

**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

**LUANA PAULA GOULART DE MENEZES**

**A ORIENTAÇÃO GEOGRÁFICA E A MEDIÇÃO DO  
TEMPO PELA GEOMETRIA DA POSIÇÃO APARENTE  
DOS ASTROS**

**Maringá**

**2018**

**LUANA PAULA GOULART DE MENEZES**

**A ORIENTAÇÃO GEOGRÁFICA E A MEDIÇÃO DO  
TEMPO PELA GEOMETRIA DA POSIÇÃO APARENTE  
DOS ASTROS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves

**Maringá**

**2018**

Ficha Catalográfica

M543o Menezes, Luana Paula Goulart de.

A orientação geográfica e a medição do tempo pela geometria da posição aparente dos astros / Luana Paula Goulart de Menezes. – Maringá : Universidade Estadual de Maringá - UEM, 2018. 114 f.

Orientador: Dr. Eduardo de Amorim Neves.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá- UEM.

1. Geometria não Euclidiana. 2. Localização geográfica. 3. Astronomia. 4. Instrumentos astronômicos. 5. Interdisciplinaridade. I. Universidade Estadual de Maringá - UEM. II. Título.

(21 ed) CDD: 516.2

Bibliotecária Responsável Inês Gemelli CRB 9/966

LUANA PAULA GOULART DE MENEZES

**A ORIENTAÇÃO GEOGRÁFICA E A MEDIÇÃO DO TEMPO PELA  
GEOMETRIA DA POSIÇÃO APARENTE DOS ASTROS**

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves  
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)



Prof. Dr. Michel Corci Batista  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campo Mourão



Prof. Dr. Thiago Fanelli Ferraiol  
DMA/Universidade Estadual de Maringá



Profa. Dra. Mariana Barroso Moran  
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 13 de março de 2018.

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

*“A Matemática é o alfabeto que Deus usou para  
escrever o Universo”*

Galileu Galilei

## AGRADECIMENTOS

Gratidão é um sentimento que define esse momento de fim de ciclo de estudos. São muitas pessoas que fizeram parte dessa caminhada, mas antes de citá-las gostaria de agradecer a Deus que as colocou em meu caminho e cuidou de cada dia de minha vida. Também sou grata a Nossa Senhora que foi poderosa intercessora de todos os momentos até aqui.

E entre as pessoas, agradeço:

Aos meus pais, José e Jônica, que sacrificaram tantas coisas pela minha vida e sempre incentivaram meus estudos.

Ao meu irmão, Lucas, que sempre acreditou que eu conseguiria chegar até aqui.

Ao meu marido, Vitor, que me apoiou e ajudou pacientemente em muitas reflexões sobre Astronomia e permitiu que os instrumentos que estavam construídos em minha mente se tornassem realidade, além de ser a minha base para todas as horas.

Aos meus sogros Sônia e Aristeu pelo carinho.

A todos os amigos e colegas da turma de 2016, em especial as minhas amigas e companheiras de estudo Érica e Kátia que compartilharam comigo tantos sábados, domingos e feriados, ao Angelo Márcio meu amigo desde a graduação, à Danielli e Cristina pelas discussões de tantos exercícios.

A todos meus professores, em especial: Eduardo Hluchow, que me fez gostar de Física e Matemática, Sirley Vila, melhor professora de História que conheci, Luisa Reino de Português que me ensinou a interpretar e escrever melhor. Aos meus professores de graduação Marcelo Escudeiro Hernandes, Emerson Luiz do Monte Carmelo, Irene Nakaoka

e Carla Montorfano que me deram uma ótima base matemática com suas excelentes aulas. Ao meu orientador de PIBIC, Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco. A todos os professores do PROFMAT, em especial ao orientador deste trabalho Prof. Dr. Eduardo de Amorim Neves pelas preciosas contribuições sempre muito dedicado não apenas com esta dissertação mas também com a coordenação do curso.

Aos professores que foram chefes e coordenadores na UEM, Campus Regional de Umuarama que me ajudaram a organizar meus horários nessa empreitada, em particular agradeço à Juliana Scanavacca, Cristiane Mengue Feniman Moritz, Beatriz Bolanho, Barbara Porciuncula, Edson Alves e Marcelo Marques.

A todas as pessoas que me colocaram em oração, meus sinceros agradecimentos.

# A ORIENTAÇÃO GEOGRÁFICA E A MEDIÇÃO DO TEMPO PELA GEOMETRIA DA POSIÇÃO APARENTE DOS ASTROS

## RESUMO

Este trabalho teve por objetivo introduzir conceitos da Geometria Euclidiana e não Euclidiana de uma maneira menos abstrata, ao relacionar Matemática, Astronomia, História e Geografia em uma proposta que envolveu determinar as coordenadas geográficas de uma localização e determinar as horas ao longo do dia por intermédio de instrumentos antigos. A princípio procuramos instrumentos que fossem simples e capazes de nos ajudar a fazer conexões entre Astronomia e Matemática na determinação da latitude. Para este objetivo selecionamos o Quadrante e o Instrumento de Sombras de Pedro Nunes que nos permitiram fazer uma abordagem usando a geometria dos movimentos aparentes dos astros para a determinação de nossa posição geográfica. Com a latitude em mãos pudemos construir um relógio de Sol Equatorial. Além disso, propomos uma série de atividades para a construção e estudo do tema com o auxílio dos instrumentos e de questões adaptadas da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (OBA) com o objetivo de colocar em prática a interdisciplinaridade e fazer com que os alunos percebam que a ciência não está segmentada.

**Palavras-chave:** Geometria Não Euclidiana; Localização Geográfica; Astronomia; Instrumentos Astronômicos; Interdisciplinaridade.



# GEOGRAPHICAL ORIENTATION AND MEASUREMENT OF TIME BY THE GEOMETRY OF THE APARENT POSITION OF THE ASTROS

## ABSTRACT

This work aimed to introduce concepts of Euclidean and non-Euclidean geometry in a less abstract way, relating mathematics, astronomy, history and geography in a proposal that involved determining the geographical coordinates of a location and determining the hours throughout the day by means of ancient instruments. At first we looked for instruments that were simple and able to help us make connections between Astronomy and Mathematics in determining latitude. For this purpose we selected the Quadrant and Shadow Instrument of Pedro Nunes that allowed us to make an approach using the geometry of the apparent movements of the stars to determine our geographical position. With the latitude in hand we could build an equatorial sundial. In addition, we propose a series of activities for the construction and study of the theme with the help of the instruments and adapted questions of the Brazilian Astronomy and Astronautics Olympiad (OBA), in order to put into practice the interdisciplinarity and make the students realize that science is not segmented.

**Keywords:** Non-Euclidean Geometry; Geographic location; Astronomy; Astronomical Instruments; Interdisciplinarity.

---

## LISTA DE TABELAS

4.1	Altura angular do Sol no Equinócio de Primavera de 2017 . . . . .	86
5.1	Altura angular do Sol . . . . .	101

---

## LISTA DE QUADROS

4.1	Construção do quadrante . . . . .	71
4.2	Determinando a latitude - 1º Caso (GeoGebra) . . . . .	77
4.3	Construção do Instrumento de sombras . . . . .	84

---

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Comprimentos das sombras em diferentes latitudes . . . . .	24
1.2	Stonehenge . . . . .	27
1.3	Descrição de uma estrela $E$ . . . . .	30
2.1	Principais Elementos em Geometria Esférica . . . . .	33
2.2	Distância entre $A$ e $B$ em uma esfera de raio unitário . . . . .	35
2.3	Triedro . . . . .	36
2.4	Construção para a demonstração do Teorema 2.5 . . . . .	37
2.5	Construção para a demonstração do Teorema 2.8 . . . . .	40
2.6	Construção para a demonstração do Teorema 2.10 . . . . .	42
2.7	Construção para a demonstração da lei dos cossenos . . . . .	44
2.8	Construção para a demonstração da lei dos senos . . . . .	46
2.9	Ilustração do Exemplo . . . . .	47
2.10	Fuso Esférico de ângulo $\theta$ . . . . .	49
3.1	Latitude de $A$ (GeoGebra) . . . . .	53
3.2	Coordenadas Geográficas . . . . .	54
3.3	O Movimento de Translação e os Trópicos de Câncer e Capricórnio (Hemisfério Sul) . . . . .	54
3.4	Distância entre Fortaleza e Curitiba (GeoGebra) . . . . .	55

3.5	Distância entre Fortaleza e Curitiba ( <i>Google Maps</i> ) . . . . .	56
3.6	Representação da Esfera Celeste . . . . .	57
3.7	Coordenadas Horizontais . . . . .	58
3.8	Coordenadas do ponto E . . . . .	59
3.9	Coordenadas Equatoriais . . . . .	61
3.10	Constelações do zodíaco . . . . .	62
3.11	Coordenadas Horárias . . . . .	63
3.12	Triângulo de Posição . . . . .	65
4.1	Quadrante . . . . .	70
4.2	Representação geométrica do uso do quadrante para a medição da altura dos astros . . . . .	72
4.3	Determinação da latitude no hemisfério sul . . . . .	73
4.4	Cruzeiro do Sul em Umuarama-PR . . . . .	74
4.5	Latitude e declinação com mesmo sinal . . . . .	76
4.6	Latitude e declinação com sinais opostos . . . . .	79
4.7	Declinação Solar . . . . .	80
4.8	Representação do triângulo retângulo para o cálculo de alturas e distâncias . . . . .	82
4.9	O instrumento de sombras de Pedro Nunes . . . . .	83
4.10	Gráfico com os dados obtidos da altura angular do Sol no Equinócio de Primavera . . . . .	86
4.11	Solstício de Verão (2017) . . . . .	87
4.12	Relógio Equatorial . . . . .	90
4.13	Determinando a reta Norte-Sul . . . . .	91
4.14	Determinando os pontos $O$ e $L$ . . . . .	92
4.15	Determinando o Norte-Sul . . . . .	92
4.16	Relógio Equatorial posicionado . . . . .	93
4.17	Equação do Tempo . . . . .	94
5.1	Ilustração do enunciado . . . . .	99

5.2	Navegante orientando-se pelo Cruzeiro do Sul . . . . .	100
5.3	Determinando as direções cardeais (OBA) . . . . .	103
5.4	Determinando as direções cardeais- Solução (OBA) . . . . .	104

<b>Introdução</b>	<b>17</b>
<b>1 História da Astronomia: Observação dos Astros e Medição do Tempo</b>	<b>20</b>
1.1 Astronomia Egípcia . . . . .	21
1.1.1 Astronomia em Alexandria . . . . .	23
1.2 Astronomia Mesopotâmica . . . . .	26
1.3 Astronomia na Europa . . . . .	26
1.4 Astronomia na América Pré-Colombiana . . . . .	28
1.5 Astronomia na China . . . . .	29
<b>2 Uma introdução à Geometria da Superfície Esférica</b>	<b>32</b>
2.1 Conceitos Elementares da Geometria Esférica . . . . .	32
2.2 Trigonometria Esférica . . . . .	43
2.3 Triângulos Esféricos . . . . .	48
<b>3 Sistemas de Coordenadas Geográficas e Astronômicas</b>	<b>52</b>
3.1 Coordenadas Geográficas . . . . .	52
3.2 Coordenadas Horizontais . . . . .	57
3.3 Coordenadas Equatoriais . . . . .	61
3.3.1 Rodovia no céu . . . . .	62

3.4	Coordenadas Horárias . . . . .	63
3.5	O Triângulo de Posição . . . . .	64
3.5.1	Relações entre a distância zenital ( $z$ ), azimute ( $A$ ), ângulo horário ( $H$ ) e declinação ( $\delta$ ) . . . . .	65
3.5.2	Distância Angular entre estrelas . . . . .	67
<b>4</b>	<b>A construção de instrumentos antigos para a orientação geográfica e a marcação do tempo</b>	<b>69</b>
4.1	O Quadrante . . . . .	69
4.1.1	Construindo o Quadrante . . . . .	70
4.1.2	Medindo a latitude pelos polos . . . . .	72
4.1.3	Cálculo da latitude por intermédio da altura angular do Sol . . . . .	75
4.1.4	O Quadrante como ferramenta no cálculo de alturas e distâncias . . . . .	81
4.2	O instrumento de Sombras . . . . .	82
4.2.1	Construindo o Instrumento de Sombras . . . . .	84
4.2.2	O problema da Longitude . . . . .	88
4.2.3	Determinando a Longitude de Umuarama - PR . . . . .	89
4.3	Um Relógio de Sol Equatorial . . . . .	90
4.3.1	Determinando a direção Norte-Sul . . . . .	91
<b>5</b>	<b>A construção de instrumentos e o estudo da geometria da posição aparente dos astros: uma proposta de atividades</b>	<b>96</b>
5.1	O Quadrante . . . . .	97
5.2	O Instrumento de Sombras . . . . .	101
5.3	Um Relógio de Sol . . . . .	102
	<b>Considerações Finais</b>	<b>106</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>111</b>
	<b>Anexos</b>	<b>114</b>



## INTRODUÇÃO

A astronomia é um assunto que desperta muita curiosidade, seja pelo lado romântico e poético, seja pelas lendas, pela relação com o divino ou explicação científica de seus fenômenos. O fato é que a história nos mostra que o entendimento da astronomia está ligado com o desenvolvimento da ciência e da sociedade como um todo, como podemos observar na evolução das civilizações. No mundo contemporâneo, porém, poucas pessoas param suas rotinas para observar o céu e se questionar a respeito do movimento aparente dos astros e seus fenômenos observacionais mas é notório que apesar do baixo interesse, os estudos de conteúdos relacionados à astronomia conseguem relacionar diversos assuntos em apenas uma abordagem e este é um dos objetivos deste trabalho: no contexto dos movimentos aparentes dos astros relacionar, Matemática, Astronomia, Geografia e História. Deste modo, elaboramos uma estrutura que faz uma interdisciplinaridade entre essas áreas. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2000):

Quando a LDB <sup>1</sup> destaca as diretrizes curriculares específicas do Ensino Médio, ela se preocupa em apontar para um planejamento e desenvolvimento do currículo de forma orgânica, superando a organização por disciplinas estanques e revigorando a integração e articulação dos conhecimentos, em um processo permanente de interdisciplinaridade e transdisciplinaridade (PCNEM, 2000, p. 17).

A interdisciplinaridade também é apontada nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná:

Os conteúdos disciplinares devem ser tratados, na escola, de modo contextualizado, estabelecendo-se, entre eles, relações interdisciplinares e

---

<sup>1</sup>Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

colocando sob suspeita tanto a rigidez com que tradicionalmente se apresentam quanto o estatuto de verdade atemporal dado a eles. Desta perspectiva, propõe-se que tais conhecimentos contribuam para a crítica às contradições sociais, políticas e econômicas presentes nas estruturas da sociedade contemporânea e propiciem compreender a produção científica, a reflexão filosófica, a criação artística, nos contextos em que elas se constituem (DCE, 2008, p.14).

Fazer um planejamento que envolve outras disciplinas não é tarefa fácil. Sabemos que nem todas as cidades no país possuem planetários ou observatórios, além disso, muitos professores não têm formação sobre astronomia e também não possuem tempo para o estudo e elaboração de aulas interdisciplinares. Deste modo, a princípio procuramos instrumentos que fossem simples e capazes de nos ajudar a fazer conexões entre Astronomia e Matemática. Depois de uma revisão da literatura, selecionamos o Quadrante, o Instrumento de Sombras de Pedro Nunes e o Relógio de Sol, com um objetivo simples: determinar as coordenadas geográficas de uma determinada localização e marcar as horas do dia pela posição dos astros.

Com relação a organização, estabelecemos 5 capítulos. No Capítulo 1 fizemos um apinhado dos dados históricos sobre a astronomia em algumas civilizações que se destacaram na observação dos astros e medição do tempo. No Capítulo 2, apresentamos conceitos básicos a cerca da Geometria Esférica, geometria não-euclidiana, que está presente nas diretrizes curriculares da rede pública de Educação Básica do Estado do Paraná como parte do conteúdo estruturante Geometria<sup>2</sup>.

No capítulo 3, fizemos uma abordagem dos sistemas de coordenadas, conceito este que é base de astronomia de posição. Nos Capítulos 4 e 5 dedicamos para os instrumentos, explicitando suas justificativas e sempre que possível apresentando o contexto histórico envolvido. Além disso, propomos uma série de atividades para a construção e estudo de cada instrumento no contexto de várias questões da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (OBA). O principal objetivo dos mesmos é colocar em prática a interdisciplinaridade e fazer com que os alunos percebam que a ciência não está segmentada.

No decorrer deste trabalho utilizamos alguns *Softwares*, a saber, o GeoGebra, o *stellarium*, além do *Astronomy Simulations and Animations (University of Nebraska-Lincoln)* com o objetivo de visualizarmos as construções, o movimento aparente dos astros e demonstrações matemáticas de alguns resultados. Desenvolvemos o trabalho a partir de uma

---

<sup>2</sup> Desdobrado em geometria plana, geometria espacial, geometria analítica e noções básicas de geometria não-euclidiana.

pesquisa bibliográfica em que fizemos um levantamento do histórico do tema e procuramos contradições e atualizações que puderam impulsionar o aprendizado e amadurecimento do mesmo. Segundo Gil (2002) “a principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente”, além disso, como gostaríamos de fazer um estudo histórico a única maneira que podíamos ter acesso a esses fatos era por intermédio de dados bibliográficos.

Enfim, durante o curso de mestrado foram muitos os estudos que nos ajudaram a refletir sobre vários conteúdos e a decidir sobre o tema de pesquisa de modo a atingir a um dos principais objetivos das dissertações do PROFMAT que é o de “versar sobre um tema específico pertinente ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenha impacto na prática didática em sala de aula”.

## CAPÍTULO 1

# HISTÓRIA DA ASTRONOMIA: OBSERVAÇÃO DOS ASTROS E MEDIÇÃO DO TEMPO

O estudo voltado para a compreensão do universo sempre provocou o ser humano e em muitas civilizações pode-se verificar registros das observações do céu vinculados a lendas sobre a origem do universo. Ao longo do tempo, foram elaboradas engenhosas hipóteses sobre o movimento dos astros e suas relações com as estações, localização de um certo ponto da superfície da terra (latitude e longitude) e contagem do tempo. Com a motivação de compreender como ocorreu a evolução do pensamento humano a proposta desse capítulo é apresentar um panorama geral da história da astronomia nas civilizações, que muito contribuiu para a evolução da ciência.

De acordo com Ronan (1987, p. 12), “A ciência tem demonstrado ser uma enorme aventura intelectual”, baseada em dados que podem ser comprovados a ciência não está pronta e acabada e sim em constante construção. Não é baseada apenas em coletas de dados e sim em um sistema de correlação lógica dos fatos que tem atraído adeptos de inúmeras civilizações com um objetivo simples, mas não único, de reunir conhecimento para o cotidiano. Nesse sentido, para solucionar o problema da contagem do tempo, por exemplo, foi usado o céu como relógio ou calendário e conseqüentemente os números foram fundamentais e a astronomia foi um dos primeiros estudos a incorporar à aplicação da matemática.

Para solucionar outro problema, o de medir a distância entre o horizonte, estrelas e Lua (distâncias intocáveis), usava-se o braço esticado e contava-se quantos dedos comportava o espaço entre a Lua e o horizonte ou segurava-se um fio entre as mãos afastadas do corpo

e se media a distância:

[...] Os braços deviam permanecer bem esticados, caso contrário, a resposta não seria fiel. A medida era, portanto, diferente da de um comprimento comum; e este foi o primeiro passo para se medir um ângulo, tipo de avaliação que viria a se tornar de grande importância (RONAN, 1987, v. 1, p. 18).

Na citação feita acima temos uma hipótese, já que não se sabe ao certo quando o homem começou a medir ângulos, o que sabemos é que eram medidos na Mesopotâmia e como a posição dos astros era muito importante no mundo antigo podemos concluir que a medição de ângulos era fundamental. Além disso, os métodos descritos não eram exatos, uma vez que contar a quantidade de dedos entre dois objetos ou usar um fio ocasiona em imprecisão.

No mundo atual, com o avanço dos meios de comunicação e tecnologias, poucas pessoas param para observar o céu e analisar suas variações. Deste modo, a posição dos astros não causa impacto. Para o homem primitivo, porém, observar o céu levantava muitos questionamentos, motivava a imaginação: reunia-se estrelas e as chamavam de objetos do cotidiano e seres mitológicos.

As diversas teorias desenvolvidas a respeito do céu ao longo do tempo refletem as atitudes científicas e veremos um pouco do seu desenrolar nas próximas seções, em que selecionamos algumas civilizações que se destacaram na observação dos astros e medição do tempo.

## 1.1 Astronomia Egípcia

O Egito antigo era uma região localizada nas proximidades do rio Nilo, limitado ao norte pelo mar e, em suas fronteiras, pelo deserto. Sua civilização é citada como sendo conservadora e sem preocupação de expansão, vivendo assim, em um isolamento cultural.

O conhecimento desenvolvido pelos Egípcios muitas vezes é retratado como técnico, sem reflexões filosóficas. Não estavam preocupados com teorias sobre o movimento dos astros, para esse povo, a medição do tempo era importante, talvez por consequência de uma administração eficiente.

Os astrônomos egípcios eram também sacerdotes:

A razão para essa parente falta de preocupação com a natureza do universo físico era que a principal atenção dos sacerdotes-astrônomos estava focalizada em outro assunto; seu interesse residia na vida após a

morte. Isso, por si só justifica os desenhos de Nut, Chu e Geb no papiro Greenfield. Nele podemos observar uma cosmogonia religiosa, uma representação mitológica do princípio do universo. Podemos admitir que os primitivos egípcios tinham sobre a origem do cosmos uma concepção bem mais física: uma inundação original, da qual emergiu uma colina, que trouxe consigo os primeiros seres vivos [...] (RONAN, 1987, v. 1, p. 23).

O interesse dos sacerdotes-astrônomos estava no mundo espiritual e o céu servia para a medição do tempo. Desde do início da civilização, observaram que a inundação do Nilo coincidia com o aparecimento de uma estrela antes do nascer do Sol, no horizonte oriental, tratava-se da estrela Sirius. O nascimento dessa estrela foi considerado o início do ano civil. O primeiro calendário continha 12 meses, com 29 ou 30 dias (vinculado ao ciclo das fases da lua), dando um total de 354 dias, deste modo, houve a necessidade de se acrescentar um mês adicional a cada três, ou algumas vezes, dois anos.

Quando o país passou a ter um sistema administrativo mais rígido, o calendário precisou ser mais preciso. Assim, a solução encontrada pelos egípcios foi um calendário pelas estações do ano, que não tinha acréscimos de meses em intervalos de tempo. O calendário consistia no período entre um solstício de verão e o seguinte, obtendo assim, 365 dias:

O cálculo provavelmente foi feito usando-se uma haste vertical introduzida no solo e observando-se a extensão variável da sombra ao meio dia, a cada dia. À proporção que as estações passam, o Sol ascende cada vez mais alto no céu e a sombra correspondente ao meio dia diminui, até que, no solstício de verão, ela atinge sua extensão mínima; então o Sol começa a descer outra vez e a sombra do meio-dia cresce, até atingir seu maior valor no solstício de inverno [...] (RONAN, 1987, v. 1, p. 25).

Com o novo calendário os egípcios mantiveram a tradição das três estações: a Inundação, a Emersão dos Campos e a Colheita. A duração era, portanto, de 4 meses para cada estação, porém, cada mês tinha 30 dias<sup>1</sup>, o que dava um total de 360 dias, isso implica a necessidade de adicionar os outros 5 dias.

Assim como hoje usamos a lua para determinar a Páscoa, o povo do Egito, também a usava para determinação das datas festivas: mantiveram o uso do calendário lunar, mesmo com adoção do calendário civil. Quando o ano lunar e solar coincidiam, verificava-se que o solar não estava preciso, isso porque o calendário real tem duração de 365 1/4 dias.

Por volta de 2500 a.C., o Egito tinha três calendários, o civil de 365 dias, seu companheiro lunar e o ano lunar original baseado nos nascimentos de Sirius. Provavelmente no

---

<sup>1</sup> As semanas do novo calendário duravam 10 dias.

século V a.C. foi planejado um calendário que conciliava civil e lunar “mas esse constituiu um desenvolvimento tardio, muito posterior ao período clássico da civilização egípcia” (RONAN, 1987, v. 1, p.26).

Com relação a duração do dia, os egípcios construía relógios solares (relógio de sombras):

[...] Tratava-se de uma régua de madeira com inscrições na parte superior das 12 horas do dia. Essa herança da astronomia egípcia passaria aos gregos e romanos e chegaria até o Renascimento, quando foram irremediavelmente substituídos pelos relógios mecânicos (DANHONI NEVES, 2001, p. 45).

A civilização egípcia foi a primeira a dividir um dia em dois períodos de 12 horas, “parece que algum escriba ilustrado estudou o calendário civil e escolheu uma estrela, ou talvez um grupo de estrelas, que nascia exatamente antes da alvorada no primeiro dia de cada uma das semanas de dez dias do ano” (RONAN, 1987, v. 1, p. 26). Depois disso, chamaram de “hora” o intervalo entre o nascer helíaco de um grupo de estrelas e o nascer helíaco do grupo seguinte. Escolheram 12 horas pois correspondia ao movimento das estrelas do nascimento até o desaparecimento durante a noite.

Devido a civilização do Egito antigo ter tido uma estrutura fechada, os conhecimentos sobre astronomia não desenvolveu como a grega. Todavia, podemos notar um grande cuidado e evolução na marcação do tempo, que contribuiu para o desenvolvimento do início da ciência.

### **1.1.1 Astronomia em Alexandria**

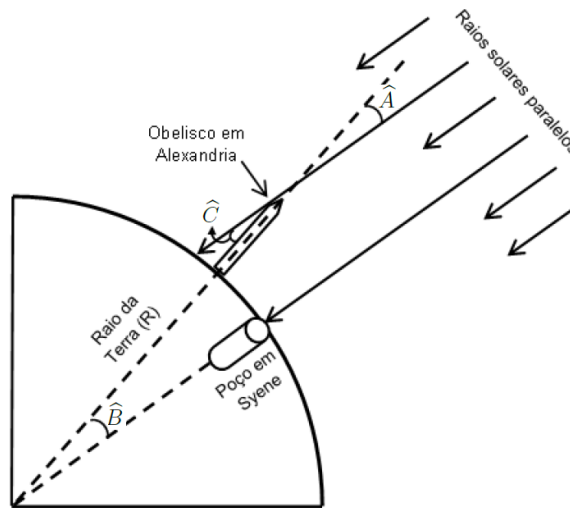
De acordo com Ronan (1987, p. 116), “a independência da Grécia terminou em 338 a.C., com a conquista Macedônica”. Depois de dois anos Filipe da Macedônia foi assassinado e seu filho Alexandre que fora aluno de Aristóteles assumiu o comando do vasto e novo império que levou a cultura grega até a Índia e trouxe influências Orientais para o Ocidente. Com a morte de Alexandre, em 323 a.C., esse império se dividiu em três regiões:

- Grécia e Macedônia;
- Pérsia e Babilônia;
- Egito.

Nessa última estabeleceu a famosa biblioteca de Alexandria que atraiu homens como Eratóstenes, geógrafo e matemático, nascido em Cirene (atual Shahhat, na Líbia). Acredita-se que foi bibliotecário e diretor da Biblioteca Alexandria de 240 a.C. a 194 a.C.. Uma de suas mais conhecidas contribuições foi o tratado, *Geografia* que permaneceu como um trabalho padrão durante um longo tempo.

Em Siena (grafada em grego como Syene), Eratóstenes verificou no solstício de verão (aproximadamente 21 de junho no hemisfério norte), que um poço era iluminado até o fundo, em compensação, em Alexandria, observou no ano seguinte no mesmo dia e horário que havia sombra ao fincar uma vara vertical (gnômon) no solo ou obeliscos de acordo com algumas referências. Isso intrigou Eratóstenes, pois como seria possível de que em Siena o Sol incidia na vertical, não havendo sombra, e Alexandria sim? A conclusão foi de que tal observação seria impossível em uma Terra que fosse plana.

Figura 1.1: Comprimentos das sombras em diferentes latitudes



Fonte: Prova nível 4 - XVI OBA (2013).

Com as verificações escritas acima, se a altura angular do Sol fosse medida em Alexandria, ao mesmo tempo, no mesmo dia, esse ângulo permitiria determinar a diferença de latitude entre as duas localizações. Segundo Ronan (1987):

A diferença mostrou ser de quase  $7 \frac{1}{4}$  graus, isto é,  $\frac{1}{50}$  da circunferência da Terra. Eratóstenes, em seguida, fez medir a distância entre Siena e Alexandria, provavelmente por um *bemetatistes*, agrimensor treinado em andar a passos iguais. Em todo caso, parece ter usado um valor arredondado de 5000 estádios, o que lhe deu, então  $50 \times 5000$  ou 250000 estádios para a circunferência da Terra, embora algumas fontes digam



que adotou 252000 estádios, equivalentes a 46660 quilômetros, um valor bem próximo ao valor moderno da circunferência polar da Terra, de 39941 quilômetros [...] (RONAN, 1987, v. 1, p. 125).

O tratado, *Geografia* de Eratóstenes, foi o primeiro livro a tentar dar uma base matemática à geografia, apresentando um modelo de globo para a Terra e dividindo a mesma em zonas.

A argumentação de que a Terra se move em torno do Sol, foi feita pela primeira vez por Aristarco de Samos (310-230 a.C.) antecipando Copérnico em quase 2000 anos. Aristarco, foi um astrônomo e matemático grego, que entre muitos feitos, desenvolveu um método para determinar as distâncias relativas do Sol e da Lua à Terra e mediu os tamanhos relativos da Terra, do Sol e da Lua.

Por fim, chegamos a um dos maiores astrônomos da era pré-cristã: Hiparco de Nicéia. Ele foi responsável por construir um observatório na ilha de Rodes e com instrumentos de sua época, como por exemplo, a esfera armilar, astrolábio e o *dioptra* catalogou a magnitude e posição de 850 estrelas. Suas medidas dos tamanhos e distâncias do Sol e da Lua foram mais precisas do que as de Aristarco. Hiparco usou um eclipse total do Sol que aconteceu em 190 a.C. e conseguiu que o observassem em dois lugares com mesmo meridiano: Alexandria, no qual a lua escureceu 80% do Sol e em Helesponto em que a Lua o cobriu completamente. Isso ocorreu pois a Lua está bem mais próxima de nós do que o Sol e sua posição em lugares distintos muda. Conhecendo as diferentes latitudes dos dois lugares, Hiparco verificou que a distância da Lua devia ser mais de 59 vezes e menos que  $67 \frac{1}{3}$  vezes o raio da Terra, sendo que o valor correto é 60. Um outro fato surpreendente, sobre seu trabalho foi o cálculo da duração do ano com uma margem de erro de apenas 6 minutos.

Contudo, foi no mundo muçulmano que parte do conhecimento de astronomia e matemática realizado pelos estudiosos de Alexandria foi preservado e recuperado, posteriormente na Europa Medieval. Acredita-se que o objetivo de sua biblioteca era o de reunir “os livros de todos os povos da terra”, disponibilizando obras traduzidas para o grego e muitas outras línguas. A fama moderna da biblioteca, no entanto, reside no incêndio que ainda não conhecemos as causas, o que sabemos é que além do conhecimento que permaneceu no mundo muçulmano, foram salvos também alguns manuscritos que foram levados por sábios.

## 1.2 Astronomia Mesopotâmica

Onde hoje se localiza o Iraque, a Mesopotâmia (terra entre os rios Tigre e Eufrates) é conhecida como sendo um dos berços da civilização humana. Na astronomia, podemos dizer que criaram a observação científica. Ao contrário dos egípcios, preocupavam-se com o movimento dos astros, para eles o Sol se movia pelo céu durante o dia e sob a Terra durante à noite e o mesmo se atribuiu a Lua.

Com base nas observações chegaram a deduzir que o brilho da Lua era reflexo da luz do Sol e que o movimento dos planetas tinham órbitas próximas da eclíptica.

