**Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**
**Coordenação do PROFMAT**

**ALESSANDRO BRAZILCAMARA DA COSTA**

# *A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO MEIO FACILITADOR DA COMPRENNSÃO DO INFINITO*

**Orientador: Dr. Mário Oliveiro**

**NITERÓI**
**maio/2013**

**ALESSANDRO BRAZIL CAMARA DA COSTA**

# A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO MEIO FACILITADOR DA COMPREENSÃO DO INFINITO

Dissertação apresentada por **Alessandro Brazil Camara da Costa** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

**Orientador: Dr. Mário Oliveiro**

Niterói
2013

**ALESSANDRO BRAZIL CAMARA DA COSTA**

**A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO MEIO FACILITADOR DA COMPREENSÃO DO INFINITO**

Dissertação apresentada por **ALESSANDRO BRAZIL CAMARA DA COSTA** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: História da Matemática.

**Aprovada em: 15/04/2013**

**Banca Examinadora**

---

Prof. Mário Oliveiro Marques da Silva - Orientador

Doutor – Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Jaime Velasco Câmara da Silva - Membro

Doutor – Universidade Estadual do Rio de Janeiro

---

Prof. Nancy Cardim - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Luiz Manoel Figueiredo - Membro

Doutor – Universidade Federal Fluminense

**NITERÓI**

**2013**

## DEDICATÓRIAS

A minha avó Aurora que sempre me ajudou e torceu por mim, e infelizmente nos deixou no decorrer do curso.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pois sem ele não conseguiria nada em minha vida.

A Gleyce Lanne minha esposa pela ajuda e compreensão em todos os momentos da minha vida.

Aos meus filhos Arthur e Davi Lucca, que serviram pra mim como estímulo para continuar e melhorar sempre.

Aos meus pais Silamar e Jair, e minha irmã Alessandra pelo apoio incondicional.

A todos os companheiros de turma que muito me ajudara a estudar, em especial ao Pedro Joly, que pesquisou este trabalho junto comigo.

Ao Professor Ayrton Pereira, pela ajuda na revisão do texto.

Aos professores do curso que muito ajudaram em especial a professora Mirian Abdón por toda ajuda e dedicação.

Ao professor orientador Mário Oliveiro por toda ajuda na revisão e criação no texto.

A todos os amigos que sempre torceram por mim.

# RESUMO

Este trabalho, primeiramente, aborda a matemática de uma forma geral, apresenta alguns aspectos históricos do infinito, começando por Zenão, passando por Galileu e Cantor. Além disso, sugere atividades e metodologias para serem usadas em sala de aula. A História da Matemática torna as aulas mais agradáveis, uma vez que os assuntos são inseridos em um contexto histórico.
O infinito é um assunto complexo e de difícil entendimento. Entretanto, sua compreensão é facilitada ao ser abordada em um contexto histórico. Os resultados de algumas experiências realizadas com alunos indicam as dificuldades dos discentes do ensino médio com o infinito e como a abordagem histórica pode facilitar essa compreensão.

## ABSTRACT

This task, initialy discusses mathematics ingeneral, regard some historical infinite aspects, begining in Zenão, undergoing Galileu and Cantor and it suggests activities and methodologies to be used in classroom.
The mathematics' history makes the classes more pleasant, once the subjects are inserted into a historical context.
Infinite is a complex subject and it's hard to be understood. Its understanding is facilitated when its approached in a historical context. The results of some experiences done with students are submitted and its indicates the difficulties of the high school students with the infinite and how the historical approach can facilitate this comprehension.

# Introdução

Na introdução deste trabalho, apresentaremos alguns aspectos de matemática, mostrando suas particularidades e ressaltando suas diferenças frente as outras ciências.

A matemática é uma ciência abstrata e por essa condição acaba sendo uma das matéria mais temidas do ensino básico. Por se tratar de uma matéria abstrata, exige muito do desenvolvimento do raciocínio lógico e é exatamente isso que um professor deve buscar desenvolver em seus alunos. A matemática deveria ser ensinada como se fosse um jogo, onde a cada série avançada, novas regras são acrescentadas.

Essa abstração inerente a matemática acaba delegando muito "poder" ao professor e cabe a este perceber o quão rigoroso ele está sendo em sua cobrança. Por vezes esse poder é usado de forma indevida, protegendo o seu próprio ego. O professor deve ser cuidadoso, fazendo com que a matemática continue a ser desafiadora para os alunos, porém sem tornar-se *impossível*.

Quando discutimos o abstrato, em matemática, fatalmente acabamos chegando ao conceito de infinito. Por muitos anos o infinito desafiou os matemáticos, e muitos de seus aspectos continuam apresentando grandes questões para a sociedade matemática, preservando muitos de seus mistérios. Por se tratar de um assunto tão delicado e repleto de histórias, esse será um dos assuntos principais deste trabalho. Apresentaremos a matemática enquanto ciência e chegaremos ao limite da abstração, tratando de temas que envolvem o conceito de infinito.

Nas próximas seções, ressaltaremos alguns aspectos típicos de Matemática, desenvolvendo algumas ideias e mostrando algumas práticas que a caracterizam.

É importante ressaltar que este trabalho de conclusão de curso apresenta uma parte em comum com o trabalho "Infinitos Enumeráveis e Não Enumeráveis " , de Pedro Joly Paranhos.

# 2
# Modelo Matemático

Apesar de suas características de abstração e independência das outras ciências, e talvez exatamente por isso, a Matemática serve para estudar e expressar fenômenos em geral. Desta forma, a parte de modelagem matemática tem uma grande importância tanto prática como histórica para a própria Matemática e certamente para as outras ciências. Essa é a oportunidade em que a matemática aproveita para deixar um pouco de ser algo substancialmente abstrato para então interagir com a natureza e o mundo.

Um modelo matemático é uma versão simplificada de parte do mundo que é estudado, na qual os cálculos são possíveis. Ou seja, é uma forma de descrever matematicamente uma situação usando as informações necessárias para chegar a uma resposta, de modo mais fiel possível. Lembrando que, quanto mais dados temos, melhor será nossa resposta. Porém, maiores serão as dificuldades de calculá-la e em muitos casos, a diferença dessa resposta para a outra, calculada com menos dados, é tão desprezível que não compensa o esforço.

Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 1:** ( Atirando uma Pedra ) Vamos considerar a questão de como lançar uma pedra para que a distância que ela cobrirá no solo seja a mais longa possível.

Se atirarmos a pedra horizontalmente, ela terá bastante velocidade, porém não ficará muito tempo no ar, devido a ação da gravidade, e não alcançará uma longa distância.

Se a atirarmos na direção vertical, ela ficará mais tempo no ar, mas não percorrerá quase nada, uma vez que estamos interessados na distância percorrida no solo.

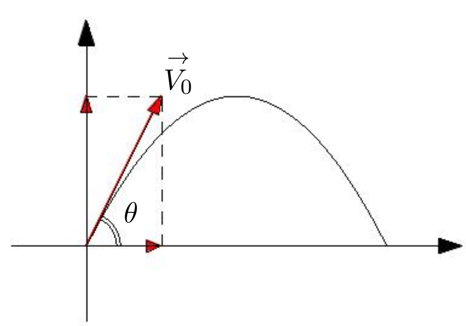


Figura $A_1$ - Lançamento de uma Pedra

Portanto, há de haver um equilíbrio entre os ângulos de lançamento para que a velocidade, o tempo no ar e a distância percorrida no solo sejam maximizadas. Isso se dá entre os dois ângulos avaliados $0^o$ e $90^o$ , ou seja, $45^o$.

Realmente, veja como isso acontece, segundo o modelo mtemático.

Lembramos o "Princípio da Independência dos Movimentos ", proposto por Galileu. Este princípio afirma que o movimento da pedra é composto de dois movimentos que ocorrem independentemente, um na direção de $x$, que queremos maximizar, e outro na direção de $y$.

O movimento na direção de $y$ é do tipo uniformemente variado, pois sofre a ação da gravidade.

Se representarmos por $\vec{V_y}$ a componente da velocidade na direção $y$, temos

$$\vec{V_y} = \vec{V_0}\ y \ - \ g\, t \ = \ \| \vec{V_0} \| \operatorname{sen}(\theta) \ - \ g\, t,$$

onde $\theta$ é o ângulo de lançamento, $g$ a constante gravitacional e $t$ representa o tempo.

Integrando esta equação, obtemos a equação do movimento na direção $y$ :

$$y \ = \ \| \vec{V_0} \| \operatorname{sen}(\theta)\, t \ - \ \frac{g\, t^2}{2}.$$

A altura máxima ocerrerá se $\vec{V_y} = \ 0$. Isto determina o tempo:

$$t \ = \ \frac{\| \vec{V_0} \| \operatorname{sen}(\theta)}{g}.$$

No modelo, consideramos que a pedra demorará o mesmo tempo para atingir o ponto de altura máxima e voltar à terra, desprezando, por exemplo, a interferência do ar. Assim, o tempo total gasto no movimento será

$$\frac{2 \| \vec{V_0} \| \operatorname{sen}(\theta)}{g}.$$

Consideremos agora o movimento horizontal, que queremos otimizar. No modelo, este movimento será do tipo uniforme:

$$x \ = \vec{V_x}\ t \ = \ \| \vec{V_0} \| \cos(\theta)\, t.$$

A distância percorrida será

$$x \ = \ \frac{2 \| \vec{V_0} \|^2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)}{g} \ = \ \frac{\| \vec{V_0} \|^2 \operatorname{sen}(2\,\theta)}{g}.$$

Note que esta distância depende de $\theta$.

O máximo $x$ ocorrerá no valor máximo de $f$, para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Como $f'(\theta) = 2\,cos(2\,\theta)$, $x$ assumirá seu maior valor se $\theta = \frac{\pi}{4}$, pois $f'(\pi/4) = 2\,\cos(\pi/2) = 0$.

**Exemplo 2:**

Imagine que seja necessário elaborar os horários para um curso que é dividido em módulos. Os números dos possíveis horários para palestras são limitados, então, alguns módulos podem ter horário coincidentes com outros. Há uma lista com os alunos de cada módulo e é necessário escolher os horários de forma que dois módulos só ocupem o mesmo horário se não houver coincidência de alunos inscritos nos mesmos.

