COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Glaucia da Silveira Possebom

SIMETRIAS E MOVIMENTOS RÍGIDOS NO PLANO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Rio de Janeiro
2018

Glaucia da Silveira Possebom

SIMETRIAS E MOVIMENTOS RÍGIDOS NO PLANO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Drª. Marilis Bahr Karam Venceslau

Rio de Janeiro
2018

COLÉGIO PEDRO II

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA

BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER

CATALOGAÇÃO NA FONTE

P856 Possebom, Glaucia da Silveira

Simetrias e movimentos rígidos no plano nos anos finais do ensino fundamental/Glaucia da Silveira Possebom. – Rio de Janeiro, 2018.

88 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Marilis Bahr Karam Venceslau.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Simetrias. 3. Movimentos rígidos no plano. 4. Ensino fundamental. I. Venceslau, Marilis Bahr Karam. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Bibliotecário Andre Dantas – CRB7 5026

Glaucia da Silveira Possebom

SIMETRIAS E MOVIMENTOS RÍGIDOS NO PLANO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em: _____/_____/_____.

Banca Examinadora:

____
Drª. Marilis Bahr Karam Venceslau
Colégio Pedro II

____
Drª. Patrícia Erthal de Morais
Colégio Pedro II

____
Dr. Vinícius Leal do Forte
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro
2018

Esta pesquisa é dedicada a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão da mesma: Deus, família, alunos, amigos e professores.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por mais esta conquista.

Agradeço aos meus pais, Tania e Valdelino, o exemplo de pessoas que são e o incentivo que sempre deram em minha jornada acadêmica.

Ao meu marido, André, e aos meus filhos, João Victor e Luís Felipe, a paciência e carinho de cada dia e cada noite que os “troquei” pelos estudos, me fazendo ausente.

Aos meus alunos que aceitaram participar desta pesquisa.

Agradeço também aos colegas de minha turma que se fizeram tão presentes em minha vida durante a realização deste curso, servindo de incentivo e auxiliando a cada dificuldade que nos fora apresentada.

A cada amigo e familiar que me apoiou neste momento de minha vida, ouvindo minhas queixas e não me permitindo desistir no meio da caminhada.

Por fim, quero agradecer aos meus professores do PROFMAT que ajudaram muito em meu crescimento acadêmico, e em especial à minha orientadora, Professora Marilis Bahr Karam Venceslau, que me auxiliou desde a escolha do tema até a conclusão desta dissertação com muito carinho, paciência e dedicação.

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo".
(Pitágoras)

RESUMO

POSSEBOM, Glaucia da Silveira. **Simetrias:** Movimentos rígidos no plano e os anos finais do ensino. 2018. 88 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

Simetria é um conceito muito importante, pois está presente em diversas áreas tais como: Artes, Sociologia, Ciências e Matemática. Entre as simetrias mais fáceis de serem compreendidas temos as que são obtidas através de movimentos rígidos no plano. Deve-se isso ao fato de terem uma interpretação geométrica e seus efeitos poderem ser ilustrados usando figuras. Este trabalho inicia-se por um estudo dos movimentos rígidos: reflexão, translação, rotação e reflexão com deslizamento, suas definições e suas propriedades, tendo em vista sua indiscutível importância para a geometria plana. Dando continuidade ao embasamento teórico desta pesquisa, o conteúdo será adaptado e trabalhado com alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental da rede municipal de ensino, através do uso de espelhos de maneira que o conteúdo se mostre atraente ao aluno. Será mostrado que as simetrias podem se apresentar de diversas formas na natureza ou em criações do homem, e que as mesmas se fazem bastante presentes no nosso dia a dia. Durante o decorrer da pesquisa, os alunos responderão a algumas folhas de atividades. A seguir, lhes será solicitado que busquem ilustrações que os remetam a exemplos de simetrias em revistas e jornais a fim de verificar se realmente absorveram os conceitos apresentados. Os exemplos por eles escolhidos serão utilizados para confeccionar um cartaz.

Palavras-chave: Simetrias; Ensino Fundamental; Movimentos rígidos no plano.

ABSTRACT

POSSEBOM, Glaucia da Silveira. **Simetrias:** Movimentos rígidos no plano e os anos finais do ensino. 2018. 88 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2018.

Symmetry is a very important concept because it is present in several areas such as: Arts, Sociology, Sciences and Mathematics. Among the easier to understand symmetries, there are the ones obtained by rigid motions in the plane. This is due to the fact that they have a geometric interpretation and its effects can be illustrated using figures. This work begins with a study of the rigid motions: reflection, translation, rotation and reflection with sliding, its definitions and its properties, considering its undisputed importance for flat geometry. Continuing the theoretical basis of this research, the content will be adapted and worked with seventh-year primary school students of the municipal school network, through the use of mirrors in a way that the content is attractive to the student. It will be shown that the symmetries can present themselves in diverse forms in the nature or creations of the man, and that they become very present in our day to day. During the course of the research, students will respond to some activity sheets. Next, they will be asked to look for illustrations that refer them to examples of symmetries in magazines and newspapers to check if they really have absorbed the concepts presented. The examples they choose will be used to make a poster.

