MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL – PROFMAT

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

PAULO CÉSAR COSTA

APLICAÇÕES DE DERIVADA NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM DE FORMA INTUITIVA

Vitória da Conquista/BA

2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE

NACIONAL – PROFMAT

PAULO CÉSAR COSTA

APLICAÇÕES DE DERIVADA NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM DE FORMA INTUITIVA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Orientadora: Prof.ª Dr.ª Alexsandra Oliveira Andrade.

Vitória da Conquista/BA

2018

C875a Costa, Paulo César.
Aplicações de derivada no ensino médio: uma abordagem de forma intuitiva. / Paulo César Costa, 2018.
112f. il.
Orientador (a): Dra. Alexsandra Oliveira Andrade.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2018.
Inclui referências. 97-99.
1. Matemática – Resolução de problema. 2. Ensino da derivada – Ensino médio. 3. Derivadas - Matemática do 2º grau. I. Andrade, Alexsandra Oliveira. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 510

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção- CRB 5/1890
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

PAULO CÉSAR COSTA

APLICAÇÕES DE DERIVADA NO ENSINO MÉDIO: UMA ABORDAGEM DE FORMA INTUITIVA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Andrade

Prof.ª Dr.ª Alexsandra Oliveira Andrade (Orientadora)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

SRVieira

Prof.ª Dr.ª Selma Rozane Vieira
Instituto Federal da Bahia – IFBA

Vitória da Conquista/BA

2018

À Marlúcia Nogueira Martins Costa (in memoriam), minha esposa, que sempre me apoiou na conquista desse sonho e muito esperava por esse momento.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre ao meu lado, protegendo-me, iluminando-me e me conduzindo.

Aos meus filhos Matheus, Samuel e André pelo apoio e compreensão.

Aos meus familiares pela força que me deram nos momentos mais difíceis.

Aos professores do PROFMAT/UESB, Altemar, Júlio, André, Márcio, Maria Aparecida, Sérgio, Maria Deusa e, em especial, Alexsandra minha professora e orientadora.

Aos colegas da turma 2015 PROFMAT/UESB, Lindomar, Rita, Fábio, Fábia, Mauricio, Marcelo (in memoriam) pela cooperação e, em especial, Letsa e Neiva pelos momentos que vivemos juntos nas viagens e nos estudos.

À professora Roz Mery A. Teles, pela revisão ortográfica neste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

"Para tudo há um tempo, para cada coisa há um momento debaixo dos céus: tempo para nascer, e tempo para morrer; tempo para plantar, e tempo para arrancar o que foi plantado; tempo para matar, e tempo para sarar; tempo para demolir, e tempo para construir; tempo para chorar, e tempo para rir; tempo para gemer, e tempo para dançar; tempo para atirar pedras, e tempo para ajuntá-las; tempo para dar abraços, e tempo para apartar-se. Tempo para procurar, e tempo para perder; tempo para guardar, e tempo para jogar fora; tempo para rasgar, e tempo para costurar; tempo para calar, e tempo para falar; tempo para amar, e tempo para odiar; tempo para a guerra, e tempo para a paz." (ECLESIASTES, 3, 1-8)

RESUMO

Este trabalho constitui-se em uma proposta didática para o ensino da Derivada no Ensino Médio, de forma intuitiva e vinculada ao estudo de funções, por meio das taxas de variação média e instantânea e dos pontos máximos e mínimos de uma função, com ênfase na resolução de problemas. Para tanto, descreveu-se sobre as novas tendências do ensino e da aprendizagem, como, construtivismo, sociointeracionismo e a metodologia da resolução de problemas, como também se apresentou uma discussão a respeito do ensino de Cálculo no Ensino Médio e a preocupação com o seu alto índice de reprovação no Ensino Superior e os conceitos e aplicações da Derivada. Com este trabalho, teve-se objetivo de oferecer ao aluno do Ensino Médio maior aprofundamento no estudo das funções e, consequentemente contribuir para a melhora dos índices de aprovação na disciplina de Cálculo nos cursos superiores das ciências exatas e tecnológicas. Desenvolveu-se uma pesquisa optando pela metodologia de natureza qualitativa do tipo pesquisa-ação em sete encontros presenciais com dez alunos de uma turma de 2º ano do Ensino Médio. Durante os encontros, apresentaram-se as ideias, conceitos e aplicações da Derivada, em seguida, foram resolvidas cinco listas de atividades, duas como exercícios de fixação e três de caráter investigativo, e ainda aplicado um questionário para levantamento de dados e opinião dos alunos participantes. Com as resoluções das atividades e respostas do questionário foi possível observar ser viável inserir a ideia da Derivada ainda no Ensino Médio, mesmo que de forma intuitiva, dando destaque a interpretação geométrica e as aplicações da Derivada em problemas de máximos e mínimos.

Palavras-chave: Derivada; Ensino Médio; Resolução de problemas.

ABSTRACT

This work constitutes a didactic proposal for the teaching of Derivative in High School, in an intuitive way and linked to the study of functions, through the average and instantaneous variation rates and the maximum and minimum points of a function, with emphasis on the troubleshooting. In order to do so, we described the new trends in teaching and learning, such as constructivism, socio-interactionism and problem-solving methodology, as well as a discussion about the teaching of Calculus in High School and the concern with its high failure rate in Higher Education and the concepts and applications of the Derivative. With this work, the objective was to offer the student of the Higher Education greater depth in the study of the functions and, consequently, to contribute to the improvement of the indexes of approval in the discipline of Calculus in the superior courses of the exact and technological sciences. A research was developed opting for the methodology of qualitative nature of the research-action type in seven face-to-face meetings with ten students of a class of 2nd year of High School. During the meetings, the ideas, concepts and applications of the Derivative were presented, then five lists of activities were solved, two as fixation exercises and three of investigative character, and a questionnaire for data collection and student opinion was also applied participants. With the resolutions of the activities and answers of the questionnaire, it was possible to observe that it is feasible to insert the idea of the Derivative even in High School, even if intuitively, with emphasis on the geometric interpretation and Derivative applications on maximum and minimum problems.

Keywords: Derivative; High school; Troubleshooting.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BCT – Bacharelado em Ciência e Tecnologia

CDI – Cálculo Diferencial e Integral

ECA – Estatuto da Criança e Adolescente

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

LDB – Lei de Diretrizes e Bases

MMM – Movimento da Matemática Moderna

OCDE – Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

PISA – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

TVI – Taxa de Variação Instantânea

TVM – Taxa de Variação Média

UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

UFVJM – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) – ou simplesmente Cálculo – sempre foi tratada com especial atenção. Logo após seu surgimento a atenção estava voltada para a disputa de quem a inventou primeiro. Hoje a atenção está voltada para a compreensão dos seus conceitos. Enquanto, para muitos professores a disciplina é considerada como a mais importante das disciplinas da matemática devido sua grande aplicabilidade em resolução de problemas em várias áreas, para muitos alunos a disciplina de Cálculo é considerada de difícil compreensão, aquela que assusta e põe medo nos cursos superiores das ciências exatas e tecnológicas.

Para comprovar o sentimento dos alunos, realizou-se levantamento de dados em duas universidades públicas e constatou-se o alto índice de reprovação em Cálculo I. De um modo geral, o índice de reprovação, seja por nota ou por frequência, foi de aproximadamente 67%, ou seja, em cada 3 alunos da disciplina 2 são reprovados. Acredita-se que nas demais universidades públicas brasileiras a realidade quanto ao alto índice de reprovação em Cálculo I não seja diferente, pois, muitas universidades já ofertam em seus planos curriculares logo no primeiro semestre a disciplina Pré-Cálculo de modo a propiciar maior embasamento aos alunos egressos do Ensino Médio e também para um melhor nivelamento em Cálculo I.

Diante dessa situação, podemos então perguntar. O que torna a disciplina de Cálculo a grande vilã dos cursos superiores das ciências exatas e tecnológicas, na concepção dos alunos? Responder a esta pergunta e chegar a um denominador comum não é tarefa fácil, mas, acredita-se que um dos fatores seja a falta de base matemática de muitos alunos egressos do Ensino Médio, principalmente no conceito de funções, que entram para as universidades brasileiras. Assim, há a convicção da importância do ensino de noções de Cálculo ainda no Ensino Médio. Não se propõe o retorno da disciplina de Cálculo, vale ressaltar que a disciplina de Cálculo já fez parte do currículo escolar de nível médio no Brasil, sendo abolida com a chegada do

Movimento da Matemática Moderna (MMM) na década de 60, pois, sabemos da complexidade do assunto e da extensão do currículo do Ensino Médio.

Durante a graduação de licenciatura em Matemática do pesquisador, o estudo da Derivada na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I sempre lhe chamou a atenção devido à grande quantidade de regras e aplicações. Com o passar do tempo, adquirindo experiência profissional de professor, percebeu a possibilidade de trabalhar algumas de suas aplicações no Ensino Médio, introduzindo a ideia da Derivada de forma intuitiva junto ao estudo das funções. Tal percepção começou a se tornar possível de entrar em prática quando, no ano de 2015 ingressou no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Em 2017 após estudo de trabalhos sobre derivadas, escolha e conversa com a orientadora delineou-se a proposta de realização da dissertação do mestrado. Assim, nasceu a ideia de pesquisar as aplicações da Derivada no Ensino Médio de forma intuitiva.

Então, propõe-se neste trabalho, a inclusão do ensino das noções da Derivada, mesmo que de forma intuitiva no Ensino Médio. E por que noções da Derivada? A Derivada é considerada conteúdo fundamental do Cálculo I e possui diversas aplicações em problemas de nível médio o que facilitaria o entendimento de alguns conceitos e a interdisciplinaridade com a física, o que contempla o surgimento do Cálculo como ferramenta para soluções de problemas. Desta forma, a pesquisa visa inserir os conceitos básicos da Derivada, atrelando-os ao estudo das funções polinomiais, dando ênfase, principalmente, nos problemas de aplicação de taxa de variação instantânea e nos problemas de máximos e mínimos.

A pesquisa tem como objetivo geral analisar, discutir e propor estratégias para abordar o conceito intuitivo de Derivada e suas aplicações no Ensino Médio. E como objetivos específicos, analisar o processo de resolução dos problemas apresentados nas atividades da pesquisa, facilitar a interpretação dos conceitos da Derivada a partir de problemas propostos e identificar se os alunos apresentam elementos que expresse sua compreensão. A metodologia utilizada na pesquisa é de natureza qualitativa com abordagem na pesquisa-ação, porque se decidiu realizar empiricamente as noções da Derivada no Ensino Médio por meio de suas aplicações nas funções e, a partir de então, ter condições de mudar a prática docente.

Este trabalho está dividido em Introdução, em que se destacam as preocupações, justificativas, razões e objetivos para a elaboração da pesquisa, bem como, a escolha do tema e a organização do trabalho e mais seis capítulos.

No primeiro capítulo, falaremos do construtivismo defendido por Piaget e da teoria sociointeracionista de Vygotsky, em que a aprendizagem se dá por meio de situações desafiadoras capazes de gerar conflitos cognitivos, cabendo ao professor o papel de criar possibilidades, motivar e de ser o mediador da situação de modo que a aprendizagem significativa aconteça.

No segundo capítulo, trataremos da metodologia de resolução de problemas, cujo foco principal será o desenvolvimento da formação intelectual do aluno, discutiremos sobre o que apresentam os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio para a disciplina de Matemática, as vantagens de se estudar baseando-se na resolução de problemas e os processos para obter a solução.

No terceiro capítulo, apresentaremos um breve histórico do Cálculo com ênfase na história da Derivada, as criações e contribuições de grandes matemáticos. Também, faremos uma retrospectiva histórica da disciplina de Cálculo no Ensino Médio no Brasil, buscando entender suas inclusões e retiradas, e ainda, discutiremos dados de aprovação e reprovação na disciplina de Cálculo I em duas universidades.

O quarto capítulo trará a apresentação da Derivada, as taxas de variação média e instantânea, a interpretação geométrica da derivada, as regras básicas de derivação e suas aplicações em problemas de máximos e mínimos.

No quinto capítulo, falaremos da pesquisa, da metodologia aplicada, o público alvo, o cenário e os sujeitos, bem como, de todas as atividades desenvolvidas nos encontros e as considerações feitas pelos alunos participantes.

E, no sexto e último capítulo, apresentaremos as considerações finais da pesquisa, levantadas a partir das observações, registros e atividades realizadas durante os encontros e também, dos relatos dos alunos participantes no questionário. Descreveremos, ainda, sobre as possíveis contribuições acadêmicas deixadas por este trabalho e as possibilidades de trabalhos futuros.

1 – CONSTRUTIVISMO

De acordo com o artigo 2º do Estatuto da Criança e Adolescente – ECA, a adolescência é a fase da vida que compreende a faixa etária dos doze aos dezoito anos de idade, e trabalhar com a disciplina de matemática com alunos nesta fase da vida sempre foi um desafio. De um lado, estão os conteúdos que vão se tornando cada vez mais formalizados, mais científicos e, de outro, as transformações naturais próprias do adolescente, como mudanças no corpo e de comportamento devido às alterações hormonais que tem influencia direta no humor e no comportamento. A tristeza, a felicidade, a agitação, a preguiça são comuns na vida do adolescente. Com tudo isso, há uma clara perda de interesse do aluno pelos conteúdos escolares, causando uma desconexão entre o que é ensinado pelo professor e o que é aprendido pelo aluno, favorecendo, assim, o fracasso escolar.

Assim, torna-se de suma importância que a aprendizagem traga sentido ao aluno e que o professor faça um trabalho de forma a possibilitar uma aprendizagem significativa, de modo a articular o conteúdo ensinado ao conhecimento do aluno. E para fazer esse elo, muito se tem falado na construção do conhecimento pelos métodos construtivista e sociointeracionista, em que o aluno é levado a participar ativamente da própria aprendizagem, não se importando com os erros, mas, fazendo deles alavanca para o desenvolvimento do raciocínio e, consequentemente, a construção do conhecimento.

1.1 – O que é construtivismo?

Nos dias atuais muito se tem falado em construtivismo nas escolas, ou seja, que o professor deve trabalhar nos moldes do método construtivista, de forma a consolidar o conhecimento do aluno. Mas, a final o que é construtivismo?

O método construtivista atrelado às teorias pedagógicas foi inspirado na obra do biólogo e psicólogo suíço Jean Piaget (1896 – 1980). Os chamados conceitos piagetianos referem-se aos mecanismos de funcionamento da inteligência pelo qual o sujeito interage com o meio.

Para Pereira, Piaget elaborou uma teoria do conhecimento do desenvolvimento da inteligência deixando importantes contribuições para a prática pedagógica:

> A principal delas é a de que a educação deve possibilitar à criança seu pleno desenvolvimento durante todos os estágios de maturação da inteligência – que se inicia no nascimento, com reflexos neurológicos básicos (estágio sensório-motor) e caminha até o início da adolescência, com o desenvolvimento do raciocínio lógico (estágio operatório formal).

Para a autora, isto significa que os esquemas de assimilação da criança promovem situações didáticas desafiadoras gerando conflitos cognitivos os quais são responsáveis pela construção do conhecimento.

Ainda segundo a autora, a grande contribuição na aplicação pedagógica das teorias construtivista, em relação à educação é que “a aprendizagem não acontece de forma passiva pelo aluno, cabendo ao professor a tarefa de criar possibilidades enquanto sujeito mediador da aprendizagem”. Ou seja, o professor deve propiciar ao aluno situações problemas que permitam o conflito cognitivo e o raciocínio lógico.

Na teoria sociointeracionista do psicólogo russo Lev Vygotsky (1896 – 1934) a aprendizagem não pode ser entendida como mera aquisição de informação, pois, não pode acontecer a partir da associação de ideias armazenadas na memória. Para ele, a aprendizagem é um processo interno, ativo e interpessoal. Segundo Neves e Damiani (2006, p. 07), “Na abordagem vygotskyana, o homem é visto como alguém que transforma e é transformado nas relações que acontecem em uma determinada cultura”. Assim, a opinião de Vygotsky é que o desenvolvimento intelectual do individuo se dá por meio de trocas de experiências entre o individuo e o meio ao qual está inserido e que essas trocas vão se estabelecendo por toda a vida.

O mesmo ponto de vista é defendido por Rabello e Passos ao citarem que, na abordagem vygotskyana “O sujeito é interativo, pois adquire conhecimentos a partir de relações intra e interpessoais e de troca com o meio, a partir de um processo denominado mediação”. Ou seja, o ponto principal na aquisição de conhecimentos é a iteração que o sujeito exerce com o meio.

O método construtivista de Piaget e a teoria sociointeracionista de Vygotsky apresentam semelhanças, mas também divergências. Fossile (2010), apresenta definições e faz um comparativo entre as duas concepções.

> A versão construtivista não pode ser entendida como uma simples teoria e, sim, como um referencial explicativo que pretende mostrar que o processo ensino aprendizagem é um processo social em que o conhecimento é resultado da construção pessoal do aluno. E é importante perceber que o professor é um mediador importante nessa construção. (FOSSILE, 2010, p.110)

Para a autora, o papel de mediador exercido pelo professor é de suma importância, pois, além de auxiliar o aluno no processo, também contribui com a consolidação da aprendizagem. Ainda segundo a autora, a ideia construtivista tem como foco principal oferecer ao professor os seguintes critérios:

> ● Aprendizagem = Desenvolvimento: a aprendizagem, não deve ser compreendida como o resultado do desenvolvimento do aluno, mas deve ser entendida como o próprio desenvolvimento.
>
> ● Desafios: o professor deve criar situações desafiadoras ao aluno, em contextos que façam e/ou tenham sentido para ele (aluno), estimulando o pensar crítico, a pesquisa, a discussão, o debate.
>
> ● Raciocínio abstrato: o que rege a aprendizagem é o raciocínio abstrato.
>
> ● Estímulo do pensamento: (FOSSILE, 2010, p.110)

Fossile (2010, p.111), ainda apresenta um quadro comparativo entre a sala de aula pautada no método tradicional e a sala de aula baseada na concepção construtivista.

Quadro 1: Comparativo entre sala de aula tradicional e sala de aula construtivista.

Sala de aula baseada na EDUCAÇÃO TRADICIONAL	Sala de aula baseada na EDUCAÇÃO CONSTRUTIVISTA
O currículo rigorosamente obedece às regras estabelecidas.	O currículo pode mudar, é flexível.
Elabora-se um currículo da parte para o todo, dando preferência às aptidões básicas.	Elabora-se um currículo do todo às partes, dando preferências aos conceitos relevantes.
O corpo discente é visto como tabula rasa e, só o professor pode auxiliar o aluno a gravar as informações.	O corpo discente é visto como um agente ativo e como um pensador de teorias relacionadas ao mundo.
Os conteúdos são transmitidos aos alunos pelos professores.	O professor é um mediador. Ele age de forma interativa. Ele é o mediador entre o meio e o aluno. Ele valoriza os questionamentos, as dúvidas dos alunos.
Ao avaliar a aprendizagem do aluno, o professor só busca a resposta certa.	Ao avaliar a aprendizagem do aluno, o professor busca o ponto de vista do aluno, tentando compreender as suas concepções atuais. Objetivando trazer à tona essas concepções nas próximas aulas.
A avaliação é entendida como algo separado do ensino. Geralmente, acontece por meio de provas.	A avaliação não é separada do ensino, mas é entendida como algo que faz parte do ensino. A avaliação acontece por meio da observação do professor quando os alunos desenvolvem e apresentam trabalhos.
Os alunos trabalham, geralmente, de maneira individual.	Os alunos, geralmente, desenvolvem seus trabalhos e atividades em grupo.

Na teoria sociointeracionista, Vygotsky defende que os conteúdos devem ser repassados por meio de uma interação social com o objetivo de alcançar o desenvolvimento cognitivo, cultural e social do aluno.

Para Fossile (2010), segundo a teoria vygotskyana a aprendizagem se desenvolve pela interação entre o aluno e o meio ao qual ele está inserido e, para que esta interação aconteça é necessário que o professor:

> a) Observe o que incentiva e/ou estimula o aluno à aprendizagem; b) compreenda que cada conhecimento adquirido pelo aluno pode servir de base para a aquisição do próximo conhecimento; c) leve em conta a fase do desenvolvimento cognitivo da criança e a partir dessa determinação selecione os conteúdos que podem ser trabalhados em sala de aula; d) incentive a criança à interação social para que ela possa aprimorar o seu desenvolvimento cognitivo; e) incentive o uso da linguagem, pois é uma maneira de favorecer o desenvolvimento cognitivo da criança. (FOSSILE, 2010, p. 114)

Ainda segundo Fossile (2010, p. 115), é possível estabelecer alguns pontos em que as teorias, construtivista de Piaget e sociointeracionista de Vygotsky, apresentam pontos de divergências (controvérsias) e pontos de convergências (equivalências).

Quadro 2: Controvérsias entre as teorias de Piaget e de Vygotsky

CONTROVÉRSIAS	
Piaget	Vygotsky
O principal foco de pesquisa é investigar o desenvolvimento das estruturas lógicas.	O principal foco de estudo é compreender a relação existente entre o pensamento e a linguagem e sua implicação no processo de desenvolvimento cognitivo. A linguagem desempenha um papel fundamental na organização do pensamento, pois age sobre o pensamento reestruturando as várias funções psicológicas, tais como: - a memória; - a formação de conceitos; - a atenção.
O conhecimento acontece a partir da ação do indivíduo sobre a realidade.	Um indivíduo interage com a realidade e não apenas age sobre ela. Ele ainda sustenta que é a partir de relações intra e interpessoais que um indivíduo constrói seu conhecimento.
A aprendizagem depende do estágio de desenvolvimento alcançado pelo indivíduo.	A aprendizagem propicia o desenvolvimento das funções mentais.

Quadro 3: Equivalências entre as teorias de Piaget e de Vygotsky

EQUIVALÊNCIAS
Alguns pontos equivalentes entre Piaget e Vygotsky: • Tentam salientar a importância de se compreender a gênese dos processos cognitivos; • Valorizam a interação de um ser → (“sujeito”, para Vygotsky, e “indivíduo”, para Piaget) com o ambiente; • Entendem que um ser → (“sujeito”, para Vygotsky, e “indivíduo”, para Piaget) é alguém que atua no processo de seu desenvolvimento.

Ainda falando em construtivismo, para Carretero (2002), o construtivismo é:

> A ideia que sustenta que o indivíduo – tanto nos aspectos cognitivos e sociais do comportamento como nos afetivos – não é um mero produto do ambiente nem um simples resultado de suas disposições internas, mas, sim, uma construção própria que vai se produzindo, dia a dia, como resultado da interação entre esses dois fatores. (CARRETERO, 2002, p. 10)

De acordo o autor, na concepção construtivista, a construção do conhecimento pode ser comparado com um trabalho mecânico, onde a maneira pela qual o professor apresenta o conteúdo ao aluno é a ferramenta primordial para a aquisição de uma aprendizagem mais significativa e o aluno, por sua vez, deve se sentir motivado a aprender.

Uma posição em comum, defendida por pesquisadores construtivista, é que a interação social favorece a aprendizagem mediante a criação de conflitos cognitivos, pois estes causam uma mudança nos conceitos existentes. Assim, a troca de informações entre indivíduos com diferentes níveis de conhecimentos provoca uma modificação na forma de pensar, produzindo, assim, aprendizagem, além de melhorar a motivação.

1.2 – O construtivismo e a aprendizagem significativa

Enquanto, o ensino tradicional, conforme visto no quadro 1, se baseia na transmissão de conhecimento do professor ao aluno, em que o professor é o centro e este vai depositando informações na cabeça do aluno que, por sua vez, vai armazenando as informações, muitas vezes, de forma desordenada. Tal forma de ensino é geralmente chamada de método baldista, em que a cabeça do aluno é comparada a um balde vazio e o professor vai enchendo esse balde com informações sem se preocupar com o que já existe na cabeça do aluno, que é apenas um receptor passivo, não critica, não duvida das informações e acredita que o professor e o dono da verdade e do saber.

A visão construtivista defende que o ensino seja proposto através de ações a favorecer o processo construtivo do conhecimento, sendo assim, é importante que o professor leve em conta às concepções dos alunos, tanto os conhecimentos prévios, quanto às que serão construídas durante o processo de aprendizagem. Para Neves e Damiani (2006, p. 04), “[...] o professor é um auxiliar do aluno, um facilitador, pois o aluno já traz em si um saber que ele precisa, apenas, trazer à consciência, organizar, ou, ainda, rechear de conteúdo”. O professor, ao deixar o aluno fazer, estará contribuindo para despertar nele o conhecimento que já existe.

Para Jófili (2002, p.200), “[...] Os alunos não conseguem entender a razão para determinadas questões; não conseguem perceber as relações desses tópicos com suas próprias experiências nem como poderão utilizar o novo conhecimento em seu próprio benefício". Deve-se ressaltar que ensinar não é apenas transmitir conhecimentos, mas fazer com que esses conhecimentos tenham significado.