Numa outra situação, suponha que está sendo desenhando um mapa, dividido em regiões, usando-se cores diferentes para as regiões adjacentes. Note que a adjacência significa fronteira com mais do que um ponto comum. O problema é encontrar uma forma de colorir o mapa usando o menor número de cores.

Essas duas situações-problema parecem ser muito diferentes, mas uma escolha apropriada de um modelo mostra que, do ponto de vista matemático, elas são equivalentes. Em ambos os casos, temos objetos (países, módulos) aos quais algo deve ser atribuído (cores, horários). Alguns pares desses objetos são incompatíveis (módulos com horários distintos, regiões adjacentes) no sentido que não se pode lhes fazer a mesma atribuição. Em nenhum dos dois problemas, nós nos preocupamos com o que os objetos são ou o que está lhes sendo atribuído. Então, nós os representamos como pontos. As relações entre eles é representada por linhas que os conectam. Esse tipo de estrutura matemática é conhecida por grafo. Os pontos são chamados de vértices do grafo e os segmentos que eventualmente unem pares de pontos são as arestas.

Uma vez que apresentamos o problema dessa forma, nossa tarefa, em ambos os casos, é dividir os vértices em um pequeno número de grupos de tal maneira que nenhum grupo contenha dois vértices ligados por uma aresta. Essa é outra razão para se utilizar modelos o mais simples possível.

Vejamos um exemplo que ilustrará essa questão. Queremos pintar um mapa com cinco regiões usando o menor número de cores diferentes. Veja o mapa na figura a seguir.

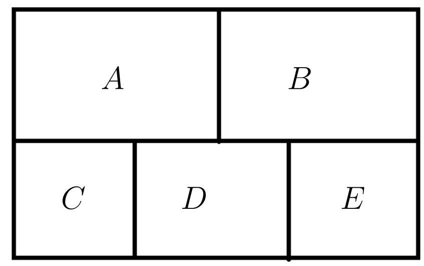


Figura $A_2$ - Mapa

Na construção do grafo correspondente ao mapa, a cada região corresponderá um vértice denominado pela mesma letra - $A$, $B$, $C$, $D$, e $E$.

As fronteiras comuns determinarão as arestas do grafo. Note que o vértice correspondente a região $A$, por exemplo, estará conectada aos vértices $B$, $C$ e $D$. No entanto, não estará conectado ao vértice $E$, correspondente à região que não é adjacente a $A$.

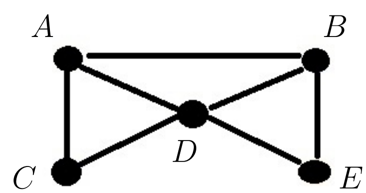


Figura $A_3$ - Grafo

O problema de colorir o mapa passa a ser uma questão de colorir vértices do grafo com a condição de se usar cores diferentes para pares de vértices conectados por arestas.

Ao escolhermos uma cor para $A$, o único vértice que poderá ser colorio com essa mesma cor é o vértice $E$. Como queremos minimizar o número de cores, isto determina essa escolha. Analogamente, a escolha do vértice $B$ determina a escolha da cor do vértice $C$. Finalmente, o vértice $D$ deverá ser colorido com uma nova cor, uma vez que ele está conectado a todos os demais vértices.

Neste caso, o número mínimo de cores é três.

O ganho ao se fazer essa modelagem é dispor de toda a informação conhecida a respeito de grafos.

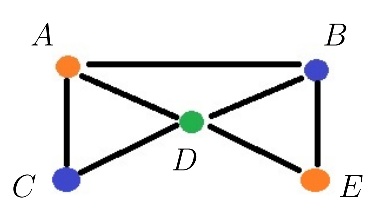


Figura $A_4$ - Grafo

O problema de colorir mapas com um número mínimo de cores, sem que regiões adjacentes tenham cores iguais, ficou conhecido como "Problema de Guthrie"quando o matemático Frederick Guthrie o conjecturou em 1852. Somente em 1977, Kenneth Ira Appel e Wolfgang Haken, com o uso de computadores, provaram que era possível colorir qualquer mapa, segundo as regras já especificadas, usando apenas 4 cores. Essa prova foi importante, pois mostrou que a tecnologia poderia ser usado como uma ferramenta para provas matemáticas.

## A matemática e as outras ciências

Normalmente a ciência estuda os fatos e baseia suas teorias de acordo com as experiências. Se um determinado evento acontece inúmeras vezes, isso basta para comprovar uma teoria sobre aquele evento. Já na matemática isso não é válido. Por mais que um evento aconteça 10.000 vezes em 10.000 tentativas, esse experimento ainda não é válido para comprovar uma teoria.

A matemática acontece no "mundo das ideias" e para uma teoria ser válida precisa ser também verdadeira no "mundo das ideias". Sendo assim, é preciso testar todos os casos, esgotar até mesmo as infinitas possibilidades de um evento para que só então ele seja reconhecido como uma teoria válida. Pois, testando 10.000 vezes ainda é possível crer que na 10.001 algo não daria mais certo, e por essa razão a matemática esgota todas as possibilidades. O "mundo das ideias" nos traz a vantagem de podermos varrer uma infinidade de possibilidades e não apenas um número finito. Essa abstração que a matemática nos permite é o que fascina tantos os matemáticos. Para fazer isso, a Matemática faz uso da lógica para estabelecer suas verdades científicas.

### Prova matemática

Como mencionamos anteriormente, na matemática não há espaço para a dúvida. Os fatos devem ser provados para terem validade. É preciso mostrar que em momento algum o que queremos demonstrar irá se desviar do resultado que esperamos. Para isso existem algumas formas de provar uma teoria.

#### Redução ao Absurdo

*"Prova por contradição (ou redução ao absurdo, do latim reductio ad absurdum) é um método de prova matemática indireta, não-construtiva. Este tipo de prova é feito assumindo-se como verdade o contrário do que queremos provar e então chegando-se a uma contradição.*

*A prova por contradição é muito usada em teoremas de existência. Neste caso, é usada para provar a existência de um elemento com determinada característica, sem no entanto mostrar tal elemento. Por esta razão, alguns matemáticos a evitam quando possível, preferindo métodos de prova construtivos. O fato é que existem teoremas para os quais só se conhece prova por contradição, como o argumento de diagonalização de Cantor para demonstrar a não-enumerabilidade dos números reais."*

( Site: pt.wikipedia.org/wiki/prova$_{p}or_{c}ontradicao$)

**Exemplo 3:**

Demonstração por Redução ao Absurdo.

Para demonstrarmos que $\sqrt{2}$ é irracional, iremos supor que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Sendo $\sqrt{2}$ um número racional, é cabível admitir que este possa ser escrito da forma $\frac{p}{q}$ de maneira irredutível, isto é, onde $p$ e $q$ são primos entre si, ou seja, ($mdc(p,q) = 1$), e $q \neq 0$.

Seja $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ onde $mdc(p,q) = 1$ e $q \neq 0$.

Então, elevando ambos os lados a segunda potência, teremos que:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \ \therefore \ 2q^2 = p^2$$

como $p^2$ é múltiplo de 2 , podemos afirmar que $p$ é par.

Seja $p = 2k$, então substituindo na equação anterior teremos:

$$2q^2 = (2k)^2 \ \therefore \ 2q^2 = 4k^2 \ \therefore \ q^2 = 2k^2$$

Note que, como $q^2$ é igual a $2k^2$, $q^2$ é múltiplo de 2 e portanto, um número par. Sendo $p$ e $q$ números pares, chegamos aqui a um absurdo, pois se $p$ e $q$ são números pares então a fração $\frac{p}{q}$ não estava na forma irredutível, o que contradiz a hipótese. Logo conclui-se que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como um número da forma $\frac{p}{q}$ com $p$ e $q$ inteiros, ou seja, $\sqrt{2}$ é irracional.

$\square$

**Método de Indução**

Outro método de demonstração matemática é o método de indução. Este método consiste em mostrar a veracidade para o primeiro caso, assumir verdade para o caso $n$ e provar que também será válido para o caso $n+1$. Dessa forma provaremos que a teoria é válida para o primeiro caso e para os próximos, podendo com isso varrer uma infinidade de casos. Tomaremos como exemplo um fato a muito conhecido na matemática. A soma parcial da sequência dos números ímpares é sempre um quadrado perfeito.

**Exemplo 4:** Queremos provar que a soma, ordenada, dos números ímpares resulta em um quadrado perfeito, ou seja,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

**Demonstração:**

- Se $k = 1$, então $S_1 = 1 = 1^2$. A afirmação é verdadeira para o caso $k = 1$.
- Se $k = 2$, então $S_2 = 1 + 3 = 2^2$. A afirmação é verdadeira para o caso $k = 2$.
- Assumimos verdade para o caso $k = n$, então $S_n = n^2$
- Queremos provar que é válido para $k = n + 1$ , logo:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= [1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1] + 2(n + 1) - 1\\
S_{n+1} &= [1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1] + 2n + 2 - 1\\
S_{n+1} &= [1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1] + 2n + 1\\
S_{n+1} &= n^2 + 2n + 1\\
S_{n+1} &= (n + 1)^2.
\end{aligned}$$

□

Podemos também demonstrar geometricamente, usando figuras e argumentos geométricos para embasar nossas ideias. Trabalhando com o mesmo exemplo, temos que:

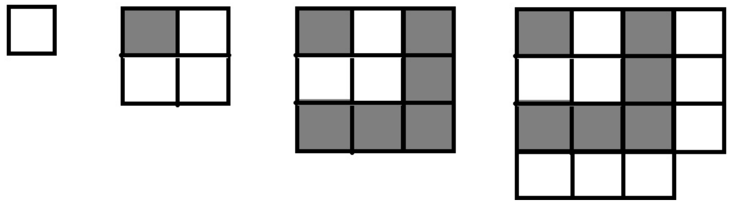

Figura $A_5$ - quadrados

Ou seja, sempre que aumentamos em uma unidade o lado do quadrado $(n+1)$ temos que acrescentar $n$ unidades em dois lados adjacentes e um quadrado comum aos dois lados. Assim teremos sempre o acréscimo de $2n+1$ unidades ao passarmos um quadrado de área $n^2$ para um quadrado de área $(n+1)^2$.

Este exemplo fica como uma sugestão de oficina. Seria interessante trabalharmos essas duas formas de demonstração nas séries do ensino médio onde trabalhamos com progressões. Poderíamos apresentar, em salas distintas, a forma "literal" e a forma "figurativa" dessa demonstração e avaliar qual delas é melhor compreendida pelos alunos. Seria válido também utilizarmos notações como o símbolo de somatório, etc.

