



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

ÉVERSON DE MOURA FERREIRA

**POSSIBILIDADES PARA O ESTUDO DE
OTIMIZAÇÃO NO ENSINO MÉDIO**

Campinas

2018

Éverson de Moura Ferreira

POSSIBILIDADES PARA O ESTUDO DE OTIMIZAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Roberto Andreani

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À
VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DE-
FENDIDA PELO ALUNO ÉVERSON
DE MOURA FERREIRA, E ORIEN-
TADA PELO PROF. DR. ROBERTO
ANDREANI.

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

F413p Ferreira, Éverson de Moura, 1987-
Possibilidades para o estudo de otimização no ensino médio / Éverson de Moura Ferreira. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Roberto Andreani.

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Otimização matemática. 2. Cálculo - Estudo e ensino (Ensino médio). 3. GeoGebra (Programa de computador). 4. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 5. Matemática (Ensino médio) - Métodos gráficos. 6. Educação matemática. 7. Programação linear. I. Andreani, Roberto, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Possibilities for the study of optimization in high school

Palavras-chave em inglês:

Mathematical optimization

Calculus - Study and teaching (High school)

GeoGebra (Computer program)

Mathematics (High school) - Study and teaching

Mathematics (High school) - Graphic methods

Mathematics education

Linear programming

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestre

Banca examinadora:

Roberto Andreani [Orientador]

Pedro Jose Catuogno

Luis Felipe Cesar da Rocha Bueno

Data de defesa: 02-02-2018

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado profissional defendida em 02 de fevereiro de 2018
e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). PEDRO JOSE CATUOGNO

Prof(a). Dr(a). LUIS FELIPE CESAR DA ROCHA BUENO

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

*À minha querida esposa Ana Karolina Miranda de Moura,
pelo precioso apoio a mim dedicado em todos os momentos.*

Agradecimentos

Minha sincera gratidão à Deus e aos professores do IMECC pelos valiosos ensinamentos, em especial, à Professora Doutora Claudina Izepe Rodrigues e ao meu Orientador Professor Doutor Roberto Andreani pela parceria e motivação constantes.

Também agradeço meus colegas de turma pelos ricos momentos vivenciados durante o curso, em especial meus grandes amigos e companheiros Geraldo Paulo Guimarães e André Palomo.

Ao aluno do Imecc, Charles Henrique Martins Sobrinho, por todo apoio na formatação do texto.

Por fim, à CAPES pelo incentivo financeiro e pela efetiva ação para a melhoria do ensino.

*“O que sabemos é uma gota,
o que ignoramos é um oceano.
Mas o que seria o oceano
se não infinitas gotas?”
Isaac Newton*

Resumo

Este trabalho tem como objetivo oferecer algumas possibilidades para potencializar o Professor do Ensino Médio de Matemática no ensino de otimização. São apresentados alguns conceitos essenciais para o estudo da otimização sem o uso do cálculo tais como minimização de função quadrática, desigualdade das médias e uma visão geral sobre modelos de programação linear (solução gráfica). Também são expostas algumas definições e teoremas fundamentais para o estudo da otimização com o uso do cálculo com uma ou mais variáveis, além de um panorama geral sobre a história do cálculo, o método de Newton e o método do gradiente. Foi elaborada uma sequência didática como sugestão para que o Professor do Ensino Médio de Matemática possa utilizar o GEOGEBRA nas aulas tornando-as mais atrativas e dinâmicas através dos recursos visuais que o referido software proporciona.

Palavras-chave: Otimização sem uso do cálculo, Otimização com uso do cálculo, Educação matemática no ensino médio.

Abstract

This research has as objective to offer some possibilities to potentiate High School Mathematics Teacher on teaching optimization. It was presented many essential concepts to optimization study without using Calculus as minimization in quadratic function, inequality of means and an overview about linear programming models (graphic solution). Some key definitions and theorems for studying optimization with Calculus are also exposed to work with one or more variables functions. In addition to that, there is a general outlook about Calculus History, Newton's Method and Gradient Method. It was elaborated a didactic sequence as a suggestion to High School Mathematics Teacher which he could use GEOGEBRA during the classes to become them more attractive and dynamic through the visual resources that the software presents.

Keywords: Optimization without Calculus use, Optimization with Calculus use, High school mathematics education.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Terreno triangular.	21
Figura 2 – Terreno triangular.	22
Figura 3 – Parábola de foco F e reta diretriz d	24
Figura 4 – Representações de parábolas.	26
Figura 5 – Planificação da lata cilíndrica	31
Figura 6 – Triângulos quaisquer	34
Figura 7 – Caixa sem tampa	36
Figura 8 – Região factível $ABCD$	43
Figura 9 – Região factível $ABCD$	45
Figura 10 – Região factível $ABCD$	46
Figura 11 – A reta de z coincide com uma das restrições.	48
Figura 12 – Região factível vazia	48
Figura 13 – Representação da parede.	51
Figura 14 – Determinação do ponto P	51
Figura 15 – Determinação do ponto C	52
Figura 16 – Determinação do ponto D	52
Figura 17 – Construção do retângulo $ABCD$	53
Figura 18 – Verificação dinâmica da área máxima do retângulo $ABCD$	53
Figura 19 – Representação do conjunto de restrições.	55
Figura 20 – Região factível.	55
Figura 21 – Região factível.	56
Figura 22 – $V(C)$ exibe o maior valor da F.O.	56
Figura 23 – Reta t tangente à parábola no ponto P	63
Figura 24 – Espaço x Tempo.	64
Figura 25 – Reta f	65
Figura 26 – $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	66
Figura 27 – $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$	66
Figura 28 – Gráfico de f	67
Figura 29 – Função descontínua f	68
Figura 30 – $h \rightarrow 0 \rightarrow s \rightarrow t$	73
Figura 31 – Reta tangente $y = 2$	74
Figura 32 – Retas tangentes horizontais.	78
Figura 33 – Pontos extremantes de f	80
Figura 34 – f contínua em $[a, b]$	81
Figura 35 – Retângulo de dimensões $2x$ e y	83
Figura 36 – Intervalo aberto em \mathbb{R}	84

Figura 37 – Bola aberta em \mathbb{R}^2 .	85
Figura 38 – Bola aberta em \mathbb{R}^3 .	85
Figura 39 – D é limitado.	86
Figura 40 – D não é limitado.	86
Figura 41 – $a = (a_1, a_2)$ é um ponto interior de A .	87
Figura 42 – Fronteira de A	87
Figura 43 – $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } 2x + y \leq 6\}$	98
Figura 44 – $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1 \text{ e } y \leq 1\}$	100
Figura 45 – D é o quadrilátero de vértices E, F, G e H .	101
Figura 46 – D é a circunferência de centro na origem e raio unitário.	103
Figura 47 – Primeira iteração.	113

Lista de tabelas

Tabela 1 – Máquinas/Tempo Disponível	38
Tabela 2 – Mão-de-obra/Tempo Disponível	39
Tabela 3 – Máquinas/Produtos	39
Tabela 4 – Mão-de-obra/Produtos	39
Tabela 5 – Potencial de Vendas/Lucro unitário	39
Tabela 6 – Quantidade Mínima Diária de Vitaminas	41
Tabela 7 – Vitaminas presentes em cada alimento	41
Tabela 8 – Coeficientes angulares.	62
Tabela 9 – Velocidade média	64
Tabela 10 – Pontos de $f(x)$ próximos de $x = 5$	65
Tabela 11 – Valores de x próximos de 1.	67

Sumário

	Introdução	15
1	ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE OTIMIZAÇÃO	20
1.1	Otimização sem uso do cálculo	21
1.1.1	Função quadrática	21
1.1.2	DESIGUALDADE DAS MÉDIAS	28
1.1.2.1	Média Aritmética Simples	28
1.1.2.2	Média Geométrica	28
1.1.3	Modelos de Programação Linear: Solução Gráfica	37
1.2	Sequência didática	49
2	PANORAMA GERAL SOBRE A HISTÓRIA DO CÁLCULO E A UTILIZAÇÃO DESTA FERRAMENTA NO ESTUDO E APLICAÇÕES EM OTIMIZAÇÃO	58
2.1	O cálculo de Isaac Newton	59
2.2	O cálculo de Leibiniz	60
3	OTIMIZAÇÃO COM CÁLCULO: FUNÇÕES DE UMA ÚNICA VARIÁVEL	62
3.1	Limite	62
3.1.1	Limite de uma Função	65
3.1.2	Propriedades dos limites	69
3.1.3	Definição precisa de limite	71
3.2	Derivada	72
3.2.1	Regras de Derivação	75
3.2.2	Aplicação de derivadas para determinar pontos de máximo e mínimo de funções reais de uma única variável	79
4	OTIMIZAÇÃO COM CÁLCULO: FUNÇÕES DE DUAS OU MAIS VARIÁVEIS	84
4.1	Noções Elementares de Topologia	84
4.2	Funções de Várias Variáveis	88
4.3	Condições necessárias de otimalidade de primeira ordem	90
4.4	Condições suficientes de otimalidade de segunda ordem	92
4.5	Otimização com restrições	97
4.6	Método dos Multiplicadores de Lagrange	103

5	MÉTODO DO GRADIENTE E MÉTODO DE NEWTON PARA OTIMIZAÇÃO IRRESTRITA	109
5.1	Método do Gradiente	111
5.2	Método de Newton	112
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	116
	REFERÊNCIAS	117

Introdução

O presente trabalho foi escolhido e desenvolvido por mim pela afinidade que tenho com a área do Cálculo desde o Ensino Médio. Havia uma professora chamada Abigail Marocco Parazzi que acreditava em minha vocação para cursar Matemática na Universidade. Ela me iniciou nesse estudo no contra período das aulas durante os plantões de dúvidas, frequentados para um aprofundamento nos conhecimentos adquiridos em sala de aula. Minhas habilidades escolares mais evidenciadas, residiam na área de exatas, o que em conjunto com esse apoio e incentivo dados pela professora, foi o que determinou a minha escolha em me graduar na área de exatas, mais precisamente, Licenciatura em Matemática.

Ao contemplar que a otimização não só é uma área do conhecimento exato que envolve Cálculo como também é muito útil e necessária para a vida cotidiana do ser humano em qualquer tempo e espaço, além de dialogar com todas as áreas da matemática, o interesse e motivação para pesquisar e ampliar os horizontes acerca do tema emergiram naturalmente.

Nesse sentido, se desponta a oportunidade de contribuir com os professores do Ensino Regular para tornar o tema mais próximo da realidade do Ensino Médio, e, em adição a isso, oferecer algumas possibilidades práticas de exercício desse conteúdo, uma vez que o PROFMAT - Programa de Mestrado Profissional em Matemática, objetiva aperfeiçoar a formação inicial dos Professores de Matemática de Ensino Médio em exercício para que haja um aprimoramento teórico, didático e reflexivo em sua atuação junto aos alunos.

Os objetivos gerais do trabalho são:

- Contextualizar historicamente o estudo da otimização sucintamente;
- Possibilitar reflexões sobre as aplicabilidades da otimização e métodos de resolução de problemas dessa natureza voltados tanto para o Ensino Superior (pensando na formação do professor), quanto para o Ensino Médio (pensando na formação do aluno).

Os objetivos específicos do trabalho são:

- Apresentar a teoria que permeia a otimização e o diálogo que estabelece com as grandes áreas da Matemática ;

- Oferecer ferramentas ao professor do Ensino Médio para um trabalho em sala de aula satisfatório no que se refere ao conteúdo otimização;
- Apresentar alguns problemas de otimização que podem ser utilizados para compor planos de aula, sequências didática, listas de exercícios, explicações teóricas e até mesmo projetos para alunos do Ensino Médio.

A metodologia que será utilizada para a realização desse trabalho é a revisão bibliográfica através da leitura de livros, artigos científicos, periódicos e livros didáticos on-line ou impressos para fomentar as discussões teóricas bem como valer-se dos mesmos suportes para a elaboração de uma sequência didática que possa auxiliar o professor de Ensino Médio a trabalhar esse conteúdo com seus alunos.

Além disso, serão selecionados criteriosamente alguns problemas motivadores para analisar a otimização sob cada um dos prismas propostos pelo trabalho.

A fim de contextualizar o cenário em que a otimização se originou, será apresentado a seguir um panorama geral sobre os eventos históricos que propiciaram sua sistematização e difusão.

Os primeiros indícios de uma preocupação sistematizada com o estudo e os métodos da otimização surgiram durante a Revolução Industrial (contemporânea à Revolução Francesa) que foi um período em que a sociedade rompeu com várias permanências e alçou vôo rumo a um desenvolvimento tecnológico frenético. Esse processo teve início no século XIX na Europa em que se substituiu o uso do trabalho artesanal pelo trabalho assalariado realizado com máquinas.

Até então, as técnicas empregadas na produção eram rudimentares, o que não possibilitava um aumento expressivo desta. Os empregos eram vitalícios e os funcionários trabalhavam na residência do empregador, por baixos salários e sem os devidos direitos trabalhistas.

A primeira invenção que contribuiu para que a Revolução Industrial ocorresse na Inglaterra foi a máquina de fição, que trouxe a possibilidade de se produzir com oito fios ao mesmo tempo, girando apenas uma manivela, sem um esforço muito grande do trabalhador, podendo ser operada até mesmo por uma criança.

Na sequência, o tear mecânico traz um avanço ainda maior ao produtor têxtil, e, por fim, o advento do motor à vapor aperfeiçoado por James Watts engendra uma avalanche de transmutações não só no modo de produzir, mas nas relações de trabalho e, como consequência, na sociedade, na economia, na política e na cultura. Consoante aos escritos de (HOBSBAWM, 2010).

A agricultura já estava preparada para levar a termo suas três funções fundamentais numa era de industrialização: aumentar a produção e a produtividade de modo a alimentar uma população não agrícola em

rápido crescimento; fornecer um grande e crescente excedente de recrutas em potencial para as cidades e indústrias; e fornecer um mecanismo para o acúmulo de capital a ser usado nos setores mais modernos da economia. (Duas outras funções eram provavelmente menos importantes na Grã-Bretanha: a criação de um mercado suficientemente grande entre a população agrícola - normalmente a grande massa do povo - e o fornecimento de um excedente de exportação que contribuisse para garantir as importações de capital.

Qualquer que tenha sido a razão do avanço britânico, ele não se deveu à superioridade tecnológica e científica. Nas ciências naturais os franceses estavam seguramente à frente dos ingleses, vantagem que a Revolução Francesa veio acentuar de forma marcante, pelo menos na matemática e na física, pois ela incentivou as ciências na França enquanto que a reação suspeitava delas na Inglaterra.

Do ponto de vista de (HOBSBAWM, 2010), o desenvolvimento da agricultura foi um aspecto fundamental para que a Revolução Industrial explodisse na pioneira Inglaterra.

As demandas da sociedade clamavam por uma nova configuração no modo de produção capitalista. Apesar da economia agrícola ter apoiado o desenvolvimento industrial, havia um conflito muito grande entre os que defendiam a permanência dessa agricultura voltada para o mercado através de exportações em navios, já que essa estrutura já estava sendo criada e outros que pregavam a industrialização como a melhor maneira de aumentar o acúmulo de capital.

Ainda, segundo (HOBSBAWM, 2010),

Além disso, as revoluções industriais pioneiras ocorreram em uma situação histórica especial, em que o crescimento econômico surge de um acúmulo de decisões de incontáveis empresários e investidores particulares, cada um deles governado pelo primeiro mandamento da época, comprar no mercado mais barato e vender no mais caro. Como poderiam eles descobrir que o lucro máximo devia ser detido com a organização da revolução industrial e não com atividades comerciais mais conhecidas (e mais lucrativas no passado)? Como poderiam saber o que ninguém sabia até então, que a revolução industrial produziria uma aceleração ímpar na expansão de seus mercados?

A Inglaterra passou a exportar a industrialização. Houve a divisão das etapas do trabalho. O que antes era produzido por um único artesão em muitas horas, passou a ser produzido em muito menos tempo, pois cada trabalhador se responsabilizava e se especializava em executar uma parte, o que ocasionou também o aumento no número de peças produzidas ainda mais com o auxílio das esteiras das máquinas que passaram a ditar o tempo gasto em cada tarefa.

As máquinas modernas não eram mais comportadas pelas residências dos empregadores que passaram a ter um espaço próprio para produzir. Essas mudanças trouxeram a diminuição da jornada de trabalho, o aumento salarial, a redução dos custos de produção e repasse dos produtos no mercado e assim a popularização e um maior acesso

aos produtos industrializados. Os horários das refeições, atividades escolares, de dormir também foram modificados.

Para (HOBSBAWM, 2010), a Inglaterra consolidou-se com uma economia monumental muito superior a qualquer nação nos padrões de 1848. Apesar de possuir uma urbanização nada bela e uma desigualdade social muito acentuada, seus investimentos de capital somavam cerca de 200 a 300 milhões de libras, dos quais um quarto eram aplicados nos Estados Unidos e um quinto na América Latina. Esses investimentos retornaram em forma de lucro e surgiram novas demandas para investir nos quatro cantos do mundo.

Era, de fato, a “oficina do mundo”. E tanto a Grã-Bretanha quanto o mundo sabiam que a revolução industrial lançada nestas ilhas não só pelos comerciantes e empresários como através deles, cuja única lei era comprar no mercado mais barato e vender sem restrição no mais caro, estava transformando o mundo. Nada poderia detê-la. Os deuses e os reis do passado eram impotentes diante dos homens de negócios e das máquinas a vapor do presente.

Para que essa nova forma de produção obtivesse êxito, foram desenvolvidas técnicas e treinamentos para funcionários, a fim de minimizar tempos, economizar dinheiro e maximizar lucros. Duas metodologias dessa natureza que tiveram destaque foram o Taylorismo e o Fordismo.

A primeira foi desenvolvida e publicada por Frederick W. Taylor em 1911 que tinha como principal foco o tempo como mercadoria. O tempo da força de trabalho uma vez vendida para o empregador deveria ser otimizado para que as tarefas pudessem ser realizadas no menor tempo possível, aumentando a produção e diminuindo custos. Os supervisores das operações, observavam até mesmo a forma de se movimentar dos operários com o objetivo de perceber qual era a melhor maneira de minimizar o tempo. Os funcionários que otimizavam o tempo recebiam premiações. E a competição pelas premiações era uma estratégia dos gestores para aumentar a produção.

A outra é de Henry Ford que era industrial e fabricante dos carros com o mesmo nome. O principal objetivo desse modelo era aumentar a eficiência durante a produção para que esta aumentasse, e assim, maximizar a oferta do produto e diminuir o custo do produto final. Assim, sua popularização e baixo custo seriam mantidos com o equilíbrio da oferta e procura. Uma boa ilustração desses métodos é o filme “Tempos Modernos” de Charles Chaplin.

Alguns anos mais tarde, um outro invento iria potencializar ainda mais os processos de otimização: o computador. Conforme o site [oficinadanet](http://oficinadanet.com), seu protótipo foi desenvolvido pelo alemão Konrad Zuse em 1936 e apresentava características físicas e recursos bem distintos dos computadores atuais. O próximo grande feito nesse segmento foi em 1944, em que a marinha estado-unidense em parceria com a Universidade de Harvard, projetou um computador que conseguia multiplicar dois números de dez dígitos em três segundos. Simultaneamente, e em segredo o Exército criou o Eniac, um computador que

precisava ser operado por 6 pessoas para fazer conexões, entrada e saída de dados. Esse seria o mais próximo do nosso contemporâneo PC.

1 Algumas considerações sobre otimização

Pode-se vislumbrar otimização como uma sistematização de técnicas e métodos de configurar o melhor formato para a elaboração, estruturação e funcionamento de sistemas de interesse de diversos tipos e naturezas. A partir de um conjunto de variáveis e possíveis restrições de inúmeros gêneros, a essência da otimização reside em encontrar o máximo ou o mínimo de uma função de acordo com a natureza do problema.

Conforme (MUNDIM; DELAVY, 2008),

A otimização de processos é de extrema importância nas mais diversas áreas do conhecimento humano: seja na física, onde pode ser usada para determinar a configuração mais estável ou conveniente de uma molécula; na química, onde procuram-se as condições ideais para a realização de um experimento (quimiometria); na engenharia, onde se deseja relacionar elementos externos como o fluxo de produção, o gasto de energia; na economia, onde se procura o lucro máximo ou o custo mínimo; na geologia, para estudar-se a prospecção do solo, e, em muitas outras áreas como a estatística, psicologia e biologia. Consciente ou inconscientemente, e independente da classe social e cultural, uma parte considerável da nossa vida é usada na busca da melhor escolha e tomada de decisão, na minimização dos custos de um dado produto, no menor gasto de energia e a realização de atividades no menor tempo.

É possível elencar alguns problemas tratáveis pela otimização:

- Determinação da maior área possível para a construção de uma casa retangular em um terreno triangular;
- Determinação da melhor forma de acondicionamento de produtos dentro de um galpão ou almoxarifado, maximizando o aproveitamento do espaço;
- Planejamento do melhor percurso para o transporte de mercadorias visando a minimização de custos e tempo de entrega;
- Minimização do tempo de veiculação e os ruídos de comunicação dentro de uma empresa e maximização do alcance das informações à todos os colaboradores através de uma intranet;
- Maximização dos lucros através da minimização dos custos e tempo de produção dentro de uma indústria;
- Otimização por colônia de formigas que através dos ferormônios conseguem se comunicar e organizar de tal maneira a conseguirem traçar as melhores rotas minimizando esforços da colônia e maximizando a obtenção de alimento.

1.1 Otimização sem uso do cálculo

Inicialmente haverá a apresentação de algumas teorias que permitem o estudo da otimização sem recursos de nível superior como, por exemplo, o cálculo. Com o intuito de acessibilizar esse conteúdo para os alunos do Ensino Médio, nesse item será discutida a resolução de situações-problema de otimização através da função quadrática, da desigualdade das médias e também dos modelos de programação linear (solução gráfica).

1.1.1 Função quadrática

Como motivação para o estudo detalhado das funções quadráticas, podemos analisar a seguinte situação adaptada de uma questão do vestibular da FUVEST:

Imagine que num terreno, com o formato de um triângulo retângulo com catetos medindo 20 m e 30 m, deseja-se construir uma casa retangular de dimensões x e y , como indicado na Figura 1:

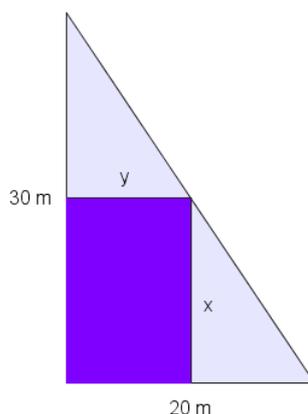


Figura 1 – Terreno triangular.

Então, devemos determinar os valores de x e y de modo a obter a área máxima a ser ocupada pela casa.

Observe na Figura 2 que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo ADE , donde podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{30 - x}{30} &= \frac{y}{20} \\ 3y &= 60 - 2x \\ y &= \frac{2}{3} \cdot (30 - x)\end{aligned}$$

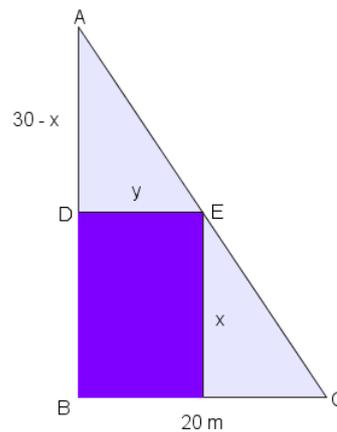


Figura 2 – Terreno triangular.

Por outro lado, a área do retângulo é dada por: $A = x \cdot y$ e assim, substituindo y como na expressão acima, temos:

$$A = \frac{2}{3} \cdot x \cdot (30 - x)$$

$$A = 20x - \frac{2}{3}x^2$$

Por fim, concluímos que a área do retângulo em questão é dada por uma função quadrática. Sendo assim, para resolver tal problema, devemos encontrar o ponto de máximo desta função. Vamos estudar a seguir um pouco mais sobre esses tipos de funções.

Definição 1. *Função Quadrática é toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b, c números reais e $a \neq 0$.*

Para encontrar de maneira fácil o ponto de máximo ou de mínimo da função quadrática, vamos mostrar que toda função quadrática pode ser escrita na forma canônica $f(x) = a(x - h)^2 + k$ com:

$$h = -\frac{b}{2a} \quad e \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

.

Demonstração. Completando o quadrado em $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

□

o que completa a demonstração.

Exemplo 1. Vamos escrever a função quadrática dada por $f(x) = 4x^2 + 16x + 9$ na sua forma canônica.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 + 16x + 9 \\ &= 4(x^2 + 4x) + 9 \\ &= 4(x^2 + 4x + 4) - 16 + 9 \\ &= 4(x + 2)^2 - 7 \end{aligned}$$

Exemplo 2. Vamos escrever a função quadrática dada por $f(x) = 3x^2 + 11x + 2$ na sua forma canônica.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 11x + 2 \\ &= 3\left(x^2 + \frac{11}{3}x\right) + 2 \\ &= 3\left(x^2 + \frac{11}{3}x + \frac{121}{36}\right) - \frac{121}{12} + 2 \\ &= 3\left(x + \frac{11}{6}\right)^2 - \frac{97}{12} \end{aligned}$$

Proposição 1. Para $a > 0$ a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b, c números reais e $a \neq 0$, que como vimos, pode ser escrita na forma canônica $f(x) = a(x - h)^2 + k$ que possui um **valor mínimo** igual a k , que ocorre para $x = h$, isto é, $f(h) = k$ é o menor valor que f assume.

