UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

ANDRÉ PALOMO

PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE DO MÉTODO GRÁFICO

CAMPINAS
2018

ANDRÉ PALOMO

PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE DO MÉTODO GRÁFICO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: ROBERTO ANDREANI

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno André Palomo, e orientada pelo Prof. Dr. Roberto Andreani.

Campinas
2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P186p	Palomo, André, 1985- Programação linear no ensino médio : uma análise do método gráfico / André Palomo. – Campinas, SP : [s.n.], 2018. Orientador: Roberto Andreani. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Programação linear. 2. Desigualdades (Matemática) - Métodos gráficos. 3. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. I. Andreani, Roberto, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Linear programming in high school : an analysis of the graphical method
Palavras-chave em inglês:
Linear programming
Inequalities (Mathematics)
Mathematics (High school) - Study and teaching
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Roberto Andreani [Orientador]
Claudina Izepe Rodrigues
Cintya Wink de Oliveira Benedito
Data de defesa: 02-02-2018
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado profissional defendida em 02 de fevereiro de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Prof(a). Dr(a). CINTYA WINK DE OLIVEIRA BENEDITO

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Resumo

Neste trabalho são apresentados inicialmente o conteúdo de inequações polinomiais de primeiro grau. Em seguida, apresentaremos a Programação Linear, com enfoque no Método Gráfico, muito útil para exploração no Ensino Médio, pois trabalha apenas com duas variáveis. Posteriormente apresentaremos algumas aplicações envolvendo inequações e o Método Gráfico. Como apoio tecnológico, utilizaremos o software Geogebra, utilizado para a montagem de uma aplicação didática sugerida nesse trabalho.

Palavras-chave: Programação Linear - Otimização, Inequação Linear - Desigualdade,Método Gráfico.

Abstract

In this work the contents of first degree polynomial inequalities are presented initially. Next, we will present Linear Programming, focusing on the Graphic Method, very useful for exploration in High School, because it works with only two variables. Subsequently we will present some applications involving inequalities and the Graphic Method. As technological support, we will use the software Geogebra, used for the assembly of a didactic application suggested in this work.

Keywords: Linear Programming - Optimization, Linear Inequality - Inequality, Graphic Method.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Esta dissertação tem por objetivo apresentar uma maneira diferente de abordagem do conteúdo de inequações e sistemas lineares apresentado no ensino médio. A Programação Linear, conteúdo abordado do ensino superior pode ser uma ferramenta bastante interessante de aprofundar as inequações, pois o estudante poderá entender uma pequena parte de aplicações dentro da matemática e, assim, ter uma motivação maior pela matéria.

A Programação Linear, quando comparada com outras linhas de desenvolvimento e pesquisa da matemática, é relativamente nova e, mesmo assim, tornou-se muito importante na programação matemática pela ampla aplicabilidade de forma bastante prática e em diversas frentes, como as indústrias e a economia.

Um dos primeiros nomes que surgem quando falamos em Programação Linear é exatamente do russo Leonid V. Kantorovich (1912-1986). Kantorovich, matemático e economista, graduou-se na Universidade de Leningrado. Em 1939 publicou um trabalho sobre planejamento da produção, onde expôs entre outras coisas, o uso de equações lineares. Mas na época seu livro intitulado Métodos Matemáticos de Organização e Planejamento da Produção não teve o devido reconhecimento. Mais tarde, em 1975, recebeu o Prêmio Nobel de Economia, pela contribuição à teoria da utilização ótima de recursos.

Outro grande nome da história da Programação Linear e talvez o mais importante é, sem dúvida alguma, o matemático americano George Bernard Dantzig(1914-2005). Filho do também matemático Tobias Dantzig(1884-1956), teve desde pequeno o incentivo do pai aos estudos. Durante a Segunda Guerra Mundial, a Força Aérea Americana teve um grupo de trabalho do qual Dantzig fez parte. Tendo como objetivo apoiar decisões de operações e usando como base o problema de otimizar uma função linear, Dantzig desenvolveu uma técnica para se determinar numericamente, a solução ótima de um modelo de Programação Linear, conhecido como Método Simplex. Essa ferramenta é utilizada até hoje em otimizações como, por exemplo, Pesquisa Operacional. Pela sua contribuição a matemática, Dantzig recebeu vários prêmios, entre eles a Medalha Nacional de Ciências e o Prêmio Teoria John Von Neumann, em 1975.

No Capítulo 1, apresentaremos uma parte teórica sobre inequações e sistemas lineares, para que o leitor tenha uma base para a Programação

Linear.

Nos Capítulos 2 e 3, nós apresentaremos a parte teórica da Programação Linear. Começaremos com o Método Simplex, um método muito interessante de ser aplicado e, como o próprio nome diz, é um método simples e possível de ser aplicado no ensino médio. Em seguida, focaremos no Método Gráfico, que será o principal assunto dessa pesquisa, por se tratar de um método prático e com ganho visual. Plotando a Função-Objetivo e as restrições num mesmo gráfico, obtemos de forma prática a solução ótima.

No Capítulo 4, apresentaremos algumas aplicações tendo como base o Método Gráfico, entre elas uma sequência didática utilizando o *software Geogebra*, que será util para aplicação em sala de aula.

Capítulo 1

Inequações e Sistemas Lineares no Ensino Médio

Dando início a nossa pesquisa, é bastante importante nós apresentarmos os principais aspectos das inequações e dos sistemas lineares, limitando o conteúdo a parte referente ao Ensino Médio. Dessa maneira poderemos trabalhar mais adiante parte do conteúdo de Programação Linear dando ao leitor a possibilidade de entendimento desse assunto normalmente trabalhado em alguns cursos no ensino superior. Começaremos com algumas definições relativas às funções, depois as inequções e, por fim, sistemas lineares.

1.1 Função

Segundo Iezzi, em [5], dados dois conjuntos não vazios A e B, $A, B \subset \mathbb{R}$, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de **função de A em B**.

O conjunto A é chamado **domínio** de f , e o conjunto B é chamado **contradomínio** de *f*. Chama-se **conjunto imagem de f** o subconjunto do contradomínio constituído pelos elementos y que são imagens de algum x $\in$A.

Se, para quaisquer valores a e b de um conjunto A (contido no domínio), com $a < b$, temos *f(a)* $<$ *f(b)*, então f é crescente em A.

Se, para quaisquer valores a e b de um conjunto A, com $a < b$, temos *f(a)* $>$ *f(b)*, então f é decrescente em A.

De modo geral, se f é um conjunto de pares ordenados (x, y) que caracteriza uma função de A em B, indicamos:

$$f\text{: A} \longrightarrow B$$

Se, nessa função, $y \in B$ é imagem de $x \in A$, indicamos:

$$y = f(x)$$

Para exemplificar, vamos observar a tabela abaixo, onde o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{9, 18, 27, 36, 45\}$ nos mostram uma relação que é uma função, pois a todo elemento de A corresponde um único elemento de B, sendo A o **domínio** dessa função e o conjunto B o **contradomínio** dessa função.

$x \in A$	$y \in B$
1	9
2	18
3	27
4	36
5	45

Figura 1.1: Função de A em B

Ou seja, temos: $f(1) = 9$; $f(2) = 18$; $f(3) = 27$; $f(4) = 36$; $f(5) = 45$.

1.2 Inequações

Segundo Iezzi, em [4], dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$ cujos domínios são respectivamente $D_1 \subset \mathbb{R}$ e $D_2 \subset \mathbb{R}$, chamamos *inequação* na incógnita x, a qualquer uma das sentenças abertas abaixo:

$$f(x) > g(x)$$
$$f(x) \geq g(x)$$
$$f(x) < g(x)$$
$$f(x) \leq g(x)$$

Exemplos:

1) $4x - 3 > 2x$ é uma inequação onde $f(x) = 4x - 3$ e $g(x) = 2x$.

2) $12x - 6 < 4$ é uma inequação onde $f(x) = 12x - 6$ e $g(x) = 4$.

3) $x^2 - 9 \geq \frac{4}{x}$ é uma inequação onde $f(x) = x^2 - 9$ e $g(x) = \frac{4}{x}$.

4) $\sqrt{x - 7} \leq \frac{8}{x-5}$ é uma inequação onde $f(x) = \sqrt{x - 7}$ e $g(x) = \frac{8}{x-5}$.

1.3 Domínio da Inequação

Chamamos de domínio de validade da inequação $f(x) < g(x)$ o conjunto $D = D_1 \cap D_2$, onde D_1 é o domínio da função f e D_2 é o domínio da função

g. É evidente que para todo $x_0 \in D$, estão definidos $f(x_0)$ e $g(x_0)$, isto é:

$$x_0 \in D \iff (\ x_0 \in D_1 \text{ e } x_0 \in D_2) \iff (\ f(x_0) \in \mathbb{R} \text{ e } g(x_0) \in \mathbb{R}).$$

Nos exemplos anteriores, temos:

1)$D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
2)$D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
3)$D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{R}^*$
4)$D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 7\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x \neq 5\} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 7 \ \text{ e } x \neq 5\}$

O número real x_0 é solução da inequação $f(x) > g(x)$ se, e somente se, é verdadeira a sentença $f(x_0) > g(x_0)$.

Exemplo:

O número real 4 é solução da inequação $3x + 2 > x + 1$, pois

$$3 \cdot 4 + 2 > 4 + 1$$

é uma sentença verdadeira.

1.4 Conjunto-Solução

O conjunto S de todos os números reais x tais que $f(x) > g(x)$ é uma sentença verdadeira, chamamos de *conjunto-solução* da inequação.

Exemplo:

A inequação $2x + 1 > x + 3$ tem o conjunto-solução S=$\{ \ x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \ \}$, isto é, para qualquer $x_0 \in S$ a sentença $2x_0 + 1 > x_0 + 3$ é verdadeira.

Se não existir o número real x tal que a sentença $f(x) > g(x)$ seja verdadeira, diremos que a inequação $f(x) > g(x)$ é impossível e indicaremos o conjunto solução por $S = \emptyset$.

Exemplo:

O conjunto-solução da inequação $x + 1 > x + 2$ é $S = \emptyset$, pois não existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que a sentença $x_0 + 1 > x_0 + 2$ seja verdadeira.

Resolver uma inequação significa determinar o seu conjunto solução. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ é solução da inequação $f(x) > g(x)$, então x_0 é tal que $f(x_0) \in \mathbb{R}$ e $g(x_0) \in \mathbb{R}$, isto é, $x_0 \in D$ (domínio da inequação). Assim sendo temos:

$$x_0 \in S \Longrightarrow x_0 \in D$$

ou seja, o conjunto solução é sempre subconjunto do domínio da inequação.
Duas inequações são *equivalentes* em $D \subset \mathbb{R}$ se o conjunto-solução da primeira é igual ao conjunto-solução da segunda.

Exemplos:

1) 9x - 27 $>$ 0 e x - 3 $>$ 0 são *equivalentes* em $\mathbb{R}$, pois o conjunto solução de ambas é S=$\{$x$\in \mathbb{R}|x \geq 3\}$.

2) x $<$ 3 e x^2 $<$ 3 não são *equivalentes* em $\mathbb{R}$, pois x_0 $=$ -4 é solução da primeira inequação, mas não da segunda.

1.5 Inequações-Simultâneas

Segundo Iezzi, em [4], a dupla desigualdade $f(x) < g(x) < h(x)$ se decompõe em duas inequações simultâneas, isto é, equivale a um sistema de duas inequações em x, separadas pelo conectivo e:

$$f(x) < g(x) < h(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) < g(x) \quad (1) \quad \text{e} \quad g(x) < h(x) \quad (2)$$

Indicando com S_1 o conjunto-solução de (1) e S_2 o conjunto-solução de (2), o conjunto-solução da dupla desigualdade é $S = S_1 \cap S_2$.

Exemplo:

Para resolver

$$2 - x < 3x + 2 < 2x + 3$$

Temos que resolver duas inequações:

1) $2 - x < 3x + 2 \Longrightarrow 0 < 4x \Longrightarrow x > 0$

2) $3x + 2 < 2x + 3 \Longrightarrow x < 1$

A intersecção desses dois conjuntos é:

$$S = \{x \in \mathbb{R}|0 < x < 1\}$$

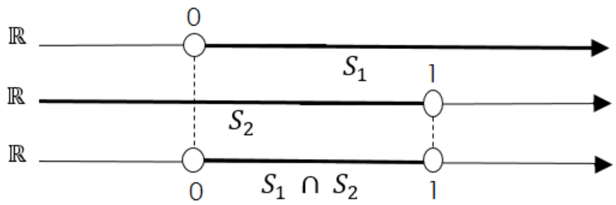

Figura 1.2: Intersecção dos dois conjuntos

1.6 Inequações-Produto

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações

$$f(x) \cdot g(x) > 0$$
$$f(x) \cdot g(x) \geq 0$$
$$f(x) \cdot g(x) < 0$$
$$f(x) \cdot g(x) \leq 0$$

são denominadas *inequações-produto*.
Vejamos, por exemplo, como determinamos o conjunto-solução S da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$
De acordo com a regra de sinais do produto de números reais, um número x_0 é solução da inequação $f(x) \cdot g(x) > 0$ se, e somente se, $f(x_0)$ e $g(x_0)$, não nulos, têm o mesmo sinal.
Assim, são possíveis dois casos:

1) $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$

Se S_1 e S_2 são, respectivamente, os conjuntos-soluções dessas inequações então $S_1 \cap S_2$ é o conjunto solução do sistema.

2) $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$

Se S_3 e S_4 são, respectivamente, os conjuntos-soluções dessas inequações então $S_3 \cap S_4$ é o conjunto solução do sistema.
Daí concluímos que o conjunto-solução da inequação do produto $f(x) \cdot g(x) > 0$ é

$$S = (S_1 \cap S_2) \cup (S_3 \cap S_4)$$

Raciocínio análogo seria feito para a inequação $f(x) \cdot g(x) < 0$.

Exemplo:

Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(x+3)\cdot(3x-1)>0$.

Vejamos uma maneira prática para resolvermos a inequação $(x+3)\cdot(3x-1)>0$ em $\mathbb{R}$.
Fazemos inicialmente o estudo dos sinais das funções $f(x)=x+3$ e $g(x)=3x-1$.