# Definições e Notações Matemáticas

Neste capítulo, estabeleceremos algumas notações e definições matemáticas que serão usadas posteriormente. Apresentaremos também alguns exemplos.

**Definição 1** (Função Injetora)**.** *Dizemos que a função $f : A \longrightarrow B$ é* injetora *se, para quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) \neq f(x_2) \in B$. Ou seja, $f$ aplica elementos distinto de $A$ em elementos distintos em $B$.*

**Exemplo** (Função Injetora) No diagrama a seguir, vemos uma função injetora.

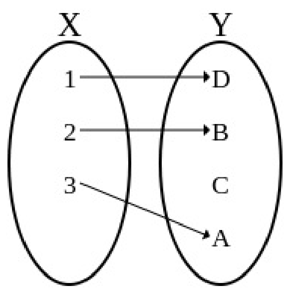


Figura $A_6$ - Função Injetora

A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \arctan(x)$ é uma função injetora. Realmente, se $x_1 \neq x_2$, então

$$\arctan(x_1) \neq \arctan(x_2).$$

Veja o gráfico de $f$ a seguir.

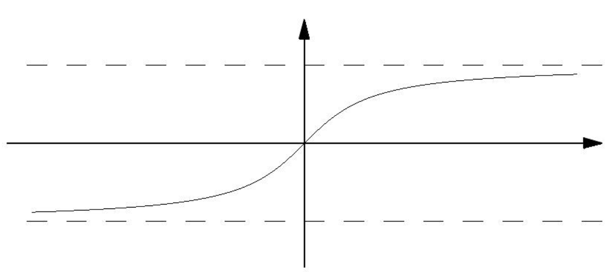

Figura $A_7$ - Função Arco Tangente

**Definição 2** (Função Sobrejetora)**.** *Dizemos que a função $f : A \longrightarrow B$ é* sobrejetora *se, para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Isto é, $B = \mathrm{Im}(f)$.*

**Exemplo** (Função Sobrejetora) No diagrama a seguir, vemos uma função sobrejetora.

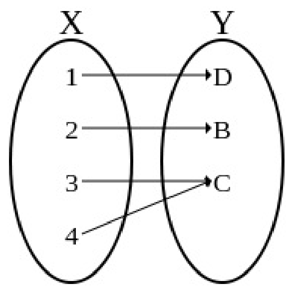


Figura $A_8$ - Função Sobrejetora

Consideremos também a seguinte situação: Vamos identificar $\mathbb{R}^2$ com o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, estabelecendo

$$(x,\, y) \;\mapsto x + i\, y.$$

Lembremos a forma polar de $z \;=\; x + i\, y$:

$$z \;=\; r\,(\cos\theta \;+\; i\,\mathrm{sen}\,\theta) \;=\; r\, e^{i\,\theta}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $p_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ a função definida por $p_n(z) \;=\; z^n \;=\; r^n\, e^{i\,n\theta}$.

Seja $S^1 \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\; x^2 + y^2 \;=\; 1\} \;=\; \{z \in \mathbb{C};\; \|z\| \;=\; 1\}$, o círculo de centro na origem e raio 1.

Este conjunto é formado pelos números complexos de norma 1, que têm a forma polar $e^{i\,\theta}$.

A função $p_n$ restrita a $S^1$, tomando valores em $S^1$, define uma aplicação de $S^1$ em $S^1$, de grau $n$. Veja a ilustração de $p_n$ para $n = 3$.

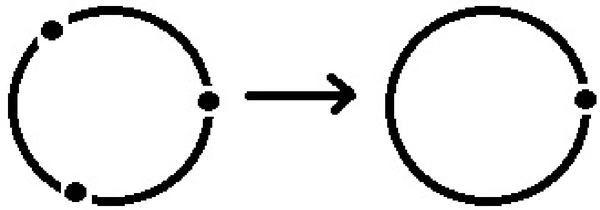

Figura $A_9$ - Aplicação de $S^1$ em $S^1$, de grau 3

Cada setor de abertura $2\pi/3$ recobre $S^1$ uma vez. Esta é chamada uma aplicação de recobrimento e é um exemplo de uma função sobrejetora, localmente injetora, porém não injetora.

**Definição 3** (Função Bijetora)**.** *Dizemos que a função $f : A \longrightarrow B$ é* bijetora *se é injetora e sobrejetora.*

**Exemplo** (Função Bijetora) Veja um exemplo de função bijetora no diagrama a seguir.

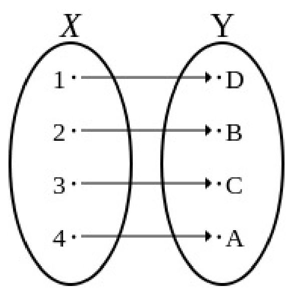


Figura $A_{10}$ - Função Bijetora

A projeção estereográfica é um outro exemplo de função bijetora.

**Exemplo** (Projeção Estereográfica)

$$S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$
$$N = (0, 0, 1) \in S^2.$$

Vamos identificar $\mathbb{R}^2$ com o subespaço

$$\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x, y \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3.$$

Dado um ponto $(x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\}$ , vamos considerar $f(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ o ponto obtido pela interseção da reta $r$ , que contem $(x, y, z)$ e $N$ , com $\mathbb{R}^2$ :

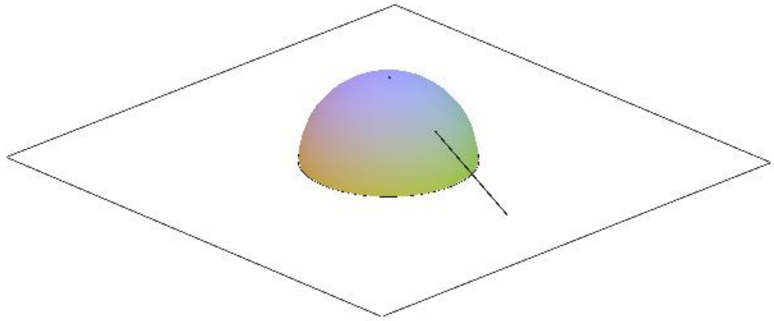

Figura $A_{11}$ - Bijeção entre uma Esfera sem o polo norte e o Plano

Para calcular as coordenadas de $f(x,y,z)$ , consideramos uma parametrização da reta $r$ :

$$t(x,y,z) \ + \ (1-t)N \ = \ (x\,t, y\,t, z\,t) \ + \ (1-t)\,(0,0,1) \ = \ (x\,t, y\,t, z\,t+1-t)$$

O ponto $f(x,y,z)$ tem a terceira coordenada igual a zero: $z\,t+1-t=0$. Calculando o valor de t, temos $t \ = \ \dfrac{1}{1-z}$

Portanto,

$$f(x,y,z) \ = \ \left(\frac{x}{1-z}\,,\frac{y}{1-z}\right).$$

Para verificar que $f$ é uma função bijetora, vamos construir sua inversa:

$$g \ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}.$$

Seja $s$ a reta que contem o ponto $(x,y,0)$ e $(0,0,1)$ , com parametrização

$$(t\,x, t\,y, 0) + (0,0,1-t) \ = \ (t\,x, t\,y, 1-t).$$

Para calcular a interseção de $s$ com a Esfera $S^2$ , fazemos

$$t^2\,x^2 + t^2\,y^2 + (1-t)^2 \ = \ 1$$

Resolvendo esta equação em $t$ , obtemos

$$t \ = \ \frac{2}{x^2+y^2+1}\,.$$

Assim,

$$g(x,y) \;=\; \left( \frac{2\,x}{x^2+y^2+1}\;,\; \frac{2\,y}{x^2+y^2+1}\;,\; \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right)\;.$$

Para mostrar que $f\circ g \;=\; I_{\mathbb{R}^2}$, observe que:

$$\frac{\dfrac{2\,x}{x^2+y^2+1}}{1-\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}} \;=\; \frac{2\,x}{x^2+y^2+1-x^2-y^2+1} \;=\; x.$$

Portanto,

$$f\circ g(x,y) = \left( \frac{\dfrac{2\,x}{x^2+y^2+1}}{1-\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}}, \frac{\dfrac{2\,y}{x^2+y^2+1}}{1-\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}} \right) = (x,y).$$

Um cálculo similar mostra que a composição $g\circ f$ é igual a $I_{S^2\setminus\{N\}}$.

## Conjunto Infinito

Apresentamos aqui a definição de conjunto infinito, conceito central deste trabalho de conclusão de curso.

**Definição 4** (Conjunto Infinito)**.** *Um conjunto $S\neq\varnothing$ é dito* infinito *se existe uma aplicação bijetora $f:S\longrightarrow T$, de $S$ em um subconjunto próprio $T$ de $S$ $(T\subsetneq S)$.*

**Exemplo** (Conjunto dos Números Naturais) O conjunto dos números naturais é infinito, pois podemos considerar $f:\mathbb{N}\longrightarrow 2\mathbb{N}$, a função definida por $f(n)=2n$, de $\mathbb{N}$ em $2\mathbb{N}=\{p\in\mathbb{N};\; p=2n, n\in\mathbb{N}\}$, o conjunto dos números pares. É claro que $2\mathbb{N}\subsetneq\mathbb{N}$.

**Exemplo** (Intervalos da Reta) Cada intervalo da reta do tipo $[a,\,b]$ , com $a\neq b$ , é um conjunto infinito. Realmente, vamos construir uma função bijetora de $[a,b]$ em $[a,\,\frac{a+b}{2}]$. Para tanto, observe a figura a seguir.

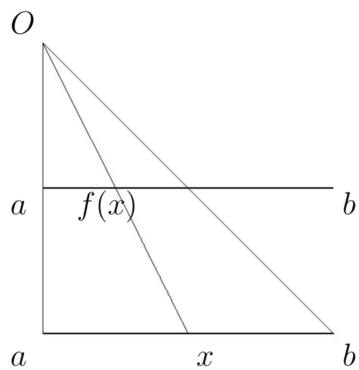


Figura $A_{12}$ - Função Bijetora

A função $f : [a,\, b] \longrightarrow [a,\, \frac{a+b}{2}]$, definida a partir da figura, é uma bijeção. A definição de $f$ é

$$f(x) \;=\; \frac{x}{2} + \frac{a}{2}.$$

Note também que a função arcotangente, sendo uma função bijetora de $\mathbb{R}$ em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, garante que $\mathbb{R}$ é um conjunto infinito.