Anotavam as posições dos planetas ao alvorecer, pôr-do-sol e também em horas específicas como o ponto máximo no céu, construindo tabelas detalhadas que permitiam prever movimentos futuros e conjecturar sobre as velocidades variáveis dos astros:

[...] Suas primeiras tentativas de prever os movimentos do Sol, por exemplo, baseavam-se na suposição de que ele tinha duas velocidades: maior no inverno e menor no verão. Mais tarde, entre 181 e 49 a.C., após acumular mais experiência através de observações, chegaram à conclusão de que haviam supersimplificado a questão. De fato, a mudança de velocidade do Sol através do céu era feita gradativamente [...] (RONAN, 1987, v. 1, p. 25).

O conhecimento desenvolvido pelas civilizações que habitaram a Mesopotâmia ficou perdido até que recentemente foram encontrados plaquetas cuneiformes contendo textos astronômicos e matemáticos.

## 1.3 Astronomia na Europa

Estudos mostram que as primeiras contribuições à astronomia ocorreram na Babilônia e também em outras regiões que aprimoraram o conhecimento por meio das rotas comerciais e relatos de viajantes. Uma dessas regiões foi a China e também em partes da Europa. Nesta última, podemos encontrar um monumento antigo conhecido no mundo todo: a *Stonehenge* que quer dizer “pedra pendurada” (ver Figura 1.2).

Uma hipótese aceita é que este monumento, localizado na Inglaterra, trata-se de um observatório, podendo se obter informações por meio da observação de astros de determinadas épocas do ano, como os dias de equinócios e solstício. Acredita-se também que a disposição de um dos anéis de pedra tinha o objetivo de calcular eclipses e alguns sinais de algumas pedras indicam que possuíam um calendário com 365 dias, divididos em 17

meses solares. A *Stonehenge* é apenas uma de uma série de outros monumentos espalhados na Grã-Bretanha e na Bretanha que indicam que formaram uma civilização muito inteligente.

Figura 1.2: Stonehenge



Fonte: Fotografia de Simon Wakefiel<sup>2</sup>.

Houve uma outra civilização na Europa que muito afetou a cultura do mundo ao divulgar suas ideias filosóficas sem apelar à magia ou superstições, trata-se da civilização grega.

Os estudos realizados pelos gregos afetou profundamente o mundo em que vivemos, uma vez que buscavam explicações lógicas da natureza que podiam manter-se por si mesmas. Na astronomia destaca-se grandes nomes, como por exemplo Tales de Mileto que nasceu por volta de 624 a.C., de pais que podem ter sido originários da Fenícia. Foi estadista, matemático, astrônomo, negociante e um dos “sete sábios” tradicionais da Grécia antiga. Sua fama baseia-se principalmente na sua astronomia. Para ele a Terra era como um disco plano em uma vasta extensão de água, usando essa ideia para explicar os terremotos afirmando que estes começavam como erupções de água quente, dando entrada para o que seria a ciência grega: construída com base nas deduções de teorias a partir da observação e experiência.

Um outro ilustre estudioso da civilização grega foi Aristóteles (384-322 a.C.), aluno de Platão. Entre seus grandes feitos está a explicação de que as fases da Lua dependiam de

---

<sup>2</sup> Disponível em: <<https://www.flickr.com/photos/simonwakefiel/3149066878/>> Acesso em out. 2017.

quanto da parte da face da Lua iluminada pelo Sol está voltada para a Terra. Explicou também que um eclipse do Sol ocorre quando a Lua passa entre a Terra e o Sol e um eclipse da Lua ocorre quando a Lua entra na sombra da Terra. Aristóteles argumentou que a Terra era esférica, já que a sombra da Terra na Lua durante um eclipse lunar é sempre arredondada e além disso, defendia a ideia de um Universo esférico e finito.

## 1.4 Astronomia na América Pré-Colombiana

Até a chegada dos Europeus à América, os povos pré-colombianos desenvolveram uma civilização organizada na economia e cultura, chegando a formar impérios grandiosos. Porém, com a chegada dos colonizadores, foram explorados, perderam suas terras e o que tinham de mais precioso: a identidade cultural.

Descreveremos a seguir aspectos da astronomia praticada nas civilizações Maias, Astecas e Incas, destacando seus principais avanços conhecidos pelos historiadores.

### Civilização Maia

Os conhecimentos astronômicos dos maias eram muito avançados sendo uma das partes principais da cultura, como observamos, por exemplo, que locais destinados a astronomia ocupavam as áreas centrais das cidades. Por motivos astrológicos, a Lua, o Sol e Vênus eram constantemente observados:

Cruzando a matemática com a observação, os maias conseguiram conhecer, com uma precisão espantosa, a duração dos ciclos lunar, solar e do planeta Vênus. Eles calcularam que Vênus passa pela Terra a cada 583,935 dias – algo espantosamente próximo do número considerado correto hoje, que fica entre 583,920 e 583,940. Também definiram que o ciclo lunar dura 29,53086 dias (atualmente os astrônomos falam em 29,54059). Os maias registraram que o Sol completa seu ciclo em 365,2420 dias, enquanto que na atualidade esse número está definido em 365,2422. Com base nesses conhecimentos, eles criaram um conjunto de calendários complexos e interligados que, juntos, formavam um dos sistemas de contagem do tempo mais precisos de sua época (MORETO; SEMPIONATTO, 2011, p. 1-2).

Os maias não deixaram registros sobre seus métodos de cálculos. Deste modo, não podemos afirmar que desenvolveram astronomia científica ou matemática formal.

## **Civilização Asteca**

O povo da civilização Asteca habitou onde hoje se localiza o México. Eram politeístas e a religião estava ligada à ciência. Não há muitas contribuições ao conhecimento, deste povo. No campo da Astronomia, criaram calendários em que podiam prever as épocas de plantio e colheita. Um dos calendários tinha 260 dias e outro 365 dias, sendo ambos derivados da civilização maia.

## **Civilização Inca**

Assim como outras civilizações, os incas possuíam um calendário que ainda há muito a ser compreendido. Sabe-se que tinham um calendário lunar e um baseado nas estações. Segundo Ronan (1987):

O que não está claro é como os dois se relacionavam, mas, pelo menos em uma área inca, cada terceiro ano ligado às estações era constituído por um calendário lunar de treze meses, esquema que tornava o calendário lunar quase paralelo ao das estações. Este tinha doze meses, cada um deles com três semanas de dez dias, aos quais se adicionavam cinco dias para as mais importantes cerimônias religiosas incas, chegando ao total de 365 dias. O ano começava no solstício de verão, que caía em dezembro. Observações para determiná-lo eram feitas a partir de uma plataforma elevada no meio da grande praça de Cuzco, com o auxílio de marcas pré-arrumadas. (RONAN, 1987, v. 1, p. 62).

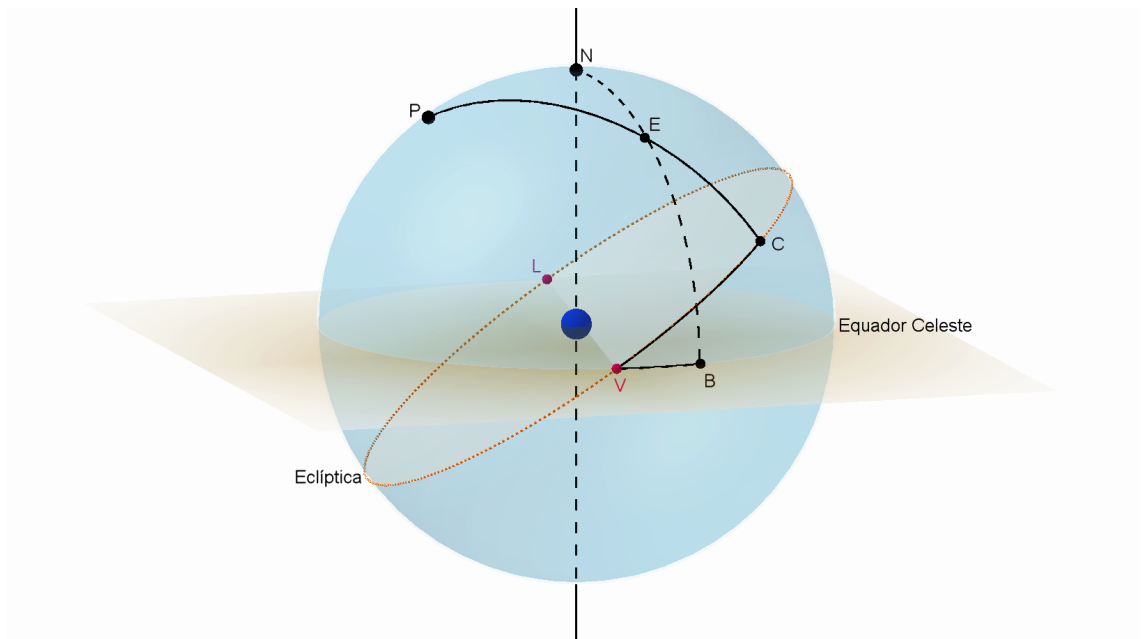
Em Machu Picchu, conhecida como “Cidade Perdida dos Incas”, um dos locais mais visitado é o relógio de Sol, localizado em uma região alta e feito totalmente com pedras. Acredita-se que a astronomia era muito importante para esse povo, pois além dos feitos que já citamos, podemos encontrar nos sítios arqueológicos evidências que consideravam a astronomia para a construção de edifícios, uma vez que o alinhamento de alguns deles coincide com o azimute solar durante os solstícios de forma constante e com os pontos do nascer e ocaso do sol em certos períodos do ano.

## **1.5 Astronomia na China**

Uma das razões para que os chineses se interessavam por astronomia é que pra eles o céu era afetado pela administração de seus governantes. Essa ideia foi um estímulo para a construção de diversos observatórios.

Com a necessidade de localizar os corpos celestes no céu, os chineses criaram um sistema de coordenadas que foi adotado universalmente e provou ser superior ao do Ocidente. Para entendermos a diferença entre os dois sistemas vamos tomar como referência a Figura 1.3. Deste modo, começamos imaginando que as estrelas estão fixas em uma esfera com centro na Terra e que queremos especificar as coordenadas de uma determinada estrela  $E$ .

Figura 1.3: Descrição de uma estrela  $E$



Fonte: A autora.

No método do Ocidente, usado por Ptolomeu e os gregos, devemos tomar como referência a eclíptica que é o trajeto aparente do Sol no céu. A eclíptica e o equador da esfera (equador celeste) se interceptam em dois pontos:  $L$  (ponto de libra) e  $V$  (ponto vernal). Esses dois pontos, quando o Sol se localiza no equador celeste, corresponde aos dias de equinócios, isto é, épocas que o dia e a noite tem aproximadamente a mesma duração. Seja  $C$  um dos pontos de interseção da eclíptica e da circunferência máxima<sup>3</sup> que contém os ponto  $P$  (interseção da reta perpendicular ao plano que contém a eclíptica com a esfera celeste) e a estrela  $E$ , que está a menor distância de  $V$ . A longitude de  $E$  é a distância<sup>4</sup> de  $V$  até  $C$  e a latitude é a distância de  $C$  até  $E$ . O sistema chinês, no entanto, considerava o equador celeste como referência, tomando o ponto  $B$  (interseção da circunferência que

<sup>3</sup>Definição no Capítulo 2

<sup>4</sup> Veremos nos próximo capítulo a definição de distância entre dois pontos na esfera.

contém o polo  $N$  e a estrela  $E$  com o equador celeste) que está mais próximo de  $V$ . Assim, a longitude é a distância entre  $V$  e  $B$  e a latitude é a distância de  $B$  até  $E$ . Como davam muito valor ao polo celeste geralmente, os chineses usavam a distância de  $N$  até  $E$  ao invés de usar a distância de  $E$  até  $B$ . Na linguagem atual esse sistema de coordenadas, é conhecido como equatorial e a distância de  $N$  a  $E$  é chamada de zenital como veremos no Capítulo 3.

Os chineses também possuíam um calendário solar e lunar. Por volta de 1400 a.C., eles sabiam que a duração do ano solar era de 365.25 dias e o período entre duas luas novas seguidas era de 29 1/2 dias.

Além dos calendários, esta civilização se mostrou ser ótima observadora de fenômenos astronômicos, como descreve Ronan (1983), “as explosões catastróficas – as supernovas – são raras, mas relatos chineses registram ocorrências em 1006, 1054, 1572 e 1604” (RONAN, 1983, v. 2, p. 39).

## CAPÍTULO 2

# UMA INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Os estudiosos das civilizações apenas especulavam sobre o formato da Terra, as viagens eram limitadas e só existiam instrumentos simples. Apesar de hoje sabermos que ela não é uma esfera perfeita (elipsóide com raio equatorial  $\approx 21$  km maior que o raio polar<sup>1</sup>), adotaremos o modelo esférico para a compreensão de vários conceitos. Deste modo, o objetivo desse capítulo é apresentar algumas definições e resultados básicos acerca da Geometria Esférica desenvolvida por Riemann (1826-1866), baseados nas referências: Carvalho (2017), Coxeter (1968), Franco e Menezes (2012), Greenberg (1994), Heim (2013) e Oliveira Filho e Saraiva (2014).

### 2.1 Conceitos Elementares da Geometria Esférica

Na Geometria Euclidiana, sabe-se que dado uma reta  $r$  e um ponto  $P$  fora da reta, existe uma única reta paralela à reta  $r$  que contém o ponto  $P$  (axioma das paralelas de Euclides), porém, quando não se assume esse axioma obtêm-se novas geometrias, como por exemplo, a Geometria Esférica. Nessa geometria temos o seguinte axioma:

**Axioma:** *Não existem retas paralelas.*

No trabalho apresentado por Riemann, as retas seriam circunferências máximas de uma superfície esférica  $S^2$ , isto é, circunferências determinadas pela interseção de planos que passam pelo centro da esfera e a superfície esférica.

---

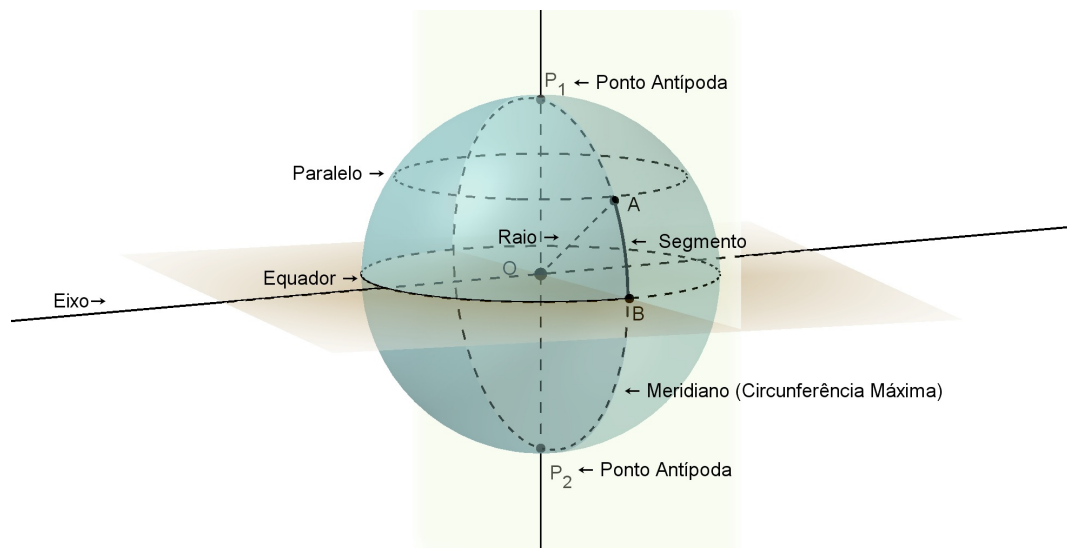
<sup>1</sup> Fonte: D'AGRELLA FILHO [8].



Assim, vamos definir os principais elementos dessa geometria, para isso, considere a superfície esférica  $S^2$  de centro  $O$ . Temos que:

- O segmento euclidiano que une um ponto da superfície esférica  $S^2$  ao centro da esfera é denominado *raio* da esfera;
- Quando um plano  $\pi$  passa pelo centro de uma superfície esférica, ele é denominado *plano diametral*;
- Dois pontos em uma reta (circunferência máxima) definem dois *segmentos de reta*. Um *maior* e um *menor segmento* no caso em que os pontos não são antípodas e dois segmentos de mesmo comprimento (*meia reta* como veremos adiante) se os pontos são antípodas;
- *Eixos* são retas euclidianas que passam pelo centro da esfera. *Eixo polar* é uma reta euclidiana que contém o centro da esfera e é perpendicular ao plano que determina uma reta  $n$  de  $S^2$ ;

Figura 2.1: Principais Elementos em Geometria Esférica



Fonte: A autora.

- *Pontos antípodas* são os pontos de interseção da superfície esférica com um eixo;
- *Equador* é uma circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo (reta  $n$  na representação acima);

- *Paralelo* é uma circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo e é paralela ao equador;
- *Meridiano* é uma circunferência máxima cujo plano passa pelo eixo e liga os polos.

Mais adiante veremos que o polo sul celeste e polo norte celeste são exemplos de pontos antípodas. Por ora vejamos alguns Teoremas que envolvem alguns dos elementos apresentados até aqui.

**Teorema 2.1** *Sejam  $P$  e  $Q$  pontos distintos de  $S^2$  que não são antípodas. Então existe uma única reta contendo  $P$  e  $Q$  (Circunferência Máxima).*

**Demonstração:**

*Existência:* Como  $P$  e  $Q$ , não são pontos antípodas de  $S^2$ , tem-se que eles não são colineares, portanto,  $P$ ,  $Q$  e  $O$  determinam um plano  $\pi$  e  $\pi \cap S^2 = n$ , sendo  $n$  uma circunferência máxima e por definição uma reta na geometria esférica.

*Unicidade:* Suponhamos que duas ou mais retas de  $S^2$  distintas contenham  $P$  e  $Q$ . Logo, teríamos dois ou mais planos distintos contendo  $P$ ,  $Q$  e  $O$ . Como esses planos são distintos e não paralelos ( $P$ ,  $Q$  e  $O$  estão em ambos os planos), a interseção dos mesmos será uma reta euclidiana contendo  $P$ ,  $Q$  e  $O$  e, portanto  $P$  e  $Q$  seriam pontos antípodas, o que contradiz a hipótese.

□

O próximo resultado nos mostra uma diferença interessante entre Geometria Euclidiana e Esférica, na primeira a interseção de duas retas distintas é um único ponto enquanto na segunda temos dois pontos.

**Teorema 2.2** *Sejam  $l$  e  $m$  retas distintas de  $S^2$ . Então  $l$  e  $m$  possuem exatamente dois pontos de interseção e esses pontos são antípodas.*

**Demonstração:** Sejam  $l$  e  $m$  retas distintas de  $S^2$  e  $\pi_1$  e  $\pi_2$  planos distintos que passam pelo centro  $O$  da esfera e determinam  $l$  e  $m$  respectivamente, isto é,  $\pi_1 \cap S^2 = l$  e  $\pi_2 \cap S^2 = m$ . Esses planos não são paralelos (o ponto  $O$  esta na interseção) e não são coincidentes (definem retas distintas), logo  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são secantes e a interseção é uma reta euclidiana contendo  $O$ , essa reta é um eixo e intercepta  $S^2$  nos pontos  $A$  e  $B$  que estão em  $\pi_1$  e  $\pi_2$  e nas retas  $l$  e  $m$  simultaneamente. Logo,  $l \cap m = \{A, B\}$  e como a reta euclidiana

$\overleftrightarrow{AB}$  contém o centro  $O$  da esfera, obtemos que  $A$  e  $B$  são antípodas. Se as retas  $l$  e  $m$  tivessem interseção vazia,  $l$  e  $m$  seriam retas paralelas e como não existem retas paralelas nessa geometria,  $l \cap m \neq \emptyset$ . Se as retas  $l$  e  $m$  interceptassem em apenas um ponto, a reta euclidiana obtida pela interseção dos planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  interceptaria  $S^2$  em apenas um ponto, o que é impossível. Portanto  $l$  e  $m$  possuem exatamente dois pontos de interseção.

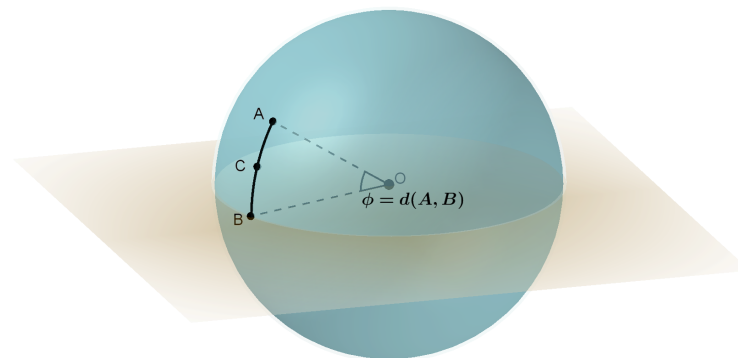
□

Com este resultado podemos observar que dado uma reta  $l$  de  $S^2$  e um ponto  $P \notin l$  em  $S^2$  não existe reta paralela à reta  $l$  que contém  $P$ , uma vez que como vimos acima qualquer duas retas de  $S^2$  possuem dois pontos de interseção.

No estudo da geometria esférica, é importante fazermos medições de objetos como ângulo entre duas retas, medidas de área de regiões ou distância entre dois pontos, esse último permitirá mais adiante calcular a distância entre duas localizações na superfície da Terra ou dois astros na esfera celeste. Para o nosso propósito o conceito de distância será dado pela seguinte definição:

**Definição 2.3** *Dados três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , em que  $C$  está contido no menor segmento definido por  $A$  e  $B$ , define-se a distância  $d$  de  $A$  a  $B$  como a medida do ângulo central em radianos, vezes o raio da esfera, isto é,  $d(A, B) = \phi \cdot r$ .*

Figura 2.2: Distância entre  $A$  e  $B$  em uma esfera de raio unitário



Fonte: A autora.

A definição e o teorema a seguir são necessários para mostrar que a distância definida acima é de fato uma métrica. Para isso, da Geometria Euclidiana vamos introduzir a

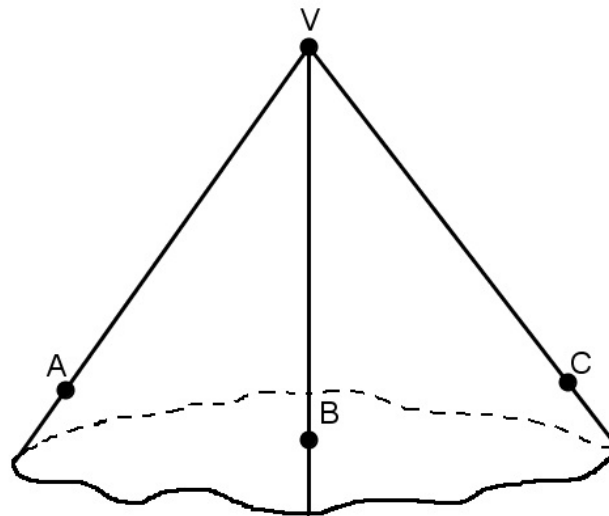
notação  $E_{\pi,A}$  para designar todos os pontos do plano  $\pi$  e de todos os pontos que estão do mesmo lado de  $A$  em relação ao plano  $\pi$  (chamado de semiespaço determinado por  $\pi$  contendo  $A$ ). Assim, com essa notação vamos resgatar o conceito de *triedro*.

**Definição 2.4** *Seja  $V$  um ponto e  $S_{VA}$ ,  $S_{VB}$  e  $S_{VC}$  três semirretas de mesma origem  $V$  não coplanares. Chamamos de triedro ou ângulo triedro, a interseção dos semiespaços  $E_{pl(VAC),B}$ ,  $E_{pl(VBC),A}$  e  $E_{pl(VAB),C}$ <sup>2</sup>.*

Elementos:

- $V$  é o vértice;
- As semirretas  $S_{VA}$ ,  $S_{VB}$  e  $S_{VC}$  são as arestas;
- $A\hat{V}B$ ,  $B\hat{V}C$  e  $A\hat{V}C$  são as faces ou os ângulos das faces.

Figura 2.3: Triedro



Fonte: A autora.

Sobre triedros, temos o seguinte Teorema de Geometria Euclidiana Espacial:

**Teorema 2.5** *Em todo triedro, qualquer ângulo da face é menor que a soma dos outros dois.*

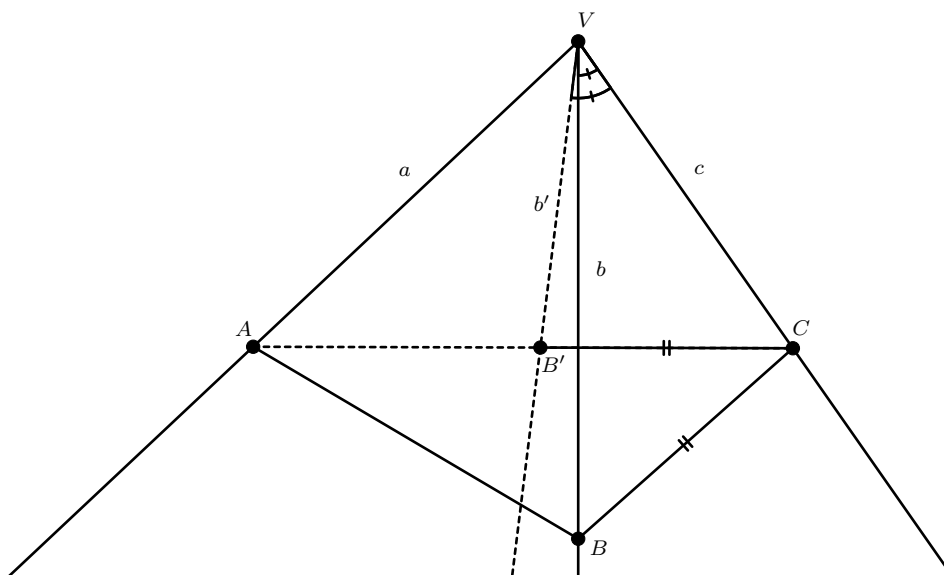
---

<sup>2</sup> $pl(VAC)$  é o plano que contém os pontos  $V$ ,  $A$  e  $C$  e do mesmo modo,  $pl(VBC)$  é o plano que contém os pontos  $V$ ,  $B$  e  $C$ .

**Demonstração:** Suponha que  $\widehat{AVC}$  é o maior ângulo da face do triedro na figura abaixo. Iremos provar que  $\widehat{AVC} < \widehat{AVB} + \widehat{BVC}$ . Para isto, construímos em  $\widehat{AVC}$  um ângulo:

$$\widehat{B'VC} = \widehat{BVC} \quad (2.1)$$

Figura 2.4: Construção para a demonstração do Teorema 2.5



Fonte: A autora.

O ponto  $B$  foi escolhido na semirreta  $b$  e o ponto  $B'$  na semirreta  $b'$ , tais que  $VB \equiv VB'$ . Considerando o plano que contém  $A, B, C$  e  $B'$  como indica a figura acima, temos:

1. Os triângulos  $\triangle B'VC$  e  $\triangle BVC$  são congruentes por  $LAL$  e portanto,  $B'C \equiv BC$ ;
2. No triângulo  $\triangle ABC$  temos:

$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{AB'} + \overline{B'C} < \overline{AB} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{AB'} < \overline{AB}$$

Considerando os triângulos  $\triangle B'VA$  e  $\triangle BVA$  ( $VA \equiv VA$ ,  $VB \equiv VB'$ ,  $AB' < AB$ ) segue que:

$$\widehat{AVB'} < \widehat{AVB} \quad (2.2)$$

Somando membro a membro 2.1 e 2.2, temos:

$$A\widehat{V}B' + B'\widehat{V}C < A\widehat{V}B + B\widehat{V}C$$

Como a maior face é menor que a soma das outras duas, podemos concluir que qualquer face de um triedro é menor que a soma das outras duas.

□

**Teorema 2.6** *Se  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são pontos de  $S^2$ , então:*

- i)  $d(P, Q) \geq 0$ ;*
- ii)  $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$ ;*
- iii)  $d(P, Q) = d(Q, P)$ ;*
- iv)  $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$  (*desigualdade triangular*).*

**Demonstração:**

- i) Por definição  $d(P, Q) = \alpha \cdot r$ , como  $r > 0$  e  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , obtemos que  $\alpha \cdot r \geq 0$ , o que implica que  $d(P, Q) \geq 0$ .
- ii) Suponha que  $d(P, Q) = \alpha \cdot r = 0$ , dessa forma ou  $\alpha = 0$  ou  $r = 0$  como  $r > 0$ , obtemos que  $\alpha = 0$  e portanto,  $P = Q$ .
- iii) Temos que  $d(P, Q) = \alpha \cdot r$ , em que  $\alpha = P\widehat{O}Q$ ,  $d(Q, P) = \alpha_1 \cdot r$  e  $\alpha_1 = Q\widehat{O}P$ . Da Geometria Euclidiana Plana sabemos que  $P\widehat{O}Q = Q\widehat{O}P$ , assim, obtemos que  $\alpha = \alpha_1$  e:

$$\begin{aligned} d(Q, P) &= \alpha \cdot r \\ &= \alpha_1 \cdot r \\ &= d(Q, P) \end{aligned}$$

- iv) Sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$  pontos sobre  $S^2$ , para tanto  $P$ ,  $Q$  e  $R$  podem ser colineares ou não. Suponha que  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são não colineares e sejam  $S_{OP}$ ,  $S_{OQ}$  e  $S_{OR}$  semirretas euclidianas com origem no centro  $O$  da esfera. Essas semirretas não são coplanares (pois se fossem coplanares  $P$ ,  $Q$  e  $R$  estariam em um mesmo plano  $\pi$  assim teríamos

que  $S^2 \cap \pi = l$  sendo  $l$  uma reta reta esférica e, portanto,  $P$ ,  $Q$  e  $R$  seriam colineares), dessa maneira temos que  $S_{OP}$ ,  $S_{OQ}$  e  $S_{OR}$  determinam um triedro com vértice em  $O$ . Do Teorema 2.5 temos que em todo triedro, o ângulo de qualquer face possui medida menor que a soma das medidas das outras duas. Como  $d(P, Q) = \alpha_1 \cdot r$ ,  $d(Q, R) = \alpha_2 \cdot r$  e  $d(P, R) = \alpha_3 \cdot r$ , a soma:

$$\begin{aligned} d(P, Q) + d(Q, R) &= \alpha_1 \cdot r + \alpha_2 \cdot r \\ &> d(P, R) = \alpha_3 \cdot r \end{aligned}$$

Suponha agora que  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são colineares e  $Q$  está entre  $P$  e  $R$ , seja  $\widehat{POQ} = \alpha$  em que  $O$  é o centro da esfera, assim o segmento euclidiano  $OQ$  divide o ângulo  $\alpha$  em  $\widehat{POQ} = \alpha_1$  e  $\widehat{QOR} = \alpha_2$ . Como:

$$\begin{aligned} d(P, Q) + d(Q, R) &= \alpha_1 \cdot r + \alpha_2 \cdot r \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot r \end{aligned}$$

e  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ , temos que:

$$\begin{aligned} d(P, Q) + d(Q, R) &= \alpha \cdot r \\ &= d(P, R), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Para o próximo Teorema, precisaremos da definição de retas perpendiculares, apresentada abaixo.