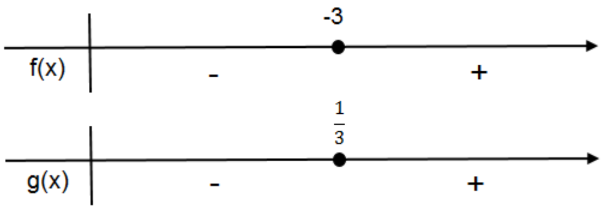

Figura 1.3: Estudo de Sinais

Com o objetivo de evitar cálculos algébricos no estudo dos sinais do produto $f(x)\cdot g(x)$, usaremos o quadro abaixo, que denominamos *quadro-produto* , no qual figuram os sinais dos fatores e o sinal do produto.

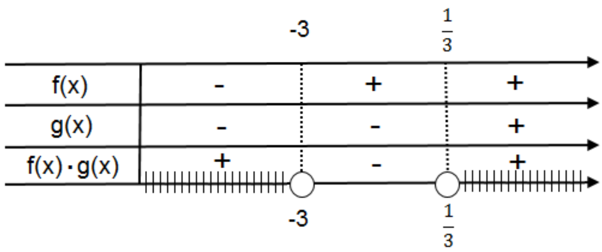

Figura 1.4: Quadro-Produto

$$S=\{x\in\mathbb{R}|x<-3 \quad ou \quad x>\frac{1}{3}\}$$

Dentre as inequações-produto, são importantes as inequações: $[f(x)]^n>0$, $[f(x)]^n<0$, $[f(x)]^n\geq 0$ e $[f(x)]^n\leq 0$.

Para resolvermos estas inequações, vamos lembrar duas propriedades das potências de base real e expoente inteiro:

1)'toda potência de base real e expoente ímpar conserva o sinal da base', isto é,

$$\begin{aligned} a^{(2n+1)} > 0 &\Longleftrightarrow a > 0 \\ a^{(2n+1)} = 0 &\Longleftrightarrow a = 0 \\ a^{(2n+1)} < 0 &\Longleftrightarrow a < 0 \\ &, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

2)'toda potência de base real e expoente par é um número real não negativo', isto é,

$$a^{2n} \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplos:
1) $(4x-3)^3 > 0 \Longrightarrow 4x-3 > 0 \Longrightarrow S = \{x \in \mathbb{R} | x > \frac{3}{4}\}$

2) $(x-7)^4 < 0 \Longrightarrow S = \emptyset$

3) $(13x-8)^6 > 0 \Longrightarrow 13x-8 \neq 0 \Longrightarrow S = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{8}{13}\}$

4) $(7x+3)^5 < 0 \Longrightarrow 7x+3 < 0 \Longrightarrow S = \{x \in \mathbb{R} | x < \frac{-3}{7}\}$

1.7 Inequações-Quociente

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

são denominadas *inequações-quocientes*.
Considerando que as regras de sinais do produto e do quociente de números reais são análogas, podemos então, construir o quadro-quociente de modo análogo ao quadro-produto, observando o fato de que o denominador de uma fração não pode ser nulo.

Exemplo:

Resolvendo em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{5x+3}{4-x} \leq 1, temos$:

$\frac{5x+3}{4-x} \leq 1 \Longrightarrow \frac{5x+3}{4-x} - 1 \leq 0 \Longrightarrow \frac{5x+3-(4-x)}{4-x} \leq 0 \Longrightarrow \frac{6x-1}{4-x} \leq 0$

Fazendo o *quadro-quociente*, temos:

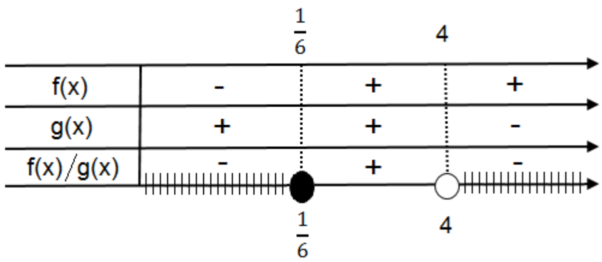

Figura 1.5: Quadro-Quociente

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq \frac{1}{6} \quad ou \quad x > 4\}$$

1.8 Aplicações

É bastante comum encontrarmos aplicações de inequações no ensino médio envolvendo funções custo, receita e lucro, que se aproximam da Programação Linear. Abaixo, colocaremos uma dessas aplicações.

Carlos, um empreendedor nato, resolve ajudar sua irmã a colocar em prática o sonho de vender pastéis. Então, decide identificar quais são os custos e possível receita desse negócio. Para fabricar os pastéis, há um custo fixo mensal de RS 1200,00, representado por CF, que inclui aluguel, conta de luz, impostos, etc. Além desse, há um custo variável (CV), que depende da quantidade de pastéis preparados (x). Estima-se que o custo de produção de cada pastel seja RS 2,00. Assim, o custo total mensal, C (C = CF + CV), é dado por:

$$C(x) = 1200 + 2,0x$$

O preço de venda de cada pastel é RS 5,00 . Vamos supor que o preço de venda independe de outros fatores. A receita bruta dessa pastelaria é definida por:

$$R(x) = 5x$$

ou seja, é dada pelo produto entre o preço unitário de venda e o número de unidades produzidas e vendidas (x). Por fim, o lucro mensal, L (faturamento líquido), desse estabelecimento é uma função de 1° grau dada por:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

$$L(x) = 5x - (1200 + 2,0x) = 3,0x - 1200$$

Vamos observar, a seguir, o gráfico das funções custo e receita.

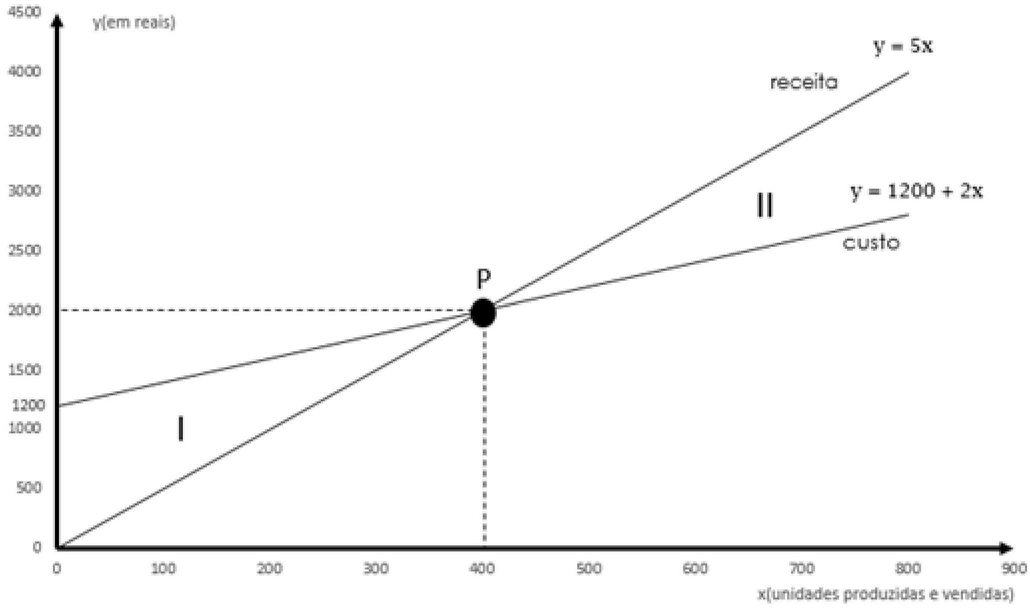

Figura 1.6: Funções Custo e Receita

Verificamos que as retas se intersectam em P(400,2000). O ponto P é chamado ponto de nivelamento (ou ponto crítico), pois em P a receita é suficiente para igualar o custo total, fazendo com que a loja deixe de ter prejuízo. Observe também no gráfico:

região I: $C(x) > R(x), x < 400 \longrightarrow L(x) < 0 \leftrightarrow prejuzo$;

região II: $C(x) < R(x), x > 400 \longrightarrow L(x) > 0 \leftrightarrow lucro$.

1.9 Equações Lineares

As equações lineares são de grande importância para a resolução de problemas em diversas áreas. Vários desses problemas são modelados e resolvidos através de sistemas de equações. Trabalharemos agora o conceito de equações lineares e também sistema de equações.

Definição. Uma **equação linear** em n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n, b$ são constantes reais.

Uma solução para a equação linear acima é um conjunto de números reais $s_1, s_2, ..., s_n$ tais que quando substituímos

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n \ ,$$

a equação é satisfeita.

Exemplos

1) $4x = 9$

Esta equação tem como solução única $x = \frac{9}{4}$, logo o seu conjunto solução é $S = \{\frac{9}{4}\}$.

2) $0x = 9$

Esta equação não tem nenhuma solução, pois não existe nenhum número real que multiplicado por 0 dê 9. Portanto

$$S = \emptyset$$

3) $7x + 3y - 4z = 5$

Isolamos qualquer uma das variáveis, escrevendo elas em função das outras. Por exemplo, isolando x, temos

$$x = \tfrac{5}{7} - \tfrac{3}{7}y + \tfrac{4}{7}z$$

Isto é, escrevemos x em função de y e z. As variáveis y e z não dependem de nenhuma outra, ela são **variáveis livres**. Logo, elas podem assumir quaisquer valores reais arbitrários, digamos

$$y = \alpha \text{ e } z = \beta \ .$$

Portanto, o conjunto solução deste sistema é infinito e tem a forma

$$S = \{ \ \tfrac{5}{7} - \tfrac{3}{7}\alpha + \tfrac{4}{7}\beta, \alpha, \beta \ \ : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Ou seja, toda solução da equação tem essa forma, para algum valor de α e algum valor de β . Por exemplo,

$$x = \tfrac{5}{7}, y = 0, z = 0$$

e

$$x = \tfrac{-9}{7}, y = 14, z = 7$$

são soluções da equação. A primeira corresponde a tomar $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, enquanto que a segunda corresponde a tomar $\alpha = 14$ e $\beta = 7$.

1.10 Sistemas de Equações Lineares

Um sistema de equações lineares nada mais é que um conjunto de equações lineares.

Definição: Um **sistema de** m **equações lineares** em n variáveis é um conjunto de equações lineares da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde a_{ij}, b_k para $i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$ e $k = 1, 22, ..., m$ são constantes reais , chamados de **coeficientes do sistema**.

Usando a notação de matrizes, o sistema linear acima pode ser representado pela equação matricial

$$AX = B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A matriz A é chamada de **matriz do sistema**.

Definição. Uma solução do sistema linear $AX = B$ é uma matriz coluna de números reais

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$$

tal que todas as soluções do sistema são satisfeitas quando substituímos

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$$

ou seja, S satisfaz

$$AS = B$$

O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado **conjunto solução**.

Exemplo. O sistema linear

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 22 \\ 9x_1 + 2x_2 = 24 \end{cases}$$

é representado pela equação matricial

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 24 \end{bmatrix}$$

.

Esse sistema possui uma única solução

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 3$$

1.11 Número de soluções de um Sistema Linear

Quando analisamos um sistema temos três possibilidades: ou ele não tem solução, ou ele tem uma única solução, ou ele tem infinitas soluções. A prova desse fato está contida no que segue.

Proposição. *Se um sistema linear possui duas soluções distintas, então ele possui infinitas soluções.*

Prova: Seja $AX = B$ um sistema linear e suponha que X_1, X_2 são duas soluções distintas para esse sistema. Afirmamos que

$$X_\lambda = (1 - \lambda)X_1 + \lambda X_2$$

também será uma solução para esse sistema para qualquer valor real de λ . De fato,

$$AX_\lambda = A[(1 - \lambda)X_1 + \lambda X_2] = A[(1 - \lambda)X_1] + A[\lambda X_2] =$$

$$= (1 - \lambda)AX_1 + \lambda AX_2 = (1 - \lambda)B + \lambda B = B.$$

1.12 Sistemas Lineares Homogêneos

Definição. Um sistema linear da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$AX = 0$$

é chamado de **sistema linear homogêneo**.

Um sistema linear homogêneo sempre tem solução, pois todo sistema homogêneo admite pelo menos a solução nula, também conhecida como **solução trivial**.

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Da proposição anterior temos que se um sistema homogêneo possui uma solução não nula, então ele possui infinitas soluções.

Proposição. *Se* $A = (a_{ij})_{mxn}$ *é uma matriz com mais colunas que linhas, ou seja,* $m < n$ *, então o sistema homogêneo* $AX = 0$ *possui infinitas soluções.*

Prova: Após aplicar as operações elementares à matriz aumentada,o número de linhas não-nulas da matriz escalonada reduzida obtida é $r \leq m$. Como $m < n$, segue que teremos r pivôs e $n - r > 0$ variáveis livres.

Como observação final, notamos que se X_1, X_2 são duas soluções de um sistema linear homogêneo $AX = 0$, então qualquer combinação linear dessas soluções, isto é, qualquer matriz da forma,

$$\alpha X + \beta Y$$

para quaisquer números reais α, β, também é uma solução para o sistema. De fato,

$$A(\alpha X_1 + \beta X_2) = A(\alpha X_1) + A(\beta X_2) = \alpha(AX_1) + \beta(AX_2) = 0 + 0 = 0$$

Isso só vale para sistemas lineares homogêneos. Se X_1, X_2 são duas soluções de um sistema linear $AX = B$, com $B \neq 0$, então em geral $\alpha X_1 + \beta X_2$ não é uma solução de $AX = B$, pois

$$A(\alpha X_1 + \beta X_2) = A(\alpha X_1) + A(\beta X_2) = \alpha(AX_1) + \beta(AX_2) = \alpha B + \beta B = (\alpha + \beta)B \neq B,$$

a não ser que $\alpha + \beta = 1$. Ou seja, apenas as combinações lineares da forma

$$\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$$

são soluções de $AX = B$.

Geometricamente, isso se explica pelo fato de que as soluções de um sistema homogêneo formam um subespaço vetorial, logo contém o plano gerado por X_1 e X_2, enquanto que as soluções de um sistema não homogêneo formam apenas um subespaço afim (um plano k-dimensional que não passa pela origem), logo contém apenas a reta que passa pelos pontos X_1 e X_2.

Nos próximos capítulos nós trabalharemos um pouco mais a fundo esses conceitos aplicados na Programação Linear. A princípio apresentaremos o Método Simplex e, em seguida, o Método Gráfico, pois ganhamos muito visualmente e podemos aplicar parte desse conteúdo no Ensino Médio.

Capítulo 2

Método Simplex

2.1 Introdução

O Método Simplex é uma técnica utilizada para se determinar, numericamente, a solução ótima de um modelo de Programação Linear.