Deste modo, o professor deve criar conflitos cognitivos no aluno, produzindo assim, situações que contribuam e facilitem a compreensão dos conteúdos ensinados. Para isso, antes de iniciar um novo conteúdo, o professor pode indagar os alunos a cerca de suas ideias com relação ao conteúdo e a partir daí mostrar a concepção cientifica correta. Para Jófili (2002, p.196), no enfoque construtivista "[...] os professores deveriam também estimular os alunos a refletirem sobre suas próprias ideias – encorajando-os a compararem-nas com o conhecimento cientificamente aceito – e procurarem estabelecer um elo entre esses dois conhecimentos". Para a autora, essa comparação é importante, pois estimula o conflito cognitivo, contribuindo para que o aluno reestruture suas ideias, fazendo com que o novo conhecimento seja construído de modo ativo pelo aluno.

O professor deve estar atendo também à reorganização conceitual pelo qual o aluno passará, pois esta reorganização não é simples, tampouco imediata, uma vez que se espera que o aluno seja capaz de compreender e aplicar o que aprendeu em um amplo conjunto de situações, tanto na vida escolar quanto na vida cotidiana.

Moreira (2009) define a aprendizagem significativa da seguinte forma:

> Aprendizagem significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não-literal, não ao pé-da-letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende. (MOREIRA, 2009, p.02)

Para o autor, a aprendizagem significativa se caracteriza pela interação entre os conhecimentos prévios e os novos conhecimentos. Assim, os novos conhecimentos ganham significado para o sujeito. Ainda segundo Moreira, a aprendizagem significativa não é aquela que o sujeito nunca esquece. Quando afirma: "[...] Se o esquecimento for total, como se o indivíduo nunca tivesse aprendido um certo conteúdo é provável que aprendizagem tenha sido *mecânica*, não significativa".

Assim, para o autor, o esquecimento gradual e parcial é natural na aprendizagem significativa, porém, não um esquecimento total.

Tradicionalmente, na aula expositiva o professor expõe a ideia central do conteúdo e o aluno recebe a informação de forma passiva. Para Carretero (2002, p. 44), também tem que se levar em conta a aula expositiva. Ele afirma que “[...] o ensino expositivo não tem por que associar-se, necessariamente, a um tratamento passivo e sem significado por parte do aluno”. Para o autor, é possível realizar um ensino expositivo considerando as ideias prévias do aluno e ainda proporcionar meios de mudança conceitual e que, pelo fato da maioria dos conteúdos do ensino médio apresentar complexidade, o autor defende um ensino com elementos expositivos, caso contrário, deveria ser reduzida a escala de conteúdos escolares do ensino médio, pois os alunos gastam maior tempo para descobrir a solução dos problemas.

A posição construtivista ainda critica as listas de exercícios repetitivos e sem significados para o aluno, ao mesmo tempo em que sugere que sejam trabalhados os conceitos e que a repetição só deve ser trabalhada de forma a consolidar determinados conhecimentos e que deve sempre apresentar um grau de novidade para o aluno, caso contrário, irá produzir apenas cansaço no aluno.

A concepção construtivista destaca que a aprendizagem não é apenas acumulação de informação e, sim, na forma como estas informações vão se organizando na cabeça do aluno, ou seja, como estas informações vão se transformando em conhecimento e, em consequência, em aprendizagem significativa para o aluno, pois é sempre melhor aprender aquilo que se compreende, isto é, o que se inclui nos conhecimentos prévios do aluno e que possa ser usado para resolver problemas significativos. Dessa maneira, destaca que a aprendizagem não se reduz a aquisição de conhecimento, mas na sua manutenção e automação, de modo, a ser aplicada tanto nas situações teóricas quanto práticas, a curto, médio e em longo prazo, ou seja, aconteça de forma significativa.

Ainda no pensamento de uma aprendizagem significativa, de acordo Brito:

> A aprendizagem torna-se mais significativa à proporção que o conteúdo apresentado incorpora-se ao conhecimento prévio de um aluno adquirindo

> significado para ele, incorporando a atribuição do significado, por interagir com conceitos relevantes pré-existentes na estrutura cognitiva. Quando essa relação não se estabelece o novo conteúdo proposto é trabalhado de forma isolada ou através de associações arbitrárias na estrutura cognitiva acontecendo à aprendizagem mecânica ou repetitiva, onde o conhecimento é armazenado de forma memorizada, o aluno decora os conteúdos que tem prazo de validade: esquece após ser avaliado.

Para a autora, é fundamental estabelecer uma conexão entre as ideias que o aluno já possui do conteúdo e o seu caráter cientifico, ou seja, é essencial que seja levado em conta todo conhecimento que o aluno já possui, não fazendo com que a aprendizagem se torne mecânica, em que o conhecimento se dê de forma memorizada e decorativa, o qual é esquecido rapidamente.

Uma queixa muito grande por parte dos professores que desejam trabalhar segundo a concepção construtivista é o fato de haver uma extensa lista de conteúdos a serem ensinados no ensino médio. A enorme lista de conteúdos e o pouco número de aulas de matemática acabam causando um dilema entre os professores. Trabalhar de forma tradicional em que o ensino é apenas expositivo e se ganha tempo ou trabalhar de maneira construtivista, deixando o aluno descobrir e aprimorar seus conhecimentos?

1.3 – O construtivismo e a motivação

Não há como falar de construtivismo sem falar de motivação. A motivação é um elemento primordial na construção da aprendizagem escolar. Todo professor deve, no dia a dia motivar seu aluno. Para Carretero (2002, p. 56), “[...] sem motivação, o aluno não realizará nenhum trabalho adequadamente; não só o de aprender um determinado conceito, mas o de colocar em andamento as estratégias que lhe permitam resolver problemas similares aos aprendidos”. Ainda segundo o autor, tudo leva a crê que existe uma ligação entre os métodos de ensino, aprendizagem e os aspectos motivacionais do comportamento do aluno e o professor não deve está alheio a isto.

Para Alcará e Guimarães (2007),

> No contexto educacional, a motivação dos alunos é um importante desafio a ser enfrentado, pois tem implicações diretas na qualidade do envolvimento do aluno com o processo de ensino e aprendizagem. O aluno motivado busca novos conhecimentos e oportunidades, mostrando-se envolvido com o processo de aprendizagem, envolve-se nas tarefas com entusiasmo e demonstra disposição para novos desafios. (ALCARÁ e GUIMARÃES, 2007, p.177)

Neste sentido, é importante que o professor leve em consideração que é essencial motivar seu aluno. Uma vez motivado, o aluno estará disposto a encarar desafios, de modo a promover a mudança conceitual e, como consequência, estará mais apto a adquirir uma aprendizagem significativa.

Mesmo pesquisadores afirmando que a motivação é uma característica interna do individuo, isso não garante que todos tenham um potencial motivador. Assim, muitas vezes, é importante que o professor não só utilize de recompensas externas, como também, mensagens de incentivo, de modo a mudar o estilo motivacional do aluno e, com isso, melhorar os resultados da aprendizagem.

Existe diferença entre motivação intrínseca e motivação extrínseca. No ambiente escolar, o aluno com motivação intrínseca estará movido de incentivo interno, ou seja, depende de seus próprios esforços para realizar uma atividade. Sua meta está relacionada com o eu posso, eu consigo, sem nenhuma obrigação externa. Já o aluno que necessita de incentivo externo possui uma motivação extrínseca para realizar uma atividade. Sua meta está relacionada com a obtenção de recompensas, como, por exemplo, a aprovação no final do ano letivo.

1.4 – O construtivismo e a mudança conceitual

O modelo de concepção construtivista tem como estratégia de efeito sobre a mudança conceitual o fato de que o professor antes de iniciar a explicação de um determinado conteúdo, passe a conhecer quais são os conhecimentos prévios ou ideias prévias do seu aluno com relação ao conteúdo a ser trabalhado. Isso pode ser feito por meio de questionamentos dialogados entre o professor e o aluno.

Segundo Jófili (2002, p.197), é importante que o professor esteja consciente dos conceitos prévios dos alunos. “[...] Estar consciente dos conceitos prévios dos alunos – que estejam em desacordo com o conhecimento cientifico – capacita os professores a planejar estratégias para reconstruí-los, utilizando contraexemplos ou situações problemas, para confrontá-los”. Ainda segundo a autora, esse confronto pode provocar no aluno um desequilíbrio cognitivo, de modo a impulsioná-los para frente.

Alguns pesquisadores em educação tratam os conhecimentos que os alunos já trazem consigo a respeito dos conteúdos estudados em sala de aula como ideias prévias, ou ideias espontâneas, ou conhecimento cotidiano. O que não diverge entre eles é a opinião de que tal conhecimento que o aluno possui é decisivo na assimilação dos conteúdos. Cabe ao professor estabelecer situações didáticas de modo a formalizar os conceitos e as ideias prévias do aluno ou contradizer, criando, assim, um conflito cognitivo entre as ideais prévias do aluno e a nova informação, fazendo com que o aluno perceba que suas ideias anteriores não estão corretas. Em ambos os casos, faz-se necessária à intervenção do professor, de modo a consolidar o conhecimento científico. No primeiro caso, a intervenção pode se dar de forma suave, pois o aluno já possui conhecimento correto e o professor só irá conduzir a informação. Já no segundo caso, a intervenção se dará de forma mais rigorosa, uma vez que as ideias prévias do aluno podem estar tão enraizadas que seja difícil causar uma mudança rápida de conceito. E, na concepção construtivista, a aprendizagem se caracteriza por sua forma interna de assimilação do conteúdo, ou seja, a maneira pela qual o aluno estabelece ligação entre as ideias prévias e as novas informações. Assim, a mudança conceitual por parte do aluno, e quem sabe do professor, ocupa lugar de destaque na concepção construtivista, pois o trabalho é voltado para o aperfeiçoamento do conhecimento a partir da reorganização das ideias, sendo o conflito cognitivo a mola propulsora de toda a mudança.

Desse modo, a aprendizagem é um fenômeno de transformação da mente. Segundo Oliveira (2014, p.20), “[...] Aprender envolve o pensamento, as emoções, as vias neurais, os neurotransmissores, enfim, todo o ser humano”. Ainda conforme o autor, a reunião da organização cerebral com a aprendizagem, também chamada de neuroeducação ou neurociência cognitiva, “Tem interessado a muitas sociedades ao apresentar princípios úteis para uma melhor estrutura para a prática de ensino e aprendizagem ligando mente, cérebro e educação”. Dessa forma, a neurociência constitui-se em uma importante aliada no processo de ensino e aprendizagem.

2 – A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

No mundo em que vivemos o conhecimento matemático é cada vez mais necessário devido a grande variedade de situações problemas que encontramos no cotidiano. Assim, a matemática deve ser compreendida como ferramenta capaz de contribuir para a formação do aluno, de forma que ele possa desenvolver capacidades de interpretar e resolver problemas matemáticos que surgirão no seu cotidiano.

O estudo sobre resolução de problemas matemáticos vem se tornando nos últimos anos objeto de pesquisa de muitos pesquisadores – mais adiante falaremos de alguns deles – onde o foco principal é a formação intelectual do aluno e a sua capacidade em resolver situações problemas, bem como sua preparação cientifica. Estudar matemática deixa de ser apenas regras, fórmulas e memorização para se tornar um exercício de aplicabilidade dos conceitos da matemática.

2.1 – A resolução de problemas e algumas leis que regem a educação

Observando as transformações educacionais ocorridas no Brasil nas últimas décadas e trazendo as preocupações com a formação integral do aluno os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000) em suas orientações apresenta a perspectiva para todo aluno egresso do ensino médio quando diz:

> Propõe-se, no nível do Ensino Médio, a formação geral, em oposição à formação específica; o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las: a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização. (PCNEM - BRASIL, 2000, pág. 05)

O princípio da formação integral do aluno apresentado nos PCNEM (2000) resulta de orientação expressa na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei 9394/96, quando em seu Artigo 1º, § 2º diz: “[...] Na perspectiva da nova Lei, o Ensino Médio, como parte da educação escolar, deverá vincular-se ao mundo do trabalho e a pratica social”. Também, traz como finalidade do ensino médio no Artigo 35º a compreensão dos fundamentos relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Ainda segundo orientações educacionais complementares aos PCNEM, o ensino nos termos da LDB – 9394/96 assume a responsabilidade de complementar a educação básica, ou seja, preparar para a vida e capacitar para o aprendizado permanente. Para isto, os PCNEM – MATEMÁTICA (2000) apresentam três conjuntos de competências para o ensino das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, a saber; comunicar e representar, investigar e compreender (constituído de identificar dados e informações em situações problemas e estabelecer estratégias de solução) e contextualização sociocultural do conhecimento. Articulado aos PCNEM, o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM aponta para cinco competências gerais, a saber; dominar diferentes linguagens, compreender processos, diagnosticar e enfrentar problemas reais, construir argumentações e elaborar proposições solidárias. Assim como os PCNEM, o ENEM relaciona as competências a um conjunto de habilidades descritas na matriz de referência do ENEM. Em se tratando de Matemática e suas tecnologias, a matriz de referência é composta de sete competências com trinta habilidades. Dentre elas, a competência número cinco que diz sobre modelar e resolver problemas que envolvam variáveis, na qual a habilidade desejada é a de resolver situações problemas cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

Para os PCNEM, tudo isso se justifica por acreditar que a formação geral do aluno só acontece se for concebida por um conjunto de objetivos e formas de aprendizagem, dentre elas a capacidade der resolver problemas cotidianos.

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em

> situações diferentes ou mais complexas. (PCNEM – MATEMÁTICA, 2000, pág. 112)

Assim, o aprender matemática deve acontecer de forma contextualizada e problematizada, de modo a desenvolver as competências e habilidades necessárias à formação do aluno e capacitá-lo a compreender, interpretar e resolver problemas, passa pela maneira com a qual o professor organiza suas atividades para sala de aula e tais atividades devem oferecer ao aluno situações mais complexas capazes de levá-lo a construir estratégias de resolução.

> A maneira como se organizam as atividades e a sala de aula, a escolha de materiais didáticos apropriados e a metodologia de ensino é que poderão permitir o trabalho simultâneo dos conteúdos e competências. Se o professor insistir em cumprir programas extensos, com conteúdos sem significado e fragmentados, transmitindo-os de uma única maneira a alunos que apenas ouvem e repetem sem dúvida as competências estarão fora de alcance. (PCNEM – MATEMÁTICA, 2000, pág.113)

Para os PCNEM, a forma de trabalho do professor é determinante para que se atinjam as competências desejadas. Ainda segundo os PCNEM – MATEMÁTICA (2000, pág. 113), trabalhar matemática de forma contextualizada e com situações complexas não exclui os tradicionais exercícios de matemática, “[...] Isso não significa que os exercícios do tipo “calcule...”, “resolva...” devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos”. Ou seja, a matemática deve despertar no aluno a curiosidade e assim propiciar a ele a oportunidade de enxergar suas aplicações. Deste modo, a matemática estará contribuindo para sua plena formação, isto é, estará cumprindo sua finalidade que é preparar o aluno para um aprendizado permanente e por toda a vida.

2.2 – Por que estudar matemática por meio da resolução de problemas?

Como dito, a finalidade da matemática é a preparação integral do aluno, ou seja, a matemática deve fazer com que o aluno desenvolva em si a capacidade de produzir estratégias de raciocínio lógico. Desse modo, a metodologia de ensino por meio da resolução de problemas, torna-se um ponto de partida que vem cada vez mais ganhando espaços. Também chamada de metodologia ativa, parte do principio que toda atividade em sala de aula se daria a partir de uma situação problema, de modo a gerar questionamentos, debates, entendimento e solução do problema, para daí o professor tirar os conteúdos e habilidades desejadas para a aprendizagem do aluno.

No entanto, é necessário que tal situação problema envolva o aluno, trazendo situações reais de vida de modo a mantê-lo motivado para o desenvolvimento da aprendizagem. Assim, é importante que o professor tenha suas metas de ensino e aprendizagem bem definidas e para isto é preciso que saiba diferenciar os objetivos de cada atividade preparada para seu aluno.

Massucato e Mayrink (2015) definem os tradicionais exercícios de matemática, quando diz:

> Exercício é uma atividade que conduz o aluno a utilizar um conhecimento matemático já aprendido, como a aplicação de algum algoritmo ou fórmula. Ele se sustenta em um procedimento padrão, em que o estudante tem certo domínio para a obtenção do resultado ou tem memorizado o mecanismo resolutivo.

Para as autoras, nos exercícios, o aluno precisa basicamente aplicar fórmulas e servem para consolidar as habilidades referentes à mecanização dos processos. Em contrapartida, ainda segundo as autoras (2015), “[...] Os problemas exigem reflexão, questionamentos e tomadas de decisão. Trata-se de uma situação na qual se procura algo desconhecido e o aluno não tem nenhum algoritmo prévio que garanta a sua resolução”. Diz ainda que um problema matemático se apresenta como situação nova e contextualizada vinculada à realidade do aluno, porém, em sua resolução, devem ser utilizadas técnicas já estudadas.

Segundo Polya (1995), o problema matemático deve ser interessante para o aluno, devendo estar ligado a situações reais de vida, de modo a facilitar a sua compreensão, assim, o aluno terá maior possibilidade sucesso em sua resolução.

> O aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo. Se lhe faltar compreensão e interesse, isto nem sempre será culpa sua. O problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante. (POLYA, 1995, pág. 04)

Ainda para Polya (1995), o bom problema deve ser desafiador e trazer em si a capacidade de despertar no aluno a busca por sua solução. Nesse cenário, o papel do professor será de mediador e incentivador, de modo, que o aluno possa pensar explorar e produzir descobertas. O professor, também, deve estar ciente que todo esse processo demanda um tempo maior que o habitual nos exercícios tradicionais.

Para Musser e Shaughnessy (1997), o ensino da matemática através da resolução de problemas muitas vezes tem desempenhado um papel secundário, no entanto:

> Embora boa parte da matemática na verdade se destine ao desenvolvimento de algoritmos eficazes para resolver problemas, na era eletrônica que vivemos a ênfase não deveria ser a execução mecânica de algoritmos, mas o desenvolvimento e uso de algoritmos para resolver problemas. (MUSSER e SHAUGHNESSY, 1997, p. 188)

Segundo os autores, toda a preocupação apenas com os algoritmos envolvendo cálculos não mais tem atendido os interesses e as necessidades do aluno. Ainda, os autores (1997, p. 189), acreditam que o aluno só será bem sucedido se souber aplicar a matemática na resolução de problemas, quando dizem “[...] quantos alunos sabem derivar e integrar sem ser capazes de usar essas ideias para resolver problema?” Pois, para eles a ênfase na resolução de problemas ao longo da vida escolar irá contribuir para que as futuras gerações estejam bem mais preparadas para os problemas que encontrarão.

Ensinar matemática por meio da resolução de problemas faz com que, muitas vezes, o professor saia da sua zona de conforto. Para Kantowski (1997, p. 270), a tarefa de ensinar matemática através da resolução de problemas não é uma arte fácil, “[...] ensinar a resolver problemas é algo que difere de todos os outros aspectos da educação matemática”. Para a autora, ensinar o aluno através de uma atividade problema, que para ele não é rotineiro, é sempre uma tarefa desafiadora. Ainda segundo a autora, a resolução de problemas pode ser apresentada por meio de um sistema com três suposições: 1) resolver problemas é uma tarefa para todos; 2) a maioria dos alunos não está capacitada para resolver problemas e 3) a habilidade para resolver problemas se desenvolve lentamente e com um longo período de tempo. Para a autora (1997, p.274), além do conhecimento algébrico necessário da matemática é preciso que os alunos tenham ideia do que fazer com esse conhecimento, visto que “[...] a habilidade de pensar no que fazer é tão essencial quanto conhecer os fatos ou ter a facilidade necessária para os cálculos”. Nesse contexto, a autora acredita que o papel do professor deve ser o de facilitador da aprendizagem à medida que os alunos vão desenvolvendo a habilidade de resolver problemas.

Para Branca (1997), a resolução de problemas em matemática é algo mais especifico, pois comporta diferentes interpretações, nas quais as mais comuns são: 1) como uma meta – aprender a resolver problemas é a principal razão para se estudar matemática; 2) como um processo – a resolução de problemas é um processo dinâmico e contínuo, onde se exige a aplicação de conhecimentos prévios a situações desconhecidas e 3) como uma habilidade – a habilidade na resolução de problemas é relacionada com as habilidades básicas que o individuo precisa para viver em sociedade e executar tarefas do dia a dia. Para o autor, os problemas matemáticos podem se apresentar, tais como: problemas propostos em livros didáticos, problemas não rotineiros (um quebra cabeça, por exemplo), problemas do mundo real e problemas de testar e conjecturar que levam a novos estudos.

2.3 - Processos de resolução de problemas matemáticos

A resolução de problemas, ao contrário dos exercícios tradicionais tipo “calcule”, implantada como proposta de metodologia, tem com finalidade atribuir confiança, elevar a autoestima e melhorar a capacidade de aprendizagem do aluno, ou seja, não se preocupa com a quantidade excessiva de conteúdos, mas, com a consolidação desses conteúdos. Assim, transforma a aprendizagem matemática da forma descontextualizada, mecânica, com rotina na memorização e, muitas vezes, desvinculada do mundo real do aluno no ensino por meio da reflexão, tomada de decisões e construção sólida do conhecimento. Desse modo, a resolução de problemas, também, tem a capacidade de tornar as aulas mais dinâmicas e motivadas, pois envolvem situações diferentes das habituais vividas pelos alunos.

Para Leblanc (1997), se os professores desejam que seus alunos tenham segurança e sucesso na resolução de problemas, então, deve mantê-los motivados. É importante, também, que se crie um clima agradável de modo a facilitar as decisões do aluno. Para o autor (1997, p. 151), “[...] os professores devem selecionar ou inventar problemas que sejam interessantes para os alunos. Um clima propício e alegre é decisivo para o êxito no ensino de resolução de problemas”. O autor ainda aponta fatores que podem influenciar nas dificuldades encontradas nos problemas, dentre eles; o vocabulário, a extensão das frases, o tamanho dos valores e o cenário. Para ele, o vocabulário deve ser simples, as frases devem ser curtas, os valores devem ser menores e o cenário deve ser familiar ao aluno.

Ao tentar resolver um problema podemos mudar o modo como enxergamos o problema, pode-se mudar a maneira de olhar para o problema em busca da solução. Para Polya (1995, p. 03), “[...] É provável que a nossa concepção do problema seja muito incompleta no princípio; a nossa perspectiva é outra depois de feito algum progresso; ela é ainda mais diferente quando estamos quase a chegar à solução”. Para organizar essas indagações, Polya (1995) apresenta quatro fases referentes à resolução de problemas.

> Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia de resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. (POLYA, 1995, p. 03 e 04)

Para o autor, cada uma destas fases tem sua importância. Na compreensão do problema, o aluno deve entender o enunciado verbal, identificar as partes principais, os dados e a incógnita, pois, não há como responder aquilo que não foi compreendido. No estabelecimento de um plano é necessário que o aluno, pelo menos, saiba quais cálculos irá efetuar para obter a incógnita. Segundo o autor, a parte mais importante na resolução de problemas é a concepção da ideia de um plano. Depois de criar um plano, o aluno tem a difícil tarefa da execução do plano, o que requer aplicação de conhecimentos anteriores e, para o autor, a execução do plano é a parte mais difícil na resolução de problemas. E por fim, a fase do retrospecto, esse é o momento em que o aluno deve examinar o caminho que o levou até o resultado e, assim, consolidar seu conhecimento e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas.

3 – O CÁLCULO

A palavra “cálculo” vem do latim *“calculus”* –pedra – derivada de *“calx”*, que significa pedra calcária, que, por sua vez, provém do termo grego *“khalix”*, que significa pedra pequena ou seixo. Representava um conjunto de pedras que normalmente eram usadas para fazer contas.

Em matemática, cálculo, segundo o minidicionário Aurélio (2001, p. 120), é a “Representação de operações ou operações sobre números ou símbolos algébricos; computo”. O minidicionário também faz referencia ao Cálculo Diferencial e Integral como sendo o ramo da matemática que estuda as propriedades das derivadas e diferenciais, dos processos de obtê-las, e da operação de integração, de suas propriedades e métodos de obtenção de primitivas; cálculo. Ou seja, Cálculo pode ser entendido como uma expressão simplificada do Cálculo Diferencial e Integral.

3.1 – Um pouco da história da derivada

Considerado por muitos matemáticos como amador e rival de René Descartes (1596-1650) na capacidade matemática, Pierre de Fermat (1601-1665) quase não publicou nada em vida, no entanto, deixou grandes contribuições para a matemática.

De posse dos conhecimentos de sua geometria analítica, fez descobertas, descritas anos depois de sua morte, em um tratado chamado de “Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam” (Um método para buscar o máximo e o mínimo). Para tanto, ele considerou curvas polinomiais da forma $y = f(x)$.

Segundo Boyer (1996), Fermat percebeu um método de encontrar pontos em que a função assume um máximo ou um mínimo.

> Ele comparou o valor de $f(x)$ num ponto com o valor de $f(x + E)$ num ponto vizinho. Em geral esses valores serão bem diferentes, mas num alto ou num baixo de uma curva lisa a variação será quase imperceptível.

> Portanto, para achar os pontos de máximo e de mínimo Fermat igualava $f(x)$ e $f(x + E)$, percebendo que os valores, embora não exatamente iguais, são quase iguais. Quanto menor o intervalo E entre os dois pontos mais perto chega a pseudoequação de ser uma verdadeira equação; por isso Fermat, depois de dividir tudo por E fazia $E = 0$. Os resultados lhe davam as abscissas dos pontos de máximo e mínimo do polinômio. (BOYER, 1996, p.240)

Desse modo, Fermat concebeu o processo que hoje chamamos de diferenciação, pois o método de Fermat equivale a encontrar $lim_{E\to 0}\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ e igualar a zero. Por esse motivo, Laplace atribui a Fermat o título de verdadeiro inventor do Cálculo.