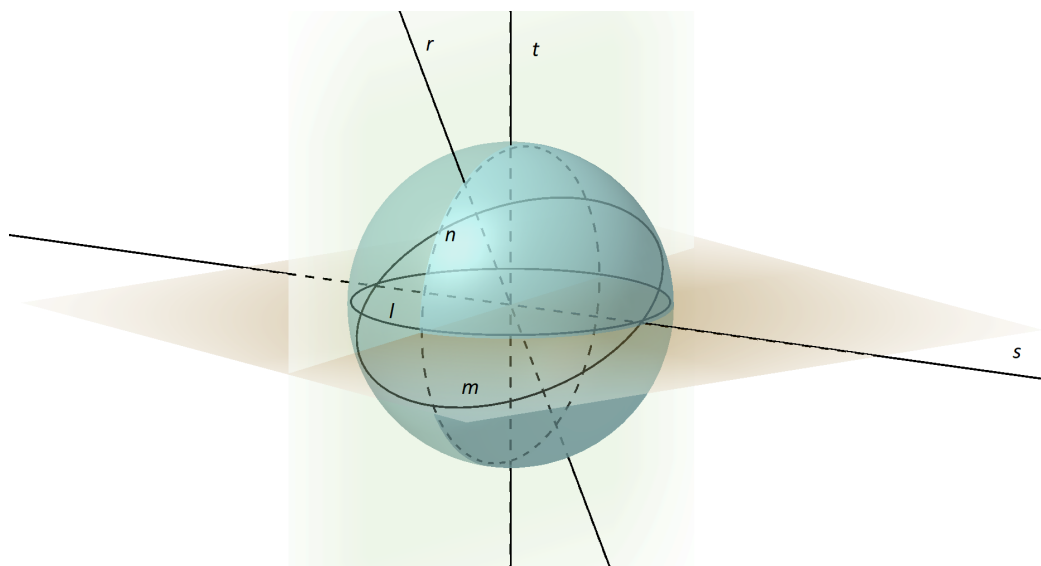
**Definição 2.7** *Duas retas são perpendiculares se seus eixos polares são ortogonais.*

**Teorema 2.8** *Sejam  $l$  e  $m$  retas distintas de  $S^2$ . Então existe uma única reta  $n$  tal que  $l \perp n$  e  $m \perp n$ . Os pontos de interseção de  $l$  e  $m$ , são os polos de  $n$ .*

### Demonstração:

*Existência:* Sejam  $l$  e  $m$  retas distintas de  $S^2$  e  $t$  e  $r$  os eixos polares de  $l$  e  $m$  respectivamente. Como as retas são distintas, os eixos polares são distintos e pela definição de eixo,  $t$  e  $r$  contêm o centro  $O$  da esfera, logo são concorrentes e determinam um plano  $\pi$ . Seja  $n$  a reta esférica determinada por  $\pi$  ( $S^2 \cap \pi = n$ ). A reta euclidiana  $s$  perpendicular a  $\pi$  contendo  $O$  é o eixo polar de  $n$ . Como essa reta é perpendicular a  $\pi$  obtemos que ela é perpendicular a todas as retas euclidianas que contêm seu traço  $O$ , em especial  $t$  e  $r$ . Portanto,  $s \perp t$  e  $s \perp r$ , e pela definição 2.7,  $n \perp l$  e  $n \perp m$ .

Figura 2.5: Construção para a demonstração do Teorema 2.8



Fonte: A autora.

Sejam  $A$  e  $B$  os pontos de interseção de  $l$  e  $m$ , sabemos que  $A$  e  $B$  são antípodas. Seja  $\overleftrightarrow{AB}$  a reta euclidiana determinada por  $A$  e  $B$ ,  $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$  e  $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_2$ , em que  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são os planos que determinam as retas  $l$  e  $m$  respectivamente. Como  $t$  e  $r$  são eixos polares de  $l$  e  $m$ ,  $t \perp \pi_1$  e  $r \perp \pi_2$ . Como  $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$  e  $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_2$  temos que,  $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1 \cap \pi_2$ . Os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são secantes, a reta euclidiana  $\overleftrightarrow{AB}$  é a única interseção, assim  $\overleftrightarrow{AB} \perp t$  e  $\overleftrightarrow{AB} \perp r$  ( $O$  é traço de  $t$  e  $r$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  contém  $O$ ). Como a reta esférica  $n$  é determinada pelo plano  $\pi$ , tal que  $\pi$  é determinado por  $t$  e  $r$ , e do fato que  $\overleftrightarrow{AB}$  é perpendicular a  $t$  e  $r$  (par de retas concorrentes) obtemos que  $\overleftrightarrow{AB}$  é perpendicular a  $\pi$  e conseqüentemente é eixo polar de  $n$ , sendo os pontos  $A$  e  $B$  os polos de  $n$ .

*Unicidade:* Suponha que exista mais de uma reta  $n$  perpendicular a  $l$  e  $m$  simultane-



amente, assim existe mais de um eixo polar perpendicular a  $t$  e  $r$ . Como  $t$  e  $r$  concorrem em  $O$ , temos que  $t$  e  $r$  determinam um plano  $\pi$ , logo temos que pelo ponto  $O$  existe mais de uma reta perpendicular a  $\pi$ , o que é um absurdo, pois por um ponto dado em um plano pode-se traçar apenas uma única reta perpendicular ao mesmo. Portanto, existe um único eixo polar perpendicular a  $t$  e  $r$ , e conseqüentemente existe uma única reta  $n$  tal que  $l \perp n$  e  $m \perp n$ .

□

Vejamos agora um exemplo que trabalha os conceitos que vimos até aqui.

**Exemplo 2.9** *Seja  $l$  uma reta de  $S^2$  e  $P$  um ponto qualquer em  $S^2$ . Se  $P$  não é um polo de  $l$ , então existe uma única reta  $m$  através de  $P$  perpendicular a  $l$ .*

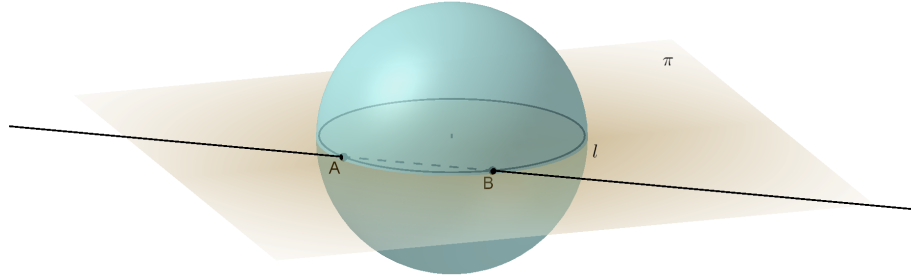
*De fato, seja  $l$  uma reta de  $S^2$  e  $r$  o eixo polar de  $l$ , temos que o feixe de planos que contém  $r$  determina retas de  $S^2$  que são perpendiculares a  $l$  (os planos que contém o eixo polar  $r$  são perpendiculares ao plano que contém  $m$ , visto que o eixo polar  $r$  é perpendicular a esse plano), porém existe um único plano desse feixe que contém o ponto  $P$ , pois uma reta e um ponto dado determinam um único plano. Assim, esse plano determina uma única reta  $m$  que contém  $P$ .*

**Teorema 2.10** *Sejam  $A$  e  $B$  pontos não antípodas, então existe exatamente dois segmentos contendo  $A$  e  $B$  como extremidades. Sua união é a reta definida por  $A$  e  $B$  e sua interseção é o conjunto  $\{A, B\}$ .*

**Demonstração:** Seja  $l$  a reta de  $S^2$  que contém  $A$  e  $B$ , em que  $A$  e  $B$  são pontos não antípodas. Considere a reta euclidiana  $\overleftrightarrow{AB}$  ( $\overleftrightarrow{AB}$  não contém o ponto  $O$ , visto que  $A$  e  $B$  não são antípodas).

Como  $l$  é uma reta de  $S^2$ ,  $l$  é uma circunferência máxima. Assim existe um plano  $\pi$ , tal que  $\pi \cap S^2 = l$  e da Geometria Plana a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  determina exatamente dois semiplanos. Cada um desses dois semiplanos interseção com  $S^2$ , são os dois segmentos contendo  $A$  e  $B$  como extremidades. A união desses dois semiplanos é o plano todo e assim a união dos dois segmentos é a reta  $l$  de  $S^2$ . Como a interseção dos dois semiplanos é a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , a interseção dos dois segmentos são os pontos  $A$  e  $B$ , isto é, conjunto  $\{A, B\}$ .

Figura 2.6: Construção para a demonstração do Teorema 2.10



Fonte: A autora.

□

Agora, vejamos a definição de *meia reta*.

**Definição 2.11** Se  $A$  e  $B$  são pontos antípodos, cada um dos segmentos contendo  $A$  e  $B$  como extremidades é chamado de *meia reta*.

**Teorema 2.12** Sejam  $P$ ,  $Q$  e  $X$  pontos distintos de  $S^2$ . Se  $P$  e  $Q$  são não antípodos, um ponto  $X$  está sobre o menor segmento  $\widehat{PQ}$  se e somente se,

$$d(P, X) + d(X, Q) = d(P, Q)$$

**Demonstração:**

( $\Rightarrow$ ) Sejam  $P$  e  $Q$  pontos não antípodos de  $S^2$  e  $X$  um ponto que está sobre o menor segmento  $\widehat{PQ}$ . Sabemos que  $P$  e  $Q$  determinam uma única reta e exatamente dois segmentos. Suponha que o ponto  $X$  está sobre o menor segmento  $\widehat{PQ}$ . Como  $P$ ,  $X$  e  $Q$  são colineares obtemos da demonstração do Teorema 2.6 (iv) que  $d(P, X) + d(X, Q) = d(P, Q)$ .

( $\Leftarrow$ ) Temos que:

$$d(P, X) + d(X, Q) = d(P, Q)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \cdot r + \alpha_2 \cdot r = \alpha \cdot r$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot r = \alpha \cdot r$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha,$$

mas isso ocorre se  $P, Q$  e  $X$  são colineares. Se  $P$  e  $Q$  fossem antípodas, determinaram duas meias retas esféricas, com mesmo comprimento, isto é, não teríamos maior ou menor segmento. Se  $X$  está sobre o maior segmento  $d(P, X) + d(X, Q) > d(P, Q) = \alpha \cdot r$ , pois nesse caso  $d(P, X) + d(X, Q)$  será o comprimento do maior segmento e pela própria definição de distância,  $X$  deve estar sobre o menor segmento definido por  $P$  e  $Q$ .

□

## 2.2 Trigonometria Esférica

Começaremos essa seção vendo a definição de triângulo esférico. A partir dela podemos deduzir inúmeras relações entre seus elementos e algumas delas serão deduzidas a seguir para triângulos esféricos genéricos.

**Definição 2.13** *Sejam três pontos distintos  $A, B$  e  $C$  sobre uma esfera e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima. A figura formada pelos arcos das circunferências máximas<sup>3</sup>, que une esses pontos dois a dois é denominado triângulo esférico.*

**Notação:** Os ângulos de um triângulo esférico serão denotados por letras maiúsculas  $(\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C})$ , e os lados por letras minúsculas  $(a, b, c)$ .

**Teorema 2.14 (Lei dos cossenos para os lados)** *Seja  $ABC$  um triângulo esférico, com lados  $a, b$  e  $c$ , e ângulos internos  $\widehat{A}, \widehat{B}$  e  $\widehat{C}$ . Então:*

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\widehat{A}) \quad (2.3)$$

$$\cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\widehat{B}) \quad (2.4)$$

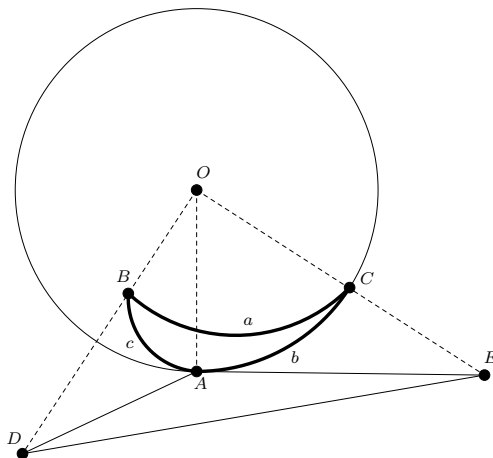
$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\widehat{C}) \quad (2.5)$$

**Demonstração:**

Considere  $ABC$  um triângulo esférico como na Figura 2.7, denote  $a = \widehat{BC}$ ,  $b = \widehat{AC}$  e  $c = \widehat{AB}$ . Considerando que o raio da esfera é unitário, temos que o lado  $a$  mede  $B\widehat{O}C$ , o lado  $b$  mede  $A\widehat{O}C$  e  $c$  mede  $A\widehat{O}B$ . Seja  $r$  a tangente em  $A$  da circunferência máxima que contém  $\widehat{AB}$  e  $s$  a tangente em  $A$  da circunferência máxima que contém  $\widehat{AC}$ . Assim,  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AE}$  e  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AD}$ .

<sup>3</sup>A medida de um lado de um triângulo esférico é menor que uma semicircunferência.

Figura 2.7: Construção para a demonstração da lei dos cossenos



Fonte: A autora.

Por construção,  $r$  está no plano da circunferência máxima que contém  $\widehat{AB}$ , assim, prolongando a reta  $\overleftrightarrow{OB}$ , ela interceptará a tangente  $r$  em  $D$ , do mesmo modo ao prolongarmos  $\overleftrightarrow{OC}$  interceptará a reta  $s$  em  $E$ .

O ângulo esférico  $\widehat{BAC}$  é definido como o ângulo entre as tangentes  $r$  e  $s$  em  $\widehat{A}$ . Assim,  $\widehat{BAC} = \widehat{DAE} = \widehat{A}$ . No triângulo plano  $\triangle AOD$ , o ângulo  $\widehat{OAD}$  é  $90^\circ$  e temos que:

$$\widehat{DOA} = \widehat{BOA} = \widehat{C}.$$

Daí, segue que:

$$\overline{AD} = \overline{OA} \cdot \operatorname{tg}(c) \quad (2.6)$$

Além disso,

$$\overline{OD} = \overline{OA} \cdot \operatorname{sec}(c) \quad (2.7)$$

Analogamente, no triângulo plano  $\triangle AOE$ , temos:

$$\overline{AE} = \overline{OA} \cdot \operatorname{tg}(b) \quad (2.8)$$

$$\overline{OE} = \overline{OA} \cdot \operatorname{sec}(b) \quad (2.9)$$

Pela lei dos cossenos, no triângulo plano  $\triangle DAE$ :

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \cos(D\hat{A}E)$$

Substituindo 2.6 e 2.8 e usando o fato que  $D\hat{A}E = \hat{A}$ :

$$\overline{DE}^2 = \overline{OA}^2 [\operatorname{tg}^2(c) + \operatorname{tg}^2(b) - 2 \cdot \operatorname{tg}(c) \cdot \operatorname{tg}(b) \cdot \cos(\hat{A})] \quad (2.10)$$

Do mesmo modo no triângulo plano  $\triangle DOE$ :

$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2 \cdot \overline{OD} \cdot \overline{OE} \cdot \cos(D\hat{O}A)$$

Usando 2.7 e 2.9 e como  $D\hat{O}E = B\hat{O}C = a$ , temos:

$$\overline{DE}^2 = \overline{OA}^2 [\sec^2(c) + \sec^2(b) - 2 \cdot \sec(b) \cdot \sec(c) \cdot \cos(a)] \quad (2.11)$$

De 2.10 e 2.11:

$$\sec^2(c) + \sec^2(b) - 2 \cdot \sec(b) \cdot \sec(c) \cdot \cos(a) = \operatorname{tg}^2(c) + \operatorname{tg}^2(b) - 2 \cdot \operatorname{tg}(c) \cdot \operatorname{tg}(b) \cdot \cos(\hat{A})$$

Usando as relações  $\sec^2(c) = 1 + \operatorname{tg}^2(c)$  e  $\sec^2(b) = 1 + \operatorname{tg}^2(b)$  obtemos:

$$1 + \operatorname{tg}^2(c) + 1 + \operatorname{tg}^2(b) - 2 \cdot \sec(b) \cdot \sec(c) \cdot \cos(a) = \operatorname{tg}^2(c) + \operatorname{tg}^2(b) - 2 \cdot \operatorname{tg}(c) \cdot \operatorname{tg}(b) \cdot \cos(\hat{A})$$

O que implica:

$$2 - \frac{2 \cdot \cos(a)}{\cos(b) \cdot \cos(c)} = - \frac{2 \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\hat{A})}{\cos(b) \cdot \cos(c)}$$

De onde segue que:

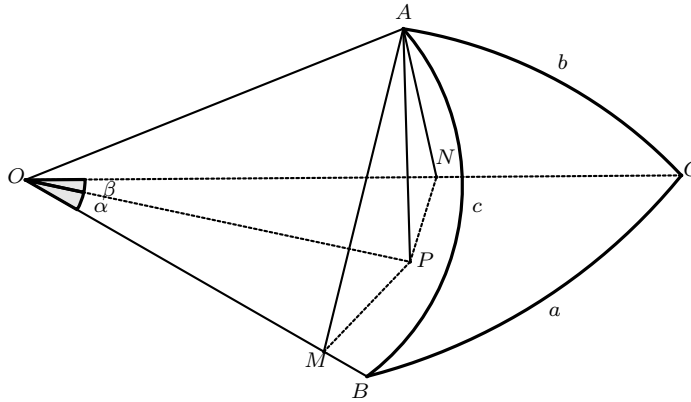
$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\widehat{A})$$

As relações 2.4 e 2.5 podem ser provadas de maneira análoga.

□

Para determinar a *lei dos senos* vamos considerar um triângulo esférico genérico, de lados  $a, b$  e  $c$  e ângulos  $\widehat{A}, \widehat{B}$  e  $\widehat{C}$ . Tracemos o plano perpendicular ao raio  $OB$  que passa por  $A$  e o plano perpendicular ao raio  $OC$  que passa por  $A$ . A interseção desses planos com o triedro associado ao triângulo  $ABC$  e  $O$  formam os triângulos planos  $\triangle APM$  e  $\triangle PNA$ , como vemos na Figura 2.8.

Figura 2.8: Construção para a demonstração da lei dos senos



Fonte: A autora.

Olhemos agora para os triângulos  $\triangle APM$  e  $\triangle OMA$  que possuem o lado  $AM$  em comum. Temos que

$$\sin(c) = \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}}$$

$$\sin(\widehat{AMP}) = \sin(\widehat{B}) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}$$

Daí, segue que:

$$\text{sen}(c) \cdot \text{sen}(\widehat{B}) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AO}} \quad (2.12)$$

Do mesmo modo olhando para o triângulos  $\triangle ONA$  e  $\triangle APN$  que possuem o lado  $AN$  em comum obtemos a relação:

$$\text{sen}(b) \cdot \text{sen}(\widehat{C}) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AO}} \quad (2.13)$$

De 2.12 e 2.13, temos:

$$\frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\widehat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\widehat{C})}$$

De maneira análoga pode-se provar que:

$$\frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\widehat{B})} = \frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\widehat{A})}$$

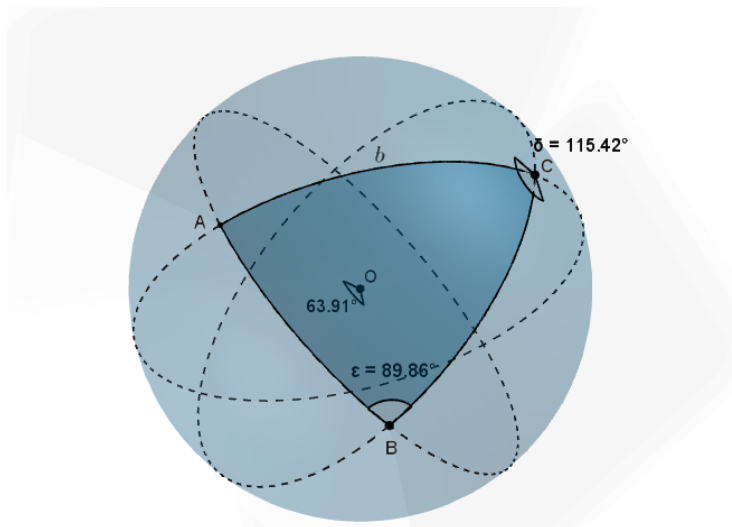
Obtendo assim, a *lei dos senos*:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\widehat{A})} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\widehat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\widehat{C})} \quad (2.14)$$

Nos próximos capítulos veremos aplicações da lei dos cossenos na astronomia, por ora vamos aplicar a lei dos senos no exemplo abaixo.

**Exemplo 2.15** Considere o triângulo sobre a esfera de raio unitário da representação abaixo, em que  $\widehat{B} = 89.86^\circ$ ,  $\widehat{C} = 115.42^\circ$  e  $c = 63.91^\circ$ . Vamos determinar o valor de  $b$ .

Figura 2.9: Ilustração do Exemplo



Fonte: A autora.

Desse modo, pela lei dos senos, segue que:

$$\frac{\text{sen}(63.91^\circ)}{\text{sen}(115.42^\circ)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(89.86^\circ)}$$

Logo,  $\text{sen}(b) \approx 0.994$  e assim obtemos  $b \approx 83.92^\circ$ .

Além das leis apresentadas aqui, existem outros resultados importantes sobre triângulos esféricos que serão apresentados na próxima seção.

## 2.3 Triângulos Esféricos

Assim como nos triângulos Euclidianos, os triângulos Esféricos possuem três bissetrizes, três alturas e três medianas. Entretanto, diferente da geometria Euclidiana a soma dos ângulos internos de um triângulo não é fixa. Para chegarmos em tal resultado veremos a seguir as definições de área de um triângulo esférico e fuso esférico de ângulo  $\theta$ , além de um Teorema sobre a área  $A_f$  de um fuso.

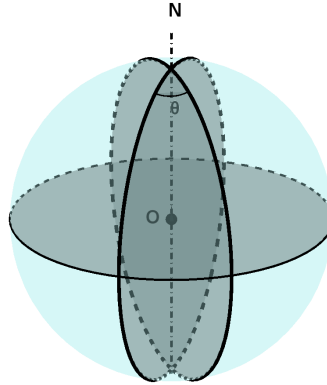
**Definição 2.16** *A área de um triângulo esférico é a região da superfície esférica limitada pelos três arcos de geodésicas que constituem tal triângulo.*

Um grande estudioso de áreas de triângulos esféricos foi o matemático francês Albert Girard (1595-1632) que demonstrou que a área de um triângulo esférico pode ser definida sem utilizar os lados do triângulo, e sim, obtida apenas com os ângulos internos e o raio da esfera. Antes de chegar em seu Teorema, vamos apresentar aqui o conceito de fuso esférico.

**Definição 2.17** *A região da superfície esférica limitada por duas circunferências máximas é chamada de fuso esférico. Os dois pontos antípodos, interseções dessas circunferências, são ditos vértices do fuso esférico que possui um ângulo  $\theta$  formado pelas duas circunferências máximas.*



Figura 2.10: Fuso Esférico de ângulo  $\theta$



Fonte: A autora.

**Teorema 2.18** *A área  $A_f$  de um fuso esférico de ângulo  $\theta$  (em radianos) é dada por  $A_f = 2\theta r^2$ , em que  $r$  é o raio da esfera.*

**Demonstração:** A área de um fuso esférico é proporcional ao seu ângulo, logo para determinar sua área basta fazermos uma proporção simples utilizando a área total da superfície esférica de raio  $r$ , que é dada por  $A = 4\pi r^2$ .

$$\frac{A_f}{4\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \Leftrightarrow A_f = 2\theta r^2$$

□

**Definição 2.19** *Um fuso completo é constituído pela união de um fuso com o seu fuso antípoda, ou seja, os dois fusos formados por pontos antípodas.*

**Teorema 2.20 (Teorema de Girard)** *Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  os ângulos internos de um triângulo esférico, temos que:*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{r^2},$$

*em que  $r$  é o raio da esfera e  $A$  é a área desse triângulo.*

**Demonstração:** Consideremos um triângulo esférico  $ABC$  com ângulos internos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  (em radianos). Agora, vamos prolongar os três lados desse triângulo, obtendo três fusos completos, em que os ângulos são os próprios ângulos internos do triângulo.

Seja  $r$  o raio da superfície esférica  $S^2$ , a soma das áreas desses três fusos completos é:

$$2(2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2) = 4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2$$

Seja o triângulo  $A'B'C'$ , congruente ao triângulo  $ABC$ , cujos vértices são os pontos antípodas de  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Cada um dos fusos completos que contém o triângulo  $ABC$  também contém o triângulo  $A'B'C'$  de mesma área. Ao somarmos as áreas desses fusos completos, obtemos a área da superfície esférica acrescida ao quádruplo da área do triângulo.

$$\begin{aligned} 4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 &= 4\pi r^2 + 4A \\ \Leftrightarrow 4(\alpha r^2 + \beta r^2 + \gamma r^2) &= 4(\pi r^2 + A) \\ \Leftrightarrow \alpha r^2 + \beta r^2 + \gamma r^2 &= \pi r^2 + A \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma &= \pi + \frac{A}{r^2}. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.21** *Seja  $S^2$  uma esfera de raio unitário, para calcular a área de um triângulo esférico cujos ângulos internos são iguais a  $\pi/2$ , basta usar a fórmula anterior, obtendo:*

$$A = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2} u.a.$$

**Teorema 2.22** *A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo esférico é sempre maior que  $180^\circ$  e menor que  $540^\circ$ .*

**Demonstração:** Para a demonstração desse Teorema vamos usar o Teorema de Girard. Assim, considere um triângulo esférico de área  $A$ , pelo Teorema quando  $A$  tende a zero, temos que  $\alpha + \beta + \gamma$  tende a  $180^\circ$ . Mas como não podemos ter um triângulo de área nula, concluímos que  $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$ .

Por outro lado, ao considerarmos um triângulo que envolva quase a totalidade da semiesfera que o contém, obteremos um triângulo esférico cuja área será próxima a  $2\pi r^2$  (metade da área da superfície esférica), sem assumir tal valor. Pelo Teorema de Girard concluímos que  $\alpha + \beta + \gamma$  tende a  $180^\circ + \frac{2\pi r^2}{r^2}$ , ou seja, tende a  $180^\circ + 360^\circ = 540^\circ$ . Logo:

$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ.$$

□

Contudo, terminamos este capítulo com o Teorema acima. Existem outros resultados sobre a Geometria da Superfície Esférica que não foram apresentados, porém, com as noções aqui construídas pretendemos introduzir os conceitos básicos de astronomia necessários para alcançar o objetivo desse trabalho.

## CAPÍTULO 3

# SISTEMAS DE COORDENADAS GEOGRÁFICAS E ASTRONÔMICAS

### 3.1 Coordenadas Geográficas

A necessidade de localizar objetos no céu vem acompanhando a humanidade desde o seu início. Com um pouco de imaginação vários povos usavam as estrelas mais brilhantes do céu para formar figuras de animais, de mitologia ou cenas do cotidiano. Essas figuras, as constelações, foi um avanço na prática da Astronomia de Posição, uma vez, que para localizar um objeto no céu não era necessário apontar o dedo e sim mencionar à constelação que o circundavam. Apesar deste avanço, atualmente, fazemos pouco uso dessas constelações. Quem já olhou o céu noturno com o auxílio de um mapa já deve ter percebido a dificuldade de localizar essas constelações, pois o que vemos são muitas estrelas, umas mais brilhantes, outras mais avermelhadas ou brancas e apenas com muito treino somos capazes de identificar essas figuras. Porém, para identificar a posição de um astro no céu podemos fazer uso de um método eficaz e simples: por intermédio de um sistemas de coordenadas. (Cf. SANTIAGO, 2005).

Antes de iniciarmos o estudo das coordenadas astronômicas, vamos apresentar neste trabalho o sistema em que as coordenadas são a latitude e longitude: as coordenadas geográficas.

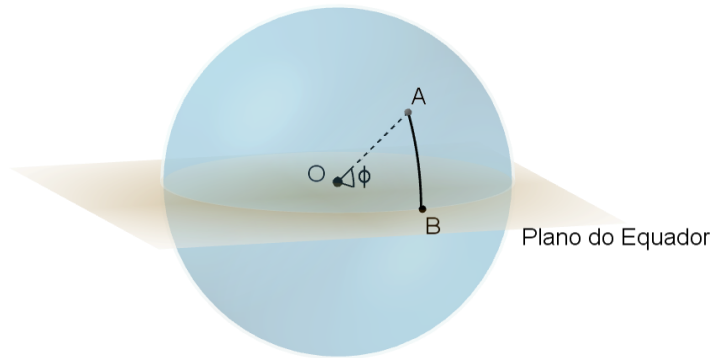
Como podemos ver em mapas existe uma linha imaginária horizontal que divide a terra em duas metades (Hemisfério Norte e Hemisfério Sul), essa linha denomina-se Linha do Equador (palavra de origem latina, *aequatore* que quer dizer “o que iguala”). Tomando

como referência a Linha do equador, vejamos abaixo a definição de latitude.

**Definição 3.1** *Latitude é a distância em graus de qualquer ponto da superfície terrestre até a Linha do Equador. A distância em graus será de  $0^\circ$  na Linha do Equador até  $90^\circ$  para o Norte ou  $90^\circ$  para o Sul.*

Em um modelo em que a terra é representada por uma esfera, a latitude de um certo ponto sobre a terra é o ângulo que o segmento que une esse ponto ao centro da terra (esfera) faz com o plano do Equador. Na figura abaixo, por exemplo, temos que a latitude da localização  $A$  é o ângulo  $\phi$ .

Figura 3.1: Latitude de  $A$  (GeoGebra)



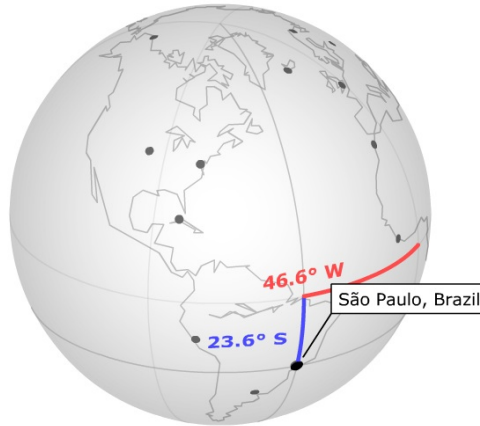
Fonte: A autora.

A linha de referência para definir o conceito de longitude será o meridiano de *Greenwich* localizada na posição vertical e que divide a superfície terrestre em dois hemisférios, o oriental e ocidental.

**Definição 3.2** *As linhas imaginárias posicionadas verticalmente (meridianos) determinam a longitude, que é definida como a distância em graus de qualquer ponto da superfície terrestre até o Meridiano de Greenwich. A longitude varia de  $0^\circ$  (no Meridiano de Greenwich) a  $180^\circ$  para oeste e  $180^\circ$  para leste.*

Para efeitos práticos, usam-se as siglas para os pontos cardeais: N=Norte/North, S=Sul/South, E ou L=Leste/East, O ou W=Oeste/West. Na figura a seguir temos a latitude e longitude da cidade de São Paulo,  $23.6^\circ$  ao sul do equador e  $46.6^\circ$  ao oeste do Meridiano de Greenwich.

Figura 3.2: Coordenadas Geográficas

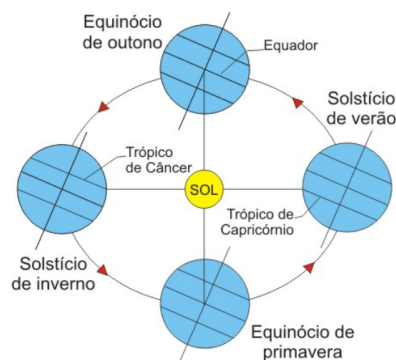


Fonte: *Astronomy Simulations and Animations (University of Nebraska–Lincoln)*.

Abaixo segue as definições de Trópicos de Câncer e Capricórnio.

**Definição 3.3** *O Trópico de Câncer e Trópico de Capricórnio são circunferências paralelas à circunferência do equador localizados no Hemisfério Norte e Sul respectivamente e foram criados por serem os pontos onde o sol incide perpendicularmente durante os solstícios. O Trópico de Câncer está localizado na latitude de  $23,27^\circ$  e o de Capricórnio está na latitude  $-23,27^\circ$ . Em dois dias do ano, nos pontos da Terra situados entre esses Trópicos, haverá um momento de “sol a pino” (zênite). Sobre o equador, essas duas datas são os equinócios (20 ~ 21 de março; 22 ~ 23 de setembro), separados entre si por cerca de 6 meses.*

Figura 3.3: O Movimento de Translação e os Trópicos de Câncer e Capricórnio (Hemisfério Sul)



Fonte: Betow Blog<sup>1</sup>.