Demonstração. Como $a > 0$ temos que, $a(x - h)^2 \geq 0$ para todo x . Com $x \neq h$, temos $f(x) = a(x - h)^2 + k > k = f(h)$ pois nesse caso $a(x - h)^2 > 0$. Assim, mostramos que $f(h) < f(x)$ para todo $x \neq h$, o que encerra a demonstração. \square

Proposição 2. Para $a < 0$ a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b, c números reais e $a \neq 0$, que pode ser escrita na forma canônica $f(x) = a(x - h)^2 + k$ como demonstramos anteriormente e que possui um **valor máximo** igual a k , que ocorre para $x = h$, isto é, $f(h) = k$ é o maior valor que f assume.

Demonstração. Como $a < 0$ temos que, $a(x - h)^2 \leq 0$ para todo x . Com $x \neq h$, temos $f(x) = a(x - h)^2 + k < k = f(h)$ pois nesse caso $a(x - h)^2 < 0$. Assim, mostramos que $f(h) > f(x)$ para todo $x \neq h$, o que encerra a demonstração. \square

Algumas considerações sobre o gráfico da função quadrática:

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola. A parábola por definição é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de uma reta d e de um ponto F não pertencente à reta d . O ponto F é chamado de foco da parábola e a reta d é chamada de reta diretriz.

O eixo da parábola é a reta que passa pelo ponto F e é perpendicular à reta diretriz e o vértice da parábola é o ponto mais próximo da reta diretriz.

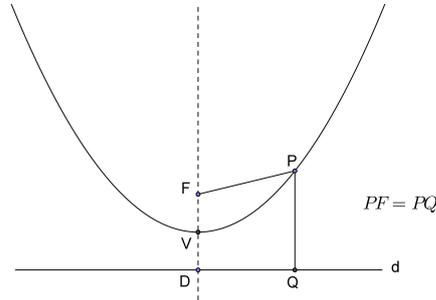


Figura 3 – Parábola de foco F e reta diretriz d .

Vamos agora provar que a parábola é de fato o gráfico da função quadrática.

Vimos que a função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e c números reais e $a \neq 0$ pode ser escrita em sua forma canônica como $f(x) = a(x - m)^2 + k$ com $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$. Então, a parábola com foco $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$ e com reta diretriz d de equação $y = k - \frac{1}{4a}$ é o gráfico da função quadrática f .

Demonstração. De fato, da definição de parábola temos que um ponto $P = (x, f(x))$ da função quadrática f pertence à parábola, se e somente se, a distância de P até o foco F é igual a distância do mesmo ponto P até a reta diretriz d , ou seja, $d(P, F) = d(P, d)$, ou ainda,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - m)^2 + \left(f(x) - k - \frac{1}{4a}\right)^2} &= \left|f(x) - k + \frac{1}{4a}\right| \iff (x - m)^2 + \left(f(x) - k - \frac{1}{4a}\right)^2 \\ &= \left|f(x) - k + \frac{1}{4a}\right|^2 \iff (x - m)^2 + (f(x) - k)^2 + \frac{-2(f(x) - k)}{4a} + \frac{1}{16a^2} \\ &= (f(x) - k)^2 + \frac{2(f(x) - k)}{4a} + \frac{1}{16a^2} \iff (x - m)^2 + \frac{-2(f(x) - k)}{4a} \\ &= \frac{2(f(x) - k)}{4a} \iff (x - m)^2 = \frac{4(f(x) - k)}{4a} \iff a(x - m)^2 \\ &= (f(x) - k) \iff f(x) = a(x - m)^2 + k. \end{aligned}$$

Note que $f(x) = a(x - m)^2 + k$ é a regra da função quadrática f dada na hipótese, o que encerra a demonstração. \square

Disso, tem-se que o gráfico de qualquer função quadrática $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e c números reais e $a \neq 0$ é uma parábola com foco $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$ e reta diretriz d de equação $y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$.

A parábola terá concavidade voltada para cima se $a > 0$ ou terá concavidade voltada para baixo caso $a < 0$.

Uma outra característica importante a saber sobre o gráfico da função quadrática está diretamente ligada às possíveis raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, a parábola intercepta o eixo das abscissas nas possíveis raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Dizer que a parábola não toca o eixo das abscissas é o mesmo que dizer que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raiz real.

Vamos determinar as possíveis raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$ em função dos coeficientes reais a, b e c com $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff \\ \iff a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) = -c &\iff \\ \iff a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = -c + \frac{b^2}{4a} &\iff \\ \iff a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} &\iff \\ \iff \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &\iff \\ \iff x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &\iff \\ \iff x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &\iff \\ \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &\iff \end{aligned}$$

Veja que x só assumirá valores reais quando o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ for não negativo.

Na Figura 4 estão os possíveis gráficos da função quadrática f para os possíveis valores de Δ e para os possíveis valores do coeficiente a .

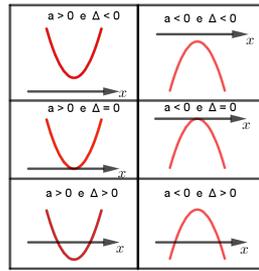


Figura 4 – Representações de parábolas.

Após o estudo detalhado das funções quadráticas, já estamos preparados para retornar ao problema que motivou tal análise e finalizar a resolução do mesmo.

Vimos que a área do retângulo de lados x e y da Figura 2 pode ser dada pela função quadrática:

$$A = 20x - \frac{2}{3}x^2$$

Sendo assim, o ponto de máximo dessa função é:

$$v = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

e fazendo $a = -\frac{2}{3}$, $b = 20$ e $c = 0$, teremos $v = (15, 150)$, o que nos dá $x = 15$ e com $x = 15$ teremos $y = \frac{2}{3}(30 - x) = 10$.

Portanto, as dimensões da casa deverão ser 15 m por 10 m para que a área retangular construída seja máxima.

Vamos analisar agora algumas outras situações envolvendo otimização em que podemos reduzir um problema a uma simples análise de máximos e mínimos de funções quadráticas:

Exemplo 3. João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por 20 reais. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía 1 real no preço de cada caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima?

Solução: Se João reduzir x reais no preço de cada caixa de picolé a expressão que representará a quantidade de caixas vendidas será dada por $300 + 40x$ com o custo de $20 - x$ para cada caixa. Assim, a expressão que fornecerá a receita gerada com a venda desses picolés será $R(x) = (300 + 40x) \cdot (20 - x)$, ou ainda, $R(x) = -40x^2 + 500x + 6000$. Portanto, a receita será máxima quando, $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-500}{-80} = 6,25$.

O que nos permite dizer que João deve cobrar $20 - 6,25 = 13,75$ reais por cada caixa para que a receita seja máxima.

Exemplo 4. Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro 800 reais mais 10 reais por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima ?

Solução: Se x representar o número de passageiros, então $100 - x$ representará o número de lugares vazios. Considerando ainda, que cada passageiro paga 800 reais mais 10 reais por lugar vago, a receita da empresa será dada pela expressão

$R(x) = 800x + 10(100 - x)x$, ou ainda, $R(x) = -10x^2 + 1800x$. Portanto, a receita será máxima quando,

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1800}{-20} = 90.$$

Logo, a rentabilidade da empresa será máxima se a mesma contar com exatamente 90 passageiros.

Exemplo 5. Se x e y são números reais tais que $3x + 4y = 12$, determine o valor mínimo de $z = x^2 + y^2$.

Solução: Do enunciado, temos que $3x + 4y = 12$, donde podemos escrever $y = \frac{12 - 3x}{4}$ e agora, substituindo na expressão que queremos minimizar, temos :

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{12 - 3x}{4}\right)^2, \text{ ou ainda,} \\ z &= x^2 + 9 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{16}x^2, \text{ ou seja,} \\ z &= \frac{25}{16}x^2 - \frac{9}{2}x + 9, \end{aligned}$$

observa-se, que desta forma, a expressão que fornece os valores de z é uma função quadrática na variável x , encontra-se seu valor mínimo para

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{50}{16}} = \frac{144}{100} = 1,44$$

e agora, substituindo o valor de x na expressão $y = \frac{12 - 3x}{4}$ teremos,

$$y = \frac{12 - 3 \cdot 1,44}{4} = \frac{12 - 4,32}{4} = 1,92.$$

Por fim, substituindo $x = 1,44$ e $y = 1,92$ para determinarmos o menor valor de z , temos :

$z = x^2 + y^2 = 1,44^2 + 1,92^2 = 5,76$ que é o menor valor que z pode assumir de acordo com a restrição do problema.

1.1.2 DESIGUALDADE DAS MÉDIAS

Nessa seção, iremos utilizar a teoria da desigualdade das médias para otimizar algumas funções convenientes. Mais precisamente, trabalharemos com as médias aritméticas e geométricas, haja visto que são os principais tipos de médias que fazem parte do conteúdo do Ensino Médio. Vamos inicialmente definir média aritmética e média geométrica.

1.1.2.1 Média Aritmética Simples

Segundo (LIMA et al., 2006), a média aritmética (simples) da lista de n números x_1, x_2, \dots, x_n é um valor \bar{x} tal que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \bar{x} + \bar{x} + \dots + \bar{x} = n\bar{x}$. Portanto, a média aritmética (simples) da lista de n números x_1, x_2, \dots, x_n é definida por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Para calcular essa média, deve-se somar todos os valores e dividir o resultado dessa soma pela quantidade de valores que foram adicionados.

Exemplo 6. Calcule a média aritmética dos números 12, 15 e 9.

Solução: Essa média será dada de acordo com o que definimos acima da seguinte maneira:

$$\bar{x} = \frac{12 + 15 + 9}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

Somamos 12, 15 e 9 e, na sequência, dividimos o resultado obtido por 3 (que é a quantidade de termos somados).

Exemplo 7. Calcule a média aritmética dos números $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$.

Solução: De acordo com o que foi visto na definição acima, obtemos:

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{9}{20}}{2} = \frac{9}{40}$$

Somamos $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$ e, sequência, dividimos o resultado obtido por 2 (que é a quantidade de termos somados).

1.1.2.2 Média Geométrica

Segundo (LIMA et al., 2006), a média geométrica dos n números positivos x_1, x_2, \dots, x_n é um valor positivo g tal que $x_1 x_2 \dots x_n = g \cdot g \dots g = g^n$. Portanto, a média geométrica dos n números positivos x_1, x_2, \dots, x_n é definida por $g = G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$.

A definição de média geométrica foi construída considerando apenas valores positivos, a fim de esquivar-se de sua não existência.

Exemplo 8. Calcule a média geométrica dos números 4 e 9.

Solução: De acordo com a definição dada acima, encontramos o produto entre os dois números. Em seguida, devemos extrair a raiz quadrada do referido produto. Observe que o índice da raiz é igual a quantidade de valores que queremos calcular a média geométrica. Então, temos

$$g = \sqrt{4 \cdot 9}, \text{ ou seja, } g = \sqrt{36} \text{ logo, } g = 6.$$

Exemplo 9. Calcule a média geométrica dos números 2, 4 e 27.

Solução: Novamente, de acordo com a definição acima, encontramos o produto entre os três números. Em seguida, devemos extrair a raiz cúbica do referido produto. Observe agora que o índice que utilizaremos na raiz é igual a 3, pois, estamos calculando a média geométrica de três valores. Então, temos

$$g = \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 27}, \text{ ou seja, } g = \sqrt[3]{216} \text{ logo, } g = 6.$$

Definição 2 (Desigualdade das Médias). Um fato bem conhecido e apresentado em vários textos, como por exemplo em (LIMA et al., 2006), a desigualdade das médias afirma que a média aritmética de n números positivos é maior do que ou igual à sua média geométrica e só é igual se os números forem todos iguais. Isto é, se x_1, x_2, \dots, x_n são números positivos

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Além disso,

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Vamos demonstrar a desigualdade acima para o caso em que $n = 2$.

Demonstração. Como todo número real elevado ao quadrado é não negativo, temos $(x_1 - x_2)^2$. Além disso, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0 &\iff x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 4x_1x_2 \iff \\ (x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2 &\iff \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \geq x_1x_2 \iff \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. É fácil ver que a igualdade é válida apenas no caso em que $x_1 = x_2$. \square

Vamos demonstrar agora a validade da desigualdade das médias para $n = 4$.

Demostração. Aplicando inicialmente o resultado anterior aos números $\frac{x_1 + x_2}{2}$ e $\frac{x_3 + x_4}{2}$, com x_1, x_2, x_3 e x_4 todos positivos, teremos:

$$\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)},$$

ou ainda,

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)}$$

Por outro lado, para $n = 2$ podemos escrever

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \quad \text{e} \quad \frac{x_3 + x_4}{2} \geq \sqrt{x_3 x_4}$$

e multiplicando as duas desigualdade membro a membro, teremos

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right) \geq \sqrt{x_1 x_2 x_3 x_4}.$$

Portanto, considerando o fato de que a função raiz quadrada é crescente podemos escrever que,

$$\sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}.$$

Logo, por transitividade teremos que

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

como queríamos demonstrar. Nesse caso também é fácil ver que a igualdade se verifica apenas quando $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Já que as desigualdades usadas para dois termos seriam estritas caso contrário. \square

Vamos demonstrar agora a validade da desigualdade das médias para $n = 3$.

Demostração. Consideremos x_1, x_2 e x_3 números positivos cuja média aritmética denotaremos por A e cuja média geométrica denotaremos por G , ou seja,

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq 0 \quad \text{e} \quad G = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}.$$

Podemos de maneira conveniente escrever

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + A}{4} = \frac{3A + A}{4} = A.$$

Agora, a partir da aplicação da desigualdade das médias quando $n = 4$ para x_1, x_2, x_3 e A , teremos :

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + A}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 A} \\ \iff A^4 &\geq x_1 x_2 x_3 A \iff A^3 \geq x_1 x_2 x_3 \\ \iff A &\geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} = G, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração da desigualdade das médias para o caso $n = 3$. Podemos notar também que novamente neste caso a igualdade só será satisfeita com $x_1 = x_2 = x_3 = A$. \square

Em atendimento ao escopo dessa dissertação, realizamos a demonstração da desigualdade das médias apenas até o caso $n = 4$. Entretanto, ao consultar (LIMA et al., 2006), o leitor poderá encontrá-la na íntegra.

Vamos analisar algumas situações em que é conveniente a aplicação da desigualdade das médias :

Exemplo 10. *Uma lata cilíndrica é feita para receber um litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.*

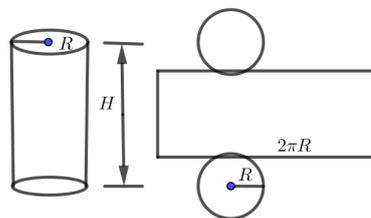


Figura 5 – Planificação da lata cilíndrica

Solução: Sendo R e H medidos em centímetro o raio da base e a altura da lata cilíndrica, respectivamente, podemos denotar o volume da lata por v , sendo $v = \pi R^2 \cdot H$. Do enunciado, temos que $v = 1$. Logo, $v = \pi R^2 \cdot H = 1$.

Para fazermos o cálculo das dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata, vamos considerá-la com duas bases circulares de raio R e uma lateral

retangular de base $2\pi R$ e altura H , que assume o formato cilíndrico quando curvado de maneira adequada.

Sendo assim, vamos denotar a área da lata cilíndrica por A e do que consideramos acima teremos, $A = 2\pi R^2 + 2\pi RH$ e como $v = \pi R^2 \cdot H = 1$, podemos escrever $H = \frac{1}{\pi R^2}$ e assim substituindo a expressão de H na expressão que nos fornece a área da lata, teremos:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{1}{\pi R^2} \\ &= 2\pi R^2 + \frac{2}{R} \\ &= 2\pi R^2 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \end{aligned}$$

Daí, aplicando a desigualdade das médias para os números positivos $x_1 = 2\pi R^2$, $x_2 = \frac{1}{R}$ e $x_3 = \frac{1}{R}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi R^2 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}}{3} &\geq \sqrt[3]{2\pi R^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R}} \iff \\ \iff \frac{2\pi R^2 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}}{3} &\geq \sqrt[3]{2\pi} \iff \\ \iff A = 2\pi R^2 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi}. \end{aligned}$$

Ainda da desigualdade das médias sabemos que a igualdade é satisfeita quando $x_1 = x_2 = x_3$, ou seja, a expressão que nos fornece o valor da área da lata cilíndrica assumirá seu valor mínimo quando

$$\begin{aligned} 2\pi R^2 &= \frac{1}{R} \iff \\ \iff 2\pi R^3 &= 1 \iff \\ \iff R^3 &= \frac{1}{2\pi} \\ \iff R &= \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}, \end{aligned}$$

e agora substituindo o valor de R que minimiza a expressão da área da lata cilíndrica na expressão $H = \frac{1}{\pi R^2}$ que como vimos nos dá a altura, teremos :

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2} \iff \\
\iff H &= \frac{1}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}}} \iff \\
\iff H &= \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi^3}{4\pi^2}}} \iff \\
\iff H &= \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} \iff \\
\iff H &= \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \iff \\
\iff H &= \sqrt[3]{\frac{8}{2\pi}} \iff \\
\iff H &= 2\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}},
\end{aligned}$$

com isso, observamos que $H = 2R$, o que nos leva à conclusão de que as dimensões da lata cilíndrica que satisfazem as condições do problema dado é a lata em que sua altura é dada pelo dobro de seu raio da base com $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ como calculado acima. Observe ainda que, com $H = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ e $R = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$, teremos :

$$A = 2\pi R^2 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = 3 \cdot \sqrt[3]{2\pi},$$

atingindo de fato o menor valor possível para a expressão que fornece a área da lata cilíndrica.

Exemplo 11. *Prove que entre todos os triângulos de perímetro constante, o equilátero é o de maior área.*

Para demonstrar a afirmação acima, inicialmente vamos provar um Lema conhecido como fórmula de Herão que diz que a área de um triângulo qualquer pode ser calculada em função de seus lados a , b e c pela expressão $\sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}$, onde

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

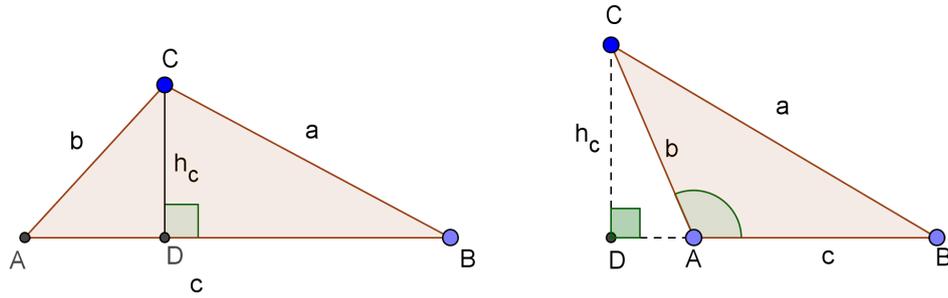


Figura 6 – Triângulos quaisquer

Do triângulo retângulo ADC, temos $h_c = b \cdot \text{sen}\hat{A}$, ou ainda,

$$\begin{aligned}
 h_c^2 &= b^2 \cdot \text{sen}^2 \hat{A} \\
 &= b^2(1 - \text{cos}^2 \hat{A}) \\
 &= b^2 - b^2 \cdot \text{cos}^2 \hat{A} \text{ e da Lei dos cossenos podemos escrever,} \\
 h_c^2 &= b^2 - b^2 \cdot \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \\
 &= \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} \\
 &= \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} \\
 &= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2} \\
 &= \frac{[(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2]}{4c^2} \\
 &= \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}{4c^2} \\
 &= \frac{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)}{4c^2} \\
 &= \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{c^2}, \text{ disso temos que} \\
 h_c &= \frac{2}{c} \cdot \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.
 \end{aligned}$$

Como calculamos a altura do triângulo ABC relativa ao vértice C, temos que a área do mesmo é dada por $\frac{c \cdot h_c}{2}$, ou seja, a área do triângulo ABC será:

$$\left(\frac{c \cdot \frac{2}{c} \cdot \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{2} \right),$$

portanto a área do triângulo ABC será dada em função dos seu lados por:

$$\sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}, \text{ como queríamos provar.}$$

Agora, fazendo uso do Lema acima e da desigualdade das médias vamos provar a afirmação de que entre todos os triângulos de perímetro constante, o equilátero é o de maior área.

Demostração. Seja ABC um triângulo qualquer de lados a, b e c cuja área é dada por $\sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$, com $p = \frac{a+b+c}{2}$. Da hipótese, temos que o perímetro do triângulo de lados a, b e c é fixo. Então, devemos maximizar a expressão $(p-a)(p-b)(p-c)$ de dentro da raiz, a fim de obter o triângulo de área máxima. Note que os números $(p-a), (p-b)$ e $(p-c)$ são todos positivos, pois da desigualdade triangular temos que $b+c > a \iff a+b+c > 2a \iff \frac{a+b+c}{2} > a \iff p > a \iff p-a > 0$ e, de modo análogo, teremos $p-b$ e $p-c$ também maiores do que zero. Então, ao aplicar a desigualdade das médias aos números $(p-a), (p-b)$ e $(p-c)$, obtemos:

$$\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ao elevar ambos os membros ao cubo, podemos escrever

$$\left[\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \right]^3 \geq (p-a)(p-b)(p-c),$$

donde observamos que a expressão $(p-a)(p-b)(p-c)$ poderá ser majorada por $\left[\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \right]^3$ e, ainda da desigualdade das médias, podemos garantir que $(p-a)(p-b)(p-c)$ atinge seu valor máximo igual a $\left[\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \right]^3$ quando $(p-a) = (p-b) = (p-c)$. Mas $(p-a) = (p-b) = (p-c) \iff a = b = c$, o que nos leva a concluir que o triângulo ABC de perímetro fixo e área máxima é o triângulo equilátero como queríamos provar. \square

Exemplo 12. Prove que, se x é um número positivo, então a expressão $x + \frac{1}{x}$ assume valor mínimo igual a 2.

Demostração. Da hipótese, temos que os números x e $\frac{1}{x}$ são positivos. Ao aplicar a desigualdade das médias a eles, obtemos:

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \iff \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{1} \iff x + \frac{1}{x} \geq 2. \text{ Agora, para verificarmos se a expressão } x + \frac{1}{x} \text{ assume de fato valor mínimo igual a 2, basta tomarmos } x = \frac{1}{x}, \text{ mas } x = \frac{1}{x} \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \text{ pois, por hipótese, } x \text{ é positivo. Com } x = 1 \text{ tem-se que } x + \frac{1}{x} = 1 + 1 = 2, \text{ o que encerra a prova. } \square$$

Exemplo 13. Encontre o valor mínimo da expressão $x + \frac{4}{x}$ com x positivo.

Solução: Como x é um número positivo, vamos aplicar a desigualdade das médias para os números x e $\frac{4}{x}$, obtendo:

$$\frac{x + \frac{4}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} \iff \frac{x + \frac{4}{x}}{2} \geq \sqrt{4} \iff x + \frac{4}{x} \geq 4.$$

Agora, para verificarmos se a expressão $x + \frac{4}{x}$ assume de fato valor mínimo igual a 4, basta tomarmos $x = \frac{4}{x}$, mas $x = \frac{4}{x} \iff x^2 = 4 \iff x = 2$ pois, por hipótese, x é positivo. Com $x = 2$ tem-se que $x + \frac{4}{x} = 2 + \frac{4}{2} = 4$, o que nos mostra que o valor mínimo da expressão $x + \frac{4}{x}$ com x positivo é igual a 4.

Exemplo 14. Se 1200 cm^2 de papelão estiverem disponíveis para confeccionar uma caixa sem tampa com base quadrada, qual o maior volume que essa caixa pode ter?

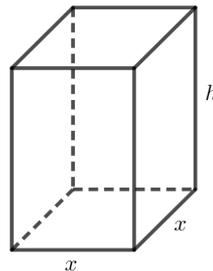


Figura 7 – Caixa sem tampa

Solução: Seja h a altura da caixa e considerando sua base como um quadrado de lado x , podemos representar sua área total por $S = x^2 + 2xh + 2xh$ e seu volume por $V = x^2 \cdot h$. Como x e h pela natureza do problema são números positivos, podemos aplicar então a desigualdade das médias aos números x^2 , $2xh$ e $2xh$ também positivos, obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{1200}{3} &= \frac{x^2 + 2xh + 2xh}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot 2xh \cdot 2xh} \iff \\ \iff 400 &\geq \sqrt[3]{4 \cdot (x^2 \cdot h)^2} \iff \\ \iff 400 &\geq \sqrt[3]{4 \cdot V^2} \iff \\ \iff 400^3 &\geq 4 \cdot V^2 \iff \\ \iff 4000 &\geq V. \end{aligned}$$

Até aqui mostramos que o volume V da caixa pode ser majorado por 4000. Agora, para mostrarmos que de fato seu volume máximo é exatamente 4000 cm^3 vamos usar o fato de que haverá igualdade das médias quando $x^2 = 2xh$, mas $x^2 = 2xh \iff x = 2h$.

Substituindo $x = 2h$ em $S = x^2 + 2xh + 2xh = 1200$, teremos $4h^2 + 4h^2 + 4h^2 = 1200$, ou ainda, $12h^2 = 1200 \iff h = 10$ cm e $x = 2h = 20$ cm. Portanto, $V = x^2 \cdot h = 20^2 \cdot 10 = 4000$ cm³ será o máximo volume assumido pela caixa nas condições do problema.

Devemos observar que os exemplos propostos e resolvidos com o uso da teoria da desigualdade das médias foram desenvolvidos sempre com a preocupação de que, ao aplicar a desigualdade das médias, fosse possível “eliminar” as variáveis para que pudéssemos majorar as expressões de maneira conveniente por uma constante.

1.1.3 Modelos de Programação Linear: Solução Gráfica

A Programação Linear é uma área recentemente desenvolvida e aprimorada dentro da Matemática quando comparada às outras áreas que já existem há séculos.

Sua história teve início quando o matemático e economista L. V. Kantorovich, um russo que viveu no período de 1912 a 1986, publicou em 1939 uma pesquisa que evidenciou o uso de equações lineares no planejamento da produção. Esse trabalho abriu os horizontes tanto nas ciências econômicas quanto nas produções industriais. Kantorovich recebeu posteriormente (em 1975) o Prêmio Nobel de economia por suas contribuições valiosas.