Fermat não tinha o conceito de limite como nos dias atuais, mas seu método para máximos e mínimos se assemelha ao usado hoje em Cálculo. Assim, podemos dizer que o surgimento da derivada é anterior ao surgimento do limite. O processo de Fermat de mudar a variável e considerar valores vizinhos é o centro de toda análise infinitesimal. Dessa forma, também, Fermat descobriu como aplicar seu processo de valores vizinhos para encontrar a tangente a uma curva algébrica da forma $y = f(x)$. Este problema ficou conhecido na História da Matemática como o "Problema da Tangente". Para isso, ele fez o equivalente à $lim_{E\to 0}\frac{f(a+E)-f(a)}{E}$ a inclinação da tangente em $x = a$.

Descartes criticou fortemente o método de Fermat como não válido como regra geral e propôs um desafio com a curva $x^3 + y^3 = 3axy$, conhecida como "folium de Descartes", mas, por fim, Descartes se viu obrigado a reconhecer a validade do método de tangentes de Fermat.

Além do problema da reta tangente a uma curva, outro problema que despertava a curiosidade dos matemáticos da época era o cálculo de áreas e volume. E foi pesquisando sobre estes problemas entre os anos de 1665 a 1666, que Isaac Newton (1642-1727) realizou várias descobertas para o Cálculo, sendo, portanto, considerado um dos seus primeiros inventores, embora não tenha feito nada para publicar os resultados de seus trabalhos, o que só aconteceu anos mais tarde.

Para Stewart (2011, p.139), "[...] a primeira pessoa a formular explicitamente as ideias de limite e derivada foi Sir Isaac Newton, em 1660. Mas Newton reconhecia que “Se vejo mais longe do que outros homens é porque estou sobre os ombros de gigantes””. Ainda segundo o autor, dois desses gigantes ao qual Newton se referia eram Pierre de Fermat e Isaac Barrow (1630-1677) que foi professor de Newton em Cambridge. Assim, Newton estava familiarizado com os métodos deles para encontrar as retas tangentes, o que proporcionou Newton a desenvolver a formulação do Cálculo.

Provavelmente, Newton tenha sido o primeiro matemático a expor a relação inversa entre diferenciação e integração. Dentre as descobertas de Newton, ele apresenta funções em termos de séries infinitas e, também, começa a pensar nas taxas de variação como fluxo. Em 1687 escreveu, *“Philosophiae naturalis principia mathematica”* (Princípios matemáticos da filosofia natural) considerado o mais admirado tratado cientifico de todos os tempos. Em 1711, publicou o *“De analysi per aequationes mumero terminorum infinitas”* (A análise por meio de equações número infinito de termos), que é considerada a primeira exposição da principal descoberta matemática de Newton – o Cálculo. Em 1742, ele publica *“Methodus fluxionum et serierum infinitorum”* (O método de fluxões e séries infinitas), em que passa a considera as variáveis x e y para representar quantidades que fluem, as quais ele chamou de fluentes e que hoje chamamos de taxas de variação. Também escreve, em 1676, o *“Tractatus de quadratura curvarum*” (Tratado sobre quadratura de curvas), onde ele se aproxima do conceito de limite.

Segundo Boyer (1996),

> Newton tornou-se o efetivo inventor do cálculo porque foi capaz de explorar a relação inversa entre inclinação e área através de sua nova análise. Por isso é que mais tarde ele viu com maus olhos toda tentativa de separar seu cálculo de sua análise por séries infinitas. (BOYER, 1996, p. 273)

Ainda segundo o autor, Newton foi o primeiro matemático da história a encontrar uma área pelo processo inverso da diferenciação, embora exista a possibilidade de que tal processo fosse conhecido por outros matemáticos.

Como Newton, motivado pelas séries infinitas as quais tinha muita prática em somar, Gottfried W. Leibniz (1646-1716) realiza seus primeiros e importantes trabalhos voltados para o Cálculo. Dos seus estudos sobre séries infinitas, do triângulo harmônico e obras de Pascal, Leibniz percebeu segundo Boyer (1996),

> Que a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças das ordenadas e das abscissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam da soma dos retângulos infinitamente finos que formam a área. (BOYER, 1996, p. 276)

Ainda segundo o autor, Leibniz nota a relação inversa nos processos de tomar somas ou diferenças, tanto na geometria nos problemas de quadratura e tangentes, quanto nos triângulos aritmético e harmônico.

Como um importante representante diplomático, Leibniz passou boa parte de sua vida viajando pelas capitais europeias. Em uma dessas viagens a Paris, segundo Stewart (2011, p.143), "[...] Lá ele construiu uma máquina de calcular e encontrou com cientistas, como Huygens, que lhe dirigiu muita atenção para os últimos desenvolvimentos da matemática e da ciência". É considerado um matemático autodidata.

Por volta de 1676, alguns anos depois das descobertas de Newton para o Cálculo, Leibniz chega à mesma conclusão. No entanto, preocupado com a importância de boas notações, Leibniz fixou em dx e dy as menores diferenças possíveis em x e y – diferenciais. Já para a soma das ordenadas sob uma curva ele usou o símbolo $\int ydx$ (uma letra s aumentada). Assim, para encontrar tangentes usava o *calculus differentialis* e para encontrar quadraturas o *calculus summatorius* ou *integralis*. Para Boyer (1996, p.279), "[...] Leibniz não é responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra "função", praticamente no mesmo sentido em que é usada hoje".

A primeira exposição do cálculo de Leibniz foi publicada, em 1684, com o título de *"Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur"* (Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais). Nessa obra, Leibniz apresentou as fórmulas de derivada do produto $dxy = x.dy + y.dx$, derivada do quociente $d(x/y) = (y.dx - x.dy)\,/\,y^2$ e derivada da potência $dx^n = n.x^{n-1}\ dx$, todas com aplicações geométricas e como são usadas até hoje.

Dois anos mais tarde, Leibniz publicou uma explicação do Cálculo mostrando a relação inversa entre diferenciação e integração no teorema fundamental do cálculo. Tudo leva a crer que Newton criou o Cálculo primeiro, mas recusou-se por muito tempo a divulgar suas descobertas, enquanto Leibniz não hesitou em divulgar tudo que descobria.

Segundo Eves (2011),

> A opinião generalizada hoje e que ambos criaram o calculo independentemente. Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Se Leibniz não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético, e embora inferior ao seu rival inglês como analista e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática. (EVES, 2011, p.444)

Ainda segundo o autor, essa controvérsia fez com que os britânicos negligenciassem por muito tempo os progressos da matemática em todo continente, em prejuízo de sua própria matemática.

Para Stewart (2011), tal situação gerou uma disputa entre Newton e Leibniz e seus seguidores.

> Infelizmente, uma disputa muito acirrada de prioridades surgiu em 1690 entre os seguidores de Newton e os de Leibniz sobre quem teria inventado primeiro o cálculo. Leibniz foi até mesmo acusado de plágio pelos membros da Royal Society na Inglaterra. A verdade é que cada um inventou independentemente o cálculo. (STEWART, 2011, p.143)

Ainda segundo o autor, Newton chegou primeiro à sua versão do cálculo, mas, por temer controvérsias, não a publicou imediatamente. Assim, a publicação do Cálculo de Leibniz, em 1684, foi a primeira a aparecer.

Outros matemáticos também deram grandes e valiosas contribuições para o Cálculo, porém, nenhum desenvolveu trabalhos tão importantes quanto Newton e Leibniz, o que os fazem serem reconhecidos como inventores do Cálculo. No entanto, as diferenciais de Leibniz produziram maior aceitação que os fluxos de Newton, devido ao fato de os pensamentos de Newton estarem mais voltados para os fundamentos do Cálculo, enquanto Leibniz se preocupou com eficácia na sua notação diferencial. Ou seja, enquanto Newton tratava o Cálculo com aspecto geométrico, Leibniz o tratava como aspecto analítico.

Para Araújo (2016), há duas diferenças principais entre o Cálculo de Newton e Leibniz e o Cálculo como vimos hoje.

> A primeira delas é em relação a ordem em que se é ensinado o Cálculo: limites-derivadas-integrais. Como vimos a ordem cronológica foi integrais-derivadas-limites. Isso se deve ao fato de que as ideias centrais do Cálculo foram desenvolvidas através de problemas concretos como encontrar a área sob uma curva e achar a reta tangente. A segunda diferença é que o Cálculo ganhou uma forma puramente algébrica, em que conceitos, teoremas e demonstrações são ensinados sem nenhuma ligação, a priori, com os problemas que impulsionaram o desenvolvimento do Cálculo, só depois é dada uma interpretação geométrica para derivadas e integrais de forma quase que insignificante. (ARAÚJO, 2016, p. 18)

Segundo a autora, o Cálculo de Newton e Leibniz passou por várias mudanças até chegar como vimos nos dias de hoje. Além de novos conceitos que não existiam na época, o que influenciou na ordem dos conteúdos que deram origem ao Cálculo, como na interpretação geométrica que, de mola propulsora do Cálculo, hoje é apresentada de forma quase que irrelevante.

Apesar do Cálculo se tornar cada vez mais uma ferramenta imprescindível na resolução de problemas de vários tipos, os matemáticos até o século XVIII, não demonstravam muita preocupação com o rigor da matemática. Segundo Stewart (2011, p. 102), "[...] O século XIX, ao contrário, foi a Época do Rigor na matemática. Houve um movimento de volta aos fundamentos do assunto – de fornecer definições cuidadosas e demonstrações rigorosas". Ainda segundo o autor, na linha de frente desse movimento, estava Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que apresentou uma moderna e completa definição de limite e derivada, como ainda vemos nos dias atuais. Tais definições foram exibidas em três livros: "*Cours d'analyse de l'École Polytechnique"* (Curso de Análise da Escola Politécnica), de 1821, "*Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal"* (Resumo de lições sobre o Cálculo infinitesimal), de 1823, e "*Leçons sur le calcul différentiel"* (Lições sobre o Cálculo Diferencial), de 1829.

Ao contrário de muitos outros matemáticos anteriores que pensavam em infinitésimo como um número fixo muito pequeno, segundo Boyer (1996, p.355), "[...] Cauchy definiu-o claramente como uma variável dependente: "Diz-se que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico diminui indefinidamente de modo a convergir ao limite zero"". Essa definição foi fundamental na elaboração da noção de continuidade de uma função, assim como na definição da derivada como um limite. Ao definir a derivada de $y = f(x)$ com relação a x Cauchy deu à variável x um incremento $\Delta x = h$ e formou a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. O limite desse quociente quando $h \to 0$ (h se aproxima de zero), Cauchy definia como sendo a derivada da função $y = f(x)$, chamando de "Função Derivada" e indicando-a com o uso de um apóstrofo y' ou $f'(x)dx$ na notação.

Por muitos anos, a integração havia sido tratada como a inversa da derivação. A definição de derivada, apresentado por Cauchy, mostra que não existirá derivada num ponto em que a função é descontínua, no entanto, a integral pode existir, ou seja, mesmo curvas descontínuas podem fornecer uma área bem definida. Em 1834, Bernhard Bolzano (1781-1848) inventou uma função contínua num intervalo, mas que não tinha derivada em ponto algum desse intervalo. A função de Bolzano não se tornou conhecida, talvez por ser padre e cujas ideias teológicas não serem bem vistas. Todo o mérito por construir a primeira função contínua não derivável em um ponto foi dado a Karl Weierstrass (1815-1897) anos mais tarde.

Cauchy ainda encontrou as derivadas das funções elementares, mostrou a Regra da Cadeia e provou o Teorema do Valor Médio para derivadas, usando uma generalização do Teorema de Rolle que já era conhecido séculos antes.

3.2 – A disciplina de Cálculo no Ensino Médio no Brasil

A disciplina de Cálculo já fez parte do plano curricular das escolas brasileiras de nível médio. A primeira vez que o Cálculo fez parte dos programas educacionais brasileiros, nas escolas secundárias (hoje ensino médio), foi através da reforma Benjamin Constant (1836-1891), oficializada pelo decreto nº 981/1890. No seu artigo 30, esse decreto previa as matérias de cada ano do curso em cadeira. A primeira e a segunda cadeira do terceiro ano eram destinadas à matemática.

> 1ª cadeira - Geometria geral e o seu complemento algebrico. Calculo differencial e integral, limitado ao conhecimento das theorias rigorosamente indispensaveis ao estudo da mecanica geral propriamente dita: 6 horas.
>
> 2ª cadeira - Geometria descriptiva. Theoria das sombras e perspectiva. Trabalhos graphicos correspondentes: 3 horas. (Art. 30, Decreto 981/1890)

Desse modo, alunos na faixa etária de 17 anos tinham a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, assim como, geometria geral e descritiva. No entanto, essa reforma teve curta duração. Já em 1901, a reforma promovida por Epitácio Pessoa (1865-1942), dá a educação básica um caráter mais humanista, tirando alguns conteúdos previstos até então, dentre eles o Cálculo.

Em 1929, o professor de matemática, Euclides Roxo (1890-1950), implanta inovações curriculares no colégio Pedro II. Ele unificou o estudo da álgebra, da geometria e da aritmética, sendo, assim, considerado grande responsável pela modernização da proposta educacional brasileira.

Baseado nas ideias de Roxo, surge a reforma Francisco Campos (1891-1968), por meio dos decretos números 19890/1931 e 21241/1932, que organiza e consolida o ensino secundário no Brasil, criando o currículo seriado com frequência obrigatória e dividido em dois ciclos: um fundamental com duração de 5 anos e outro complementar com duração de 2 anos, tendo como principal objetivo preparar os alunos para o ensino superior. Porém, sem a presença do Cálculo. A conclusão do ciclo complementar era obrigatória para os alunos que desejassem ingressar no ensino superior.

A inclusão do Cálculo no ensino secundário, no entanto, volta a ganhar repercussão, em 1942, com a reforma de Gustavo Capanema (1900-1985), por meio do decreto número 4244/1942.

Segundo Araújo (2016, p.19), “[...] Com a reforma Capanema esta realidade mudou. Foram criados os cursos Clássicos e Científicos, com duração de três anos, em substituição aos Cursos Complementares. Agora existia regulamentação para os programas de Matemática”. Nos dois cursos, os alunos contavam com a disciplina de Cálculo. A principal diferença é que, enquanto no curso clássico os alunos tinham noções de limites e derivadas, pois eram preparados para ingressar nos cursos superiores da área de humanas, no curso científico, os alunos tinham aulas de limites, derivadas, séries numéricas e equações diferenciais.

O ensino do Cálculo, no ensino secundário brasileiro, perdurou até a chegada do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Desencadeado em vários países, o Movimento chega como força ao Brasil, na década de 60, por meio de grupos de pesquisas que desejavam uniformizar o ensino da matemática, para isso, desenvolviam palestras, seminários e até elaboravam livros didáticos. O MMM tinha como principal objetivo estruturar a matemática dando ênfase no rigor matemático.

Segundo Godinho (2014),

> O excesso de rigor exigido tornou alguns assuntos quase inviáveis de serem bem trabalhados no ensino médio, entre eles o Cálculo, que demandaria, de acordo com os novos padrões, quase um curso de Análise Matemática para que fosse desenvolvido a contento. (Godinho, 2014, p.14)

Assim, ensinar Cálculo no ensino secundário se tornou inviável, além da falta de espaços nos programas, também existia a complexidade de se ensinar com todo formalismo, teoremas e demonstrações. Dessa forma, mais uma vez o Cálculo sai da matemática do ensino secundário.

Embora o Cálculo tenha saído do currículo da matemática de nível médio, alguns livros didáticos do ensino médio ainda continuaram a apresentar tópicos de Cálculo. Godinho (2014), em sua dissertação de mestrado, cita vários destes livros, tais como: IEZZI, G. et al. *Matemática: 3ª série, 2º grau*. 9ª edição. São Paulo: Atual, 1990. BARRETO FILHO, B.; DA SILVA, C. X. *Matemática aula por aula: 3ª série*. 1ª edição. São Paulo: FTD, 2003. SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. Matemática: ensino médio. Volume 3. 6ª edição. São Paulo: Saraiva, 2010. DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações. Volume 3. 1ª edição. São Paulo: Ática, 2010. Também citamos: PAIVA, M. Matemática. Volume 3, 1ª edição, São Paulo: Moderna, 1999. GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. R. Matemática: uma nova abordagem. Volume 3, São Paulo: FTD, 2001. GENTIL, N. et al. Matemática para o 2º grau. Volume 3, 5ª edição, São Paulo: 1996.

3.3 – Orientações para o ensino da matemática e resultados indesejáveis

O Ensino Médio, componente final da educação básica, tem como uma de suas finalidades prevista na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1996 a preparação para os estudos futuros, quando diz, no seu artigo vinte e dois: "A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores" (Art. 22, LDB/1996). Assim, é atribuída ao Ensino Médio a obrigatoriedade de se fazer uma ligação entre a Educação Fundamental e o Ensino Superior. Em se tratando de matemática, deseja-se que os alunos do Ensino Médio adquiram maior suporte para cursar com mais tranquilidade as disciplinas exatas dos cursos superiores e tecnológicos.

Também, no ensino da matemática, como já dissemos, os PCNEM de Matemática (2000) prezam pela resolução de problemas como eixo central de todo processo de ensino da matemática, de modo a melhorar a compreensão de seus conteúdos. No entanto, os resultados das avaliações externas mostram que os conhecimentos em matemática, de modo geral, na educação brasileira, ainda não são consolidados na fase escolar em que o aluno se encontra. Ou seja, a matemática ainda é vista como de difícil compreensão.

Conforme reportagem de 06/12/2016 do portal de notícias g1 da Rede Globo, com o título, Brasil cai em ranking mundial de educação em ciências, leitura e matemática.

A reportagem apresenta dados da avaliação externa do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – PISA – que tem prova coordenada pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico – OCDE – realizada em setenta países, no ano de 2015, com alunos de 15 anos, mostra que o Brasil ficou em 66º lugar em matemática. Ainda segundo a notícia, entre os processos avaliados, o PISA mede a habilidade dos estudantes de formular, empregar, interpretar e avaliar problemas.

Resultados indesejáveis como estes também são vistos em outros tipos de avaliações e em outros níveis de ensino. Em se tratando do Ensino Superior, a disciplina de Cálculo, presente no plano curricular de vários cursos das universidades brasileiras, é vista por muitos alunos como uma pedra no sapato, ou seja, de difícil compreensão. Os índices de aprovação/reprovação na disciplina, de modo geral, mostram que é grande a quantidade de alunos que não conseguem aliar a teoria das fórmulas com a aplicação prática em problemas, tendo um alto índice de alunos reprovados por notas ou por frequência, conforme veremos a seguir, com dados levantados de duas universidades: a Universidade Federal dos Vales Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM – Campus recém-criado em Janaúba/MG e a Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB – Campus de Vitória da Conquista/BA.

Da UFVJM Campus Janaúba/MG, temos os dados das primeiras turmas de alunos que cursaram Bacharelado em Ciência e Tecnologia (BCT). A universidade ofertou a disciplina “Funções de uma variável”, que apresenta ementa equivalente à disciplina de Cálculo I, com funções, limites, derivadas e integrais. Nos dois semestres do ano de 2016, foram matriculados trezentos e oitenta e sete (387) alunos na disciplina que teve o seguinte resultado final.

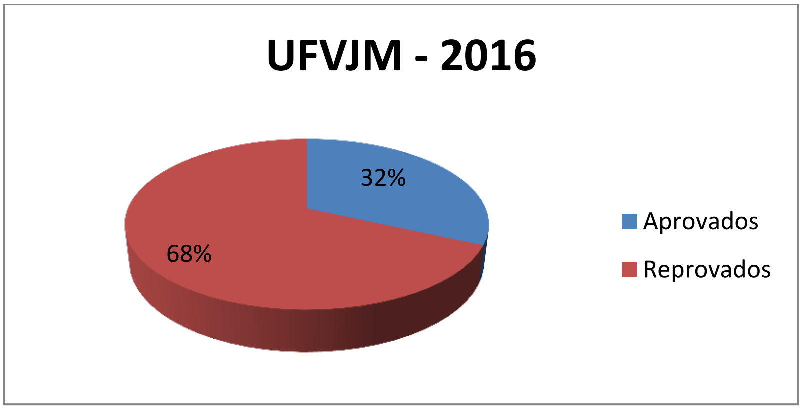
Tabela 1 - UFVJM - Ano: 2016

Situação final	Aprovados	Reprovados por nota	Reprovados por frequência
Nº de alunos	123	86	178

Fonte: Departamento de registro e controle acadêmico – DRCA

O Gráfico 1 apresenta a porcentagem de alunos aprovados (32%) e de alunos reprovados (68%) na disciplina Funções de uma variável da UFVJM – Campus Janaúba/MG, ano 2016, curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia.

Gráfico 1 - UFVJM – 2016



Fonte: DRCA

Da UESB - Campus Vitória da Conquista/BA, os dados são das turmas do curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina Cálculo I – DCET0078, oferecida no segundo semestre de cada um dos últimos anos.

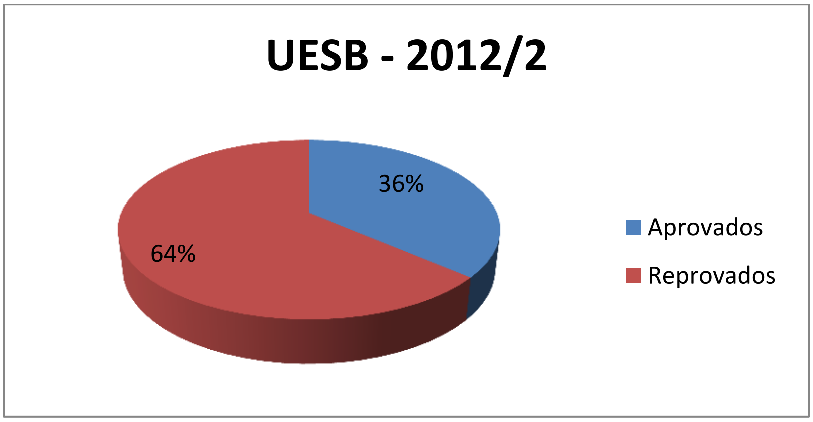
Tabela 2 - UESB - 2012/2

Situação final	Aprovados	Reprovados por nota	Reprovados por frequência
Nº de alunos	16	12	16

Fonte: Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática – UESB

Por meio do Gráfico 2, percebe-se que dos quarenta e quatro (44) alunos matriculados na disciplina de Cálculo I, do curso de Licenciatura em Matemática, no período 2012/2, da UESB, apenas 36% foram aprovados.

Gráfico 2 - UESB - 2012/2



Fonte: Colegiado de Matemática

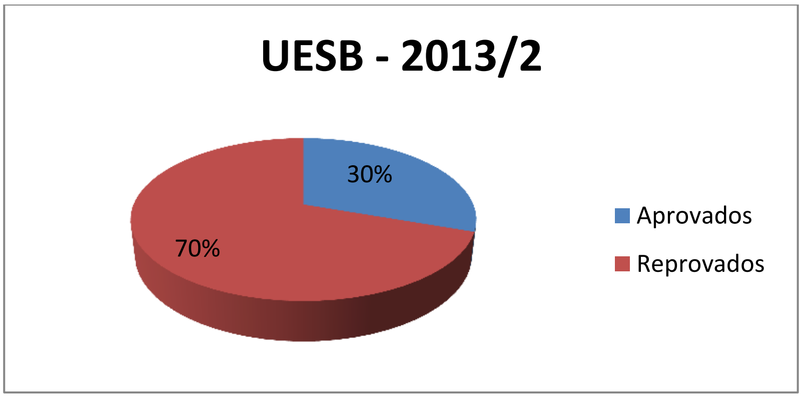
Tabela 3 - UESB - 2013/2

Situação final	Aprovados	Reprovados por nota	Reprovados por frequência
Nº de alunos	10	6	17

Fonte: Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática – UESB

No Gráfico 3, vemos que, dos trinta e três (33) alunos matriculados na disciplina de Cálculo I, do curso de Licenciatura em Matemática, no período 2013/2, da UESB, apenas 30% foram aprovados.

Gráfico 3 - UESB - 2013/2



Fonte: Colegiado de Matemática

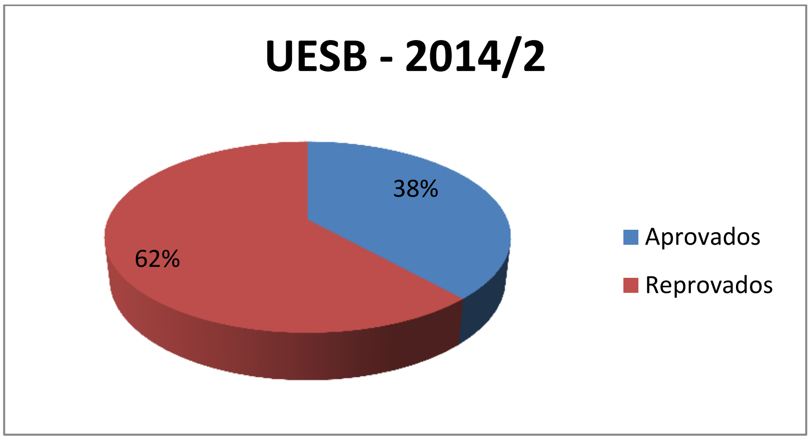
Tabela 4 - UESB - 2014/2

Situação final	Aprovados	Reprovados por nota	Reprovados por frequência
Nº de alunos	18	15	14

Fonte: Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática – UESB

Por meio do Gráfico 4, observamos que, dos quarenta e sete (47) alunos matriculados na disciplina de Cálculo I, do curso de Licenciatura em Matemática, no período 2014/2, da UESB, apenas 38% foram aprovados.