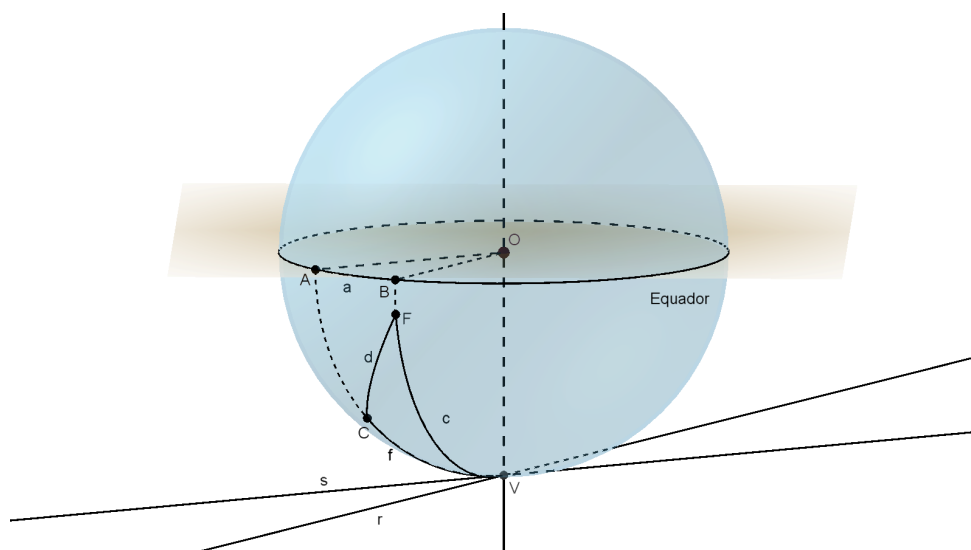
<sup>1</sup>Disponível em: <<https://betow.wordpress.com/2007/04/07/outono/>> Acesso em fev. 2018.

Os astrônomos antigos deram esse nome aos trópicos pois perceberam que o solstício no Hemisfério Sul acontecia quando o sol estava posicionado sobre a constelação de Capricórnio e que, no Hemisfério Norte, ele estava posicionado na constelação de Câncer.

Apresentaremos agora um exemplo que usa o conceito de latitude, longitude e trigonometria esférica para resolver o problema de descobrir a distância entre dois pontos do globo terrestre.

**Exemplo 3.4** Sabendo que a cidade de Fortaleza - CE possui coordenadas geográficas de  $3.7319^\circ S$  de latitude e  $38.5267^\circ W$  de longitude, enquanto que Curitiba - PR, tem  $25.4244^\circ S$  de latitude e  $49.2655^\circ W$  de longitude, vamos obter a distância entre as duas cidades. Para isso considere  $C$  o ponto associado à Curitiba,  $V$  o polo Sul,  $F$  a cidade de Fortaleza e  $d$  a distância entre as duas cidades. Vamos considerar agora o triângulo esférico  $VCF$  da Figura 3.4.

Figura 3.4: Distância entre Fortaleza e Curitiba (GeoGebra)



Fonte: A autora.

Note que a reta tangente  $r$  em  $V$  à circunferência máxima que contém os pontos  $F$  e  $V$  é perpendicular ao raio  $OV$ . Como o plano que contém o equador é perpendicular ao eixo  $OV$ , temos que o raio  $OB$  é perpendicular ao raio  $OV$  da mesma circunferência máxima. O mesmo ocorre com a reta tangente  $s$ , de modo que podemos concluir que  $\hat{V} = A\hat{O}B = a$ , sendo que  $a$  pode ser obtido fazendo a diferença entre as longitudes, isto é:

$$a = 49.2655^\circ - 38.5267^\circ = 10.7388^\circ$$

Como  $A\hat{O}V = B\hat{O}V = 90^\circ$ , obtemos:

$$f = 90^\circ - 25.4244^\circ = 64.5756^\circ$$

$$c = 90^\circ - 3.7319^\circ = 86.2681^\circ$$

Pela lei dos cossenos 2.3, temos:

$$\cos(d) = \cos(64.5756^\circ) \cdot \cos(86.2681^\circ) + \sin(64.5756^\circ) \cdot \sin(86.2681^\circ) \cdot \cos(10.7388^\circ)$$

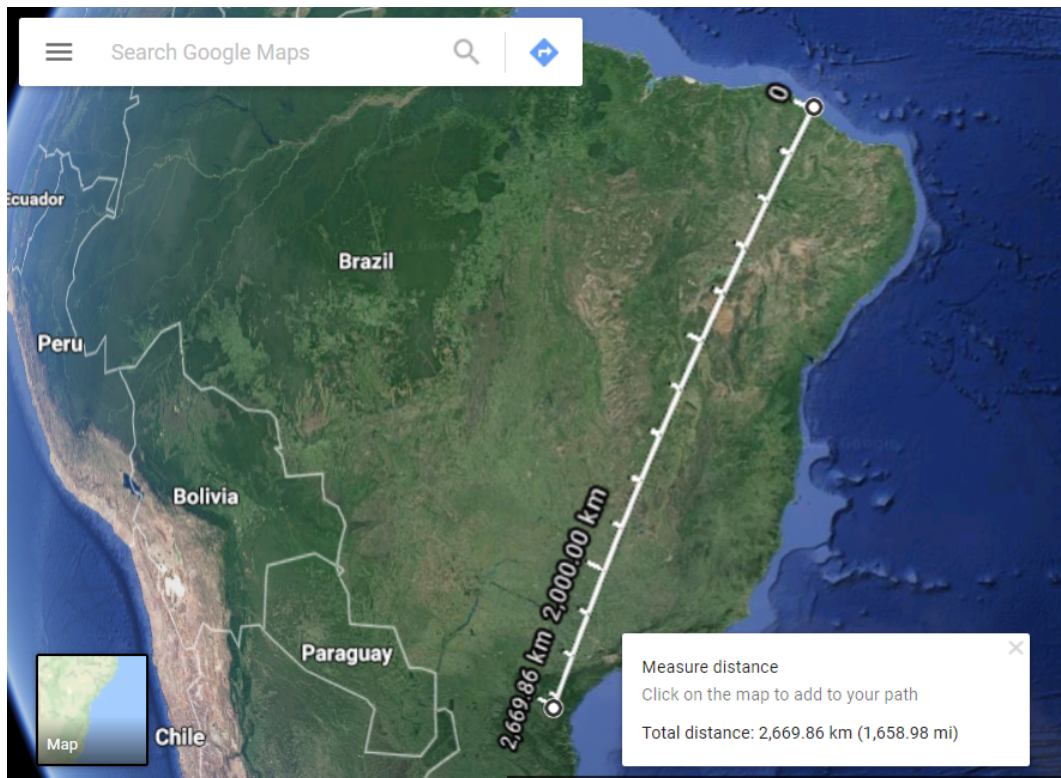
O que resulta em  $\cos(d) \approx 0.9134^\circ$  o que implica que  $d \approx 24^\circ$ . Para obtermos  $d$  em Km, vamos considerar a definição 2.3 com o raio da terra igual a 6371km.

Assim, temos que  $24^\circ \approx 0.4189\text{rad}$  e portanto:

$$d \approx 0.4189 \cdot 6371 \approx 2668.68\text{km}$$

Podemos verificar que chegamos em um resultado muito próximo do real usando o Google Maps como mostra a Figura 3.6.

Figura 3.5: Distância entre Fortaleza e Curitiba (Google Maps)



Fonte: Google Maps.



## 3.2 Coordenadas Horizontais

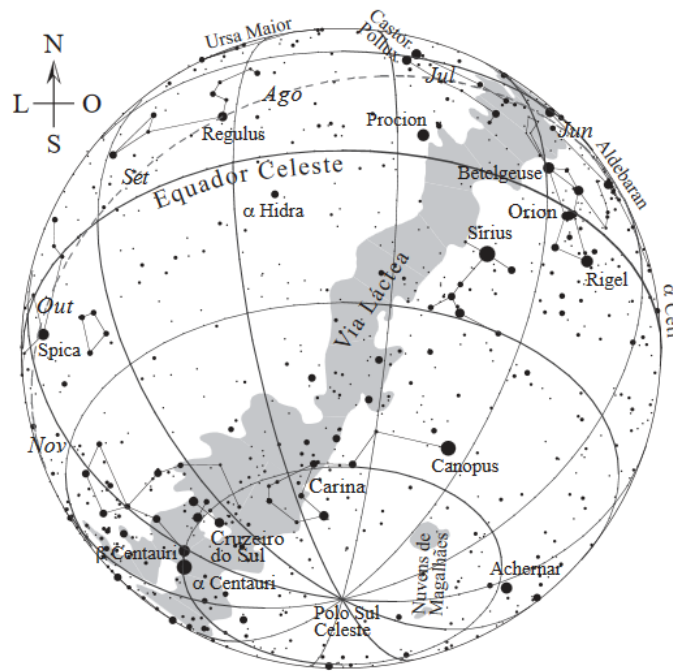
*Astronomia de Posição*, segundo Arana (2000):

Também conhecida como Astronomia Esférica ou Astronomia de Campo utiliza-se dos astros para o posicionamento e orientação na superfície da Terra, ou seja, utiliza-se de métodos e técnicas para obter as coordenadas astronômicas de um ponto (ARANA, 2000, p. 8).

Um conceito básico para o estudo dos sistemas de coordenadas astronômicas é o conceito de esfera celeste definido a seguir.

**Definição 3.5** *A esfera com centro no observador e raio infinito recebe o nome de esfera celeste. Mas como seu raio é infinito, qualquer observador situado sobre a superfície da terra pode se considerar igualmente situado em seu centro. Qualquer objeto celeste (Sol, Lua, planetas, estrelas, etc) em um dado instante está situado em um ponto da esfera celeste. Este ponto resulta do prolongamento ad infinitum da direção no espaço na qual vemos o objeto.*

Figura 3.6: Representação da Esfera Celeste



Fonte: LIMA NETO (2017).

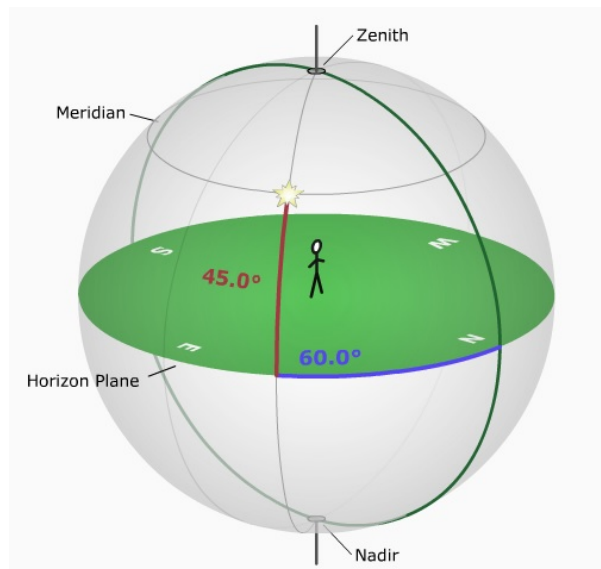
Considerando a esfera celeste com raio infinito e colocando o observador no seu centro nos resulta em um erro mínimo, como aponta Lima Neto (2017):

[..] a distância entre um observador qualquer e o centro da Terra (cerca de 6400 km) é muito menor que a distância aos astros (a Lua está, em média, a 380.000 km, o Sol a 150 milhões, e as estrelas estão muito além do sistema solar) o erro que se faz é, na maioria dos casos, desprezível (LIMA NETO, 2017, p. 1).

Tendo o conceito de esfera celeste definido, o primeiro sistema de coordenadas que veremos será o sistema de coordenadas horizontais. Nesse sistema:

- O ponto que é chamado *zênite* é o ponto da esfera acima da cabeça do observador. Isto é, Z é a interseção de uma reta perpendicular ao plano do observador, no qual se situam os pontos cardeais: norte (N), leste (E), sul (S) e oeste (W) com a esfera celeste;
- O plano que contém o zênite Z, os pontos cardeais N e S é denominado *plano meridiano*, cuja interseção com a esfera celeste (circunferência máxima) define o *meridiano astronômico do observador (linha meridiana)*;
- A circunferência máxima que é a interseção do plano horizontal do observador com a esfera celeste é o *horizonte do observador*;

Figura 3.7: Coordenadas Horizontais



Fonte: *Astronomy Simulations and Animations (University of Nebraska–Lincoln)*.

- O plano que contém o observador, o zênite e o astro é chamado de *vertical do astro*. A interseção do vertical do astro com a esfera celeste define uma circunferência máxima do plano vertical;
- A direção diretamente abaixo do observador, ou seja, o ponto da esfera celeste diametralmente oposto ao zênite é chamado *Nadir*.

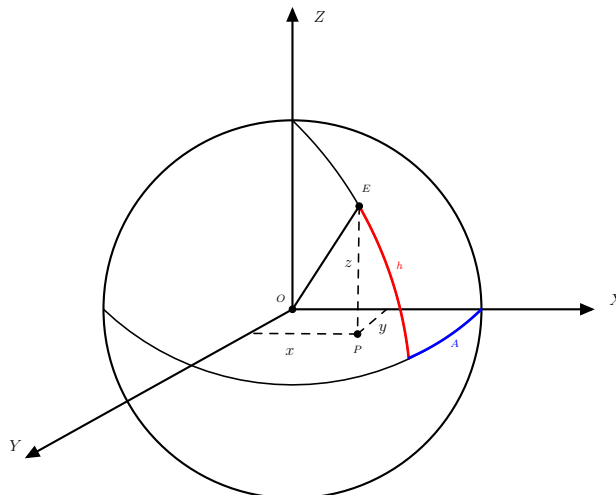
A abscissa esférica no sistema horizontal é o *azimute*  $A$ , definido como o ângulo contado entre o plano meridiano e o vertical do astro, variando de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . Quando o astro intercepta o meridiano, seu azimute será  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ . A ordenada esférica é a *altura*  $h$ , ângulo entre o plano horizontal do observador e o segmento definido pelo observador e pelo astro. A altura varia de  $0^\circ$  (astro no horizonte) a  $\pm 90^\circ$  (astro no zênite ou nadir). Na Figura 3.7 temos que  $A = 60^\circ$  e  $h = 45^\circ$  são as coordenadas da estrela.

É comum substituir a altura  $h$  pela zenital  $z$ , que é o ângulo entre o segmento que vai do observador até o zênite e o segmento do observador até o astro. Desse modo, obtemos que a altura e a zenital são ângulos complementares, isto é:

$$h + z = 90^\circ \quad (3.1)$$

Vamos determinar as coordenadas retilíneas no sistema horizontal<sup>2</sup>. Para isso, considere a esfera da Figura 3.8 de raio  $r$ . Iremos definir as coordenadas  $(x, y, z)$  do ponto E.

Figura 3.8: Coordenadas do ponto E



Fonte: A autora.

<sup>2</sup> Essas relações podem ser obtidas de maneira análoga para os próximos sistemas de coordenadas.

Para determinar  $x$  note que:

$$\cos(h) = \frac{\overline{OP}}{r} \Rightarrow \overline{OP} = r \cdot \cos(h) \quad (3.2)$$

$$\cos(\widehat{A}) = \frac{x}{\overline{OP}} \Rightarrow x = \overline{OP} \cdot \cos(\widehat{A}) \quad (3.3)$$

Substituindo 3.2 em 3.3, temos que:

$$x = r \cdot \cos(h) \cdot \cos(\widehat{A})$$

Para determinar  $y$ :

$$\cos(90^\circ - \widehat{A}) = \frac{y}{\overline{OP}} \Rightarrow y = \overline{OP} \cdot \cos(90^\circ - \widehat{A}) \quad (3.4)$$

Substituindo 3.2 em 3.4, temos:

$$\begin{aligned} y &= r \cdot \cos(h) \cdot \cos(90^\circ - \widehat{A}) \\ &= r \cdot \cos(h) \cdot (\cos 90^\circ \cdot \cos \widehat{A} + \sen 90^\circ \cdot \sen \widehat{A}) \\ &= r \cdot \cos(h) \cdot \sen(\widehat{A}) \end{aligned}$$

Finalmente, para determinar  $z$ , basta observar que:

$$\sen(h) = \frac{z}{r}$$

O que implica que:

$$z = r \cdot \sen(h)$$

Além disso, temos:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\widehat{A} = \arctan(y/x)$$

$$h = \arcsin(z/r)$$

De acordo com Arana (2000) o sistema de coordenadas horizontais é local, uma vez que as coordenadas  $(A, h)$  dependem da posição do observador e da época da observação.

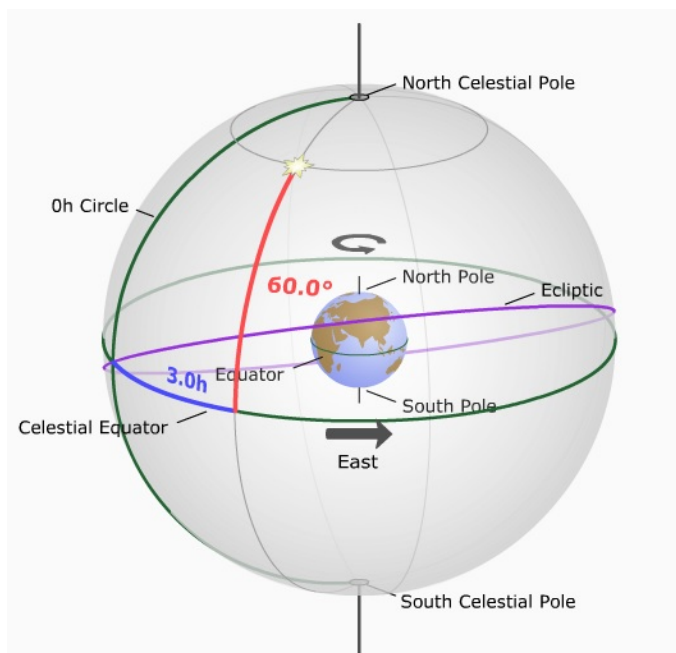
O que veremos a seguir é um sistema de coordenadas que não depende da posição do observador, ou seja, utilizável por todos os observadores.

### 3.3 Coordenadas Equatoriais

Assim como o horizontal, o sistema equatorial de coordenadas, é baseado em dois ângulos e enquanto no sistema horizontal o plano de referência é o plano horizontal do observador, no sistema equatorial, o plano de referência é o plano que contém o equador da Terra e o equador celeste.

A condição básica para que este sistema seja universal, isto é, independa da posição do observador é o fato de haver um único plano equatorial reconhecido por todos os observadores. Como já vimos a esfera celeste tem raio infinito, logo é impossível reproduzi-la em uma figura. Porém, para que possamos visualizar os equivalentes celestes ao equador (equador celeste) e polos geográficos (polos celestes norte e sul) vamos considerar a Figura 3.9, representando a terra (esfera interna) e a esfera celeste (esfera externa)<sup>3</sup>.

Figura 3.9: Coordenadas Equatoriais



Fonte: *Astronomy Simulations and Animations (University of Nebraska–Lincoln)*.

Para compreender esse sistema de coordenadas faremos uma breve discussão do conceito de eclíptica.

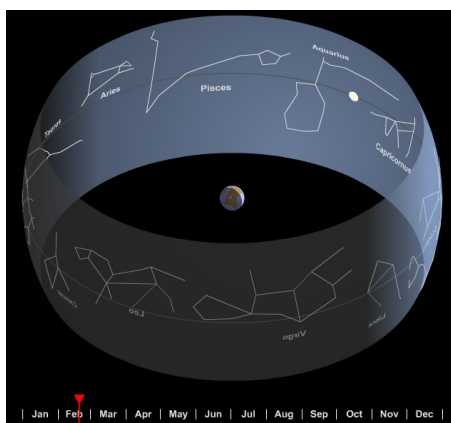
---

<sup>3</sup> Para entendermos melhor o sistema de coordenadas equatoriais e horárias, é importante que tenhamos em mente que o movimento de rotação da Terra acontece no sentido anti-horário. Isso significa que a Terra gira no sentido oeste-leste e deste modo, o movimento aparente do sol, para nós, ocorre do leste para o oeste.

### 3.3.1 Rodovia no céu

Segundo Ridpath (2011) podemos definir a eclíptica como sendo uma rodovia que o Sol parece seguir contra as estrelas à medida que a Terra o orbita a cada ano. Como o eixo da terra possui uma inclinação de  $23.5^\circ$ , a eclíptica forma esse ângulo com o equador celeste. As constelações do zodíaco são atravessadas pela eclíptica (Figura 3.10) e os planetas orbitam em um plano estreito próximo a ela.

Figura 3.10: Constelações do zodíaco



Fonte: *Astronomy Simulations and Animations (University of Nebraska-Lincoln)*.

De acordo com Arana (2000):

A interseção do plano da eclíptica com o plano do equador celeste, tem-se a linha dos equinócio ou linha equinocial, em cujas extremidades tem-se os pontos equinociais. O ponto equinocial que o Sol em seu movimento anual aparente atinge ao passar do hemisfério sul para o norte recebe o nome de *ponto vernal* ( $\gamma$ ) ou *Áries* (neste instante tem início, no hemisfério sul, o outono, e primavera no hemisfério oposto). O ponto  $\Omega$ , que o Sol alcança ao cruzar o equador do norte para o sul, chama-se *ponto libra* (neste instante tem início a primavera no hemisfério sul, e outono no hemisfério norte) (ARANA, 2000, p. 23-24).

Deste modo, tendo esses conceitos definidos voltamos agora ao sistema de coordenadas equatoriais, em que a abscissa desse sistema será a ascensão reta  $\alpha$  definida como sendo o arco do equador contado a partir do ponto vernal até o meridiano do astro. Varia de  $0^\circ$  até  $360^\circ$ , sendo comum atribuir um domínio de 0h até 24h (1h equivale a  $15^\circ$ ).

A declinação  $\delta$  (ordenada) é definida como o ângulo entre o plano equatorial e o segmento que liga o astro até a terra. Assim como no sistema horizontal, o sinal de

$\delta$  caracteriza os pontos dos diferentes hemisférios separados pelo plano de referência:  $\delta > 0^\circ$  ( $\delta < 0^\circ$ ) corresponde a pontos a norte (sul) do equador celeste. Já o conjunto de todos os pontos cuja declinação é constante é chamado de paralelo celeste ou paralelo de declinação. A distância polar  $p$  é análoga a distância zenital no sistema horizontal, sendo definida como a distância entre o polo norte celeste e o astro. De onde segue que  $p$  e  $\delta$  são complementares:

$$\delta + p = 90^\circ$$

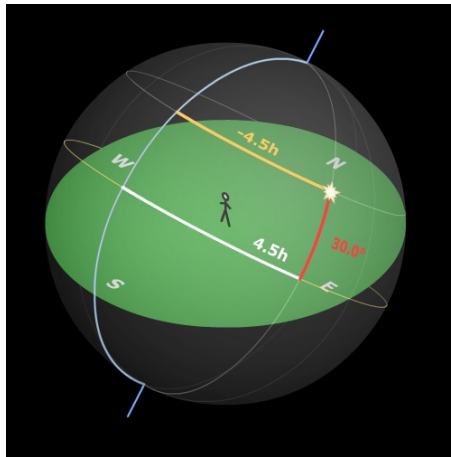
Voltando a Figura 3.9, temos que as coordenadas do astro nesse sistema de coordenadas é (3h,  $60^\circ$ ) ou ainda ( $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ).

### 3.4 Coordenadas Horárias

Vejamos agora um sistema que chamamos de misto, pois é definido pela declinação  $\delta$  do astro (ordenada) que já vimos que não depende da posição do observador e o ângulo horário (abscissa) que depende do meridiano do observador como vemos na definição abaixo.

**Definição 3.6** *O ângulo horário  $H$  de um astro medido sobre o equador é o ângulo entre o meridiano astronômico do observador (circunferência máxima que contém os pontos cardeais norte e sul e o zênite) e o meridiano que contém o astro (circunferência máxima que contém o astro o polo norte e sul celeste) variando de 0h até 24h.  $H$  cresce acompanhando o movimento diurno dos astros de leste para oeste.*

Figura 3.11: Coordenadas Horárias



Fonte: *Astronomy Simulations and Animations (University of Nebraska–Lincoln)*.

Na Figura anterior temos que as coordenadas do astro nesse sistema são  $(-4.5h, 30^\circ)$  ou ainda  $(19.5h, 30^\circ)$ . Observe que nesse sistema o ângulo horário cresce, a partir do meridiano do observador, em direção oposta à ascensão reta.  $H$  cresce para oeste, acompanhando o movimento diurno dos astros (de leste para oeste) e  $\alpha$  do sistema anterior, cresce para leste.

Segundo Santiago (2005):

É precisamente o fato de acompanhar o movimento diurno dos astros que torna  $H$  um indicador útil para contagem de tempo. Por exemplo, se num dado instante uma estrela está no meridiano astronômico de um observador, seu ângulo horário é  $H = 0^\circ$ . Um dia depois, após a Terra dar um giro completo em torno de seu eixo, a estrela estará novamente passando pelo meridiano do observador. Durante estas duas passagens meridianas, o ângulo horário da estrela terá variado de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . Podemos, portanto, definir a hora do dia com base no ângulo horário do astro. Daí o nome! Como o ângulo horário varre o domínio de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  em um dia, podemos dizer que qualquer estrela percorre  $15^\circ = (360^\circ/24h)$  de ângulo horário por hora. Essa é na verdade a velocidade angular de rotação de nosso planeta (SANTIAGO, 2005, p. 16).

O próximo assunto que apresentaremos trata-se do triângulo de posição usado para fazer transformações de um sistema de coordenadas para outro e também para determinar as coordenadas do astro quando conhecida a posição geográfica do lugar, ou determinar as coordenadas geográficas do lugar quando conhecidas as coordenadas do astro.

### 3.5 O Triângulo de Posição

O triângulo de posição é determinado por três vértices específicos como vemos na definição abaixo.

**Definição 3.7** *Denomina-se triângulo de posição o triângulo situado na esfera celeste que tem por vértices: o astro, o polo elevado (polo norte ou sul) e o zênite.*

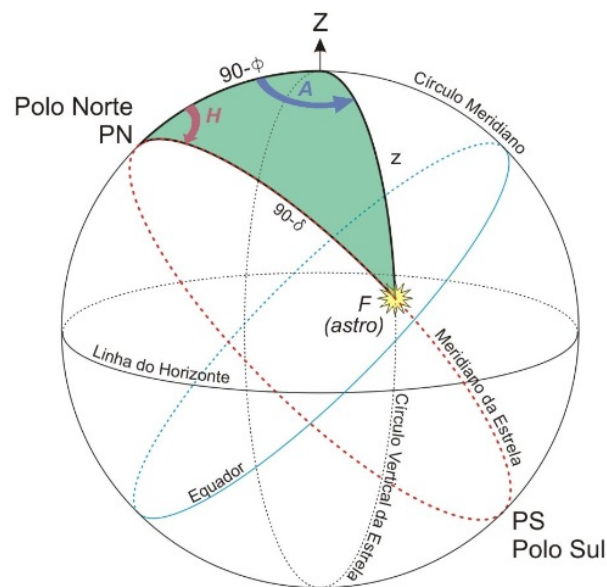
Sendo  $\phi$  a latitude do observador, podemos escrever os lados e os ângulos do triângulo de posição são, respectivamente:

- arco entre o zênite e o polo elevado medindo  $90^\circ - |\phi|$ ;
- arco entre o zênite e astro ( $z$ );



- arco entre o polo elevado e o astro medindo  $90^\circ - |\delta|$ ;
- ângulo com vértice no zênite sendo  $A$  (no hemisfério norte) ou  $A-180^\circ$  (no hemisfério sul);
- ângulo com vértice no polo elevado:  $H$ ;
- ângulo com vértice na estrela.

Figura 3.12: Triângulo de Posição



Fonte: OLIVEIRA FILHO; SARAIVA, 2014, p. 30<sup>4</sup>.

### 3.5.1 Relações entre a distância zenital ( $z$ ), azimute ( $A$ ), ângulo horário ( $H$ ) e declinação ( $\delta$ )

Começamos usando a lei dos cossenos para os lados 2.3 para o caso mais geral no hemisfério norte ( $\delta$  e  $\phi$  positivos), obtendo:

$$\cos(z) = \cos(90^\circ - \phi) \cdot \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \phi) \cdot \sin(90^\circ - \delta) \cdot \cos(H)$$

De onde segue que:

$$\cos(z) = \sin(\phi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\phi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(H)$$

<sup>4</sup> Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/livro.pdf>> Acesso em Jun. 2017.

Isolando  $\cos(H)$  encontramos:

$$\cos(H) = \cos(z) \cdot \sec(\phi) \cdot \sec(\delta) - \operatorname{tg}(\phi) \cdot \operatorname{tg}(\delta)$$

Uma aplicação da fórmula acima é determinar o ângulo horário de um astro no instante do nascer ou do ocaso, quando sua distância zenital é  $90^\circ$ , obtendo assim:

$$\cos(H) = \cos(90^\circ) \cdot \sec(\phi) \cdot \sec(\delta) - \operatorname{tg}(\phi) \cdot \operatorname{tg}(\delta)$$

E portanto:

$$\cos(H) = -\operatorname{tg}(\phi) \cdot \operatorname{tg}(\delta) \tag{3.5}$$

**Exemplo 3.8** *Quanto tempo permanecerá o Sol acima do horizonte em Maringá - PR, cuja latitude é  $-23.4210^\circ$ , no dia do Solstício de inverno no hemisfério sul, em que a declinação do Sol é de aproximadamente  $23.5^\circ$ ?*

*Pela relação 3.5 temos:*

$$\cos(H) = -\operatorname{tg}(-23.4210^\circ) \cdot \operatorname{tg}(23.5^\circ)$$

*De onde segue que:*

$$\cos(H) \approx 0.188349$$

*Logo,  $H \approx 79.143551$ . Como o tempo de permanência é duas vezes o ângulo  $H$ , obtemos que  $2H \approx 158.287102^\circ$ .*

*Aplicando regra de três temos que  $H \approx 10.55h \approx 10h$  e  $33min$ .*

Especificamente, no dia do equinócio de inverno em Maringá, o sol fica acima do horizonte aproximadamente 10h e 41min. O erro de  $8\text{min}^5$  é devido, além dos arredondamentos, à definição de que o dia começa com a borda superior do Sol no horizonte, e o dia termina com a borda superior do Sol no horizonte, e não o centro do disco solar, como é assumido na relação que obtemos em 3.5.

---

<sup>5</sup> Erro de aproximadamente 1.25%.

### 3.5.2 Distância Angular entre estrelas

A separação angular entre duas estrelas é a distância medida ao longo do círculo máximo passando pelas duas estrelas. Deste modo, sejam  $A$  e  $B$  as estrelas, e sejam  $\alpha_A$ ,  $\delta_A$ ,  $\alpha_B$  e  $\delta_B$  as suas coordenadas, ascensão reta e declinação. Construindo agora um triângulo esférico em que um dos lados seja a separação angular entre elas e os outros dois lados sejam as suas distâncias polares, ou seja, os arcos ao longo dos meridianos das estrelas desde o polo  $P$  até as estrelas, temos pela lei dos cossenos para os lados 2.3:

$$\cos(\widehat{AB}) = \cos(\widehat{PA}) \cdot \cos(\widehat{PB}) + \sin(\widehat{PA}) \cdot \sin(\widehat{PB}) \cdot \cos(\widehat{APB}) \quad (3.6)$$

Em que:

$\widehat{AB}$  = distância entre  $A$  e  $B$ ;

$\widehat{PA}$  = distância polar de  $A = 90^\circ - \delta_A$ ;

$\widehat{PB}$  = distância polar de  $B = 90^\circ - \delta_B$ ;

$\widehat{APB}$  = ângulo entre o meridiano de  $A$  e o meridiano de  $B = \alpha_A - \alpha_B$ .

Logo:

$$\cos(\widehat{PA}) = \sin(\delta_A);$$

$$\cos(\widehat{PB}) = \sin(\delta_B);$$

$$\sin(\widehat{PA}) = \cos(\delta_A);$$

$$\sin(\widehat{PB}) = \cos(\delta_B);$$

$$\cos \widehat{APB} = \cos(\alpha_A - \alpha_B).$$

Substituindo em 3.6:

$$\cos(\widehat{AB}) = \sin(\delta_A) \cdot \sin(\delta_B) + \cos(\delta_A) \cdot \cos(\delta_B) \cdot \cos(\alpha_A - \alpha_B) \quad (3.7)$$

Vejamos agora um exemplo extraído de [21].

**Exemplo 3.9** *Qual o tamanho da constelação do Cruzeiro do Sul, medido pelo eixo maior da Cruz<sup>6</sup>?*

---

<sup>6</sup> Cruzeiro do Sul é a menor, porém instantaneamente reconhecível constelação. Ela espreme-se entre as pernas de Centauro. Foi transformada em constelação e chamada Cruzeiro do Sul por navegantes europeus do século XVI. Eles estabeleciam sua rota com base no fato de que o eixo maior da cruz aponta para o polo sul celeste. Está numa área rica da Via Láctea, interrompida pela escura nebulosa do Saco de Carvão (RIDPATH, 2011).