**Proposição 1.** *Se $N$ é um conjunto infinito e $N \subset M$, então $M$ é um conjunto infinito.*

**Demonstração:** Como $N$ é um conjunto infinito, existe $f : N \longrightarrow L$ uma função bijetora que leva $N$ em um subconjunto próprio $L \subsetneq N$. Podemos estender essa função $f$ para uma função $F : M \longrightarrow L \sqcup (M \setminus N)$, colocando

$$F(x) \;=\; \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x \in N, \\ x, & \text{se} \quad x \in L \sqcup (M \setminus N). \end{cases}$$

A função $F$ é uma aplicação bijetora de $M$ em $L \sqcup (M \setminus N) \subsetneq M$ e isso prova que $M$ é infinito.

$\square$

# Alguns mistérios do Infinito

Neste capítulo trataremos de alguns aspectos históricos do infinito.

## Os paradoxos de Zenão

Zenão de Eleia nasceu por volta do ano de 489 a.C., era discípulo de Parmênides e defensor árduo de seu pensamento.

Segundo Aristóteles, Zenão foi o fundador da Dialética como arte de provar ou refutar a verdade de um argumento, partindo de princípios admitidos por seu interlocutor. Platão disse que ele nada mais fez do que fundamentar a tese de seu mestre, mas não provando que o *ser* é *um* e sim demonstrando que o *multiplo* é impensável.

Para mostrar aos seus adversários no que consistia a unidade ou repouso do ser, evidenciando que o movimento ou pluralidade é impossível, Zenão propôs alguns paradoxos (para = contra; doxa = opinião), com os quais refutava teses apresentadas como meras opiniões, vias do não ser, características das confusões causadas pela percepção humana.

Esses pardoxos eram usados como argumentos para provar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade, divisibilidade e movimento. Partindo das premissas de seus oponentes, as reduzia ao absurdo e com isso sustentava o ponto de fé dos eleásticos e de seu mestre Parmênides, que ia contra as ideias pitagóricas. Como em outros pré-socráticos, não possuímos na atualidade nenhuma obra completa de Zenão, sendo as fontes principais para os seus paradoxos as citações na obra de Aristóteles e do comentador aristotélico Simplício.

*"O que se move deve sempre alcançar o ponto médio antes do ponto final"* (Zenão de Eleia - Os Pensadores)

## Argumentos contra o movimento

Aristóteles escreve na Física que Zenão enunciou quatro argumentos contra o movimento, conhecidos como os paradoxos do estádio, de Aquiles e a tartaruga, da flecha voando e das filas em movimento.

*"a impossibilidade do movimento é deduzida do fato de que o móvel transportado deve chegar primeiro à metade antes de alcançar o termo."*

*"o mais lento na corrida jamais será alcançado pelo mais rápido; pois o que persegue deve sempre começar por atingir o ponto donde partiu o que foge."* (Os Pré-Socráticos, 1985)

*"Se existe o menor segmento que mede uma mônada, então podemos tomar dois desses segmentos, apoiados numa mesma reta e muito próximos um do outro; tão próximo quanto se queira, porém que não se toquem e deixe entre si um pequeno intervalo. Ora, como o segmento que mede uma mônada é o menor que existe, então nesse intervalo cabe um deles (pelo menos) e não esgota o intervalo todo, porque ele é o menor; e deixa então dois outros intervalos bem pequeninos, nos quais certamente caberão dois segmentos que medem uma mônada cada (pois a mônada é o menor segmento); neste caso, essas duas mônadas intercaladas vão deixar quatro intervalos, nos quais caberão quatro mônadas que, pelo fato de não esgotarem cada intervalo, deixarão a seguir oito intervalos... e assim por diante..."* (PIERRO NETO, 1995)

Apresentaremos aqui o paradoxo de Aquiles e a tartaruga.

## Aquiles e a tartaruga

Neste paradoxo, Zenão considera a questão do movimento relativo de dois corpos. Desta vez o argumento é o seguinte:

Aquiles, o herói grego, e a tartaruga decidem apostar uma corrida. Como Aquiles é muito mais veloz do que a tartaruga, esta recebe uma vantagem, começando a corrida em um ponto mais a frente do ponto de largada de Aquiles.

Zenão argumenta que Aquiles nunca ultrapassará a tartaruga, pois ao chegar à posição inicial A de largada da tartaruga, esta encontra-se mais a frente, numa outra posição B. Quando Aquiles chegar a B, a tartaruga não está mais lá, pois já avançou para uma nova posição C, e assim sucessivamente.

Figura $A_{13}$ - Aquiles e a tartaruga

O paradoxo se coloca quando supomos que a soma de infinitos intervalos de tempo é infinta, de tal forma que seria necessário um tempo infinito para Aquiles alcançar a linha de chegada.

A contradição desaparece se admitirmos que a soma de uma infinidade pode resultar em algo finito. Isso pode ser conseguido usando o conceito de limite.

## Incoerências do paradoxo

A questão central dos paradoxos de Zenão reside na impossibilidade de considerar segmentos de espaço e de tempo como sendo formados por uma infinidade de elementos individuais e, não obstante, separados uns dos outros, isto é, descontínuos.

Zenão sabia, evidentemente, que Aquiles podia alcançar a tartaruga, que um corredor pode percorrer o estádio, e que uma seta em voo se move. Pretendia simplesmente demonstrar as consequências paradoxais de encarar o tempo e o espaço como constituídos por uma sucessão infinita de pontos e instantes individuais consecutivos como as contas de um colar.

Concluímos que uma solução para esse paradoxo utiliza o conceito de limite e convergência de séries numéricas. O paradoxo surge ao supor intuitivamente que a soma de infinitos intervalos de tempo é infinita, de tal forma que seria necessário passar um tempo infinito para Aquiles alcançar a tartaruga. No entanto, os infinitos intervalos de tempo descritos no paradoxo formam uma progressão geométrica e sua soma converge para um valor finito, em que Aquiles encontra a tartaruga.

Por exemplo, sabemos que a soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $a$ e de razão $r$, é

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a\, r^i \; = \; a + a\, r + a\, r^2 + \ldots a\, r^{n-1} \; = \; a\, \frac{r^n - 1}{r - 1} \; = \; a\, \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Se $0 < r < 1$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - r^n}{1 - r} = \dfrac{1}{1 - r}$ e podemos dizer que a soma dos infinitos termos da progressão geométrica é

$$S_\infty \; = \; \frac{a}{1 - r}.$$

## Paradoxo de Galileu

Durante o Renascimento, o cientista Galileu Galilei (1564 -1642), foi o primeiro a dedicar seus estudos ao infinito na obra “Diálogo Referente às Novas Ciências” , de 1636, onde apresentou um paradoxo estabelecendo uma bijeção entre os números naturais e seus quadrados.

Não menos impressionante é o Paradoxo de Galileu, que aparentemente afirma coisas contraditórias sobre o conjunto dos números naturais. Alguns naturais são quadrados perfeitos, isto é, o quadrado de um natural, enquanto outros não.

Portanto “há mais números naturais do que quadrados perfeitos” . Observe, no entanto, que os dois conjuntos são infinitos e que a função $f(n) = n^2$ estabelece uma função bijetora entre eles. Assim, a conclusão “intuitiva” de que há mais naturais do que quadrados perfeitos precisa ser “ajustada” a esta situação, e esse ajuste foi uma das conquistas da matemática no início do século XX.

A resolução exposta por Galilei é que ao compararmos dois ou mais conjuntos infinitos é incoerente dizer que um conjunto é maior ou menor que outro. E, podemos dizer que a quantidade de elementos do conjunto dos números naturais e o conjunto com todos os quadrados são iguais, pois podemos fazer uma bijeção entre os dois conjuntos infinitos. Seria isto que Cantor utilizaria para desenvolver a teoria dos conjuntos infinitos.

Em 1820, quase 200 anos depois dos *Diálogos de Galilei*, surge um tratado do alemão Benhard Bolzano (1781 -1848) intitulado *Os paradoxos do infinito*, que também ficou esquecido. Entretanto, temos que creditar a Bolzano a criação do conceito potência de um conjunto, que é o seguinte: dois conjuntos têm a mesma potência se existe uma bijeção entre eles. Após *Os Paradoxos de Bolzano*,em 1878, J.W.R. Dedekind (1831 -1916) foi o primeiro a ver nos paradoxos não uma anomalia, mas uma propriedade universal dos conjuntos infinitos que tomou-a como uma definição precisa, onde constava:

"um sistema S é infinito quando é semelhante a uma parte própria dele mesmo, caso contrário S se diz um sistema finito".

## George Cantor

George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu em São Pertersburgo, na Rússia, em 1845 e se dedicou a inteiramente ao estudo do infinito.

Devido a dificuldade de se trabalhar com infinitos, Cantor decidiu compará-los, estabelecendo bijeções entre os conjuntos. Ele utilizou uma estratégia que poderia ser usada por qualquer pessoa que não soubesse contar. Partindo do princípio que, dadas duas caixas com bolas, a questão de saber qual delas teria mais bolas poderia ser facilmente respondida tirando simultaneamente uma bola de cada caixa: caso uma caixa ficasse vazia antes da outra, essa caixa teria menos bolas; se ambas as caixas ficassem vazias ao mesmo tempo, elas teriam a mesma quantidade de bolas.

O Matemático utilizou o mesmo mecanismo, mas em vez de usar bolas usou números; em vez de usar caixas usou aquilo a que ele chamou conjuntos ou classes. Um conjunto ou classe é simplesmente uma coleção de coisas semelhantes, podem ser maçãs, bolas, pessoas, linhas, pontos, números, bem como qualquer outra coisa. Contudo o referido estudioso decidiu que os membros dos conjuntos com o qual trabalharia seriam todos números, tendo uma propriedade em comum. Assim, os membros de um conjunto seriam os números pares, de outro os ímpares, de outro os inteiros, e assim sucessivamente. George Ferdinand procedeu então à comparação do tamanho ou *cardinalidade* destes conjuntos, emparelhando os seus elementos. Se fosse possível estabelecer uma bijeção entre dois conjuntos, então eles teriam a mesma cardinalidade.