Gráfico 4 - UESB - 2014/2



Fonte: Colegiado de Matemática

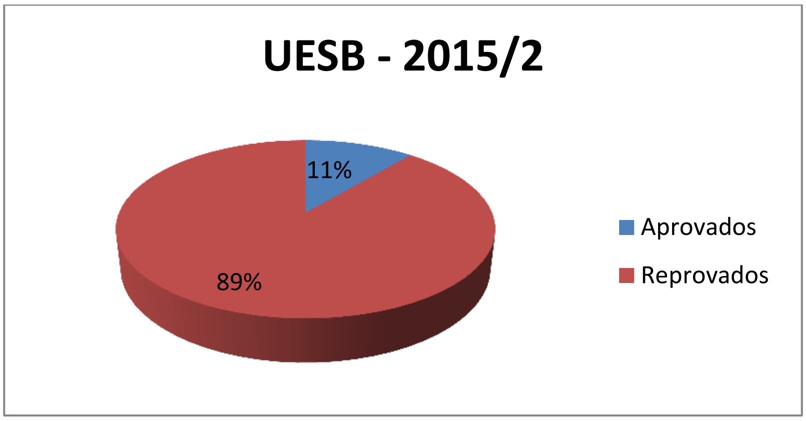
Tabela 5 - UESB - 2015/2

Situação final	Aprovados	Reprovados por nota	Reprovados por frequência
Nº de alunos	3	10	14

Fonte: Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática – UESB

Analisando-se o Gráfico 5, é possível ver que, dos vinte e sete (27) alunos matriculados na disciplina de Cálculo I, do curso de Licenciatura em Matemática, no período 2015/2, da UESB, apenas 11% foram aprovados.

Gráfico 5 - UESB - 2015/2



Fonte: Colegiado de Matemática

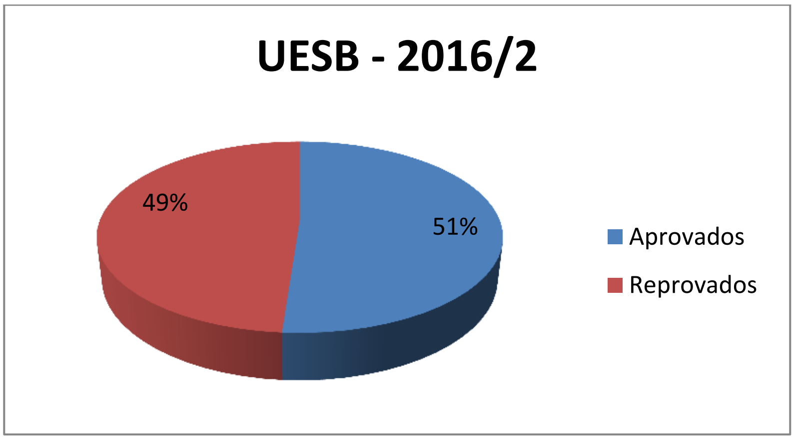
Tabela 6 - UESB - 2016/2

Situação final	Aprovados	Reprovados por nota	Reprovados por frequência
Nº de alunos	22	18	3

Fonte: Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática – UESB

No Gráfico 6, vemos que, dos quarenta e três (43) alunos matriculados na disciplina de Cálculo I, do curso de Licenciatura em Matemática, no período 2016/2, da UESB, o índice de aprovação foi um pouco melhor, sendo 51% dos alunos aprovados.

Gráfico 6 - UESB - 2016/2



Fonte: Colegiado de Matemática

3.4 – As orientações para o ensino do Cálculo e nossa proposta

Todo conhecimento matemático está entrelaçado a conhecimentos matemáticos já existentes, assim, os conhecimentos matemáticos vão se acumulando em nossa mente e todo esse processo tem por finalidade a aplicação da matemática nos problemas do dia a dia, ou seja, toda metodologia do ensino da matemática deve ser voltado para a compreensão dos conceitos e para a resolução de problemas.

Segundo Stewart (2011, pág.v), todo sentido em estudar o Cálculo deve ser a compreensão de conceitos que a disciplina carrega em sua estrutura, quando diz em seu livro de Cálculo: “A ênfase aqui é a compreensão de conceitos. Creio que todos concordam que este deve ser o objetivo principal do ensino do Cálculo”. Ainda segundo o autor, o ímpeto que orienta a reforma do ensino do Cálculo para a compreensão dos conceitos vem da Conferência de Tulane, de 1986. Dessa conferência, surgiu o movimento *“Calculus Reform”* (Reforma do Cálculo), que possibilitou discussões sobre a melhor forma de se ensinar a disciplina de Cálculo. A princípio, das discussões, surgiu a “Regra dos Três”, que indicava a maneira como cada tópico seria apresentado, geométrica, numérica e algebricamente. Mais tarde, essa regra seria expandida para a “Regra dos Quatro” com o acréscimo do ponto de vista verbal (ou descritivo). Dessa forma, a disciplina de Cálculo passa a ser pautada também no ponto de vista verbal ou descritivo, valorizando, assim, a compreensão dos conceitos e, consequentemente, o estimulo ao pensamento criativo para resolver problemas práticos.

Nossa proposta não é de incluir a disciplina de Cálculo no Ensino Médio, pois sabemos que não há condições pedagógicas para tanto na atual estrutura da educação básica. O que propomos, neste trabalho, é que as noções de derivada sejam apresentadas aos alunos do Ensino Médio de forma incorporada, misturadas ao estudo das funções polinomiais, sem alteração no plano curricular das escolas, de modo a melhorar a compreensão dos alunos nos problemas de aplicações das funções polinomiais, visto que, ao estudar as funções polinomiais os alunos do Ensino Médio adquirem conhecimentos de inclinação de reta, coeficiente angular, taxas de variação, máximos e mínimos, dentre outros. E, geralmente, sem saber suas aplicações práticas em problemas. Pretendemos, assim, que o professor ao trabalhara as funções polinomiais apresente de forma sutil os conceitos de derivada, ou seja, de forma intuitiva, sem o formalismo como é ensinado nos cursos superiores das ciências exatas e tecnológicas.

Pois, segundo Ávila (2006),

> Há também uma certa reserva quanto à derivada, que costuma ser considerada difícil e imprópria para o ensino médio, devendo ficar restrita à Universidade. Isso acontece também porque criou-se o hábito de preceder o ensino de derivadas de um pesado capítulo sobre limites, o que é completamente desnecessário. (ÁVILA, 2006, p. 37)

Assim, propomos mostrar aos professores de matemática do Ensino Médio ser possível apresentar para seus alunos, de maneira simples, que se pode encontrar a variação de uma função em um determinado ponto, como também o valor máximo ou mínimo de uma função, tudo por meio de conhecimentos simples dos conceitos de derivada e sempre através de problemas, o que pode tornar os estudos das funções polinomiais mais interessantes e com sentido em suas aplicações.

Ainda segundo Ávila (2006, p.38), “[...] O ensino de funções, como vemos em vários livros, é que está carregado de terminologia e notação, de maneira artificial e descontextualizado”. Para o autor, são as ideias que devem ser enfatizadas. Assim, acreditamos que o ensino das funções polinomiais apenas através de regras e fórmulas torna o assunto desinteressante para o aluno, além de estar fugindo do principio descritivo da Regra dos Quatro.

Dessa forma, estaremos cumprindo as recomendações da Lei de Diretrizes e Bases, bem como as orientações dos PCNEM de Matemática. Além de estar contribuindo para um melhor desempenho dos futuros alunos da disciplina de Cálculo I dos cursos superiores das ciências exatas e tecnológicas.

4 – A DERIVADA

Muitos são os problemas que envolvem diferentes grandezas, por exemplo, o número de bactérias em uma colônia com o passar do tempo, o tempo gasto em uma viagem, a otimização de uma área, a velocidade do deslocamento de um corpo, dentre outros. Para analisar, interpretar e resolver os problemas, devemos fazer uma relação entre as grandezas variáveis, a qual nós chamamos de função. Assim, sendo y uma grandeza em função de outra grandeza x, dizemos que y está em função de x e escrevemos $y = f(x)$.

A ideia de taxa de variação média está diretamente ligada ao estudo das funções e o conceito de derivada está diretamente relacionado com a taxa de variação instantânea ou pontual de uma função.

4.1 – Taxa de variação média – TVM

Seja $f(x)$ a curva de uma função definida em um intervalo real (a, b) e sejam $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ dois pontos de $f(x)$. Chamamos de variação de uma grandeza a diferença entre o valor final e o valor inicial da grandeza, dentro do intervalo real. Assim, sendo x uma grandeza, sua variação é representada por $\Delta x = x_2 - x_1$ (lê-se: delta x), ou seja, a variação de x é igual ao valor final x_2 de Q menos o valor inicial x_1 de P, também podemos escrever que $x_2 = x_1 + \Delta x$. O símbolo Δx indica um acréscimo em x (positivo ou negativo), de modo análogo, para a grandeza y sua variação é representada por $\Delta y = y_2 - y_1$, (y_2 de Q menos y_1 de P), também podemos dizer que $y_2 = y_1 + \Delta y$, assim y_2 pode ser escrito como $f(x_1 + \Delta x)$.

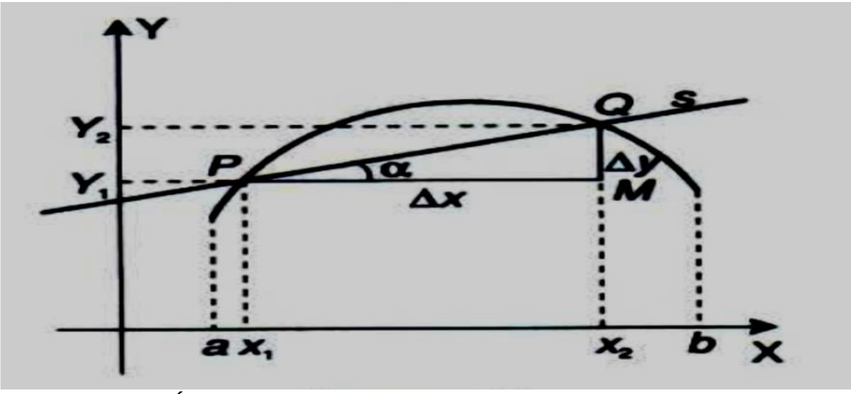
A taxa de variação média (TVM) de uma função $y = f(x)$, num intervalo real, é dada pela razão entre a variação de y (Δy) e a variação de x (Δx), expressa por:

$\text{TVM} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, ou seja, $\text{TVM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Geometricamente o valor da TVM representa a inclinação (ou coeficiente angular) da reta s secante que passa pelos pontos P e Q de $f(x)$.

Considerando o triângulo retângulo PMQ, temos que a inclinação da reta s secante é dada por $tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ que é igual a taxa de variação média entre P e Q.

Figura 1 - Reta $\boldsymbol{s}$ secante em $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ por $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$

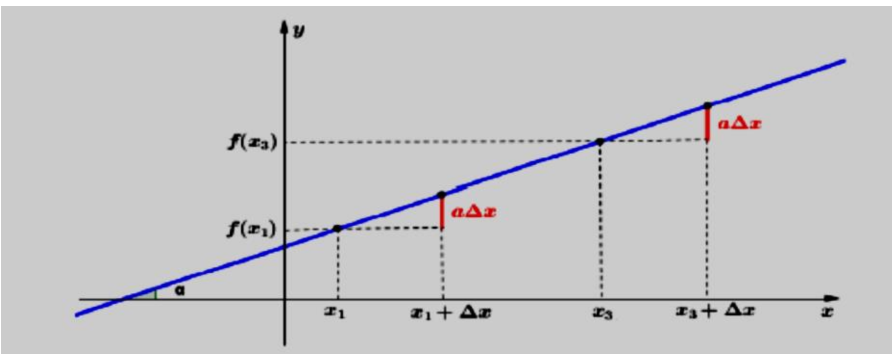


Fonte: (Livro: CÁLCULO A – FLEMMING-GONÇALVES. 2006, p. 115)

4.1.1 – Taxa de variação média em função afim

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada *por* $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$ para todo x real é uma função afim (ou de 1º grau) e terá sua taxa de variação em relação a x igual a sua inclinação (a). $\mathrm{TVM} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2-x_1)}{x_2 - x_1} = a$

Figura 2: Taxa de variação constante na função de 1º grau



Fonte: (GAGLIOLI, M.A. 2015, p.25)

Podemos dizer que a TVM de uma função de 1º grau é sempre constante em quaisquer valores do seu domínio e esta constante é igual a sua inclinação.

Exemplo: dada a função $f(x) = 3x + 1$, atribuindo valores a x, obtemos valores correspondentes de y e suas variações, observe a tabela.

x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0	1	1	1	4	3	3
1	3	2	4	10	6	3
2	5	3	7	16	9	3
3	8	5	10	25	15	3

4.1.2 – Taxa de variação média em função qualquer (diferente de função afim)

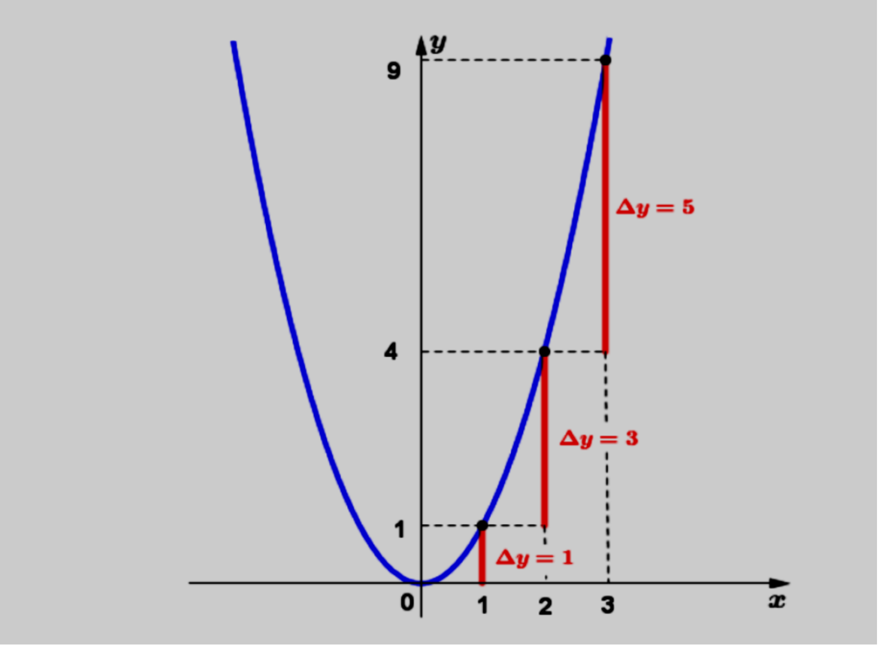
Como vimos nas funções de 1º grau, a taxa de variação média mesmo para pares de pontos distintos do domínio é sempre um valor constante e igual ao seu coeficiente angular. Nas funções polinomiais de grau igual ou maior que dois, a taxa de variação média em pontos distintos do domínio apresenta valores distintos.

Exemplos:

1) Seja a função $f(x) = x^2$, atribuindo valores a x, obtemos os valores correspondentes de y e suas variações, observe a tabela.

x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
0	1	1	0	1	1	1
1	2	1	1	4	3	3
2	3	1	4	9	5	5
3	4	1	9	16	7	7

Figura 3 – Taxa de variação de $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, para $\boldsymbol{x > 0}$



Fonte: (GAGLIOLI, M.A. 2015, p.22)

2) Um motociclista parte do repouso e se move de modo que suas distâncias percorridas em função do tempo gasto são dadas por $S(t) = 10 + 2t^3$, com $t \geq 0$, onde S é dado em quilômetros e t é dado em horas. Sabendo que a velocidade média (VM) de um corpo em movimento é o mesmo que sua taxa de variação media.

Responda:

a) Qual a velocidade média do motociclista nas duas primeiras horas de viagem?

Para $t = 0$, temos $S = 10$ e para $t = 2$, temos $S = 26$.

Assim, $\mathrm{VM} = \frac{26-10}{2-0} = \frac{16}{2} = 8\ km/h$

b) Qual a velocidade média do motociclista nas cinco primeiras horas de viagem?

Para $t = 0$, temos $S = 10$ e para $t = 5$, temos $S = 260$.

Assim, $\mathrm{VM} = \frac{260-10}{5-0} = \frac{250}{5} = 50\ km/h$

4.2 – Taxa de variação instantânea – TVI

Como o próprio nome sugere, a taxa de variação média de uma função $f(x)$ fornece a variação média entre dois pontos distintos de seu domínio e não apresenta informações suficientes em um ponto específico. Assim, no exemplo anterior não sabemos com precisão qual era a velocidade do motociclista após três horas de viagem. Sabemos sua velocidade média nas cinco primeiras horas, mas isso não garante que na hora três ele estava com a mesma velocidade.

Exemplos:

1) Um carro (A) faz uma viagem entre duas cidades distantes $120\ km$ em uma hora e meia e um carro (B) faz a mesma viagem em três horas. Qual a velocidade média dos dois carros? Carro (A): $\text{VM} = \frac{120}{1,5} = 80\ km/h$ Carro (B): $\text{VM} = \frac{120}{3} = 40\ km/h$

Suponha que, na estrada entre as duas cidades tenha um radar para controlar velocidades e este radar permite velocidades até $50\ km/h$. Podemos afirmar que o carro (A) foi multado por excesso de velocidade e que o carro (B) não foi multado? Evidentemente que não podemos fazer essa afirmação, pois o que sabemos dos carros são suas velocidades médias para toda viagem. No ponto da estrada onde estava localizado o radar nós não sabemos a que velocidade cada carro passou.

Assim, a taxa de variação média de uma função $f(x)$ não nos fornece informações precisas em cada ponto do seu domínio. No entanto, à medida que vamos reduzindo a variação Δx entre o valor final x_2 e o valor inicial x_1 essas informações vão se tornando mais precisas.

2) A função $S(t) = 2t^2$, com $t \geq 0$, fornece a posição de um ciclista, onde S é dado em quilômetros e t é dado em horas. Calcule a velocidade média do ciclista nos seguintes intervalos de tempo.

a) $[0, 3]$ Para $t = 0$, temos $S = 0$ e para $t = 3$, temos $S = 18$.

Assim, $\text{VM} = \frac{18-0}{3-0} = \frac{18}{3} = 6\ km/h$

b) $[1;\ 2,5]$ Para $t = 1$, temos $S = 2$ e para $t = 2,5$, temos $S = 12,5$.

Assim, VM $= \frac{12,5-2}{2,5-1} = \frac{10,5}{1,5} = 7\ km/h$

c) $[1,7;\ 2,1]$ Para $t =\ 1,7$, temos $S =\ 5,78$ e para $t =\ 2,1$, temos $S =\ 8,82$.

Assim, VM $= \frac{8,82-5,78}{2,1-1,7} = \frac{3,04}{0,4} = 7,6\ km/h$

d) $[1,9;\ 2]$ Para $t =\ 1,9$, temos $S =\ 7,22$ e para $t =\ 2$, temos $S =\ 8$.

Assim, VM $= \frac{8-7,22}{2-1,9} = \frac{0,78}{0,1} = 7,8\ km/h$

e) $[1,99;\ 2]$ Para $t =\ 1,99$, temos $S =\ 7,92$ e para $t =\ 2$, temos $S =\ 8$.

Assim, VM $= \frac{8-7,92}{2-1,99} = \frac{0,08}{0,01} = 8\ km/h$

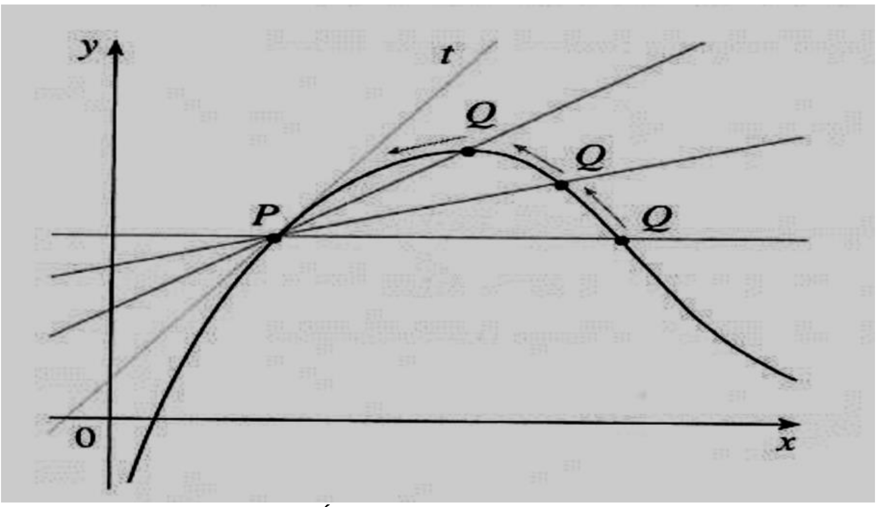
Neste exemplo, observamos que, à medida que fizemos os valores t_1 e t_2 se aproximar de $t =\ 2$, a velocidade média foi se aproximando de $8\ km/h.$

Logo, em uma função $f(x)$, à medida que fazemos x_2 tender para x_1 (representamos por $x_2 \to\ x_1$) a variação Δx vai se aproximando de zero, dizemos que Δx tende para zero (representamos por $\Delta x \to 0$) sem ser igual a zero, pois, $x_1 \neq x_2$. Geometricamente, as retas s secantes que passam por x_1 e x_2 vão tendendo a se tornar cada vez mais uma reta t tangente à curva da função em x_1. A inclinação dessa reta tangente em x_1 nós chamamos de taxa de variação instantânea (TVI) ou taxa de variação pontual em x_1. Assim, a taxa de variação instantânea de uma função $f(x)$ é o valor da inclinação (ou coeficiente angular) da reta t tangente à curva de $f(x)$ em um ponto específico $x =\ x_0$.

4.2.1 – Interpretação geométrica e conceito de derivada

Em uma função $f(x)$, sejam dados dois pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, como vimos por P e Q temos uma reta s secante cuja inclinação é TVM $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Fazendo x_2 tender para x_1 $(x_2\ \to\ x_1)$ o ponto Q vai se aproximando do ponto P, de modo que a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ irá fornecer a inclinação de uma reta t tangente à curva de $f(x)$ no ponto P.

Figura 4 – Ponto $\boldsymbol{Q}$ se aproximando do ponto $\boldsymbol{P}$



Fonte: (Livro: CÁLCULO - STEWART. 2011, p.130)

A inclinação da reta t tangente à curva de $f(x)$ no ponto $P(x_1, y_1)$ será representada por $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$, com $\Delta x \to 0$.

A esse valor m da inclinação da reta t tangente chamamos de derivada da função $f(x)$ em x_1 e denotamos por $f\,'(x_1)$ (lê-se: derivada da função $f(x)$ em x_1 ou simplesmente f linha de x_1) ou $y\,'$ ou ainda $\frac{dy}{dx}$. Ele representa o limite da função $f(x)$ quando $\Delta x \to 0$, ou seja, quando o ponto Q se desloca sobre a curva de $f(x)$ e tende para o ponto P, dizemos que Q está no limite de P, de modo a obtermos não a inclinação da reta s secante por P e Q e sim a inclinação da reta t tangente em P.

Usando a ideia de m como limite de $f(x)$, temos que $m = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Desse modo, podemos dizer que a derivada da função $f(x)$ no ponto x_1 é dada por $f\,'(x_1) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ assim $f\,'(x_1) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

Exemplos:

1) Calcular a derivada da função $f(x) = x^2$ em $x = 3$.

$$f\,'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2 - 3^2}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{9} + 6\Delta x + (\Delta x)^2 \cancel{-9}}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(6 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} 6 + \Delta x$$

como $\Delta x \to 0 \Rightarrow f\,'(3) = 6$

2) Calcular a derivada da função $f(x) = x^3$ em $x = 2$.

$f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^3 - 2^3}{\Delta x} \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{8} + 12\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \cancel{-8}}{\Delta x} \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2)}{\cancel{\Delta x}} \Rightarrow$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} 12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2$ como $\Delta x \to 0 \Rightarrow f'(2) = 12$

Desse modo, dizemos que as funções dos exemplos 1 e 2 são deriváveis, pois existe valor para a derivada da função no ponto indicado.

3) Mostre que a derivada da função $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$, em um ponto genérico x é igual a $2ax$.

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{ax^2} + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 \cancel{- ax^2}}{\Delta x} \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2ax + a\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \Rightarrow$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} 2ax + a\Delta x$ como $\Delta x \to 0 \Rightarrow f'(x) = 2ax$

4) Mostre que a derivada da função $f(x) = ax^3$, com $a \neq 0$, em um ponto genérico x é igual a $3ax^2$.