O eixo maior da Cruz é formado pelas estrelas Acruz ( $\alpha = 12\text{h}26\text{min}37\text{s}$ ;  $\delta = -63^\circ 06'$ ) e Gacruz ( $\alpha = 12\text{h}31\text{min}11\text{s}$ ;  $\delta = -57^\circ 07'$ ).

Denotando por  $X$  o tamanho do eixo maior da Cruz, e aplicando 3.7, temos:

$$\cos X = \sin \delta_{Gacruz} \cdot \sin \delta_{Acruz} + \cos \delta_{Gacruz} \cdot \cos \delta_{Acruz} \cdot \cos(\alpha_{Gacruz} - \alpha_{Acruz}) \quad (3.8)$$

E além disso:

$$\delta_{Gacruz} = -57^\circ 07' \approx -57.11^\circ$$

$$\alpha_{Gacruz} = 12\text{h}31\text{m}11\text{s} \approx 187.80^\circ$$

$$\delta_{Acruz} = -63^\circ 06' \approx -63.10^\circ$$

$$\alpha_{Acruz} = 12\text{h}26\text{m}37\text{s} \approx 186.65^\circ$$

Substituindo os valores acima em 3.8:

$$\cos X = \sin(-57.11^\circ) \cdot \sin(-63.10^\circ) + \cos(-57.11^\circ) \cdot \cos(-63.10^\circ) \cdot \cos(187.80^\circ - 186.65^\circ)$$

$$\text{Logo, } \cos X \approx 0.9945 \Rightarrow X \approx 6^\circ.$$

## CAPÍTULO 4

# LA CONSTRUÇÃO DE INSTRUMENTOS ANTIGOS PARA A ORIENTAÇÃO GEOGRÁFICA E A MARCAÇÃO DO TEMPO

No mundo moderno, com um simples aparelho que tenha acesso a internet é possível descobrir as coordenadas geográficas de nossa localização ou de qualquer outro lugar do mundo, mas nem sempre foi assim. Você já se perguntou como o homem se orientava em alto mar, nas grandes navegações? E como era possível saber as horas do dia sem um relógio mecânico? A proposta desse capítulo é mostrar alguns dos muitos instrumentos que foram construídos há muito tempo atrás com o objetivo simples de orientação e marcação do tempo. Nas seções 4.1 e 4.2 veremos dois instrumentos que irão nos ajudar a determinar a latitude e além disso, veremos que a determinação da longitude foi um problema sem solução durante muito tempo, com prêmios milionários para quem o resolvesse, o que resultou em muito estudo, colaborou para o avanço da ciência e nos trouxe os primeiros relógios marítimos que podiam contar o tempo com precisão no mar. Por fim, na seção 4.3 construiremos um relógio de Sol Equatorial.

Para a elaboração deste capítulo foram consultados vários textos que serviram de apoio para a pesquisa, entre eles Dilão (1999), Crato (2003) e Pereira (2000).

### 4.1 O Quadrante

O quadrante é um instrumento de medição que foi muito usado antes da invenção do telescópio, principalmente nas navegações. Esse instrumento foi construído em vários tamanhos, alguns eram enormes de modo a aumentar a precisão de medida. Na Figura 4.1,

temos um quadrante que se encontra em Funchal, cidade portuguesa na ilha da Madeira, no museu “*Madeira Story Centre*”.

Figura 4.1: Quadrante



Fonte: Fotografia de Micael Amaral<sup>1</sup>.

O funcionamento do quadrante é simples, como vemos acima ele é formado por um quarto de um círculo graduado no qual colocamos um fio de prumo. Sua função primária é a medição da altura dos astros do sistema horizontal de coordenadas. Os quadrantes que são usados em astronomia apresentam outros recursos, como por exemplo, escalas com as tangentes de certos ângulos. Foi um dos primeiros instrumentos astronômicos usado nas navegações dos Portugueses com o objetivo de obter a altura da Estrela Polar e desse modo, determinar a latitude do local como veremos a seguir. Por ora vejamos como construí-lo na subseção abaixo.

### 4.1.1 Construindo o Quadrante

No Apêndice A, disponibilizamos um modelo de quadrante para a impressão<sup>2</sup>. A sua construção é bastante simples, além do modelo você precisará de:

1. Um pedaço de madeira ou papel resistente que servirá como base;
2. Barbante e uma pequena chumbada (para fazer o fio de prumo);
3. Cola e um canudo de plástico;

<sup>1</sup> Disponível em: <<http://geia-deusaterra.blogspot.com.br>> Acesso em set. 2017.

<sup>2</sup> O Modelo disponível foi adaptado de [17].

4. Papel *Contact* caso queira aumentar a durabilidade do instrumento.

No quadro 4.1 fizemos um resumo do processo de construção e uso.

Quadro 4.1: Construção do quadrante

	<p>1. Após imprimir o quadrante, cole-o sobre uma madeira ou um papel resistente. Além disso, cole um canudo na extremidade próxima ao ângulo de <math>90^\circ</math> e na sua ponta coloque um fio de prumo como mostra a foto ao lado. Para aumentar a durabilidade do instrumento você pode colar um papel <i>Contact</i>.</p>
	<p>2. Para usar o instrumento na medição da altura do Sol basta segurá-lo de modo que a sombra do canudo forme um anel na parede. Caso você queira fazer a medição da altura de um astro durante a noite você deve olhar pelo canudo para esse astro. O fio de prumo em ambos os casos deve ficar esticado sobre o ângulo que corresponde a altura do objeto em questão. Como já vimos você também poderá usar o instrumento para obter distâncias, visto que em azul temos o resultado das tangentes de vários ângulos.</p>

Fonte: A autora.

Na Figura 4.2 temos a representação de um quadrante que foi apontado para o astro  $A$ . O segmento  $PD$  é o fio de prumo. Como podemos ver, o quadrante indica que o ângulo  $\beta$  é a altura do astro  $A$  em relação ao horizonte  $\overleftrightarrow{BP}$ . Vejamos a justificativa geométrica

do seu funcionamento:

Primeiramente, observe que sendo o quadrante 1/4 do círculo, temos que ao apontarmos para o astro encontramos que  $\widehat{APC} = 90^\circ$ . Do sistema horizontal de coordenadas a altura do astro é  $\alpha$  e como  $\widehat{APC} = \widehat{APB} + \widehat{BPC} = 90^\circ$  obtemos que:

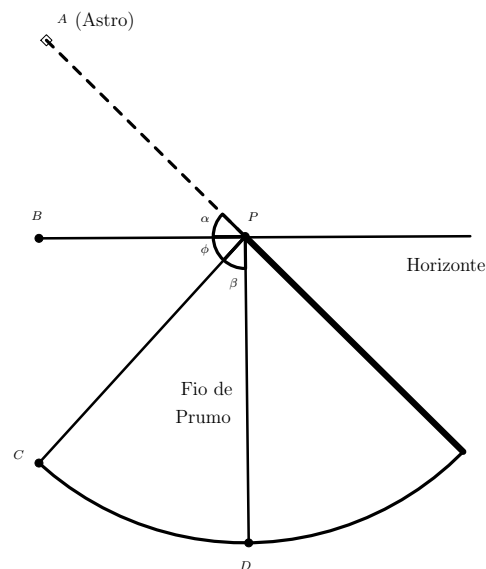
$$\alpha + \phi = 90^\circ \quad (4.1)$$

Além disso, temos que o fio de prumo determina com o horizonte um ângulo de  $90^\circ$ , de onde segue que  $\widehat{BPD} = \widehat{BPC} + \widehat{CPD} = 90^\circ$ , isto é:

$$\phi + \beta = 90^\circ \quad (4.2)$$

De 4.1 e 4.2 obtemos que  $\alpha = \beta$ .

Figura 4.2: Representação geométrica do uso do quadrante para a medição da altura dos astros



Fonte: A autora.

### 4.1.2 Medindo a latitude pelos polos

O primeiro modo que iremos apresentar para determinar a latitude de um local com o quadrante é determinando o Polo Norte ou Sul celeste, dependendo da localização do observador. Se ele estiver no hemisfério norte ele deve localizar a estrela polar que está na direção do eixo da terra. Porém, se o observador estiver no hemisfério sul, não há uma



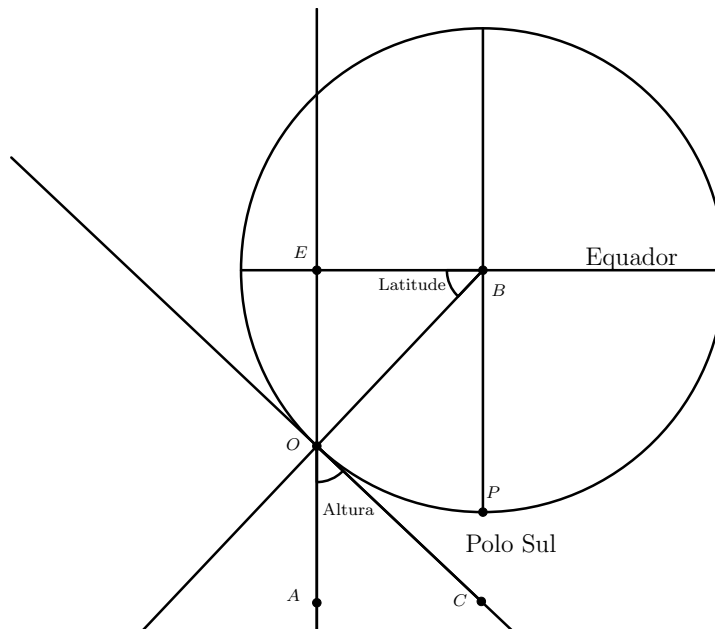
estrela polar, na verdade o eixo aponta para uma região onde quase não se vê estrela e o observador deve proceder do seguinte modo<sup>3</sup>:

1. Localizar o cruzeiro do sul;
2. Medir o eixo maior da cruz e prolonga-lo na direção do pé da cruz 4.5 vezes.

Podemos usar o quadrante para medir o eixo maior da cruz (apontando-o para uma ponta da cruz e colocando o fio de prumo na direção da outra). Como vimos no Exemplo 3.9 o eixo maior da cruz mede aproximadamente  $6^\circ$ , deste modo 4.5 vezes 6 resulta em  $27^\circ$ . Usando o quadrante novamente podemos apontá-lo para o pé da cruz e usar o fio de prumo para marcar  $27^\circ$ , determinando assim a localização do polo sul celeste.

Para entendermos o motivo da altura do polo sul ser a latitude do local vamos tomar como referência a Figura 4.3, em que o observador encontra-se no ponto  $O$  e mediu a altura do polo sul em relação ao horizonte.

Figura 4.3: Determinação da latitude no hemisfério sul



Fonte: A autora.

Note que a reta  $\overleftrightarrow{EO}$  é paralela ao eixo de rotação da terra, logo  $\widehat{OBP} = \widehat{EOB}$ . Construindo a reta tangente à terra no ponto onde está o observador, obtemos que:

$$\widehat{BOC} = 90^\circ.$$

<sup>3</sup> Método retirado de [20]

E segue que  $E\hat{O}B$  e  $A\hat{O}C$  são complementares, pois  $E\hat{O}A = 180^\circ$ :

$$E\hat{O}B + A\hat{O}C = 90^\circ \quad (4.3)$$

Além disso, podemos observar que:

$$E\hat{B}O + O\hat{B}P = 90^\circ \quad (4.4)$$

Como vimos que  $O\hat{B}P = E\hat{O}B$ , de 4.3 e 4.4 segue que  $A\hat{O}C = E\hat{B}O$ . Ou seja, medindo a altura do polo sul, encontramos a latitude do local de observação.

Com este resultado, para testar o funcionamento do quadrante para determinar a latitude de Umuarama-PR durante a noite, escolhemos um local afastado das luzes da cidade e por volta das 22h30min<sup>4</sup> fizemos a medição. Deste modo, o primeiro passo foi encontrar o Cruzeiro do Sul e prolongar o eixo maior da cruz 4.5 vezes (27° com o auxílio do quadrante), encontrando o polo sul celeste como mostra a fotografia abaixo. Apontando o quadrante para o polo, encontramos uma marcação de 23°, que é próxima da latitude real (23.7661°).

Figura 4.4: Cruzeiro do Sul em Umuarama-PR



Fonte: A autora.

<sup>4</sup>Verificação realizada no dia 13 de fevereiro de 2018 (8% da Lua visível).

Existem vários registros do uso do quadrante nas navegações. Cristóvão Colombo, por exemplo, usou um quadrante na sua primeira viagem para as Índias. Ele menciona seu uso várias vezes em seu diário, tendo utilizado para determinar a altura da estrela polar e conseqüentemente a latitude, aparentemente, não obtendo sucesso (o balanço do navio, pode ser um dos motivos, uma vez que provocava erros grosseiros nas medidas das alturas dos astros).

Contudo, os problemas que envolviam latitude e longitude foram motivações para a criação e aperfeiçoamento de vários instrumentos de medição e com a expansão das navegações houve a necessidade de evoluir a ciência náutica. Na próxima seção iremos abordar uma outra forma de calcular a latitude sem a determinação dos polos celestes.

### 4.1.3 Cálculo da latitude por intermédio da altura angular do Sol

No texto “Capitães, naus e caravelas da armada de Cabral” (Pereira, 1979) encontramos que quanto mais as expedições se estendiam para o sul (passando o equador), mais difícil era determinar a latitude, pois a estrela polar desaparecia. Como provavelmente não sabiam como determinar o polo sul celeste, o novo processo para obter a latitude consistia na observação da altura do Sol na sua passagem meridiana e também o conceito de declinação o que tornou a medição da latitude mais precisa que anteriormente<sup>5</sup>. Uma das perguntas que pode surgir aqui é o porquê de se considerar a passagem meridiana do Sol, isto é, quando o Sol passa pelo meridiano do observador. E a resposta está no fato de que esse momento de passagem é um caso particular do triângulo de posição. Neste caso, o ângulo no polo é nulo e assim, o triângulo se resume a um segmento de reta, sendo fácil calcular o comprimento deste por intermédio de simples operações de somas ou subtrações.

Para entendermos como funcionava o método de determinar a latitude usando a altura do Sol na sua passagem meridiana dividimos o cálculo da latitude em dois casos sendo que no primeiro construímos o quadro 4.2 com uma série de representações com o objetivo de visualizarmos como é feita as relações .

*1º caso: latitude do observador e declinação do Sol com o mesmo sinal.*

Sem perda de generalidade, vamos supor que a latitude do observador e a declinação

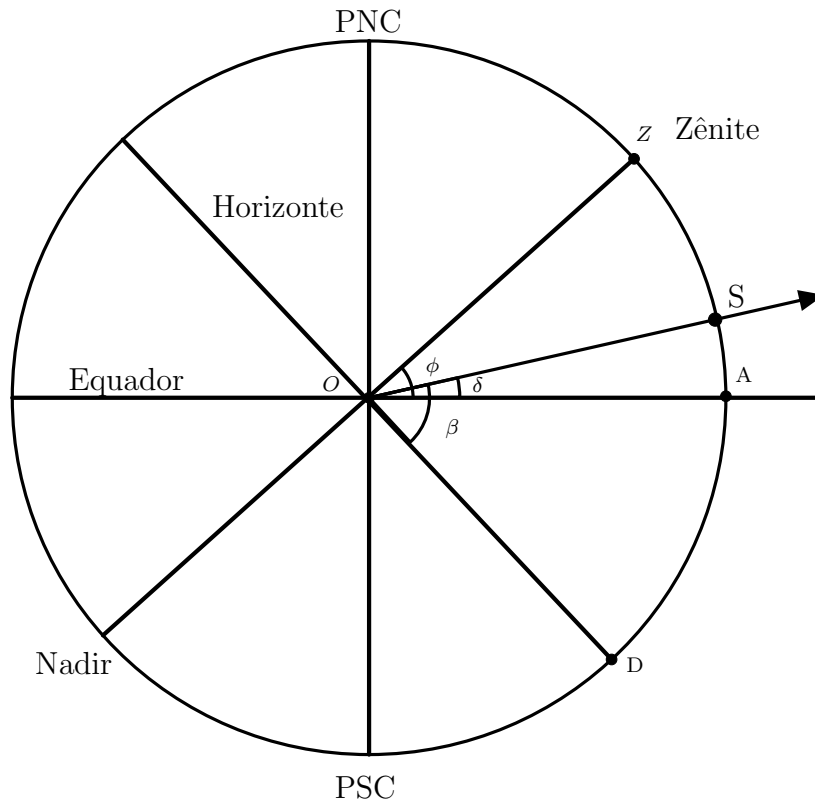
---

<sup>5</sup> Este processo era conhecido como o Regimento do Sol e indicava os cálculos a fazer em função da posição relativa do observador e do astro. (Retirado do *Portal do astrónomo*. Disponível em: [http://vintage.portaldoastronomo.org/tema\\_pag.php?id=2&pag=4](http://vintage.portaldoastronomo.org/tema_pag.php?id=2&pag=4). Acesso em jan. 2018.)

possuem sinais positivos e vamos considerar as ilustrações do quadro a seguir.

Para os efeitos dessa análise vamos considerar o raio da Terra irrelevante e então podemos representar a situação da última ilustração na figura a seguir, em que o observador se encontra no ponto  $O$ .

Figura 4.5: Latitude e declinação com mesmo sinal



Fonte: A autora (adaptado de [11]).

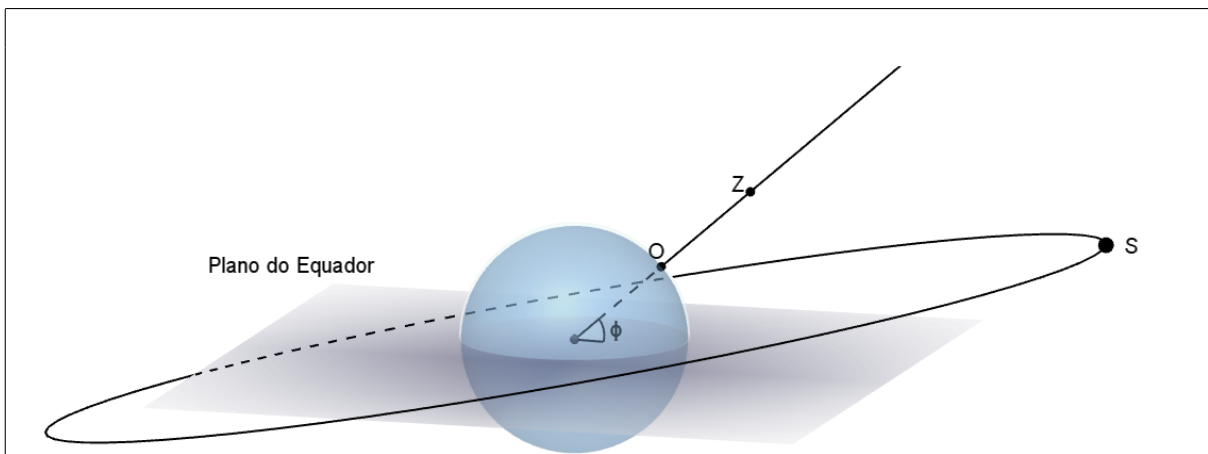
Sendo  $Z$  o zênite, o ângulo  $Z\hat{O}D$  mede  $90^\circ$ . Deste modo, para determinar a latitude do observador podemos usar a seguinte relação:

$$\phi = 90^\circ - \beta + \delta \quad (4.5)$$

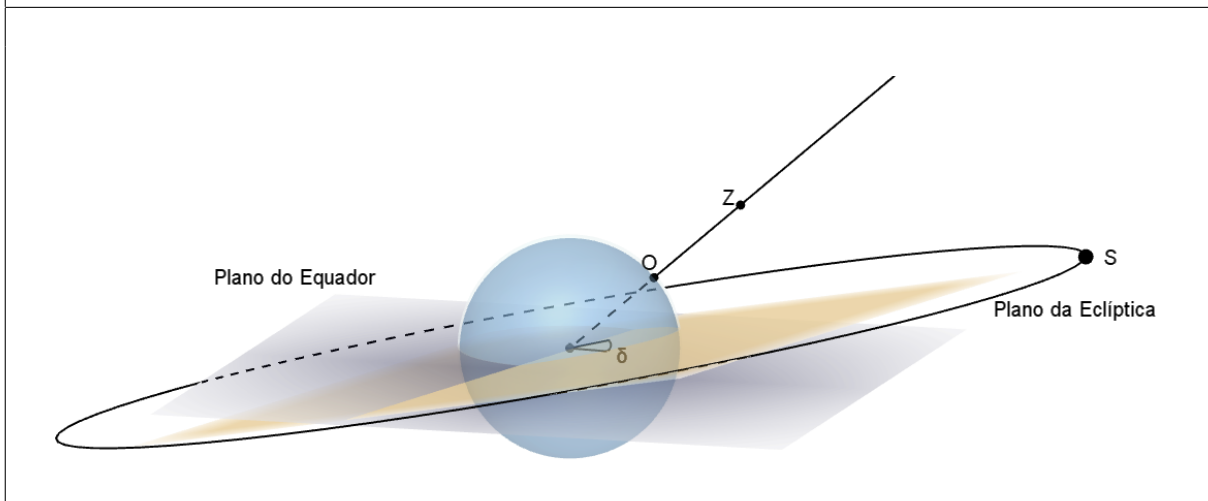
Como estudamos no sistema de coordenadas horizontais podemos substituir a altura do Sol  $\beta$  por sua zenital  $z$ . Como  $90^\circ = z + \beta$  temos que  $90^\circ - \beta = z$ . Logo:

$$\phi = z + \delta \quad (4.6)$$

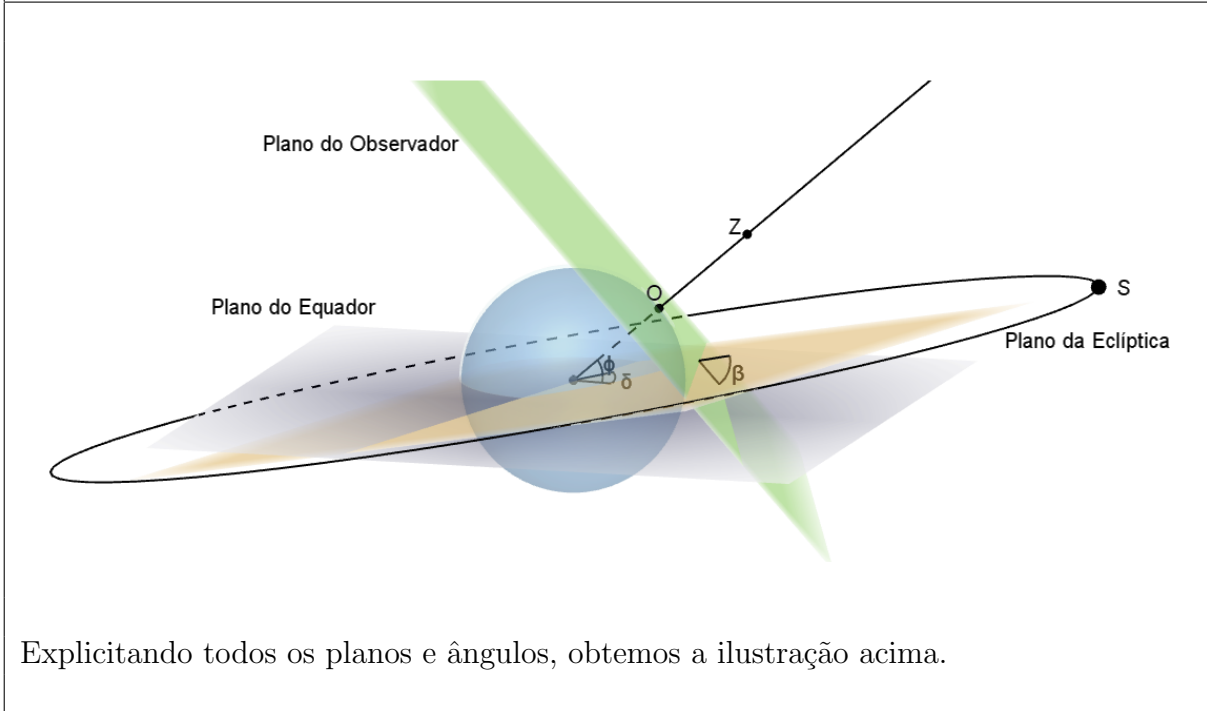
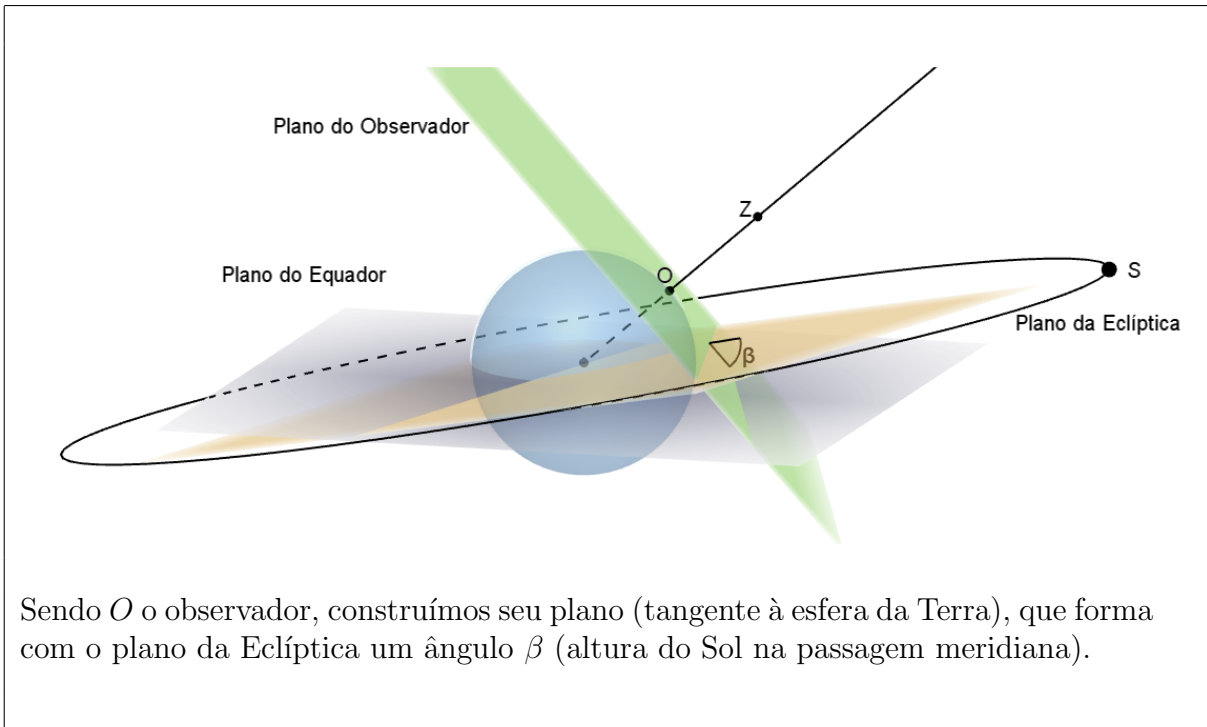
Quadro 4.2: Determinando a latitude - 1º Caso (GeoGebra)



Nessa primeira ilustração, temos a Terra representada como uma esfera azul e seu respectivo plano do Equador, aqui estamos adotando um modelo em que o Sol se movimenta ao redor da Terra. O ponto  $S$  é o Sol (estamos representando-o na sua passagem meridiana),  $O$  é o observador e  $Z$  o zênite. Note que estamos querendo determinar a latitude  $\phi$ .



Vamos considerar agora o plano que contém a eclíptica que determina com o plano do Equador um ângulo  $\delta$ , isto é, ângulo entre o plano do equador e a reta definida pelos centros da Terra e do Sol (declinação do Sol).



Fonte: A autora.

Quando a latitude e a declinação estiverem abaixo do equador (Sinais negativos) o processo é completamente análogo.

*2º caso: latitude do observador e declinação do Sol com o sinais opostos.*

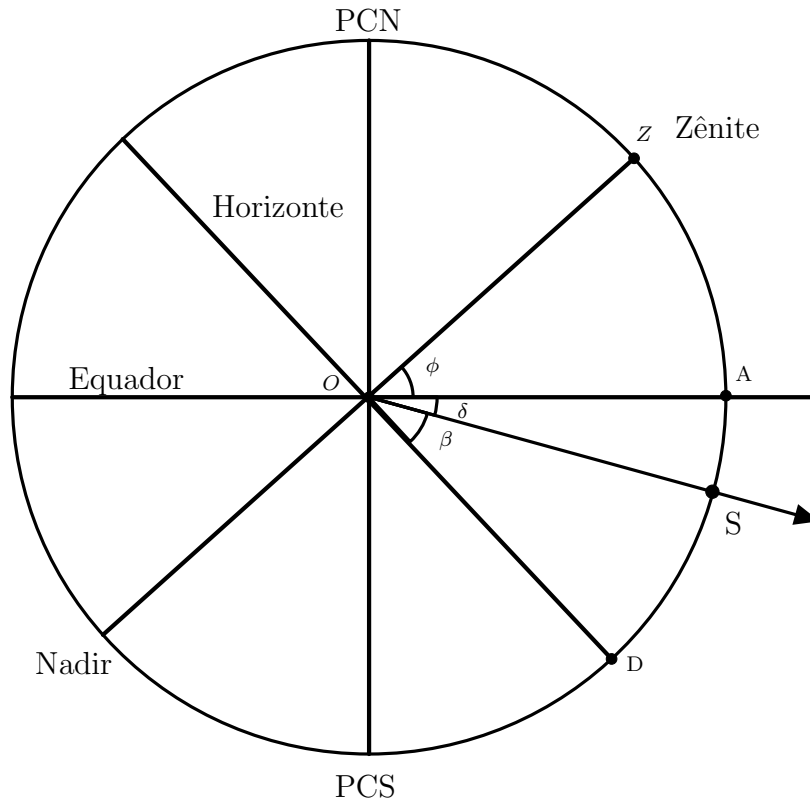
Assim como no caso anterior, podemos assumir que a latitude é positiva e a declinação do Sol é negativa. Assim, vamos tomar como referência a Figura 4.6. Note que  $\widehat{C\hat{O}D} = 90^\circ = \phi + \delta + \beta$ , logo para determinar a latitude  $\phi$ :

$$\phi = 90^\circ - \delta - \beta \quad (4.7)$$

Ou ainda, como no caso anterior, considerando a zenital do Sol:

$$\phi = z - \delta \quad (4.8)$$

Figura 4.6: Latitude e declinação com sinais opostos



Fonte: A autora (adaptado de [11]).

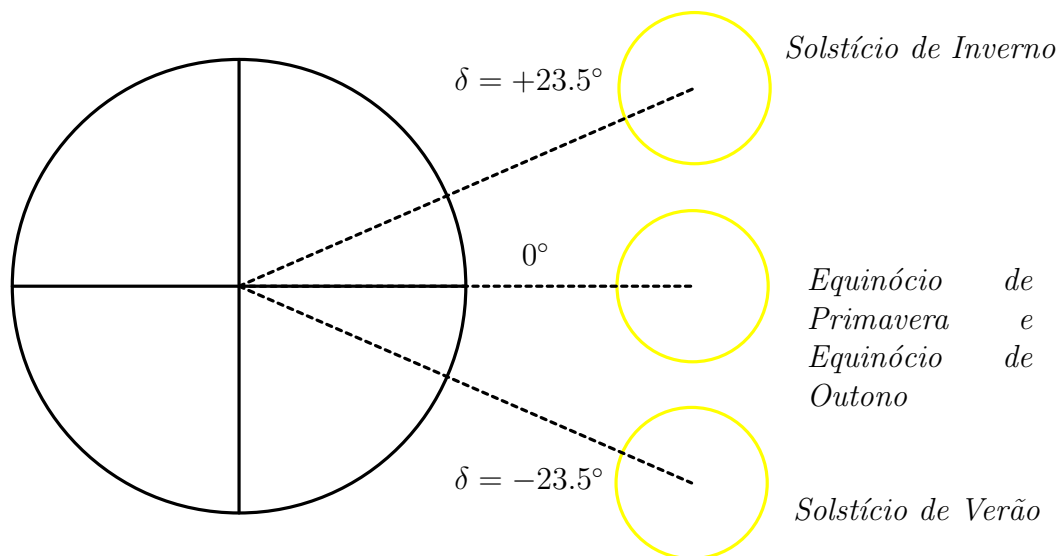
Com as relações que temos, o que precisamos agora é determinar a declinação do Sol. Na época dos descobrimentos usava-se tabelas com a declinação solar de cada dia. Aqui, iremos obter a mesma por intermédio da seguinte fórmula aproximada<sup>6</sup>:

$$\delta \approx 23.5 \cdot \text{sen} \left[ \frac{360}{365} \cdot (NDA + 284) \right] \quad (4.9)$$

Em que o NDA é o número do dia do ano, isto é, 1 janeiro é o dia 1, 2 de janeiro é dia 2,..., 31 de dezembro é dia 365 (ver Apêndice C).