Um problema de programação linear (PL) é um problema de otimização cuja função a ser minimizada ou maximizada é linear bem como o seu conjunto de restrições (relações de interdependência entre as variáveis). As técnicas de resolução de problemas de PL são muito utilizadas em vários campos. É possível mostrar que se o conjunto das soluções viáveis de um problema de PL, ou seja, o conjunto de soluções em que as variáveis assumem valores positivos e satisfazem todas as restrições, for não vazio e a função objetivo for limitada inferiormente neste conjunto, ele será um conjunto convexo e fechado. Desse modo,o Método Simplex, proposto por Georges Dantzig em 1947, é um procedimento matricial que percorre pontos extremos em busca da solução ótima. A prova de que os vértices nos fornecem a solução ótima, visto em [8], segue abaixo.

Seja $f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + b$ definida numa região poliedral convexa A do R^n. Suponha que f assuma um valor máximo (mínimo) nesta região. Então, se A possui vértice(s), este valor máximo (mínimo) será assumido num vértice.

Prova: Suponhamos que o valor máximo (mínimo) de f seja assumido num ponto $\mathbf{P}$ de A.

Considerando todas as regiões poliedrais convexas possíveis do R^2 , podemos ter:

i) P é um vértice. Neste caso o teorema já estará provado.

ii) P está em uma aresta. Neste caso, f assumirá este valor máximo (mínimo) em toda aresta. Como a região A possui vértice(s), esta aresta conterá um vértice v obrigatoriamente. Portanto, $f(P) = f(v)$.

iii) P está no interior de A. Neste caso, f será constante em toda região A.

De fato:
Seja Q um outro ponto interior de A. Como A é poliedral convexa, o segmento PQ está contido em A; além disso, como P é interior, podemos considerar um prolongamento $QQ^{'}$ ainda contido em A. Temos que f é constante em $QQ^{'}$ e, portanto, $f(P) = f(Q)$.

2.2 Método Simplex

Neste capítulo vamos entender e aplicar o Método Simplex, apresentado por Luenberger em [8]. A eliminação gaussiana é bastante utilizada nos procedimentos do Método Simplex, portanto, vamos ressaltar como é feito o pivotamento em um sistema de equações lineares. Considere o conjunto de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde $m \leq n$.

Utilizando o procedimento da eliminação gaussiana, se as primeiras m colunas de A forem linearmente independentes , o sistema pode ser transformado para a forma canônica:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + y_{1,m+1}x_{m+1} + y_{1,m+2}x_{m+2} + ... + y_{1,n}x_n = y_{10} \\ \quad x_2 \qquad + y_{2,m+1}x_{m+1} + y_{2,m+2}x_{m+2} + ... + y_{2,n}x_n = y_{20} \\ \qquad \ddots \\ \qquad\quad x_m + y_{m,m+1}x_{m+1} + y_{m,m+2}x_{m+2} + ... + y_{m,n}x_n = y_{m0} \end{cases}$$

cuja solução básica correspondente é

$$x_1 = y_{10}, x_2 = y_{20}, ..., x_m = y_{m0}, x_{m+1} = 0, ..., x_n = 0.$$

O vetor $(x_1, x_2, ..., x_m, 0, 0, ..., 0)$ é uma solução básica para o sistema $Ax = b$. Dessa forma, as variáveis $x_1, x_2, ..., x_m$ são chamadas *básicas* e as variáveis restantes são chamadas *não básicas.*

Vimos que uma solução básica corresponde a um vértice do poliedro formado pelas restrições do problema. O Método Simplex parte de uma solução básica inicial e, seguindo um critério, escolhe uma nova solução básica de forma que o valor da função objetivo diminua. Para partir de uma solução básica para outra , basta trocarmos uma de suas variáveis básicas por uma não básica , seguindo um critério que veremos posteriormente . Para trocarmos esta variável básica por uma não básica, basta trocarmos uma coluna da base B por outra que não pertence à base B, de forma que as colunas continuem sendo linearmente independentes. Para isso, utilizamos a eliminação gaussiana.

Apesar de utilizarmos o processo de pivotamento para encontrar novas variáveis básicas, existem algumas condições necessárias que devem ser satisfeitas para que a viabilidade da nova solução básica seja preservada (não negatividade).

Uma delas é o que podemos chamar de **Hipótese de não degenerabilidade**, ou seja, dado um problema de programação linear

$$Ax = b, \; x \geq 0$$

todas as soluções básicas são soluções viáveis não degeneradas.

Essa hipótese é utilizada em todo o desenvolvimento do Método Simplex, já que o método falha se a mesma não se aplica.

Assim, para determinar um vetor que deve deixar a base, utilizamos o seguinte processo: suponha que tenhamos uma solução básica viável

$$x = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, 0, ..., 0),$$

ou seja,

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_m a_m = b$$

onde $a_i, i = 1, 2, ..., m$, representa a i-ésima coluna de A.

Utilizando a hipótese de não degenerabilidade, temos $x_i > 0, i = 1, 2, ..., m$. Vamos adicionar à base o vetor a_q, $q > m$, cuja representação em termos da base atual é

$$a_q = y_{1q} a_1 + y_{2q} a_2 + ... + y_{mq} a_m.$$

Multiplicando a_q por uma variável $\varepsilon \geq 0$ e subtraindo da equação anterior, temos:

$$(x_1 - \varepsilon y_{1q}) a_1 + (x_2 - \varepsilon y_{2q}) a_2 + ... + (x_m - \varepsilon y_{mq}) a_m + \varepsilon a_q = b.$$

Então, para qualquer $\varepsilon \geq 0$ a última equação nos fornece b como combinação linear de, no máximo, $m+1$ vetores. Mas para termos uma nova solução básica precisamos eliminar um vetor (uma coluna de A) dessa combinação linear. Se $\varepsilon = 0$, temos a antiga solução básica viável. Conforme aumentamos ε , a última equação nos dá uma solução não básica. Os coeficientes dos outros vetores irão crescer ou decrescer linearmente de acordo com o crescimento de ε .O valor de ε correspondente ao primeiro valor que anula um ou mais coeficientes, será:

$$\varepsilon = min\left\{ \frac{x_i}{y_{iq}} : \mathrm{y}_{iq} > 0; i = 1, 2, ..., m \right\}$$

onde $\mathrm{x}_i = y_{i0}$.

Neste caso, temos uma nova solução básica viável, na qual o vetor a_q foi substituído pelo vetor a_p, onde p corresponde ao índice da mínima razão a qual foi tomada como ε. Se o mínimo é alcançado por mais de um índice i então a nova solução é degenerada e qualquer um dos vetores com componente zero pode ser escolhido para deixar a base. Se nenhum dos y_{iq}'s for positivo, então todos os coeficientes aumentam conforme ε aumenta, e portanto, nenhuma solução básica viável pode ser obtida. Observamos porém que nesse caso, existem soluções viáveis com coeficientes grandes (arbitrários). Isso signfica que o conjunto X das soluções viáveis é ilimitado. Assim, dada uma solução viável para um problema de programação linear temos duas opções: ou existe uma nova solução viável que pode ser encontrada, ou o conjunto de soluções viáveis é ilimitado.

A operação completa é dada por:

$$x_i' = x_i - \frac{y_{iq}}{y_{pq}} x_p.$$

A ideia do Método Simplex é selecionar colunas para sair e entrar na solução básica de tal forma que a nova solução obtenha um valor menor para a função objetivo do que a solução anterior. Portanto, precisamos escolher uma coluna para entrar na base de tal forma que o valor da função objetivo diminua e uma coluna para sair da base de modo que a viabilidade seja mantida.

Dada uma solução básica viável:

$$(x_b, 0) = (y_{10}, y_{20}, ..., y_{m0}, 0, 0, ..., 0)$$

onde a matriz dos coeficientes possui uma matriz identidade nas primeiras m colunas:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m & a_{m+1} & a_{m+2} & \dots & a_n & b \\ 1 & 0 & \dots & 0 & y_{1,m+1} & y_{1,m+2} & \dots & y_{1,n} & y_{10} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & y_{2,m+1} & y_{2,m+2} & \dots & y_{2,n} & y_{20} \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & y_{m,m+1} & y_{m,m+2} & \dots & y_{m,n} & y_{m0} \end{bmatrix}$$

Vamos representar o valor da função objetivo correspondente a qualquer solução x por z:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n,$$

e portanto, para a solução básica acima, o valor correspondente é:

$$z_0 = c_B^T x_B,$$

onde $c_B = [c_1, c_2, ..., c_m]$.

Se valores arbitrários forem assumidos para $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ podemos resolver para as variáveis restantes da forma

$$\begin{aligned}
x_1 &= y_{10} - \sum_{j=m+1}^{n} y_{1j}x_j \\
x_2 &= y_{20} - \sum_{j=m+1}^{n} y_{2j}x_j \\
&\vdots \\
x_m &= y_{m0} - \sum_{j=m+1}^{n} y_{mj}x_j
\end{aligned}$$

Usando essas equações, podemos eliminar $x_1, x_2, ..., x_m$ da forma geral. Assim, obtemos

$$z = c^T x = z_0 + (c_{m+1} - z_{m+1})x_{m+1} + (c_{m+2} - zm + 2)x_{m+2} + ... + (c_n - z_n)x_n$$

onde

$$z_j = y_{1j}c_1 + y_{2j}c_2 + ... + y_{mj}c_m, m + 1 \leq j \leq n.$$

Essa equação nos dá o valor da função objetivo z para qualquer solução de $Ax = b$ em termos das variáveis $x_{m+1}, ..., x_n$. Dessa forma, podemos determinar se existe vantagem em alterar a solução básica introduzindo uma das variáveis não básicas. Note que se $c_j - z_j$ for negativo para algum j, $m + 1 \leq j \leq n$ então um aumento do x_j de zero para algum valor positivo diminuiria o custo total, e portanto, seria uma solução melhor. Ou seja, a solução poderá ser melhorada sempre que houver $c_j - z_j$ negativo para algum j, $m + 1 \leq j \leq n$.

Se tomarmos z como uma variável adicional, e

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - z = 0$$

como mais uma equação linear do sistema (na última linha), então temos $m + 1$ equações. Se pivotarmos o sistema de forma que as variáveis básicas sejam $x_1, x_2, ..., x_m, z$, a última linha nos dará o valor de z em termos das variáveis não básicas, como queríamos, pois dessa forma podemos observar os valores de $c_i - z_1$'s que estão na última linha.

2.3 Procedimento computacional do Método Simplex

Vamos utilizar agora os conceitos apresentados anteriormente para deduzir o Método Simplex. Para utilizar o método, precisamos de um ponto de partida, ou seja, é necessário que já tenhamos uma solução básica viável. Seja então o problema de programação linear

$$\text{minimize } c_x^T$$

$$\text{sujeito a A}x = \text{b} \text{ , } x \geq 0$$

onde A tem dimensão m por n, x e c têm dimensão n e b tem dimensão m.

Tomamos a matriz dos coeficientes das equações na forma canônica para a solução básica viável já conhecida. Calculamos os r_j's, correspondentes a essa solução inicial e adicionamos uma linha, formada por esses r_j's. Essa linha terá apenas n componentes e a matriz aumentada do sistema possui $n + 1$ colunas, então, na $(n + 1)$-ésima componente da linha adicionada, representamos o respectivo valor da função objetivo multiplicado por menos um. Temos assim, a matriz do Simplex que possuirá $m + 1$ linhas e $n + 1$ colunas. Suponha que as variáveis básicas sejam $x_1, x_2, ..., x_m$. Então a matriz do Simplex terá a forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & y_{1,m+1} & y_{1,m+2} & \cdots & y_{1,j} & \cdots & y_{1,n} & y_{10} \\ 0 & 1 & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & y_{i,m+1} & y_{i,m+2} & \cdots & y_{i,j} & \cdots & y_{i,n} & y_{i0} \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & y_{m,m+1} & y_{m,m+2} & \cdots & y_{m,j} & \cdots & y_{m,n} & y_{m0} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{m+1} & r_{m+2} & \cdots & r_j & \cdots & r_n & -z_0 \end{bmatrix}$$

A solução básica correspondente a esse sistema é:

$$x_i = \begin{cases} \mathrm{y}_{i0}, 0 \leq i \leq m \\ 0 \ , \ m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

onde $y_{i0} \geq 0$,$i = 1, 2..., m$. O valor correspondente da função objetivo é z_0.

Os valores dos r_js, indicam se o valor da função objetivo irá crescer ou decrescer se x_j for trazido para a solução, ou seja, se pivotarmos nesta coluna. Se todos esses coeficientes forem não negativos, então a solução indicada é ótima. Se existir algum que seja negativo, é possível melhorar a solução trazendo o vetor correspondente para a base. Quando mais de um desses coeficientes forem negativos, qualquer um deles pode ser trazido à base, para facilitar o algoritmo do método, escolhemos o mais negativo dentre eles.

Podemos considerar:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n - z = 0$$

como uma nova equação. A solução básica do sistema aumentado teria $m + 1$ variáveis básicas mas podemos exigir que z seja uma delas. Por isso, não é necessário que adicionemos uma coluna correspondente a z já que esta seria sempre (0,0,...,0,1). Adicionamos à matriz inicial uma última linha composta pelos c_is e completada por zeros, que representará essa equação adicional. Usando as operações padrão de pivoteamento, podemos reduzir a zero os elementos nesta linha correspondentes a variáveis básicas. Como já vimos, isto é equivalente a transformar a equação adicional para a forma

$$r_{m+1}x_{m+1} + r_{m+2}x_{m+2} + ... + r_nx_n - z = -z_0$$

o que é equivalente a

$$c_x^T = z_0 - \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j)x_j.$$

Dessa forma, a última linha pode ser tratada como qualquer outra no processo de pivotamento, iniciando comos c_j's e reduzindo os termos correspondentes às variáveis básicas a zero através de operações entre linhas.
Uma vez que uma coluna q tenha sido selecionada para ser pivotada, calculamos as razões y_{i0}/y_{iq} para os elementos positivos de y_{iq}, $i = 1, 2, ..., m$, da

q-ésima coluna, para determinar qual elemento será o pivô, que nesse caso será o elemento y_{pq},onde p é o índice correspondente à menor razão encontrada. Quando pivotamos no elemento y_{pq} a solução continua sendo viável e o valor da função objetivo sofre um decrescimento. Se houver mais de um elemento correspondente à razão mínima, qualquer um pode ser utilizado e se não houver elementos não negativos na coluna, o problema é ilimitado. Atualizamos então toda a matriz com y_{pq} sendo o pivô da coluna correspondente à nova variável básica, e tranformamos a última linha da mesma maneira que as outras (exceto a linha q que é a linha do pivô escolhido) de forma a obter uma nova matriz na forma canônica. Como anteriormente, o valor da função objetivo de correspondente à essa nova solução básica aparece no último elemento da última linha da matriz.