Tomando o conjunto dos números naturais, emparelhou os seus elementos com os do conjunto dos números pares, e descobriu que há tantos naturais quanto números pares. Essa mesma bijeção, entre $\mathbb{N}$ e um de seus subconjuntos próprios estabelece o fato de que $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito. Essa bijeção pode ser ilustrada na tabela a seguir:

| Natural | Natural par |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 6 |
| 4 | 8 |
| 5 | 10 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $2n$ |

Cantor chegou à conclusão de que qualquer subconjunto infinito dos inteiros tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos números inteiros. Por exemplo, há tantos quadrados quanto números inteiros negativos, há tantos cubos quanto números divisíveis por 100, há tantos ímpares quanto múltiplos de 2000.

Observe:

| Natural | Quadrado | Inteiro negativo | cubo | Divisiveis por 100 | Múltiplos de 2000 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -1 | 1 | 100 | 2000 |
| 2 | 4 | -2 | 8 | 200 | 4000 |
| 3 | 8 | -3 | 27 | 300 | 6000 |
| 4 | 16 | -4 | 256 | 400 | 8000 |
| 5 | 32 | -5 | 625 | 500 | 10000 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n$ | $n \times n$ | $-n$ | $n \times n \times n$ | $100n$ | $2000n$ |

Diante das observações analisadas Cantor representou esta *cardinalidade* por $\aleph_0$. Aleph é a primeira letra do alfabeto hebraico. Para distinguir este novo número dos número finitos, ele designou-o como transfinito.

Uma razão para chamar esse novo objeto matemático de número se deve ao fato de ser possível realizar operações com ele e com os outros números.

Por exemplo, mostra-se que $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ e $2\aleph_0 = \aleph_0$.

Realmente, podemos dizer que $2\aleph_0$ é a cardinalidade de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Assim, a igualdade $2\aleph_0 = \aleph_0$ quer dizer que os conjuntos $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$ têm a mesma cardinalidade. Realmente, a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida pela equação

$$f(u, v) \ = \ \frac{(u+v)(u+v+1)}{2} + u$$

é bijetora. Isso fica evidente ao observarmos a tabela a seguir, na qual as antidiagonais mostram a sequência ordenada dos números naturais.

$$\begin{array}{cc|cccccccc}
 & & & & & v & & & & \\
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \dots \\
 & 1 & 2 & 4 & 7 & 11 & 16 & 22 & \dots & \\
 & 2 & 5 & 8 & 12 & 17 & 23 & \dots & & \\
u & 3 & 9 & 13 & 18 & 24 & \dots & & & \\
 & 4 & 14 & 19 & 25 & \dots & & & & \\
 & 5 & 20 & 26 & \dots & & & & & \\
 & 6 & 27 & \dots & & & & & & \\
 & \vdots & \vdots & & & & & & &
\end{array}$$

Note que a soma $u+v$ é constante ao longo das antidiagonais. Por isso, o número $\frac{(u+v)(u+v+1)}{2}$ é constante ao longo das antidiagonais.

Dado um conjunto $A$, denotamos por $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ o conjunto dos subconjuntos de $A$, chamado o conjunto das partes de $A$. A cardinalidade de $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ é denotada por $2^{\aleph}$, onde $\aleph$ é a cardinalidade de $A$. Cantor mostrou o conjunto de partes sempre tem cardinalidade maior que o conjunto original: $2^{\aleph} > \aleph$. Em particular, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

**Demonstração:**

1. Seja $A$ um conjunto e $f$ uma função de $A$ para $P(A)$.

   O elemento $a$ pode pertencer ou não ao subconjunto $f(a)$. Considere o conjunto:

   $$X \;=\; \{a \in A : a \notin f(a)\}$$

   Note que $X$ é um subconjunto de $A$ , logo $X \in P(A)$ . Entretanto, $\forall a \in A$ , temos $f(a) \neq X$ , uma vez que:

   - se $a \in f(a)$ então $a \notin X$.
   - se $a \notin f(a)$ então $a \in X$.

   Sendo assim, $f$ não é sobrejetora em $P(A)$.

   Com isso, $f$ não pode ser uma bijeção de $A$ para $P(A)$.

2. Porém, existe uma bijeção do conjunto $A$ para o conjunto $A' \;=\; \{\{a\} : a \in A\}$ e $A' \subset P(A)$. Portanto, $\#A \leq \#P(A)$.

   Por 1 e 2, concluímos que $\#A < \#P(A)$.

$\square$

Isso mostra a existência de outros números transfinitos. É fato que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, cardinalidade dos números reais.

O desenvolvimento da Teoria de Conjuntos, proposta por Cantor, e da Lógica Formal, durante o século XIX, permitiu que as questões envolvendo infinito fossem adequadamente abordadas. A Teoria de Conjuntos permitiu que os conceitos envolvendo infinito fossem apresentados com grande clareza e se revelaram de enorme complexidade.

Essa teoria originalmente proposta por Cantor apresentou problemas que foram revelados na forma de paradoxos, como o Paradoxo de Russell: seja $R$ o conjunto dos conjuntos que não estão contidos em si mesmos. Ora, se $R$ não está contido em si mesmo, então ele deve pertencer a $R$, o que é uma contradição. Por outro lado, se $R$ está contido em si mesmo, então ele deve ser um conjunto que não está contido em si mesmo, o que leva, mais uma vez, a uma contradição.

Essa dificuldade somada com as pesadas críticas feitas principalmente por Leopold Kronecker acabaram prejudicando bastante a saúde de Cantor, que teve várias crises e dificuldades psiquiátricas. No entanto, como diria Hilbert, “Ninguém há de nos expulsar do paraíso que Cantor criou para nós.”

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, em 1908, foi o primeiro a propor uma axiomatização da Teoria de Conjuntos. Muitos outros matemáticos também contribuiram. Entre eles Adolf Abraham Halevi Fraenkel e Kurt Gödel.

O objetivo de se criar um sistema axiomático para uma Teoria dos Conjuntos é definir o que são conjuntos. Uma vez definidos, espera-se que as regras usuais de operação entre conjuntos sigam como informalmente. Os axiomas servem para criar uma teoria consistente e evitar contradições como o Paradoxo de Russell.

# Limites e infinitos

Nos capítulos anteriores passamos por vários conceitos diferentes.

Quando olhamos para a fração $\frac{1}{3}$ podemos trabalhar com ela ou pensar no resultado da divisão 1 dividido por 3, que seria $0,333\ldots$ . Ao multiplicarmos $\frac{1}{3}$ por 3, temos como resultado 1, porém quando multiplicamos $0,333\ldots$ por 3 obtemos a resposta $0,999\ldots$. Seria isso suficiente para mostrarmos que $0,999\ldots = 1$ ? Qual seria o resultado da operação $1 - 0,999\ldots$ ? Seria um número com tantos zeros após a vírgula que nunca chegaríamos ao algarismo 1 que, intuitivamente, deveria ser o último algarismo desse resultado.

**Demonstração:**

Seja $x = 0,999\ldots$

então $10\,x = 9,999\ldots$

Logo $10\,x - x = 9,999\ldots - 0,999\ldots$

De onde se conclui que $x = 1$.

provamos então que $x = 0,999\ldots = 1$.

□

Sendo iguais, a subtração passa a ter como resultado o Zero.

Outra forma de entendermos um pouco a ideia de limite é pensarmos no exemplo citado em capítulos anteriores,o número $\sqrt{2}$ ou seja, pensar em $x$, quando $x^2 = 2$. Não temos como dar um resultado definitivo, mas temos como nos aproximarmos do resultado tanto quanto necessário.

**Exemplo:**

$$1,4^2 = 1,96$$
$$1,41^2 = 1,9881$$
$$1,414^2 = 1,999396$$
$$1,4142^2 = 1,99996164$$
$$1,41421^2 = 1,9999899241$$
$$1,414213^2 = 1,999998409469$$
$$1,4142135^2 = 1,99999982368225$$
$$1,41421356^2 = 1,9999999933878736$$

A impossibilidade de calcularmos com exatidão o valor decimal da $\sqrt{2}$ ocorre pelo fato deste ser um número Irracional.

## Calculando a área do circulo: ( limite - aproximação por áreas )

Quantos mais fatiarmos a circunferência em setores, mais parecidos com segmentos serão os arcos formados. Sabendo que o comprimento de uma circunferência é $2\pi r$, e que a figura abaixo forma um "retângulo" podemos calcular sua área multiplicando os lados que seriam $r$ e $\pi r$.

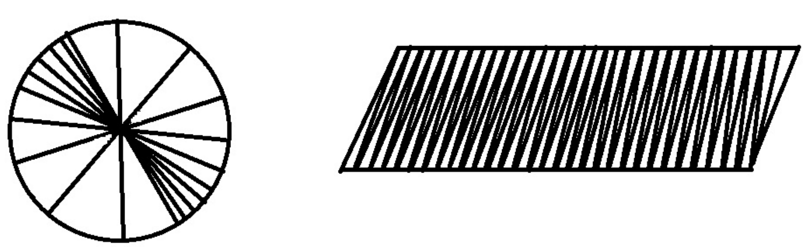

Figura $A_{14}$ - Soma de Setores Infinitesimais

Logo, a área do circulo é dada por $\pi\, r^2$. Note que a área da figura só se parece com um retângulo porque o circulo foi fatiado em uma infinidade de setores circulares, "transformando" assim os arcos em segmentos de reta. Mostramos que a área é $\pi\, r^2$, agora precisamos mostrar que quanto maior for a quantidade de setores, mais próximo estaremos da área do circulo. Basta tomarmos o quadrado, o pentágono e o hexágono inscritos.

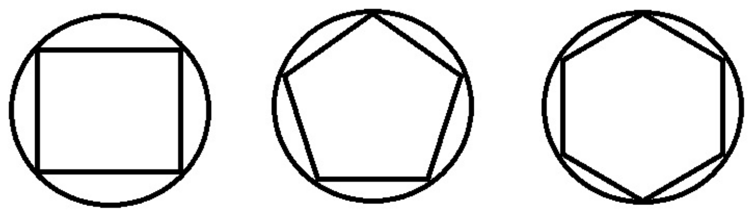

Figura $A_{15}$ - Quadrado, Pentágono e Hexágono Inscritos

Assim podemos perceber que quanto maior for o número de lados do polígono inscrito, melhor será sua aproximação a área do circulo.