A fórmula aproximada 4.9 é obtida com base no conceito de que declinação solar é o ângulo determinado pelo segmento ligando o centro da terra ao centro do Sol com o plano do equador, sendo no máximo  $\delta = 23.5^\circ$  no Solstício de Inverno e no mínimo  $\delta = -23.5^\circ$  no Solstício de Verão. Além disso, é  $0^\circ$  nos Equinócios de Primavera e Outono como mostra a Figura 4.7.

Figura 4.7: Declinação Solar



Fonte: A autora.

<sup>6</sup> O ano solar tem aproximadamente 625.25 dias, logo a declinação solar num determinado dia de certo mês varia ligeiramente de ano para ano.



Considerando a órbita da terra em torno do Sol circular e com velocidade constante e olhando para as características da declinação temos então que a expressão que a modela em relação aos dias do ano deve variar no intervalo  $[-23.5, 23.5]$ , além disso, nas datas dos equinócios seu valor deve ser próximo de  $0^\circ$  (raízes da função). A cada dia do ano temos uma variação média de  $360^\circ/365$ . Como janeiro é o dia 1 e o primeiro valor que a declinação é  $0^\circ$  ocorre no equinócio de outono geralmente no dia 20/03 ou 21/03 em que o NDA é 79 ou 80, respectivamente, temos que o termo  $(NDA + 284)$  é uma boa aproximação para que o resultado nesses dias seja em torno de  $0^\circ$ . Por exemplo, nos anos em que o equinócio de outono acontece no dia 80:

$$\text{sen}\left[\frac{360}{365} \cdot (NDA + 284)\right] = \text{sen}\left[\frac{360}{365} \cdot (80 + 284)\right] \approx -0.02$$

De onde segue:

$$\delta \approx 23.5 \cdot (-0.02) = -0.47^\circ$$

Uma importante observação é que as declinações podem ser consideradas constantes em cada dia.

#### 4.1.4 O Quadrante como ferramenta no cálculo de alturas e distâncias

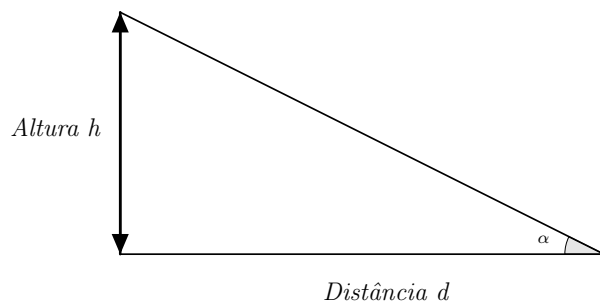
No quadrante que encontramos no Apêndice A podemos observar marcações com as tangentes de alguns ângulos pré calculadas em azul. Essas marcações eram usadas antigamente (antes da invenção do radar) para determinar a distância do navio até um ponto como uma montanha ou faróis de alturas conhecidas, uma vez que olhando para o triângulo retângulo da Figura 4.8 podemos verificar que:

$$h = d \cdot \text{tg}(\alpha) \tag{4.10}$$

E equivalentemente:

$$d = \frac{h}{\text{tg}(\alpha)} \tag{4.11}$$

Figura 4.8: Representação do triângulo retângulo para o cálculo de alturas e distâncias



Fonte: A autora.

Logo, para usar o quadrante para esse fim basta aponta-lo para a extremidade do objeto de referência e observar a indicação do valor em azul do fio de prumo, obtendo assim a  $\text{tg}(\alpha)$ . Conhecendo a distância até o objeto use a relação 4.10 para obter a altura do mesmo e analogamente caso seja conhecido a altura, use a relação 4.11 para determinar a distância.

## 4.2 O instrumento de Sombras

De acordo com Crato (2003), com as tecnologias modernas é possível construir um instrumento que leia de maneira imediata as alturas. Para isso, é necessário construir uma base com uma estaca vertical e estabelecer marcas na base que transforme o comprimento da sombra em alturas angulares. Mas para isso precisamos tomar cuidado, pois, o comprimento da sombra não é proporcional à altura, isso porque quando o Sol está próximo da vertical o comprimento da sombra pouco varia, enquanto que quando está próximo do horizonte o comprimento aumenta rapidamente. Perto do século XV, fazer essas graduações não era tarefa fácil, mas o matemático português Pedro Nunes (1502-1578)<sup>7</sup> resolveu esse problema procurando uma forma de transferir a altura do Sol para um círculo graduado em graus que se encontra em uma superfície plana. Apesar do instrumento de Nunes ser simples foi de grande engenho geométrico.

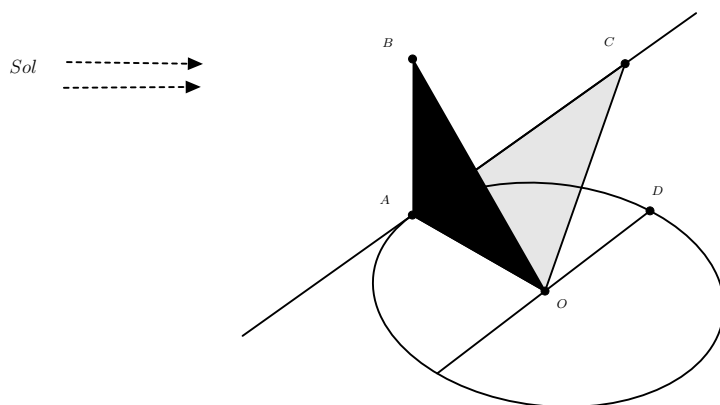
A base desse instrumento era geralmente uma placa quadrada, onde desenhava-se um

---

<sup>7</sup> É muito provável que Pedro Nunes nunca tivesse mandado construir nem tivesse utilizado nenhum desses instrumentos pois, para ele, matemático interessado nos problemas teóricos, as suas criações, mesmo que imaginativas e úteis, eram sobretudo aplicações engenhosas da matemática e geometria. Disponível em: <<http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e32.html>> Acesso em: Ago. 2017.

círculo e traçava-se uma reta tangente. Montado sobre o círculo colocava-se um triângulo retângulo isósceles com catetos de comprimento igual ao raio do círculo. Traçava-se no círculo um diâmetro paralelo à reta tangente e graduava-se o mesmo a partir do ponto  $D$  da Figura 4.9 para o ponto de tangência  $A$ .

Figura 4.9: O instrumento de sombras de Pedro Nunes



Fonte: A autora.

Para obter a altura do Sol (ângulo  $\widehat{BCA}$  na figura acima), colava-se a base na horizontal e rodava-se até que a sombra do triângulo retângulo isósceles coincidissem com a reta tangente  $\overleftrightarrow{AC}$  da figura abaixo. A altura do Sol é a medida do ângulo  $\widehat{COD}$ . A justificativa geométrica do funcionamento desse instrumento está *no fato dos triângulos  $\triangle BAC$  e  $\triangle AOC$  serem congruentes, pois,  $BA \equiv AO$  já que o triângulo  $\triangle BAO$  é isósceles.  $AC$  é um lado comum e  $\widehat{BAC} = 90^\circ = \widehat{CAO}$ . Logo, a congruência segue por LAL e então concluímos que  $\widehat{BCA} = \widehat{CAO}$ . Como as retas  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{OD}$  são paralelas os ângulos  $\widehat{CAO}$  e  $\widehat{COD}$  são alternos internos e portanto,  $\widehat{CAO} = \widehat{COD}$ , comprovando assim, que a altura do Sol pode ser obtida olhando para o ângulo  $\widehat{COD}$ .*

O instrumento de sombras se tornou conhecido pela aplicação que dele fez D. João de Castro (1500-1548) que foi um grande intelectual viajante do século XVI. Como relata Crato (2003):

O nobre português mediu a altura do Sol em dois momentos diferentes e calculou encontrar-se a  $29^\circ 30'$  de latitude norte. Pouco depois, o piloto obteve  $29^\circ 20'$  pelo regime habitual de medição da altura do Sol ao meio dia e ficou “muito espantado”, como o relata D. João de Castro, ao abrir o “escrito cerrado” que este lhe enviara e ver nele a indicação correcta da

latitude. O procedimento de Pedro Nunes e as medidas do instrumento de sombras voltaram por várias vezes a dar bons resultados durante a viagem, pelo que Castro não cessou de lhe tecer louvores. Apesar disso, o instrumento não se difundiu entre os pilotos e só se volta a ter notícia do seu uso na navegação mais de cem anos depois, quando outro autor, António Carvalho da Costa, o ressuscita com algumas alterações na sua obra *Via Astronómica*, publicada em Lisboa em 1676.

Contudo, o instrumento não se perdeu, foi modificado pelos instrumentistas que o fizeram, por exemplo, em um quarto de círculo e acrescentado escalas que permitia usá-lo como relógio de sol (veremos adiante).

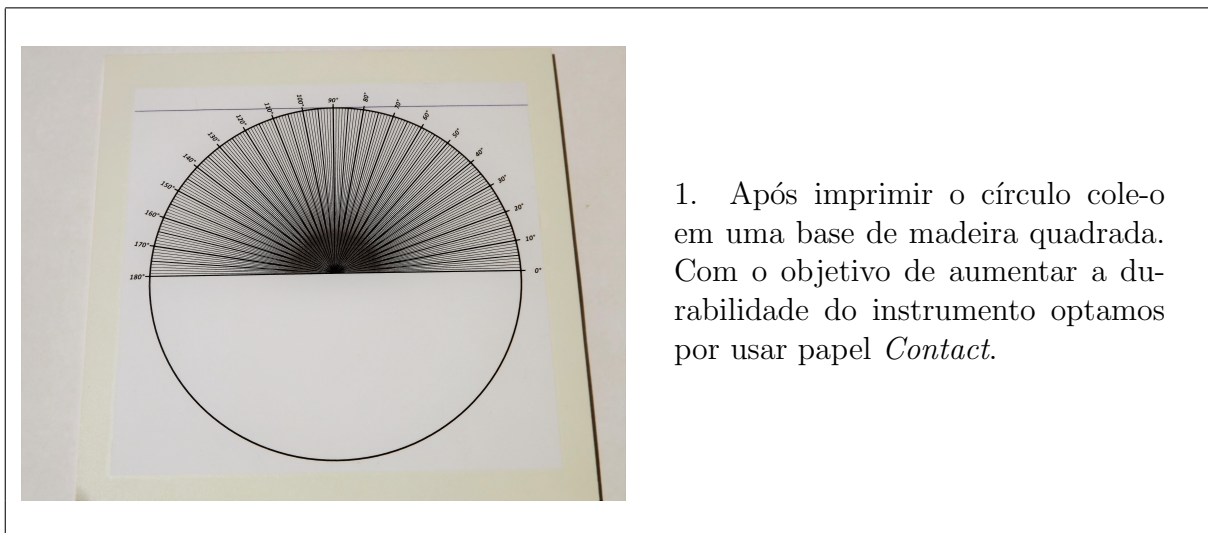
#### 4.2.1 Construindo o Instrumento de Sombras

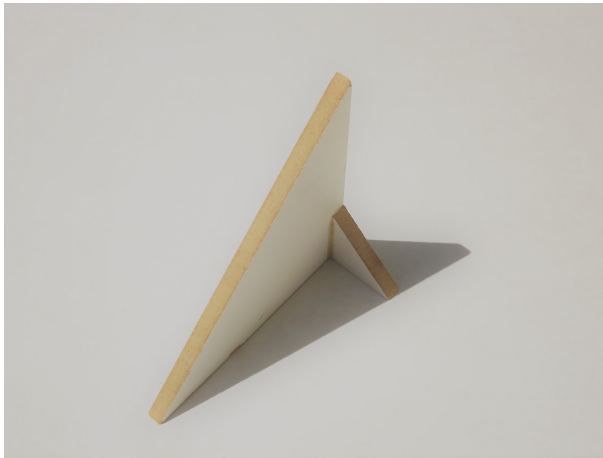
Para a construção do instrumento de sombras você vai precisar de:

1. Imprimir o círculo graduado com a reta tangente que se encontra no Apêndice B;
2. Pedacos de madeira, que você pode encontrar em uma marcenaria;
3. Papel *Contact* e cola para a madeira.

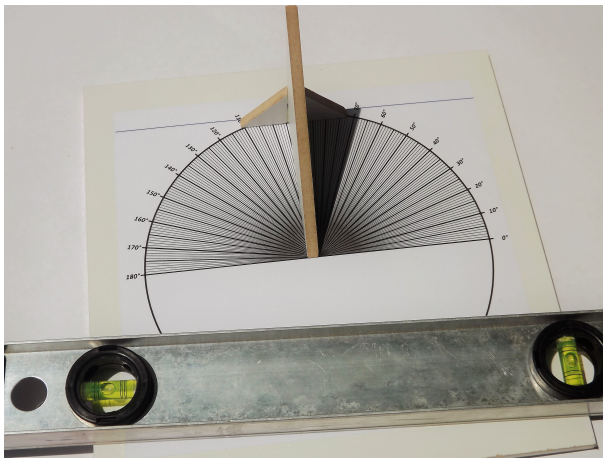
O procedimento da sua construção segue abaixo.

Quadro 4.3: Construção do Instrumento de sombras

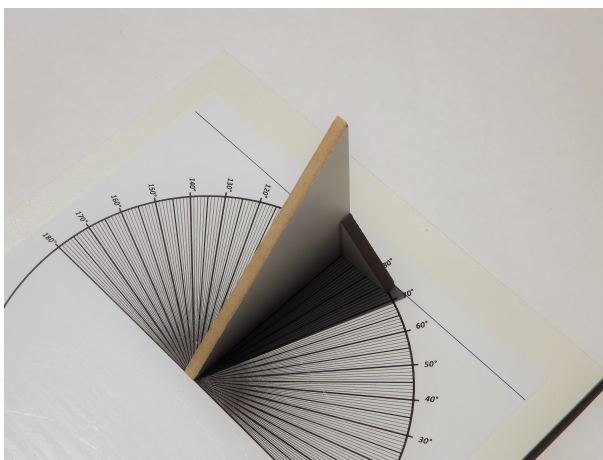




2. Tendo a base pronta passamos agora para a construção do triângulo. Para isso, corte um triângulo retângulo isósceles com catetos medindo o raio do círculo da base. Como usamos uma madeira fina colamos dois pequenos triângulos na base de modo a conseguirmos que o triângulo fique apoiado sobre um de seus catetos como mostra a foto ao lado.



3. Para usar o instrumento devemos colocá-lo sobre uma superfície sem inclinação. Assim, você pode usar um nível de bolha como fizemos ao lado.



4. Agora, precisamos rotacionar a sua base até que a sombra da extremidade do cateto do triângulo fique sobre a reta tangente. Por fim, basta verificar qual é a altura do Sol no círculo graduado olhando para o valor angular correspondente a hipotenusa da sombra.

Fonte: A autora.

Uma atividade que aqui iremos propor com tal instrumento é a medição da altura do Sol em vários horários de um dia. Abaixo fizemos uma série de medições no dia do Equinócio de Primavera e com a ajuda do *Stellarium*<sup>8</sup> podemos comparar os resultados obtidos.

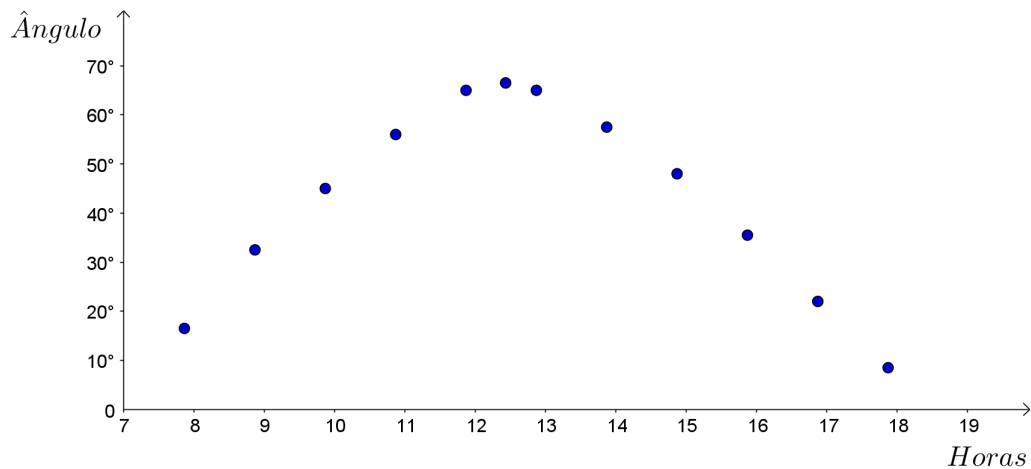
Tabela 4.1: Altura angular do Sol no Equinócio de Primavera de 2017

Horário	Ângulo no <i>Stellarium</i>	Ângulo no Instrumento de Sombras
7h52min	19°35'	19°00'
8h52min	32°57'	32°30'
9h52min	45°42'	45°00'
10h52min	57°00'	56°00'
11h52min	64°46'	65°00'
12h26min	66°10'	66°30'
12h52min	65°20'	65°00'
13h52min	58°19'	57°30'
14h52min	47°19'	48°00'
15h52min	34°42'	35°30'
16h52min	21°24'	22°00'
17h52min	7°50'	8°30'

Fonte: A autora.

Esses dados também podem ser plotados em uma gráfico como vemos abaixo.

Figura 4.10: Gráfico com os dados obtidos da altura angular do Sol no Equinócio de Primavera



Fonte: A autora.

<sup>8</sup> Software livre de astronomia para visualização do céu, como em um planetário.

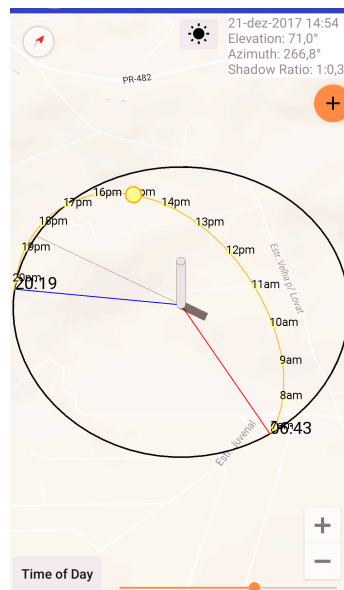
Observe que a altura máxima do Sol indicada no instrumento neste dia foi de  $66.5^\circ$ . Como no dia de Equinócio a declinação do Sol é nula podemos usar qualquer uma das fórmulas 4.5 ou 4.7, de onde seque que a latitude de Umuarama é:

$$\phi = 90 - 66.5^\circ = 23.5^\circ$$

O que resultou em uma latitude muito próxima do valor real que é de  $23.7661^\circ$ , ou seja, um erro de aproximadamente 1.12%.

Gostaríamos de fazer uma comparação entre as alturas do Sol no Equinócio de Primavera e no Solstício de Verão, mas no dia de Solstício não foi possível a marcação das alturas do Sol, uma vez que o dia apresentou-se nublado. Todavia, pesquisamos aplicativos de celular que pudesse nos dar informações a respeito da posição do Sol no céu e encontramos uma versão gratuita do aplicativo *Sun Locator Lite* que possui grande potencial didático, pois, com ele podemos ver a posição do Sol em um mapa de localização ou com a própria câmera, além de gráficos da altura na data observada, duração do dia, meio-dia solar, altura do Sol, dia dos Solstícios, além de informações sobre o nosso satélite natural: a Lua.

Figura 4.11: Solstício de Verão (2017)



Fonte: *Sun Locator Lite*.

## 4.2.2 O problema da Longitude

Vários cientistas consagrados como Isaac Newton, trabalharam no problema de calcular a longitude de uma determinada localidade. Foram grandes os esforços para se obter um método preciso, uma vez que para a navegação e conseqüentemente o desenvolvimento do comércio internacional era necessário o conhecimento da longitude do navio em alto mar. Com o intuito de incentivar os trabalhos, reis da maior potência marítima, Espanha, como Filipe II em 1567 e Filipe III em 1598 criaram prêmios para quem solucionasse o problema. Mais tarde o rei George III da Inglaterra, a pedido de navegadores e comerciantes, instituiu o prêmio *Longitude Act* de equivalente a 12 milhões de dólares para quem determinasse a longitude com um erro de até  $1/2$  grau, 9 milhões para um método com erro de até  $2/3$  de grau e 6 milhões para um método com erro de até 1 grau.

Enquanto não existia um método eficaz, a saída encontrada pelos navegantes era navegar sempre nos paralelos, mantendo a altura do Sol ao meio-dia. Foi o caso, por exemplo, de Cristóvão Colombo, que chegou à América navegando por um paralelo em 1492.

Foi apenas em 1773, que tivemos um vencedor do prêmio inglês. Para entendermos a solução encontrada na época vamos nos atentar que a determinação da longitude de um lugar está relacionada com a rotação da Terra que completa uma volta em torno do seu eixo em aproximadamente 24 horas. Assim, o que é necessário saber é a diferença entre o horário do meio-dia solar de um local de referência e o horário do meio-dia solar do local que estamos. Como a Terra dá uma volta completa ( $360^\circ$ ) em 24 horas, por cada hora de diferença temos  $15^\circ$  percorridos. Deste modo, uma possibilidade para determinar a longitude é com o auxílio de um relógio. Porém, naquela época a construção de um relógio que suportasse o balanço do navio, a umidade, a variação do calor e do frio era uma tarefa complicada. A invenção do relógio que não se desconcertava em alto mar foi feita pelo artesão John Harrison.

Como já vimos, podemos determinar a latitude pelo ângulo que o Sol faz ao meio-dia ou durante a noite pelo cruzador do sul no hemisfério Sul ou pela estrela polar no hemisfério Norte, isto é, determinando o paralelo que nos encontramos. Assim, se descobirmos o meridiano poderemos marcar nossa localização no globo terrestre. De acordo com Dilão (1999):

John Harrison nasceu em 1693, num ambiente rural, e aos 18 anos construiu um relógio de madeira. Em 1730, muda-se da sua aldeia natal para Londres e apresenta os planos para o seu relógio náutico a Edmond Halley, um dos mais famosos astrónomos da época. Os seus planos são



acolhidos com cepticismo por Halley. Nos cinco anos seguintes Harrison dedica-se a construir o primeiro protótipo do relógio náutico. Este relógio, que ainda funciona perfeitamente no Museu de Greenwich, tinha cerca de 35 kg e quatro mostradores que indicavam o dia, as horas, os minutos e os segundos. Foi experimentado com sucesso pela primeira vez numa viagem do H. M. S Centurion para Lisboa, apresentando variações de alguns segundos por dia. Dos resultados da viagem a Lisboa, John Harrison esteve quase a ganhar o prémio do Acto das Longitudes, mas, para surpresa de todos, pediu que lhe fosse dado tempo para poder aperfeiçoar o seu protótipo. Harrison não estava contente com a precisão nem com as dimensões do seu relógio. Nos vinte e cinco anos que se seguiram, construiu mais três protótipos. Durante este tempo, Harrison foi apoiado pela Sociedade Real Inglesa e desenvolveu todos os mecanismos que estão na base dos relógios modernos (Dilão, 1999, p. 12).

Foi apenas em 1773, com 80 anos, que John Harrison recebeu seu prêmio morrendo 3 anos depois em 24 de março de 1776.

### 4.2.3 Determinando a Longitude de Umuarama - PR

Usando a ideia da história do problema da longitude vamos determinar a longitude da cidade de Umuarama - PR descobrindo a diferença entre o horário do seu meio-dia solar e de um local de referência que no caso escolhemos Brasília. O dia 03 de dezembro de 2017, foi o dia escolhido para testarmos a teoria. Usando uma haste vertical verificamos que a menor sombra (horário do meio-dia solar) era produzida 13h23min. O problema seguinte foi o de determinar a longitude da referência, Brasília. Como antigamente haviam tabelas com o meio-dia solar da cidade de referência, pesquisamos na Internet, algum *site* que nos trazia essa informação, encontrando-a no *dateandtime.info*<sup>9</sup>. Nele temos que o meio-dia solar de Brasília nessa data ocorreu 13h01min. Logo, a diferença é de 22min e como já vimos que 60min equivale a 15°, obtemos que 22min são 5.5°. Como a longitude de Brasília é 47.88°W, a longitude de Umuarama é de aproximadamente  $47.88^{\circ}W + 5.5^{\circ}W = 53.38^{\circ}W$ <sup>10</sup>. Note que somamos os dois valores pois, o meio-dia solar da nossa localização ocorreu depois do de Brasília, se ocorresse antes deveríamos tomar o resultado da diferença dos meios dias solares e descontar esse valor da longitude de Brasília, uma vez que isso significa que a localização do seu meridiano está mais próximo do Meridiano de *Greenwich* do que o de Brasília.

<sup>9</sup> <<http://dateandtime.info/pt/citysunrisesunset.php?id=3469058>> Acesso em dez. 2017.

<sup>10</sup> De acordo com o *Google*, a longitude de Umuarama é de 53.3206°W.

### 4.3 Um Relógio de Sol Equatorial

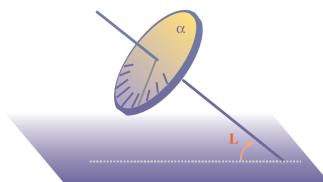
Como já vimos durante a história o homem se preocupava com a marcação do tempo e aprendeu a partir da posição e luminosidade do Sol a julgar, a aproximação da noite. Perceberam também que os dias de inverno eram mais curtos e com Sol mais baixo no céu, enquanto que os dias de verão eram mais longos e com o Sol em posições mais alta. Consequentemente notaram que a sombra de uma estaca percorria trajetórias diferentes ao longo do ano e então como resolver esse impasse na marcação do tempo?

Uma solução é construir uma base em um plano que seja paralelo ao equador, isto é, paralelo ao eixo de rotação da Terra. Sabendo que a medida que o Sol faz seu percurso aparente a sombra nesse plano é  $15^\circ$  por hora, a partir das 6h da manhã marcamos ângulos múltiplos de  $15^\circ$  em um círculo graduado, obtendo assim as horas do dia. Deste modo, como círculo graduado, adaptamos o instrumento de Sombras como veremos adiante.

Para determinar em que posição devemos colocar a base vamos tomar como referência a Figura 4.3. Naquela construção mostramos que determinamos a latitude de uma determinada localização medindo a altura angular em que se encontra o polo sul. Se traçarmos pelo ponto  $C$  uma reta perpendicular obtemos uma interseção  $A$  e deste modo a base do relógio deve estar sobre o lado  $AC$  do triângulo  $\triangle ABC$  em que  $\hat{B}$  é a medida da latitude do local, deste modo a reta  $\overrightarrow{BA}$  é paralela ao eixo de rotação da Terra. Esse relógio de Sol denomina-se equatorial. A base com as marcações deve estar de frente para o Sul do local e as horas são indicadas pela sombra da estaca vertical que colocamos em seu centro (gnomon).

Não se sabe com certeza o período na história que homem passou a usar os relógios com essas características, mas em um mosaico de Pompeia, parece estar um relógio com o gnomon inclinado (interior ao ano de 79 d.C.).

Figura 4.12: Relógio Equatorial



Fonte: ULisboa<sup>11</sup>.

<sup>11</sup> Disponível em: <<https://ciencias.ulisboa.pt/sites/default/files/fcul/0s%20relogios%20de%20Sol%20e%20a%20Matematica.pdf>> Acesso em nov. 2017.

Na próxima seção veremos como posicionar o relógio.

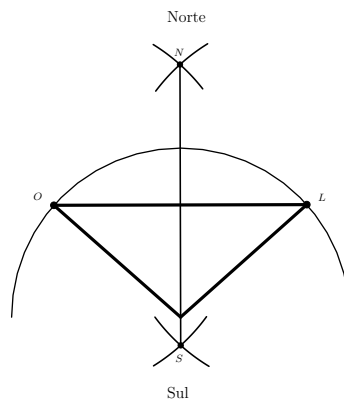
### 4.3.1 Determinando a direção Norte-Sul

Para determinar a direção Norte-Sul iremos usar um método geométrico usado pelos astrônomos antigos. Para isso você vai precisar de um gnomon, um barbante e uma caneta.

Comece posicionando o gnomon perpendicularmente a uma placa que deve estar nivelada. Com o barbante vamos improvisar um compasso traçando um arco de circunferência com um raio igual ao comprimento da sombra antes do meio-dia no momento da marcação. Vamos chamar o ponto que a sombra tocou o arco de  $O$ . Na parte da tarde aguarde até que o comprimento da sombra toque o arco de circunferência novamente, marque esse ponto denotando-o por  $L$ . Tanto no período da manhã quanto no da tarde o Sol nos dois momentos marcados está na mesma altitude.

O próximo passo é traçar uma reta ligando os dois pontos. Com a ponta do barbante em  $L$  trace um arco de comprimento maior que a metade do segmento  $OL$ . Repita o processo em  $O$  de modo que os dois arcos irão se interceptar em dois pontos  $N$  e  $S$ . A reta  $\overleftrightarrow{NS}$  contém os pontos cardeais norte sul, uma vez que é perpendicular a reta que contém  $O$  e  $L$ <sup>12</sup>. Como a primeira marcação foi antes do meio-dia o ponto  $O$  indica o oeste e posteriormente o ponto  $L$  marcado depois do meio-dia indica o leste. Logo, acima do segmento  $OL$  temos a direção Norte e abaixo a direção Sul.

Figura 4.13: Determinando a reta Norte-Sul



Fonte: A autora.

<sup>12</sup> Observe que da construção temos que  $ONLS$  é um losango, e em todo losango as diagonais são perpendiculares entre si, isto é,  $OL \perp NS$ .

Sabendo como proceder para posicionar o relógio, escolhemos o dia 03/12/2017 para a marcação dos pontos cardeais. Em uma superfície branca colocamos uma haste e como nessa data o horário vigente no país é o de verão, começamos marcando o primeiro ponto antes das 13h (horário aproximado do meio-dia solar). Traçamos uma circunferência com centro no ponto que se localiza a haste e aguardamos até que a sombra da mesma atingisse o mesmo comprimento depois do meio-dia solar para marcarmos o segundo ponto, como vemos nas fotos abaixo.

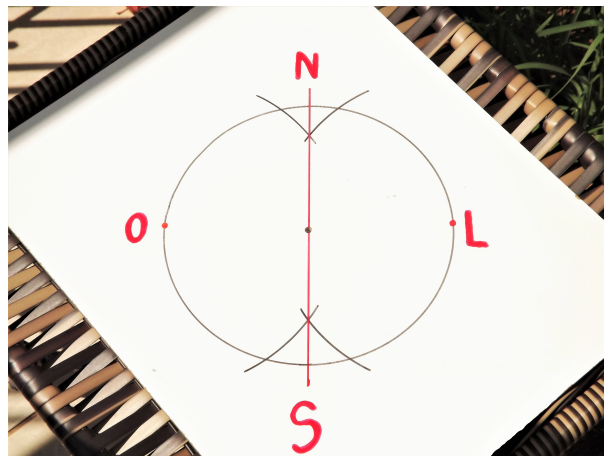
Figura 4.14: Determinando os pontos  $O$  e  $L$



Fonte: A autora.

Sendo o primeiro ponto  $O$  e o segundo ponto  $L$ , traçamos o segmento  $OL$  e fizemos a construção da reta Norte-Sul.