O algoritmo simplex pode ser resumido nos seguintes passos:

Passo 0: Formar a matriz correspondente a uma solução básica viável.

Passo 1: Se todos $r_j \geq 0$, pare. A solução básica viável atual já e ótima.

Passo 2: Selecionar q tal que $r_q < 0$ para determinar qual variável não básica irá se tornar básica.

Passo 3: Calcular as razões y_{i0}/y_{iq} para $y_{iq} \geq 0$,$i = 1, 2, ..., m$. Se nenhum $y_{iq} \geq 0$, pare, o problema é ilimitado. Caso contrário, selecionar p como sendo o índice i correspondente à menor razão.

Passo 4: Pivotear no *pq-ésimo* elemento, atualizando todas as linhas incluindo a última. Retornar ao passo 1.

A prova de que o algoritmo resolve o problema, quando não há degeneração, é baseada na teoria que foi apresentada. O processo termina somente se for encontrada uma solução ou se o problema for degenerado. Como vimos, o número de soluções básicas viáveis é finito e nenhuma base é repetida por causa do decrescimento estrito da função objetivo, portanto, o algoritmo deve terminar, encontrando uma base que satisfaz uma das duas condições.

Exemplo 1:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 9 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 18 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Primeiramente, escrevemos o problema como um sistema para resolver o Simplex, adicionando variáveis de folga, S_1 e S_2. Chamando de Z a função que queremos maximizar e R o resultado esperado, temos:

$$\begin{cases} Z - 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + S_1 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + S_2 = 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Escrevendo o sistema acima na forma de uma matriz, temos:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R
1	-3	-2	0	0	0
0	1	1	1	0	9
0	3	1	0	1	18

Figura 2.1: Matriz do Sistema

Escolhemos o menor valor dentre as 5 componentes da primeira linha. A coluna correspondente a este elemento será utilizada para pivotamento. Escolhemos a menor razão entre os elementos das duas últimas linhas da última coluna e os elementos das duas últimas linhas da coluna escolhida, neste caso, a segunda (9/1 e 18/3). Portanto, a matriz atualizada fica:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R
1	0	-1	0	0	18
0	0	2/3	1	-1/3	3
0	1	1/3	0	1/3	6

Figura 2.2: Matriz Atualizada

Observe que o procedimento utilizado nessa matriz nada mais é do que um sistema de equações, representado abaixo. Dividindo a segunda equação por 3 e isolando e substituindo x_1 na primeira equação, o que obtemos é exatamente os parâmetros vistos na matriz modificada, o que mostra o novo sistema.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + S_1 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + S_2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_2 + S_1 - \frac{1}{3}S_2 = 3 \\ x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}S_2 = 6 \end{cases}$$

Utilizando o mesmo procedimento matricial, temos mais um passo:

Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R
1	0	0	3/2	1/2	45/2
0	0	1	3/2	-1/2	9/2
0	1	0	-1/2	1/2	9/2

Figura 2.3: Matriz Final

O mesmo acontece no sistema de equações. Dividindo a primeira equação por $\frac{2}{3}$ e também multiplicando a primeira equação por $\frac{-1}{2}$ e adicionando à segunda equação, obtemos o novo sistema.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_2 + S_1 - \frac{1}{3}S_2 = 3 \\ x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}S_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + \frac{3}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 = \frac{9}{2} \\ x_1 - \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{2}S_2 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Como não temos mais elementos negativos nos 5 primeiros elementos da primeira coluna da matriz, o método termina. Desse modo, a solução aparece na última coluna (R) que será: $x_1 = 9/2$ e $x_2 = 9/2$. O valor da função objetivo será $45/2$.

2.4 As duas fases do Método Simplex

Para problemas como o apresentado no Exemplo 1, onde as restrições são todas de menor ou igual , uma solução básica inicial pode ser obtida imediatamente a partir das variáveis de folga adicionadas ao problema. Entretanto, isso nem sempre acontece e para iniciarmos o Método Simplex precisamos ter uma solução básica inicial. Para tanto, aplicamos o Método Simplex para o problema auxiliar de encontrar uma solução básica inicial. Seja o problema de Programação Linear na forma canônica:

$$Ax = b \quad , \quad x \geq 0. \tag{2.1}$$

Para encontrar uma solução para o problema (2.1), construímos um problema auxiliar adicionando variáveis artificiais:

$$\begin{aligned} minimize \sum_{i=1}^{m} y_i & \\ sujeito \quad a \quad Ax + y = b & \\ x \geq 0 & \\ y \geq 0 & \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde y = $(y_1, y_2, ..., y_m)$ é um vetor com variáveis artificiais. Note que se o problema (2.2) possui valor mínimo igual a zero, com $y = 0$, podemos encontrar uma solução viável para(2.1). Se o menor valor que o problema (2.2) atinge for positivo, então o problema (2.1) não possuirá solução viável. Assim, resolvemos o problema (2.2) utilizando o Método Simplex. Uma solução viável inicial para este problema será $y = b$. Note que se o menor valor do problema (2.2) for 0, nenhuma das variáveis y_i será básica, isso significa que teremos uma solução básica apenas envolvendo as variáveis de x e assim, podemos retornar ao problema original e resolvê-lo a partir dessa solução básica inicial que obtivemos.

Capítulo 3

Método Gráfico

3.1 Introdução

O Método Gráfico é uma versão especial do Método Simplex. A aplicação desse método na Programação Linear é limitada a certos tipos de problemas elementares. O fator mais limitante é o número de variáveis envolvidas: são duas variáveis. É o método mais simples e como tal é um ponto de partida útil em qualquer dos fundamentos da Programação Linear. Exatamente por trabalhar com apenas duas variáveis, torna-se mais interessante de apresentar ao aluno do ensino médio, além de poder usar os gráficos como forma de aprendizado. O ganho visual é importante ao aluno.
Uma das vantagens desse método é que dada a região factível, temos que a solução ótima estará em um dos vértices, como visto no Capítulo 2.

3.2 Método Gráfico

O procedimento sugerido para o Método Gráfico, segundo Stockton, em [9], seria o seguinte:

1. Estruturar o problema.

(a) Determinar as restrições:
- Fazer os cálculos numéricos necessários (dois pontos para as restrições lineares);
- Determinar o polígono de viabilidade técnica através da disposição gráfica das restrições lineares.

(b) Escolher uma função-objetivo apropriada:
- A medida da eficácia deve ser constante com os objetivos de ordem superior;
- A função deve ser linear.

2. Determinar a solução ótima, usando:

(a) Método Gráfico direto;
(b) Método algébrico, usando soluções básicas (pontos extremos).

E se achar conveniente, só para ressaltar o enfoque de tomada de decisão, poderemos modificar a solução para levar em conta os fatores do problema que não estejam incluídos na parte quantitativa da análise. Para viabilizar a clareza do método e da nomenclatura, observe a Figura 3.1, um modelo gráfico possível em se tratando de PPL (Problema de Programação Linear):

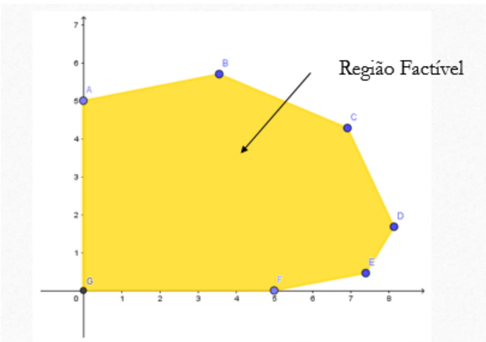

Figura 3.1: Região de soluções possíveis

Esta região convexa destacada no gráfico, além do nome que aparece na própria figura, também poderemos chamar de Região Simplex. Nada mais é do que a região de soluções possíveis do determinado problema. A maior vantagem desse método é que a apresentação visual das relações possibilita, ao analista, ver os pontos sobre o polígono de viabilidade técnica. Desde que a solução ótima geralmente está em um dos seus vértices, o procedimento de pesquisa pode ser limitado a uma análise desses pontos. Para a melhor compreensão do método, apresentaremos a seguir um exemplo envolvendo Programação Linear utilizando como resolução o Método Gráfico. Esse exemplo, já apresentado no Capítulo 2, facilitará o entendimento do método.

Exemplo 1:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 9 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 18 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Lembrando que as variáveis x_1 e x_2 são não negativas, pois isto é uma das características nos modelos de Programação Linear. Prosseguindo com a resolução do problema, o caminho natural para o Método Gráfico é representar graficamente as restrições e a função-objetivo, para se determinar, então, a melhor solução. Vamos então plotar as restrições e a função-objetivo.

3.2.1 Plotando as Restrições

Vamos analisar graficamente as características resultantes de cada desigualdade de forma intuitiva.
Consideremos, inicialmente, a restrição $x_1 + x_2 \leq 9$. É uma inequação que tem como equação correspondente:

$$x_1 + x_2 = 9$$

Representando esta equação num sistema cartesiano de coordenadas, temos como resultado a Figura 3.2.

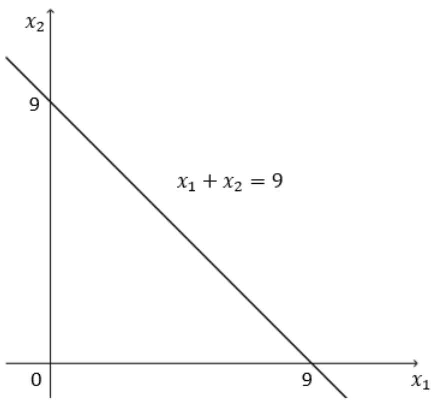

Figura 3.2: Representação geométrica da equação

Cada ponto do segmento da reta traçado, representa um par ordenado (x_1,x_2) tal que a soma seja exatamente 9. Como na nossa inequação prevê que podemos utilizar uma soma até 9, podemos concluir que a região abaixo do segmento de reta traçado contém os pares ordenados (x_1,x_2) que, juntamente com os pontos do segmento de reta, atendem corretamente à inequação.

Assim, a área sombreada na figura 3.3 corresponde à inequação dada, juntamente com as restrições de não negatividade, ou seja, $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$.

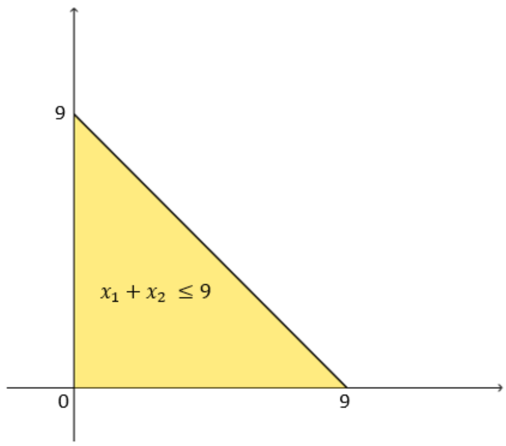

Figura 3.3: Representação geométrica da inequação

Utilizando o mesmo raciocínio para a outra desigualdade, temos o que indica a figura 3.4, pois a equação da reta correspondente será $3x_1 + x_2 = 18$ e, com o fato de que $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$.

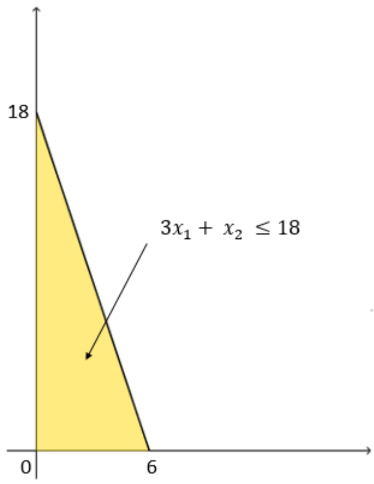

Figura 3.4: Representação geométrica da inequação

Representando todas as restrições num único gráfico, as intersecções entre elas e com os eixos coordenados formam uma região convexa de soluções compatíveis do modelo (polígono de viabilidade técnica), que podemos chamar de Região Convexa Simplex, ou simplesmente, Região Simplex (Figura 3.5).

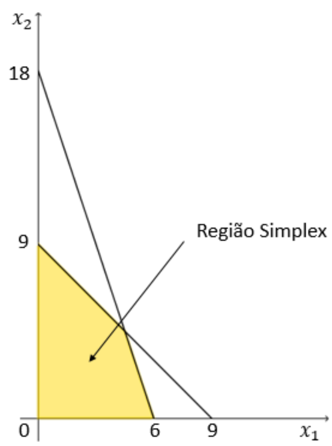

Figura 3.5: Representação geométrica das restrições

3.2.2 Plotando a Função-Objetivo

Isolando a variável x_2, temos que a função-objetivo z = $3x_1 + 2x_2$ é equivalente a:

$$x_2 = \frac{-3}{2}x_1 + \frac{z}{2}$$

Esta função tem uma taxa de variação constante e, como parâmetro, $\frac{z}{2}$. Logo, para cada valor de z temos uma reta diferente, mas todas são paralelas entre si. Na Figura 3.6, temos representadas algumas dessas retas obtidas através da atribuição de valores arbitrários para z. Visualmente, podemos observar que, quanto mais afastada da origem está uma destas retas, maior o valor de z correspondente.

Portanto, as análises gráficas nos permitem obter as características da solução ótima de tais problemas, de uma maneira intuitiva. Percebemos também que uma solução que é básica e factível é um vértice da região factível. Caso a solução ótima seja única, a solução será um vértice. Porém, se tivermos infinitas soluções ótimas, a solução será um segmento de reta.