O matemático americano G. B. Dantzig (1914-2005), além de atuar na Força Aérea Americana durante a Segunda Guerra Mundial, desenvolveu um método capaz de otimizar uma função linear de um modelo de Programação Linear que foi intitulado Método Simplex. Esse estudioso também recebeu honrarias como a Medalha Nacional de Ciências, entre outras.

Nesta seção estamos interessados na otimização de funções de várias variáveis lineares e com restrições também lineares em problemas de Programação Linear.

Apresentaremos a seguir alguns problemas resolvidos de programação linear em que o objetivo principal será otimizar funções lineares do tipo $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ onde x_1, x_2, \dots, x_n são variáveis e a_1, a_2, \dots, a_n são constantes reais. Além disso, o conjunto de decisões admissíveis (ou viáveis) será determinado por restrições associadas a funções também lineares. Inicialmente, veremos apenas como modelar tais problemas.

Exemplo 15. *Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos. E 5 cintos por hora, se fizer somente cintos. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade de couro para fabricar 1 unidade de cinto. Sabendo-se que o total disponível de couro é de 6 unidades e que o lucro unitário por sapato é de 5 unidades monetárias e o do cinto é de 2 unidades monetárias. Formule um modelo de programação*

linear que expresse o objetivo (que é maximizar seu lucro por hora) e as restrições desse problema.

Solução: Sejam x_1 e x_2 as quantidades de sapatos e cintos respectivamente, nosso objetivo será de maximizar o lucro $L = 5x_1 + 2x_2$ sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 6 \quad (\text{restrição da quantidade de couro}) \\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{5} &\leq 1 \quad (\text{restrição do tempo de produção em horas}) \\ x_1 &\geq 0 \quad (\text{restrição de produção não negativa}) \\ x_2 &\geq 0 \quad (\text{restrição de produção não negativa}) \end{aligned}$$

Exemplo 16. *Certa empresa fabrica dois produtos P_1 e P_2 . O lucro unitário do produto P_1 é de 1000 unidades monetárias e o lucro unitário de P_2 é de 1800 unidades monetárias. A empresa precisa de 20 horas para fabricar 1 unidade de P_1 e de 30 horas para fabricar 1 unidade de P_2 . O tempo anual de produção disponível para isso é de 1200 horas. A demanda esperada para cada produto é de 40 unidades anuais para P_1 e de 30 unidades anuais para P_2 .*

Formule um modelo de programação linear que expresse o objetivo (maximizar o lucro mensal nesses itens) e as restrições desse problema.

Solução: Sejam x_1 e x_2 as quantidades dos produtos P_1 e P_2 respectivamente, nosso objetivo será de maximizar o lucro $L = 1000x_1 + 1800x_2$ sujeito a

$$\begin{aligned} 20x_1 + 30x_2 &\leq 1200 \\ x_1 &\leq 40 \\ x_2 &\leq 30 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Exemplo 17. *Uma determinada empresa está interessada em maximizar o lucro mensal proveniente de quatro de seus produtos, designados por I, II, III e IV. Para fabricar esses quatro produtos, ela utiliza dois tipos de máquinas (M1 e M2) e dois tipos de mão-de-obra (M01 e M02) que tem as seguintes disponibilidades:*

Máquinas	Tempo Disponível (máquina-hora/mês)
M1	80
M2	20

Tabela 1 – Máquinas/Tempo Disponível

Mão-de-obra	Tempo Disponível (homem-hora/mês)
M01	120
M02	160

Tabela 2 – Mão-de-obra/Tempo Disponível

O setor técnico da empresa fornece os seguintes quadros de produtividades:

a) Número de máquina-hora para produzir uma unidade de cada produto:

Máquinas	Produtos			
	I	II	III	IV
M1	5	4	8	9
M2	2	6	—	8

Tabela 3 – Máquinas/Produtos

Então, para se produzir uma unidade do produto I consome-se 5 máquinas-hora da máquina M1 e 2 máquinas-hora da máquina M2. O produto III não necessita da máquina M2 e consome 8 horas da máquina M1 para cada uma de suas unidades produzidas.

b) Número de homem-hora para produzir uma unidade de cada produto:

Mão-de-obra	Produtos			
	I	II	III	IV
M01	2	4	2	8
M02	7	3	—	7

Tabela 4 – Mão-de-obra/Produtos

Precisa-se então de 2 homens-hora da mão-de-obra M01 e de 7 homens-hora da mão-de-obra M02 para fabricar uma unidade do produto I. O setor comercial da empresa fornece as seguintes informações:

Produtos	Potencial de Vendas (unidades/mês)	Lucro Unitário (R\$/unidade)
I	70	10,00
II	60	8,00
III	40	9,00
IV	20	7,00

Tabela 5 – Potencial de Vendas/Lucro unitário

Deseja-se saber a produção mensal dos produtos I, II, III e IV para que o lucro mensal da empresa, proveniente desses quatro produtos, seja máximo. Formule um modelo de programação linear que expresse o objetivo e as restrições dessa empresa.

Solução: Sejam x_j ($j = 1, 2, 3, 4$) as produções mensais dos produtos I, II, III e IV, respectivamente. O modelo, então, será:

$$\text{Máx. } Z = 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 7x_4 \quad \text{sujeito a}$$

$$x_1 \leq 70$$

$$x_2 \leq 60$$

$$x_3 \leq 40$$

$$x_4 \leq 20$$

$$5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 9x_4 \leq 80$$

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_4 \leq 20$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 \leq 120$$

$$7x_1 + 3x_2 + 7x_4 \leq 160$$

e

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Exemplo 18. *Uma determinada pessoa é forçada pelo seu médico a fazer uma dieta alimentar que forneça diariamente, pelo menos as seguintes quantidades de vitaminas A, B, C e D:*

Vitaminas	Quantidade Mínima Diária(mg)
A	80
B	70
C	100
D	60

Tabela 6 – Quantidade Mínima Diária de Vitaminas

A dieta deverá incluir leite, arroz, feijão e carne, que contêm os seguintes miligramas de vitaminas em cada uma de suas unidades de medida:

Vitaminas	Alimentos			
	Leite (l)	Arroz (kg)	Feijão (kg)	Carne (kg)
A	10	5	9	10
B	8	7	6	6
C	15	3	4	7
D	20	2	3	9

Tabela 7 – Vitaminas presentes em cada alimento

Assim, um litro de leite contém 10 mg de vitamina A, 8 mg de vitamina B, 15 mg de vitamina C e 20 mg de vitamina D.

Os custos unitários desses alimentos são os seguintes:

Leite - R\$1,00/l

Arroz - R\$0,80/kg

Feijão - R\$1,20/kg

Carne - R\$3,50/kg

Deseja-se saber o consumo diário de cada um desses alimentos de tal maneira que a dieta satisfaça as prescrições médicas e seja a de menor custo possível. Formule um modelo de programação linear que expresse o objetivo e as restrições dessa dieta.

Solução: Sejam x_j ($j = 1, 2, 3, 4$) as quantidades de leite, arroz, feijão e carne, medidas nas unidades acima, que deverão entrar, diariamente na citada dieta. O modelo, então, será:

Min. $Z = x_1 + 0,8x_2 + 1,2x_3 + 3,5x_4$ sujeito a

$$10x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 10x_4 \geq 80$$

$$8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 6x_4 \geq 70$$

$$15x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 \geq 100$$

$$20x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 \geq 60$$

e

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Nos exemplos 19 e 20 mostraremos como solucionar graficamente problemas de programação linear. Em cada um dos exemplos será apresentado um passo a passo de como fazer para otimizar as funções lineares propostas considerando o conjunto de restrições dado.

Exemplo 19. *Resolva graficamente o seguinte problema de programação linear:*

Máx. $z = 4x_1 + 5x_2$ sujeito a

$$x_1 + 2x_2 \leq 21 \quad (R_1)$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18 \quad (R_2)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (R_3)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (R_4)$$

Solução: *Inicialmente devemos determinar a região viável do modelo, ou seja, localizar graficamente os pares ordenados (x_1, x_2) que satisfazem todas as restrições do problema. Posteriormente, encontraremos a melhor solução viável, denominada solução ótima a qual nos fornecerá o valor ótimo da função-objetivo z .*

Para traçarmos os eixos cartesianos, vamos considerar x_1 o eixo das abscissas e x_2 o eixo das ordenadas. Devemos notar também que as restrições de não negatividade $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ nos indicam que os pares (x_1, x_2) viáveis se localizam apenas no primeiro quadrante dos eixos coordenados.

Observe ainda que as restrições (R_1) e (R_2) correspondem a semiplanos associados, respectivamente, às retas suporte $x_1 + 2x_2 = 21$ e $3x_1 + x_2 = 18$. Por fim, vale ressaltar que cada reta suporte define dois semiplanos no espaço e para identificarmos qual destes semiplanos contém os pontos que satisfazem a restrição associada basta substituir as coordenadas de um ponto qualquer pertencente a um dos dois semiplanos e verificar se essas coordenadas satisfazem a respectiva restrição. A origem do sistema cartesiano pode ser um ponto que facilite essa busca. O gráfico da Figura 8 ilustra o raciocínio exposto até o momento.

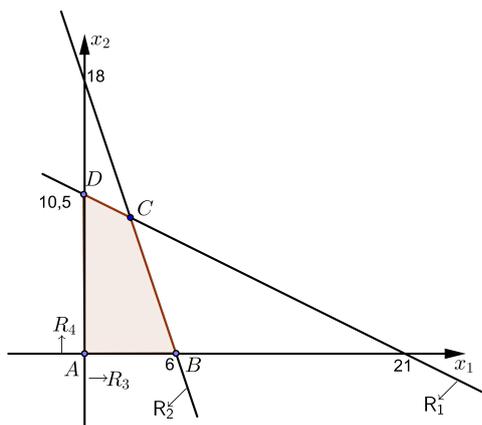


Figura 8 – Região factível $ABCD$.

Após representarmos graficamente todas as restrições podemos observar que $R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4$ formou um polígono convexo $ABCB$, este polígono doravante será chamado de região factível do problema. É possível neste caso provar que o ponto de ótimo que maximiza a função z existe e está localizado em um dos vértices do polígono $ABCD$. Fazendo uso deste resultado, vamos avaliar o valor de z em cada um destes pontos e depois compará-los.

Para tanto, determinaremos as coordenadas de A, B, C , e D . Facilmente visualiza-se que $A = (0, 0)$. Para determinar B , basta resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 18 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \text{ ou seja,}$$

$B = (6, 0)$. Para encontrar C basta resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 21 & (I) \\ 3x_1 + x_2 = 18 & (II) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por (-3) e somando a nova equação (I) na equação (II) teremos, $-6x_2 + x_2 = -63 + 18$, ou seja, $x_2 = 9$. Substituindo $x_2 = 9$ em (II) temos $3x_1 + 9 = 18$ o que nos dá $x_1 = 3$, portanto $C = (3, 9)$. Por fim, D será encontrado ao resolvermos

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 21 \\ x_1 = 0 \end{cases}, \text{ ou seja,}$$

$D = (0; 10, 5)$. Avaliaremos, na sequência, o valor de z em cada um destes pontos :

$$z(A) = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$$

$$z(B) = 4 \cdot 6 + 5 \cdot 0 = 24$$

$$z(C) = 4 \cdot 3 + 5 \cdot 9 = 57$$

$$z(D) = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 10,5 = 52,5$$

Assim, vemos que a função-objetivo z assumirá seu valor máximo de 57 para $x_1 = 3$ e $x_2 = 9$.

Observação: A fim de justificar que, de fato, o ponto de ótimo que maximiza a função objetivo $z = 4x_1 + 5x_2$ do exemplo 19 é o vértice C da região factível $ABCD$, podemos notar que a função objetivo $z = 4x_1 + 5x_2$ representa um conjunto de retas paralelas no plano quando se atribui valores reais arbitrários a z .

Na Figura 9 ilustramos a situação para alguns valores de z . Inicialmente traçamos a reta $4x_1 + 5x_2 = 0$, e, como queremos maximizar o valor da função objetivo fomos aumentando os valores de z até notar que a reta com o maior valor de z e que ainda possuía pelo menos um ponto de intersecção com a região factível $ABCD$ era a reta

$4x_1 + 5x_2 = 57$ e que, neste caso, o único ponto de intersecção entre esta reta e a região factível se dava exactamente no ponto C .

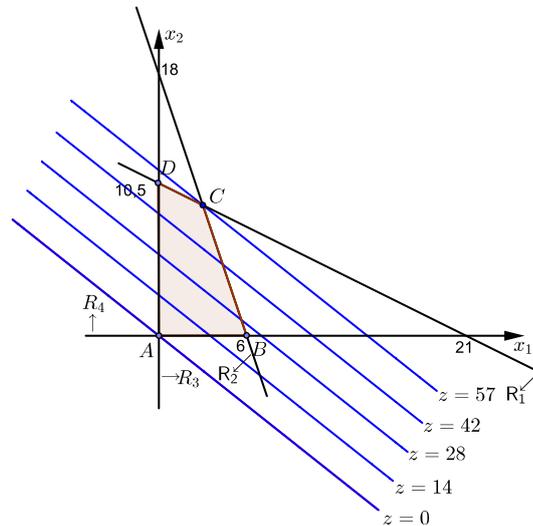


Figura 9 – Região factível $ABCD$.

Exemplo 20. Resolva graficamente o seguinte problema de programação linear:

$$\text{Máx. } z = 50x_1 + 80x_2 \quad \text{sujeito a}$$

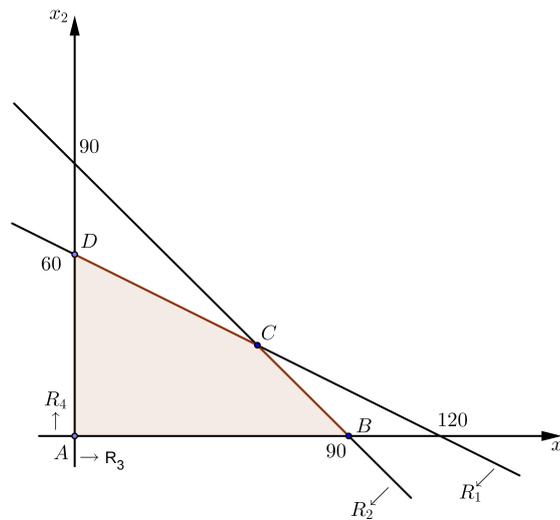
$$x_1 + 2x_2 \leq 120 \quad (R_1)$$

$$x_1 + x_2 \leq 90 \quad (R_2)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (R_3)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (R_4)$$

Solução: De modo totalmente análogo ao que foi feito no exemplo 19, vamos primeiro determinar geometricamente a região factível do problema, isto é, a região onde todos os pares de pontos (x_1, x_2) satisfazem simultaneamente as restrições R_1, R_2, R_3 e R_4 .

Figura 10 – Região factível $ABCD$.

O gráfico da Figura 10 nos mostra a região factível representada pelo polígono convexo $ABCD$. Determinaremos agora as coordenadas desses vértices para que possamos avaliar o valor de z em cada um deles e determinar seu ótimo.

Sendo $A = (0,0)$ a origem do sistema cartesiano, para determinar B basta resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 90 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \text{ ou seja,}$$

$B = (90,0)$. Para encontrar C basta resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 120 & (I) \\ x_1 + x_2 = 90 & (II) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por (-1) e somando a nova equação (I) na equação (II) teremos $-2x_2 + x_2 = -120 + 90$, ou seja, $x_2 = 30$ e substituindo $x_2 = 30$ em (II) teremos $x_1 + 30 = 90$ o que nos dará $x_1 = 60$, portanto, $C = (60,30)$. Por fim, D será encontrado ao resolvermos

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 120 \\ x_1 = 0 \end{cases}, \text{ ou seja,}$$

$D = (0, 60)$. Assim teremos

$$z(A) = 50 \cdot 0 + 80 \cdot 0 = 0$$

$$z(B) = 50 \cdot 90 + 80 \cdot 0 = 4500$$

$$z(C) = 50 \cdot 60 + 80 \cdot 30 = 5400$$

$$z(D) = 50 \cdot 0 + 80 \cdot 60 = 4800$$

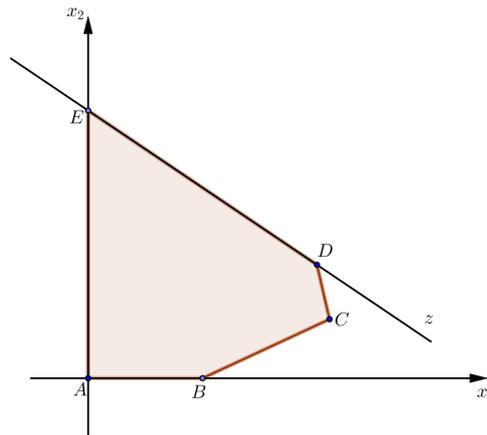
Dessa forma, pudemos constatar que a função-objetivo z assumirá seu valor máximo de 5400 para $x_1 = 60$ e $x_2 = 30$.

Casos Especiais

Vale a pena ilustrar dois casos especiais, um em que são encontradas múltiplas soluções ótimas e outro que não há solução.

Múltiplas soluções ótimas

É possível mostrar que pode-se ter múltiplas soluções ótimas em problemas de programação linear com duas variáveis quando a reta que se obtém fixando um valor real para z (função objetivo) é paralela a algum segmento do polígono convexo que forma a região factível. A Figura 11 ilustra esse caso.

Figura 11 – A reta de z coincide com uma das restrições.

Problema sem solução

Em alguns casos, podemos ter um conjunto factível vazio devido à incompatibilidade das restrições. Neste caso, o problema se torna inviável. A Figura 12 ilustra tal situação.

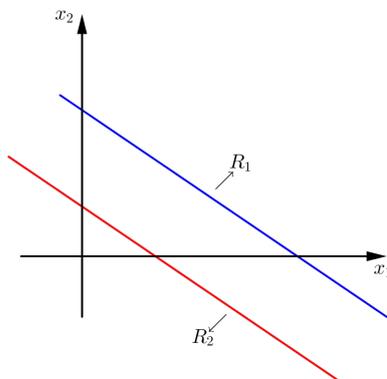


Figura 12 – Região factível vazia

Note que como os exemplos 17 e 18 envolvem mais de duas variáveis, a solução deles pela solução gráfica torna-se muito trabalhosa ou até mesmo inviável. Por isso, vale lembrar que estes tipos de problemas podem ser mais facilmente resolvidos pelo método simplex quando é feita uma interpretação algébrica do problema e, para tanto, uma boa alternativa é fazer uso da ferramenta Solver do Excel. Para saber mais sobre esta ferramenta do Excel você poderá consultar (GUIDORIZZI, 2010).

1.2 Sequência didática

Neste subcapítulo será contemplada uma possibilidade de trabalho com otimização no ensino médio. Para tal, iniciaremos com a delimitação dos objetivos, conteúdos, recursos, cronograma e metodologia utilizada através da descrição das atividades para a sequência proposta bem como a avaliação.

Objetivos: Compreender na teoria e na prática os conceitos de Função Quadrática e Programação Linear aplicados em situações que envolvem otimização de funções adequadas a uma turma de 1º ano do Ensino Médio.

Conteúdos: Programação Linear e Função Quadrática como ferramentas para a Otimização.

Recursos: Fotocópias do roteiro de atividades e listas de exercícios previamente elaboradas; computador/ laboratório de informática; software GEOGEBRA.

Cronograma:

- **1º encontro:** Conceito de Função Quadrática;
- **2º encontro:** Construção e análise de gráficos de Função Quadrática;
- **3º encontro:** Estudo de máximo e mínimo da Função Quadrática;
- **4º encontro:** Situações-problema de otimização solucionadas por meio de funções quadráticas;
- **5º encontro:** Representação e manipulação dinâmica das figuras e gráficos presentes em situação-problema através do GEOGEBRA;
- **6º encontro:** Sistematização algébrica do que foi visto no software / Avaliação;
- **7º encontro:** Introdução aos Modelos de Programação Linear;
- **8º encontro:** Construção e análise de regiões factíveis do problema de Programação Linear;
- **9º encontro:** Proposição e investigação de situação-problema através do uso do GEOGEBRA;
- **10º encontro:** Sistematização algébrica do que foi visto no software / Avaliação.

Metodologia:

- Aula expositiva com o conteúdo deste capítulo sobre função quadrática e Modelos de Programação Linear no projetor;
- Lista de situações-problema a serem resolvidas em sala;
- Leitura do roteiro de atividades com situações-problema e texto instrucional de manipulação do GEOGEBRA;
- Visita ao laboratório de informática para a prática das situações-problema propostas no roteiro utilizando o software GEOGEBRA;
- Resolução com argumentações lógico-matemáticas para verificar se as soluções encontradas no software são soluções razoáveis para os problemas;
- Roda de conversa avaliativa.

Descrição das atividades:

Após os encontros com aulas expositivas e listas de exercícios em que o professor pode se basear no conteúdo e exemplos deste capítulo, segue a primeira atividade a ser realizada no software GEOGEBRA.

Atividade 1. *No laboratório de informática, o professor deve apresentar a seguinte situação-problema:*

Um fazendeiro dispõe de 16 metros de tela para fazer um cercado retangular para suas galinhas, a fim de protegê-las contra as raposas que rondam a fazenda. Para tanto, ele aproveitará uma parede como um dos lados do cercado. Qual a maior área que ele poderá obter com os 16 metros de tela ?

Após os comentários iniciais sobre os principais comandos do GEOGEBRA, o professor solicitará aos alunos que inicie o passo a passo a seguir para que os mesmos possam representar geometricamente a situação-problema no GEOGEBRA.

Passo 1: Construir uma reta vertical que representará a parede, marcando na mesma um ponto *A*.

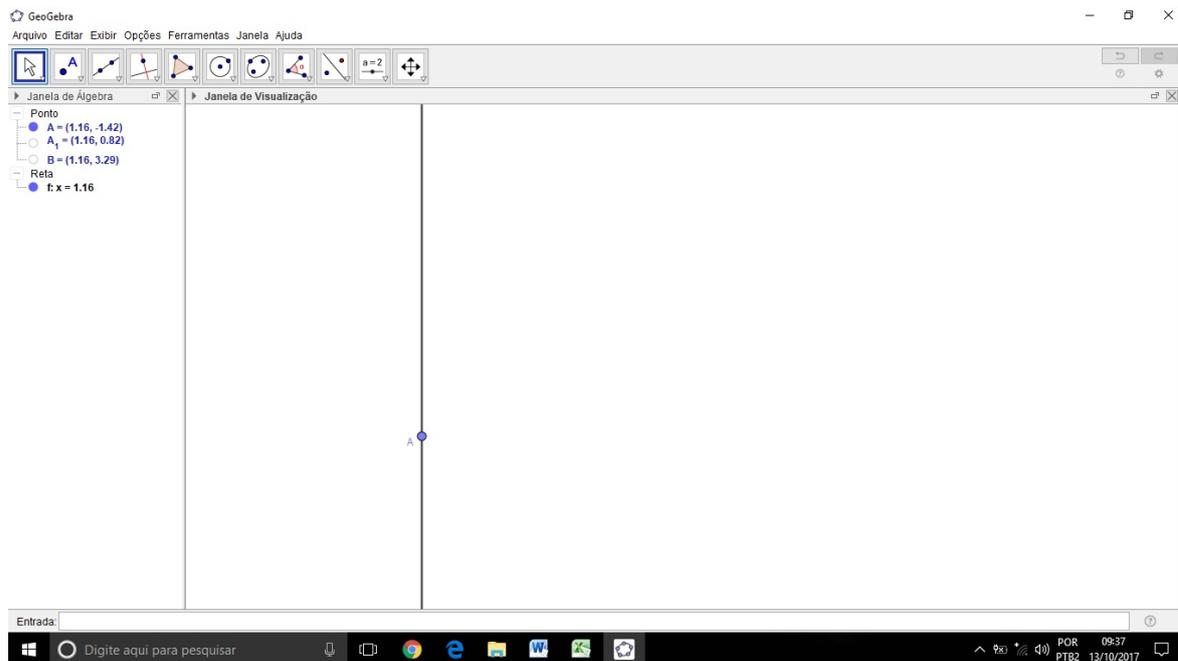


Figura 13 – Representação da parede.

Passo 2: Construir a reta perpendicular à reta que representa a parede passando pelo ponto A e em seguida marcar nesta nova reta um ponto P que distará 8 cm de A (note que no GEOGEBRA 1 cm representará 1 m na realidade). Para tanto, o aluno poderá construir uma circunferência de centro em A em raio 8.

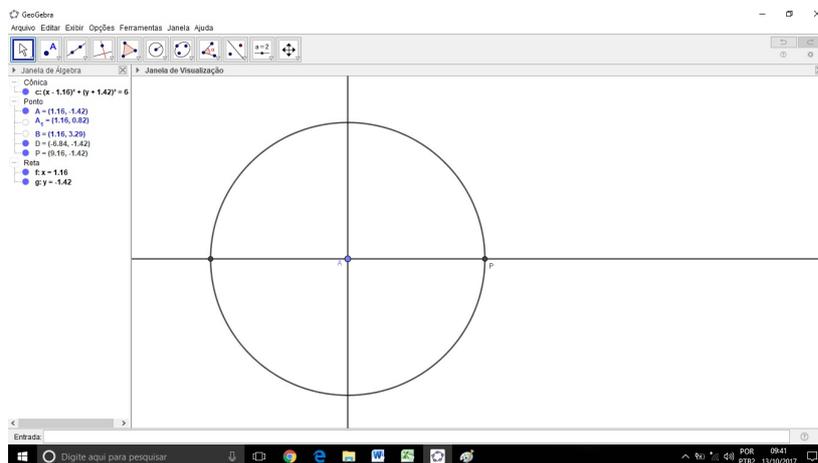


Figura 14 – Determinação do ponto P .