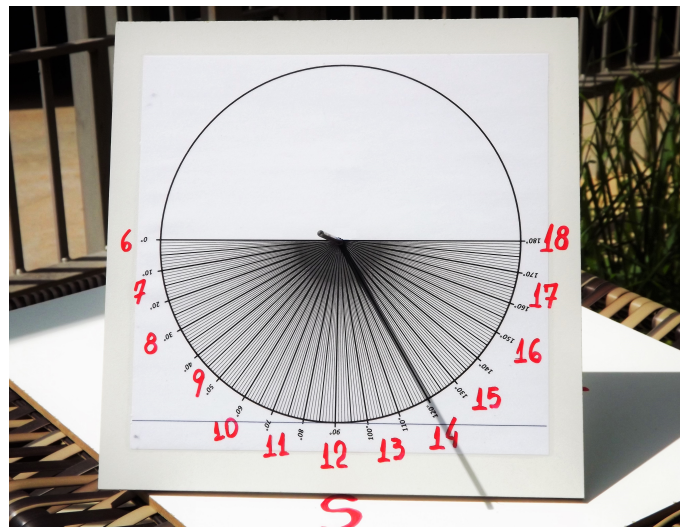
Figura 4.15: Determinando o Norte-Sul



Fonte: A autora.

Aproveitando o instrumento de sombras construindo anteriormente, fizemos um furo no centro da circunferência colocando uma haste. Sabendo que a latitude de Umuarama (PR) é de aproximadamente  $23.5^\circ$  e que a distância do centro até a extremidade do instrumento de sombras é de 13cm, calculamos o comprimento  $x$  da haste que deve ficar atrás do mostrador resolvendo a equação  $\text{tg}(23.5^\circ) = \frac{13}{x}$ , o que resulta em aproximadamente 30cm. Para o ponteiro do relógio deixamos cerca de 8cm, totalizando assim, 38cm de haste. Feito isso, dividimos as horas a partir das 6h (em  $0^\circ$ ) até as 18h ( $180^\circ$ ) de quinze em quinze graus e com a face do instrumento voltada para o Sul, posicionamos o relógio como vemos na foto a seguir.

Figura 4.16: Relógio Equatorial posicionado



Fonte: A autora.

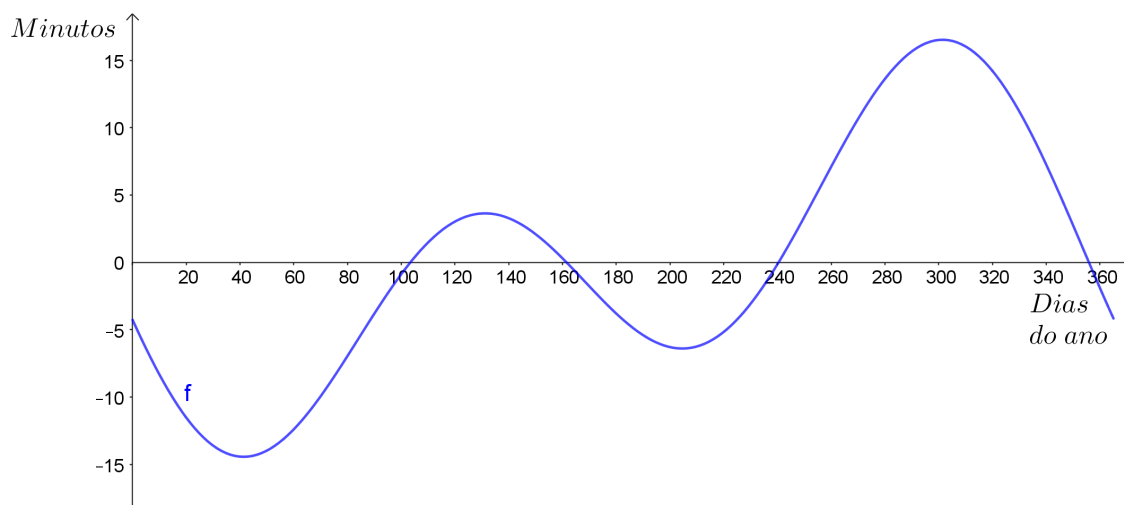
Raramente o relógio solar irá marcar o mesmo horário que o mecânico, no momento em que foi tiramos a foto, por exemplo, o relógio solar marcou 14h enquanto o relógio mecânico estava marcando 15h32min. Um dos motivos é que nessa data o horário vigente nessa localização é o horário de verão, ou seja, devemos adicionar uma hora ao horário do relógio de Sol. Além disso, precisamos fazer uma correção por conta da diferença de longitude em relação a nossa referência Brasília. Como vimos na seção 4.5, essa diferença é de  $5.5^\circ$ , que equivale cerca de 22min.

A terceira correção necessária é por intermédio da equação do tempo. Para entendermos o significado dessa correção vamos considerar um Sol médio que é um astro fictício que se move ao longo do Equador celeste com velocidade angular constante igual à velocidade angular média do Sol. Assim, temos que os dias solares médios têm duração constante.

Por outro lado o Sol verdadeiro se move ao longo da eclíptica, com velocidade angular variável, o que faz com que os dias solares verdadeiros não sejam iguais entre si. Mas o movimento do Sol na eclíptica é anualmente periódico, logo o ano solar médio é igual ao ano solar verdadeiro<sup>13</sup>. Com esses conceitos definimos a equação do tempo como sendo a diferença, ao longo de um ano, entre o Tempo Solar Verdadeiro e o Tempo Solar Médio. Note que apesar de chamarmos “equação do tempo” esse conceito trata-se na verdade de uma função, em que podemos observar seu comportamento por meio de um gráfico que segue abaixo, descrevendo sua variação no período de um ano, nele podemos observar que a mesma possui um máximo de aproximadamente +16 minutos no início de Novembro e um mínimo de aproximadamente -14 minutos em meados de Fevereiro. Este gráfico pode ser obtido plotando-se os valores da equação do tempo para cada dia e usando métodos de aproximação de funções podemos encontrar a expressão aproximada:

$$f(x) = -7.655 \cdot \text{sen}(0.0172x) + 9.873 \cdot \text{sen}(0.03441x + 3.588); \quad 0 \leq x \leq 365$$

Figura 4.17: Equação do Tempo



Fonte: A autora.

A equação do tempo varia ligeiramente a cada ano. No anexo A e B temos uma tabela com seus respectivos valores para os anos de 2017 e 2018<sup>14</sup>, nela encontramos aproximadamente 10min para a data que foi feita a observação no relógio de Sol.

<sup>13</sup> Conceitos retirados de <<http://www.if.ufrgs.br/~fatima/fis2016/tempo/tempo.htm>> Acesso em Dez. 2017.

<sup>14</sup> Tabelas disponíveis em <<http://www.ppowers.com/EoT.htm>> Acesso em Dez. 2017.

Finalmente, a correção do horário legal é a soma:  $1\text{h} + 22\text{min} + 10\text{min} = 1\text{h}32\text{min}$ , ou seja, enquanto o relógio de Sol indicava 14h o relógio mecânico nesse mesmo instante marcava 15h32min.

## CAPÍTULO 5

# A CONSTRUÇÃO DE INSTRUMENTOS E O ESTUDO DA GEOMETRIA DA POSIÇÃO APARENTE DOS ASTROS: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES

Nesse capítulo iremos propor atividades para a exploração e construção do quadrante, do instrumento de sombras e do relógio de Sol adaptando para o nosso contexto: questões da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (OBA<sup>1</sup>). É claro que cabe ao professor decidir quais os instrumentos dar enfoque de acordo com seus objetivos e com as habilidades de suas turmas em cada nível de ensino, sendo possível fazer adaptações e modificações da proposta aqui apresentada. Estas atividades podem durar um semestre ou até um ano, dependendo do andar das atividades e também pode ser transformadas em oficinas específicas.

Como podemos observar, o tema desse trabalho sugere uma interdisciplinaridade entre conceitos da Matemática, Astronomia, Geografia e História. Deste modo, para que o trabalho seja mais detalhado e completo pode-se fazer uma parceria entre os professores dessas disciplinas com o objetivo de aprofundar os assuntos de cada área e até mesmo para que os conceitos e conexões sejam construídos de uma maneira mais natural pelos alunos. Pensando nisso, para o desenrolar das atividades estabelecemos como objetivos gerais que os alunos sejam capazes de:

- Entender conceitos básicos de astronomia de posição, como sistemas de coordenadas;

---

<sup>1</sup> A OBA é um evento aberto à participação de escolas públicas, urbanas ou rurais, sem exigência de número mínimo ou máximo de alunos, os quais devem preferencialmente participar voluntariamente. Podem participar da OBA os alunos do primeiro ano do ensino fundamental até alunos do último ano do ensino médio. Disponível em <<http://www.oba.org.br/site/>> Acesso em dez. de 2017.



- Compreender a base da geometria esférica;
- Identificar o movimento aparente dos astros no céu;
- Aplicar geometria na solução de problemas astronômicos como determinar a altura angular dos astros, a latitude e longitude de determinada localização e a marcação das horas do dia;
- Entender os contextos históricos da evolução dos conceitos.
- Fazer conexões entre Matemática, Astronomia, Geografia e História;

Contudo, astronomia é um assunto que envolve muitas áreas e o principal objetivo desta proposta é fazer com que os alunos se tornem mais reflexivos sobre o mundo que os rodeiam e percebam que não existe ciência segmentada.

## 5.1 O Quadrante

Como pré-requisitos para construção desse e dos demais instrumentos sugerimos que os professores trabalhem com os alunos os conceitos básicos de geometria esférica e sistemas de coordenadas que foram apresentados nos Capítulos 2 e 3. Para a exploração dos sistemas de coordenadas pode-se usar o *Astronomy Simulations and Animations (University of Nebraska)*, nele é possível movimentar o astro em questão colocando-o em vários cenários diferentes nas diversas simulações disponíveis.

É importante também que o professor busque contextualizar os conteúdos com a história da astronomia e alguns momentos é possível fazer conexões com a matemática. Como exemplo adaptamos uma questão da OBA de 2013, em que usamos uma abordagem histórica para o cálculo do raio da terra.

**Atividade 1 [OBA-2013]** Num círculo, de raio  $R$ , seu comprimento mede  $2\pi R$  (Use  $\pi = 3.14$ ) e temos  $360^\circ$ . Eratóstenes (cerca de 276 a.C.-193 a.C.), sábio grego, nascido em Cirene e falecido em Alexandria, diretor da grande biblioteca desta cidade, no Egito, sabia disso. Ele também sabia que num certo dia, ao meio-dia, em Siena, atual Assuã, uma cidade a 800km de Alexandria, ao Sul do Egito, o Sol incidia diretamente no fundo de um poço e nenhum obelisco projetava sombra neste instante. Porém, no mesmo dia, em Alexandria, um obelisco projetava uma sombra! Tal fato só seria possível se a Terra

fosse esférica, concluiu ele. Coincidentemente ambas as cidades estão próximas do mesmo meridiano (veja a Figura 1.1)

(a) Eratóstenes mediu o ângulo  $\widehat{C}$  indicado na Figura 1.1, e encontrou o valor de  $7.25^\circ$ . Com isso ele determinou o raio da Terra ( $R$ ). Como ele fez isso?

*Olhando para a ilustração da questão podemos observar que  $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$ , uma vez que  $\widehat{A}$  e  $\widehat{C}$  são opostos pelo vértice e  $\widehat{C}$  e  $\widehat{B}$  são ângulos alternos internos, pois os raios solares são paralelos. Em  $360^\circ$  temos  $2\pi R$  em  $7.25^\circ$  temos  $800\text{km}$ , ou seja:*

$$\frac{360^\circ}{7.25^\circ} = \frac{2\pi R}{800}$$

*isto é:*

$$R = \frac{360 \cdot 800}{2 \cdot 3.14 \cdot 7.25} = 6325.5\text{km}^2.$$

(b) Assuã, antiga Syene, tem latitude  $24,1^\circ$  Norte, o que é muito próximo de  $23,4^\circ$  que é a latitude do Trópico de Câncer. Pergunta: Em aproximadamente qual dia e mês do ano o Sol incide no fundo do poço em Assuã?

*Nesta latitude, aproximadamente sobre o trópico de Câncer, o Sol só ficará a pino no Solstício de verão do Hemisfério Norte (ver Figura 3.3), ou seja, em junho, por volta do dia 22.*

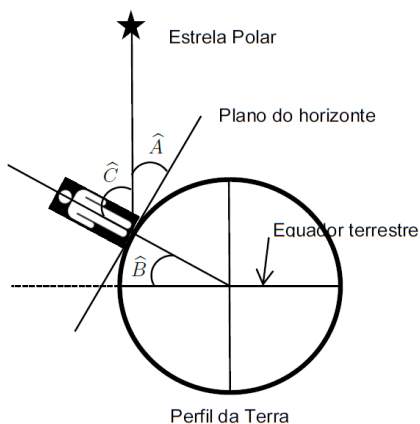
Para o início das discussões sobre o quadrante adaptamos uma outra questão da OBA.

**Atividade 2 [OBA-2017 (adaptado)]** Todo ponto na superfície da Terra é localizado por duas coordenadas, a latitude (tem origem no equador terrestre) (ângulo  $\widehat{B}$  na figura abaixo) e a longitude (tem origem no meridiano de *Greenwich*). Numa certa noite o GPS de um navio parou de indicar a latitude local, a qual é necessária para o capitão traçar a rota. O capitão usou um instrumento e mediu a altura (ângulo  $\widehat{A}$ ) da estrela Polar em relação ao horizonte.

---

<sup>2</sup> O raio terrestre é a distância entre o centro da Terra até qualquer ponto de sua superfície. Devido ao fato de que a Terra não é uma esfera perfeita, não existe um único valor que sirva como seu raio natural. Sendo a Terra quase esférica, vários valores, desde o raio polar (de  $6357\text{km}$ ) ao raio equatorial ( $6378\text{km}$ ) são usados. Se assumirmos um modelo em que a Terra é uma esfera perfeita, temos um raio médio de  $6371\text{km}$ .

Figura 5.1: Ilustração do enunciado



Fonte: Prova nível 4 - XX OBA (2017).

Note que a estrela Polar do enunciado indica que a medição foi feita no hemisfério norte, em que essa estrela indica a localização aproximada do polo norte celeste. No hemisfério sul essa estrela não é visível no céu noturno e então como localizar o polo Sul celeste? (O professor pode aproveitar esse momento para a explicação da técnica apresentada na seção 4.1.2)

Nessa questão da olimpíada temos a citação do uso de um instrumento, mas como é possível medir a altura de um astro com o mesmo? Como vamos construí-lo? Essas perguntas podem levar a várias respostas diferentes, uma delas pode ser que esse instrumento lembra um transferidor e então o professor pode introduzir o formato de um quadrante<sup>3</sup>.

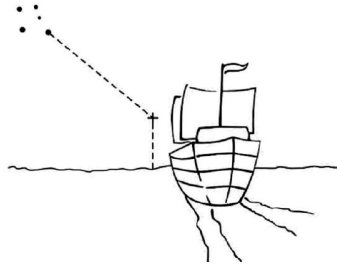
Após construir o quadrante com os alunos, o professor pode iniciar um trabalho de investigação da justificativa do funcionamento do mesmo (Capítulo 4).

O quadrante, bem como outros instrumentos foram muito usados pela navegação pelo Cruzeiro do Sul. No banco de questões da OBA encontramos uma questão sobre esse assunto, que também decidimos incluir nessa proposta.

**Comentário:** Para determinar o PSC (Polo Sul Celeste), como já vimos anteriormente, devemos prolongar a haste maior (ou eixo maior) do cruzeiro 4.5 vezes na direção do pé da cruz.

<sup>3</sup> No capítulo 4 temos os procedimentos de sua construção.

Figura 5.2: Navegante orientando-se pelo Cruzeiro do Sul



Fonte: Prova nível 4 - XIII OBA (2010).

**Atividade 3 [OBA-2010 (adaptado)]** Um navegante está viajando e usa as estrelas para se orientar. No início da viagem, quando ele prolonga a haste (eixo maior da cruz), encontra o polo sul celeste (PSC) bem próximo ao horizonte. Algum tempo depois, ao prolongar a haste ele encontra o PSC mais elevado. Mais tempo depois, o PSC está ainda mais elevado.

Possíveis questionamentos ou sugestões para a abordagem:

(a) Qual é a direção do navegante?

*Como vimos a altura do polo celeste indica a latitude de determinada localização, como o polo está cada vez mais elevado podemos concluir que o navio está indo cada vez mais para o sul.*

(b) O navegante usa novamente essa técnica em outra viagem; desta vez ele percebe que, ao prolongar a haste três vezes, ele já acha o horizonte. Em que hemisfério da Terra está o navegante?

*Como ele encontra o horizonte ao prolongar a haste, o polo sul celeste está abaixo do horizonte. Como o polo norte celeste (PNC) diametralmente oposto ao Pólo Sul, este, está acima do horizonte. Portanto, o navegante encontra-se no Hemisfério Norte.*

(c) E se o navegante encontrar o polo no ponto do céu exatamente sobre sua cabeça, em que lugar da Terra ele estará?

*O navegante está no polo sul ou norte da Terra. Essa situação é hipotética pois, na verdade ele não poderia estar navegando sobre as águas uma vez que estaria sobre o gelo*

*(Antártida, se ele tiver encontrado o polo sul celeste ou estaria no Ártico se tivesse encontrado o polo norte celeste).*

Nessa seção, demos ênfase ao uso do quadrante para a determinação de alturas no céu noturno, todavia também podemos usar esse instrumento para a determinação da altura do Sol como descrevemos no capítulo 4. Porém, com o quadrante em mãos você vai observar que para um resultado preciso você deve estar o mais parado possível e acertar a sombra em formato de anel na parede, o que não é fácil. Por conta disso, para a medição da altura do Sol em vários momentos do dia optamos por construir o instrumento de Sombras de Pedro Nunes.

## 5.2 O Instrumento de Sombras

Antes do início das atividades com o Instrumento de Sombras sugerimos que seja trabalhado com os alunos os conceitos da seção 4.1.3 (Cálculo da latitude por intermédio da altura do Sol). Nesse contexto o professor pode dar ênfase na história das grandes navegações que evidencia a importância desse e de outros instrumentos de medição. Na subseção 4.2.1 temos todos os passos e justificativas da construção do instrumento de sombras. Além de determinar a latitude por meio das medidas da altura no meio-dia solar, outros conceitos podem ser observados com tal instrumento como por exemplo, as mudanças na duração do dia.

Aqui, sugerimos que o professor solicite aos alunos que façam medições em vários dias consecutivos, sempre nos mesmos horários organizando os dados em gráficos ou tabelas como abaixo.

Tabela 5.1: Altura angular do Sol

Horários do dia __/__/____	Altura do Sol (em graus)
8h00min	
9h00min	
10h00min	
11h00min	
...	
16h00min	
17h00min	

Fonte: A autora.

Com os resultados em mãos peça que os alunos façam comparações entre os dados. Neste processo algumas perguntas que podem ser feitas são:

- Conforme os dias passaram quais foram as mudanças nas tabelas/gráficos?
- É possível perceber alguma alteração na altura do Sol nos mesmos horários? Quais?
- Será que a altura do Sol tem relação com as estações?
- Que semelhanças e diferenças existem entre o movimento do Sol nas estações?

Baseado nas respostas dadas pelos alunos o professor pode acessar duas animações: *Seasons and Ecliptic Simulator*<sup>4</sup> e na barra inferior movimentar os meses do ano, com ele é possível entender melhor o que acontece com os raios solares com o passar das estações.

Como podemos observar o trabalho com o instrumento de sombras e o quadrante será mais rico se o professor tiver a oportunidade de investigar os resultados obtidos em vários encontros.

### 5.3 Um Relógio de Sol

No Capítulo 5 encontramos os procedimentos para a construção de um relógio de Sol equatorial em que o primeiro passo consiste em descobrir a posição correta do relógio. Para isso é necessário determinar as direções cardeais. Segundo Danhoni Neves (2011):

Para se construir um marcador de horas pelo Sol, ou melhor dizendo, pela sombra projetada de uma haste sobre um marcador dividido nas horas do dia, devemos trabalhar com diversos conceitos e sentidos de orientação espacial, sem os quais são impossíveis não somente a construção do dito instrumento como também sua utilização prática (DANHONI NEVES, 2011, p. 14).

Desse modo, para o início dessas atividades sugerimos mais uma questão da OBA que apesar de ser aparentemente simples pode levar a algumas discussões sobre as direções cardeais:

---

<sup>4</sup> Disponível em <http://astro.unl.edu/classaction/animations/coordsmotion/eclipticsimulator.html> e <http://astro.unl.edu/classaction/animations/coordsmotion/transitmovie.html> Acesso em Dez. 2017.

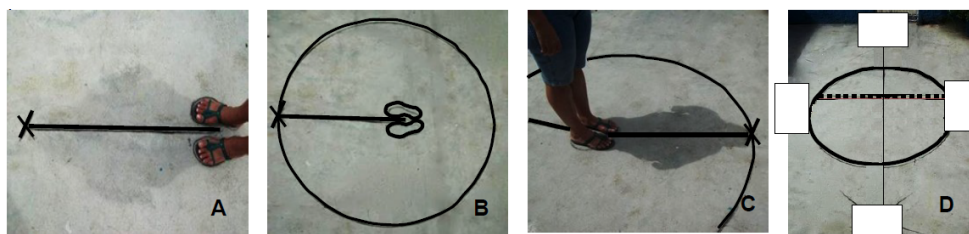
**Atividade 4 [OBA-2014 (adaptado)]** Você aprendeu a encontrar as direções cardeais segundo o método contido em muitos livros didáticos, que diz “abra seu braço direito para onde o Sol nasce e lá é a direção Leste, à sua esquerda estará o Oeste, à sua frente o Norte e atrás o Sul”. Pois bem este processo não tem nada de preciso, pois o Sol pode até nascer e se pôr no Sul, ou até mesmo não nascer em lugar algum dependendo do lugar e época onde está.

Com essa parte desse enunciado, o professor pode questionar aos alunos em que regiões do planeta essas condições podem acontecer. Para visualização do movimento do Sol em várias regiões do planeta, mais uma vez indicamos o *Seasons and Ecliptic Simulator*<sup>5</sup>, pois com ele podemos “colocar o nosso observador” nas diferentes latitudes, horários e meses do ano.

Continuando o enunciado:

Estas situações “estranhas” ocorrem para latitudes entre os polos e os círculos polares. Mas vejamos como a Juliana e sua mãe, D. Wilma, fizeram para determinar corretamente as direções cardeais no quintal da casa delas. Você pode fazer o mesmo, claro!

Figura 5.3: Determinando as direções cardeais (OBA)



Fonte: Prova nível 3 - XVII OBA (2014).

Inicialmente D. Wilma ficou de pé, de manhã, no quintal e a Juliana riscou sua sombra no chão, indo de entre os pés de sua mãe até o topo da sombra da sua cabeça (Fig. A). Em seguida a Juliana traçou um círculo no chão, com raio igual ao da sombra de sua mãe (Fig. B). Depois Juliana deixou D. Wilma de pé no mesmo lugar (mães sofrem...) até que de tarde a sombra dela atingisse novamente o círculo traçado, pois assim, claro, as duas sombras seriam do mesmo comprimento. D. Wilma, para ter certeza que Juliana estava

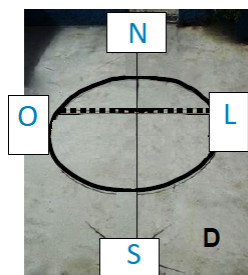
<sup>5</sup> Disponível em: <<http://astro.unl.edu/classaction/animations/coordsmotion/sunmotions.html>> Acesso em Dez. 2017.

fazendo tudo certo, neste momento, se virou para o lado onde estava sua sombra (Fig. C).

**Pergunta:** Para determinar as direções cardeais Juliana traçou o segmento que contém as duas pontas das sombras de sua mãe (linha tracejada) e a perpendicular a ela (Fig. D). Escreva as direções cardeais (Norte, Sul, Leste, Oeste) dentro dos quadradinhos brancos (Fig. D) das extremidades das retas tracejadas e pontilhadas.

Neste momento o professor pode explicar a respeito da construção de uma reta perpendicular a um segmento. E é claro, que depois das situações que foram observadas no simulador, a questão de marcar as direções ficou bem mais simples<sup>6</sup>.

Figura 5.4: Determinando as direções cardeais- Solução (OBA)



Fonte: Prova nível 3 - XVII OBA (2014).

Após essa discussão em torno dessa questão o professor pode solicitar que os alunos usem uma haste para marcar as sombras desejadas e construir as direções cardeais e em algum momento até aqui pode surgir o seguinte questionamento: Por que não usamos uma bússola? A resposta está no fato de que o Polo Norte magnético é variável à superfície da Terra. De acordo com Molina (2012):

O norte geográfico resulta do movimento de rotação da Terra, enquanto o norte magnético é o resultado do campo magnético gerado pelo movimento do metal fundido do núcleo externo em torno do núcleo metálico sólido da Terra. Os dois nortes, portanto, expressam fenômenos geofísicos diferentes. Usando esse princípio os chineses inventaram a bússola e os europeus se lançaram às grandes navegações. Uma agulha imantada aponta sempre para o polo norte magnético e, de modo aproximado, para o norte geográfico. O ângulo entre o norte magnético e o geográfico reflete a declinação magnética do lugar e varia geralmente de 20 a 30 graus (MOLINA, 2012, p. 13).

<sup>6</sup> Observe que o leste estará do lado do nascer do Sol, mas dificilmente vai ser onde o Sol nasceu.



Sabendo as direções cardeais o próximo passo é adaptar o instrumento de sombras para um relógio de Sol, neste momento o professor poderá recorrer novamente ao simulador de modo a auxiliar à explicação da posição e da inclinação do relógio (Capítulo 4).

---

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho propomos possibilidades de realizar um estudo interdisciplinar envolvendo o movimento aparente dos astros. Ao longo deste texto podemos observar que problemas aparentemente simples como o de determinar as coordenadas geográficas de um lugar e determinar as horas ao longo do dia geraram uma longa discussão que envolveu Astronomia, Matemática, Geografia e História.

Dentro da Matemática, precisamos de geometria euclidiana e também não euclidiana ao adotar o modelo esférico da Terra, geometria esta que está contida nas diretrizes curriculares da rede pública de Educação Básica do Estado do Paraná e que raramente é trabalhada pelos professores pela falta de formação, tempo disponível para a elaboração dessas aulas e muito outros motivos. Em Física também temos um problema semelhante ao se tratar de Astronomia. Sabendo dessas dificuldades e também da falta de materiais disponíveis para o ensino interdisciplinar, propomos a construção de instrumentos com materiais simples e que gerassem um contexto de discussão com a potencialidade de tratar diversos conteúdos. No Capítulo 5 apresentamos uma proposta de atividades (que também pode ser adaptado em oficinas específicas) com esses instrumentos que envolveu questões da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica (OBA) e que nos serviu como base para a iniciar as discussões. No banco de questões dessa modalidade de olimpíada podemos encontrar muitos outros problemas que podem auxiliar o professor na elaboração de um projeto extracurricular e até mesmo aulas interdisciplinares envolvendo outros assuntos.

Contudo, esperamos que este trabalho sirva de apoio para os professores de modo que ao ser colocado em prática os alunos consigam ver o mundo por meio do conhecimento científico. Esperamos também que outros trabalhos possam explorar estes e outros instru-

mentos de Astronomia que, como vimos, podem relacionar diversos assuntos em apenas uma abordagem.

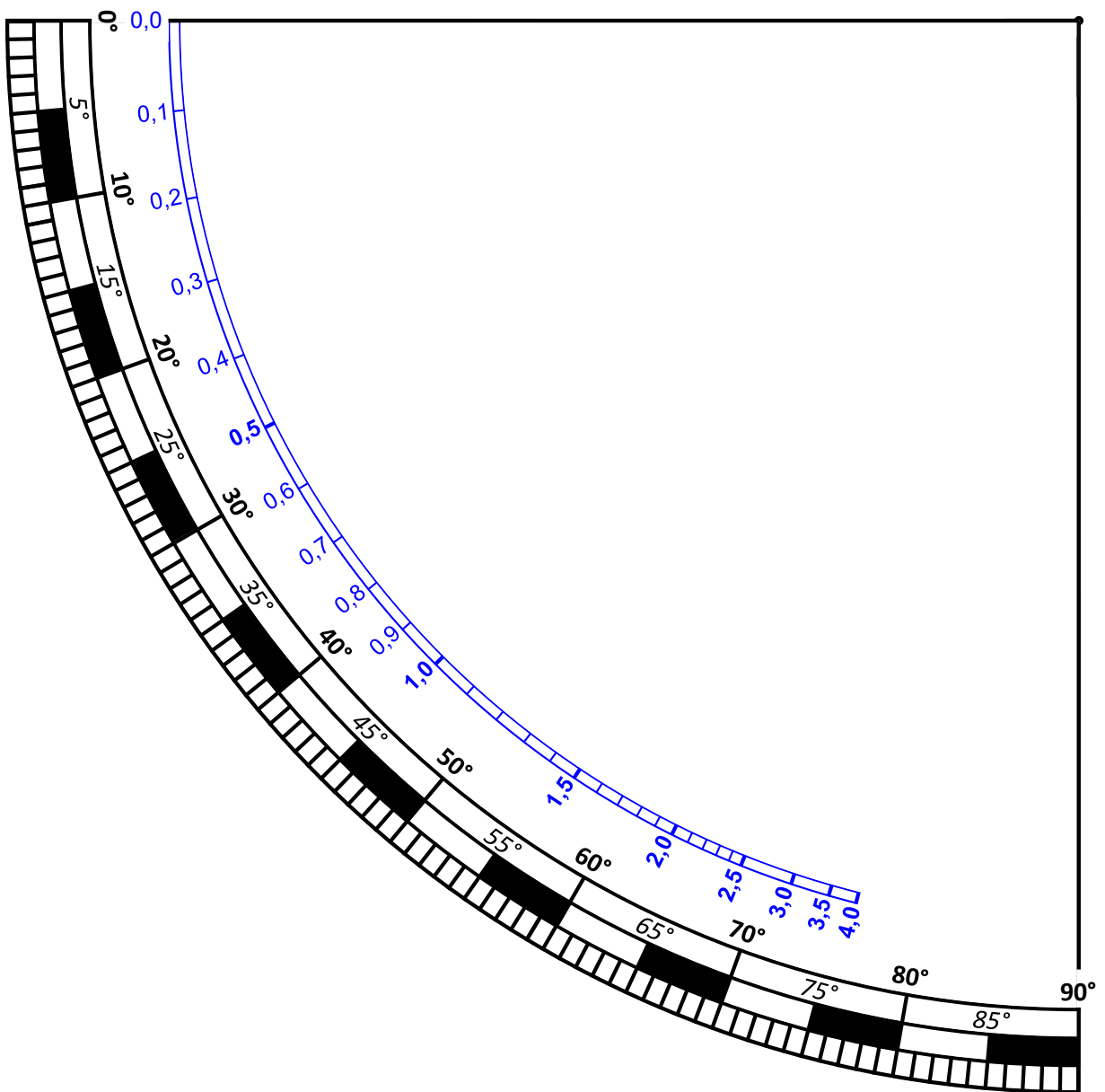
## REFERÊNCIAS

- [1] ARANA, José Milton. **Astronomia de Posição: Notas de Aula**. 2000. Disponível em: <<http://www2.fct.unesp.br/docentes/carto/arana/Astron.pdf>>. Acesso em: 20 abr. 2017.
- [2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.
- [3] CARVALHO, Gracielle Simões de. **Geometrias Não Euclidianas: Uma proposta de Inserção da Geometria** 2017. 49 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2017.
- [4] COXETER, H. S. M.. **Non-Euclidean Geometry**. 5<sup>a</sup> ed. Toronto: University of Toronto Press, 1968.
- [5] PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes curriculares da Educação Básica**. Curitiba, SEED, 2008.
- [6] DILÃO, Rui. **Latitudes e longitudes**. 1999. Disponível em: <<http://www.cienciaviva.pt/equinocio/download/lat-long.pdf>>. Acesso em: 11 nov. 2017.
- [7] CRATO, Nuno. **O Instrumento de Sombras**. 2003. Disponível em: <<http://cvc.instituto-camoes.pt/ciencia/e32.html>>. Acesso em: 08 set. 2017.
- [8] D'AGRELLA FILHO, Manoel Souza. **A forma e o campo de gravidade da Terra**. Disponível em: <[http://www.iag.usp.br/~agg\\_1400200/moddata/GEOFISICA/A%20FORMA%20DA%20TERRA.pdf](http://www.iag.usp.br/~agg_1400200/moddata/GEOFISICA/A%20FORMA%20DA%20TERRA.pdf)> Acesso em nov. 2017. Acesso em: 10 out. 2017.