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x)^3 - ax^3}{\Delta x} \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{ax^3} + 3ax^2\Delta x + 3ax(\Delta x)^2 + a(\Delta x)^3 \cancel{- ax^3}}{\Delta x} \Rightarrow$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(3ax^2 + 3ax\Delta x + a(\Delta x)^2)}{\cancel{\Delta x}} \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} 3ax^2 + 3ax\Delta x + a(\Delta x)^2$ como $\Delta x \to 0 \Rightarrow f'(x) =$ $3ax^2$

4.3 – Regras básicas para derivação

Vimos como encontrar a derivada de uma função f(x) em um ponto específico x_1 através do uso direto da definição de derivada, como $f'(x_1) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. No entanto, o cálculo da derivada pelo uso da definição torna o processo trabalhoso e cansativo, mesmo para funções mais simples. Existem regras para derivação de funções que permitem cálculos corretos e de maneira bem mais rápida.

A seguir, veremos algumas regras básicas de derivação, também chamada de regras de diferenciação. As ideias das regras foram tiradas do livro Cálculo, de Munem-Foulis.

4.3.1 – Regra da constante : A derivada de uma função constante, do tipo, $f(x) = c$ é igual a zero. Assim, $\boxed{f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0}$

Exemplos: a) $f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$

b) $f(x) = -2 \Rightarrow f'(x) = 0$

4.3.2 – Regra da identidade: A derivada de uma função identidade, do tipo, $f(x) = x$ é igual a um. Assim, sendo $\boxed{f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1}$

4.3.3 – Regra da potência: A derivada de uma potência é o valor do expoente multiplicado pela base elevada à potência inferior seguinte.

Simbolicamente pode ser representada por: $\boxed{f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}}$

Exemplos: a) $f(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = 1.3x^0 \Rightarrow f'(x) = 3$

b) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x^1 \Rightarrow f'(x) = 2x$

c) $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

d) $f(x) = x^{-4} \Rightarrow f'(x) = -4x^{-5}$

4.3.4 – Regra da homogeneidade: A derivada de uma constante multiplicada por uma função é igual a constante multiplicada pela derivada da função.

Simbolicamente pode ser representada por: $\boxed{f(x) = c.g(x) \Rightarrow f'(x) = c.g'(x)}$

Exemplos: a) $f(x) = 3x^4 \Rightarrow f'(x) = 3.4x^3 \Rightarrow f'(x) = 12x^3$

b) $f(x) = \frac{5}{x^{10}} \Rightarrow f(x) = 5x^{-10} \Rightarrow f'(x) = -10.5x^{-11} \Rightarrow f'(x) = \frac{-50}{x^{11}}$

4.3.5 – Regra da soma: A derivada de uma soma é a soma das derivadas.

Simbolicamente pode ser representada por:

$$\boxed{f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)}$$

Assim, podemos derivar qualquer função polinomial, bastando derivar termo a termo.

Exemplos: a) $f(x) = x^2 - 5x \Rightarrow f'(x) = 2x - 5$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x - 1$

c) $f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 9x \Rightarrow f'(x) = 10x^4 + 16x^3 - 21x^2 + 10x - 9$

<u>4.3.6 – Regra do produto</u>: A derivada do produto de duas funções é a derivada da primeira função multiplicada pela segunda função mais a derivada da segunda função multiplicada pela primeira função.
Simbolicamente pode ser representada por:

$$\boxed{f(x) = u(x).v(x) \Rightarrow f'(x) = u'.v + v'.u}$$

Exemplo:

$f(x) = (3x^2 + 1).(5x^3 - x) \Rightarrow f'(x) = (6x).(5x^3 - x) + (15x^2 - 1).(3x^2 + 1) \Rightarrow$

$f'(x) = 30x^4 - 6x^2 + 45x^4 + 15x^2 - 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 75x^4 + 6x^2 - 1$

<u>4.3.7 – Regra do quociente</u>: A derivada do quociente de duas funções é a derivada do numerador multiplicada pelo denominador menos a derivada do denominador multiplicada pelo numerador tudo dividido pelo quadrado do denominador.
Simbolicamente pode ser representada por: $\boxed{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}}$

Exemplo:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+1).(x^3+3) - (3x^2).(x^2 + x - 2)}{(x^3 + 3)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x^4 + 6x + x^3 + 3 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2}{(x^3 + 3)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 6x + 3}{(x^3 + 3)^2}$$

<u>4.3.8 – Regra da cadeia</u>: A regra da cadeia é a regra para derivação composta fog de duas funções. Simbolicamente pode ser representada por: $f(x) = u^n$, onde u é uma função derivável de x e n é um número real.
Simbolicamente pode ser representada por: $\boxed{f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n.u^{n-1}.u'}$

Exemplos:

a) $f(x) = (x^2 + 3x)^{10} \Rightarrow f'(x) = 10.(x^2 + 3x)^9.(2x + 3) \Rightarrow f'(x) = (20x + 30).(x^2 + 3x)^9$

b) $f(x) = \sqrt{1 + x^2} \Rightarrow f(x) = (1 + x^2)^{½} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}.(1 + x^2)^{-½}.(2x) \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

4.4 – Derivadas de ordem superior

Seja $f(x)$ uma função derivável. Se $f\,'(x)$ também for derivável, sua derivada é chamada de derivada segunda de $f(x)$ e indicada por $f\,''(x)$. Se $f\,''(x)$ também for derivável, sua derivada é chamada de derivada terceira de $f(x)$ e indicada por $f\,'''(x)$, assim sucessivamente.

Exemplo: $f(x) = 5x^4 – 7x^3 + 4x^2 – 3x + 10$

$f\,'(x) = 20x^3 – 21x^2 + 8x – 3$

$f\,''(x) = 60x^2 – 42x + 8$

$f\,'''(x) = 120x – 42$

$f^{\,iv}(x) = 120$

$f^{\,v}(x) = 0$

A cada derivação implica que a função polinomial diminui um grau.

Em alguns casos as derivadas sucessivas são bem úteis. Como por exemplo, na física, em que a velocidade instantânea é a derivada do deslocamento e a aceleração é a derivada da velocidade instantânea, ou seja, a aceleração é a derivada segunda do deslocamento, sempre em relação ao tempo.

Assim, a função deslocamento $s(t)$ de um móvel dada por: $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, tem sua velocidade dada por $v(t) = s\,'(t) = v_0 + at$, e sua aceleração dada por $a(t) = s\,''(t)$

Exemplo: A função $s(t) = 2t^2$, com $t \geq 0$, fornece a posição de um ciclista, em que S é dado em metros e t é dado em segundos. Calcule:

a) a velocidade instantânea do ciclista.

$v(t) = s\,'(t) = 4t\,m/s$

b) a aceleração do ciclista.

$a(t) = s\,''(t) = 4\,m/s^2$

4.5 – Aplicações das derivadas

Já vimos algumas aplicações da derivada, como a velocidade instantânea de um móvel. No entanto, usando as regras de derivação podemos ampliar o estudo das aplicações das derivadas, em particular, como auxiliam a encontrar, sem grande esforço, os valores máximos e/ou mínimos de uma função. Enfim, encontrar a melhor opção para problemas como área máxima, volume máximo, custo mínimo de um produto, dentre outros.

4.5.1 – Teste para funções crescentes e decrescentes com derivada

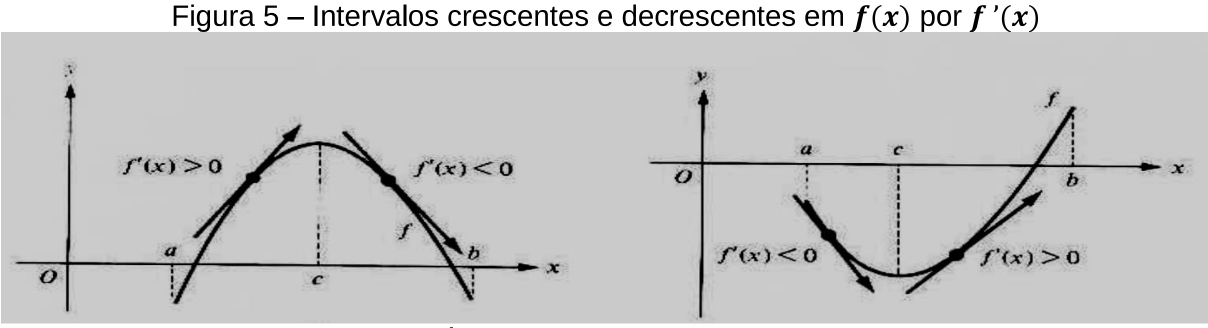
Sabendo que uma função $f(x)$ é denominada crescente num intervalo $I,$ se $f(x)$ é definida neste intervalo I e para todo $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Analogamente, uma função $f(x)$ é denominada decrescente num intervalo I se $f(x)$ é definida em I e para todo $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Sabendo ainda que a derivada de uma função $f(x)$ representa a inclinação da reta t tangente à curva de $f(x)$ em um ponto específico, logo este ponto nos fornece a direção da curva. Para ver como a derivada de $f(x)$ nos mostra onde a função é crescente ou decrescente dentro de um intervalo, podemos aplicar o seguinte teste.

Seja $f(x)$ uma função definida, contínua e derivável em um intervalo I, temos que:

i) se $f\,'(x) > 0$, em um intervalo, então $f(x)$ é crescente neste intervalo.

ii) se $f\,'(x) < 0$, em um intervalo, então $f(x)$ é decrescente neste intervalo.

Figura 5 – Intervalos crescentes e decrescentes em $\boldsymbol{f(x)}$ por $\boldsymbol{f\,'(x)}$

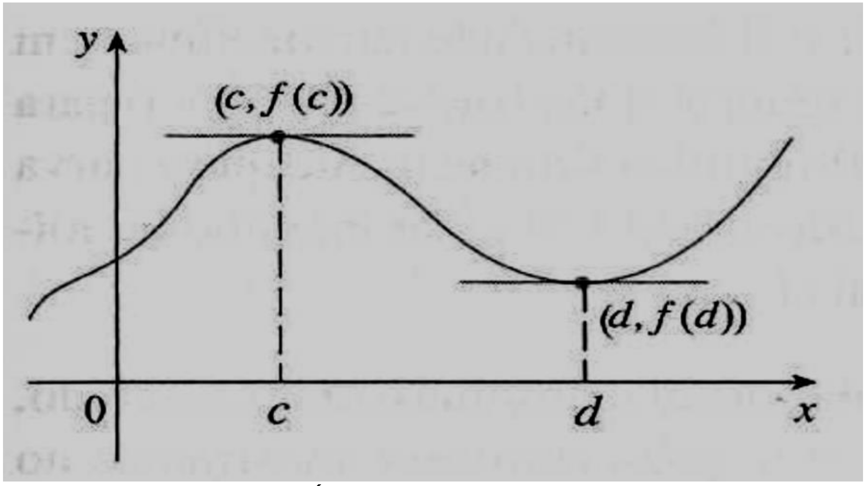


Fonte: (Livro: CÁLCULO – MUNEM-FOULIS. 1982, p. 170)

4.5.2 – Máximos e mínimos relativos

Dizemos que uma função $f(x)$ tem um máximo relativo em um ponto c do seu domínio, se $f(c) \geq f(x)$ quando x estiver nas proximidades de c. De modo análogo, $f(x)$ tem um mínimo relativo em um ponto d do seu domínio, se $f(d) \leq f(x)$ quando x estiver nas proximidades de d. Desse modo, se uma função $f(x)$ possui um máximo ou um mínimo relativo em um ponto c, por exemplo, dizemos que $f(x)$ possui um extremo relativo em c, de modo que a reta t tangente à curva de $f(x)$ em c é horizontal, isto é, a inclinação da reta t tangente à curva de $f(x)$ é zero, logo, $f'(c) = 0$.

Figura 6 - Máximo relativo em $\boldsymbol{c}$ e mínimo relativo em $\boldsymbol{d}$.



Fonte: (Livro: CÁLCULO - STEWART. 2011, p. 255)

Assim, igualando a derivada de uma função $f(x)$ a zero, ou seja, fazendo $f'(x) = 0$ teremos um máximo ou um mínimo relativo, chamado de ponto crítico de $f(x)$. De modo que podemos aplicar o teste da primeira derivada, que diz: Sendo c um ponto crítico de uma função contínua $f(x)$, então:

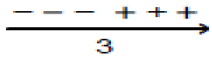
i) Se o sinal de $f'(x)$ mudar de positivo para negativo em c, então c é um máximo relativo de $f(x)$.

ii) Se o sinal de $f'(x)$ mudar de negativo para positivo em c, então c é um mínimo relativo de $f(x)$.

iii) Se $f'(x)$ não mudar de sinal em c, então $f(x)$ não tem máximo ou mínimo relativo em c.

Exemplos: Determine os possíveis pontos de máximo ou mínimo das funções:

1) $f(x) = x^2 - 6x \Rightarrow f\,'(x) = 2x - 6$, fazendo $f\,'(x) = 0$, temos, $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3.$

Pelo estudo de sinal de $f\,'(x) = 2x - 6$, temos, 

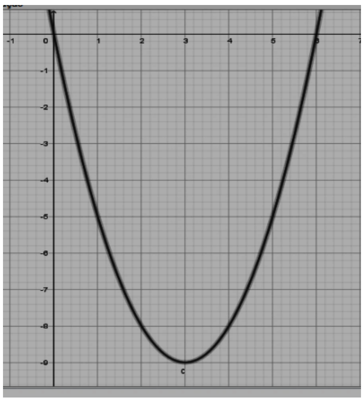
Logo, em $x = 3$ (passou de – para +) temos um ponto de mínimo relativo de $f(x)$.

2) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 4 \Rightarrow f\,'(x) = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} - 2 \Rightarrow f'(x) = x^2 - x - 2,$

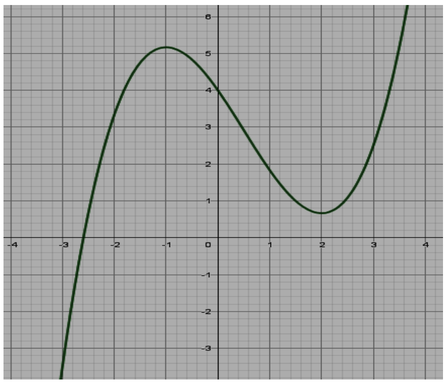
fazendo $f\,'(x) = 0$, temos $x^2 - x - 2 = 0$, cujas raízes são $x' = -1$ e $x'' = 2$. Pelo estudo de sinal de $f\,'(x) = x^2 - x - 2$, temos 

Logo, em $x = -1$ (passou de + para –) temos um ponto de máximo relativo e em $x = 2$ (passou de – para +) temos um ponto de mínimo relativo de $f(x)$.

Figura 7 – Pontos críticos dos exemplos 1 e 2

a) 

Fonte: O autor

b) 

Fonte: O autor

4.5.2.1 – Problemas de aplicações de máximos e mínimos

A maioria dos livros de Cálculo e até mesmo os livros do Ensino Médio que contemplam o estudo da derivada apresentam um capítulo reservado aos problemas de aplicações de máximos e mínimos, também chamados de problemas de otimização, devido ao fato de serem problemas rotineiros e de grande importância no nosso dia a dia.

Para Simmons (1987),

> Dentre as aplicações mais notáveis do Cálculo estão aquelas em que se buscam os valores máximo ou mínimo de uma função. O dia-a-dia está cheio de tais problemas e é natural que os matemáticos e outras pessoas os considerem interessantes e importantes. Um homem de negócios procura maximizar lucros e minimizar custos. Um engenheiro ao projetar um novo automóvel deseja maximizar a eficiência. Um piloto de linha aérea tenta minimizar o tempo de voo e o consumo de combustível. (SIMMONS, 1987, p.160)

Ainda segundo o autor, quando o problema puder ser expresso em termos de variáveis e funções, os métodos estudados no Cálculo nos ajudarão a compreendê-lo e resolvê-lo.

Stewart (2011) apresenta um passo a passo para a resolução de problemas de otimização. Dentre os passos apresentados pelo autor, destacamos:

> 1. Compreendendo o problema – A primeira etapa consiste em ler cuidadosamente o problema até que ele seja entendido claramente. Pergunte a sim mesmo: o que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?
> 2. Faça um diagrama – Na maioria dos problemas é útil fazer um diagrama e marcar as quantidades dadas e pedidas no diagrama.
> 3. Introduzindo uma notação – Atribua um símbolo para a quantidade que deve ser maximizada ou minimizada. Selecione também símbolos $(a, b, c, \ldots, x, y)$ para outras quantidades desconhecidas e coloque esses símbolos no diagrama. O uso de iniciais como símbolos poderá ajudá-lo – por exemplo, A para área, h para altura e t para tempo. (STEWART, 2011, p.301)

Ainda, como destacamos no nosso capítulo sobre resolução de problemas, é importante que o aluno, além de compreender o problema, relacionar incógnitas aos dados do problema, montar e executar um plano de resolução, também, faça uma revisão completa do problema, revendo e discutindo a solução encontrada.

Vejamos alguns exemplos de aplicações de máximos e mínimos:

1) (Extraído do livro: Matemática para o 2º grau, volume 3, pág. 244) – Um determinado produto tem preço de produção de $R\$4,00$. Ao vendê-lo a x reais o fabricante espera vender $30 - 2x$ unidades. A que preço deve ser vendido o produto para que haja lucro máximo?

Solução:

- Gasto de produção: $4.(30 - 2x) = 120 - 8x$
- Valor apurado na venda: $x.(30 - 2x) = 30x - 2x^2$
- Lucro: $L(x) = (30x - 2x^2) - (120 - 8x) = -2x^2 + 38x - 120$

Trata-se de uma parábola com $a < 0$ e, portanto, com ponto de máximo.

Fazendo $L'(x) = 0 \Rightarrow L'(x) = -4x + 38 \Rightarrow -4x + 38 = 0 \Rightarrow x = 9{,}5$

Portanto, o produto deve ser vendido a $R\$9{,}50$.

2) (Extraído do livro: Matemática para o 2º grau, volume 3, pág. 245) – Um projétil é lançado do solo verticalmente e para cima. Desprezando-se a resistência do ar e o cano da arma, e admitindo-se conhecida a aceleração da gravidade, calculou-se a função que relaciona o espaço e o tempo, representada por $e = 80\,t - 4t^2$. Determine no SI a altura máxima atingida pelo projétil e o tempo gasto para isto.

Solução:

Fazendo $e' = 0 \Rightarrow 80 - 8t = 0 \Rightarrow t = 10$ segundos

Para $t = 10 \Rightarrow e = 80.10 - 4.102 \Rightarrow e = 400$ metros

3) (Extraído do livro: Cálculo com geometria analítica – Simmons – vol. 1, pág. 160) Achar dois números positivos cuja soma é 16 e cujo produto é o máximo possível.

Solução:

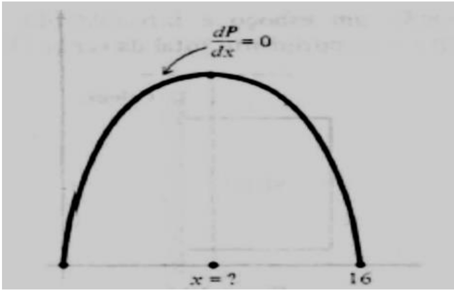
Sejam x e y dois números positivos cuja soma é 16: $x + y = 16$ (1)

Procuramos valores particulares de x e y que maximizem o produto: $P = x.y$ (2)

Observe que P depende de duas variáveis, e o cálculo de derivadas trabalha somente com funções de uma única variável independente.

Da equação (1) podemos expressar y em termos de x, assim, $y = 16 - x$ e, com isso, expressar P em função de x: $P = x.(16 - x) = 16x - x^2$ (3)

Figura 8 – Gráfico de $\boldsymbol{P(x) = 16x - x^2}$



Calculando a derivada de (3), temos $P'(x) = 16 - 2x$

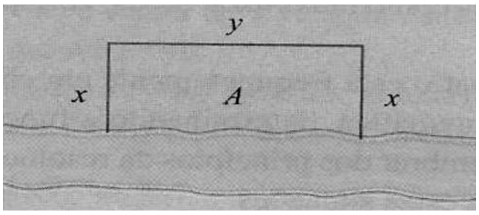
Fazendo $P' = 0$, temos $x = 8$ como solução da equação. Este valor de x maximiza P. Por (1) o valor correspondente de y é também 8.

4) (Extraído do livro: Cálculo – Stewart – vol. 1, pág. 302) – Um fazendeiro tem 1.200 metros de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

Solução:

Desejamos maximizar a área A do retângulo. Seja x e y a profundidade e a largura do retângulo (em metros).

Figura 9 – Área $\boldsymbol{A}$ do retângulo $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{y}$



Então, expressamos A em termos de x e y: $A = x.y$ (1)

Sabendo que o comprimento da cerca é 1.200 m, temos que: $2x + y = 1200$ (2)

Isolando y em (2) e substituindo em (1), temos: $A(x) = x.(1200 - 2x) = 1200x - 2x^2$, com $0 < x < 600$ e $a < 0$, portanto, temos um máximo relativo. Fazendo a derivada $A'(x) = 1200 - 4x$ e resolvendo a equação $1200 - 4x = 0$, temos $x = 300$.

Substituindo $x = 300$ na equação (2) encontramos $y = 600$.

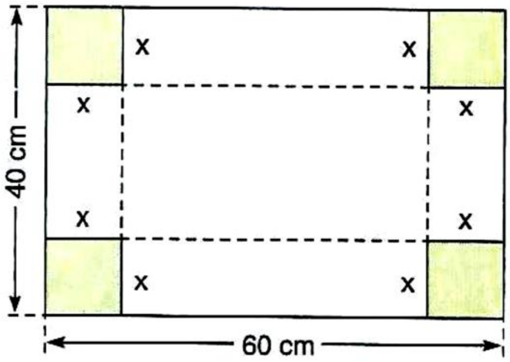
Assim, o campo retangular deve ter 300 m de profundidade e 600 m de largura.

5) (Extraído do livro: Matemática uma nova abordagem, vol. 3, pág. 299) – Com uma folha retangular de cartolina se quer construir uma caixa de máximo volume possível, cortando um quadrado em cada canto, conforme indica a figura. As dimensões da folha são $60\ \mathrm{cm}$ e $40\ \mathrm{cm}$.

a) Calcular x.

b) Calcular o volume máximo da caixa.

Figura 10 - Representação do exemplo 5



Solução:

a) A caixa terá a forma de um paralelepípedo retângulo e seu volume será $V(x) = (60 - 2x).(40 - 2x).x \Rightarrow V(x) = 2400x - 200x^2 + 4x^3$, com $0 < x < 20$. Fazendo $V'(x) = 0$, temos $2400 - 400x + 12x^2 = 0$, com: $x' = 7{,}85$ (serve) e $x'' = 25{,}5$ (não serve, pois, $0 < x < 20$)

Fazendo o estudo de sinal em $V'(x)$

Logo, em $x = 7{,}85\ \mathrm{cm}$ (passou de + para –) temos um ponto de máximo relativo.

b) Substituindo x por $7{,}85\ cm$, temos: $V(7{,}85) \cong 2400.(7{,}85) - 200.(7{,}85)^2 + 4.(7{,}85)^3$ encontramos: $V(7{,}85) \cong 8.450{,}45\ cm^3$

6) (Adaptado do livro: Cálculo – Stewart – vol. 1, pág. 306) – Uma loja tem vendido 200 DVD por semana a $\mathrm{R\$}350{,}00$ cada um. Uma pesquisa de mercado indicou que para cada $\mathrm{R\$}10{,}00$ de desconto oferecido aos compradores, o número de unidades vendidas aumenta 20 por semana. Encontre a função demanda e a função receita. Qual o desconto que a loja deveria oferecer para maximizar sua receita?

Solução:

Seja x a quantidade de DVD vendida e y o preço unitário do DVD. Desse modo, para $x_1 = 200 \Rightarrow y_1 = 350$ e para $y_2 = 340 \Rightarrow x_2 = 220$

Assim, o coeficiente angular da função demanda que representa o decréscimo no preço será: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{340-350}{220-200} = \frac{-10}{20}$

E a função demanda será dada por $p(x) = 350 - \frac{10}{20}.(x - 200) \Rightarrow p(x) = 450 - \frac{1}{2}x$

Sendo a função receita $R(x) = x.p(x)$, então, $R(x) = x.(450 - \frac{1}{2}x) = 450x - \frac{1}{2}x^2$

Fazendo $R'(x) = 0 \Rightarrow 450 - x = 0 \Rightarrow x = 450$

Este valor de x dá um máximo (observando que R é uma parábola para baixo)

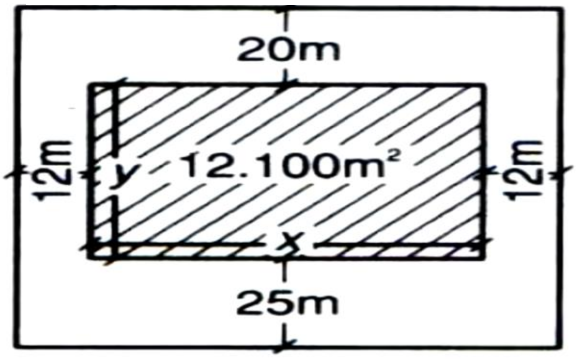
O preço correspondente é $p(450) = 450 - \frac{1}{2}.450 = 225$

E o desconto é $350 - 225 = 125$

Portanto, para maximizar a receita a loja deveria oferecer um desconto de R\$125,00.