Usando um argumento matemático mais sólido, temos:

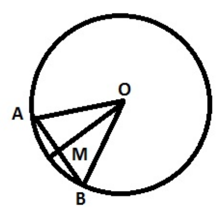


Figura $A_{16}$ - "n-ágono "

**Demonstração:**

Seja $\triangle AOB$ um setor de um n-ágono. A área de $\triangle AOB$ é dividida em $\triangle AOM$ e $\triangle MOB$, dois triângulos de mesma área. Calculando o dobro da área de $\triangle AOM$ teremos a área de $\triangle AOB$. Note que $OM = r\,\cos(\frac{\pi}{n})$ e $AM = r\,\text{sen}(\frac{\pi}{n})$. Isto é, $2 \triangle AOM = (r\,\cos(\frac{\pi}{n}))\,(r\,\text{sen}(\frac{\pi}{n}))$. Desta forma a área do n-ágono é dada por :

$$A_n = n\,(r\,\cos(\tfrac{\pi}{n}))\,(r\,\text{sen}(\tfrac{\pi}{n}))$$

$$A_n = n\,r^2\,\cos(\tfrac{\pi}{n})\,\text{sen}(\tfrac{\pi}{n})$$

Quando n$\to\infty$ :

$$\lim_{n\to\infty} A_n \;=\; \pi\, r^2\, \cos(\tfrac{\pi}{n})\, \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \cos(\tfrac{\pi}{n}) \;=\; 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} \;=\; 1$$

então,

$$\lim_{n\to\infty} A_n \;=\; \pi\, r^2$$

$\square$

# O infinito em sala de aula

O infinito é um assunto pouco discutido, mas presente nos livros didáticos, podendo ser visto desde o início do ensino fundamental até o final do ensino médio.

Para analisar como o infinito tem sido apresentado no ensino básico, deve-se perceber aquilo que consta nos livros didáticos adotados. Concentraremos nossa atenção na coleção "Matemática e Realidade", escrita por Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado, $6^a$ edição de 2009, que vem sendo utilizada na rede estadual do Rio de Janeiro, nos anos de 2011, 2012 e 2013; além de alguns outros como a coleção "Tudo é Matemática", de Luiz Roberto Dante $3^a$ edição (2010); a coleção "Praticando Matemática"de Álvaro Andrine e Maria José Vasconcelos; e a coleção "Tempo de Matemática", de Miguel Assis Name (1996), que apesar de ser antigo é claro e objetivo.

No trabalho foram utilizados livros do ensino fundamental e médio, junto a uma abordagem informal com docentes de Matemática, que lecionam essa disciplina para os ensinos médio e fundamental e em cursos preparatórios para ingresso nos cursos superiores. Verificou-se que, até o $5^o$ ano do ensino fundamental, os livros didáticos relatam números naturais sem abordar até onde esses números consequentemente se desdobrariam. Esse fato foi constatado na análise realizada nos livros citados no parágrafo anterior, que mantêm a mesma característica de apresentar os números naturais como um conjunto infinito.

Analisando os depoimentos de outros professores do $5^a$ ano do ensino fundamental, observa-se que já existe questionamento a cerca da contagem e, consequentemente, eles são obrigados a citar o infinito.

Contudo, pode-se observar que no $5^o$ ano do ensino fundamental, considerado uma ano de escolaridade muito importante para o processo de abstração dos alunos, a maioria dos autores não cita o infinito, limitando-se a dizer que os números naturais atingem valores muito grandes.

Ainda no $5^0$ ano, são introduzidos os primeiros passos em análise combinatória. Segundo alguns professores, há um questionamento mais incisivo dos alunos sobre a sequência dos números naturais, por lidarem com o processo de contagem utilizados em seus cotidianos.

A partir do $6^o$ ano do ensino fundamental, o primeiro contato que os discentes tem com a ideia de infinito é quando estudam o conjunto dos números naturais, que é definido como $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$ , em que cada número é encontrado somando - se 1 a seu antecessor partindo do zero. No livro do $6^o$ ano da coleção "Tempo de Matemática", o autor define os números naturais como o resultado de uma contagem. Já a coleção "Tudo é Matemática" aborda sucessor e antecessor e a representação dos números naturais em uma reta, além de algumas sequências como números pares, ímpares, quadrados e números triangulares. Nessa obra, a sequência dos números naturais é abordada do seguinte modo.

> Você já conhece a sequência dos números naturais:
>
> $$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots$$
>
> Observe que ela começa do zero. Para obter o próximo elemento, somamos 1 ao zero e obtemos o 1, e para obtermos o próximos somamos 1 ao 1 e ...
>
> Uma vez que todo número natural tem um sucessor maior que ele, a sequência dos números naturais é infinita. Isso é representado pelas reticências (...)

É possível sugerir a noção de infinito para o aluno, fazendo perguntas tais como: "Existe um menor número natural? " e "Existe um maior número natural? ". Ao concluir que não existe um maior número natural, pois sempre podemos somar mais 1 a qualquer número e encontrar um número maior, há uma infinidade de elementos em $\mathbb{N}$.

Essa ideia é exemplificada quando mostramos aos alunos que cada um desses números pode ser representado por um ponto contido numa reta, a qual chamamos "reta numérica ". Nesse momento, devemos apresentar para os alunos a representação de números em uma reta, afirmando que ela representa um conjunto com infinitos pontos e que o mesmo se aplica a uma semirreta. Ainda considerando o conjunto dos números naturais, podemos desenvolver a noção de que é possível comparar conjuntos infinitos, ao estudarmos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ como o conjunto dos números pares, dos ímpares - apresentado por por Alencar da maneira a seguir:

> Considere o conjunto dos números naturais, aqueles que são usados para contar. Esse conjunto é formado pela série $1, 2, 3, 4, \dots$ , até o infinito. Os pares, $2, 4, 6, 8, \dots$ , certamente formam um subconjunto dos naturais. Imagine um trem com um número infinito de assentos. Se todos os assentos estiverem ocupados, em ordem, um conjunto de passageiros, equivalente à coleção de números

> naturais, estaria pronto para a viagem. Suponha, entretanto, que um novo conjunto infinito de passageiros acaba de chegar. Seria ainda possível acomodá-los no trem?
>
> A resposta correta é sim, por mais estranho que possa parecer. Basta que o condutor peça a todos os passageiros para passarem para as cadeiras cuja numeração seja o dobro do número de sua própria poltrona. Por exemplo, o passageiro no assento número 3 passaria para o de número 6, aquele com o número 6 passaria para a cadeira 12, e assim por diante.
>
> Isso deixaria todas as cadeiras ímpares vazias. Como o conjunto de números ímpares é infinito, essas poltronas poderiam acomodar todos os novos passageiros sentados!

Essa exemplificação é claramente baseada no paradoxo do Hotel de Hilbert.

No $7^o$ ano do ensino fundamental são introduzidos os conceitos de números inteiros, introduzindo os números negativos. O livro "Matemática e Realidade" apresenta, sem definir como conjunto dos números inteiros, números inteiros positivos e negativos, por meio de vários termômetros, mostrando várias temperaturas diferentes e, logo após, vários saldos bancários. Só no capítulo 2, define inteiros positivos, negativos e o zero, ressaltando que o zero não é nem positivo nem negativo. Então é mostrada a reta numerada, apresentando contextos que justifiquem o sinal que afeta o número. Os números $\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots$ são chamados números inteiros. Cabe aos professores ressaltarem que as retas se prolongam infinitamente, tanto para a direita quanto para a esquerda.

O livro "Tempo de Matemática", do $7^o$ ano, cita que os números negativos teriam sido criados para auxiliar aos comerciantes. Na opinião de professores que lecionam na $7^a$ série, o conjunto dos números inteiros negativos, de certa forma, foge à capacidade de abstração dos alunos, principalmente, quando são apresentadas as operações com esses números e quando são definidas as relações de ordem, maior ($>$) ou menor ($<$) com esses mesmos números negativos.

No sétimo ano, as dificuldades encontradas com as ideias de infinito dos naturais são agravadas com os números negativos. Nesse momento, poderia ser útil contar um pouco da história do infinito e de seu símbolo, evidenciado a dificuldade que os próprios matemáticos encontraram para lidar com o assunto.

No $7^o$ ano é definido o conjunto dos números racionais, com as famosas dízimas periódicas e a noção de que há racionais e irracionais.

Gelson Iezzi, no livro "Matemática e Realidade", do $8^o$ ano explica assim:

$0,444\ldots$ é uma dízima periódica de período 4. Para encontrar a sua fração geratriz, primeiro chamamos a dízima periódica de $x$ :

$$x = 0,444\ldots$$

Agora multiplicamos ambos os membros da equação por 10, de modo que a vírgula se desloque uma casa decimal para a direita e 4 fique a esquerda:

$$10\,x = 4,444\ldots$$

Agora subtraindo uma equação da outra, temos:

$$\begin{array}{rcc} 10\,x & = & 4,444\ldots \\ -x & = & 0,444\ldots \\ \hline 9\,x & = & 4 \end{array}$$

$$x = 4/9.$$

Esta maneira de encontrar a fração geratriz, segundo os professores consultados, não é um assunto a ser discutido no $7^o$ ano, pois as operações com números com infinitas casas decimais não é entendida por grande parte dos alunos, sendo assim, um processo mecânico, sem nenhum significado, diferente do que pedem os Parâmetros Curriculares Nacionais.

A ideia de infinito aparece somente no livro “Matemática e Realidade” no estudo de funções. Os gráficos das funções levam-nos ao infinito, algo pouco visto nas coleções já citadas.

Em suma, podemos dizer que a abordagem do infinito pelos autores é superficial e pode ser complementada pelo professor.

Em relação aos livros do ensino médio, consideramos a coleção “Matemática ??????” de Manuel Paiva (2009), obra que é adotada pelos colégios da rede estadual de ensino, cuja teoria vem acompanhada de exercícios resolvidos e cujo desenvolvimento auxilia na compreensão dos conceitos. Algo muito interessante nessa coleção é que ao final de cada capítulo há um “roteiro de trabalho ”que apresenta questões que estimulam os alunos a argumentar, questionar e sintetizar os principais conceitos trabalhados. Outra opção foi abordar o volume único intitulado “Matemática, Contexto e Aplicações”, de Dante (2008), visto que esse é um dos livros mais utilizados na rede particular.