Passo 3: Marque no segmento AP um ponto B e em seguida construa uma reta perpendicular ao segmento AP passando por B e então marque nesta reta um ponto C de tal modo que a distância de B até C seja o dobro da distância de B até P e, para tanto, o aluno poderá construir uma circunferência de centro em B e raio $2BP$.

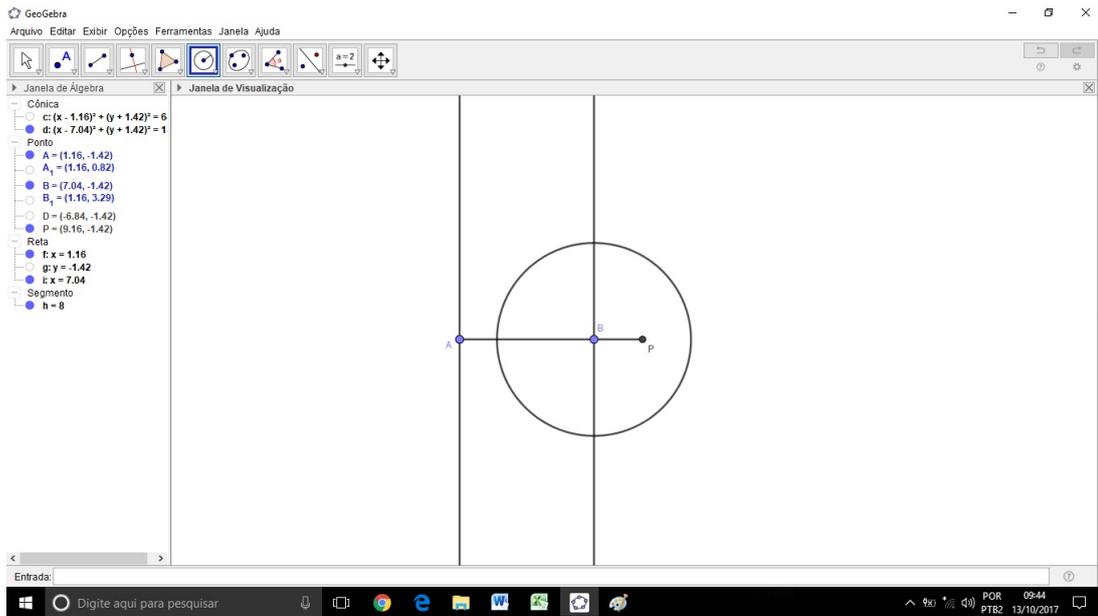


Figura 15 – Determinação do ponto C .

Passo 4: Construa uma reta perpendicular ao segmento BC passando pelo ponto C e na intersecção desta nova reta com a reta que representa a parede, marque o ponto D .

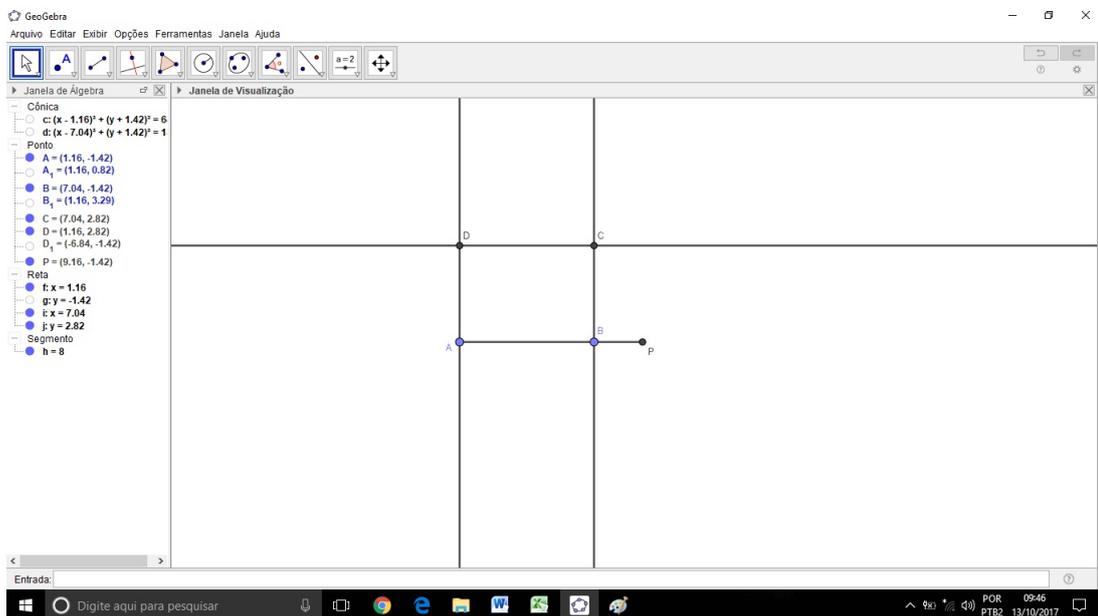


Figura 16 – Determinação do ponto D .

Passo 5: Desabilite as retas AB , BC e CD , e, utilizando a ferramenta de construir polígonos, construa o retângulo $ABCD$.

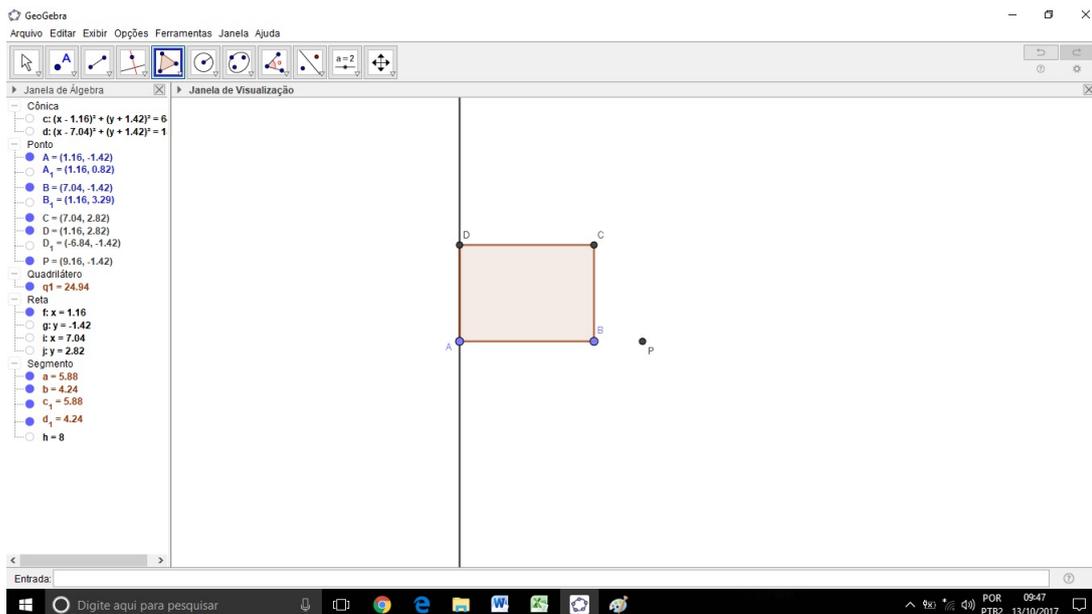


Figura 17 – Construção do retângulo $ABCD$.

Passo 6: Utilizando a ferramenta de medir distância, o aluno deverá medir o comprimento do segmento AB , do segmento BC e do segmento CD . Em seguida, utilizando a ferramenta de medir a área de polígonos, o aluno deverá também selecionar os pontos A, B, C, D e A novamente. Com isso, ele terá o valor da área do retângulo $ABCD$ exibido na janela de álgebra do GEOGEBRA.

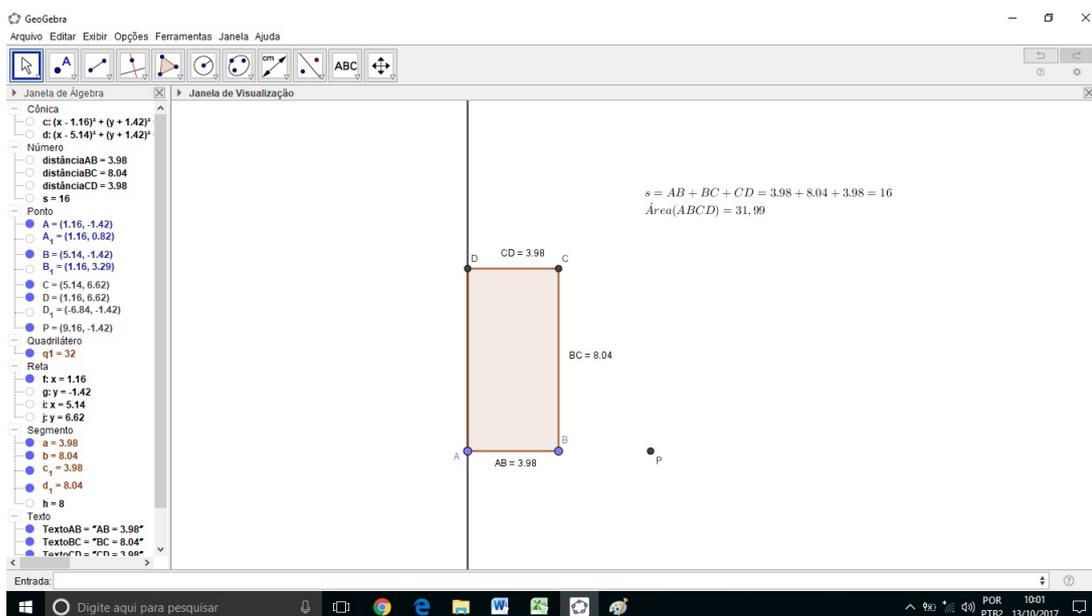


Figura 18 – Verificação dinâmica da área máxima do retângulo $ABCD$.

E por fim, o aluno deverá movimentar o ponto B sobre o segmento AP e observar o que ocorre com o valor da área do retângulo $ABCD$. É importante que o aluno

note que à medida que o comprimento do segmento AB se aproxima de 4cm, a área do retângulo $ABCD$ se aproxima de 32 cm^2 que é o valor de sua área máxima. O aluno deverá concluir também que a soma dos comprimentos dos segmentos AB , BC e CD não se alteram, ou seja, $AB + BC + CD = 16$ para qualquer posição de B sobre o segmento AP .

Em outro momento, o professor deve ressaltar para os alunos que o GEOGEBRA é um software que nos ajuda a melhorar nossa intuição a respeito da solução de um dado problema, mas é extremamente essencial que o aluno chegue à conclusão de que de fato a área máxima deste retângulo é de 32 cm^2 utilizando argumentos lógicos matemáticos, se valendo dos argumentos teóricos desenvolvidos neste capítulo à respeito de funções quadráticas.

Atividade 2. *Também no laboratório de informática, o professor deve apresentar a seguinte situação já solucionada no exemplo 20 deste trabalho:*

Resolva graficamente o seguinte problema de programação linear:

$$\text{Máx. } z = 50x + 80y \quad \text{sujeito a}$$

$$x + 2y \leq 120 \quad (R_1)$$

$$x + y \leq 90 \quad (R_2)$$

$$x \geq 0 \quad (R_3)$$

$$y \geq 0 \quad (R_4)$$

Novamente, o professor deverá solicitar aos alunos que represente geometricamente a situação no GEOGEBRA.

Passo 1: Pressionando o botão direito do mouse, o aluno deve escolher a opção malha para desabilitá-la. Em seguida, na caixa de entrada, o aluno deverá digitar as quatro restrições do problema.

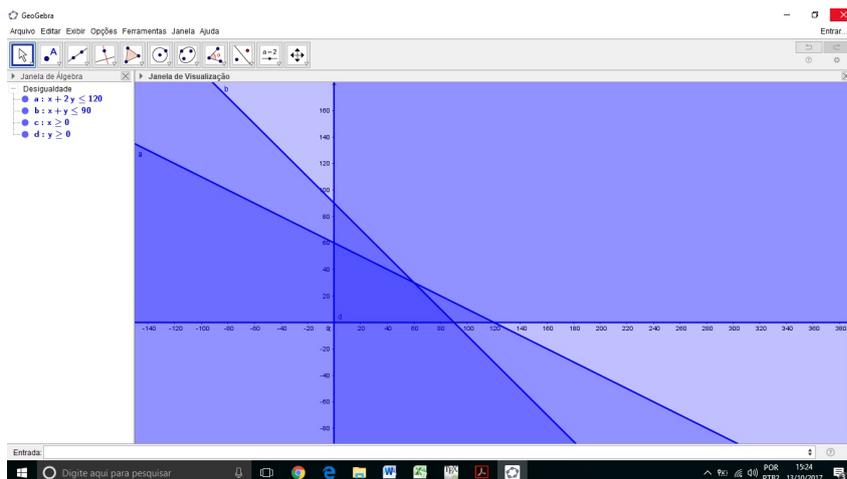


Figura 19 – Representação do conjunto de restrições.

Passo 2: Para determinar a região factível do problema, o aluno deverá digitar na caixa de entrada $a \wedge b \wedge c \wedge d$. Dessa forma, o Geogebra destacará a região de intersecção das quatro restrições.

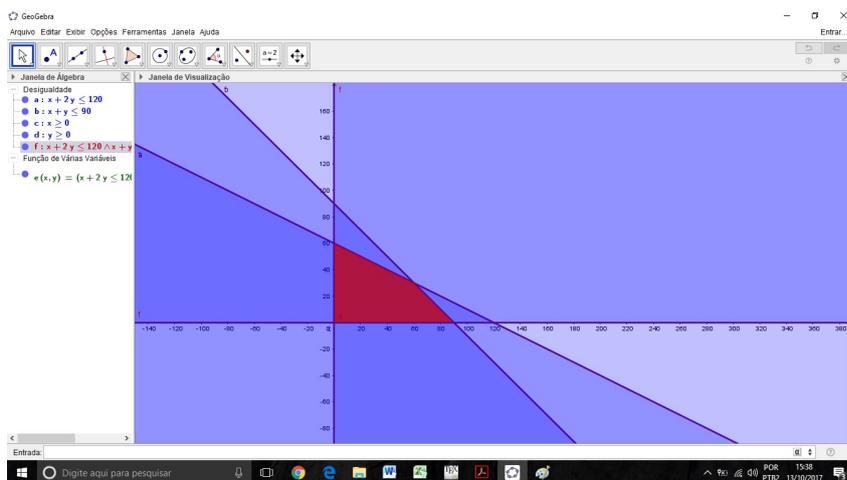


Figura 20 – Região factível.

Passo 3: Na janela de álgebra, o aluno poderá desabilitar as representações das inequações a , b , c e d , a fim de que o mesmo visualize na tela apenas a região factível que, neste momento, estará sendo indicada por f . Em seguida, o aluno deverá digitar na caixa de entrada todas as restrições no formato de equações apenas. Assim, ele terá na tela as retas-suporte de cada semi-plano e com as intersecções das mesmas, ele poderá então marcar os pontos A , B , C e D como sendo os vértices do polígono que representa a região factível do problema.

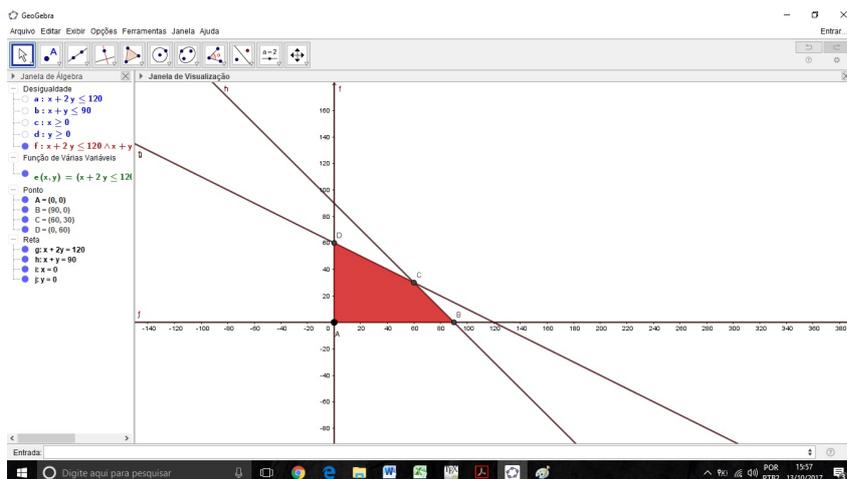


Figura 21 – Região factível.

Passo 4: Agora, para que o aluno obtenha o valor da função objetivo em cada um dos vértices do polígono $ABCD$, ele deverá digitar na caixa de entrada os comandos $V(A) = 50x(A) + 80y(A)$, $V(B) = 50x(B) + 80y(B)$, $V(C) = 50x(C) + 80y(C)$ e $V(D) = 50x(D) + 80y(D)$ para obter respectivamente os valores da função objetivo nos pontos A , B , C e D . Após digitados estes comandos, os valores esperados estarão sendo mostrados na janela de álgebra, de modo que será fácil para o aluno perceber que o maior valor da função objetivo ocorrerá no vértice C do polígono $ABCD$.

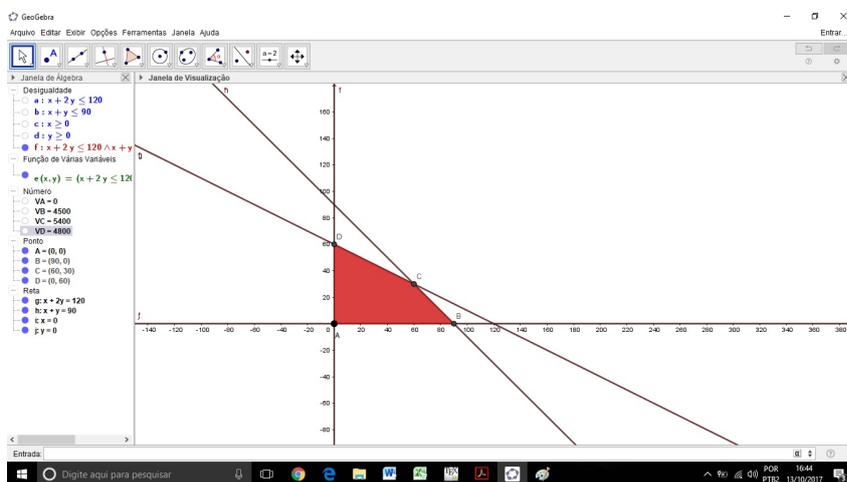


Figura 22 – $V(C)$ exhibe o maior valor da F.O.

Observação: Após o passo 4 o professor poderá solicitar ainda aos alunos que construam no Geogebra a reta $50x + 80y = k$, em que eles terão a oportunidade de criar um controle deslizante para a variável k de tal modo que, à medida que o valor de $k \geq 0$ for aumentando, a reta $50x + 80y = k$ se deslocará paralelamente se afastando da origem. Com isso, ficará perceptível que o maior valor de k que ainda possibilita pelo menos um ponto de intersecção entre a reta que representa a função objetivo $50x + 80y = k$ e a região factível $ABCD$ é

$k = 5400$, além de se tornar notável também que essa intersecção ocorrerá no vértice C da região factível representada na Figura 22.

Avaliação: Roda de conversa para ouvir dos alunos sobre o que aprenderam, o que mais chamou a atenção durante a sequência didática, quais foram as facilidades e dificuldades que tiveram ao longo do estudo.

2 Panorama geral sobre a história do cálculo e a utilização desta ferramenta no estudo e aplicações em otimização

O cálculo diferencial e integral como conhecemos na contemporaneidade foi desenvolvido através do estudo, esforço e dedicação de muitos matemáticos e de pensadores de áreas afins. Sua construção como área da matemática demandou muito trabalho de sistematização com alto rigor matemático, padronização de notações e aprimoramento de métodos. Na atualidade, o cálculo diferencial e integral tornou-se o principal e mais significativo instrumento matemático devido às suas inúmeras aplicabilidades e contribuições na resolução não apenas dos próprios problemas matemáticos, contudo, de tantas outras áreas do conhecimento. (EVES, 2004) afirma que "... essa invenção a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou." Segundo DEVLIN (2010,p. 24), dentre as aplicações do cálculo, pode-se destacar a descoberta da estrutura e funcionamento dos processos que envolvem:

- A mecânica das máquinas
- O fluxo dos líquidos
- A expansão dos gases
- O mecanismo do vôo
- O magnetismo
- A eletricidade
- O movimento dos planetas
- A difusão das epidemias
- A flutuação dos lucros
- O crescimento das plantas

É importante salientar que o cálculo integral originou-se primeiro do que o cálculo diferencial, apesar de estarmos habituados por conveniência didática a iniciar os estudos pelo cálculo diferencial. Nas palavras de (EVES, 2004),

A ideia de integração teve origem em processos somatórios, ligados a certas áreas e certos volumes e comprimentos. A diferenciação criada bem mais tarde resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas uma operação inversa da outra.

O primeiro registro de resolução de um problema de cálculo foi um papiro egípcio escrito em aproximadamente 1890 a.C. em que foi calculada por meio de algo parecido com uma fórmula de integração a área da superfície de um cesto. Na antiguidade outros problemas surgiram e alguns foram resolvidos através do método da exaustão grego e também pelo método do equilíbrio de Arquimedes. Esse matemático grego foi quem mais se aproximou dos resultados para o cálculo de áreas e volumes semelhantes às integrais definidas e utilizadas hoje em dia para tal finalidade. Stevin, um engenheiro belga, no século XVII utilizou os mesmos princípios que Arquimedes para determinar a força exercida pela pressão de um fluido sobre um dique vertical. O matemático alemão Kepler se valeu do processo de integração para desenvolver a “Segunda Lei do Movimento Planetário bem como em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho. Cavalieri também utilizando as mesmas ideias de Arquimedes escreveu, conforme (BOYER; MERZBACH, 2010), mesmo sem ter acesso aos escritos do matemático grego que “. . . uma área pode ser pensada como formada de segmentos ou indivisíveis e que o volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase atômicos.” Em relação aos infinitésimos, muitos questionamentos e tentativas de resolvê-lo iniciaram-se na Grécia Antiga com contribuições de Euclides e Zenão de Eleia. O termo cálculo também engendrou-se nessa época já que os pitagóricos utilizavam pedras e outros elementos discretos para representações das grandezas.

Consoante à (EVES, 2004), a derivação tem como uma de suas origens sanar problemas relacionados à determinação de um ponto de máximo ou de mínimo de uma função partindo do problema da curvatura da tangente. A partir das observações de Kepler, Pierre de Fermat, um matemático francês formalizou de maneira inteligível o método diferencial, que ficou conhecido como método de Fermat. Apesar de incompleto, foi um dos trabalhos que mais tarde possibilitariam a Newton a sistematização do cálculo. Fermat também descobriu como determinar a tangente de uma curva através de uma subtangente.

2.1 O cálculo de Isaac Newton

Newton apesar de ser físico, criou sua própria matemática para dar sequência aos seus estudos na física e provar suas teorias. A partir de uma visão geométrica realizou constatações tão relevantes sobre o cálculo que é considerado o “pai do cálculo”, com destaque para: o teorema fundamental do cálculo; as regras dos cálculos de integrais; o método das séries de potências aplicado à resolução de equações diferenciais; a generalização

do binômio $(a + xk)^n$ para k e n reais. As conclusões de Newton, segundo (EVES, 2004), levaram-no a crer que

... uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de fluxo de fluente. Se um fluente como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y , então o fluxo desse fluente era denotado por \dot{y} . [...] Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava de fluxo principal, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal.

Assim pode estudar dois tipos de problemas de naturezas inversas – a relação entre os fluentes e os fluxos, e a partir dessa, compreender a relação entre os fluentes.

2.2 O cálculo de Leibniz

O cálculo de Leibniz que foi desenvolvido concomitantemente ao de Newton, conforme as próprias palavras do cientista alemão engendrou-se da leitura e compreensão mais profunda dos escritos de Pascal sobre “os indivisíveis”, quando concluiu, consoante a (BOYER; MERZBACH, 2010) que

... a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças das ordenadas e das abscissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam das somas dos retângulos infinitamente finos que formam a área.

Dessa forma, deduziu inúmeras regras aplicáveis no ensino superior atual para o estudo do cálculo. Uma delas conhecida inclusive pelo nome de Regra de Leibniz. Foi também o pioneiro a usar a letra S com alongamento para se referir à integral, indicando a soma dos indivisíveis, além de definir, conforme (EVES, 2004), dx como um intervalo finito e arbitrário e dy pela proporção $dy/dx = y/\text{subtangente}$.

A autora (ROQUE; CARVALHO, 2012) contempla uma comparação entre metodologia e notação utilizados no registro das descobertas quase que simultâneas de Newton e Leibniz, ao afirmar que:

Os métodos de Newton e Leibniz são distintos. No entanto, as justificativas de Newton não parecem ser, matematicamente falando, tão diferentes das de Leibniz. A diferença principal entre ambos estava no modo de expor suas teorias. O livro de Newton, “Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”, não contém desenvolvimentos analíticos. Os resultados são apresentados na linguagem da geometria sintética. Preocupado desde o princípio em fundar um cálculo universal, os métodos de Leibniz são apresentados como métodos e algoritmos, o que, juntamente com a praticidade da notação, fez com que os métodos diferenciais deste último tivessem uma melhor aceitação do que o primeiro.

Após as descobertas e sistematizações realizadas por Newton e Leibniz, coube a Weierstrass - que trouxe a notação mais sofisticada e utilizada atualmente e a Cauchy – unificando a questão dos infinitésimos no conceito de limite, a consolidação de todo o conteúdo com extremo rigor matemático, após uma época intermediária em que o formalismo ameaçou a consistência da área em detrimento de sua significativa aplicabilidade, a missão de organizar tudo como é na atualidade.