7) (Extraído do livro: Cálculo A, pág. 220) – Um galpão deve ser construído tendo uma área retangular de $12.100\,m^2$. A prefeitura exige que exista um espaço livre de $25\,m$ na frente, $20\,m$ atrás e $12\,m$ em cada lado. Encontre as dimensões do lote que tenha a área mínima na qual posso ser construído este galpão.

Figura 11 - Representação do exemplo 7



Solução: A figura ajuda a definir a função que vamos minimizar.

Sabendo que $A = x.y = 12.100\,m^2$ (1)

A função S que definirá a área do lote é $S = (x + 12 + 12).(y + 25 + 20)$

$S = (x + 24).(y + 45)$ (2)

Isolando *y* em (1) e substituindo em (2) vem,

$$S(x) = (x + 24).(\frac{12.100}{x} + 45) = 45x + 13180 + \frac{290.400}{x}$$

Esta é a função que queremos minimizar.

$S'(x) = \frac{45x^2 - 290.400}{x^2}$ Resolvendo a equação $S'(x) = 0$

$\frac{45x^2 - 290.400}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{44\sqrt{30}}{3} \cong 80{,}33\ m$ (consideramos apenas o valor positivo) este valor de x dá um mínimo (observando que S é uma parábola para cima). Substituindo $x \cong 80{,}33$ em (1) obtemos $y = \frac{12.100}{80{,}33} \cong 150{,}62\ m$.

A área mínima é obtida quando as dimensões do lote forem $104{,}33m \text{ x } 195{,}62m$

5 – A PESQUISA

Realizou-se a pesquisa com o objetivo de melhor entender e, também, explicar os fenômenos empíricos, ou seja, nossa pesquisa terá como finalidade a explicação da aplicação dos conceitos de Derivada no estudo de funções aos alunos do Ensino Médio, em especial, a aplicação da Derivada como taxa de variação instantânea e em problemas de máximos e mínimos. Essa pesquisa está baseada nas experiências profissionais do pesquisador, nas atividades práticas desenvolvidas em sala de aula e nas observações de que podemos oferecer novos e mais conhecimentos aos alunos do Ensino Médio.

Siqueira (2002) define pesquisa da seguinte forma:

> A pesquisa é compreendida como uma atividade cientifica que busca a produção de conhecimento no sentido de chegar a novas descobertas, à solução de uma questão científica ou à verificação de teorias. É uma atividade complexa que exige disciplina, compromisso e criatividade. (SIQUEIRA, 2002, p.105)

Além da tentativa de se chegar a novas descobertas, a pesquisa é uma forma de ver e compreender a realidade que nos cerca. No nosso caso, de aplicação do conhecimento teórico na resolução de problemas cotidianos com o uso da Derivada.

5.1 – Metodologia da pesquisa

Como falamos anteriormente, o papel do professor no seu dia a dia de sala de aula deve ser de orientador e incentivador, de modo que os alunos adquiram conhecimento e estejam motivados para a resolução de problemas matemáticos. Além disso, é importante, também, que o professor desperte no seu aluno a capacidade do questionamento, de modo que o aluno faça uma reflexão sobre seus conhecimentos e sobre a realidade matemática que os cerca. Assim, ao realizar uma pesquisa, o professor/pesquisador precisa estar atento aos questionamentos, comentários e anotações dos seus alunos. A partir desses dados o professor/pesquisador deve fazer uma análise reflexiva do andamento da pesquisa, pois o intuito é propiciar ao aluno novas descobertas. O aluno deve ser compreendido como aquele que constrói a realidade. Desse modo, nossa pesquisa assume características de natureza qualitativa.

Para Richardson (1999, p.90), "A pesquisa qualitativa pode ser encarada como a leitura de uma compreensão detalhada dos significados e características situacionais apresentadas pelos entrevistados, em lugar da produção de medidas quantitativas de características ou comportamentos". Ainda segundo o autor, deve-se considerar, também, a análise da realidade onde o professor e o aluno estão inseridos, ou seja, o espaço escolar. E essa realidade é muito dinâmica.

De acordo Siqueira (2002),

> Por natureza, a pesquisa qualitativa não apresenta rigidez em sua condução. Cada investigação, com seus objetos e propósitos específicos, delineia uma forma própria para execução da pesquisa. A pesquisa qualitativa não apresenta etapas estanques, de tal modo que uma etapa começa com o término da outra. Ao contrário, ela se desenvolve em interação dinâmica retroalimentando-se, reformulando-se constantemente, de maneira que, por exemplo, a coleta de dados num instante deixa de ser tal e é análise de dados, e essa, em seguida, é veículo para nova busca de informações. (SIQUEIRA, 2002, p.152)

Conforme a autora, a pesquisa qualitativa deve ser percebida como um processo e não como uma simples busca de resultados. Os resultados da pesquisa serão obtidos a partir da percepção do professor/pesquisador sobre o conjunto de aspectos que envolvem a pesquisa.

5.2 – Cenário e sujeitos da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida no laboratório de informática de uma escola de ensino fundamental II e médio da rede estadual de ensino do Estado de Minas Gerais cedida pelo diretor da escola por meio de termo de cessão de uso. A escola funciona nos três turnos (matutino, vespertino e noturno), atendendo cerca de mil e trezentos (1300) alunos e está localizada na região central da cidade de Janaúba/MG. A escolha dessa escola se deu pelo fato de ser o local de trabalho do professor/pesquisador, onde o mesmo trabalha com duas turmas de 2º ano e duas turmas de 3º ano do ensino médio, no turno matutino.

Os alunos do 2º ano dessa escola tiveram apenas noções básicas de funções no 1º ano e somente no 2º ano estavam aprofundando no estudo das funções. Dessa forma, o professor/pesquisador apresentou sua pesquisa sobre derivadas aos alunos de uma das turmas de 2º ano e os convidou a participarem da pesquisa. Os alunos que manifestaram interesse em participar, acredita-se que gostam de matemática, receberam do professor/pesquisador um termo de esclarecimento da pesquisa e consentimento dos pais ou responsáveis, uma vez que, os alunos participantes da pesquisa deveriam comparece à escola no contraturno, ou seja, deveriam participar da pesquisa no turno vespertino durante sete dias letivos (sete encontros), com dias de 2 h/a e outros de 3 h/a, sendo cada hora aula de cinquenta minutos. Após esclarecimentos e consentimentos dos pais ou responsáveis, dez alunos efetivaram sua participação na pesquisa, sete moças e três rapazes, com idades entre 16 e 17 anos.

5.3 – Atividades desenvolvidas na pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida do dia 11 ao dia 19 de setembro de 2017 em sete encontros presenciais: 4 encontros de 2h/a, das 13:50 às 15:30 e 3 encontros de 3 h/a, das 13:00 às 15:30.

<u>1º encontro (2 h/a):</u> No primeiro encontro, foi explicado aos alunos taxa de variação média, taxa de variação instantânea e a derivada como variação instantânea, bem como sua interpretação geométrica. A explicação se deu através de teorias e exercícios conforme constam no capitulo 4 desse trabalho. Foram utilizados o quadro branco, pincel e projetor de multimídia nas explicações. Os alunos fizeram anotações das fórmulas e dos exemplos.

<u>2º encontro (2 h/a):</u> No segundo encontro os alunos resolveram os problemas propostos na Atividade (1) como exercícios de fixação do conteúdo, sobre taxa de variação média e taxa de variação instantânea, usando as noções e as fórmulas de taxas repassadas no primeiro encontro.

Atividade (1)

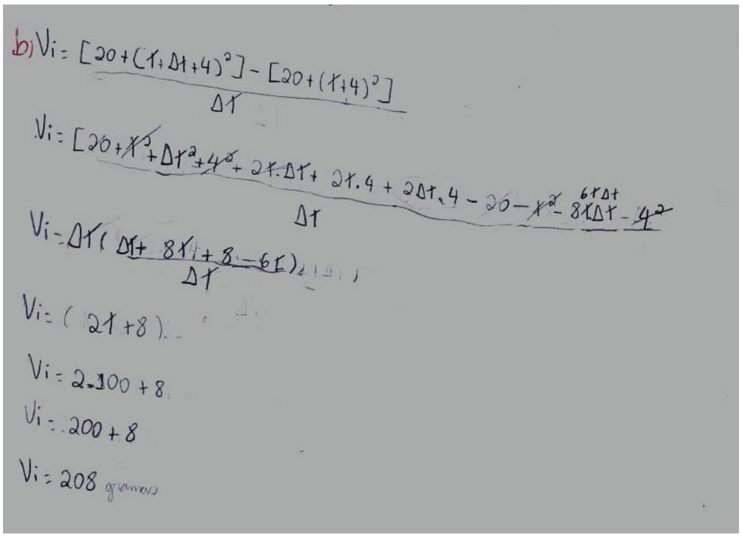
1) Uma bola foi atirada para o alto, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $s(t) = 10t - 4{,}9t^2$. Encontre:
a) Sua velocidade média no intervalo $1 \le t \le 2$.
b) Sua velocidade no instante $t = 2$.

2) Uma cidade *X* é atingida por uma epidemia. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela epidemia após um tempo t (medido em dias a partir do 1º dia da epidemia) é dado por $f(t) = 64\,t - \frac{t^2}{2}\cdot$ Responda:
a) Qual a variação média de pessoas atingidas nos *50* primeiros dias da epidemia?
b) Qual o número de pessoas atingidas pela epidemia no *64º* dia?

3) Numa granja, constatou-se que uma ave em desenvolvimento pesa em gramas $p(t) = 20 + (t + 4)^2$, onde t *(*$t \ge 0$*)* é medido em dias. Determine:
a) A razão média no aumento de peso nos *100* primeiros dias.
b) A razão do aumento de peso no *100º* dia.

No primeiro momento, os alunos, sem ajuda do professor/pesquisador, leram, interpretaram e tentaram resolver os problemas. Dois alunos tiveram êxito na resolução e não apresentaram qualquer dificuldade. Num segundo momento, o professor/pesquisador realizou intervenção junto aos oito alunos que apresentavam dificuldades. Desses, quatro estavam com pequenas dúvidas nas operações e quatro alunos apresentaram dúvidas na compreensão, que foram esclarecidas pelo professor/pesquisador, e também na resolução dos problemas, principalmente na letra (b) das questões 2 e 3. Depois da intervenção, todos os alunos concluíram a Atividade (1), que foi classificada como positiva e satisfatória, uma vez que houve bastante interesse pelos alunos em chegar ao resultado correto. Ao final das duas horas/aula, o professor/pesquisador corrigiu no quadro todas as questões dessa Atividade (1). Na Figura 12, vemos a resolução da letra (b) da questão 3 de um dos alunos que necessitou de ajuda nas operações, em especial nos produtos notáveis.

Figura 12 – Resolução da questão 3 b) da atividade (1)



Fonte: O autor

<u>3º encontro (3h/a):</u> No terceiro encontro, foram apresentadas, de forma simples e sem demonstrações, as regras básicas de derivação conforme consta na seção 4.3 deste trabalho. Foram utilizados o quadro branco e pincel. Em seguida, com as fórmulas anotadas no quadro, os alunos resolveram os problemas propostos na Atividade (2) como exercícios de verificação de aprendizagem, ainda sobre taxa de variação média e taxa de variação instantânea, porém utilizando as regras de derivação para resolver a taxa de variação instantânea.

<u>Atividade (2)</u>

1) Um ciclista desloca em uma trajetória segundo a equação $s(t) = 4t^3$, com s em quilômetros e t em horas. Determine:

a) Sua velocidade média no intervalo $1 \leq t \leq 2$.

b) Sua velocidade instantânea em $t = 2$.

2) Analistas de produção verificaram que, em uma montadora *X*, o número de peças produzidas nas primeiras t horas de trabalho era $f(t) = 50.(t^2 + t)$, com $0 \leq t \leq 5$.

a) Qual a variação média do número de peças produzidas durante as 5 primeiras horas de trabalho?

b) Quantas peças foram produzidas na *2ª* hora de trabalho?

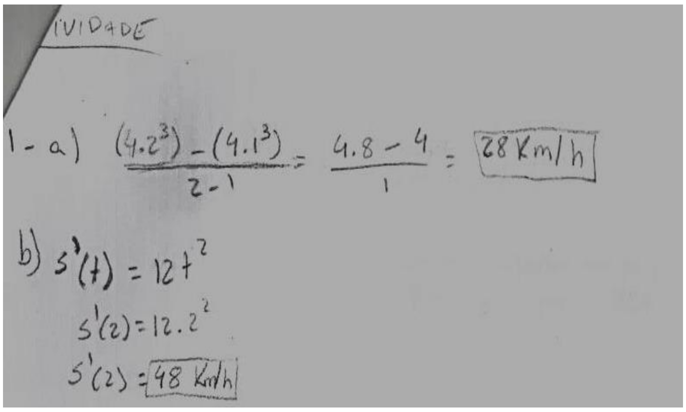
3) Um reservatório de água está sendo esvaziado para limpeza. A quantidade de água no reservatório em litros, t horas após o escoamento ter começado é dada por $v(t) = 5.(80 - t)^2$. Determinar:

a) A taxa de variação média do volume de água no reservatório durante as *10* primeiras horas de escoamento.

b) A taxa de variação do volume de água no reservatório após *8* horas de escoamento.

Durante a resolução dos problemas, o professor/pesquisador não fez intervenções nas resoluções dos alunos. Eles responderam conforme haviam entendido as regras de derivação. Eles relataram que utilizar as fórmulas torna os cálculos mais rápidos e fáceis, no entanto, com apenas uma explicação e poucos exemplos tiveram dúvidas em como aplicar de forma correta algumas das regras de derivação, isso interferiu nos resultados da atividade. A correção dessa atividade mostrou que todos os dez alunos acertaram a questão 1, não tiveram dúvidas na derivação de $s(t) = 4t^3$. Observa-se na Figura 13 a resolução de um dos alunos.

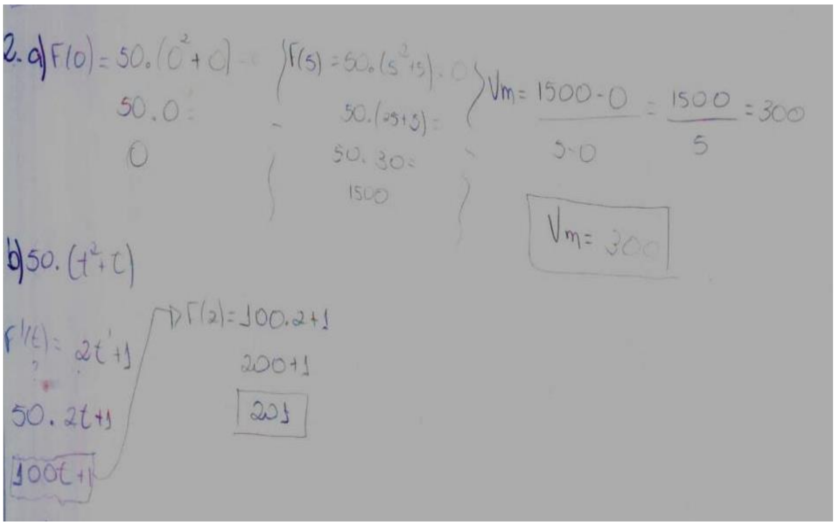
Figura 13 – Resolução da questão 1 da atividade (2)



Fonte: O autor

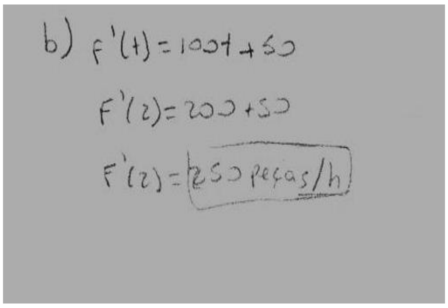
A questão 2 teve 50% de acerto, ou seja, cinco alunos acertaram e cinco alunos erraram. Na Figura 14, é possível ver um aluno que acertou a letra (a) e cometeu um erro na propriedade distributiva ao multiplicar 50 por $(2t + 1)$ na letra (b), errando o resultado do problema, enquanto, na Figura 15, vemos a correta resolução da letra (b) de outro aluno, onde ele resolveu primeiro a multiplicação e depois aplicou a regra de derivação.

Figura 14 – Resolução da questão 2 da atividade (2)



Fonte: O autor

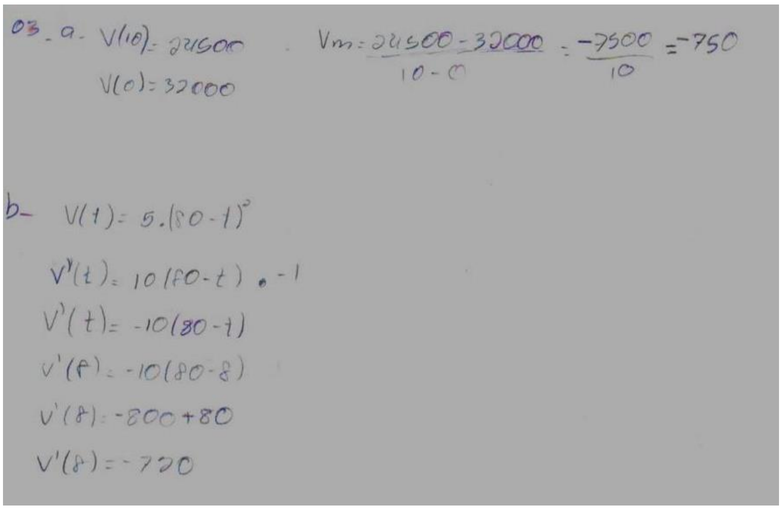
Figura 15 – Resolução correta da questão 2 b)



Fonte: O autor

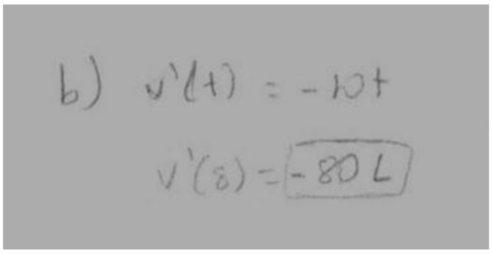
A questão 3 teve 60% de acerto, ou seja, seis alunos acertaram e quatro alunos erraram. Os erros se deram principalmente na derivação, os alunos não souberam aplicar as regras de derivação corretamente. Pela Figura 16, percebe-se a correta resolução de um aluno e, pela Figura 17, a resolução errada da letra (b) de outro aluno, onde ele não soube aplicar a regra de derivação.

Figura 16 - Resolução da questão 3 da atividade (2)



Fonte: O autor

Figura 17 - Resolução errada da questão 3 b)



Fonte: O autor

<u>4º encontro (3 h/a):</u> No quarto encontro, foi explicado aos alunos sobre as aplicações da derivada. Como identificar intervalos crescentes e decrescentes em funções, como encontrar pontos de máximo e mínimo relativo e como resolver problemas de aplicações de máximos e mínimos. A explicação se deu através de teoria e de resolução dos problemas que constam no capítulo 4 deste trabalho.

<u>5º encontro (2 h/a):</u> No quinto encontro os alunos resolveram os problemas de aplicações de máximos e mínimos, propostos na Atividade (3) como exercícios de fixação de conteúdo.

<u>Atividade (3)</u>

1) A bola da Copa do Mundo de *2010*, a Jabulani, ficou famosa por sua trajetória inusitada, dificultando bastante a vida dos goleiros. Suponha que os pesquisadores concluíram que, em cobranças de falta a certa distância do gol, a velocidade

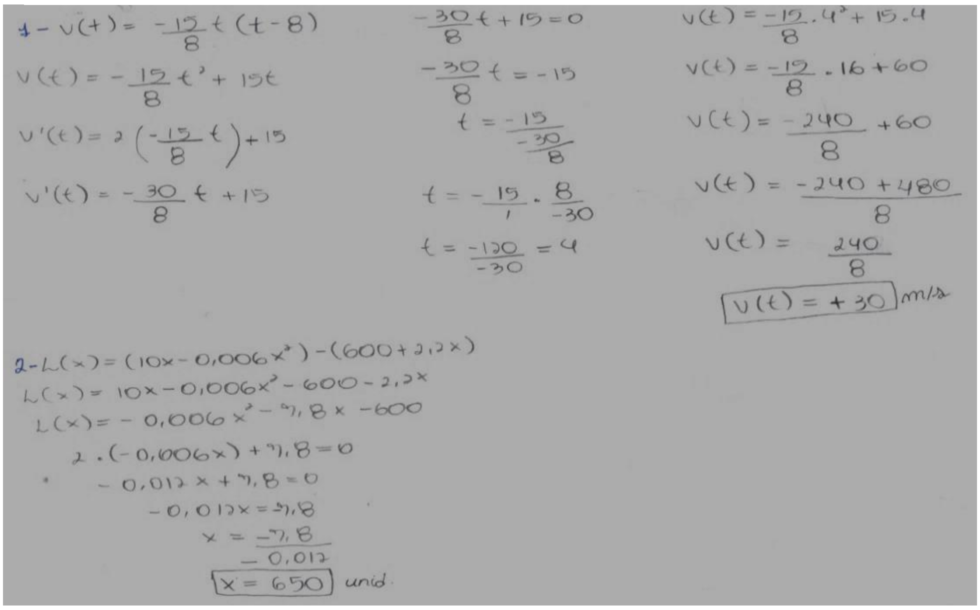
instantânea da Jabulani seria descrita pela função $v(t) = -\frac{15\,t}{8}.(t-8)$, em que t é o tempo em segundos contado a partir do chute na Jabulani e $v(t)$ é dada em m/s. Determine a velocidade máxima adquirida pela Jabulani.

2) O custo e a receita total com a produção e comercialização de determinado produto é dado, respectivamente, por $c(x) = 600 + 2{,}2x$ e $r(x) = 10x - 0{,}006x^2$. Encontre a quantidade x de unidades produzidas, para que o lucro seja máximo.

3) Abel deseja cercar um pasto em forma retangular para o seu rebanho bovino. Ele dispõe de *1500* metros de tela para o serviço. Ele irá aproveitar uma lateral onde já existe uma cerca e cercar apenas os outros três lados. Quais devem ser as dimensões para que o pasto de Abel tenha a maior área possível?

No primeiro momento, os alunos, sem ajuda do professor/pesquisador, leram, interpretaram e tentaram resolver os problemas. Cinco alunos tiveram êxito na resolução e não apresentaram qualquer dificuldade na atividade (3). Num segundo momento, o professor/pesquisador realizou intervenção junto aos outros cinco alunos que apresentavam dificuldades na questão 3. Ao final das duas horas/aula, o professor/pesquisador corrigiu no quadro todas as questões dessa Atividade (3). Na Figura 18, percebe-se a correta resolução das questões 1 e 2 de um dos alunos.

Figura 18 - Resolução questões 1 e 2 atividade (3)



Fonte: O autor

Ainda na questão 3, em que houve necessitade de intervenção do professor/pesquisador, nove alunos chegaram ao resultado correto com sucesso, no entanto, um aluno não conseguiu concluir a questão. A atividade (3), como atividade de fixação, foi classificada como positiva e satisfatória, uma vez que todos os alunos chegaram ao resultado correto nas questões 1 e 2 e 90% dos alunos concluíram a questão 3.

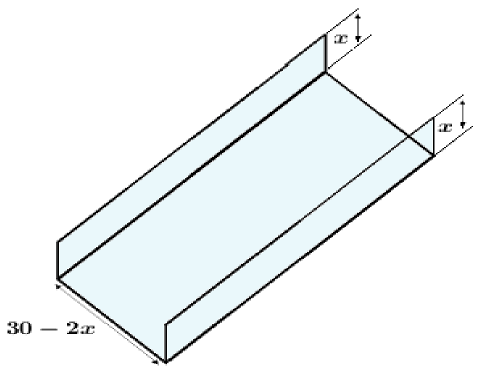
6º encontro (2 h/a): No sexto encontro, os alunos resolveram os problemas de aplicações de máximos e mínimos, propostos na Atividade (4) como atividade de investigação de aprendizagem.

Atividade (4)

1) Um ônibus de *40* lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro *R$20,00* mais *R$2,00* por lugar vago. Qual o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima?

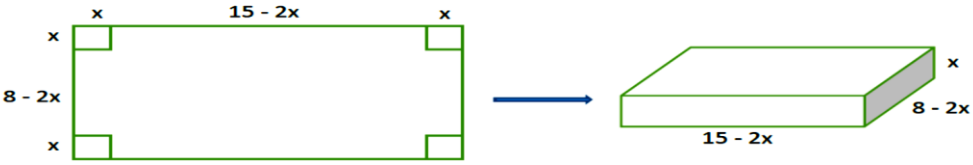
2) De uma lâmina de zinco retangular de *30 cm* de largura deve-se fazer uma calha dobrando as bordas perpendicularmente à lâmina (veja a figura abaixo). Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado, de modo que a calha tenha capacidade máxima?