3.2.3 Otimizando a Função-Objetivo

Pelo problema dado, temos que procurar qual o ponto da Região Simplex fornece o maior valor para z. Pelas considerações anteriores, por esse ponto vai passar uma única reta no ponto desejado. Portanto, basta encontrar tal reta que produza o maior valor possível da função, obedecendo às restrições, ou seja, basta encontrar a reta mais distante da origem e que tenha pelo menos um ponto na região de soluções compatíveis. Isto pode ser feito da seguinte maneira:

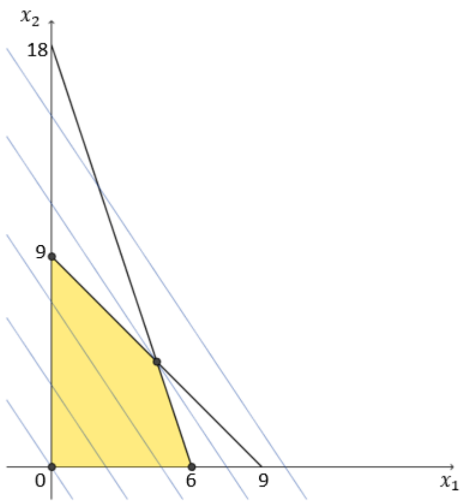

Figura 3.6: Retas Paralelas

Traçamos uma reta qualquer da família de retas paralelas. Em seguida, tiramos uma paralela a ela o mais distante da origem e com pelo menos um ponto na região de soluções compatíveis. O valor da função-objetivo aumenta a medida que afastamos a reta da origem.

Consequentemente, nota-se que, a função-objetivo sempre passa por um ótimo num dos pontos extremos do conjunto de soluções compatíveis. A solução estará em um vértice (solução única) ou, eventualmente, poderá coincidir com um dos segmentos de reta de alguma restrição, em que qualquer ponto do segmento é uma solução ótima (neste caso, infinitas soluções).

Observação

A inclinação da família de retas paralelas da função-objetivo (definida pelo coeficiente angular $\frac{-3}{2}$) é fundamental para determinar qual será o ponto ótimo. Desta forma, no nosso exemplo, observamos pela Figura 3.7 (com a ajuda das demais), que a solução ótima está na intersecção das retas $x_1+x_2=9$ e $3x_1+x_2=18$, pois é o ponto da Região Simplex mais afastado da origem dos eixos coordenados. Feitos os cálculos necessários (resolução do sistema de equações lineares e a aplicação na função-objetivo), encontramos a solução ótima: $x_1=\frac{9}{2}$, $x_2=\frac{9}{2}$ e, com valor máximo em $z=\frac{45}{2}$.

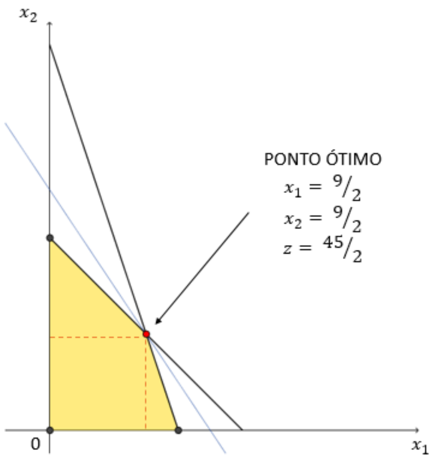

Figura 3.7: Ponto Ótimo

Capítulo 4

Aplicações do Método Gráfico

A Programação linear (PL), através de seu método mais simples (Método Gráfico), é perfeitamente aplicável ao ensino de nível médio, pois o ferramental geométrico e algébrico utilizado, faz parte do rol de conteúdos concernentes a esse nível de ensino da Matemática. Uma consequência imediata é a expansão da abrangência das desigualdades exploradas no Ensino Médio.

A seguir nós apresentaremos 4 exemplos de aplicações do Método Simplex. É interessante observar a relação entre Programação Linear e as Inequações e Sistemas Lineares, mostrando assim ser bastante possível a aplicação desse conteúdo já no Ensino Médio.

No primeiro exemplo, teremos um caso de maximização em que o ponto ótimo será dado por apenas um ponto. No segundo exemplo também teremos o ponto ótimo sendo dado por apenas um ponto, mas será um caso de minimização. O terceiro exemplo será um caso de maximização, que foi apresentado em um dos grandes vestibulares do país. Por último, apresentaremos uma sequência didática para aplicação no Ensino Médio, com o auxílio do *software Geogebra.*

4.1 Maximização com um ponto

O nosso primeiro exemplo é um exemplo clássico de maximização , visto em [10], que será apresentado em sua íntegra.

Uma empresa produz 2 produtos em uma de suas fábricas. Na fabricação dos 2 produtos, 3 insumos são críticos em termos de restringir o número de unidades dos 2 produtos que podem ser produzidas: as quantidades de matéria prima (tipos A e B) disponíveis e a mão de obra disponível para a produção dos 2 produtos. Assim, o Departamento de Produção já sabe que, para o próximo mês, a fábrica terá disponível, para a fabricação dos 2 produtos, 4900 quilos da matéria prima A e 4500 quilos da matéria prima B. Cada unidade do produto tipo I, para ser produzida consome 70 quilos da matéria prima A e 90 quilos da matéria prima B. Por sua vez, cada unidade do produto tipo II para ser produzida, utiliza 70 quilos da matéria prima tipo A e 50 quilos da matéria prima tipo B. Como a produção dos 2 produtos utiliza processos diferentes, a mão de obra é especializada e diferente para cada tipo de produto, ou seja não se pode utilizar a mão de obra disponível para a fabricação de um dos produtos para produzir o outro.

Assim, para a produção do produto tipo I a empresa terá disponível, no próximo mês, 80 homens-hora. Já para o produto tipo II terá 180 homens-hora. Cada unidade do produto tipo I, para ser produzida, utiliza 2 homens-hora enquanto que cada unidade do produto tipo II utiliza 3 homens-hora. Reduzindo do preço unitário de venda todos os custos, chega-se a conclusão de que cada unidade do produto tipo I dá um lucro de 20 reais e cada unidade do produto tipo II dá um lucro de 60 reais. Dada a grande procura, estima-se que todas as unidades a serem produzidas, dos 2 produtos, poderão ser vendidas. O objetivo da empresa é obter o maior lucro possível com a produção e a venda das unidades dos produtos tipo I e II.

Queremos resolver este problema com um modelo de Programação Linear. Mas antes de fazer isto temos que conhecer o problema. Qual é o problema desta empresa ?

O problema é que eles não sabem quantas unidades de cada tipo de produto (I e II) devem ser produzidas, de maneira que o lucro seja o maior possível.
Para construir um modelo de Programação Linear temos que começar identificando o que se deseja saber ou conhecer no problema. A isto dá-se o nome de variável de decisão. No nosso problema temos 2 variáveis de decisão que são:

x_1: número de unidades do produto tipo I a serem produzidas no próximo mês.

x_2: número de unidades do produto tipo II a serem produzidas no próximo mês.

Temos que identificar o objetivo que se deseja alcançar e traduzí-lo por uma função matemática linear contendo as variáveis de decisão. Assim, no nosso exemplo, o objetivo é maximizar o lucro total obtido com a produção dos 2 produtos.

Cada unidade, a ser produzida, do produto tipo I dá um lucro de 20 reais. Como vamos produzir x_1 unidades, teremos um lucro de $20x_1$. Da mesma forma, cada unidade do produto tipo II dá um lucro de 60 reais, ou seja, pelo produto tipo II teremos um lucro de $60x_2$.

Desta forma a função de lucro total, que queremos maximizar, será uma função da forma:

$$20x_1 + 60x_2$$

Esta função é chamada de **função objetivo** e é representada, pela maioria dos autores, como uma função de uma variável Z representando o sentido da otimização que, no nosso caso, é de maximização. Assim, podemos escrever:

$$(\text{MAX})\text{Z} = 20x_1 + 60x_2 \longrightarrow \text{função objetivo.}$$

Evidentemente que o nosso modelo não se restringe a função objetivo pois se assim fosse, a solução seria simplesmente $x_1 = x_2 = \infty$, o que, sem muita análise, percebemos que é impossível bastando observar a quantidade disponível de qualquer uma das matérias primas. Desta forma os valores que x_1 e x_2 podem assumir estão condicionados pelas restrições do modelo que, no nosso exemplo, são as quantidades das 2 matérias primas e a quantidade de mão de obra disponível.

Temos que representar cada restrição física por uma função matemática linear contendo as variáveis de decisão do modelo. A 1ª restrição que temos diz que a quantidade disponível de matéria prima tipo A, no próximo mês é de 4900 quilos. Cada unidade a ser produzida do produto I vai consumir 70 quilos desta matéria prima. Por sua vez, cada unidade a ser produzida do produto II também vai consumir 70 quilos desta mesma matéria prima. Logo $70x_1 + 70x_2$ vai nos dar toda a matéria prima tipo A a ser utilizada. Esta quantidade não pode ser maior do que a empresa vai ter disponível, ou seja 4900 quilos. Podemos escrever então:

$$70x_1 + 70x_2 \leq 4900$$

Fazendo-se o mesmo tipo de raciocínio para a matéria prima tipo B, podemos escrever:

$$90x_1 + 50x_2 \leq 4500$$

Temos ainda que representar a restrição relativa a mão de obra. Para a produção do produto tipo I, temos 80 homens-hora disponíveis. Cada unidade, para ser produzida, utiliza 2 homens-hora. Logo, $2x_1$ indica todo o consumo de mão de obra, apta para produzir o produto I, no próximo mês. Como temos disponíveis 80 homens-hora, a restrição fica:

$$2x_1 \leq 80$$

Podemos escrever uma restrição semelhante para o produto tipo II, ou seja:

$$3x_2 \leq 180$$

A primeira vista poderá parecer que formulamos todas as restrições. No entanto, há um tipo de restrição não tão evidente. Como visto anteriormente, x_1 e x_2 representam as unidades dos 2 tipos de produto a serem fabricadas. Ora não podemos produzir, por exemplo, -10 unidades do produto tipo I ou do produto tipo II, ou seja, x_1 e x_2 não podem ser negativos. Matematicamente temos:

$$x_1,\, x_2 \geq 0$$

Podemos agora escrever todo o modelo de programação linear para o nosso exemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & Z = 20x_1 + 60x_2 \\ \text{sujeito a} & 70x_1 + 70x_2 \leq 4900 \\ & 90x_1 + 50x_2 \leq 4500 \\ & 2x_1 \leq 80 \\ & 3x_2 \leq 180 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Vamos considerar a 1ª restrição na igualdade, ou seja $70x_1 + 70x_2 = 4900$. Ela é uma equação de uma reta passando pelos pontos (70,0) e (0,70). Podemos então traçá-la em nosso gráfico:

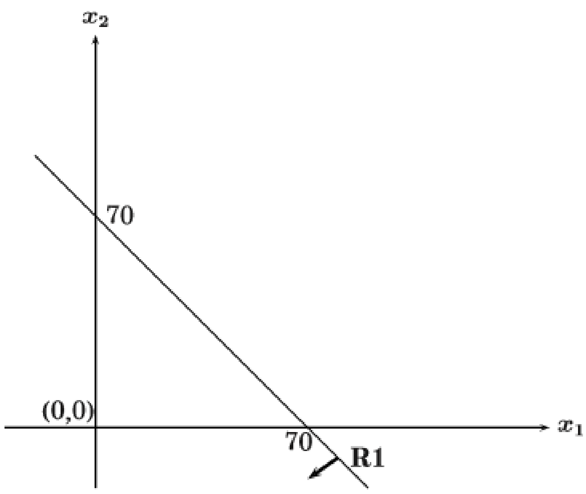

Figura 4.1: 1ª restrição gráfica

Vamos fazer o mesmo com a 2ª restrição que na igualdade, $90x_1 + 50x_2 = 4500$ é uma reta que passa pelos pontos (50,0) e (0,90). Traçando-a temos:

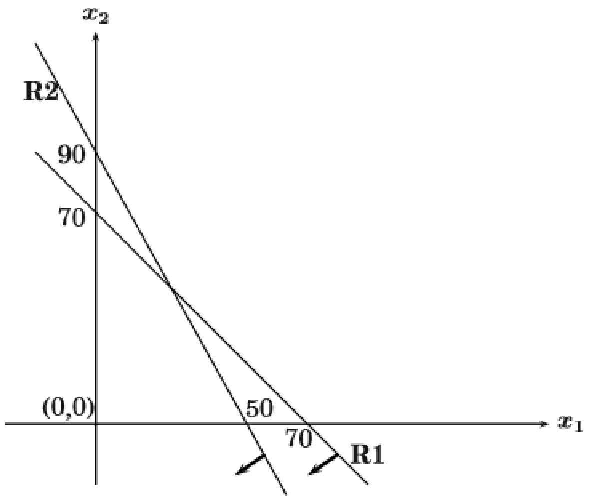

Figura 4.2: 2ª restrição gráfica

A 3ª restrição, na igualdade $2x_1 = 80$, é uma reta paralela ao eixo x_2 passando pelo ponto 40 em x_1. Temos então:

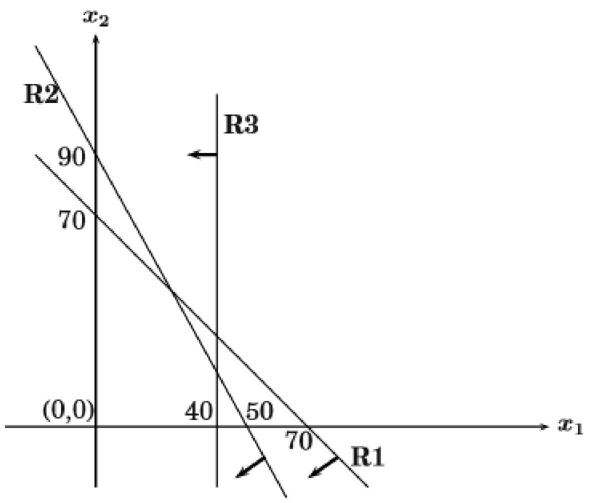

Figura 4.3: 3ª restrição gráfica

A 4ª restrição na igualdade, $3x_2 = 180$, é uma reta paralela ao eixo x_1, passando pelo ponto 60 no eixo x_2. Traçando-a, temos:

