se à fase abstrata de argumentação e demonstração Matemática.

Reviver momentos da História da Geometria utilizando um ambiente de Geometria Dinâmica pode ser um caminho para resgatar a riqueza das demonstrações de muitos problemas da Geometria Euclidiana.

Fica como sugestão para aprofundamento do trabalho a criação de macro construções, já que muitos problemas recaem nos anteriores. Além disso, vale a pena conhecer um pouco mais as construções através de cônicas, apesar de serem mais simples, não são construídas com régua e compasso.

A tecnologia pode ter dificultado alguns fatores em sala de aula como o uso excessivo e inoportuno dos celulares ou softwares que apenas informam o resultado de algumas operações. Esse trabalho apenas mostra uma das inúmeras alternativas para utilizar a tecnologia a nosso favor.

12. Referências bibliográficas

BICUDO, Irineu – **Os Elementos de Euclides, 1ª Ed.** São Paulo:Editora UNESP, 2009.

ROVILSON, Mafalda & KAWANO, Alexandre – **Uma solução para o Problema de Apolônio e sua construção com régua e compasso** Paraná: Graphica – EPUSP, 2007.

ROVILSON, Mafalda & KAWANO, Alexandre – **Problemas de Tangência em três dimensões: uma classe de problemas em Geometria Descritiva** Paraná: Graphica – EPUSP, 2007.

ROVILSON, Mafalda & KAWANO, Alexandre – **Resolução de problemas de tangências por inversões e aplicações à Engenharia.** Paraná: Graphica – EPUSP, 2007.

SANTOS, Sandra Augusta & TREVISAN, André Luis – **O Problema de Apolônio: aspectos históricos e computacionais.** São Paulo: Departamento de Matemática Aplicada IMECC – UNICAMP.

WAGNER, Eduardo – **Construções Geométricas, 1ª Ed.** Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1993.

Portal do INEP. Disponível em: <
http://inep.gov.br/educacao_basica/enem/edital/2012/edital-enem-2012.pdf>
Data de acesso: Novembro, 2012.

Problemas de Apolônio. Disponível em: <
http://forum.ime.unicamp.br/viewtopic.php?f=47&t=568>
Data de acesso: Novembro, 2012.

Um passeio proveitoso pelos círculos de Apolônio. Disponível em: <
http://www.fc.up.pt/fcup/contactos/teses/t_050370080.pdf>
Data de acesso: Novembro, 2012.

Dois problemas chineses sobre Geometria Projetiva. Disponível em <
http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/dois_problemas_chineses.pdf>

Data de acesso: Maio, 2013.

Frederick Soddy. Disponível em <
http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/FredikSo.htm>
Data de acesso: Maio, 2013.

Potência de Ponto, Eixo Radical, Centro Radical e Aplicações. Disponível em <
http://conesul2006.tripod.com/Material/eixos.pdf>
Data de acesso: Maio, 2013.

Determinação de Circunferências Tangentes. Disponível em: <
http://www.freewebs.com/avelasvir/apuntes/tanxenciasApolonio.pdf>
Data de acesso: Junho, 2013.

O Problema de Apolônio. Disponível em: <
http://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/Apolonio/>
Data de acesso: Junho, 2013.

Inversão de uma circunferência. Disponível em <
http://cmup.fc.up.pt/cmup/mecs/Geometria/teoriainversao.pdf>
Data de acesso: Junho, 2013.

Exercícios resolvidos de tangência. Disponível em <
http://www.mat.uel.br/geometrica/php/pdf/dg_tang%C3%AAncia_re.pdf
Data de acesso: Junho, 2013.

Resolução do Problema de Apolônio por inversão. Disponível em <
http://www.pb.utfpr.edu.br/anamunaretto/monografia.pdf
Data de acesso: Junho, 2013.