Figura 19 - Representação do exercício 2 da atividade (4)



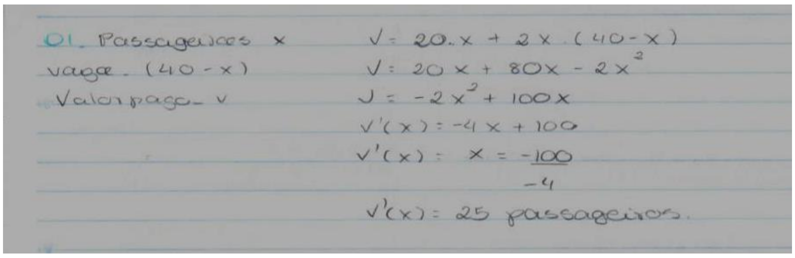
3) De uma folha de papelão medindo *8 cm* de largura e *15 cm* de comprimento, cortam-se de cada canto quadrados iguais de medida x cm. Virando os lados para cima é construída uma caixa sem tampa (veja figura abaixo). Determine o comprimento x dos lados dos quadrados que devem ser cortados para que o volume da caixa seja o máximo.

Figura 20 - Representação exercício 3 da atividade (4)



Os alunos utilizaram os conhecimentos e anotações dos dois últimos encontros sobre aplicações de máximos e mínimos com o uso da derivada. Não houve intervenção do professor/pesquisador durante a resolução dessa atividade. O resultado da Atividade (4) mostrou um índice de 100% de acerto e foi considerado excelente, pois, mesmo sem a ajuda do professor/pesquisador, todos os dez alunos acertaram todas as três questões. Pode ser visto nas Figuras 21, 22 e 23 abaixo, respectivamente, a resolução das questões 1, 2 e 3 feita por alunos diferentes.

Figura 21 - Resolução da questão 1 da atividade (4)

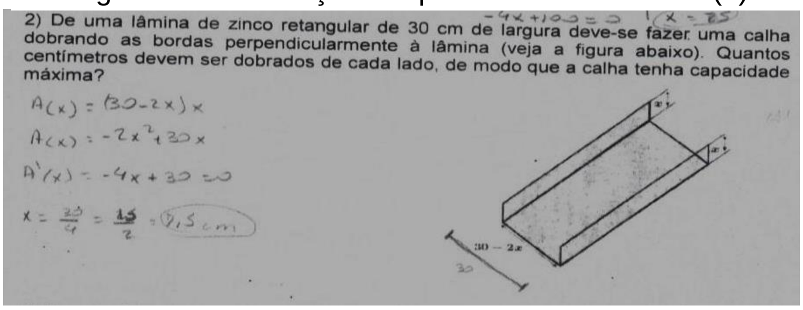


01. Passageiros x
vaga. $(40-x)$
Valor pago. v

$V = 20.x + 2x.(40-x)$
$V = 20x + 80x - 2x^2$
$V = -2x^2 + 100x$
$V'(x) = -4x + 100$
$V'(x) = \quad x = \frac{-100}{-4}$
$V'(x) = 25$ passageiros.

Fonte: O autor

Figura 22 - Resolução da questão 2 da atividade (4)



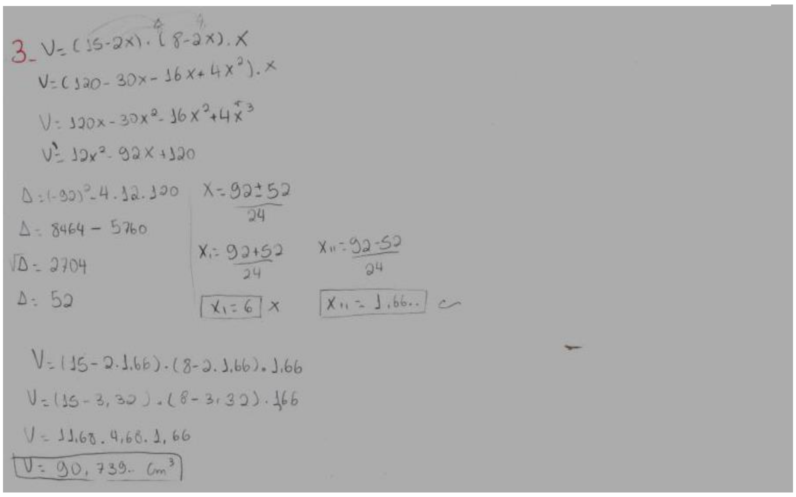
2) De uma lâmina de zinco retangular de 30 cm de largura deve-se fazer uma calha dobrando as bordas perpendicularmente à lâmina (veja a figura abaixo). Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado, de modo que a calha tenha capacidade máxima?

$-4x+100=0 \quad x=25$

$A(x) = (30-2x)x$
$A(x) = -2x^2+30x$
$A'(x) = -4x+30=0$
$x = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7,5\ cm$

Fonte: O autor

Figura 23 - Resolução da questão 3 da atividade (4)



Fonte: O autor

<u>7º encontro (3 h/a):</u> No sétimo encontro, os alunos resolveram os problemas propostos na Atividade (5) – Avaliação final, como exercícios de verificação de aprendizagem, apesar de entender ser difícil para os alunos em tão pouco tempo e poucas aulas compreender e aplicar os conceitos da derivada. A atividade final incluiu todo conteúdo de derivada visto nos encontros anteriores, em especial, taxa de variação e aplicações de máximos e mínimos.

<u>Atividade (5) – Avaliação Final</u>

1) A posição s (em metros) em função do instante t (em segundos) de um móvel, que se desloca segundo uma trajetória, é dada por $s(t) = 2t^2 - t + 2$. Determinar:

a) Sua velocidade média no intervalo $1 \leq t \leq 2$.

b) Sua velocidade no instante $t = 2$.

2) Uma frente fria se aproxima de uma região. A temperatura é T graus t horas após a meia noite é $T = 0{,}1.(400 - 40t + t^2)$, com $0 \leq t \leq 12$.

a) Ache a taxa de variação média da temperatura entre *5h* e *6h*.

b) Ache a taxa de variação da temperatura às *5h*.

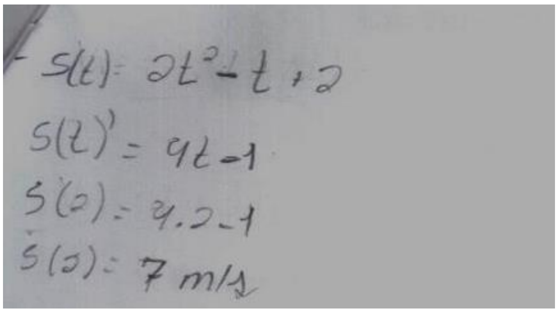
3) Uma peça quadrada de lata com *24 cm* de lado deve ser transformada numa caixa aberta em cima, retirando-se um pequeno quadrado de cada canto e

dobrando-se as abas para formar os lados. De que tamanho devemos cortar o quadrado de cada canto para que o volume da caixa seja máximo?

4) Um sitiante plantou *30* abacateiros e cada árvore produz *100* abacates em média. Pretendendo aumentar o número de árvores o sitiante sabe que cada árvore nova plantada fará diminuir em *2* abacates o número médio produzido pelas árvores. Quantas árvores deverá plantar para obter o número máximo de abacates?

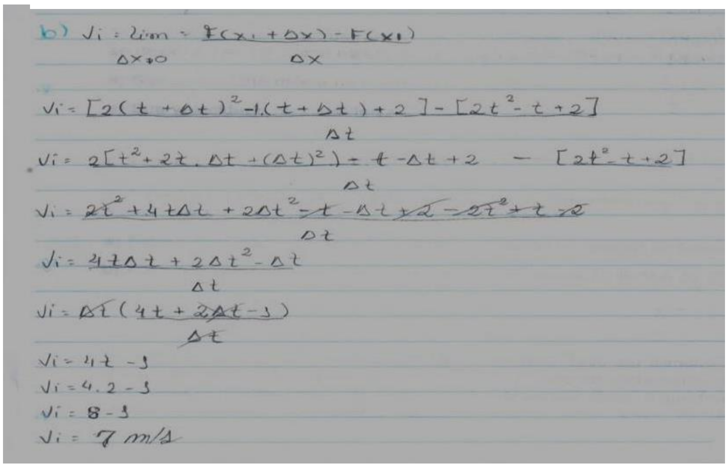
Os alunos utilizaram os conhecimentos e anotações dos encontros anteriores. Não houve intervenção do professor/pesquisador durante a resolução dessa atividade. O resultado da Atividade (5) – Avaliação final mostrou um índice de 80% de acerto e foi considerado muito bom, pois, mesmo sem a ajuda do professor/pesquisador em cada uma das quatro questões da atividade, houve oito acertos e apenas dois erros. Mesmo assim, os erros ocorreram mais por falta de atenção dos alunos. Pela Figura 24, vemos a resolução da letra (b) da questão 1, que se trata de derivada. A maioria dos alunos resolveu por meio das regras de derivação e um aluno Figura 25, resolveu através da taxa de variação instantânea – TVI e, em ambos os casos, chegaram à resposta correta. Percebemos, pela Figura 26, que um dos dois alunos que errou a questão soube derivar, mas, ao invés de substituir o t por 2, igualou a função derivada a zero.

Figura 24 – Resolução correta da questão 1 por derivação



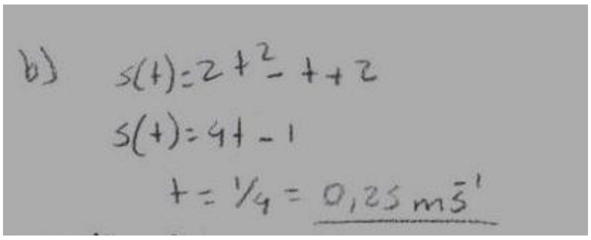
Fonte: O autor

Figura 25 - Resolução correta da questão 1 por TVI



Fonte: O autor

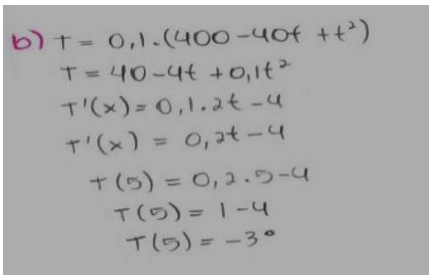
Figura 26 - Resolução errada da questão 1



Fonte: O autor

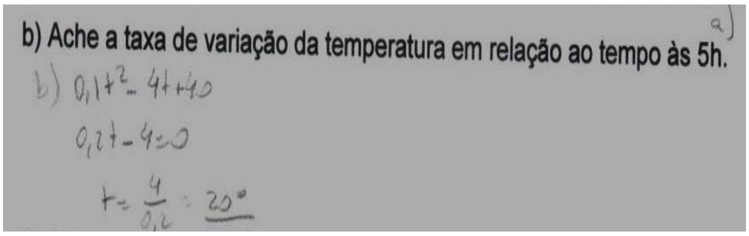
Na Figura 27, observa-se a correta resolução da letra (b) da questão *2* de um dos alunos que resolveu a multiplicação e depois derivou a função T. Já na Figura 28, vemos que o mesmo aluno que, na questão anterior, derivou corretamente, mas não substituiu o t, cometeu o mesmo erro nessa questão, fez a derivada e igualou a zero, quando deveria ter substituído o t por *5*. Pela Figura 29, percebemos que o outro aluno que errou a questão, não derivou, simplesmente substituiu o t por *5* sem derivar.

Figura 27 – Resolução correta da questão 2



Fonte: O autor

Figura 28 – Uma resolução errada da questão 2


b) Ache a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo às 5h.

a)

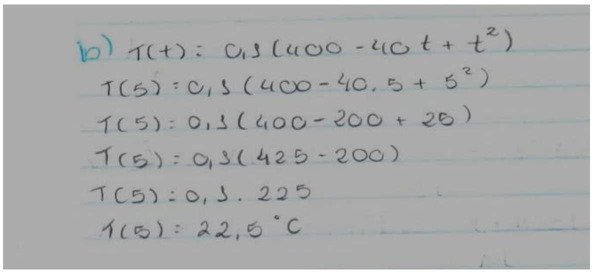
b) $0,1t^2 - 4t + 40$

$0,2t - 4 = 0$

$t = \frac{4}{0,2} = \underline{20°}$

Fonte: O autor

Figura 29 - Outra resolução errada da questão 2


b) $T(t) = 0,1(400 - 40t + t^2)$

$T(5) = 0,1(400 - 40.5 + 5^2)$

$T(5) = 0,1(400 - 200 + 25)$

$T(5) = 0,1(425 - 200)$

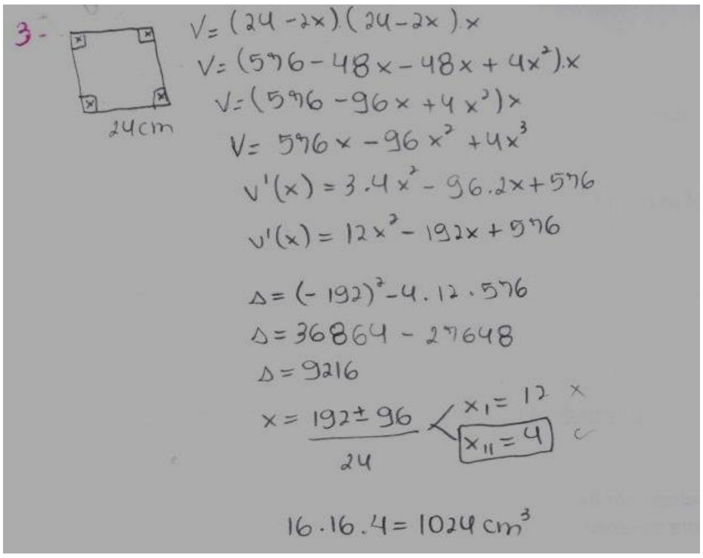
$T(5) = 0,1 . 225$

$T(5) = 22,5 °C$

Fonte: O autor

Pela Figura 30, é possível ver a correta resolução da questão 3 de um aluno; já na Figura 31, vemos a resolução de um aluno que errou a questão. Nesta questão, o aluno deveria montar a função e derivar. O aluno que errou não soube escrever a função, apesar de ter derivado corretamente a função que escreveu.

Figura 30 - Resolução correta da questão 3


3-

24cm

$V = (24 - 2x)(24 - 2x).x$

$V = (576 - 48x - 48x + 4x^2).x$

$V = (576 - 96x + 4x^2)x$

$V = 576x - 96x^2 + 4x^3$

$V'(x) = 3.4x^2 - 96.2x + 576$

$V'(x) = 12x^2 - 192x + 576$

$\Delta = (-192)^2 - 4.12.576$

$\Delta = 36864 - 27648$

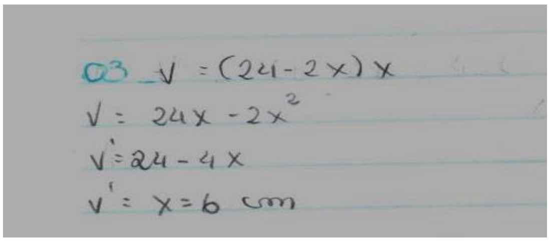
$\Delta = 9216$

$x = \frac{192 \pm 96}{24}$, $x_1 = 12$, $\boxed{x_{11} = 4}$

$16.16.4 = 1024\ cm^3$

Fonte: O autor

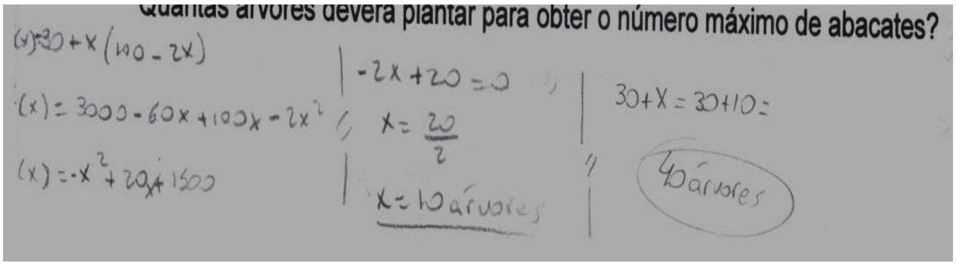
Figura 31 - Resolução errada da questão 3



Fonte: O autor

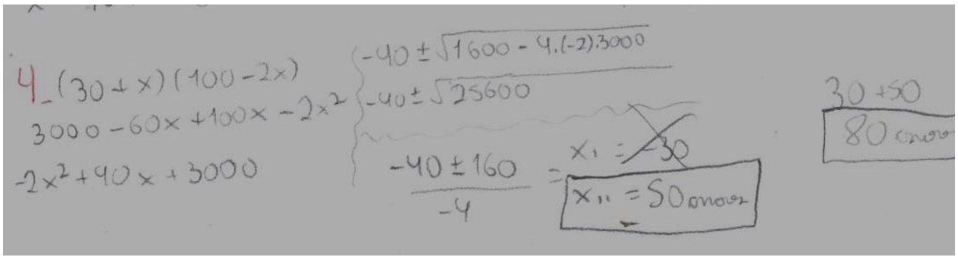
Na Figura 32, percebemos a correta resolução da questão 4 de um aluno; já na Figura 33, vemos a resolução de um aluno que errou. Ambos os alunos montaram corretamente a função do problema, o que acertou derivou e encontrou a raiz da derivada, o aluno que errou encontrou as raízes da função sem fazer a derivada.

Figura 32 - Resolução correta da questão 4



Fonte: O autor

Figura 33 - Resolução errada da questão 4



Fonte: O autor

Os alunos resolveram a atividade em 2 h/a. Na terceira hora do encontro, os alunos responderam a um questionário para levantamento de dados a respeito da opinião dos participantes, em seguida, o professor/pesquisador agradeceu o carinho, a boa vontade e dedicação dos alunos e finalizou o encontro com uma lembrancinha e uma mensagem de incentivo aos estudos e busca de novas descobertas para cada aluno participante da pesquisa.

5.4 – Resultados do questionário

Após a análise dos encontros, observações, registros e resultados das atividades propostas, demos atenção aos registros no questionário respondido pelos alunos no último encontro, e verificaram-se os seguintes resultados.

1) Qual a sua idade? Sete alunos responderam ter 16 anos e três alunos responderam ter 17 anos.

2) Qual o seu sexo? Sete alunos responderam ser do sexo feminino e três alunos responderam ser do sexo masculino.

3) Você já tinha ouvido falar de derivada? Nove alunos disseram ter sido a primeira vez que ouviu falar em derivada e um aluno disse já ter visto derivada na internet.

4) Dê uma nota de 0 (zero) mínimo a 10 (dez) máximo, para cada item abaixo:

a) As explicações foram claras e objetivas? Seis alunos deram nota 10, três deram nota 9 e um aluno deu nota 8.

b) A sequência didática facilitou a aprendizagem? Nove alunos deram nota 10 e um aluno deu nota 9.

c) Os problemas propostos em cada atividade estavam de acordo o que foi explicado? Nove alunos deram nota 10 e um aluno deu nota 9.

d) A ideia de derivada apresentada no quadro ficou clara? Sete alunos deram nota 10, dois alunos deram nota 9 e um aluno deu nota 8.

e) Os problemas propostos em cada atividade ajudaram a compreender melhor a ideia de derivada e entender sua aplicação? Sete alunos deram nota 10, dois alunos deram nota 9 e um aluno deu nota 8.

5) O que achou mais interessante das aplicações de derivada? Justifique: Cinco alunos responderam que o mais interessante foi a taxa de variação instantânea. Dentre as justificativas apareceram, ter duas opções de resolução e saber a variação de uma função em qualquer ponto. Cinco alunos responderam que o mais interessante foi máximo e mínimo. Dentre as justificativas apareceram, são problemas mais usados no dia a dia, ser mais fácil de entender e ter mais aplicações.

6) A ideia da reta tangente em um determinado ponto da função ficou: Para cinco alunos a ideia ficou clara e para os outros cinco não ficou tão clara assim.

7) Os problemas de derivada envolvendo taxa de variação instantânea foram: Para nove alunos foram bastante interessantes e para um aluno foi pouco interessante.

8) Os problemas de derivada envolvendo máximos e mínimos foram: Todos os dez alunos acharam os problemas de máximos e mínimos bastante interessantes.

9) Os encontros atenderam suas expectativas? Todos os dez alunos responderam que sim, ou seja, tiveram suas expectativas atendidas.

10) Dê uma nota de 0 (zero) mínima a 10 (dez) máxima para sua participação nos encontros: Um aluno lhe atribuiu nota 10, cinco deram nota 9 e quatro alunos deram nota 8 para sua participação.

11) Cite pontos positivos dos encontros: Dentre os pontos apontados pelos alunos, destacamos: explicação detalhada do conteúdo; exercícios práticos; número reduzido de alunos; esclarecimento das dúvidas; vai ajudar no vestibular; aperfeiçoamento do conhecimento e aumentou o interesse pela matemática.

12) Cite pontos negativos dos encontros: Dentre os pontos apontados pelos alunos, destacamos: poucas aulas; tempo corrido; poucos encontros; muito calor; época inoportuna e barulho dos alunos do vespertino.

13) Você acredita que a derivada possa ser ensinada no ensino médio? Justifique: Nove alunos disseram que sim e justificaram, facilita na resolução de problemas; é de fácil entendimento; já está dentro dos estudos de funções. Um aluno disse que não e justificou dizendo que acredita que a maioria dos alunos têm dificuldades básicas da matemática e não iriam compreender a derivada.

14) Use as linhas abaixo para fazer considerações que julgar necessário: Três alunos deixaram as linhas em branco, os outros disseram: valeu a pena, pois, a derivada é um conteúdo tranquilo; é de fácil entendimento, aumentou meus conhecimentos; é uma matéria interessante e útil na física; adquiri novos conhecimentos de uma matemática que eu não conhecia e facilitou o entendimento de máximos e mínimos.

6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo como objetivo do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – o aperfeiçoamento de professores de matemática da educação básica em conteúdos e em pesquisa, de modo que, ao final, na dissertação, apresentem sugestões que apontem caminhos para um melhor ensino da disciplina de forma a contribuir com a plena formação do aluno, realizou-se o presente trabalho com a intenção de propor uma discursão a respeito da possibilidade de ensinar noções de Derivada no Ensino Médio juntamente com o estudo das funções polinomiais sem alteração no plano curricular das escolas, de modo a melhorar a compreensão dos alunos nos problemas de aplicações das funções e, futuramente, elevar os índices de aprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I dos cursos das ciências exatas e tecnológicas, cabendo ao professor de Matemática do Ensino Médio apresentar os conceitos de Derivada de maneira sutil, ou seja, de forma intuitiva.

Para tanto, fez-se um estudo das novas tendências do ensino e da aprendizagem por meio das concepções de pensadores como Piaget e Vygotsky, bem como, pesquisou-se sobre a metodologia baseada na resolução de problemas, uma vez que a proposta em trabalhar com a derivada se deu de forma centrada na aplicação de problemas do cotidiano que apresentem máximos e mínimos. Em razão da abrangência do assunto Derivada, optou-se por trabalhar as noções de forma intuitiva, ou seja, não se utilizou o conceito de limite para definir a Derivada por acreditar que, além de demandar muito tempo no currículo de Ensino Médio, há uma escassez de aplicações em problemas. Definiu-se a Derivada como taxa de variação para as funções de 1º grau e para as demais funções polinomiais utilizou-se a noção de variação instantânea, em que foi possível mostrar aplicações na física e consolidou-se a definição com a ideia de reta tangente em um determinado ponto da curva que representa a função. A partir daí, foram apresentadas regras básicas de modo a tornar a derivação mais simples e rápida. Aplicaram-se as noções de Derivada no estudo de intervalos crescente e decrescente, em pontos de máximo e mínimo relativo e, consequentemente, em problemas de otimização. De modo que possibilitou-se ao aluno do Ensino Médio conhecer um pouco desta importante ferramenta da matemática chamada derivada.

A proposta apresentada não é de incluir o conteúdo de Derivada, muito menos retornar com a disciplina de Cálculo no Ensino Médio e, sim, como foi dito, é apenas apresentar as noções de Derivada de forma intuitiva aplicadas em problemas de máximos e mínimos, pois uma das ideias deste trabalho sempre foi de aprimorar o conhecimento matemático dos alunos que, em breve, estarão em cursos superiores, principalmente, nos cursos das ciências exatas e tecnológicas e melhorar o índice de aprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, que conforme constatou-se em pesquisa, apresenta índices altíssimos de reprovação.

No decorrer dos encontros da pesquisa, observamos o alto nível de interesse e participação dos alunos em anotar, perguntar e até mesmo auxiliar os colegas nas explicações. Com as resoluções das atividades (1) e (3), que tinham finalidade de fixação, os alunos puderam tirar as duvidas e melhor compreender as noções de Derivada. Com as resoluções das atividades (2) e (4), que tinham finalidade de verificação da aprendizagem das noções de Derivada, o índice de acerto foi de 77,5%, já na atividade (5) – avaliação final, o índice de acerto foi de 80%. Esses dados sugerem que é viável a inclusão das noções de Derivada no Ensino Médio, uma vez que, com poucas aulas, os alunos conseguiram assimilar de forma positiva e satisfatória, mesmo acreditando que os alunos participantes tenham afinidade com a matemática. Com relação à opinião dos alunos, expressas no questionário, eles afirmaram que a metodologia adotada por meio da resolução dos problemas propostos nas atividades contribuiu para melhor compreensão da Derivada. Metade dos alunos preferiu os problemas de variação instantânea e a outra metade preferiu os problemas de otimização e os alunos avaliaram os encontros de forma positiva de modo a atender as expectativas. Citaram como pontos positivos o tipo de exercícios por meio de problemas, melhor aprimoramento dos conhecimentos prévios de função e aumento do interesse para estudar matemática e como pontos negativos dos encontros o número reduzido de aulas, o tempo corrido, o calor, o cansaço e o barulho externo – dos alunos do turno vespertino da escola. Quando perguntado se acreditam que a Derivada possa ser ensinada no Ensino Médio, a resposta de nove dos dez alunos foi que sim e justificaram dizendo facilitar na resolução de problemas, ser de fácil entendimento e já estar dentro dos estudos de funções. Ainda afirmaram que a Derivada é um conteúdo tranquilo e de fácil entendimento e útil na física e na matemática.