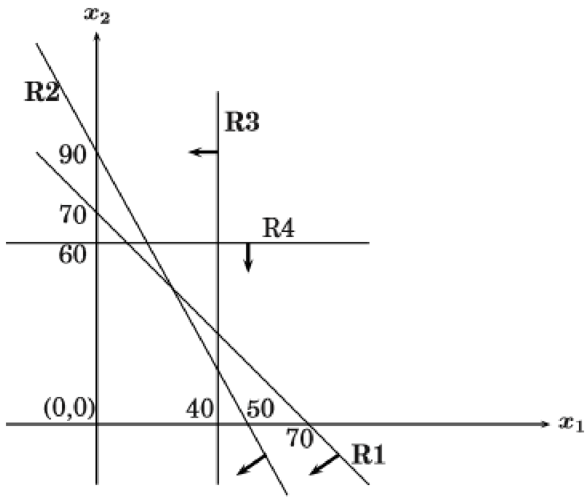

Figura 4.4: 4ª restrição gráfica

Como todas as restrições foram traçadas temos o chamado **Espaço Solução** que é o conjunto de todos os pontos candidatos a serem o ponto ótimo, ou seja, todos os pontos que obedecem a todas as restrições do modelo. No gráfico o Espaço Solução é o polígono desenhado, como podemos ver a seguir:

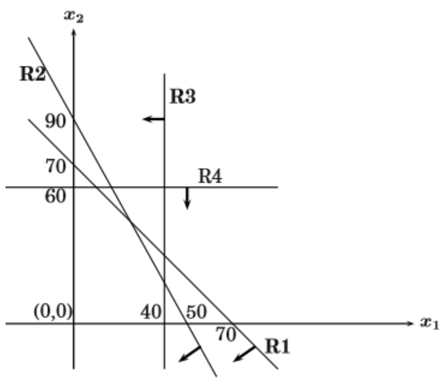

Figura 4.5: Espaço Solução

O ponto ótimo é um ponto do espaço solução, ou seja, pertencente ao polígono desenhado. Como encontrá-lo graficamente ?
Vamos observar a função objetivo:

$$Z = 20x_1 + 60x_2$$

Graficamente esta equação representa uma família de retas paralelas, ou seja, para cada valor de Z temos uma reta que será paralela a qualquer outra para outro valor de Z, inclusive para aquela com o valor ótimo de Z . Vamos, arbitrariamente, escolher um valor para Z, por exemplo $Z = 1200$. Temos então uma reta passando pelos pontos (60,0) e (0,20), como observamos na Figura 4.6:

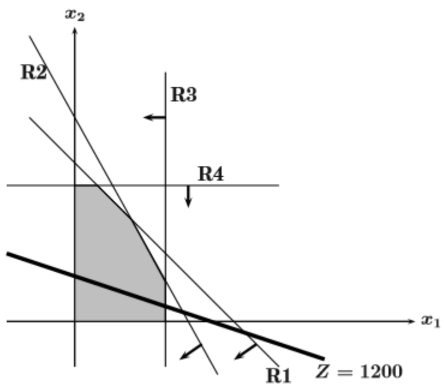

Figura 4.6: 1ª reta paralela

Como queremos maximizar o valor de Z, vamos escolher agora um valor maior, por exemplo $Z = 2400$, ou seja uma reta passando pelos pontos (120,0) e (0,40). Vamos ver como fica graficamente:

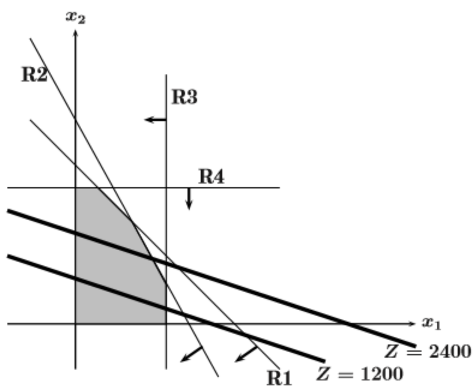

Figura 4.7: 2ª reta paralela

Como esperado, a nova reta $Z = 2400$ é uma reta paralela a reta anterior $Z = 1200$. Descobrimos também que traçando-se paralelas a $Z = 1200$, acima dela, obtemos valores maiores para Z. Como obter o ponto ótimo ? Simplesmente traçando a paralela, mais alta possível, que toque, pelo menos, um ponto do espaço solução. Graficamente temos:

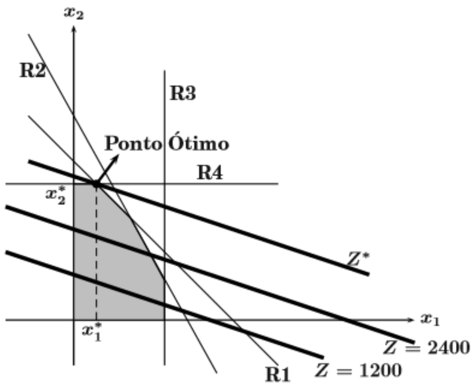

Figura 4.8: Ponto Ótimo

O * indica, em programação matemática o valor ótimo. Assim, x_1^* quer dizer o valor ótimo de x_1. O ponto ótimo ter sido um dos vértices do espaço solução não é uma mera coincidência. Na verdade o ponto ótimo é sempre um dos vértices do espaço solução a não ser quando temos múltiplas (infinitas) soluções ótimas, pois neste caso, os pontos ótimos são todos os pertencentes a um dos lados do espaço solução. Para ilustrar este último caso, mude a função objetivo para (MAX) $Z = 90x_1 + 50x_2$. Resolva graficamente e observe que todos os pontos de um dos lados do espaço solução são pontos ótimos! Isto acontece porque a função objetivo é uma função paralela a 2ª restrição.

4.2 Minimização com um ponto

O nosso segundo exemplo de aplicação é um exemplo clássico de minimização , visto em [11], que será apresentado em sua íntegra.

Vale ressaltar que essa é apenas uma das versões do Método da Dieta, um dos problemas mais apresentados em estudos de Programação Linear. Essa versão é bastante simplificada pois o objetivo é a resolução a partir do Método Gráfico, limitando o problema a duas variáveis. A partir desse segundo exemplo, seremos um pouco mais objetivos na explicação.

Dois produtos P e Q contêm as vitaminas A, B e C nas quantidades indicadas no quadro a seguir. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade. Que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com o mínimo custo?

	P	Q	QUANTIDADE MÍNIMA
A	3	1	12
B	3	4	30
C	2	7	28
PREÇO	3	2	

Figura 4.9: Preço e Quantidade

Sendo x a quantidade do produto P e y a quantidade do produto Q nas condições do problema, temos:

1. **Função Objetivo**

O custo é dado por $C = 3x + 2y$, o qual queremos minimizar.

2. **Restrições**

As condições impostas pelo problema são:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \geq 12 \\ 3x + 4y \geq 30 \\ 2x + 7y \geq 28 \end{cases}$$

3. **Gráfico**

Como pode ser visto na Figura 4.10, a região de possibilidades é a parte do plano ilimitado pelas retas $x = 0$, $y = 0$, $3x + y = 12$, $3x + 4y = 30$ e $2x + 7y = 28$. Os vértices são dados pelas soluções dos sistemas:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z - 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + S_1 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + S_2 = 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z - 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + S_1 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + S_2 = 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

As soluções são, respectivamente, (0,12), (2,6), (98/13, 24/13) e (14,0).

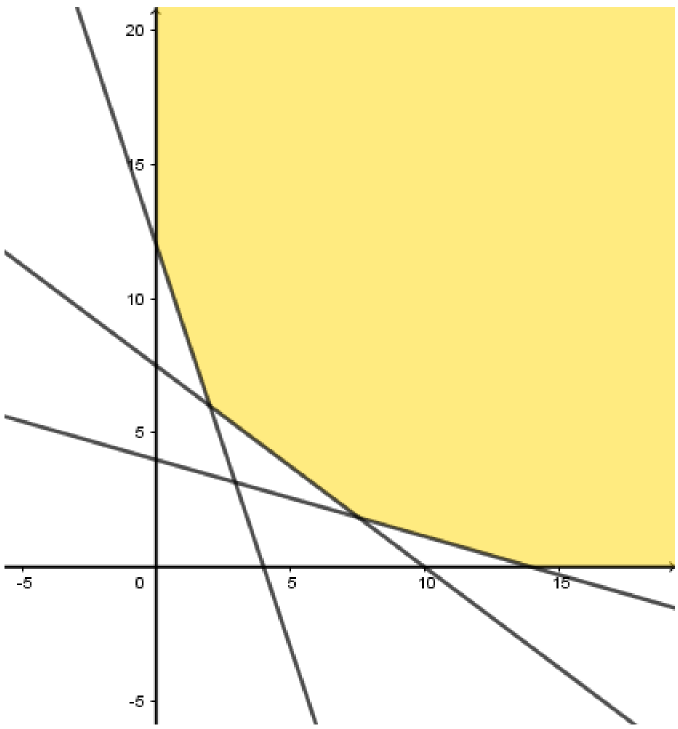

Figura 4.10: Restrições do Problema

4. Valores que a função objetivo assume nos vértices

Vértice	Valor da Função C = 3x + 2y
(0,12)	$C = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 12 = 24$
(2,6)	$C = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18 \leftarrow$ mínimo
$(\frac{98}{13}, \frac{24}{13})$	$C = 3 \cdot \frac{98}{13} + 2 \cdot \frac{24}{13} \cong 26{,}3$
(14,0)	$C = 3 \cdot 14 + 2 \cdot 0 = 42 \leftarrow$ máximo

Figura 4.11: Vértices da Função Objetivo

5. Resposta do problema

A dieta ótima, que é sadia e tem custo mínimo, consiste em consumir 2 unidades do produto P e 6 unidades do produto Q, com um custo de 18.

4.3 Aplicações em Vestibulares

O nosso terceiro exemplo de aplicações é um exemplo visto em [2], que será apresentado em sua íntegra. É uma questão envolvendo otimização, que fez parte da primeira fase do vestibular da UNESP (Universidade Estadual Paulista) de 2010. Na verdade são duas questões com enunciado em comum, mas que aqui, só transcrevemos uma questão completa. O enunciado a seguir é comum para as questões 88 e 89.

Uma fábrica utiliza dois tipos de processos, P1 e P2, para produzir dois tipos de chocolates, C1 e C2. Para produzir 1000 unidades de C1 são exigidas 3 horas de trabalho no processo P1 e 3 horas em P2. Para produzir 1000 unidades de C2 são necessárias 1 hora de trabalho no processo P1 e 6 horas em P2. Representando por x a quantidade diária de lotes de 1000 unidades de chocolates produzidas pelo processo P1 e por y, a quantidade diária de lotes de 1000 unidades de chocolates produzidas pelo processo P2, sabe-se que o número de horas trabalhadas em um dia no processo P1 é $3x + y$, e que o número de horas trabalhadas em um dia no processo P2 é $3x+6y$.

Questão 88 (UNESP-2010): Dado que no processo P1, pode-se trabalhar no máximo 9 horas por dia e no processo P2, pode-se trabalhar no máximo 24 horas por dia, a representação no plano cartesiano do conjunto dos pontos (x,y) que satisfazem, simultaneamente, às duas restrições de número de horas possíveis de serem trabalhadas nos processos P1 e P2, em um dia é:
(*O problema segue com cinco alternativas e, em cada uma delas, uma representação gráfica, que não estão dispostas neste trabalho. Consulte a referên-*

cia citada.)

Questão 89 (UNESP-2010): Dado que o lucro na venda de uma unidade do chocolate produzido pelo processo P1 é de R$ 0,50, enquanto que o lucro na venda de uma unidade do chocolate produzido pelo processo P2 é de R$ 0,80, e se forem vendidas todas as unidades produzidas em um dia nos dois processos, no número máximo possível de horas, o lucro obtido, em reais, será:

(a) 3.400,00. (b) 3.900,00. (c) 4.700,00. (d) 6.400,00. (e) 11.200,00.

Resolução.

Na questão anterior da mesma prova (Questão 88), consta que: no processo P1, pode-se trabalhar no máximo 9 horas por dia e, no processo P2, pode-se trabalhar no máximo 24 horas por dia. Desta forma já temos as restrições do problema:

$$3x + y \leq 9 \text{ e } 3x + 6y \leq 24.$$

Como temos o valor unitário na venda de cada tipo de chocolate e as restrições envolvendo lotes de 1000 unidades, então a função lucro é:

$$\text{Lucro} = 500x + 800y,$$

que é equivalente à:

$$y = \frac{-5}{8}x + \frac{Lucro}{800}$$

Plotando as restrições e a função Lucro (por exemplo, para um Lucro de R$ 4.000,00), num mesmo gráfico, percebemos que, como mostra a Figura 4.12, a solução ótima da questão está na intersecção das retas de equações:

$$3x + y = 9 \text{ e } 3x + 6y = 24.$$

Pois é o ponto da Região Simplex que está mais próximo da reta da função Lucro traçada e, o mais distante da origem dos eixos cartesianos. Portanto, resolvendo o sistema formado por estas duas equações, temos os seguintes valores: $x = 2$ e $y = 3$. Aplicando-os na função Lucro, obtemos R$ 3.400,00. Logo a resposta correta é a alternativa **(a)**.

Outro modo de resolução é determinar os vértices da região das soluções compatíveis e aplicar os resultados encontrados de x e y na função Lucro, pois a solução ótima sempre estará em algum vértice dessa região. Sem esses conhecimentos básico da PL, o vestibulando deveria perceber que, as condições exigiam o esgotamento das duas desigualdades do problema. Então, bastaria resolver o sistema formado pelas equações correspondentes a tais desigualdades, encontrando, assim, os valores de x e y e, depois, aplicar na função Lucro, para obter a resposta da questão.

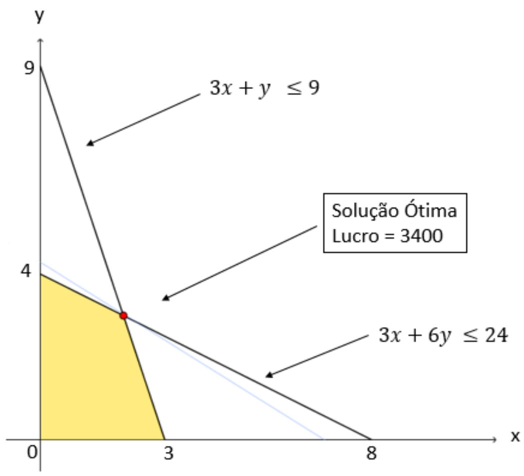

Figura 4.12: Solução Ótima

4.4 Sequência Didática para Aplicação

A seguir, apresentaremos uma sequência didática bastante possível de ser aplicada no Ensino Médio, visto em [11].

A proposta desta sequência didática é de acrescentar o uso do *software GeoGebra* como facilitador na construção gráfica e interpretação dos sistemas de equações e inequações assim como a visualização das regiões planas, facilitando o entendimento do cálculo do ponto de intersecção de retas.