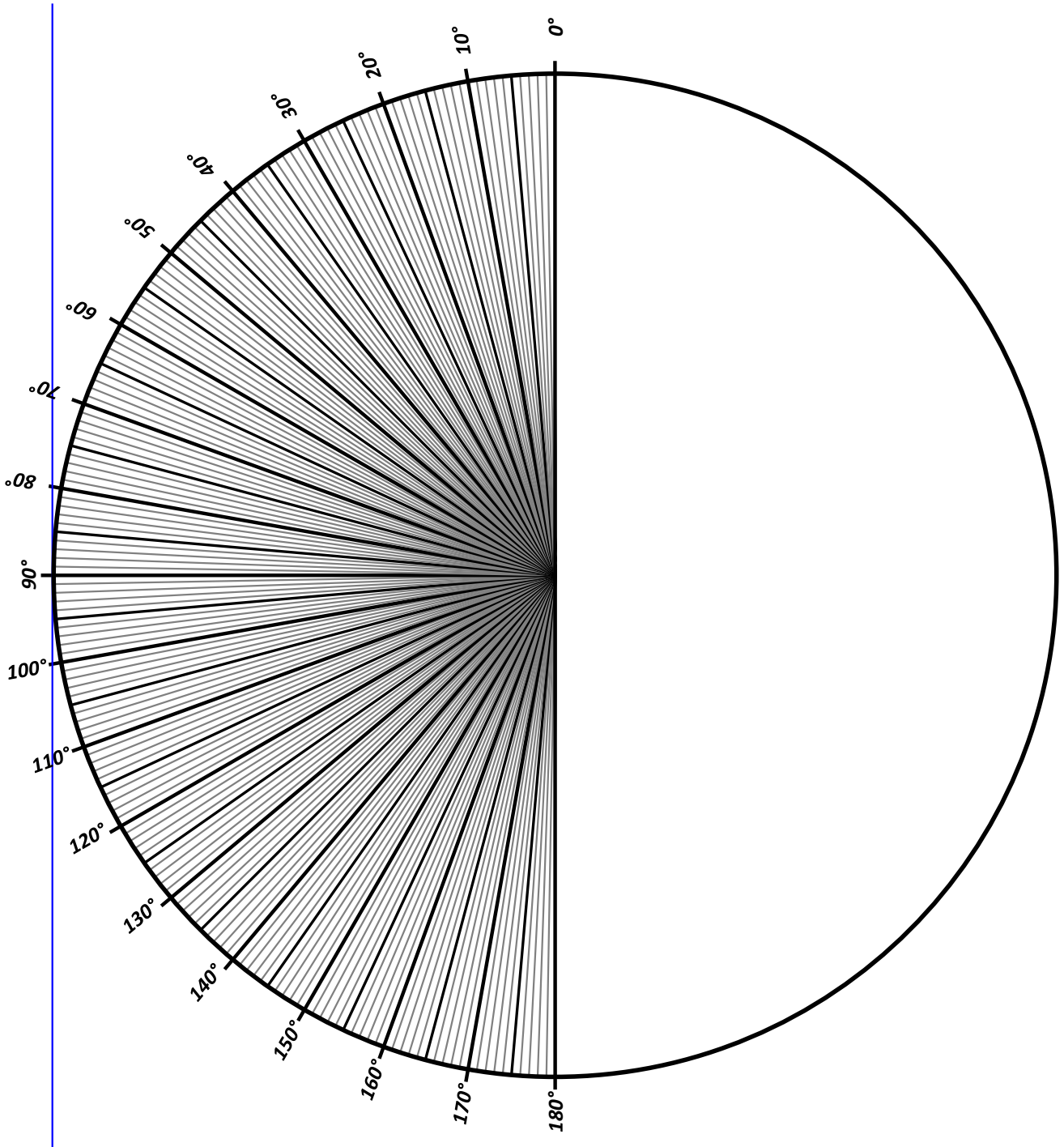
- [9] DANHONI NEVES, M. C.. **A Astronomia no Antigo Egito: A Representação do Céu na Terra**. Artigo, jan/2001. Disponível em: <<http://periodicos.uem.br/ojs/index.php/ArqMudi/article/viewFile/16954/9050>>. Acesso em: 01 out. 2017.
- [10] DANHONI NEVES, M. C.. (organizador) **Astronomia e Cosmologia: Fatos, Conjecturas e Refutações**. Maringá: Eduem, 2011.
- [11] EXPRESS, Lusitanian. **Ensaio sobre a Declinação Magnética e os Descobrimientos Portugueses**. Disponível em: <<http://cabodastormentas1488.blogs.sapo.pt/a-declinacao-magnetica-e-os-8504>>. Acesso em: 11 out. 2017
- [12] FRANCO, Valdeni Soliani; MENEZES, Luana Paula Goulart de. **Utilizando o GeoGebra para Construção e Exploração de um Modelo Plano para a Geometria Elíptica**. In: Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra. Uruguai, 2012.
- [13] GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ª ed. - São Paulo: Atlas, 2002.
- [14] GREENBERG, M. J.. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History**. 3ª ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1994.
- [15] HEIM, Luciane. **Geometria esférica: proposta de atividades em conexão com a geografia**. 2013. 65 f. Dissertação (Curso de Mestrado Profissional em Matemática), UFRPE, Recife, 2013. Disponível em: <[http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/tcc\\_luciane\\_versao\\_final.pdf](http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/tcc_luciane_versao_final.pdf)>. Acesso em: 09 jul. 2017.
- [16] LIMA NETO, Gastão Bierrenbach. **Astronomia de Posição: Notas de Aula**. 2017. Disponível em: <<http://www.astro.iag.usp.br/~gastao/AstroPosicao/Curso2017.pdf>>. Acesso em: 08 fev. 2018.
- [17] MARTINELLI, Franco. **Il Quadrante D'Altezza**. Disponível em: [www.liceogalvani.it/download\\_file.php?id=2002](http://www.liceogalvani.it/download_file.php?id=2002)>. Acesso em: 07 out. 2017.
- [18] MOLINA, Eder. **O que é, o que é?: Norte geográfico e norte Magnético**. Revista Pesquisa Fapesp, São Paulo, n. 197, p.13-13, jul. 2012. Disponível em: <<http://revistapesquisa.fapesp.br>>. Acesso em: 04 jan. 2018.

- [19] MORETO, José Roberto; SEMPIONATTO, Juliane. **COSMOLOGIA: Redescobrimo o Universo**. 2011. Disponível em: <<http://www.cdcc.usp.br/cda/sessao-astronomia/2011/cosmologia-08132011.docx>>. Acesso em: 07 jul. 2017.
- [20] OLIVEIRA, Henrique Jesus Quintino de; SCHIEL, Dietrich; HÖNEL, Jorge. **Orientação em Astronomia**. Disponível em: <<http://www.cdcc.sc.usp.br/cda/ensino-fundamental-astronomia/partea1a.html>>. Acesso em: 10 set. 2017.
- [21] OLIVEIRA FILHO, Kepler de Souza; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. **Astronomia e Astrofísica**. 2014. Disponível em: <<http://astro.if.ufrgs.br/livro.pdf>>. Acesso em: 01 jun. 2017.
- [22] PEREIRA, J. M. M. **Experiências com Instrumentos e Métodos Antigos de Navegação**. Lisboa: Academia de Marinha, 2000. Disponível em: <[http://chcul.fc.ul.pt/textos/malhao\\_pereira\\_2000.pdf](http://chcul.fc.ul.pt/textos/malhao_pereira_2000.pdf)> Acesso 10 jun. 2017.
- [23] PEREIRA, Moacir Soares. **Capitães, Naus e Caravelas da Armada de Cabral**. Coimbra. Junta de Investigação Científica do Ultramar, 1979.
- [24] RONAN, Colin A. **História ilustrada da ciência da Universidade de Cambridge: Das origens à Grécia (v. 1)**. São Paulo: Círculo do Livro, 1987.
- [25] RONAN, Colin A. **História ilustrada da ciência da Universidade de Cambridge: Oriente, Roma e Idade Média (v. 2)**. São Paulo: Círculo do Livro, 1983.
- [26] RIDPATH, I. **Guia Ilustrado Zahar: Astronomia**. 3ª ed. Rio de Janeiro, 2011.
- [27] SANTIAGO, B.; SALVIANO A. **Astronomia Geodésica: Posicionamento pelas Estrelas**. Universidade Federal do rio Grande do Sul - UFRGS. Rio Grande do Sul, 2005. Disponível em: <[http://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/livro\\_v1.pdf](http://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/livro_v1.pdf)>. Acesso em: 25 mai. 2017.

APÊNDICE A - QUADRANTE



APÊNDICE B - INSTRUMENTO DE SOMBRAS





APÊNDICE C - NDA (PARA ANOS QUE NÃO SÃO  
BISSEXTOS)

	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
<b>1</b>	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
<b>2</b>	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
<b>3</b>	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
<b>4</b>	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
<b>5</b>	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
<b>6</b>	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
<b>7</b>	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
<b>8</b>	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
<b>9</b>	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
<b>10</b>	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
<b>11</b>	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
<b>12</b>	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
<b>13</b>	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
<b>14</b>	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
<b>15</b>	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
<b>16</b>	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
<b>17</b>	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
<b>18</b>	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
<b>19</b>	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
<b>20</b>	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
<b>21</b>	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
<b>22</b>	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
<b>23</b>	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
<b>24</b>	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
<b>25</b>	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
<b>26</b>	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
<b>27</b>	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
<b>28</b>	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
<b>29</b>	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
<b>30</b>	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
<b>31</b>	31		90		151		212	243		304		365

## ANEXO A- EQUAÇÃO DO TEMPO (2017)

<b>EoT 2017</b> <b>[Negative EoT</b> <b>values indicate</b> <b>Dial Slow]</b>											
Jan-01	-3m 41s	Feb-28	-12m 29s	Apr-30	2m 48s	Jul-01	-3m 55s	Sep-01	0m 3s	Nov-02	16m 29s
Jan-02	-4m 8s	Feb-29	-12m 17s	May-01	2m 56s	Jul-02	-4m 7s	Sep-02	0m 22s	Nov-03	16m 29s
Jan-03	-4m 36s	Mar-01	-12m 17s	May-02	3m 2s	Jul-03	-4m 18s	Sep-03	0m 42s	Nov-04	16m 28s
Jan-04	-5m 3s	Mar-02	-12m 5s	May-03	3m 8s	Jul-04	-4m 28s	Sep-04	1m 2s	Nov-05	16m 27s
Jan-05	-5m 30s	Mar-03	-11m 52s	May-04	3m 14s	Jul-05	-4m 39s	Sep-05	1m 22s	Nov-06	16m 24s
Jan-06	-5m 56s	Mar-04	-11m 39s	May-05	3m 19s	Jul-06	-4m 49s	Sep-06	1m 42s	Nov-07	16m 21s
Jan-07	-6m 22s	Mar-05	-11m 26s	May-06	3m 24s	Jul-07	-4m 59s	Sep-07	2m 2s	Nov-08	16m 17s
Jan-08	-6m 48s	Mar-06	-11m 12s	May-07	3m 28s	Jul-08	-5m 8s	Sep-08	2m 23s	Nov-09	16m 12s
Jan-09	-7m 13s	Mar-07	-10m 57s	May-08	3m 31s	Jul-09	-5m 17s	Sep-09	2m 44s	Nov-10	16m 6s
Jan-10	-7m 37s	Mar-08	-10m 42s	May-09	3m 34s	Jul-10	-5m 25s	Sep-10	3m 4s	Nov-11	15m 60s
Jan-11	-8m 1s	Mar-09	-10m 27s	May-10	3m 36s	Jul-11	-5m 33s	Sep-11	3m 25s	Nov-12	15m 52s
Jan-12	-8m 24s	Mar-10	-10m 12s	May-11	3m 38s	Jul-12	-5m 41s	Sep-12	3m 47s	Nov-13	15m 44s
Jan-13	-8m 46s	Mar-11	-9m 56s	May-12	3m 39s	Jul-13	-5m 48s	Sep-13	4m 8s	Nov-14	15m 34s
Jan-14	-9m 8s	Mar-12	-9m 40s	May-13	3m 39s	Jul-14	-5m 55s	Sep-14	4m 29s	Nov-15	15m 24s
Jan-15	-9m 30s	Mar-13	-9m 24s	May-14	3m 39s	Jul-15	-6m 1s	Sep-15	4m 51s	Nov-16	15m 13s
Jan-16	-9m 50s	Mar-14	-9m 7s	May-15	3m 38s	Jul-16	-6m 7s	Sep-16	5m 12s	Nov-17	15m 1s
Jan-17	-10m 10s	Mar-15	-8m 50s	May-16	3m 37s	Jul-17	-6m 12s	Sep-17	5m 33s	Nov-18	14m 49s
Jan-18	-10m 29s	Mar-16	-8m 33s	May-17	3m 36s	Jul-18	-6m 16s	Sep-18	5m 55s	Nov-19	14m 35s
Jan-19	-10m 48s	Mar-17	-8m 16s	May-18	3m 33s	Jul-19	-6m 20s	Sep-19	6m 16s	Nov-20	14m 21s
Jan-20	-11m 6s	Mar-18	-7m 58s	May-19	3m 30s	Jul-20	-6m 24s	Sep-20	6m 38s	Nov-21	14m 6s
Jan-21	-11m 23s	Mar-19	-7m 41s	May-20	3m 27s	Jul-21	-6m 27s	Sep-21	6m 59s	Nov-22	13m 50s
Jan-22	-11m 39s	Mar-20	-7m 23s	May-21	3m 23s	Jul-22	-6m 29s	Sep-22	7m 20s	Nov-23	13m 33s
Jan-23	-11m 54s	Mar-21	-7m 5s	May-22	3m 19s	Jul-23	-6m 31s	Sep-23	7m 41s	Nov-24	13m 16s
Jan-24	-12m 9s	Mar-22	-6m 47s	May-23	3m 14s	Jul-24	-6m 32s	Sep-24	8m 2s	Nov-25	12m 58s
Jan-25	-12m 23s	Mar-23	-6m 29s	May-24	3m 8s	Jul-25	-6m 33s	Sep-25	8m 23s	Nov-26	12m 39s
Jan-26	-12m 36s	Mar-24	-6m 11s	May-25	3m 2s	Jul-26	-6m 33s	Sep-26	8m 44s	Nov-27	12m 19s
Jan-27	-12m 48s	Mar-25	-5m 53s	May-26	2m 56s	Jul-27	-6m 32s	Sep-27	9m 4s	Nov-28	11m 58s
Jan-28	-12m 60s	Mar-26	-5m 35s	May-27	2m 49s	Jul-28	-6m 31s	Sep-28	9m 24s	Nov-29	11m 37s
Jan-29	-13m 10s	Mar-27	-5m 17s	May-28	2m 41s	Jul-29	-6m 29s	Sep-29	9m 44s	Nov-30	11m 16s
Jan-30	-13m 20s	Mar-28	-4m 59s	May-29	2m 33s	Jul-30	-6m 27s	Sep-30	10m 4s	Dec-01	10m 53s
Jan-31	-13m 29s	Mar-29	-4m 41s	May-30	2m 25s	Jul-31	-6m 24s	Oct-01	10m 24s	Dec-02	10m 30s
Feb-01	-13m 37s	Mar-30	-4m 23s	May-31	2m 16s	Aug-01	-6m 20s	Oct-02	10m 43s	Dec-03	10m 6s
Feb-02	-13m 45s	Mar-31	-4m 5s	Jun-01	2m 7s	Aug-02	-6m 16s	Oct-03	11m 2s	Dec-04	9m 42s
Feb-03	-13m 51s	Apr-01	-3m 47s	Jun-02	1m 58s	Aug-03	-6m 11s	Oct-04	11m 20s	Dec-05	9m 17s
Feb-04	-13m 57s	Apr-02	-3m 29s	Jun-03	1m 48s	Aug-04	-6m 5s	Oct-05	11m 39s	Dec-06	8m 52s
Feb-05	-14m 2s	Apr-03	-3m 12s	Jun-04	1m 38s	Aug-05	-5m 59s	Oct-06	11m 56s	Dec-07	8m 26s
Feb-06	-14m 6s	Apr-04	-2m 54s	Jun-05	1m 27s	Aug-06	-5m 53s	Oct-07	12m 14s	Dec-08	8m 0s
Feb-07	-14m 9s	Apr-05	-2m 37s	Jun-06	1m 16s	Aug-07	-5m 45s	Oct-08	12m 31s	Dec-09	7m 33s
Feb-08	-14m 12s	Apr-06	-2m 20s	Jun-07	1m 5s	Aug-08	-5m 38s	Oct-09	12m 48s	Dec-10	7m 6s
Feb-09	-14m 14s	Apr-07	-2m 3s	Jun-08	0m 53s	Aug-09	-5m 29s	Oct-10	13m 4s	Dec-11	6m 39s
Feb-10	-14m 14s	Apr-08	-1m 47s	Jun-09	0m 42s	Aug-10	-5m 20s	Oct-11	13m 20s	Dec-12	6m 11s
Feb-11	-14m 15s	Apr-09	-1m 30s	Jun-10	0m 30s	Aug-11	-5m 11s	Oct-12	13m 35s	Dec-13	5m 42s
Feb-12	-14m 14s	Apr-10	-1m 14s	Jun-11	0m 18s	Aug-12	-5m 1s	Oct-13	13m 49s	Dec-14	5m 14s
Feb-13	-14m 12s	Apr-11	-0m 59s	Jun-12	0m 5s	Aug-13	-4m 50s	Oct-14	14m 4s	Dec-15	4m 45s
Feb-14	-14m 10s	Apr-12	-0m 43s	Jun-13	-0m 7s	Aug-14	-4m 39s	Oct-15	14m 17s	Dec-16	4m 16s
Feb-15	-14m 7s	Apr-13	-0m 28s	Jun-14	-0m 20s	Aug-15	-4m 27s	Oct-16	14m 30s	Dec-17	3m 47s
Feb-16	-14m 4s	Apr-14	-0m 13s	Jun-15	-0m 33s	Aug-16	-4m 15s	Oct-17	14m 43s	Dec-18	3m 17s
Feb-17	-13m 59s	Apr-15	0m 1s	Jun-16	-0m 46s	Aug-17	-4m 2s	Oct-18	14m 55s	Dec-19	2m 48s
Feb-18	-13m 54s	Apr-16	0m 16s	Jun-17	-0m 59s	Aug-18	-3m 49s	Oct-19	15m 6s	Dec-20	2m 18s
Feb-19	-13m 49s	Apr-17	0m 29s	Jun-18	-1m 12s	Aug-19	-3m 35s	Oct-20	15m 16s	Dec-21	1m 49s
Feb-20	-13m 42s	Apr-18	0m 43s	Jun-19	-1m 25s	Aug-20	-3m 21s	Oct-21	15m 26s	Dec-22	1m 19s
Feb-21	-13m 35s	Apr-19	0m 56s	Jun-20	-1m 38s	Aug-21	-3m 6s	Oct-22	15m 36s	Dec-23	0m 49s
Feb-22	-13m 28s	Apr-20	1m 8s	Jun-21	-1m 51s	Aug-22	-2m 51s	Oct-23	15m 44s	Dec-24	0m 19s
Feb-23	-13m 19s	Apr-21	1m 20s	Jun-22	-2m 4s	Aug-23	-2m 35s	Oct-24	15m 52s	Dec-25	-0m 10s
Feb-24	-13m 10s	Apr-22	1m 32s	Jun-23	-2m 17s	Aug-24	-2m 19s	Oct-25	15m 59s	Dec-26	-0m 40s
Feb-25	-13m 1s	Apr-23	1m 43s	Jun-24	-2m 30s	Aug-25	-2m 3s	Oct-26	16m 6s	Dec-27	-1m 9s
Feb-26	-12m 51s	Apr-24	1m 54s	Jun-25	-2m 42s	Aug-26	-1m 46s	Oct-27	16m 11s	Dec-28	-1m 39s
Feb-27	-12m 40s	Apr-25	2m 4s	Jun-26	-2m 55s	Aug-27	-1m 28s	Oct-28	16m 16s	Dec-29	-2m 8s
		Apr-26	2m 14s	Jun-27	-3m 7s	Aug-28	-1m 11s	Oct-29	16m 20s	Dec-30	-2m 37s
		Apr-27	2m 24s	Jun-28	-3m 20s	Aug-29	-0m 53s	Oct-30	16m 24s	Dec-31	-3m 5s
		Apr-28	2m 32s	Jun-29	-3m 32s	Aug-30	-0m 35s	Oct-31	16m 26s		
		Apr-29	2m 41s	Jun-30	-3m 44s	Aug-31	-0m 16s	Nov-01	16m 28s		

## ANEXO B- EQUAÇÃO DO TEMPO (2018)

<b>EoT 2018</b> [Negative EoT values indicate Dial Slow]						
Jan-01 -3m 34s	Feb-28 -12m 32s	Apr-30 2m 47s	Jul-01 -3m 53s	Sep-01 -0m 2s	Nov-02 16m 29s	
Jan-02 -4m 2s	Feb-29 -12m 20s	May-01 2m 54s	Jul-02 -4m 4s	Sep-02 0m 18s	Nov-03 16m 29s	
Jan-03 -4m 29s	Mar-01 -12m 20s	May-02 3m 1s	Jul-03 -4m 15s	Sep-03 0m 37s	Nov-04 16m 29s	
Jan-04 -4m 57s	Mar-02 -12m 8s	May-03 3m 7s	Jul-04 -4m 26s	Sep-04 0m 57s	Nov-05 16m 27s	
Jan-05 -5m 24s	Mar-03 -11m 55s	May-04 3m 13s	Jul-05 -4m 36s	Sep-05 1m 17s	Nov-06 16m 25s	
Jan-06 -5m 50s	Mar-04 -11m 42s	May-05 3m 18s	Jul-06 -4m 47s	Sep-06 1m 37s	Nov-07 16m 22s	
Jan-07 -6m 16s	Mar-05 -11m 29s	May-06 3m 23s	Jul-07 -4m 56s	Sep-07 1m 57s	Nov-08 16m 18s	
Jan-08 -6m 41s	Mar-06 -11m 15s	May-07 3m 27s	Jul-08 -5m 6s	Sep-08 2m 18s	Nov-09 16m 13s	
Jan-09 -7m 7s	Mar-07 -11m 1s	May-08 3m 30s	Jul-09 -5m 15s	Sep-09 2m 38s	Nov-10 16m 8s	
Jan-10 -7m 31s	Mar-08 -10m 46s	May-09 3m 33s	Jul-10 -5m 23s	Sep-10 2m 59s	Nov-11 16m 1s	
Jan-11 -7m 55s	Mar-09 -10m 31s	May-10 3m 35s	Jul-11 -5m 32s	Sep-11 3m 20s	Nov-12 15m 54s	
Jan-12 -8m 18s	Mar-10 -10m 16s	May-11 3m 37s	Jul-12 -5m 39s	Sep-12 3m 41s	Nov-13 15m 46s	
Jan-13 -8m 41s	Mar-11 -9m 60s	May-12 3m 38s	Jul-13 -5m 47s	Sep-13 4m 3s	Nov-14 15m 37s	
Jan-14 -9m 3s	Mar-12 -9m 44s	May-13 3m 39s	Jul-14 -5m 53s	Sep-14 4m 24s	Nov-15 15m 27s	
Jan-15 -9m 24s	Mar-13 -9m 28s	May-14 3m 39s	Jul-15 -5m 60s	Sep-15 4m 45s	Nov-16 15m 16s	
Jan-16 -9m 45s	Mar-14 -9m 11s	May-15 3m 39s	Jul-16 -6m 5s	Sep-16 5m 7s	Nov-17 15m 4s	
Jan-17 -10m 5s	Mar-15 -8m 54s	May-16 3m 38s	Jul-17 -6m 11s	Sep-17 5m 28s	Nov-18 14m 52s	
Jan-18 -10m 25s	Mar-16 -8m 37s	May-17 3m 36s	Jul-18 -6m 15s	Sep-18 5m 50s	Nov-19 14m 39s	
Jan-19 -10m 43s	Mar-17 -8m 20s	May-18 3m 34s	Jul-19 -6m 20s	Sep-19 6m 11s	Nov-20 14m 25s	
Jan-20 -11m 1s	Mar-18 -8m 3s	May-19 3m 31s	Jul-20 -6m 23s	Sep-20 6m 32s	Nov-21 14m 10s	
Jan-21 -11m 18s	Mar-19 -7m 45s	May-20 3m 28s	Jul-21 -6m 26s	Sep-21 6m 54s	Nov-22 13m 54s	
Jan-22 -11m 35s	Mar-20 -7m 27s	May-21 3m 24s	Jul-22 -6m 29s	Sep-22 7m 15s	Nov-23 13m 37s	
Jan-23 -11m 50s	Mar-21 -7m 9s	May-22 3m 20s	Jul-23 -6m 31s	Sep-23 7m 36s	Nov-24 13m 20s	
Jan-24 -12m 5s	Mar-22 -6m 51s	May-23 3m 15s	Jul-24 -6m 32s	Sep-24 7m 57s	Nov-25 13m 2s	
Jan-25 -12m 19s	Mar-23 -6m 33s	May-24 3m 9s	Jul-25 -6m 33s	Sep-25 8m 18s	Nov-26 12m 43s	
Jan-26 -12m 33s	Mar-24 -6m 15s	May-25 3m 3s	Jul-26 -6m 33s	Sep-26 8m 39s	Nov-27 12m 24s	
Jan-27 -12m 45s	Mar-25 -5m 57s	May-26 2m 57s	Jul-27 -6m 32s	Sep-27 8m 59s	Nov-28 12m 4s	
Jan-28 -12m 57s	Mar-26 -5m 39s	May-27 2m 50s	Jul-28 -6m 31s	Sep-28 9m 19s	Nov-29 11m 43s	
Jan-29 -13m 8s	Mar-27 -5m 21s	May-28 2m 43s	Jul-29 -6m 30s	Sep-29 9m 39s	Nov-30 11m 21s	
Jan-30 -13m 18s	Mar-28 -5m 3s	May-29 2m 35s	Jul-30 -6m 27s	Sep-30 9m 59s	Dec-01 10m 59s	
Jan-31 -13m 27s	Mar-29 -4m 45s	May-30 2m 27s	Jul-31 -6m 25s	Oct-01 10m 19s	Dec-02 10m 36s	
Feb-01 -13m 35s	Mar-30 -4m 27s	May-31 2m 18s	Aug-01 -6m 21s	Oct-02 10m 38s	Dec-03 10m 12s	
Feb-02 -13m 43s	Mar-31 -4m 9s	Jun-01 2m 9s	Aug-02 -6m 17s	Oct-03 10m 57s	Dec-04 9m 48s	
Feb-03 -13m 50s	Apr-01 -3m 51s	Jun-02 1m 60s	Aug-03 -6m 12s	Oct-04 11m 16s	Dec-05 9m 24s	
Feb-04 -13m 56s	Apr-02 -3m 33s	Jun-03 1m 50s	Aug-04 -6m 7s	Oct-05 11m 34s	Dec-06 8m 58s	
Feb-05 -14m 1s	Apr-03 -3m 16s	Jun-04 1m 40s	Aug-05 -6m 1s	Oct-06 11m 52s	Dec-07 8m 33s	
Feb-06 -14m 5s	Apr-04 -2m 58s	Jun-05 1m 29s	Aug-06 -5m 55s	Oct-07 12m 10s	Dec-08 8m 7s	
Feb-07 -14m 9s	Apr-05 -2m 41s	Jun-06 1m 19s	Aug-07 -5m 47s	Oct-08 12m 27s	Dec-09 7m 40s	
Feb-08 -14m 11s	Apr-06 -2m 24s	Jun-07 1m 8s	Aug-08 -5m 40s	Oct-09 12m 44s	Dec-10 7m 13s	
Feb-09 -14m 13s	Apr-07 -2m 7s	Jun-08 0m 56s	Aug-09 -5m 31s	Oct-10 12m 60s	Dec-11 6m 45s	
Feb-10 -14m 14s	Apr-08 -1m 51s	Jun-09 0m 44s	Aug-10 -5m 23s	Oct-11 13m 16s	Dec-12 6m 18s	
Feb-11 -14m 14s	Apr-09 -1m 34s	Jun-10 0m 33s	Aug-11 -5m 13s	Oct-12 13m 31s	Dec-13 5m 49s	
Feb-12 -14m 14s	Apr-10 -1m 18s	Jun-11 0m 20s	Aug-12 -5m 3s	Oct-13 13m 46s	Dec-14 5m 21s	
Feb-13 -14m 13s	Apr-11 -1m 2s	Jun-12 0m 8s	Aug-13 -4m 53s	Oct-14 14m 0s	Dec-15 4m 52s	
Feb-14 -14m 11s	Apr-12 -0m 47s	Jun-13 -0m 4s	Aug-14 -4m 42s	Oct-15 14m 14s	Dec-16 4m 23s	
Feb-15 -14m 8s	Apr-13 -0m 32s	Jun-14 -0m 17s	Aug-15 -4m 30s	Oct-16 14m 27s	Dec-17 3m 54s	
Feb-16 -14m 5s	Apr-14 -0m 17s	Jun-15 -0m 30s	Aug-16 -4m 18s	Oct-17 14m 40s	Dec-18 3m 25s	
Feb-17 -14m 0s	Apr-15 -0m 2s	Jun-16 -0m 43s	Aug-17 -4m 5s	Oct-18 14m 52s	Dec-19 2m 55s	
Feb-18 -13m 56s	Apr-16 0m 12s	Jun-17 -0m 56s	Aug-18 -3m 52s	Oct-19 15m 3s	Dec-20 2m 26s	
Feb-19 -13m 50s	Apr-17 0m 26s	Jun-18 -1m 9s	Aug-19 -3m 38s	Oct-20 15m 14s	Dec-21 1m 56s	
Feb-20 -13m 44s	Apr-18 0m 40s	Jun-19 -1m 22s	Aug-20 -3m 24s	Oct-21 15m 24s	Dec-22 1m 26s	
Feb-21 -13m 37s	Apr-19 0m 53s	Jun-20 -1m 35s	Aug-21 -3m 10s	Oct-22 15m 34s	Dec-23 0m 56s	
Feb-22 -13m 29s	Apr-20 1m 5s	Jun-21 -1m 48s	Aug-22 -2m 54s	Oct-23 15m 42s	Dec-24 0m 27s	
Feb-23 -13m 21s	Apr-21 1m 17s	Jun-22 -2m 1s	Aug-23 -2m 39s	Oct-24 15m 50s	Dec-25 -0m 3s	
Feb-24 -13m 12s	Apr-22 1m 29s	Jun-23 -2m 14s	Aug-24 -2m 23s	Oct-25 15m 58s	Dec-26 -0m 33s	
Feb-25 -13m 3s	Apr-23 1m 41s	Jun-24 -2m 27s	Aug-25 -2m 7s	Oct-26 16m 4s	Dec-27 -1m 2s	
Feb-26 -12m 53s	Apr-24 1m 52s	Jun-25 -2m 39s	Aug-26 -1m 50s	Oct-27 16m 10s	Dec-28 -1m 32s	
Feb-27 -12m 43s	Apr-25 2m 2s	Jun-26 -2m 52s	Aug-27 -1m 33s	Oct-28 16m 15s	Dec-29 -2m 1s	
	Apr-26 2m 12s	Jun-27 -3m 5s	Aug-28 -1m 15s	Oct-29 16m 20s	Dec-30 -2m 30s	
	Apr-27 2m 21s	Jun-28 -3m 17s	Aug-29 -0m 57s	Oct-30 16m 23s	Dec-31 -2m 58s	
	Apr-28 2m 30s	Jun-29 -3m 29s	Aug-30 -0m 39s	Oct-31 16m 26s		
	Apr-29 2m 39s	Jun-30 -3m 41s	Aug-31 -0m 20s	Nov-01 16m 28s		