Tudo isso nos permite perceber que a Derivada é uma ferramenta capaz de aprofundar o conhecimento e o interesse dos alunos pelo estudo das funções e, consequentemente, ao ingressarem em uma universidade, estarem mais habilitados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, uma vez que demonstrou-se a interpretação dos conceitos de Derivada, verificaram-se elementos que comprovam a sua compreensão e evidenciou-se a completa analise do processo de resolução dos problemas relacionados à taxa de variação instantânea e a máximos e mínimos. E finalmente, conclui-se que foi possível analisar, discutir e propor estratégias de modo a abordar o conceito intuitivo da Derivada e suas aplicações no Ensino Médio.

Conforme dados da pesquisa realizada neste trabalho, viu-se e deduz-se ser viável inserir de forma intuitiva as noções de Derivada para alunos do Ensino Médio, no entanto há várias possibilidades de continuidade de estudo do tema em pesquisas futuras de modo a produzir novas perspectivas e contribuições para um amplo e eficaz processo de ensino e aprendizagem das aplicações da Derivada. Assim, seria interessante, em futuras pesquisas, realizar um estudo mais detalhado da representação gráfica da Derivada, fazer aplicações da Derivada em problemas de geometria, construir gráficos de funções polinomiais a partir das Derivadas, elaborar aplicações da Derivada em funções trigonométricas; aplicar a Derivada em problemas relacionados a outras disciplinas e a outros cursos e utilizar softwares de matemática para o estudo, compreensão, construção e aplicações da Derivada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALCARÁ, A.R; GUIMARÃES, S.E.R. **A instrumentalidade como uma estratégia motivacional.** Revista da ABRAPEE, Volume II, Nº. I, São Paulo/SP, 2007.

ARAÚJO, S. X. S. **Uma introdução ao estudo de derivadas no ensino médio.** Dissertação de mestrado – PROFMAT – UFERSA – Mossoró/RN, 2016.

ÁVILA, G. **Limites e derivadas no ensino médio?** In: Revista do Professor de Matemática, nº 60, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro/RJ, 2006.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Tradução: Elza F. Gomide – 2ª edição – São Paulo/SP, Edgard Blucher, 1996.

BRANCA, N. A resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo/SP, Atual, 1997.

BRASIL. **Decreto nº 981 de 8 de novembro de 1890**. Approva o Regulamento da Instrucção Primaria e Secundaria do Districto Federal. Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1824-1899/decreto-981-8-novembro-1890-515376-publicacaooriginal-1-pe.html Acessado em 27/12/2017

______. **Decreto nº 4.244 de 9 de abril de 1942**. Lei orgânica do ensino secundário. Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9-abril-1942-414155-publicacaooriginal-1-pe.html Acessado em 27/12/2017

______. **Decreto nº 19.890 de 18 de abril de 1931**. Dispõe sobre a organização do ensino secundário. Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19890-18-abril-1931-504631-publicacaooriginal-141245-pe.html Acessado em 27/12/2017

______. **Decreto nº 21.241 de 4 de abril de 1932**. Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e dá outras providências. Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-21241-4-abril-1932-503517-publicacaooriginal-81464-pe.html Acessado em 27/12/2017

______. **Lei nº 8.069 de 13 de junho de 1990**. Dispõe sobre o estatuto da criança e do adolescente e dá outras providencias. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/Ccivil_03/leis/L8069.htm Acessado em 25/09/2017

_______. **Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm Acessado em 27/10/2017.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCNEM). Brasília/DF, MEC, 2000.

BRITO, R.M.C. **O professor, a aprendizagem significativa e a avaliação: base para o sucesso escolar do aluno.** Disponível em http://www.anpae.org.br/seminario/ANPAE2012/1comunicacao/Eixo03_38/Rosa%20Maria%20Cavalcanti%20Brito_int_GT3.pdf Acessado em 27/09/2017.

CARRETERO, M. **Construtivismo e educação.** Tradução: Jussara H. Rodrigues – 2ª edição – Porto Alegre/RS, Artmed, 2002.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues – 5ª edição – Campinas/SP, Unicamp, 2011.

FERREIRA, A. B. H. **Mini Aurélio – O minidicionário da língua portuguesa.** – 4ª edição – Rio de Janeiro/RJ, Nova Fronteira, 2001.

FLEMMING, D.M; GONÇALVES, M.B. **Cálculo A**, 6ª edição – Florianópolis/SC, Pearson, 2006.

FOSSILE, D.K. **Construtivismo versus sócio-interacionismo: uma introdução às teorias cognitivas.** Revista ALPHA, UNIPAM, 2010.

GAGLIOLI, M.A. **Derivada como taxa de variação: uma abordagem com base no currículo do ensino médio.** Dissertação de mestrado – Campinas/SP, 2015.

GENTIL, N. et al., **Matemática para o 2º grau**, 5ª edição – São Paulo/SP, Ática, 1996.

GIOVANNI, J. R; BONJORNO, J. R. **Matemática uma nova abordagem**. Volume 3. São Paulo/SP, FTD, 2002.

GODINHO, L. M. **Cálculo no ensino médio: uma proposta para o ensino de derivada na primeira série.** Dissertação de mestrado – PROFMAT – Rio de Janeiro/RJ, 2014.

JÓFILI, Z. **Piaget, Vygotsky, Freire e a construção do conhecimento na escola.** Artigo – PUC/PE, 2002.

KANTOWSKI, M. G. Algumas considerações sobre o ensino para a resolução de problemas. In: **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo/SP, Atual, 1997.

LEBLANC, J. F. Ensinando resolução de problemas na elementary school. In: **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo/SP, Atual, 1997.

MASSUCATO, M; MAYRINK, E. D. **Qual a diferença entre problema e exercício?** Disponível em: https://gestaoescolar.org.br/conteudo/1504/qual-a-diferenca-entre-problema-e-exercicio Acessado em 16/11/2017

MOREIRA, M.A. **O que é afinal aprendizagem significativa?** (After all, what is meaningful learning?) Artigo - Revista Qurriculum, La Laguna, Espanha, 2012.

MUNEM, M.A; FOULIS, D.J. **Cálculo**. Volume 1. Rio de Janeiro/RJ, Guanabara, 1982.

MUSSER, G. L; SHAUGHNESSY. J.M. Estratégias de resolução de problemas na matemática escolar. In: **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

NEVES, R.A; DAMIANI, M.F. **Vygotsky e as teorias da aprendizagem.** Revista UNIREVISTA, UFPEL, Pelotas/RS, 2006.

OLIVEIRA, G. G. **Neurociências e os processos educativos: um saber necessário na formação de professores.** Revista Educação Unisinos. volume 18, número 1, janeiro • abril 2014.

PEREIRA, L.C. **Construtivismo.** Disponível em: https://www.infoescola.com/educacao/construtivismo/ Acessado em 25/09/2017

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Tradução: Heitor L. de Araújo. Rio de Janeiro/RJ, Interciência, 1995.

RABELO, E; PASSOS, J.S. **Vygotsky e o desenvolvimento humano.** Disponível em: http://www.josesilveira.com/artigos/vygotsky.pdf Acessado em 26/09/2017

RICHARDSON, R.J. **Pesquisa social, métodos e técnicas.** – 3ª edição – São Paulo/SP, Atlas, 1999.

SIMMONS, G.F. **Cálculo com geometria analítica**. Volume 1. Tradução: Seiji Hariki, São Paulo/SP, McGraw-Hill, 1987.

SIQUEIRA, S. **O trabalho e a pesquisa científica na construção do conhecimento.** Governador Valadares/MG, UNIVALE, 2002.

STEWART, J. **Cálculo.** Volume I. Tradução: Antônio Carlos Moretti – 6ª edição – São Paulo/SP, Cengage Learning, 2011.

APÊNDICES

APÊNDICE A – ATIVIDADE (1)

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Autorizada pelo Decreto Estadual nº 7344 de 27.05.98

Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado: " Aplicações de derivadas no ensino médio: uma abordagem de forma intuitiva". **Mestrando:** Paulo César Costa

<u>Atividade (1)</u>

1) Uma bola foi atirada para o alto, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $s(t) = 10t - 4{,}9t^2$. Encontre:

a) Sua velocidade média no intervalo $1 \leq t \leq 2$.

b) Sua velocidade no instante $t = 2$.

2) Uma cidade *X* é atingida por uma epidemia. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela epidemia após um tempo t (medido em dias a partir do 1º dia da epidemia) é dado por $f(t) = 64\,t - \frac{t^2}{2}$. Responda:

a) Qual a variação média de pessoas atingidas nos *50* primeiros dias da epidemia?

b) Qual o número de pessoas atingidas pela epidemia no *64º* dia?

3) Numa granja, constatou-se que uma ave em desenvolvimento pesa em gramas $p(t) = 20 + (t + 4)^2$, onde t $(t \geq 0)$ é medido em dias. Determine:

a) A razão média no aumento de peso nos *100* primeiros dias.

b) A razão do aumento de peso no *100º* dia.

APÊNDICE B – ATIVIDADE (2)

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Autorizada pelo Decreto Estadual nº 7344 de 27.05.98

Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado: " Aplicações de derivadas no ensino médio: uma abordagem de forma intuitiva". **Mestrando:** Paulo César Costa

<u>Atividade (2)</u>

1) Um ciclista desloca em uma trajetória segundo a equação $s(t) = 4t^3$, com s em quilômetros e t em horas. Determine:

a) Sua velocidade média no intervalo $1 \leq t \leq 2$.

b) Sua velocidade instantânea em $t = 2$.

2) Analistas de produção verificaram que, em uma montadora *X*, o número de peças produzidas nas primeiras t horas de trabalho era $f(t) = 50.(t^2 + t)$, com $0 \leq t \leq 5$.

a) Qual a variação média do número de peças produzidas durante as *5* primeiras horas de trabalho?

b) Quantas peças foram produzidas na *2ª* hora de trabalho?

3) Um reservatório de água está sendo esvaziado para limpeza. A quantidade de água no reservatório em litros, t horas após o escoamento ter começado é dada por $v(t) = 5.(80 - t)^2$. Determinar:

a) A taxa de variação média do volume de água no reservatório durante as *10* primeiras horas de escoamento.

b) A taxa de variação do volume de água no reservatório após *8* horas de escoamento.

APÊNDICE C – ATIVIDADE (3)

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Autorizada pelo Decreto Estadual nº 7344 de 27.05.98

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado: " Aplicações de derivadas no ensino médio: uma abordagem de forma intuitiva". **Mestrando:** Paulo César Costa

Atividade (3)

1) A bola da Copa do Mundo de *2010*, a Jabulani, ficou famosa por sua trajetória inusitada, dificultando bastante a vida dos goleiros. Suponha que os pesquisadores concluíram que, em cobranças de falta a certa distância do gol, a velocidade instantânea da Jabulani seria descrita pela função $v(t) = -\frac{15\,t}{8}.(t-8)$, em que t é o tempo em segundos contado a partir do chute na Jabulani e $v(t)$ é dada em m/s. Determine a velocidade máxima adquirida pela Jabulani.

2) O custo e a receita total com a produção e comercialização de determinado produto é dado, respectivamente, por $c(x) = 600 + 2{,}2x$ e $r(x) = 10x - 0{,}006x^2$. Encontre a quantidade x de unidades produzidas, para que o lucro seja máximo.

3) Abel deseja cercar um pasto em forma retangular para o seu rebanho bovino. Ele dispõe de *1500* metros de tela para o serviço. Ele irá aproveitar uma lateral onde já existe uma cerca e cercar apenas os outros três lados. Quais devem ser as dimensões para que o pasto de Abel tenha a maior área possível?

APÊNDICE D – ATIVIDADE (4)

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Autorizada pelo Decreto Estadual nº 7344 de 27.05.98

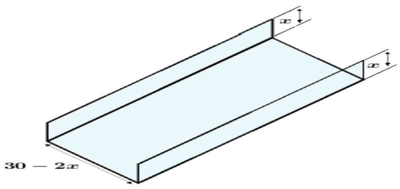
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado: " Aplicações de derivadas no ensino médio: uma abordagem de forma intuitiva". **Mestrando:** Paulo César Costa

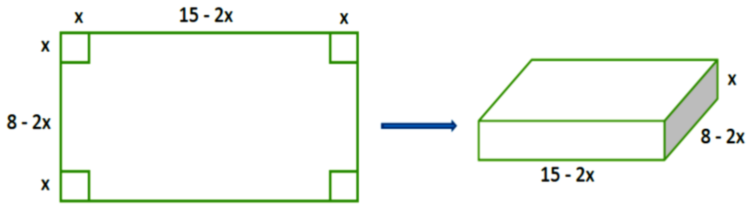
<u>Atividade (4)</u>

1) Um ônibus de *40* lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro *R$20,00* mais *R$2,00* por lugar vago. Qual o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima?

2) De uma lâmina de zinco retangular de *30 cm* de largura deve-se fazer uma calha dobrando as bordas perpendicularmente à lâmina (veja a figura abaixo). Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado, de modo que a calha tenha capacidade máxima?



3) De uma folha de papelão medindo *8 cm* de largura e *15 cm* de comprimento, cortam-se de cada canto quadrados iguais de medida x *cm*. Virando os lados para cima é construída uma caixa sem tampa (veja figura abaixo). Determine o comprimento x dos lados dos quadrados que devem ser cortados para que o volume da caixa seja o máximo.



APÊNDICE E – ATIVIDADE (5) – AVALIAÇÃO FINAL

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Autorizada pelo Decreto Estadual nº 7344 de 27.05.98

Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado: " Aplicações de derivadas no ensino médio: uma abordagem de forma intuitiva". **Mestrando:** Paulo César Costa

Atividade (5) – Avaliação Final

1) A posição s (em metros) em função do instante t (em segundos) de um móvel, que se desloca segundo uma trajetória, é dada por $s(t) = 2t^2 - t + 2$. Determinar:

a) Sua velocidade média no intervalo $1 \leq t \leq 2$.

b) Sua velocidade no instante $t = 2$.

2) Uma frente fria se aproxima de uma região. A temperatura é T graus t horas após a meia noite é $T = 0{,}1.(400 - 40t + t^2)$, com $0 \leq t \leq 12$.

a) Ache a taxa de variação média da temperatura entre *5h* e *6h*.

b) Ache a taxa de variação da temperatura às *5h*.

3) Uma peça quadrada de lata com *24 cm* de lado deve ser transformada numa caixa aberta em cima, retirando-se um pequeno quadrado de cada canto e dobrando-se as abas para formar os lados. De que tamanho devemos cortar o quadrado de cada canto para que o volume da caixa seja máximo?

4) Um sitiante plantou *30* abacateiros e cada árvore produz *100* abacates em média. Pretendendo aumentar o número de árvores o sitiante sabe que cada árvore nova plantada fará diminuir em *2* abacates o número médio produzido pelas árvores. Quantas árvores deverá plantar para obter o número máximo de abacates?

APÊNDICE F – QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Autorizada pelo Decreto Estadual nº 7344 de 27.05.98

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado: " Aplicações de derivadas no ensino médio: uma abordagem de forma intuitiva". **Mestrando:** Paulo César Costa

<u>LEVANTAMENTO DE DADOS SOBRE OS PARTICIPANTES DA PESQUISA</u>

1) Qual a sua idade? _____________

2) Qual o seu sexo? (   ) Masculino   (   ) Feminino

3) Você já tinha ouvido falar de derivada?
(   ) Não. Foi a primeira vez.
(   ) Sim.
Onde?____

4) Dê uma nota de 0 (zero) mínima a 10 (dez) máxima para cada item abaixo:
a) As explicações foram claras e objetivas. Nota (   )
b) A sequência didática facilitou a aprendizagem. Nota (   )
c) Os problemas propostos em cada atividade estavam de acordo o que foi explicado. Nota (   )
d) A ideia de derivada apresentada no quadro ficou clara. Nota (   )
e) Os problemas propostos em cada atividade ajudaram a compreender melhor a ideia de derivada e entender sua aplicação. Nota (   )

5) O que achou mais interessante das aplicações de derivada?
(   ) Variação instantânea.
(   ) Máximos e mínimos.
Justifique: ____

6) A ideia da reta tangente em um determinado ponto, ficou:
(   ) Clara (entendi)
(   ) Mais ou menos (não entendi muito bem)
(   ) Não consegui entender

7) Os problemas de aplicação de derivada envolvendo taxa de variação instantânea foram:
( ) Bastante interessantes
( ) Pouco interessantes
( ) Nada interessantes

8) Os problemas de aplicação de derivada envolvendo máximos e mínimos foram:
( ) Bastante interessantes
( ) Pouco interessantes
( ) Nada interessantes

9) Os encontros atenderam suas expectativas?
( ) Sim, totalmente
( ) Mais ou menos, em algumas partes
( ) Não, esperava outra coisa

10) Dê uma nota de 0 (zero) mínima a 10 (dez) máxima para sua participação nos encontros. Nota ( )

11) Cite pontos positivos dos encontros.
____

12) Cite pontos negativos dos encontros.

13) Você acredita que a derivada possa ser ensinada no ensino médio?
( ) Sim
( ) Não
Justifique:

14) Use as linhas abaixo para fazer as considerações que julgar necessário.

APÊNDICE G – TERMO DE CESSÃO DE USO

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Autorizada pelo Decreto Estadual nº 7344 de 27.05.98

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado: " Aplicações de derivadas no ensino médio: uma abordagem de forma intuitiva". **Mestrando:** Paulo César Costa

TERMO DE CESSÃO DE USO

A Escola Estadual José Gorutuba, de ensinos fundamental e médio, com sede à rua Cirilo Barbosa, 605, centro – Janaúba/MG, denominada cedente neste ato representada pelo seu diretor Clênio dos Santos, matricula 977068-6, e de outro lado, denominado cessionário o SR. Paulo César Costa, têm entre si ajustado o presente termo de cessão de uso, mediante as seguintes condições:

1 - O presente termo tem por objetivo a cessão de uso do laboratório de informática pertencente à cedente em favor do cessionário, que desenvolverá uma pesquisa de cunho científico educacional, intitulada "**Aplicações de derivadas no ensino médio: uma abordagem de forma intuitiva**", sob responsabilidade do professor/pesquisador: **Paulo César Costa**, do curso de **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT** do **Departamento de Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB.**

2 - O presente termo de uso de cessão terá como prazo de validade 7 (sete) dias úteis, sendo do dia 11/09/2017 ao dia 19/09/2017 com dias de duas horas aulas, das 13:00 às 14:40 e dias de três horas aulas, das 13:00 às 15:30.

3 - Constituem obrigações do cessionário

3.1 – Zelar pela integridade do local, conservando-o em perfeito estado.

3.2 – Devolver o local em perfeitas condições, ressalvado o desgaste natural dos bens constantes do local.

3.3 – Permitir a cedente a fiscalização diária do local.

3.4 – Em caso de perda ou dano de qualquer bem constante do local, ressarcir a cedente pelos prejuízos causados.

4 – O presente termo de cessão poderá ser revogado a qualquer momento, desde que em comum acordo por ambas as partes.

5 – E, por estarem justas e acordadas, firmam o presente termo de cessão de uso do laboratório de informática da cedente.

Janaúba/MG, ____ de ________________ de 2017.

_______________________________ _______________________________

Assinatura do Diretor da Escola. Assinatura do Pesquisador

Para mais informações, você poderá entrar em contato com:

Pesquisador: Paulo César Costa / Fone: (38) 9.9103-5149 / e-mail: profpcc@bol.com.br

Orientadora: Alexsandra Oliveira Andrade / e-mail: alexsandra0andrade@gmail.com

Coordenação do PROFMAT - UESB / Fone: (77) 3424-8731 / e-mail: profmat@uesb.edu.br

APÊNDICE H – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIMENTO

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Autorizada pelo Decreto Estadual nº 7344 de 27.05.98

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

PROFMAT

Dissertação de Mestrado: " Aplicações de derivadas no ensino médio: uma abordagem de forma intuitiva". **Mestrando:** Paulo César Costa

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Resolução nº 510, de 07 de Abril de 2016 do Conselho Nacional de Saúde.

O presente termo em atendimento à Resolução 510/16, destina-se a esclarecer ao participante da pesquisa intitulada "**Aplicações de derivadas no ensino médio: uma abordagem de forma intuitiva**", sob responsabilidade do professor/pesquisador **Paulo César Costa**, do curso de **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT** do **Departamento de Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB**, os seguintes aspectos:

Objetivo: Analisar, discutir e propor estratégias para abordar o conceito intuitivo de derivadas no ensino médio, bem como suas aplicações.

Metodologia: Esta pesquisa será realizada em sete encontros presenciais com uns encontros de duas horas/aulas e outros de três horas/aulas.

No primeiro encontro (2 h/a) serão trabalhadas as noções e aplicações das taxas de variação média e instantânea, a derivada como variação instantânea e sua interpretação geométrica.

No segundo encontro (2 h/a) será aplicada uma atividade (1) com três exercícios onde, no primeiro momento os participantes da pesquisa resolveram sozinhos, depois, se necessário haverá intervenção do pesquisador.

No terceiro encontro (3 h/a) será formalizada a ideia e apresentada as regras básicas de derivação e também será aplicada uma atividade (2) com três exercícios.

No quarto encontro (3 h/a) serão apresentadas a ideia de máximos e mínimos relativos e como encontra-los aplicando derivada. Também, serão resolvidos problemas de aplicações relacionados a máximos ou mínimos de uma função.

No quinto encontro (2 h/a) será realizada uma atividade (3) com três exercícios de aplicações de máximos ou mínimos onde, no primeiro momento os participantes da pesquisa resolveram sozinhos, depois, se necessário haverá intervenção do pesquisador.

No sexto encontro (2 h/a) será realizada uma atividade (4) com três problemas relacionados a construção da função e aplicação de máximo ou mínimo.

No sétimo encontro (3 h/a) será aplicada uma atividade (5), intitulada, avaliação final, contendo quatro exercícios e um questionário de pesquisa para o aluno.

Justificativa e Relevância: Estudar esse assunto justifica-se através da tentativa de aprofundar a compreensão e aplicação das funções para os alunos do ensino médio, bem como refletir sobre a falta que o conhecimento da derivada faz para os alunos do ensino médio, principalmente os alunos de escolas públicas**.**

Desconfortos e riscos: Esta pesquisa não apresenta risco a saúde mental ou física, danos ou maleficência de qualquer natureza relacionada a sua participação.

Confidencialidade do estudo: O pesquisador tratará a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você.

Benefícios: Os benefícios desta pesquisa são as possibilidades de aumento do conhecimento científico para área de educação, em especial da Matemática.

Garantia de esclarecimento: Você será esclarecido(a) em todas as formas que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento.

Participação Voluntária: A sua participação é voluntária e a recusa em participar não causará qualquer punição ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira.

Consentimento para participação: Eu estou de acordo com a participação na pesquisa descrita acima. Eu fui devidamente esclarecido(a) quanto os objetivos da pesquisa, aos procedimentos aos quais serei submetido e os possíveis riscos envolvidos na minha participação. O pesquisador me garantiu disponibilizar qualquer esclarecimento adicional a que eu venha solicitar durante o curso da pesquisa e o direito de desistir da participação em qualquer momento, sem que a minha desistência implique em qualquer prejuízo à minha pessoa ou à minha família, sendo garantido anonimato e o sigilo dos dados referentes a minha identificação, bem como de que a minha participação neste estudo não me trará nenhum benefício econômico.

Eu, ________________________________, aceito livremente participar do estudo intitulado "**Aplicações de derivadas no ensino médio: uma abordagem de forma intuitiva**" desenvolvido pelo mestrando **Paulo César Costa**, sob a orientação da Professora **Dra. Alexsandra Oliveira Andrade,** da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB).

Assinatura do(a) Participante ____

Assinatura do(a) responsável legal ____

COMPROMISSO DO PESQUISADOR

Eu discuti as questões acima apresentadas com cada participante da pesquisa. É minha opinião que cada indivíduo entenda os riscos, benefícios e obrigações relacionadas a esta pesquisa.

Janaúba/MG, ____ de ________________ de 2017.

____
Assinatura do Pesquisador

Para mais informações, você poderá entrar em contato com:

Pesquisador: Paulo César Costa / Fone: (38) 9.9103-5149 / e-mail: profpcc@bol.com.br

Orientadora: Alexsandra Oliveira Andrade / e-mail: alexsandra0andrade@gmail.com

Coordenação do PROFMAT - UESB / Fone: (77) 3424-8731 / e-mail: profmat@uesb.edu.br