3 Otimização com cálculo: funções de uma única variável

3.1 Limite

Considerações sobre o problema da tangente

Como determinar uma reta f tangente a curva dada por $y = x^2 + 1$ no ponto $P(2, 5)$?

Para resolver esse problema precisamos primeiramente determinar o coeficiente angular da reta em questão, mas como fazê-lo se conhecemos apenas um ponto por onde a reta passa? Vamos inicialmente considerar uma reta secante s à curva dada passando por $P(2, 5)$ e pelo ponto genérico $Q(x, x^2 + 1)$ com x diferente de 2. Assim, o coeficiente angular da reta que passa por P e Q é dado por $m_{pq} = \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. É fácil ver que à medida que x se aproxima de 2 tanto pela direita (valores maiores do que 2), quanto pela esquerda (valores menores do que 2) m_{pq} se aproxima de 4. Observe alguns resultados que evidenciam essa aproximação na tabela 8:

x	m_{pq}
2,5	4,5
2,1	4,1
2,001	4,0009
1,6	3,6
1,9	3,9
1,99	3,99

Tabela 8 – Coeficientes angulares.

A tabela 8 sugere que a medida que o ponto Q se aproxima do ponto P a inclinação da reta que passa por P e Q se aproxima de 4. Em outras palavras, podemos dizer que no limite as inclinações das retas secantes s se tornam tão próximas quanto se queira da inclinação da reta tangente t . Usando a notação matemática adequada escrevemos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} m_{pq} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1 - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Admitindo que a inclinação da reta tangente t que procuramos seja realmente igual a 4 e fazendo uso da equação da reta dada por $y - y_0 = m_{PQ}(x - x_0)$, com $(x_0, y_0) = (2, 5) = P$, teremos $y - 5 = 4(x - 2)$, ou ainda, $y = 4x - 3$ que é a equação da reta t que procurávamos. Observe no gráfico da Figura 23 que à medida que o ponto Q se aproxima do ponto P as correspondentes retas secantes s se aproximam da reta tangente t .

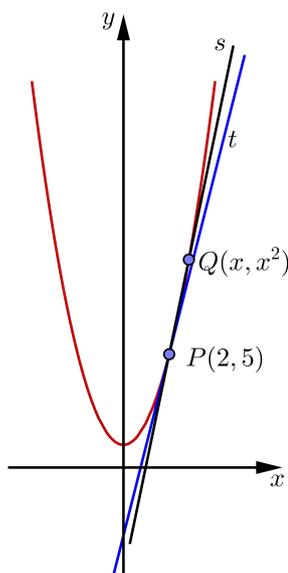


Figura 23 – Reta t tangente à parábola no ponto P .

Considerações sobre o problema da velocidade

Um problema muito interessante e que também nos dará a ideia intuitiva de limite é o problema da velocidade instantânea. Imaginemos que uma bola de tênis é solta à partir do repouso de uma altura de 60 metros e queremos determinar a sua velocidade instantânea após 1 segundo decorridos de sua queda. Usando o modelo de queda livre descoberto por Galileu e expressando o espaço percorrido pela bola após t segundos por $S(t)$, podemos escrever a relação espaço-tempo:

$$S(t) = 4,9t^2$$

A ausência do intervalo de tempo para o cálculo da velocidade instantânea se apresenta como um aspecto que dificulta a solução deste problema. Vamos então, tomar um intervalo de tempo muito pequeno, a fim de conseguirmos calcular a velocidade no instante desejado. Para isso vamos considerar um intervalo de tempo de um centésimo de segundo. Da definição de velocidade média temos que:

$$\text{Velocidade média} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(1,01) - s(1)}{1,01 - 1} = \frac{4,9(1,01)^2 - 4,9(1)^2}{0,01} = 9,849m/s$$

Observa-se na tabela 9 a velocidade média da bola de tênis para os intervalos de tempo próximos de 1 segundo.

intervalo de tempo	velocidade média (m/s)
$1 \leq t \leq 2$	14,7
$1 \leq t \leq 1,1$	10,29
$1 \leq t \leq 1,01$	9,849
$1 \leq t \leq 1,001$	9,804

Tabela 9 – Velocidade média

A tabela 9 nos mostra intuitivamente que a medida que o intervalo de tempo diminui, a velocidade média da bola de tênis se aproxima de $9,8 m/s$. O limite dessas velocidades médias em intervalos de tempo cada vez mais curtos, iniciando-se em $t = 1$ é por definição a velocidade instantânea quando $t = 1$. É possível vislumbrar semelhanças na resolução dos problemas de tangente e velocidade, pois se considerarmos o gráfico da função dada por $S(t) = 4,9t^2$ levando ainda em conta os pontos $A(1; 4,9)$ e $B(t; 4,9t^2)$ com $t \neq 1$ pertencentes ao gráfico de $S(t)$, teremos a inclinação da reta secante s , dada por:

$$m_{AB} = \frac{4,9t^2 - 4,9}{t - 1}$$

Do que foi exposto acima e observado na tabela 9, vimos que à medida que t se aproxima de um segundo, a inclinação da reta secante s se aproxima da inclinação da reta tangente r e podemos dizer que no limite a velocidade média calculada através do coeficiente angular da reta secante será a velocidade instantânea que queríamos calcular no instante $t = 1$ segundo.

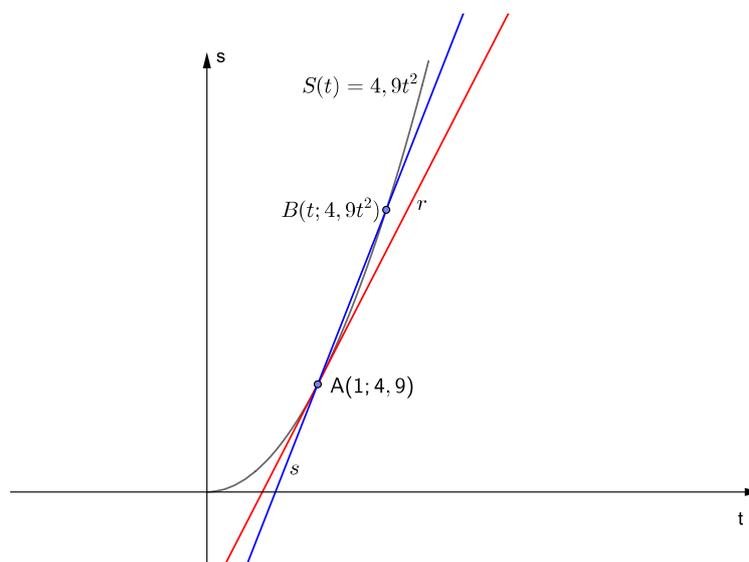


Figura 24 – Espaço x Tempo.

Observe no gráfico da Figura 24 que à medida que o ponto B se aproxima do ponto A a reta secante s se aproxima da reta tangente r cujo coeficiente angular nos

fornece a velocidade instantânea. Em uma linguagem mais formal, podemos dizer que

$$\lim_{t \rightarrow 1} m_{AB} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{4,9t^2 - 4,9}{t - 1}$$

Mais adiante teremos condições de discutir, analisar e calcular limites como estes de tal modo que será fácil ver que este limite é igual a 9,8 como sugere a nossa tabela.

3.1.1 Limite de uma Função

Vimos até aqui como surgiu a necessidade do uso do cálculo de limites para se responder com precisão às questões relevantes da matemática e da física. Veremos agora como calcular limites de algumas funções e algumas propriedades que os limites possuem que podem nos auxiliar em seus cálculos.

O que acontece com a função real f definida por $f(x) = x + 4$ quando x se aproxima de 5?

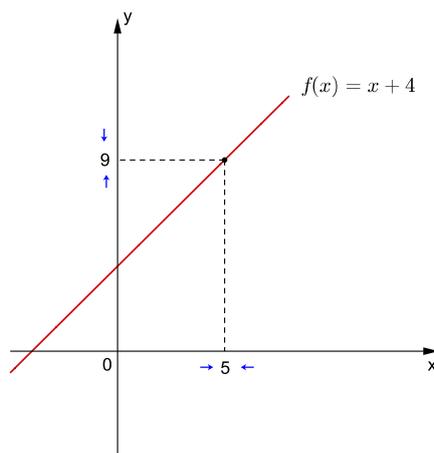


Figura 25 – Reta f .

x	$f(x)$	x	$f(x)$
4,95	8,95	5,05	9,05
4,96	8,96	5,04	9,04
4,97	8,97	5,03	9,03
4,98	8,98	5,02	9,02
4,99	8,99	5,01	9,01

Tabela 10 – Pontos de $f(x)$ próximos de $x = 5$.

Tanto a tabela 10 quanto o gráfico da Figura 25 nos mostram que a medida que x se aproxima de 5, $f(x)$ se aproxima de 9. Ao escrevermos isso, a partir da utilização da notação de limite, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 4) = 9$$

Conforme (STEWART, 2013), é possível definir limite como:

Definição 3. *Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a . (isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a , exceto possivelmente no próprio a). Então, escrevemos :*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

E dizemos “o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é igual a L ” se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a .

Em outras palavras, podemos dizer que $f(x)$ assume valores tão próximos a L quanto quisermos a medida que x se aproxima do número a , tanto pela direita (valores maiores do que a), quanto pela esquerda (valores menores do que a) mas com x diferente de a . Mais adiante, pretendemos dar uma definição mais precisa de limite.

Podemos notar ainda que na definição apresentada agora, a função não precisa estar definida no ponto a , pois o que estamos procurando é o comportamento da função para pontos próximos de a .

As Figuras 26 e 27 nos mostram duas situações diferentes em que limite de $f(x)$ é igual a L quando x tende a a independentemente da função f estar ou não definida em a .

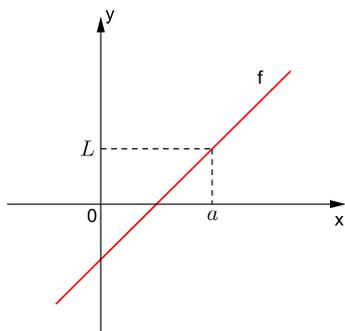


Figura 26 – $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

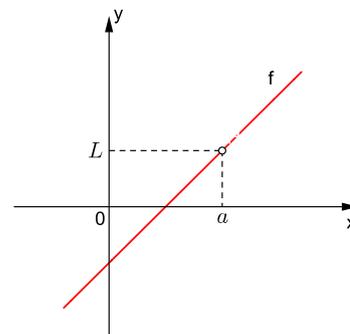


Figura 27 – $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Exemplo 21. Determine o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Solução: Primeiro vamos estimar o valor desse limite atribuindo valores próximos de 1 a x , mas nunca iguais a 1, de acordo com a definição de limite dada anteriormente.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,95	1,95	1,05	2,05
0,96	1,96	1,04	2,04
0,97	1,97	1,03	2,03
0,98	1,98	1,02	2,02
0,99	1,99	1,01	2,01

Tabela 11 – Valores de x próximos de 1.

Ainda podemos observar o gráfico de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$:

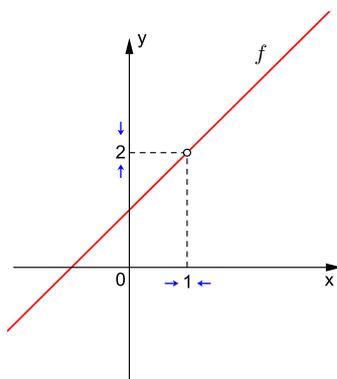


Figura 28 – Gráfico de f .

De acordo com o que vimos na tabela 11 e no gráfico da Figura 28, podemos conjecturar que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Mais adiante, após estudarmos algumas propriedades dos limites, iremos calcular este limite novamente de maneira mais simplificada e direta.

Condição de existência do limite

Para estudarmos as condições de existência de um limite, vamos definir os limites laterais.

Limite à esquerda

Definição 4. Denotamos $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ para falar que se trata do limite de $f(x)$ quando x tende a valores próximos de a com x menor do que a e que desta maneira $f(x)$ tende a L .

Limite à direita

Definição 5. Denotamos $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ para falar que se trata do limite de $f(x)$ quando x tende a valores próximos de a com x maior do que a e que, desta maneira, $f(x)$ tende a L .

Exemplo 22. Considere o gráfico da função f mostrado na Figura 29:

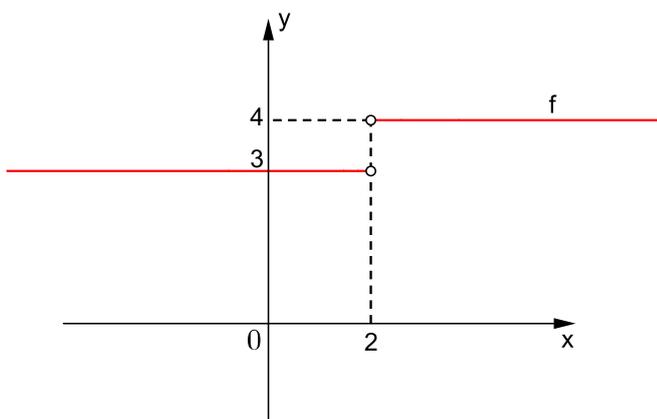


Figura 29 – Função descontínua f .

Veja que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$ e que $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$. O que podemos afirmar sobre $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?

Solução: Da definição de limite e limites laterais até aqui apresentadas podemos estabelecer a condição de existência de um limite e dizer que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

o que nos leva a concluir que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ não existe, pois $3 = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$.

3.1.2 Propriedades dos limites

Admitindo que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existam e que c é uma constante, então:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow a} c = c$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ sendo n inteiro não nulo.

As propriedades escritas acima são as que serão utilizadas no presente trabalho, e podem ser enunciadas assim:

- 1) O limite de uma soma de duas ou mais funções é igual a soma dos limites dessas mesmas funções.
- 2) O limite de uma diferença de duas ou mais funções é igual a diferença dos limites dessas mesmas funções.
- 3) O limite do produto entre uma constante e uma função é igual ao produto da constante pelo limite dessa função.
- 4) O limite do produto de duas ou mais funções é igual ao produto dos limites das referidas funções
- 5) O limite do quociente entre duas funções é igual ao quociente dos limites dessas mesmas funções (sempre que o limite do denominador for não nulo).
- 6) O limite de uma constante assume o próprio valor da constante.
- 7) O limite de x quando x tende a a é igual ao próprio valor a .
- 8) O limite de x^n quando x tende a a é igual a a^n .

Provaremos uma dessas propriedades mais adiante quando apresentarmos a definição precisa de um limite. Agora, vamos enunciar e provar a **propriedade de substituição direta** que diz que:

Sendo f uma função polinomial ou racional e se a estiver no domínio de f , então:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Demonstração. Primeiramente consideraremos no **Caso (I)** f sendo uma função polinomial dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Assim, fazendo uso das propriedades dos limites, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) \\ &= a_0 + a_1 \lim_{x \rightarrow a} x + a_2 \lim_{x \rightarrow a} x^2 + \dots + a_n \lim_{x \rightarrow a} x^n \\ &= a_0 + a_1a + a_2a^2 + \dots + a_na^n = f(a). \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, como queríamos demonstrar para este caso.

Vamos considerar agora o **Caso II**, em que f é uma função racional dada por $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais com $q(a) \neq 0$. Assim, novamente fazendo uso das propriedades dos limites e do que foi demonstrado no **Caso I**, podemos escrever:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} p(x)}{\lim_{x \rightarrow a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a),$$

o que encerra a demonstração. \square

A seguir daremos exemplos de como podemos calcular alguns limites com mais agilidade, nos valendo da propriedade da substituição direta.

Exemplo 23. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 5x^2 + 6x + 1)$.

Solução: Fazendo uso da propriedade da substituição direta, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 5x^2 + 6x + 1) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 1 = 8 - 20 + 12 + 1 = 1$$

Exemplo 24. Calcule $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 4x^2 - 1}{x + 4}$.

Solução: Novamente fazendo uso da propriedade da substituição direta, temos:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 4x^2 - 1}{x + 4} = \frac{(-3)^3 + 4(-3)^2 - 1}{-3 + 4} = \frac{-27 + 36 - 1}{1} = 8$$

Exemplo 25. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Solução: Observe que neste exemplo não poderemos inicialmente usar a propriedade da substituição direta, pois a função da qual queremos calcular o limite não está definida para $x = 1$, mas podemos reescrevê-la de maneira conveniente. Veja que $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = x + 1$ com $x \neq 1$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Observe ainda que esse resultado valida a conjectura feita no exemplo 21.

Exemplo 26. Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

Solução: Observe que, novamente, não poderemos inicialmente usar a propriedade da substituição direta, pois a função da qual queremos calcular o limite não está definida para $x = 3$. Assim, procedendo de modo análogo ao exemplo anterior, podemos escrever:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{(x - 3)} = x + 3 \text{ com } x \neq 3$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$$

3.1.3 Definição precisa de limite

Segundo (STEWART, 2013), a definição precisa de limite reside em:

Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a , exceto possivelmente no próprio a . Então, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se para todo $\epsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon$$

Após darmos a definição precisa de limite, estamos aptos a demonstrar as propriedades deste que enunciamos anteriormente. Neste trabalho será enfatizada apenas a demonstração da propriedade 1.

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Demonstração: Da hipótese temos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ existe, ou seja, dado $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ existe, ou seja, dado $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$. Queremos então mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$. Ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \epsilon$.

Assim, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e fazendo uso da desigualdade triangular temos que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

o que encerra a demonstração. \square

Observação: Tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, a fim de garantir que sejam válidas as desigualdades $0 < |x - a| < \delta_1$ e $0 < |x - a| < \delta_2$.

3.2 Derivada

A derivada de uma função $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em um ponto $(a, f(a))$ com $a \in X$ é um limite muito específico que pode ser interpretada como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Podemos determinar o coeficiente angular da reta tangente t da Figura 30 fazendo o uso de limite, dessa forma, teremos:

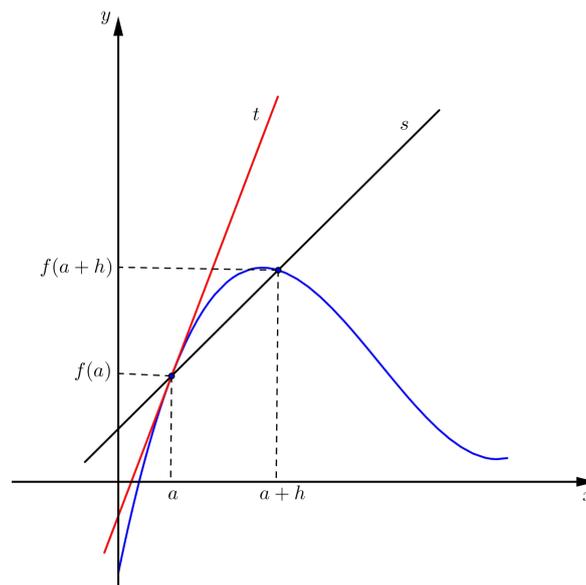
$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Definição 6. A derivada de f em $a \in \mathbb{R}$ é denotada por $f'(a)$, ou seja, $m = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$, considerando que este limite existe.

Fazendo $x = a + h$ na definição 6, podemos escrever $h = x - a$ e observando que $x \rightarrow a$ quando $h \rightarrow 0$, também podemos denotar a derivada do seguinte modo:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Observe que a derivada é um limite muito particular e será uma ferramenta muito útil quando se trata de otimização de funções.

Figura 30 – $h \rightarrow 0 \rightarrow s \rightarrow t$.

Exemplo 27. Determine a derivada da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 4x + 6$ em $a \in \mathbb{R}$.

Solução: Da definição 6, escrevemos:

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - 4(a+h) + 6 - a^2 + 4a - 6}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 4a - 4h + 6 - a^2 + 4a - 6}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2 - 4h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2a + h - 4)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h - 4 \\
 &= 2a - 4.
 \end{aligned}$$

Podemos também usar a derivada (caso ela exista) para escrever a equação da reta tangente t ao gráfico da função f no ponto $P(a, f(a))$. Como a derivada de f no ponto $P(a, f(a))$ fornece a inclinação da reta tangente t no ponto P , podemos escrever:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

que é uma equação da reta tangente t .

Exemplo 28. Dê uma equação da reta tangente ao gráfico de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2 - 4x + 6$ no ponto $P = (2, 2)$.

Solução: Como já vimos no exemplo 27, temos que $f'(a) = 2a - 4$ e daí $f'(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$. Assim, uma equação da reta solicitada é:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2), \text{ ou seja,}$$

$$y - 2 = 0 \cdot (x - 2), \text{ ou ainda,}$$

$$y = 2$$

Note na Figura 31 que a reta tangente $y = 2$ no ponto $P = (2, 2)$ é uma reta horizontal.

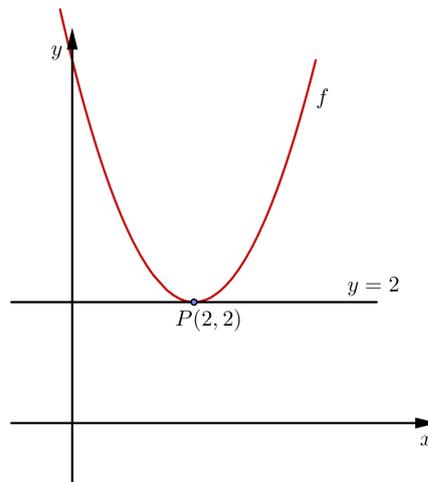


Figura 31 – Reta tangente $y = 2$

A derivada de uma função f em um ponto fixo $P = (a, f(a))$ dada por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

pode ser vista como uma função e, para isso, basta deixarmos o número a variar. Assim, fazendo $a = x$ com $x \in \mathbb{R}$, teremos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

sempre que este limite existe.

Exemplo 29. Sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 5x + 8$, calcule $f'(x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Solução: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 5(x+h) + 8 - x^2 + 5x - 8}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h + 8 - x^2 + 5x - 8}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 5h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 5)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h - 5 \\
 &= 2x - 5.
 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = 2x - 5$.

3.2.1 Regras de Derivação

Nesta seção iremos apresentar a derivada de funções que aparecerão com muita frequência em nosso trabalho, inclusive iremos demonstrar algumas delas.

Regra 1: Seja f uma função com $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = K$; $K \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 0$, ou seja, a derivada de uma função constante é nula.

Demonstração: Aplicando a definição da função derivada temos,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0, \text{ o que encerra a demonstração. } \square$$

Regra 2: Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{R}$. Então, podemos demonstrar que $(x^n)' = nx^{n-1}$; $\forall n \in \mathbb{R}$.

Apesar da regra ser válida para todo $n \in \mathbb{R}$, vamos demonstrar aqui apenas o caso em que n é um natural não nulo.

Demonstração: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$. Com o auxílio do binômio de Newton em $(x+h)^n$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1}] \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Vejamos agora um exemplo.

Exemplo 30. Determine a derivada dos polinômios abaixo.

a) $f(x) = x^4$

b) $f(w) = w^{120}$

Solução: Aplicando a segunda regra de derivação temos,

a) Se $f(x) = x^4$, logo $f'(x) = 4x^3$.

b) Se $f(w) = w^{120}$, logo $f'(w) = 120w^{119}$.

Regra 3: Seja K uma constante real e f uma função que possui derivada, então podemos demonstrar que,

$$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x); \forall K \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Seja W uma função onde $W(x) = Kf(x)$, aplicando a definição 6 em

W , temos

$$\begin{aligned} W'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W(x+h) - W(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K \cdot f(x+h) - K \cdot f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k[f(x+h) - f(x)]}{h} \\ &= K \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= K \cdot f'(x) \end{aligned}$$

o que prova que $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$. □

Exemplo 31. Determine a derivada de $f(x) = 5x^7$

Solução: $f'(x) = 5(x^7)' = 5 \cdot 7x^{7-1} = 35x^6$

Regra 4: Usando as propriedades 1 e 2 de limites e a definição 6 pode-se mostrar que,

- a) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$ (a derivada da soma de duas funções é igual à soma das derivadas dessas funções).
- b) $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$ (a derivada da diferença de duas funções é igual à diferença das derivadas dessas funções).

Usando a propriedade associativa da adição podemos estender a **regra 4** para três ou mais funções.

Exemplo 32. Determine os pontos do domínio da função f com $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ em que a derivada se anula.

Solução: Inicialmente, vamos aplicar as regras de derivação vistas até aqui. Temos que $f'(x) = 3x^2 - 6x$, daí $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x = 0 \iff 3x(x - 2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$.

Assim, os pontos do domínio da f onde a derivada se anula são $P_1 = (0, 7)$ e $P_2 = (2, 3)$.

Podemos observar no gráfico da Figura 32 que as retas tangentes ao gráfico de f nos pontos P_1 e P_2 são retas horizontais, uma vez que $f'(P_1) = f'(P_2) = 0$ correspondem aos coeficientes angulares dessas retas.

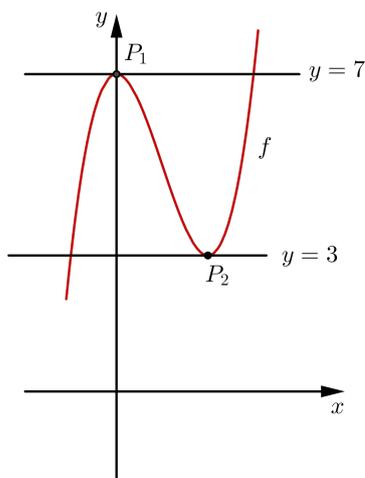


Figura 32 – Retas tangentes horizontais.

Regra 5: Derivada do produto. Sendo f, g duas funções deriváveis, pode-se mostrar que:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Exemplo 33. Determine a derivada de $h(x) = \sqrt{x} \cdot (x^2 - 5x + 3)$

Solução: Da regra 5, temos

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\sqrt{x})' \cdot (x^2 - 5x + 3) + \sqrt{x} \cdot (x^2 - 5x + 3)' \\ &= (x^{\frac{1}{2}})' \cdot (x^2 - 5x + 3) + \sqrt{x} \cdot (2x - 5) \\ &= \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 - 5x + 3) + \sqrt{x} \cdot (2x - 5) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x^2 - 5x + 3) + \sqrt{x} \cdot (2x - 5) \end{aligned}$$

Portanto, $h'(x) = \frac{x^2 - 5x + 3}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot (2x - 5)$.