No $1^o$ ano do ensino médio infinito é abordado no estudo dos conjuntos e, nesse momento, cabe ao docente responsável pela ministração do conteúdo fazer uma pequena explanação sobre teoria dos conjuntos, para que os alunos adquiram um pouco mais de cultura, entendimento e curiosidade pelo assunto. Nesse mesmo ano o aluno estudará intervalos reais e operações com os intervalos, em que os professores podem mencionar as ideias de numerável, não enumerável e infinito. Além disso, estudará as funções, com a classificação como injetivas, sobrejetivas e bijetivas. Neste momento o professor pode falar um pouco de conjuntos infinitos.

Manuel Paiva inicia o primeiro livro da sua coleção com "Uma introdução a linguagem dos Conjuntos " , na qual cita o matemático Jonh Venn (1834 - 1923), criador dos diagramas de Venn, muito explorado nesse ano de ensino.

Na página 9 do livro 1 desta coleção, o autor define que um conjunto é finito se for vazio ou se for possível contar seus elementos e que conjunto infinito é todo conjunto que não é finito.

> Pela ideia do número natural podemos definir Conjunto Finito e Conjunto Infinito para elementos de outras naturezas. Para isso, necessitamos de conceito de correspondência biunívoca:
>
> Uma correspondência estabelecida entre dois conjuntos não vazios, vão representar por $A$ e $B$ , é biunívoca se, e somente se, cada elemento de $A$ corresponder um único elemento em $B$ e a cada elemento $B$ corresponde um único elemento em $A$.
>
> ...
>
> Um conjunto $A$ é finito se, e somente se, for vazio ou existir uma correspondência biunívoca entre $A$ e um subconjunto dos números naturais na forma $B = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
>
> ...
>
> Se um conjunto não é finito, dizemos que ele é infinito.
>
> Podemos definir esse conceito da seguinte maneira:
>
> Um conjunto não vazio $A$ é infinito se, e somente se, não é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre $A$ e um subconjunto dos números naturais na forma $B = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

# Uma experiência pessoal

No segundo ano do ensino médio aparecem as sequências. Sobre esse tema, fiz uma experiência em duas turmas heterogêneas de um colégio estadual.

Em uma das turmas foi definido o que seria a soma dos termos de uma P.A., com uma explicação, utilizando a fórmula :

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$$

Foram apresentados dois exemplos e os alunos foram estimulados a resolver cinco questões sobre o assunto.

Na outra turma, a aula foi iniciada sendo contada a anedota sobre a meninice de Karl Friedrich Gausssobre a soma dos 100 primeiros inteiros, cuja resposta é 5.050.

Gauss conseguira o resultado muito rapidamente, pois notou que a soma do primeiro número com o último é 101, que o segundo mais o penúltimo também é a 101, e assim por diante:

$$\underbrace{1 + \underbrace{2 + \underbrace{3 + 4 + 5 + \ldots + 96 + 97 + 98}_{101} + 99}_{101} + 100}_{101}$$

Como existem 50 dessas somas, tem-se

$$50 \times 101 = 5050$$

Ele notou um caso especial que poeria ser obtido da fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}.$$

Após essa motivação, foram apresentados os mesmos dois exemplo da turma anterior e os alunos foram estimulados a fazer os mesmos cinco exercícios. Atribuindo-se pontos aos exercícios, obteve-se a média $6,2$ na primeira turma e $8,4$ na segunda. Acredito que a história, além de facilitar o entendimento, aumentou a atenção dos alunos, resultando num melhor desempenho, em média.

No $2^o$ ano do ensino médio aparece, pela primeira vez, a ideia de limite. Manuel Paiva a aborda isto no último capítulo do seu livro na apresentação das progressões aritmética e geométrica.

Aa soma dos $n$ primeiros termos de uma P.G, cujo primeiro termo é $a_1$, com razão $q$, é

$$S_n = \frac{a_1\,(q^n - 1)}{q-1}.$$

Se a razão $q$ é tal que $|q| < 1$, verifica-se que $q^n$ aproxima-se de zero para $n$ suficientemente grande, sugerindo a definição da *soma de todos os termos da PG*:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

Essa definição é um prenúncio da fórmula

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1\,(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1\,(0-1)}{q-1} = \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

Para melhor analisar como infinito é ensinado e entendido nas salas de aula, levando-se em consideração que, no ensino fundamental, estuda-se os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, dizimas, funções e grande parte da geometria, dever-se-ia gerar determinado conhecimento do que é infinito. Conhecimento esse que pode ser aprofundado durante o ensino médio com assuntos como progressões, gráfico de funções, intervalos etc.

A ideia de infinito, de uma forma geral, é algo intuitivo. Entretanto, levar este entendimento para Matemática, com assuntos como cardinalidade, conjuntos infinitos e limites não é tão simples assim. Dessa forma, esses conteúdos devem ser abordados com cautela por parte do professor, com ações bem planejadas. O uso da História da Matemática pode ser um forte aliado nesse processo.

## Experiência de Ensino

Apresentamos agora uma pesquisa feita em um colégio estadual da cidade de São Gonçalo, em duas turmas: uma do $1^o$ ano e outra do $2^o$ ano, Num total de 50 alunos. O objetivo da pesquisa era mapear o conhecimento que esses alunos tinham da noção de infinito.

Foram feitas as seguintes perguntas:

Pesquisa

Questão 1 - Como você explicaria para alguém o que é infinito?

Questão 2 - Três homens fizeram uma aposta: quem falasse o maior número ganharia $R\$100,00$. Paulo foi o primeiro, Carlos o segundo e Jean, o último. O que você acha que vai acontecer?

Questão 3 - Responda quantos elementos possui cada um dos conjuntos abaixo:

a) $\{\ \}$

b) $\{0\}$

c) $\{-8,-2,+5,+9\}$

d) $\{4,5,6,7,\dots\}$

e) $[3,5]$

Questão 4 - Cite uma palavra que te lembre o infinito.

Questão 5 - Qual dos conjuntos abaixo possui mais elementos?

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & = & \{0,1,2,3,4,5\dots\} \\ \mathbb{Z} & = & \{\dots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\} \\ \mathbb{R} & = & \mathbb{Q}\cup\mathbb{I} \\ P & = & \{0,2,4,6,8,10,\dots\} \end{array}$$

Questão 6 - Considere todos os pontos que compõem os segmentos AB e CD. Qual deles possui mais pontos?

A ———————————————— B

C ———————— D

Questão7 - O GRANDE HOTEL DE HILBERT

Imagine um hotel hipotético com infinitos quartos que está, no momento, com todos os seus aposentos ocupados. Quando um viajante chega procurando um leito, o empregado do hotel logo informa que todos os quartos estão ocupados. Como o viajante não se conforma com a notícia, o gerente é chamado. Ao saber do problema, o gerente encontra prontamente uma solução, dizendo ao seu empregado:

- Passe o hóspede que está no quarto 1 para o quarto 2, o do quarto 2 para o 3 e assim sucessivamente. Teremos então o quarto 1 livre para nosso amigo viajante.

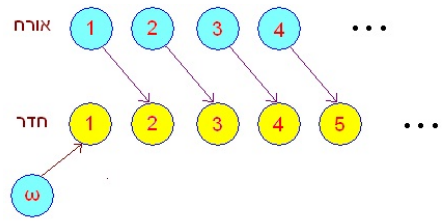


Figura 3

Noutro dia, chega ao hotel (ainda lotado) um ônibus com 100 passageiros. O empregado não teve dúvida: moveu cada hóspede para o quarto cem números acima, isto é, do quarto 1 para o 101, do 2 para o 102 etc., conseguindo assim vaga para todos. Acontece, porém, que certo dia chega ao hotel um ônibus com infinitos passageiros. Sem saber o que fazer com um número infinito de novos hóspedes, o empregado foi consultar o gerente.


Figura 4

a) Compare o número de elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$ com o do conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$.

b) Como o gerente pode resolver o problema?

Sugestão:

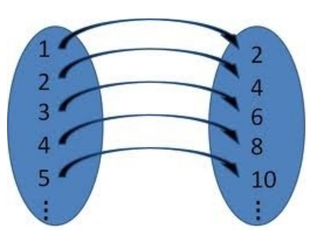


Figura 5

Com relação à questão 1 cerca, de 70% dos alunos responderam basicamente que infinito é aquilo que não tem fim; 20% disse que aquilo que começa e não tem fim, e as outras 10% deram respostas variadas como algo eterno, ou algo que não temos como contar.

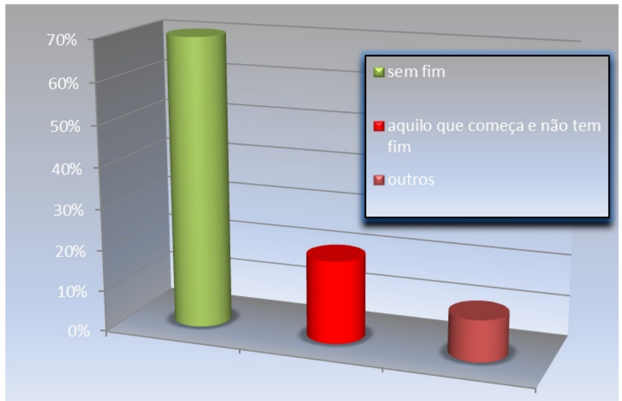


Figura 6

Analisando a questão 2, cerca de 45% disse que ninguém vai ganhar pois eles ficariam falando infinitamente; já 35% dos discentes responderam que aquele que responder infinito ganharia a aposta; 15% afirmaram que ganharia aquele que falasse o número mais alto e cerca de 5% disse que Jean, o último a falar, ganharia a aposta.

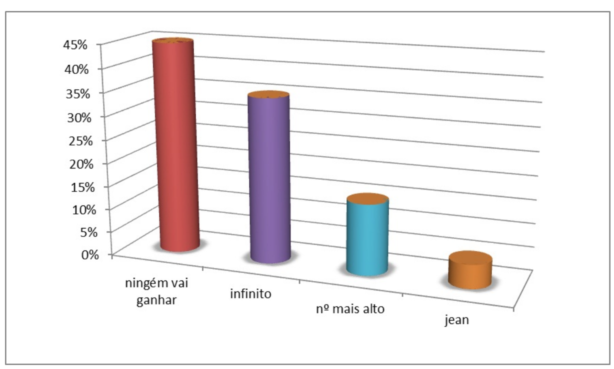


Figura 7

Dentre as respostas tivemos as seguintes justificativas:

Aluno 1 - “Ninguém vai ganhar, pois ninguém vai querer ser o primeiro a falar.”