Esta sequência didática poderá ser aplicada individualmente ou em grupos, de acordo com a estrutura física da escola. O uso do *software GeoGebra* se deu por ser um software gratuito, disponível para PC, notebook, tablet e smartfone, viabilizando o acesso de todos os alunos.

Abaixo, colocamos uma das versões do Método dos Transportes. Assim como o Método da Dieta, já apresentado nessa pesquisa, essa versão também será simplificada, limitando o problema a duas variáveis para a resolução pelo Método Gráfico.

Segue abaixo a sequência didática:

Atividade 1: Resolver algebricamente o exercício simplificado sobre Método de Transportes, descrito abaixo. A resolução do exercício será apresentada logo abaixo como exemplo.

Uma firma comercial tem 40 unidades de mercadoria no depósito C e 50 unidades no depósito C. Deve enviar 30 unidades ao cliente A e 40 ao cliente B. Os gastos de transporte por unidade de mercadoria estão indicados no esquema da figura . De que maneira deve enviar essas mercadorias para que o gasto com transportes seja mínimo?

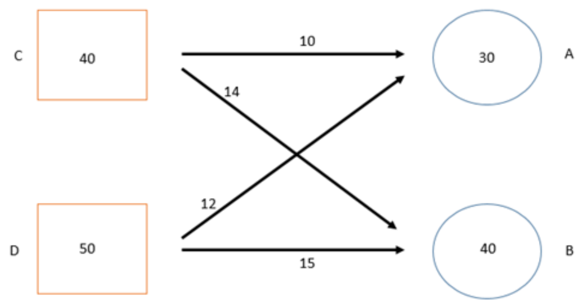

Figura 4.13: Gastos e Quantidades

Resolução

Seja x a quantidade que deve ser enviada a A do depósito C e y a quantidade que deve ser enviada a B do mesmo depósito C. Assim, (30 - x) será a quantidade que deve enviar a A do depósito D e (40 - y) a que deve enviar a B do depósito D.

1. **Função objetivo:** O gasto G do transporte será dado por:

$$\text{G} = 10x + 14y + 12(30 - x) + 15(40 - y) = 960 - 2x - y \ .$$

Pretendemos minimizar a função G = 960 - 2x - y .

2. **Restrições:**

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \text{ (são unidades de mercadoria).} \\ x \leq 30, y \leq 40 \\ x + y \leq 40 \text{ (em C há somente 40 unidades)} \\ (30 - x) + (40 - y) \leq 50 \text{ , ou ainda, } x + y \geq 20 \text{ (em D há somente 50 unidades)} \end{cases}$$

3. Gráfico

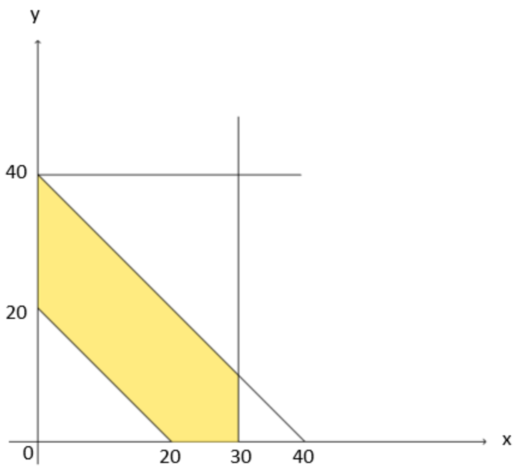

Figura 4.14: Restrições do Problema

As coordenadas dos vértices são (0,20), (0,40), (20,0), (30,0), (30,10).

4. Valor da função objetivo em cada vértice:

Vértice	Valor dos gastos G = 960 -2x - y
(0,20)	960 – 2 · 0 – 20 = 940 ← Máximo
(0,40)	960 – 2 · 0 – 40 = 920
(20,0)	960 – 2 · 20 – 0 = 920
(30,0)	960 – 2 · 30 – 0 = 900
(30,10)	960 – 2 · 30 – 10 = 890 ← Mínimo

Figura 4.15: Valores obtidos nos vértices

5. Solução ótima:

A solução ótima do problema é dada pelo vértice (30,10) $=$ (x,y). Assim, 30 - x $=$ 0 e 40 - y $=$ 30.

6. Resposta do problema:

O gasto mínimo se obterá enviando 30 unidades de mercadoria de C a A, 10 de C a B, 30 de D a B e nenhuma de D a A.

Atividade 2: Apresentar o software GeoGebra, e explorar os tópicos disponíveis.

Este momento será para o aluno se familiarizar com o software e aprender manuseá-lo. Desta forma, se o professor sentir necessidade, repetir os passos com conjuntos de inequações diferentes, até que os alunos se sintam aptos a utilizar o GeoGebra como instrumento facilitador. Caso a escola não tenha o software instalado, basta acessar *www.geogebra.org* e seguir os passos para instalação.

Atividade 3: Resolver o problema apresentado na Atividade 1 com o auxílio do *software GeoGebra*. Abaixo, segue a resolução através do *software*.
Nesse momento o professor terá atuação bastante intensa, pois será o momento de resolver o exercício da Atividade 1 utilizando o Geogebra. Colocaremos um passo-a-passo que pode ser seguido pelo professor caso julgue necessário.

Passo 1:

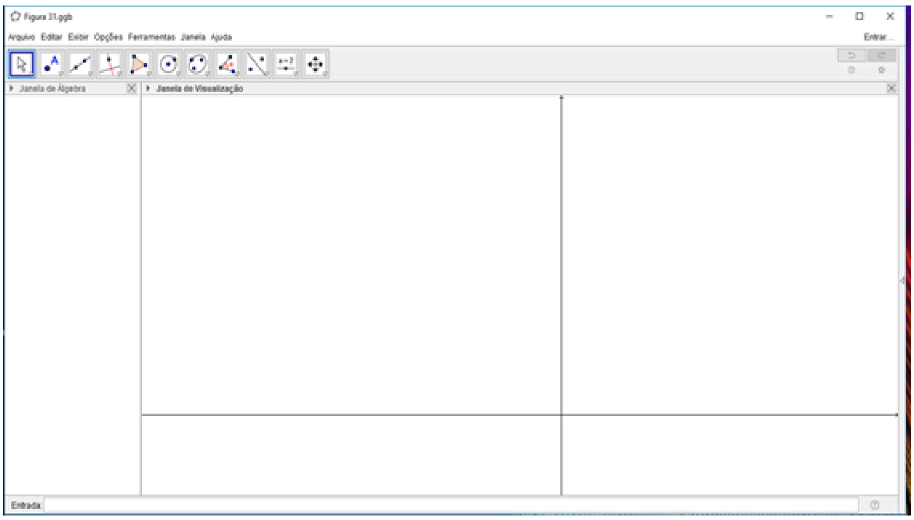

Figura 4.16: Software Geogebra

Abrir o *software Geogebra.* Caso o professor decida por trabalhar sem as malhas de fundo, como no exemplo, basta clicar com o botão direito do mouse e selecionar a opção "‘Malhas"’.

Passo 2:

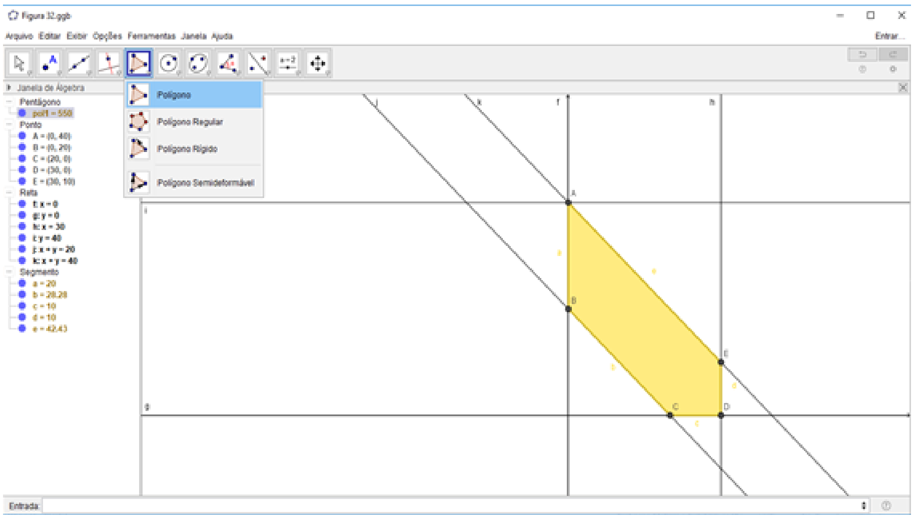

Figura 4.17: Inequações e Polígonos

No campo "‘ENTRADA"’, colocar todas as inequações determinadas na Atividade 1, no 2° passo (Restrições) . Fica a sugestão de, ao invés de colocar as inequações , digitar as equações. Ou seja, $x = 0$, $y = 0$, $x = 30$, $y = 40$, $x + y = 40$, $x + y = 20$. Ficará melhor visualmente, como apresentado na figura acima. Em seguida, vá na opção "‘POLÍGONO"’ e desenhe um polígono selecionando os pontos (0,40), (0,20), (20,0), (30,0), (30,10) e (0,40) novamente para fechar o polígono. Essa opção deixa clara qual é a nossa Região Simplex. Para mudar a cor de fundo do polígono, clicar no botão direito do mouse, selecione "‘Propriedades"’e, em seguida, "‘cor"’.

Passo 3:

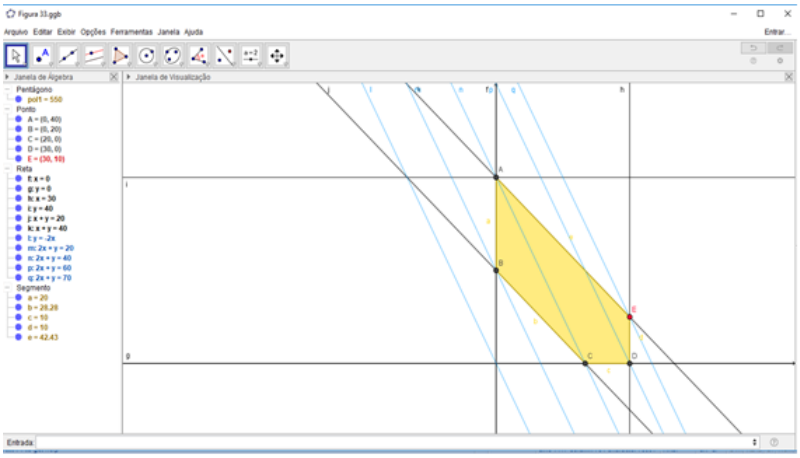

Figura 4.18: Ponto Ótimo

Esse é o momento em que o aluno perceberá o ponto ótimo. Inicialmente, utilizaremos a Função Objetivo, ou seja, G = 960 - 2x - y. Devemos isolar a variável y, ou seja, y = 960 - 2x - G. Ao digitar a Função Objetivo, podemos escolher um valor para G, por exemplo, G = 960. A partir dessa reta $y = -2x$, que passa pela origem, obtemos algumas retas paralelas, inclusive aquela que passa pelo ponto ótimo (30, 10) e por consequência o menor custo (890). Para obter as retas paralelas basta alterar o valor de G até determinar a reta que passa pelo ponto ótimo ($y = -2x + 70$). Uma outra maneira de determinar o ponto ótimo é deslizar a reta $y = -2x$ até atingir o ponto ótimo E = (30,10). Para deslizar, clique na reta $y = -2x$ e deixe o botão esquerdo do mouse apertado.

Capítulo 5

Análise de Sensibilidade

5.1 Introdução

Segundo Bazarra, em [12], na maioria das aplicações práticas em Programação Linear, os dados do problema não são conhecidos por completo e são frequentemente estimados, buscando o melhor possível. Por isso, é importante estudar o efeito sobre soluções ideais para os casos com variações em determinados dados, sem ter que resolver o problema do zero para cada execução. Além disso, nos estágios iniciais do problema, alguns fatores podem ser ignorados do ponto de vista analítico. É útil explorar o efeito sobre a solução atual de acomodar alguns desses fatores. Em muitas situações, as restrições não são muito rígidas. Por exemplo, uma restrição pode refletir a disponibilidade de alguns recursos. Esta disponibilidade pode ser aumentada por compra extra, horas extras, compras novos equipamentos e similares. É desejável examinar o efeito dessa flexibilidade em algumas das restrições sobre o valor objetivo ideal sem ter que resolver o problema. Outro ponto importante é que a principal utilidade de um modelo não é simplesmente determinar uma solução ou política ideal para um determinado problema ou situação, mas sim fornecer uma facilidade para possíveis mudanças sobre o sistema modelado, colocando várias possibilidades, tais como: qual pode ser o efeito de alterações em certas influências importantes exógenas ou parâmetros endógenos sobre a solução ideal?; ou qual seria o benefício de investir em alguma nova opção potencial?; ou como o sistema seria perturbado se encerracemos uma operação em andamento? A investigação dessas e outras questões relacionadas constitui o que conhecemos por Análise de Sensibilidade. Discutiremos, a seguir, alguns métodos para atualizar uma solução ideal sob diferentes variações de problemas.

5.2 Dualidade e problema dual

Segundo Schneider, em [7], para cada problema de programação linear, existe um problema dual correspondente. Esse par de problemas (primal e dual) se relaciona da seguinte forma: cada solução viável em um deles, limita uma solução ótima do outro. A forma simétrica da dualidade é dada pelo par de problemas definidos a seguir.

Definição. Dado o problema de programação linear, chamado de problema primal,

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \mathrm{c}^T x \\ \text{sujeito a} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

o respectivo problema dual é

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \mathrm{b}^T \lambda \\ \text{sujeito a} & A^T \lambda \leq c \\ & \lambda \geq 0 \end{array}$$

Se A é uma matriz m por n então x é um vetor de dimensão n, b é um vetor de dimensão m, c é um vetor de dimensão n e λ é um vetor de dimensão m. O vetor x é a variável do problema primal e o vetor λ é a variável do dual.

Podemos obter o dual de qualquer problema de programação linear da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \mathrm{c}^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

que pode ser escrito da forma:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \mathrm{c}^T x \\ \text{sujeito a} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

A seguir, temos um problema primal e seu respectivo dual em programação linear.

Exemplo:

Primal

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & -x_1 + x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 5\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ \text{sujeito a} & \lambda_1 + \lambda_2 \leq -1 \\ & \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 1 \end{array}$$

Matriz do simplex (inicial):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Matriz do simplex (final):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 13/3 \\ \hline 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 11/3 \end{array}\right]$$

Logo, uma solução ótima para o problema dual é λ_1 = -1/3 e λ_2 = -2/3.