Regra 6: Derivada do quociente

Sendo f, g duas funções deriváveis, é possível mostrar que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Exemplo 34. Determine a derivada de $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 8}{x^2 - 7x + 9}$.

Solução: Da regra 6, temos

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{(x^3 - 5x^2 + 8)' \cdot (x^2 - 7x + 9) - (x^3 - 5x^2 + 8) \cdot (x^2 - 7x + 9)'}{(x^2 - 7x + 9)^2} \\
&= \frac{(3x^2 - 10x) \cdot (x^2 - 7x + 9) - (x^3 - 5x^2 + 8) \cdot (2x - 7)}{(x^2 - 7x + 9)^2} \\
&= \frac{3x^4 - 21x^3 + 27x^2 - 10x^3 + 70x^2 - 90x - 2x^4 + 7x^3 + 10x^3 - 35x^2 - 16x + 56}{(x^2 - 7x + 9)^2}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$h'(x) = \frac{x^4 - 14x^3 + 62x^2 - 106x + 56}{(x^2 - 7x + 9)^2}.$$

Regra 7: Derivada de funções trigonométricas

- a) Se $f(x) = \text{sen}(x)$, então, $f'(x) = \text{cos}(x)$
b) Se $f(x) = \text{cos}(x)$, então, $f'(x) = -\text{sen}(x)$.

Regra 8: Regra da cadeia

Sendo f e g funções reais deriváveis em x , temos que a função composta $h(x) = f(g(x))$ também será derivável em x com:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Exemplo 35. Determine a derivada de $h(x) = (x^5 + 6x + 1)^{12}$

Solução: Olhando para $h(x)$ como uma função composta dada por $h(x) = f(g(x))$ onde $f(x) = x^{12}$ e $g(x) = x^5 + 6x + 1$ e aplicando então a **regra 8** a $h(x)$, teremos:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 12(x^5 + 6x + 1)^{11} \cdot (x^5 + 6x + 1)' = 12(x^5 + 6x + 1)^{11} \cdot (5x^4 + 6)$$

3.2.2 Aplicação de derivadas para determinar pontos de máximo e mínimo de funções reais de uma única variável

Do que vimos até aqui, sabemos que alguns problemas de otimização do mundo real podem ser modelados por uma função real de uma única variável. Assim, podemos solucionar tais problemas determinando os pontos de máximo ou de mínimo dessas funções e, para tanto, se faz uso das derivadas sempre que possível.

Primeiramente, vamos enunciar algumas definições e teoremas que nos auxiliarão nessa busca.

Definição 7. Seja f uma função com domínio $D \subset \mathbb{R}$ e $d \in D$, então dizemos que

- i) $f(d)$ é o valor mínimo absoluto (global) de f se $f(d) \leq f(x), \forall x \in D$.
- ii) $f(d)$ é o valor máximo absoluto (global) de f se $f(d) \geq f(x), \forall x \in D$.

Definição 8. Seja f uma função com domínio $D \subset \mathbb{R}$ e $\gamma \in D$, então dizemos que

- i) $f(\gamma)$ é um valor de mínimo local de f se existe um intervalo (c, d) tal que $f(\gamma) \leq f(x)$, para todo $x \in (c, d) \cap D$ onde $\gamma \in (c, d)$.
- ii) $f(\gamma)$ é um valor de máximo local de f se existe um intervalo (c, d) tal que $f(\gamma) \geq f(x)$, para todo $x \in (c, d) \cap D$ onde $\gamma \in (c, d)$.

Observação: Quando a função f atende (i) ou (ii), dizemos que f possui extremos.

A Figura 33 ilustra as definições 7 e 8. Note que $f(b)$ é o valor máximo absoluto da f ; $f(e)$ é o valor mínimo absoluto da f e $f(c)$ é um valor de mínimo local da f .

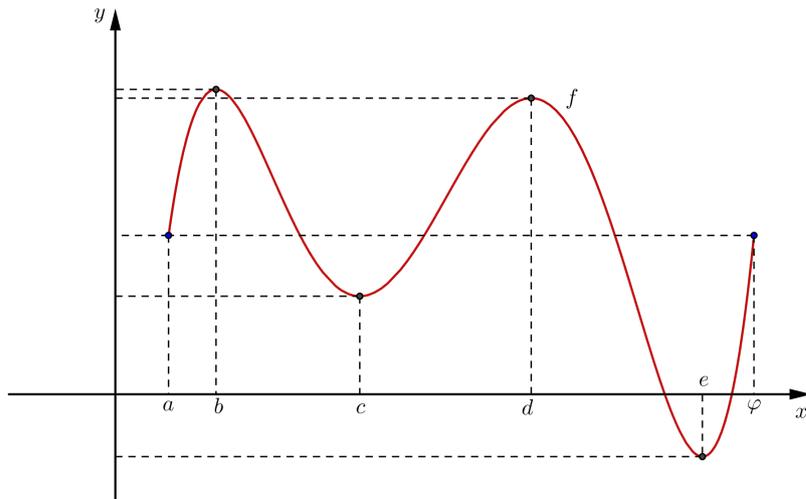


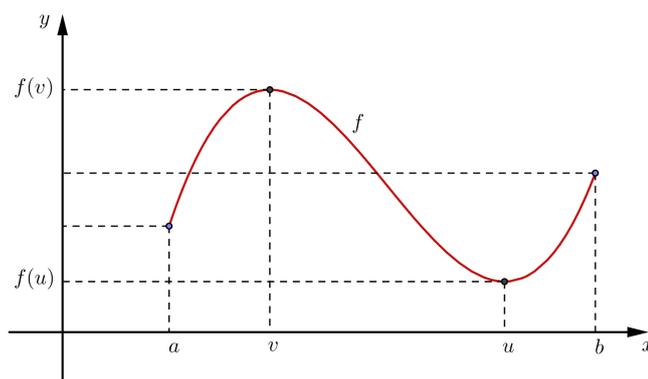
Figura 33 – Pontos extremantes de f .

Vamos enunciar agora um teorema que garante sob certas condições a existência de um valor máximo absoluto e de um valor mínimo absoluto de uma função.

Teorema 1 (Teorema de Weierstrass). *Seja f uma função com $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ então existem números reais u e v em $[a, b]$ tais que $f(u) \leq f(x) \leq f(v) \forall x \in [a, b]$.*

Note que, de acordo com o Teorema de Weierstrass $f(u)$ é o valor mínimo absoluto de f e $f(v)$ é o valor máximo absoluto de f ambos em $[a, b]$.

A Figura 34 ilustra uma situação em que o Teorema de Weierstrass se aplica.

Figura 34 – f contínua em $[a, b]$.

Ainda na busca de máximos e mínimos de funções com auxílio de derivadas vamos enunciar o Teorema de Fermat.

Teorema 2 (Teorema de Fermat). *Seja c um número real no domínio da função f com $f(c)$ assumindo o valor máximo ou mínimo local de f , então $f'(c) = 0$ caso $f'(c)$ exista.*

Veja que a Figura 32 deste capítulo ilustra o Teorema de Fermat.

Observação: Note que, de acordo com as definições de limite e de derivada que adotamos, para uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, os valores da derivada de f nos extremos a e b não estão definidos. É possível estender o conceito de derivada para estes casos, mas isso foge do propósito deste texto.

Definição 9. *Sendo $(c, f(c))$ um ponto do domínio da função f dizemos que $(c, f(c))$ é um ponto crítico de f , caso $f'(c)$ seja nulo ou não exista.*

Com o que vimos até aqui, temos um procedimento descrito em três passos que adotaremos para determinar os valores de máximo ou de mínimo absolutos de uma função f , com $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. São eles:

Passo 1: Determinar os pontos críticos da função f em (a, b) .

Passo 2: Determinar os valores $f(a)$ e $f(b)$ que são os extremos do intervalo $[a, b]$.

Passo 3: Comparar $f(a)$ e $f(b)$ com as ordenadas dos pontos críticos. O maior valor obtido entre eles será o máximo absoluto e o menor valor obtido entre eles será o mínimo absoluto.

Nos exemplos 36, 37, 38, 39, 40 e 41 usaremos esse passo a passo para determinar os valores de máximo e mínimo absolutos das funções contínuas f nos respectivos intervalos

fechados dados, ou seja, estaremos interessados em resolver o problema

$$\begin{cases} \text{Minimizar } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \in [a, b] \end{cases}$$

Exemplo 36. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $[0, 3]$

Solução: Vamos determinar os pontos críticos de f em $(0, 3)$. Temos que $f'(x) = 6x - 12 = 0 \iff x = 2$.

Agora vamos determinar os valores de f em $x = 2$ e nos extremos do intervalo $[0, 3]$. Logo, $f(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 5 = -7$, $f(0) = 5$ e $f(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 5 = -4$. Comparando os valores de f em seu ponto crítico e nos extremos do intervalo dado, temos que seu valor mínimo absoluto é $f(2) = -7$ e seu valor máximo absoluto é $f(0) = 5$.

Exemplo 37. $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $[0, 3]$

Solução: Como $f'(x) = 3x^2 - 3$ e $3x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$, temos então que $x = 1$ é o único ponto crítico de f em $(0, 3)$ pois -1 não está no intervalo $(0, 3)$. Vamos agora analisar os valores de f nos extremos do intervalo dado e comparar com o valor de f no seu ponto crítico.

Temos $f(0) = 1$, $f(3) = 27 - 9 + 1 = 19$ e $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$. Portanto, o valor máximo absoluto de f é $f(3) = 19$ e o valor mínimo absoluto de f é $f(1) = -1$.

Exemplo 38. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, $[-2, 3]$

Solução: Temos $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \iff 6 \cdot (x^2 - x - 2) = 0 \iff 6 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 2$ que são os únicos pontos críticos de f . Calculando o valor de f nos extremos do intervalo dado e nos pontos críticos $x = -1$ e $x = 2$, temos, $f(-1) = 8$, $f(2) = -19$, $f(-2) = -3$ e $f(3) = -8$. Comparando esses valores nas condições do problema, concluímos que $f(2) = -19$ é o valor mínimo absoluto de f e que $f(-1) = 8$ é o valor máximo absoluto de f .

Exemplo 39. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$, $[-2, 3]$

Solução: Determinaremos inicialmente os pontos críticos de f em $(-2, 3)$. Temos que $f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \iff 4x \cdot (x^2 - 1) = 0 \iff 4x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = 1$. Agora vamos determinar os valores de f em $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$ e nos extremos do intervalo $[-2, 3]$.

Assim, $f(0) = 3$, $f(-1) = 1 - 2 + 3 = 2$, $f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$, $f(-2) = 16 - 8 + 3 = 11$ e $f(3) = 81 - 18 + 3 = 66$. Comparando os valores de f em seus pontos críticos e nos extremos do intervalo dado, temos que seu valor mínimo absoluto é $f(1) = f(-1) = 2$ e seu valor máximo absoluto é $f(3) = 66$.

Exemplo 40. $f(x) = (x^2 - 1)^3$, $[-1, 2]$

Solução: Aplicando a regra da cadeia em f temos $f'(x) = 3 \cdot (x^2 - 1)^2 \cdot 2x = 0 \iff x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$. Daí, $f(0) = -1$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 0$ e $f(2) = 27$ o que nos mostra que $f(0) = -1$ é o valor mínimo absoluto de f e $f(2) = 27$ é o valor máximo absoluto de f .

Exemplo 41. *Encontre as dimensões do retângulo de maior área que tem sua base sobre o eixo x e seus dois outros vértices acima do eixo x e sobre a parábola $y = 8 - x^2$.*

Solução: Considerando os dados do problema e observando a Figura 35 que ilustra a situação, podemos calcular a área do retângulo como sendo $A(x) = 2xy$. Como o retângulo possui dois vértices sobre a parábola $y = 8 - x^2$, podemos reescrever a área do retângulo de modo que $A(x) = 2xy = 2x \cdot (8 - x^2) = 16x - 2x^3$ para $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$.

Como $A(x)$ é polinomial e, portanto, contínua em $[0, 2\sqrt{2}]$ vamos determinar seus pontos críticos e comparar os valores de $A(x)$ nos extremos de $[0, 2\sqrt{2}]$ para encontrar seu máximo absoluto.

Temos $A'(x) = 16 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{6} \Rightarrow x = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$. Como $A(0) = A(2\sqrt{2}) = 0$, temos que o valor máximo de $A(x) = 16x - 2x^3$ ocorre quando $x = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ o que nos dá $2x = 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ e $y = 8 - \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{16}{3}$ como sendo as dimensões do retângulo de área máxima nas condições do problema.

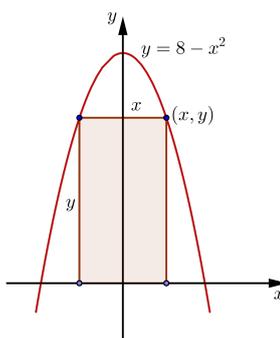


Figura 35 – Retângulo de dimensões $2x$ e y .

4 Otimização com cálculo: Funções de duas ou mais variáveis

Para a resolução de problemas mais próximos da realidade, como por exemplo, do dia-a-dia de grandes empresas, pensaremos agora em problemas de otimização que envolvem muitas variáveis e que podem ser mais facilmente solucionados com o auxílio do cálculo. Para isso, apresentaremos alguns métodos de se otimizar funções de várias variáveis.

4.1 Noções Elementares de Topologia

Introduziremos aqui alguns conceitos e definições de topologia que serão essenciais na análise de pontos ótimos para funções de n variáveis reais.

Definição 10 (Bola Aberta). *Seja $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ um ponto qualquer do \mathbb{R}^n e seja ainda δ um número real positivo. Chamamos de bola aberta de centro a e raio $\delta > 0$ o conjunto de pontos x do \mathbb{R}^n tais que a distância entre a e x é menor do que δ . Denotamos a bola aberta por:*

$$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < \delta\}$$

Observação: $d(a, x)$ é a distância entre x e a que pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} d(a, x) &= \|x - a\| = \|(x_1 - a_1), (x_2 - a_2), \dots, (x_n - a_n)\| \\ &= \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} \end{aligned}$$

A seguir vamos ressaltar três casos particulares:

i) Para $n = 1$

$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(a, x) < \delta\}$, observe que, fixando a e fixando δ , teremos o seguinte intervalo aberto em \mathbb{R} :

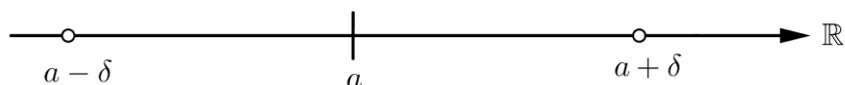
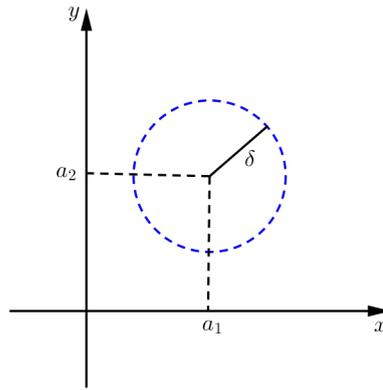


Figura 36 – Intervalo aberto em \mathbb{R} .

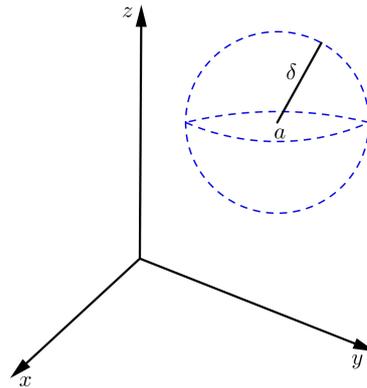
ii) Para $n = 2$

$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(a, x) < \delta\}$ com $a = (a_1, a_2)$ e $\delta > 0$, temos a região interna de uma circunferência de centro a e raio δ .

Figura 37 – Bola aberta em \mathbb{R}^2 .

iii) Para $n = 3$

$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(a, x) < \delta\}$ com $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $\delta > 0$, temos a região interna a uma esfera de centro a e raio δ .

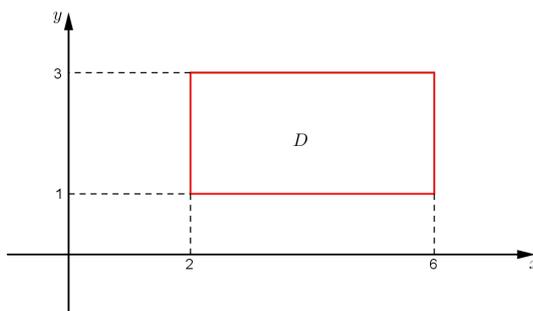
Figura 38 – Bola aberta em \mathbb{R}^3 .

Definição 11 (Bola Fechada). Seja $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ um ponto qualquer do \mathbb{R}^n e seja ainda δ um número real positivo. Chamamos de bola fechada de centro a e raio $\delta > 0$ o conjunto de pontos x do \mathbb{R}^n tais que a distância entre a e x é menor do que ou igual a δ . Denotamos a bola fechada por:

$$B[a, \delta] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) \leq \delta\}$$

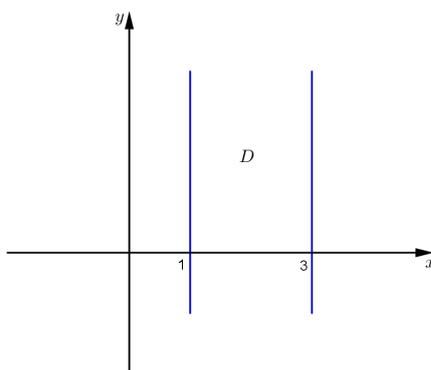
Definição 12 (Conjunto Limitado). Seja D um subconjunto do \mathbb{R}^n e seja $B[a, \delta]$ uma bola fechada de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $\delta > 0$. Dizemos que D é um conjunto limitado se existir $\delta > 0$ tal que D fique inteiramente contido na bola fechada B .

Exemplo 42. Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 6 \text{ e } 1 \leq y \leq 3\}$

Figura 39 – D é limitado.

Tomando $a = (4, 2)$ e $\delta = 10$ teremos $D \subset B[a, \delta]$, o que nos garante que D é um conjunto limitado.

Exemplo 43. Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$

Figura 40 – D não é limitado.

Neste caso, não existirá $\delta > 0$ tal que D esteja totalmente contido na bola fechada B , portanto, D não será limitado.

Definição 13 (Ponto interior de um Conjunto). Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de interior de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se existe uma bola aberta $B(a, \delta)$ totalmente contida em A .

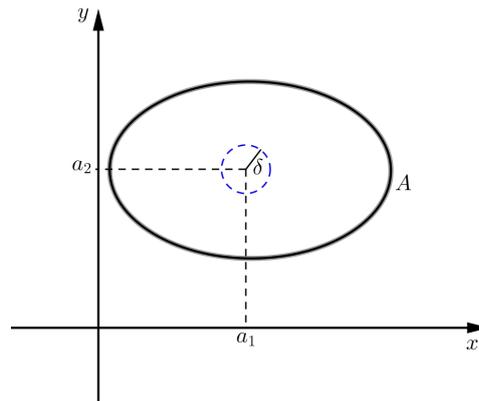


Figura 41 – $a = (a_1, a_2)$ é um ponto interior de A .

Definição 14 (Conjunto Aberto). Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se A possui apenas pontos interiores.

Definição 15 (Ponto de Fronteira de um Conjunto). Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é ponto de fronteira de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se toda bola aberta de centro em a e raio $\delta > 0$ contiver pontos que estão em A e pontos que não estão em A .

Exemplo 44. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 6 \text{ e } 1 \leq y \leq 3\}$

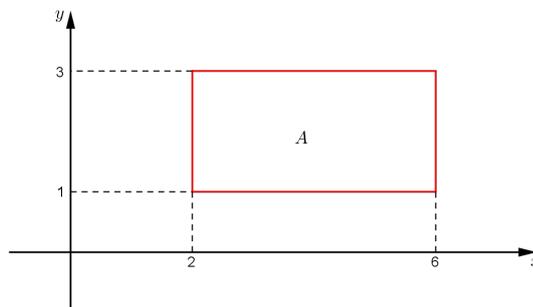


Figura 42 – Fronteira de A

Podemos descrever todos os pontos que estão na fronteira de A da Figura 42 do seguinte modo:

$$F = \{(2, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 3\} \cup \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 6\} \cup \{(6, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 3\} \cup \{(x, 3) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 6\}$$

Definição 16 (Conjunto Fechado). Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se todos os pontos da fronteira de A pertencerem a A .

Note que o conjunto A do exemplo 44 é um conjunto fechado.

Definição 17 (Conjunto Compacto). Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto se A for fechado e limitado. Observe que o conjunto A do exemplo 44 é um conjunto compacto.

4.2 Funções de Várias Variáveis

Neste subcapítulo definiremos funções de várias variáveis pois, como sabemos, a maioria dos problemas de otimização da realidade dependem da influência de muitas variáveis. Sendo assim, para modelá-los, precisaremos trabalhar com tais funções.

Definição 18. Uma função f de n variáveis reais a valores reais será dada por $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ou seja, $\forall x \in A \subset \mathbb{R}^n$ deve existir um único $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

Observe que o conjunto A que é o domínio da função f é um subconjunto de \mathbb{R}^n e o contradomínio de f é \mathbb{R} .

Exemplo 45. Determine o domínio da função $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x_1^2 + x_2^3 - 5x_3^3$.

Solução: Note que $x = (x_1, x_2, x_3)$ e f é uma função polinomial na variáveis x_1, x_2 e x_3 e portanto, neste caso $A = \mathbb{R}^3$.

Agora, vamos definir a função derivada para funções de n variáveis de modo análogo ao que fizemos com as funções de uma variável.

Definição 19. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ teremos,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h},$$

caso este limite exista, como sendo a derivada de f em relação a x_i .

Observe que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ é a notação que usaremos para dizer que estamos derivando a função f nas variáveis x_1, \dots, x_n em relação à i -ésima variável x_i . Usaremos também $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_n)$ para dizer que estamos derivando f duas vezes em relação à i -ésima variável x_i .

Na prática, procederemos de modo semelhante ao que foi feito para as funções de uma variável, ou seja, quando precisarmos calcular $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ consideraremos a função f como sendo uma função de uma única variável e, neste caso, a variável será x_i e todas as outras variáveis serão tratadas como constantes.

Exemplo 46. Sendo $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 6x_1^3 + 3x_2^5 - 4x_3^7$, determine:

a) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)$

b) $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3)$

c) $\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)$

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, x_3)$

Solução:

a) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 3 \cdot 6 \cdot x_1^2 + 0 + 0 = 18x_1^2$

b) $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = 0 + 3 \cdot 5 \cdot x_2^4 - 0 = 15x_2^4$

c) $\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 0 + 0 - 4 \cdot 7x_3^6 = -28x_3^6$

d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_1}(18x_1^2) = 2 \cdot 18 \cdot x_1 = 36x_1$

Na sequência, apresentaremos algumas definições que serão de extrema relevância para otimizarmos funções de n variáveis a valores reais.

Definição 20. Uma função f de n variáveis a valores reais é dita função de classe C^k quando possui todas as derivadas parciais até a ordem k contínuas no domínio da f .

Definição 21 (Vetor Gradiente). O vetor gradiente de uma função f de classe C^1 com $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ em um ponto $x \in A$ é definido como:

$$\vec{\nabla} f(x)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Note que as coordenadas do vetor gradiente da função f é composta pelas derivadas parciais de primeira ordem de f .

Definição 22 (Ponto de máximo local). Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$, diremos que o ponto $a \in A$ será um ponto de máximo local da função f se existir uma bola aberta de centro em a e raio $\delta > 0$ tal que

$$f(a) \geq f(x) \forall x \in B(a, \delta) \subset A$$

Definição 23 (Ponto de mínimo local). Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$, diremos que o ponto $a \in A$ será um ponto de mínimo local da função f se existir uma bola aberta de centro em a e raio $\delta > 0$ tal que

$$f(a) \leq f(x) \forall x \in B(a, \delta) \subset A$$

Observação: Se $a \in A$ for um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local da função f , diremos então que a é um extremo local de f .

Definição 24 (Ponto de máximo global). Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$, diremos que o ponto $a \in A$ será um ponto de máximo global da função f se $f(a) \geq f(x) \forall x \in A$.

Definição 25 (Ponto de mínimo global). Seja $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$, diremos que o ponto $a \in A$ será um ponto de mínimo global da função f se $f(a) \leq f(x) \forall x \in A$.

Observação: Se $a \in A$ for um ponto de máximo global ou um ponto de mínimo global da função f , diremos então que a é um extremo global de f .

Após estas definições estamos aptos a enunciar as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem para uma função $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

4.3 Condições necessárias de otimalidade de primeira ordem

Nesta seção vamos iniciar a busca de pontos extremantes de uma função $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para tanto iremos apresentar um teorema que nos dá uma condição necessária para que possamos obter tais extremantes.

Teorema 3. Seja f uma função com $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , com A aberto, e, se $x^* \in A$ é um extremo local de f no interior de A , então $\vec{\nabla} f(x^*) = \vec{0}$.

Demonstração: A demonstração do Teorema 3 se encontra na referência (FRIEDLANDER, 2004).

A seguir serão apresentados alguns exemplos resolvidos para se verificar a aplicação do Teorema 3.

Exemplo 47. Determine os pontos críticos da função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A = \mathbb{R}^2$ e $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 4y + 7$.