Já o aluno 2 diz que a competição está relacionada com o tempo visto que afirma que: “depende do tempo da aposta, pois ficaria falando infinitamente. ” Ainda relacionando com o tempo, o aluno 3 diz que: “ Eles vão cansar de tanto falar números. ” Já aluno 4 afirma que: “Ninguém chega a lugar nenhum, já que os números são infinitos. ”

Temos aqueles que simplesmente citam o “infinito ”; Aluno 5 - “Vai ganhar aquele que falar infinito. ”

Com relação à terceira questão, o desempenho foi relativamente satisfatório já que este assunto já foi abordado no ensino fundamental e no próprio ensino médio.

O primeiro dos 5 itens refere-se ao cardinal do conjunto vazio, tendo os alunos respondido zero elementos em quase a totalidade dos casos.

No segundo item, acontece basicamente o mesmo 95% dos estudantes responderam o conjunto $\{0\}$ possui 1 elemento.

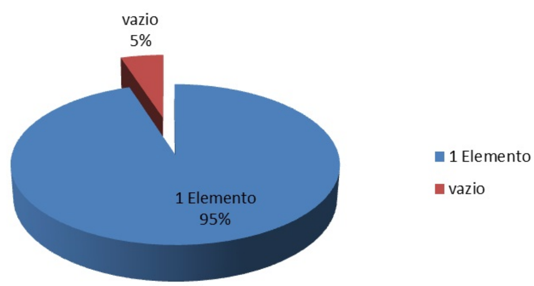


Figura 8

Já no $3^o$ item, 100% dos alunos responderam corretamente que o conjunto $\{-8, -2, +5, +9\}$ é formado por quatro elementos.

No quarto item, a grande maioria considerou que um conjunto com reticências é infinito (95%). Porém, devemos ressaltar que 2 alunos afirmaram que o conjunto $\{4, 5, 6, 7, \dots\}$ possui quatro elementos.

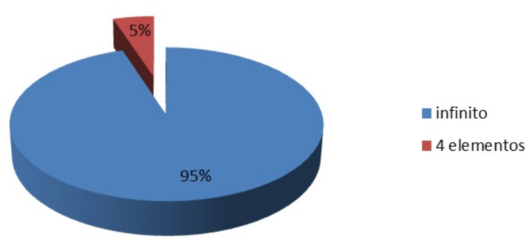


Figura 9

O $5^o$ item foi o que teve o maior número de erros. Metade dos alunos pesquisados disseram que o intervalo $[3, 5]$ é infinito. Os outros 15 alunos (30%) consideraram apenas os números 3 e 5 e responderam dois elementos, ou seja, não pensaram no infinito, não tiveram a percepção de analisar o intervalo na reta dos números reais que existem entre o 3 e o 5, enfatizando a incompreensão do conceito de intervalo de números reais aprendida no $9^o$ ano do Ensino Fundamental e desenvolvida ao longo do ensino médio, e o restante dos alunos deram respostas diversas .

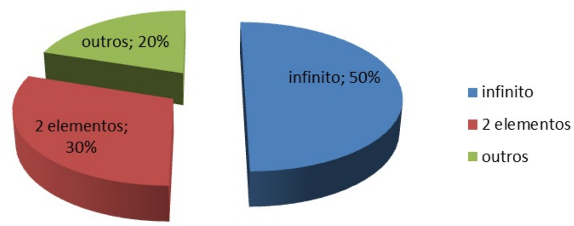


Figura 10

Na questão 1 foi perguntado - Como você explicaria para alguém o que é infinito?, já na questão 4 foi pedido para que o discente apenas citasse uma palavra que o lembrasse o infinito. Ambas as questões pretendem analisar as concepções dos alunos relativas ao infinito .

A quantidade de ideias que os entrevistados ligam ao infinito é muito grande; foram apresentadas mais de 10 expressões distintas. A expressão mais comum foi o "céu " , seguida de "Amor " - que possuiu vários sentidos como "O amor de Deus " , "O amor materno " entre outros. Vale salientar que em terceiro lugar apareceu "os números " e em quarto "o mar ". Interessante é que apenas 20% dos entrevistados ligaram o infinito à Matemática.

Na quinta questão foi pedido aos alunos para dizer qual dos conjuntos possuía mais elementos. Foram 84% dos alunos que disseram que o conjunto dos números reais é maior que todos os outros; um dos alunos afirmou que os inteiros é maior, pois ele é infinito (justificativa dada, provavelmente pelo aparecimento das reticências) e o restante disse que como todos são infinitos, todos possuem a mesma quantidade de elementos.

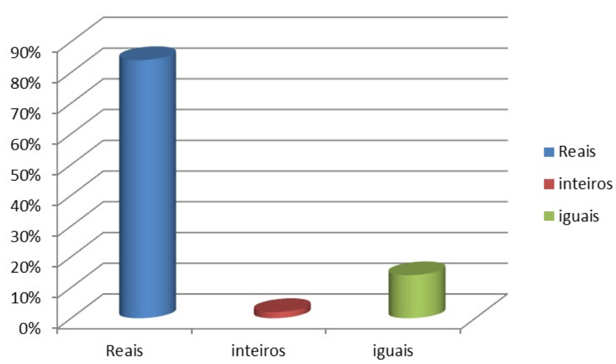


Figura 11

Na sexta questão, teve como resposta que 90% dos alunos afirmaram que o segmento AB é maior que o segmento CD. Logo, possui mais pontos em seu interior, mesmo sendo ambos infinitos.

Na última questão abordamos o famoso paradoxo do hotel infinito, sendo explicitado pela primeira vez numa conferência dada por David Hilbert, em 1925. Cerca de 80% dos alunos conseguiram entender que é possível fazer uma correspondência entre os conjuntos $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ e $\{2, 3, 4, 5, \dots\}$ como mostra a figura da questão. E com o auxílio do gráfico, 65% conseguiram solucionar a $2^a$ questão, dizendo que bastava passar os hóspedes para o quarto com o número dobrado ao seu e então todos os quartos números impares ficariam livres para os novos hóspedes.

Em suma, a História da Matemática é com certeza um excelente recurso para facilitar a aprendizagem de qualquer conteúdo, principalmente um assunto tão complexo e abstrato com o infinito. A utilização deste recurso facilita muito o trabalho do professor, pois irá aumentar a atenção do aluno em sala de aula além de instigar sua curiosidade.

O discente irá perceber que a Matemática é algo que se faz presente em seu cotidiano e entenderá que a Rainha das Ciências não é totalmente abstrata, mas sim que foi criada por pessoas que na maioria das vezes tinham como objetivo desenvolver a sociedade em que pertenciam.

Relacionar a Matemática com outras disciplinas como, por exemplo, a História como foi muito bem feito no livro O Ultimo teorema de Fermat, ou até mesmo no filme Uma mente brilhante, é ótimo para chamar a atenção do aluno.

Antônio Miguel no livro Zetetiké, vol. 5 , $n^o$ 8 cita vários argumentos reforçadores e questionadores da utilização da história da matemática em sala de aula.

- “A história é uma fonte de motivação para o ensino e aprendizagem da Matemática.

  Muitos matemáticos acreditam que o conhecimento histórico dos processos matemáticos despertaria o interesse do aluno pelo que está sendo ensinado.

- A história constitui-se numa fonte de objetivos para o ensino da matemática.

  Por exemplo:

  a) a matemática como uma criação humana;

  b) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática;

  c) as necessidades práticas e sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas.

- A história é uma fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos a serem incorporados nas aulas de matemática.

A busca de esquemas motivadores para as aulas de matemática via utilização da história desloca- se, mais recentemente, de um plano no qual eles são entendidos de forma meramente externa ao conteúdo do ensino, para outro em que essa motivação aparece vinculada e produzida no ato cognitivo da solução de um problema. ”

O professor ao introduzir determinados assuntos tem que expor para o aluno todo o conhecimento histórico que possui. Citar os famosos paradoxos de Zenão, os pensamentos de Galileu, Cantor, Gauss entre outros, buscando facilitar a compreensão dos alunos será muito relevante em todo o processo de ensino-aprendizagem. O professor Wedes Junior Gomes de Oliveira diz:

“não é necessário que o professor seja um especialista para introduzir História da Matemática em seus cursos [...] . Não é necessário desenvolver um currículo, linear e organizado, de História da Matemática. Basta colocar aqui e ali algumas reflexões. Isto pode gerar muito interesse nas aulas de Matemática. E isso pode ser feito sem que o professor tenha se especializado em História da Matemática. ”

Através da História da Matemática é possível perceber que essa ciência percorreu um longo caminho na história da humanidade, passando por várias fases de seu processo evolutivo. Em sala de aula, a História da Matemática possui um papel fundamental, pois pode estimular o espírito dos estudantes, desenvolver o espírito crítico e também fazer com que os alunos compreendam as ideias subjacentes às teorias e aos teoremas que são apresentados, em geral, em sua forma final.

A sua utilização em sala de aula permite ao professor uma oportunidade mais ampla e contextualizada de sua disciplina, interligando a Matemática com outras disciplinas, respeitando suas especialidades.

# Bibliografia:


GOWERS, Timothy. Mathematics: a very short introduction. Oxford Uk, 2002

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Campinas: Unicamp, 2004.

IFRAH, Georges. Os números: a história de uma invenção. 4. ed. São Paulo: Globo, 1992.

GUNDLACH, Bernard H. História dos números e numerais. São Paulo: Atual, 1992.

LIMA, Elon Lages. Curso de análise; v.1; 10. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. Análise Matemática para Licenciandos. 1. ed. São Paulo: EDGARD BLÜCHER ltda, 2001.

MILIES, Francisco César Polcino. Números: Uma Introdução à Matemática. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1997.

STILLWELL, J. Mathematics and Its History, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2010.

TAHAN, Malba. As Maravilhas da Matemática. 1. ed. Rio de Janeiro:

GELSON, Iezzi. Matemática e Realidade. 6. ed. são Paulo: Atual, 2009

DANTE, Luiz Roberto. 3.ed.São Paulo, Ática, 2010

http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/cantor/paradzenao.htm

http://www.ic.unicamp.br/ anamaria/cursos/MC348/2010-2/livro-apost-07.pdf - (Anamaria Gomide)

http://www.mat.ufmg.br/ rsanchis/AxiomaEscolha.pdf (REMY DE PAIVA SANCHIS)