5.3 Método Simplex Dual

Segundo Schneider, em [7], não é necessário construirmos uma nova matriz para aplicarmos o método simplex no problema dual. Utilizamos a mesma matriz construída no caso primal, apenas as operações serão alteradas, seguindo os critérios do algoritmo que apresentaremos a seguir. Essa técnica é denominada *Método Simplex Dual.*

Dado o problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

tome uma base B tal que $\lambda^T = c_B^T \; B^{-1}$ é viável para o dual. A solução básica no primal, $x_B = B^{-1}$, é *dual viável* pois é viável para o dual. Se $x_B \geq 0$, então essa solução também será primal viável e, portanto, ótima.

Podemos descrever o algoritmo para o Método Simplex Dual da seguinte forma:

Passo 1: Dada uma solução básica viável dual x_B, se $x_B \leq 0$ a solução é ótima. Se x_B é não negativo, selecione um índice i tal que a i-ésima componente de x_B, $x_{Bi} < 0$.

Passo 2: Se todos os $\lambda_{ij} \geq 0$; $j = 1, 2, ..., n$, então o dual não possui máximo. Se $\lambda_{ij} < 0$ para algum j, então seja

$$\epsilon_0 = \frac{z_k - c_k}{\lambda_{ik}} = min \left\{ \frac{z_j - c_j}{\lambda_{ij}} \; : \; \lambda_{ij} < 0 \right\}$$

Passo 3: Formar uma nova base B substituindo a_i por a_k. Usando esta base, determine a solução básica dual viável correspondente x_B e retorne ao passo 1.

Exemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Transformando o problema para a forma padrão, temos:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \hline -1 & -2 & -3 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & -6 \\ \hline 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A solução básica é viável para o dual pois todos os elementos da última linha são positivos. Escolhemos uma variável para sair da solução básica, digamos $x_5 =$ -6 e calculamos as razões: -(3/-2), -(4/-2) e -(5/-1), escolhendo a menor. Após a primeira iteração temos:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	−1	−5/2	1	−1/2	−2
1	1	1/2	0	−1/2	3
0	1	7/2	0	3/2	9

Após a segunda iteração temos:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	5/2	−1	1/2	2
1	0	−2	1	−1	1
0	0	1	1	1	11

Logo, temos $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 0$ e o valor da função será -11.

5.4 Sensibilidade

Suponha que tenhamos encontrado a solução x*, ótima para o programa linear

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b \end{array}$$

Verificaremos o quanto podemos mudar no problema sem mudar sua solução ótima, que já encontramos. A isso damos o nome de **Análise de Sensibilidade**.

5.5 Mudanças no Objetivo

Segundo Pellegrini, em [13], mudar coeficientes no vetor que define a função objetivo terá um único efeito importante: o gradiente mudará de direção. Se o ângulo for suficientemente grande, a solução ótima pode mudar.

Teorema 5.1. Suponha que um valor Δ tenha sido somado ao coeficiente c_k. Se x_k estiver na base, a solução ótima será a mesma, x^*, do problema original se, para toda variável x_j fora da base,

$$\Delta \geq \frac{(c_j - z_j)}{a_{kj}}, se a_{kj} > 0$$

$$\Delta \leq \frac{(c_j - z_j)}{a_{kj}}, se a_{kj} < 0$$

Se x_k não estiver na base, a solução continuará sendo ótima se

$$\Delta \leq -(c_k - z_k).$$

Exemplo 1. Considere o problema a seguir:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 3x + 4y \\ \text{sujeito a} & 2x + y \leq 7 \\ & x + 2y \leq 8 \\ & x - y \leq 6 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

Aplicando o Método Simplex, obtemos a matriz abaixo:

1	0	2/3	-1/3	0	2
0	1	-1/3	2/3	0	3
0	0	-1	1	1	7
0	0	-2/3	5/3	0	-18

com x, y e a variável S_3 na base. Suponha que queiramos mudar o coeficiente de x, de modo que a função objetivo passe a ser

$$Z_0 = (3 + \Delta)x + 4y.$$

Aplicando o Teorema, obtemos os seguintes limites para Δ.

Para $j = 3$: como $a_{13} = 2/3 > 0$, temos

$$\Delta \geq \frac{-2/3}{2/3} = -1$$

Para $j = 4$: como $a_{14} =$ -1/3 < 0, temos

$$\Delta \leq \frac{-5/3}{-1/3} = 5$$

Assim, com $\Delta \in$ [-1; 5] garantimos a otimalidade da solução que já tínhamos. De fato, para qualquer função objetivo entre $2x + 4y$ e $8x + 4y$, ou seja, da forma

$$[2; 8]x + 4y,$$

a solução $x = 2$ e $y = 3$ continua ótima, mas fora desse intervalo não.

Exemplo 2. Considere o problema a seguir:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & -2x + 3y \\ \text{sujeito a} & 2x + y \leq 4 \\ & x - y \leq 5 \\ & -x + y \geq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

Aplicando o Método Simplex, obtemos a matriz abaixo:

3	0	1	0	1	3
3	0	1	1	0	9
2	1	1	0	0	4
-8	0	-3	0	0	-12

representando a solução $x = 0$, $y = 4$. A base tem (S_3; S_2; y). Queremos mudar o coeficiente de x:

$$max(-2 + \Delta)x + 3y$$

Como x não está na base,

$$\Delta \leq -(-8) \longrightarrow \Delta \leq 8$$

Para este problema, qualquer função objetivo da forma

$$(-\infty; 6]x + 3y$$

nos levará à mesma solução ótima, $x = 0$, $y = 4$. Quando o coeficiente de x é maior que 6, a solução muda.

5.6 Nova variável

Se uma nova variável x_{n+1} é adicionada ao problema, sem mudanças nos coeficientes já existentes em A, b e c, teremos uma nova coluna a_{n+1} em A e um novo elemento c_{n+1} em c. Podemos tomar a matriz que usamos para obter x^* e adicionar a nova coluna com a_{n+1} e c_{n+1}. Teremos também que calcular c_{n+1} - z_{n+1}. Isso já nos dará a informação que queremos: a solução x^* continuará sendo ótima somente se c_{n+1} - $z_{n+1} \leq 0$. Caso não seja, podemos imediatamente incluir a_{n+1} na base e usar o algoritmo Simplex para obter uma nova solução ótima. No entanto, há um problema: quando incluímos a nova variável, temos seus coeficientes na descrição inicial do problema, e não na matriz final. Temos que calcular a coluna a_{n+1} primeiro, e só depois determinar o coeficiente reduzido de custo da nova variável.

Exemplo 3. Considere o problema a seguir:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & x + 2y \\ \text{sujeito a} & x + y \leq 10 \\ & -3x + 5y \leq 15 \\ & y \geq 5 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

As matrizes inicial e final para este problema são mostradas a seguir.

1	1	1	0	0	10
-3	5	0	1	0	15
0	1	0	0	1	5
1	2	0	0	0	0

Figura 5.1: Matriz Inicial

1	0	1	0	-1	5
0	0	3	1	-8	5
0	1	0	0	1	5
0	0	-1	0	-1	-15

Figura 5.2: Matriz Final

A inversa da base está nas colunas 3, 4 e 5 da matriz final. Temos portanto

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora incluímos uma nova variável, z, no problema:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & x + 2y + 3z \\ \text{sujeito a} & x + y + z \leq 10 \\ & -3x + 5y + 2z \leq 15 \\ & y + z \geq 5 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

A coluna de z na matriz inicial seria

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Queremos incluir a coluna de z na matriz final. Calculamos

$$a_3^{'} = A_B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Incluímos a nova coluna na matriz:

1	0	1	0	-1	0	5
0	0	3	1	-8	-3	5
0	1	0	0	1	1	5
0	0	-1	0	-1	1	-15

Como o coeficiente reduzido de custo de z é 1, devemos incluí-lo na base.

1	0	1	0	-1	0	5
0	3	3	1	-5	0	20
0	1	0	0	1	1	5
0	-1	-1	0	-2	0	-20

Temos agora uma solução ótima,

$$x = 5,\ y = 0 \text{ e } z = 5$$

com valor $x + 2y + 3z = 1$ x $5 + 3$ x $5 = 20$.

A inclusão de uma variável nova pode tornar o problema ilimitado ou inviável.

5.7 Mudanças no Vetor b

Segundo Bazaraa, em [12], página 297, se o vetor do lado direito b for substituído por $b^{'}$, então $B^{-1}b$ será substituído por $B^{-1}b^{'}$. O novo lado direito pode ser obtido sem calcularmos diretamente $B^{-1}b^{'}$. Isso fica claro ao percebermos que $B^{-1}b^{'} = B^{-1}b + B^{-1}(b^{'} - b)$. Se as primeiras m colunas originam a identidade, então $B^{-1}(b^{'} - b) = \sum_{j=1}^{m} y_j(b_j^{'} - b_j)$ e, portanto, $B^{-1}b^{'} = \overline{b} + \sum_{j=1}^{m} y_j(b_j^{'} - b_j)$. Desde que z_j - $c_j \leq 0$ para todas as variáveis não básicas (para um problema de minimização), a única possíbilidade de violação da otimização é que o novo vetor $B^{-1}b^{'}$ tenha alguma entrada negativa. Se $B^{-1}b^{'} \geq 0$, então a mesma base continua ideal, e os valores das variáveis básicas são $B^{-1}b^{'}$ e da função objetivo tem valor $c_bB^{-1}b^{'}$. Caso contrário, o método Dual Simplex pode ser usado para encontrar uma nova solução ideal.

Exemplo:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & -2x+3y \\ \text{sujeito a} & 2x+y \leq 4 \\ & x-y \leq 5 \\ & -x+y \leq 1 \\ & x,y \geq 0 \end{array}$$

A matriz final é:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & 2/3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -1/3 & 0 & 8/3 & -4 \end{array}\right),$$

A solução é $x = 1$ e $y = 2$. A submatriz com a inversa da base é

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Note que os valores de x e y estão nas posições 1 e 3 do vetor ao lado direito, e podemos obter a solução calculando

$$A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Consideramos mudar b_3 para $b_3 + \Delta$. Queremos que para todo i,

$$x_i^* + {A_B^{-1}}_{i2}\Delta \geq 0$$

ou seja,

$$\Delta \geq \frac{x_i^*}{{A_B^{-1}}_{i3}}$$

$$\Delta = max \left\{ \frac{-6}{1}, \frac{-2}{2/3} \right\} \text{=-3}$$

$$\Delta = min \left\{ \frac{-1}{-1/3} \right\} =3$$

Assim, o valor de b_3 deve ficar entre 1 - 3 e 1 + 3, ou seja, $b_3 \in$ [-2, 4], para que a base atual continue ótima. No entanto, o valor da solução poderá mudar. Por exemplo, se tomarmos $b_3 = 2$, a mesma base é ótima, mas os valores das variáveis mudam:

$$A_B^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 7 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

O ótimo acontece com $x = 1/3$ e $y = 8/3$.

Capítulo 6

Considerações Finais

A partir desse trabalho podemos observar a possibilidade que existe em desenvolver a Programação Linear já no Ensino Médio. Sistemas lineares, equações e inequações são alguns dos vários assuntos desenvolvidos na matemática e que podem ganhar um atrativo extra com a introdução da Programação Linear. Acreditamos que, quando o aluno enxerga algumas aplicações nas teorias expostas no Ensino Médio, isso torna o ensino mais prazeroso. E o Método Gráfico traz essa possibilidade ao ensino. A contribuição de um *software* como o *Geogebra* abre um leque bastante interessante aos alunos e aos professores, pois o ganho visual e geométrico ajuda no entendimento do conteúdo. Outro ponto interessante é o fato de proporcionar ao aluno uma aula diferente, saindo do tradicional 'lousa e giz' e trabalhando com algo que praticamente todos os adolescentes apreciam, que é a tecnologia. Esperamos ter contribuido de alguma forma com ensino da matemática, principalmente com a sequência didática apresentada no capítulo 4. É uma forma do aluno entender algebricamente o conteúdo de Programação Linear e,ao mesmo tempo, enxergar com a geometria a utilidade desse conteúdo. Procuramos passar o conteúdo de uma forma didática, de forma que mesmo os alunos, com conhecimento visto em metemática no Ensino Médio, possam aplicar essas ferramentas no Geogebra com a ajuda de um professor.

Referências Bibliográficas

[1] Adilia Oliveira Neves Rafael: *Programação Linear e algumas aplicações.*, Universidade do Porto, Porto - Portugal, 2014.

[2] Osmar Crócoli.: *Programação Linear: Uma abordagem para o Ensino Médio*, UEM, Maringá,PR, 2016.

[3] Ramina Samoa Silva Camargo.: *Introdução à Programação Linear no Ensino Médio utilizando a resolação gráfica* , UFMA, Manaus, 2014.

[4] Gelson Iezzi e Carlos Murakami.:*Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 1*, Editora Atual, 3a. edição, São Paulo, 1977.

[5] Iezzi,G.[et al.]:*Matemática: Ciências e Aplicações - Volume 1*, Editora Saraiva,1a. edição, São Paulo, 2011.

[6] Biezuner,R.J.:*Sistemas Lineares*, Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/rodney/notas_de_aula/sistemas_lineares.pdf>.

[7] Ruana Maíra Schneider: *Método Simplex para programação linear* , UFSC, Florianópolis, 2013.

[8] LUENBERGER, David G.: *Introduction to linear and nonlinear programming.* , Reading: Addison-Wesley Publishing, c1973. xii, 356p .

[9] Stockton, R. S. : *Introdução à Programação Linear: Métodos quantitativos para o Comércio e à Economia.*, 3 ed., Editora ATLAS S.A., São Paulo, SP, 1973.

[10] Santos, M. P. : *Programação Linear*, UERJ, Rio de Janeiro, RJ, 2000.

[11] Zachi, J. M. : *Problemas de Programação Linear: uma proposta de resolução geométrica para o Ensino Médio com o uso do Geogebra*, UNESP, Araraquara, SP, 2016.

[12] BAZARAA,M.S.;JARVIS, J.J.: *Linear programming and Network Flows.* , Reading: Addison-Wesley Publishing, c2010. xii, 764p .

[13] Pellegrini, J. C. : *Programação Linear (e rudimentos de otimização não linear)*, 2017.