Solução: Como a função f dada é de C^1 (por se tratar de uma função polinomial nas variáveis x e y), podemos aplicar o Teorema 3 para encontrar os pontos críticos de f . Para tanto, vamos impor a condição $\nabla f(x, y)^T = (0, 0)$.

$$\nabla f(x, y)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x + 6, 2y - 4) = (0, 0).$$

Logo, teremos que resolver:

$$\begin{cases} 2x + 6 = 0 \\ 2y - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Portanto, o único ponto crítico da função f dada será $x^* = (-3, 2)$.

Note que se reescrevermos a função f dada de maneira conveniente neste caso em particular, poderemos classificar o ponto crítico $x^* = (-3, 2)$. Vejamos:

$f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 4y + 7$, completando quadrados, $f(x, y) = (x+3)^2 + (y-2)^2 - 9 - 4 + 7$, ou ainda, $f(x, y) = (x+3)^2 + (y-2)^2 - 6$. Uma vez que $(x+3)^2 \geq 0$ e $(y-2)^2 \geq 0$, podemos escrever $f(x, y) = (x+3)^2 + (y-2)^2 - 6 \geq -6 \forall (x, y) \in A$, donde podemos concluir que o ponto crítico $x^* = (-3, 2)$ é um ponto de mínimo global de f .

Exemplo 48. Prove que a função $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^4 + 2y + 5z^2$ não possui extremos locais em \mathbb{R}^3 .

Prova: Como \mathbb{R}^3 é um conjunto aberto e f é de classe C^1 , aplicando o Teorema 3 e impondo a condição $\nabla f(x, y, z)^T = (0, 0, 0)$, teremos

$$\nabla f(x, y, z)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) = (4x^3, 2, 10z),$$

donde concluímos que f não possui pontos críticos, uma vez que, $\nabla f(x, y, z) = (4x^3, 2, 10z) \neq (0, 0, 0) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pois, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2 \neq 0 \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. O que prova que a função f dada não possui extremos locais em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 49. Determine os pontos críticos da função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x, y) = x^2 - y^2$ e, se possível, classifique-os.

Solução: Como \mathbb{R}^2 é um conjunto aberto e f é de classe C^1 , aplicando o Teorema 3, teremos

$$\nabla f(x, y)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x, -2y).$$

impondo a condição $\nabla f(x, y)^T = (0, 0)$, podemos facilmente concluir que $x^* = (0, 0)$ é o único ponto crítico de f .

Até o momento, não temos nenhum teorema que nos permita classificar $x^* = (0, 0)$, mas podemos justificar que $x^* = (0, 0)$ não é um extremo local do seguinte modo:

Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ pontos em $B((0, 0), \delta)$ e $\delta > 0$ com $f(x_1, y_1) < f(0, 0) = 0$ e $f(x_2, y_2) > f(0, 0) = 0$. Para tanto, tomemos, por exemplo, $P_1 = (x_1, y_1) = \left(0, \frac{\delta}{3}\right)$ e $P_2 = (x_2, y_2) = \left(\frac{\delta}{3}, 0\right)$ e assim, P_1 e P_2 estão em $B((0, 0), \delta)$ e ainda

$f(x_1, y_1) = f\left(0, \frac{\delta}{3}\right) = \frac{-\delta^2}{9} < f(0, 0) = 0$ e $f(x_2, y_2) = f\left(\frac{\delta}{3}, 0\right) = \frac{\delta^2}{9} > f(0, 0) = 0$. Portanto, $x^* = (0, 0)$ mesmo sendo um ponto crítico de f , não é um extremo local de f . Com isso acabamos de justificar também que a recíproca do Teorema 3 não é válida.

Observação: Todo ponto crítico que não é extremante local é classificado como ponto de sela, neste caso $x^* = (0, 0)$ é um ponto de sela de f .

Exemplo 50. Determine os pontos críticos da função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solução: Como \mathbb{R}^2 é um conjunto aberto e f é de classe C^1 , aplicando o Teorema 3, teremos

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y)^T &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x, 2y) = (0, 0) \\ &\iff x = 0 \text{ e } y = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $x^* = (0, 0)$ é o único ponto crítico da função f dada. Podemos observar também que neste caso em particular, $x^* = (0, 0)$ é um ponto de mínimo global de f pois, $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, $f(0, 0) = 0 \leq f(x, y) = x^2 + y^2; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4.4 Condições suficientes de otimalidade de segunda ordem

Nesta seção enunciaremos um teorema que nos dará uma condição suficiente para verificarmos se um ponto é um extremante local de uma função de várias variáveis.

Inicialmente, vamos definir o hessiano de uma função de duas variáveis.

Definição 26. O número real

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}$$

é chamado de hessiano da função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 no ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Teorema 4. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e seja ainda (x_0, y_0) um ponto crítico de f no interior de \mathbb{R}^2 , temos:

a) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então, (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local de f .

- b) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ e $H(x_0, y_0) > 0$, então, (x_0, y_0) é um ponto de máximo local de f .
- c) Se $H(x_0, y_0) < 0$, então, (x_0, y_0) é um ponto de sela de f .
- d) Se $H(x_0, y_0) = 0$ nada se pode concluir sobre (x_0, y_0) .

Demonstração: A demonstração do Teorema 4 se encontra na referência ([GUIDORIZZI, 2010](#)).

Observe agora a aplicação do Teorema 4 nos exemplos resolvidos [51](#), [52](#), [53](#), [54](#) e [55](#).

Exemplo 51. Determine e classifique todos os pontos críticos de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 6$.

Solução: Primeiramente, vamos determinar todos os pontos críticos da função f dada,

$$\nabla f(x, y)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (3x^2 - 3, 3y^2 - 3) = (0, 0) \iff x = \pm 1 \text{ e } y = \pm 1.$$

Portanto, os pontos críticos de f são $A = (1, 1)$, $B = (1, -1)$, $C = (-1, 1)$ e $D = (-1, -1)$. Para classificar esses quatro pontos vamos aplicar o Teorema 4.

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy$$

Para $A = (1, 1)$ temos, $H(1, 1) = 36 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 > 0$ e, portanto, $A = (1, 1)$ é um ponto de mínimo local de f .

Para $B = (1, -1)$ temos, $H(1, -1) = -36 < 0$ e, portanto, $B = (1, -1)$ é um ponto de sela de f .

Para $C = (-1, 1)$ temos, $H(-1, 1) = -36 < 0$ e, portanto, $C = (-1, 1)$ é um ponto de sela de f .

Para $D = (-1, -1)$ temos, $H(-1, -1) = 36 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -6 < 0$ e, portanto, $D = (-1, -1)$ é um ponto de máximo local de f .

Exemplo 52. Determine e classifique todos os pontos críticos de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x, y) = 3x^4 + 7y^4$.

Solução: Inicialmente, vamos determinar todos os pontos críticos da função f dada,

$$\nabla f(x, y)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (12x^3, 28y^3) = (0, 0) \iff x = 0 \text{ e } y = 0.$$

Portanto, o único ponto crítico de f é o ponto $(0, 0)$ e para classificar esse ponto crítico, vamos fazer uso do Teorema 4.

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36x^2 & 0 \\ 0 & 84y^2 \end{vmatrix} = 3024x^2y^2$$

Para o ponto $(0, 0)$ temos $H(0, 0) = 0$, ou seja, o Teorema 4 é inconclusivo para este caso. Mas, se observarmos a função dada temos que $x^4 \geq 0$ e $y^4 \geq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, então $f(x, y) = 3x^4 + 7y^4 \geq f(0, 0) = 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e, portanto, o ponto crítico $(0, 0)$ é um ponto de mínimo absoluto de f .

Exemplo 53. Mostre que a função $f(x, y) = x^2 + 5y^2 \cdot (1 + x)^3$ possui um único ponto crítico, que este ponto crítico é um mínimo local, e que f não possui ponto de mínimo global.

Demonstração: Inicialmente, vamos mostrar que f possui um único ponto crítico,

$$\nabla f(x, y)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x + 15y^2(1 + x)^2, 10y \cdot (1 + x)^3) = (0, 0) \iff$$

$$\begin{cases} 2x + 15y^2(1 + x)^2 = 0 & \text{(I)} \\ 10y \cdot (1 + x)^3 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II) temos que $10y \cdot (1 + x)^3 = 0 \iff y = 0$ ou $x = -1$. Substituindo $y = 0$ na equação (I) temos $2x = 0$, ou seja, $x = 0$. Portanto $(0, 0)$ é um ponto crítico de f .

Agora substituindo $x = -1$ na equação (I) temos que $2x + 15y^2(1 + x)^2 = -2 \neq 0 \forall y \in \mathbb{R}$. Ou seja, $x = -1$ não fornece pontos críticos de f . Sendo assim podemos concluir que $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f como queríamos mostrar.

Fazendo uso do Teorema 4 vamos mostrar que $(0, 0)$ é um mínimo local de f .

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 + 30y^2(1+x) & 30y(1+x)^2 \\ 30y(1+x)^2 & 10(1+x)^3 \end{vmatrix}$$

Daí, $H(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 20 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0$ e, portanto, o ponto crítico $(0, 0)$ é um ponto de mínimo local de f . Por fim, vamos mostrar também que o único ponto crítico de f não é um ponto de mínimo global de f , e, para tanto basta notar por exemplo que $f(0, 0) = 0 > f(-4, 1) = 16 + 5 \cdot (1 - 4)^3 = 16 - 135 = -119$, o que encerra a prova. \square

Exemplo 54. Para cada uma das funções abaixo, definidas em \mathbb{R}^2 , encontre os pontos críticos e classifique-os como mínimo local, máximo local ou ponto de sela.

a) $f(x, y) = x^2 - 6xy + 2y^2 + 10x + 2y - 5$

b) $f(x, y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$

Solução:

a) Inicialmente, vamos determinar os pontos críticos de f ,

$$\nabla f(x, y)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x - 6y + 10, -6x + 4y + 2) = (0, 0) \iff$$

$$\begin{cases} 2x - 6y + 10 = 0 & (I) \\ -6x + 4y + 2 = 0 & (II) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chegamos em $x = \frac{13}{7}$ e $y = \frac{16}{7}$. Portanto, o único ponto crítico de f é o ponto $\left(\frac{13}{7}, \frac{16}{7}\right)$.

Usaremos agora o Teorema 4 para classificar o único ponto crítico de f .

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 36 = -28 < 0,$$

e, portanto, o ponto crítico $\left(\frac{13}{7}, \frac{16}{7}\right)$ é um ponto de sela de f .

b) Inicialmente vamos determinar os pontos críticos de f ,

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y)^T &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \\ &= (4x^3 + 2x - 6y, -6x + 6y) = (0, 0) \\ &\iff 4x^3 + 2x - 6y = 0 \text{ e } -6x + 6y = 0.\end{aligned}$$

Isto é, devemos resolver o sistema,

$$\begin{cases} 4x^3 + 2x - 6y = 0 & (I) \\ -6x + 6y = 0 & (II) \end{cases}$$

Da equação (II) temos que $y = x$. Substituindo na equação (I), teremos:

$$4x^3 + 2x - 6x = 0 \iff 4x^3 - 4x = 0 \iff$$

$$x^3 - x = 0 \iff x(x^2 - 1) = 0 \iff$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Portanto, os pontos críticos de f são:

$A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ e $C = (-1, -1)$. Para classificar esses três pontos críticos de f , vamos aplicar o Teorema 4.

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 + 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 72x^2 + 12 - 36 = 72x^2 - 24$$

Para $A = (0, 0)$ temos, $H(0, 0) = -24 < 0$, portanto, $A = (0, 0)$ é um ponto de sela de f .

Para $B = (1, 1)$ temos, $H(1, 1) = 72 - 24 = 48 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 14 > 0$, portanto, $B = (1, 1)$ é um ponto de mínimo local de f .

Para $C = (-1, -1)$ temos, $H(-1, -1) = 72 - 24 = 48 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = 14 > 0$, portanto, $C = (-1, -1)$ é um ponto de mínimo local de f .

Exemplo 55. *Obtenha expressões para as derivadas primeiras e segundas da função de Rosenbrock $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$. Verifique que $x^* = (1, 1)$ é um minimizador local.*

Solução: As derivadas de primeira ordem são

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 200(-2x_1)(x_2 - x_1^2) - 2(1 - x_1), \text{ ou ainda,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = -400x_1x_2 + 400x_1^3 + 2x_1 - 2 \text{ e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 200(x_2 - x_1^2)$$

Agora as derivadas de segunda ordem são,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) &= -400x_2 + 1200x_1^2 + 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) = 200; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = -400x_1 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) \\ &= -400x_1. \end{aligned}$$

Note que $x^* = (1, 1)$ é um ponto crítico de f , pois, $\nabla f(1, 1) = (-400 \cdot 1 \cdot 1 + 400 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 - 2, 200 \cdot (1 - 1^2)) = (0, 0)$.

Vamos então fazer uso do Teorema 4 para classificar o ponto crítico $x^* = (1, 1)$.

$$H(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -400x_2 + 1200x_1^2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{vmatrix}$$

e daí,

$$H(1, 1) = \begin{vmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{vmatrix} = 160400 - 160000 = 400 > 0$$

e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(1, 1) = 802 > 0$, portanto, $x^* = (1, 1)$ é um minimizador local, como queríamos verificar.

4.5 Otimização com restrições

Nesta seção iremos enunciar um importante teorema que nos auxiliará na obtenção de máximos e mínimos de funções de várias variáveis sujeitas a certas restrições

e veremos o método dos multiplicadores de Lagrange.

Teorema 5 (Teorema de Weierstrass). *Se f é uma função real e contínua definida em um conjunto fechado e limitado D , então, existem pontos m e M ambos pertencentes a D tais que $f(m) \leq f(x) \leq f(M) \forall x \in D$.*

Note que o Teorema de Weierstrass garante a existência de um ponto de mínimo absoluto e de um ponto de máximo absoluto de f em D , mas não nos diz como determiná-los.

Para tanto, procederemos de modo análogo ao que foi feito com as funções contínuas de uma variável, ou seja, iniciaremos nossas buscas pelos possíveis pontos críticos no interior do conjunto factível e depois compararemos com os pontos extremantes da fronteira do conjunto factível, a fim de determinar os pontos de máximos e de mínimos da nossa função objetivo. Observe a aplicação do Teorema de Weierstrass nos exemplos resolvidos 56, 57, 58, 59, 60 e 61.

Exemplo 56. *Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } 2x + y \leq 6\}$ com D fechado e limitado, determine o máximo e o mínimo absoluto de f em D sendo f dada por $f(x, y) = xy - x - y + 1$.*

Solução: Representaremos, a princípio, geometricamente o conjunto D dado.

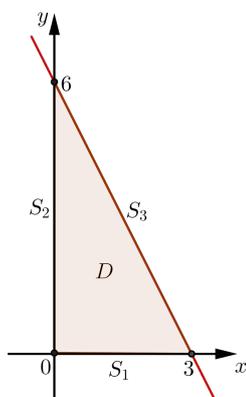


Figura 43 – $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } 2x + y \leq 6\}$

Como o nosso conjunto D é fechado e limitado e a função f dada é contínua em D , o Teorema 5 garante a existência de um mínimo e um máximo absoluto de f em D . Vamos então dividir o problema em três partes:

Parte a) Determinar os pontos críticos de f no interior do conjunto D :

$$\nabla f(x, y)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (y-1, x-1) = (0, 0) \iff x = 1 \text{ e } y = 1, \text{ ou seja,}$$

o único ponto crítico de f no interior de D é o ponto $(1, 1)$ e $f(1, 1) = 1 \cdot 1 - 1 - 1 + 1 = 0$.

Parte b) Determinar os pontos extremantes de f na fronteira D .

Observando a representação geométrica de D , podemos escrever que a união de $S_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3\}$, $S_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 6\}$ e $S_3 = \{(x, -2x + 6) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3\}$ nos dá a fronteira de D , então:

- Para $S_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3\}$ temos $f(x, 0) = -x + 1$ com $0 \leq x \leq 3$ e seu máximo ocorre em $x = 0$ nos dando $f(0, 0) = 1$ e seu mínimo ocorre em $x = 3$ nos dando $f(3, 0) = -2$.
- Para $S_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 6\}$ temos $f(0, y) = -y + 1$ com $0 \leq y \leq 6$ e seu máximo ocorre em $y = 0$ nos dando $f(0, 0) = 1$ e seu mínimo ocorre em $y = 6$ nos dando $f(0, 6) = -5$.
- Para $S_3 = \{(x, -2x + 6) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3\}$ temos

$$f(x, -2x + 6) = x(-2x + 6) - x - (-2x + 6) + 1 = -2x^2 + 7x - 5 \text{ com } 0 \leq x \leq 3$$

e, como já vimos para função de uma variável, seu máximo ocorre em $x = \frac{7}{4}$ nos dando $f\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{2}\right) = \frac{9}{8}$ e seu mínimo ocorre em $x = 0$ nos dando $f(0, 6) = -5$.

Parte c) Comparar todos os extremantes de f em D encontrados na parte a e na parte b.

Fazendo a comparação entre os valores de f em D obtidos na parte a e na parte b podemos concluir que o ponto de máximo absoluto de f em D é o ponto $\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{2}\right)$ que fornece o valor máximo absoluto $f\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{2}\right) = \frac{9}{8}$ e o ponto de mínimo absoluto de f em D é o ponto $(0, 6)$ que fornece o valor mínimo absoluto $f(0, 6) = -5$.

Exemplo 57. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$, com D fechado e limitado, determine o máximo e o mínimo absoluto de f em D sendo f dada por $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$.

Solução: Inicialmente, vamos representar geometricamente o conjunto D dado.

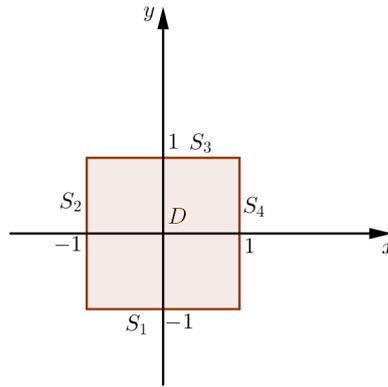


Figura 44 – $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$

Como o nosso conjunto D é fechado e limitado e a função f dada é contínua em D , o Teorema 5 garante a existência de um mínimo e um máximo absoluto de f em D . Vamos então dividir o problema em três partes:

Parte a) Determinar os pontos críticos de f no interior do conjunto D :

$$\nabla f(x, y)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2x + 2xy, 2y + x^2) = (0, 0) \iff 2x + 2xy = 0$$

e $2y + x^2 = 0$, ou seja, devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x(1 + y) = 0 & \text{(I)} \\ 2y + x^2 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I) temos $x = 0$ ou $y = -1$. Substituindo $x = 0$ em (II), teremos $2y + 0 = 0 \iff y = 0$ o que nos dá o ponto crítico $(0, 0)$, e substituindo, $y = -1$ em (II) teremos $-2 + x^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$ o que nos dá os pontos críticos $(\sqrt{2}, -1)$ e $(-\sqrt{2}, -1)$. Note que o ponto crítico $(0, 0)$ de f é o único ponto crítico que está no interior de D , então vamos avaliar o valor de f apenas em $(0, 0)$, o que nos dá $f(0, 0) = 4$.

Parte b) Determinar os pontos extremantes de f na fronteira de D .

Observando a representação geométrica de D , podemos escrever que a união de $S_1 = \{(x, -1) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $S_2 = \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$, $S_3 = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\}$ e $S_4 = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$ nos dá a fronteira de D , então:

- Para $S_1 = \{(x, -1) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\}$ temos $f(x, -1) = x^2 + 1 - x^2 + 4 = 5$, que é constante para $-1 \leq x \leq 1$ e $y = -1$.
- Para $S_2 = \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$ temos $f(-1, y) = 1 + y^2 + y + 4 = y^2 + y + 5$ com $-1 \leq y \leq 1$ e, como já vimos para função de uma variável seu mínimo ocorre em $y = \frac{-1}{2}$ nos dando $f\left(-1, \frac{-1}{2}\right) = \frac{19}{4}$ e seu máximo ocorre em $y = 1$ nos dando $f(-1, 1) = 7$.

- Para $S_3 = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\}$ temos, $f(x, 1) = x^2 + 1 + x^2 + 4 = 2x^2 + 5$ com $-1 \leq x \leq 1$ e, novamente, recorrendo ao que foi visto na obtenção de máximos e mínimos de funções de uma única variável, podemos concluir que seu mínimo ocorre em $x = 0$ nos dando $f(0, 1) = 5$ e seu máximo ocorre em $x = 1$ e $x = -1$ nos dando $f(1, 1) = f(-1, 1) = 7$.
- Para $S_4 = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$ temos, $f(1, y) = 1 + y^2 + y + 4 = y^2 + y + 5$ com $-1 \leq y \leq 1$ e, de modo análogo ao que foi feito em S_2 , sabemos que seu mínimo ocorre em $\left(1, \frac{-1}{2}\right)$ nos dando $f\left(1, \frac{-1}{2}\right) = \frac{19}{4}$ e seu máximo ocorre em $(1, 1)$ nos dando $f(1, 1) = 7$.

Parte c) Comparar todos os extremantes de f em D encontrados na parte a e na parte b.

Fazendo a comparação entre os valores de f em D obtidos na parte a e na parte b podemos concluir que os pontos de máximos absolutos de f em D são os pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ que fornecem o valor máximo absoluto $f(-1, 1) = f(1, 1) = 7$ e o ponto de mínimo absoluto de f em D é o ponto $(0, 0)$ que fornece o valor mínimo absoluto $f(0, 0) = 4$.

Exemplo 58. Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em D , onde D é o quadrilátero cujos vértices são $E = (2, 3)$, $F = (2, 2)$, $G = (-2, -2)$ e $H = (-2, 3)$. Determine o máximo e o mínimo absoluto de f em D sendo f dada por $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$.

Solução: Inicialmente, vamos representar geometricamente o conjunto D dado.

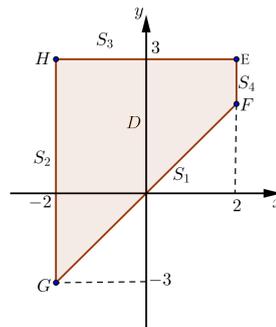


Figura 45 – D é o quadrilátero de vértices E, F, G e H .

É fácil ver que o conjunto D é fechado e limitado e como a função f dada é contínua em D , o Teorema 5 garante a existência de um mínimo e um máximo absoluto de f em D . Vamos então dividir o problema em três partes, a fim de determinar os extremantes de f :

Parte a) Determinar os pontos críticos de f no interior do conjunto D :

$$\nabla f(x, y)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (3x^2 - 3, -3y^2 + 12) = (0, 0) \iff 3x^2 - 3 = 0$$

e $-3y^2 + 12 = 0$, o que nos dá $x = \pm 1$ e $y = \pm 2$, ou seja, os pontos críticos de f são $(1, 2)$, $(1, -2)$, $(-1, 2)$ e $(-1, -2)$. Mas só os pontos $(1, 2)$ e $(-1, 2)$ estão no interior do conjunto D com $f(1, 2) = 14$ e $f(-1, 2) = 18$.

Parte b) Determinar os pontos extremantes de f na fronteira de D .

Observando a representação geométrica de D , podemos escrever que a união de $S_1 = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $S_2 = \{(-2, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq y \leq 3\}$, $S_3 = \{(x, 3) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2\}$ e $S_4 = \{(2, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq y \leq 3\}$ nos dá a fronteira de D , então:

- Para $S_1 = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2\}$ temos, $f(x, x) = x^3 - 3x - x^3 + 12x = 9x$, com $-2 \leq x \leq 2$ e seu máximo ocorre em $x = 2$ nos dando $f(2, 2) = 18$ e seu mínimo ocorre em $x = -2$ nos dando $f(-2, -2) = -18$.
- Para $S_2 = \{(-2, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq y \leq 3\}$ temos, $f(-2, y) = -8 + 6 - y^3 + 12y = -y^3 + 12y - 2$ com $-2 \leq y \leq 3$ e, analisando essa função contínua de uma única variável no intervalo fechado e limitado dado, podemos concluir que seu máximo ocorre em $y = 2$ nos dando $f(-2, 2) = 14$ e seu mínimo ocorre em $y = -2$ nos dando $f(-2, -2) = -18$.
- Para $S_3 = \{(x, 3) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2\}$ temos, $f(x, 3) = x^3 - 3x - 27 + 36 = x^3 - 3x + 9$ com $-2 \leq x \leq 2$ e, analisando essa função contínua de uma única variável no intervalo fechado e limitado dado, podemos concluir que seu máximo ocorre em $x = -1$ e $x = 2$ nos dando $f(-1, 3) = f(2, 3) = 11$ e seu mínimo ocorre em $x = 1$ e $x = -2$ nos dando $f(1, 3) = f(-2, 3) = 7$.
- Para $S_4 = \{(2, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq y \leq 3\}$ temos, $f(2, y) = 8 - 6 - y^3 + 12y = -y^3 + 12y + 2$ com $2 \leq y \leq 3$ e, analisando essa função contínua de uma única variável no intervalo fechado e limitado dado, podemos concluir que seu máximo ocorre em $y = 2$ nos dando $f(2, 2) = 18$ e seu mínimo ocorre em $y = 3$ nos dando $f(2, 3) = 11$.

Parte c) Comparar todos os extremantes de f em D encontrados na parte a e na parte b.

Fazendo a comparação entre os valores de f em D obtidos na parte a e na parte b, podemos concluir que os pontos de máximos absolutos de f em D são os pontos $(-1, 2)$ e $(2, 2)$ que fornecem o valor máximo absoluto $f(-1, 2) = f(2, 2) = 18$ e o ponto de mínimo absoluto de f em D é o ponto $(-2, -2)$ que fornece o valor mínimo absoluto $f(-2, -2) = -18$.

Exemplo 59. Encontre os valores de máximo e de mínimo de $f(x, y) = x^2 - y^2$ em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) = x^2 + y^2 = 1\}$

Solução: Inicialmente vamos representar geometricamente o conjunto D dado.

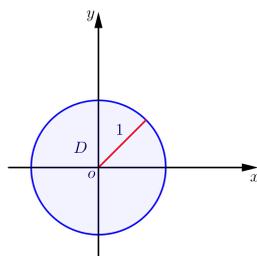


Figura 46 – D é a circunferência de centro na origem e raio unitário.

É fácil ver que o conjunto D é fechado e limitado, e, como a função f dada é contínua em D , pois f é polinomial, o Teorema 5 garante a existência de um mínimo e de um máximo absoluto de f em D . Agora observe que para descrevermos a fronteira do conjunto D dado teremos que recorrer às parametrizações e à medida que nos deparamos com conjuntos fechados e limitados com fronteiras diversas o grau de dificuldade para descrever tais fronteiras podem se tornar imensos, por isso, vamos enunciar agora um método que nos permitirá analisar os possíveis extremantes de uma função contínua em um conjunto fechado e limitado onde não será necessário apresentarmos a parametrização de sua fronteira e posteriormente solucionaremos o exemplo 59 com o auxílio deste método.

4.6 Método dos Multiplicadores de Lagrange

De acordo com (BORTOLOZZI, 2002) o Método dos Multiplicadores de Lagrange é enunciado no Teorema 6.

Teorema 6 (Multiplicadores De Lagrange). *Sejam f e h funções de classe C^1 de duas variáveis e seja $p = (p_1, p_2)$ uma solução (local) do problema de otimização*

$$\boxed{\text{Maximizar } f(x_1, x_2) \text{ Sujeito a } (x_1, x_2) \in D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x_1, x_2) = c\}.$$

Suponha que $p = (p_1, p_2)$ satisfaça a seguinte condição de regularidade:

$$\nabla h(p)^T = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(p_1, p_2), \frac{\partial h}{\partial x_2}(p_1, p_2) \right) \neq (0, 0)$$

Então existe um número real λ (o multiplicador de Lagrange) tal que $(p, \lambda) = (p_1, p_2, \lambda)$ é o ponto crítico do lagrangeano

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda[h(x_1, x_2) - c]$$

que é equivalente a resolver o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(p_1, p_2, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(p_1, p_2, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(p_1, p_2, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Observação: O Teorema dos Multiplicadores De Lagrange é mais geral do que este apresentado no nosso texto, que possui apenas uma restrição em igualdade.

Vamos retomar agora a solução do exemplo 59 fazendo uso do método dos Multiplicadores de Lagrange. Para aplicar o método dos Multiplicadores de Lagrange na solução do exemplo 59 vamos dividir a resolução em algumas partes:

Parte a) As funções f e h são funções polinomiais, portanto, são de classe C^1 .

Parte b) Condição de regularidade do método:

$$\nabla h(x, y)^T = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \right) = (2x, 2y) \neq (0, 0) \forall (x, y) \in D.$$

Parte c) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y)^T = \lambda \cdot \nabla h(x, y) \\ h(x, y) = x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

que é equivalente a,

$$\begin{cases} (2x, -2y) = \lambda \cdot (2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

que também é equivalente a,

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x & \text{(I)} \\ -2y = \lambda 2y & \text{(II)} \\ x^2 + y^2 = 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

Da equação (I) temos $x = 0$ ou $\lambda = 1$. Substituindo $x = 0$ em (III) teremos $y = \pm 1$ e fazendo $\lambda = 1$ em (II) teremos $y = 0$ e assim a equação (III) fornecerá $x = \pm 1$.

Parte d) Determinar os valores extremantes de f em D :

Da parte c temos que os pontos extremantes de f em D são $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e

$(-1, 0)$ com $f(0, 1) = f(0, -1) = -1$ sendo seu mínimo absoluto em D e $f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$ sendo seu máximo absoluto em D .

Note que o sistema resolvido na parte c é sempre do tipo $\nabla f(x) = \lambda \cdot \nabla h(x)$ e $h(x) = c$.

Exemplo 60. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xy - 4z$. Ache o máximo e o mínimo de f em $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Solução: O conjunto D dado é uma esfera de centro na origem e raio 2 e, portanto, D é fechado e limitado e como a função f dada é contínua em D pois f é polinomial, o Teorema 5 garante a existência de um mínimo e de um máximo absoluto de f em D .

Como o método dos multiplicadores de Lagrange pode ser facilmente estendido para funções de classe C^1 com 3 variáveis, procederemos a resolução deste exemplo de modo análogo à aplicação do método para funções de duas variáveis e, para tanto, vamos dividir a resolução em algumas partes:

Parte a) As funções f e h são funções polinomiais, portanto, são de classe C^1 .

Parte b) Condição de regularidade do método:

$$\begin{aligned} \nabla h(x, y, z)^T &= \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) \right) \\ &= (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0), \forall (x, y, z) \in D. \end{aligned}$$

Parte c) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z)^T = \lambda \cdot \nabla h(x, y, z) \\ h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

que é equivalente a,

$$\begin{cases} (2x - 4y, 2y - 4x, 4z - 4) = \lambda \cdot (2x, 2y, 2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

que também é equivalente a,

$$\begin{cases} 2x - 4y = \lambda 2x & (1) \\ 2y - 4x = \lambda 2y & (2) \\ 4z - 4 = \lambda 2z & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 & (4) \end{cases}$$

Multiplicando (1) por y e (2) por x , teremos:

$$\begin{cases} 2xy - 4y^2 = \lambda 2xy & (5) \\ 2xy - 4x^2 = \lambda 2xy & (6) \\ 4z - 4 = \lambda 2z & (7) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 & (8) \end{cases}$$

De (5) e (6), temos $2xy - 4y^2 = 2xy - 4x^2 \iff -4y^2 = -4x^2 \iff y = \pm x$.

Multiplicando (1) por z e (3) por x , teremos:

$$\begin{cases} 2xz - 4yz = \lambda 2xz & (9) \\ 2y - 4x = \lambda 2y & (10) \\ 4xz - 4x = \lambda 2xz & (11) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 & (12) \end{cases}$$

De (9) e (11), temos $2xz - 4yz = 4xz - 4x \iff 2xz + 4yz = 4x \iff z(2x + 4y) = 4x$ e fazendo $y = x \neq 0$ teremos $z = \frac{2}{3}$ e para $y = -x \neq 0$ teremos $z = -2$. Substituindo $y = x \neq 0$ e $z = \frac{2}{3}$ em (12) temos :

$$x^2 + x^2 + \frac{4}{9} = 4 \iff 2x^2 = \frac{32}{9} \iff x^2 = \frac{16}{9} \iff x = \pm \frac{4}{3},$$

o que nos dá os pontos $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Agora, substituindo $y = -x \neq 0$ e $z = -2$ em (12) temos $x^2 + x^2 + 4 = 4 \iff x = 0$, o que nos dá o ponto $(0, 0, -2)$.

Para o caso em que $x = \pm y = 0$, substituindo em (12) temos $0 + 0 + z^2 = 4 \iff z = \pm 2$, o que nos dá o novo ponto $(0, 0, 2)$.

Parte d) Determinar os extremantes de f em D :

Calculando os valores de f nos possíveis extremantes temos,

$$f\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{48}{9}, \quad f(0, 0, 2) = 0 \quad \text{e} \quad f(0, 0, -2) = 16$$

o que nos permite concluir que $f(0, 0, -2) = 16$ é o valor máximo de f em D e que

$$f\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{48}{9}$$

é o valor mínimo de f em D .

Exemplo 61. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0, 0)$.

Solução: Primeiramente, vamos escrever a função que calcula a distância d entre um ponto qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e a origem $(0, 0)$.

Temos $d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, e, para efeito de simplicidade dos cálculos, podemos minimizar a função $d^2 = f(x, y) = x^2 + y^2$. Já que a função x^2 é crescente para valores positivos (onde a distância é a menor possível seu quadrado é o menor possível), considerando que os pontos (x, y) devem pertencer a elipse, podemos escrever o conjunto da restrição como sendo:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 3\}$$

Como o conjunto D é fechado e limitado por se tratar de uma elipse e como a função f que calcula a distância é contínua em D pois f é polinomial, o Teorema 5 garante a existência de um mínimo e de um máximo absoluto de f em D .

Para aplicar o método dos multiplicadores de Lagrange, vamos dividir a resolução do problema em algumas partes:

Parte a) As funções f e h são funções polinomiais ou produto de funções polinomiais, portanto, são de classe C^1 .

Parte b) Condição de regularidade do método:

$$\nabla h(x, y)^T = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \right) = (2x + y, 2y + x) \neq (0, 0), \forall (x, y) \in D.$$

Parte c) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y)^T = \lambda \cdot \nabla h(x, y) \\ h(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

que é equivalente a,

$$\begin{cases} (2x, 2y) = \lambda \cdot (2x + y, 2y + x) \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

que também é equivalente a,

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x + \lambda y & (1) \\ 2y = \lambda 2y + \lambda x & (2) \\ x^2 + xy + y^2 = 3 & (3) \end{cases}$$

Para $\lambda = 0$ teremos $x = y = 0$ o que não satisfaz a equação (3). Tomando $\lambda \neq 0$ e multiplicando a equação (1) por $\frac{y}{\lambda}$ e a equação (2) por $\frac{x}{\lambda}$, teremos $\frac{2xy}{\lambda} = 2xy + y^2$ e $\frac{2xy}{\lambda} = 2xy + x^2$, o que nos leva a concluir que

$2xy + y^2 = 2xy + x^2 \iff y^2 = x^2 \iff y = \pm x$. Fazendo $y = x$ na equação (3) temos,

$x^2 + x^2 + x^2 = 3 \iff 3x^2 = 3 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$, o que nos dá os possíveis extremantes $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Agora, tomando $y = -x$ na equação (3) temos $x^2 - x^2 + x^2 = 3 \iff x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}$, o que nos dá neste caso os possíveis extremantes $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Parte d) Determinar os extremantes de f em D :

Calculando os valores de f nos possíveis extremantes temos $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$ e $f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 6$ o que nos permite concluir que os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos de $(0, 0)$ são os pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

5 Método do Gradiente e Método de Newton para otimização irrestrita

Neste capítulo abordaremos dois métodos de extrema importância para se minimizar funções reais de várias variáveis sem restrições. Diferente do que foi feito no capítulo 4, aqui estaremos interessados em algoritmos que possam nos levar ao mínimo de funções quando não se consegue determinar de maneira direta a solução do sistema $\nabla f(x)^T = 0$. Considere, por exemplo, o caso em que se precisa resolver o sistema $\nabla f(x)^T = 0$ para $\nabla f(x)^T = \cos(x) - x^2$. Note que, neste caso, determinar um valor de x tal que $\cos(x) - x^2 = 0$ não é uma tarefa elementar para se realizar de maneira direta.

Para tal abordagem, vamos inicialmente apresentar algumas definições, proposições, teoremas e exemplos úteis para o nosso estudo.

Definição 27 (Matriz simétrica). *Seja G uma matriz $n \times n$, dizemos que G é uma matriz simétrica se G for identicamente igual a G transposta.*

Definição 28 (Matriz Hessiana $n \times n$).

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

é a matriz hessiana da função f no ponto x .

Definição 29 (Matriz definida positiva). *Seja G uma matriz $n \times n$ e seja ainda $Q(x) = x^T G x$ a forma quadrática associada a G . Dizemos que a matriz G é definida positiva se $Q(x) = x^T G x > 0$ sempre que $x \in \mathbb{R}^n$ for não nulo e, neste caso, escremos $G > 0$. O exemplo 62 ilustra a definição 29.*

Exemplo 62. *Verifique que a matriz $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ é definida positiva.*

Solução: De fato, G é definida positiva, pois, $Q(x) = (x_1 \ x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2x_1 \ 2x_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 2x_2^2 > 0$ sempre que $(x_1, x_2) \neq 0$.

Agora, vamos definir as direções de descida, mas antes, para melhor compreender a definição, imagine o caso em que $x \in \mathbb{R}^n$ resulta em $\nabla f(x)^T \neq 0$. Do Teorema 3, sabemos que neste caso x não será um minimizador local de f em \mathbb{R}^n . Logo, deve existir um $b \in \mathbb{R}^n$ na vizinhança de x , de tal modo que $f(b) < f(x)$. E, para determinarmos b , iremos tentar encontrar uma direção $d \in \mathbb{R}^n$ a partir de x de tal modo que os valores de f decresçam.

Definição 30 (Direção de descida). *Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $x \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}^n$ uma direção não nula, podemos dizer que d é uma direção de descida para f , partindo de x , sempre que existir $\delta > 0$ com $f(x + \alpha d) < f(x)$, para todo $\alpha \in (0, \delta)$.*

Apesar da definição 30 ser muito clara, ela não nos oferece uma maneira prática para determinarmos a direção não nula d . Para tanto, vamos enunciar um teorema que nos dará uma condição suficiente para que d seja, de fato, uma direção de descida.

Teorema 7. *Se o produto $\nabla f(x)^T \cdot d$ for negativo, então, d será uma direção de descida para f partindo de x .*

Prova: Ver (RIBEIRO; KARAS, 2014)

No capítulo 4, enunciamos as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem para funções $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e enunciamos também as condições suficientes de otimalidade de segunda ordem para se otimizar funções de duas variáveis. Agora, vamos apresentar as condições necessárias e as condições suficientes de otimalidade de segunda ordem para se minimizar $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

De acordo com (FRIEDLANDER, 2004), teremos:

Proposição 3 (**Condições necessárias de otimalidade de segunda ordem**). *Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Se x^* é um minimizador local de f em \mathbb{R}^n , então:*

$$(i) \quad \nabla f(x^*) = 0;$$

$$(ii) \quad \nabla^2 f(x^*) \geq 0;$$

Proposição 4 (**Condições suficientes de otimalidade de segunda ordem**). *Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Se $x^* \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x^*) = 0$ e $\nabla^2 f(x^*) > 0$, então, x^* é um minimizador local de f em \mathbb{R}^n .*

Note que o caso $n = 2$ para esta condição já foi tratado no capítulo 4.

Como foi dito no início deste capítulo, agora estamos interessados em algoritmos para resolver o problema:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } f(x) \\ \text{sujeito a } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

mesmo nos casos em que as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem não sejam obtidas de maneira algébrica.

5.1 Método do Gradiente

Este método usa a direção de descida $d_k = -\nabla f(x^k)$ e isso se justifica, uma vez que, $\nabla f(x^k)$ aponta para a direção de maior crescimento de f a partir de x . Teremos, então, $-\nabla f(x^k)$ apontando para a direção de maior decréscimo de f a partir de x , o que nos ajuda em nosso objetivo de minimizar f . Para saber mais sobre esse fato, pode-se consultar a referência (STEWART, 2006).

O algoritmo do método do gradiente, de acordo com a referência (FRIEDLANDER, 2004), será o mostrado na sequência.

Dado x^k em \mathbb{R}^n com $\nabla f(x^k) \neq 0$, devemos executar os seguintes passos :

Passo 1: Determinar $d_k = -\nabla f(x^k)$

Passo 2: Determinar λ_k que minimiza $f(x^k + \lambda d_k)$ com $\lambda \geq 0$

Passo 3: Impor $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d_k$

Observação: O Passo 2 é denominado busca linear exata e pode não ter solução. O número λ_k nos indica o tamanho do passo que devemos dar em direção a $d_k = -\nabla f(x^k)$.

Para os casos em que a função objetivo é quadrática, ou seja, f é dada por $f(x) = \frac{1}{2}x^T Gx + b^T x + c$ onde G é a matriz definida positiva, pode-se provar que a sequência gerada pelo algoritmo do método do gradiente converge para x^* em \mathbb{R}^n que será o minimizador global de f independente da aproximação inicial x^0 .

Veja o exemplo resolvido 63, em que foi usado o método do gradiente para a otimização irrestrita da função objetivo.

Exemplo 63. Faça uma iteração do método do gradiente para minimizar a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 + x_1 + x_2$ a partir de $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solução: Inicialmente, vamos determinar $\nabla f(x)$.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 + 3x_2 + 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 1 \end{pmatrix} \text{ o que nos dá } \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Assim, a direção de descida } d_0 \text{ será } d_0 = -\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Agora, para encontrarmos $\lambda_0 = a$, devemos determinar o minimizador de $f(x^0 + ad_0)$ com $a \geq 0$.

Temos que $x^0 + ad_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a \\ 1 - 5a \end{pmatrix}$. Assim, $g(a) = f(x^0 + ad_0) = 3(-4a)^2 + 3(-4a)(1 - 5a) + 2(1 - 5a)^2 - 4a - 1 - 5a = 48a^2 - 12a + 60a^2 + 2 - 20a + 50a^2 - 4a + 1 - 5a = 158a^2 - 41a + 3$. Como g é uma função quadrática, podemos verificar facilmente que $a = \frac{41}{316}$ é o valor que minimiza tal função. Com isso, teremos $x^1 = x^0 + \lambda_0 d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{41}{316} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Note que $f(x^0) = 3$ e que $f(x^1) \cong 0,3402$, donde podemos observar que o valor da f em x^1 é muito menor do que o valor da f no ponto inicial x^0 .

Observe também que não estamos interessados aqui em um critério de parada para o algoritmo. Somente estamos exemplificando uma iteração do mesmo.

5.2 Método de Newton

O Método de Newton é uma ferramenta muito útil e eficaz quando se precisa resolver o problema irrestrito

$$\begin{cases} \text{Minimizar } f(x) \\ \text{sujeito a } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

quando se tem a aproximação inicial x^0 suficientemente próxima da solução local ótima x^* .

As condições necessárias de otimalidade de primeira ordem nos diz que devemos solucionar o sistema $\nabla f(x) = 0$ a fim de determinar os candidatos que podem minimizar f .

Se considerarmos inicialmente um problema mais geral como resolver o sistema $F(x) = 0$ em que F é uma função de classe C^1 de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n , sabemos que resolver o

sistema $F(x) = 0$ geralmente não é uma tarefa simples se tentarmos resolvê-lo de forma direta. Sendo assim, vamos buscar a solução de $F(x) = 0$ através de processos iterativos.

Com o auxílio do polinômio de Taylor de primeira ordem, podemos escrever o sistema linear $F(x^0) + J_F(x^0)(x - x^0) = 0$ para uma estimativa inicial x^0 . Neste sistema $J_F(x^0)$ denota a matriz Jacobiana de F em x_0 onde a j -ésima linha de $J_F(x_0)$ é o $\nabla_{F_j}(x_0)^T$.

Poderemos ainda escrever $x^1 = x^0 - (J_F(x^0))^{-1} \cdot F(x^0)$ caso $J_F(x^0)$ seja inversível, o que nos dá a primeira iteração do método de Newton para se determinar x tal que $F(x) = 0$. A Figura 47 ilustra esta primeira iteração.

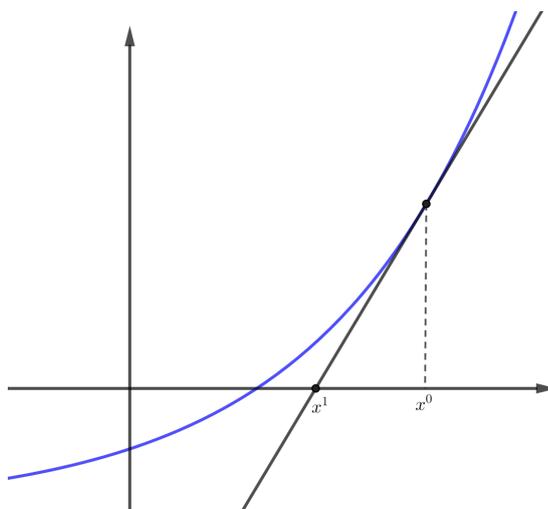


Figura 47 – Primeira iteração.

Agora, se considerarmos o problema de minimizar f fazendo $F = \nabla f$, teremos $x^1 = x^0 - (\nabla^2 f(x^0))^{-1} \nabla f(x^0)$ como sendo a primeira iteração do Método de Newton para se solucionar o sistema $\nabla f(x) = 0$.

Sendo assim, o algoritmo do método de Newton será dado do seguinte modo:

Dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$

$k = 0$

Repita enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$

Defina $d_k = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$

Determine o tamanho do passo $t_k > 0$.

$$\text{Impor } x^{k+1} = x^k + t_k d_k$$

$$k = k + 1$$

Neste algoritmo, t_k é o tamanho do passo que poderá ser determinado por $t_k = 1$ ou pela busca inexata que é conhecida como condição de Armijo. Esta condição basicamente exige mais do que uma simples redução da função objetivo f , ela impõe que a redução de f deve ser proporcional ao tamanho do passo t .

É possível provar também que a sequência gerada pelo algoritmo de Newton é convergente localmente se tomarmos x^0 suficientemente próximo de x^* minimizador local de f , com f de classe C^3 e $\nabla^2 f(x^*) > 0$.

Proposição 5. *Seja f uma função quadrática com matriz hessiana G definida positiva, seja ainda $x^0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. Tomando a direção $d \in \mathbb{R}^n$ com $d = -G^{-1}(Gx^0 + b)$ teremos que $x^* = x^0 + d$ será o minimizador global de f em \mathbb{R}^n .*

Prova: Ver ([FRIEDLANDER, 2004](#)).

Vejamos agora um exemplo resolvido da aplicação do Método de Newton em otimização irrestrita.

Exemplo 64. *Seja $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(1 - x_1)^2$. Qual é o minimizador de f ? Faça uma iteração do Método de Newton para minimizar f a partir de $x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. É um bom passo? Antes de decidir, calcule $f(x^0)$ e $f(x^1)$.*

Solução: Inicialmente vamos determinar o $\nabla f(x)$.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1(x_1^2 - x_2) + x_1 - 1 \\ x_2 - x_1^2 \end{pmatrix}$$

Agora, a hessiana de f será

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1^2 - 2x_2 + 1 & -2x_1 \\ -2x_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, $\nabla f(x^*) = 0 \iff x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. E, conseqüentemente, $\nabla^2 f(x^*) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz definida positiva, donde podemos concluir que $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é um mínimo local da f .

Agora vamos fazer uma iteração do Método de Newton, a partir de $x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Temos, } d_0 = -(\nabla^2 f(x^0))^{-1} \nabla f(x^0) = - \begin{pmatrix} 21 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

o que nos dá o ponto $x^1 = x^0 + d_0 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}$. Avaliando o valor de f em x^0 e x^1 , temos $f(x^0) = \frac{5}{2}$ e $f(x^1) = \frac{401}{1250}$, o que nos diz que a primeira iteração do Método de Newton

reduziu o valor da f mesmo x^1 estando mais afastado da solução x^* .

Observe que neste exemplo também não estamos interessados em estabelecer um critério de parada para o algoritmo do Método de Newton. De modo geral, esse critério de parada é utilizado de forma a finalizar o algoritmo quando, por exemplo, a redução de f entre uma iteração e outra não for significativa, ou seja, $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \epsilon$ para algum ϵ positivo.

6 Considerações Finais

À guisa de conclusão do trabalho serão feitas algumas considerações sobre as possibilidades para o estudo de otimização no Ensino Médio. Primeiro, será destacada a relevância do professor construir junto com os alunos as regiões factíveis de problemas relacionados à programação linear, pois, dessa forma, será possível fixar conceitos básicos como, por exemplo, inequações, equações de retas e a própria construção da reta no plano.

Ao utilizar o software GEOGEBRA, o aluno terá sua percepção intuitiva representada de maneira dinâmica. Além disso, determinar uma região no plano através de restrições lineares, com o intuito de se resolver problemas de programação linear, trará ao aluno um objetivo motivador que é o de otimizar a função objetivo dentro de um problema aplicável à sua realidade, o que torna a atividade muito mais interessante, prática e prazerosa do que simplesmente determinar tal região sem propósito algum de maneira mecânica e não significativa.

A sequência didática apresentada visa englobar conteúdos a serem aprofundados como mais aplicações de função quadrática e desigualdade das médias a serem trabalhadas e pensadas de maneira interdisciplinar no contexto da otimização.

Por fim, o trabalho compilou a teoria mais essencial sobre otimização para facilitar a organização didática do professor de matemática do Ensino Médio para trabalhar com a temática. É possível também inferir que essa possibilidade de trabalho com otimização no Ensino Regular, engendre provocações, interrogações, curiosidade nos alunos a respeito do assunto e que talvez os aproxime do meio acadêmico.

Referências

- BORTOLOZZI, H. J. Cálculo diferencial a várias. variáveis: uma introdução à teoria de otimização. *Rio de Janeiro: Edições Loyola/Editora PUC*, 2002.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. História da matemática. 3^a. Edição. São Paulo: Blucher, 2010.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Unicamp, 2004.
- FRIEDLANDER, A. *Elementos de programação não-linear*. Campinas: Unicamp, 2004.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. Rio de Janeiro: LTC, 1987. v. 1.
- _____. *Um curso de cálculo*. Rio de Janeiro: LTC, 2010. v. 2.
- HOBBSAWM, E. J. A era das revoluções: Europa 1789-1848. 25. *SP: Paz e Terra*, 2010.
- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, C. A. *A matemática do ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2001. v. 1.
- _____. *A matemática do ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2.
- LUENBERGER, D. G.; YE, Y. *Linear and nonlinear programming*. New York: Springer, 2008.
- MUNDIM, K. C.; DELAVY, V. C. Otimização global de processos usando o método generalized simulated annealing. *Revista Processos Químicos / SENAI*, v. 2, n. 4, 2008.
- PERIN, C. Introdução à programação linear. *Coleção Imecc-Textos Didáticos*, v. 2, 2001.
- PUCCINI, A. L. *Introdução à programação linear*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972.
- RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. *Otimização Contínua: Aspectos Teóricos e Computacionais*. São Paulo: Cengage Learning, 2014.
- RODRIGUES, C. I.; REZENDE, E. Q. F. Atividades com o programa computacional geogebra como material de apoio às aulas de matemática. In: . Campinas: LEM, 2015.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. v. 2.
- _____. *Cálculo*. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1.