Keywords: Symmetries; Elementary school; Rigid motions in the plane.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É indiscutível a importância da Matemática na vida cotidiana. Ela se faz presente por toda a parte: na natureza, na arte, na música, na tecnologia, etc.

Contudo, apesar da maioria das pessoas concordarem com tamanha importância e terem a consciência de sua grandeza, a maior parte delas se mostra extremamente insatisfeita e intolerante com o seu estudo. Muitas justificam dizendo que não veem ligação do que se estuda com o seu cotidiano, e que determinados estudos deveriam ser restritos a engenheiros, contadores, arquitetos, entre outros.

Baseado nisso, este trabalho tem por objetivo principal mostrar a um grupo de alunos que a Matemática pode ser encontrada por toda parte e que, na maioria das vezes, as pessoas nem se dão conta disso, e então, a oportunidade de apreciá-la passa despercebida.

O tema escolhido para o estudo é 'Simetrias e movimentos rígidos no plano nos anos finais do Ensino Fundamental'.

Tal tema é pouco trabalhado nos livros didáticos de Ensino Fundamental. Alguns sequer o trazem e outros o apresentam de forma bastante superficial e, grande parte das vezes, desconexas com o cotidiano do aluno.

É fato que o mundo atual oferece muitos atrativos ao aluno. Em contrapartida, a escola está ficando ultrapassada e perdendo o seu encanto.

Qualquer que seja a área do conhecimento é notório que um ensino baseado na transmissão oral de conteúdos, visando apenas à memorização, dificulta a aprendizagem e impossibilita alunos de obter o maior proveito possível do conteúdo lecionado.

Principalmente se tratando de Matemática, é de costume deparar-se com conceitos preestabelecidos por parte dos alunos e seus responsáveis, que já crescem com o estigma de que a disciplina é difícil e que são incapazes de aprendê-la. Situação esta, onde muitos responsáveis afirmam que está tudo certo se o aluno não se sair bem "só" em Matemática. É preciso, urgentemente, reverter essa situação.

Faz-se necessário então oferecer um ensino diferenciado, onde o aluno possa ser o agente da construção de seu conhecimento.

Somado ao fato de a Geometria ser pouco explorada no ensino básico, este tema foi escolhido para ser trabalhado em um formato diferente do convencional. A intenção aqui é desenvolver atividades de forma que sua aprendizagem possa se dar de forma natural e prazerosa.

Dentre os objetivos específicos almejados, tem-se: definir as isometrias e demonstrar suas propriedades; desenvolver atividades práticas em sala de aula relacionadas às isometrias; apresentar aos alunos a Matemática presente em nosso cotidiano.

Este trabalho está dividido em seis capítulos. No segundo capítulo, são apresentadas algumas definições básicas e essenciais para a leitura desta dissertação; no terceiro capítulo é feita a relação entre as isometrias e as simetrias, bem como discutir suas definições e propriedades; o quarto capítulo fala de espelhos e simetrias, fazendo uma definição do que é um espelho e sua relação com as simetrias; o quinto capítulo trata da organização e aplicação da pesquisa, explicando como a mesma foi desenvolvida e aplicada; no sexto e último capítulo, são feitas as considerações finais a respeito desse trabalho.

2 ALGUMAS DEFINIÇÕES

A fim de que este trabalho seja o mais autossuficiente o possível, a seguir serão apresentados alguns conceitos e definições básicas da geometria. Conceitos estes que serão necessários no decorrer de sua leitura.

Ponto – Conceito primitivo intuitivamente entendido como um objeto sem dimensões.É representado por um círculo minúsculo e nomeado por uma letra maiúscula do alfabeto latino.Determina uma posição no espaço.

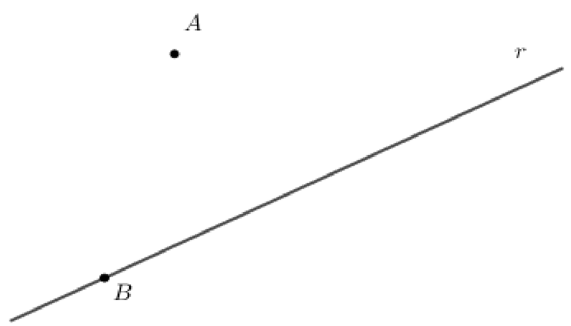
Reta – Conceito primitivo intuitivamente entendido como um conjunto de pontos que formam um objeto de uma dimensão sem curvas nem ângulos. É representada por um traço fino feito com a ajuda de uma régua e nomeada por uma letra minúscula do alfabeto latino.

Plano – Conceito primitivo intuitivamente entendido como um conjunto de pontos que formam um objeto bidimensional, com superfície lisa. É normalmente representado por um paralelogramo ou por um retângulo e nomeado por uma letra do alfabeto grego.

Este capítulo seguirá o encadeamento lógico de Cadar (2015).

Na Figura 1, podem ser observados dois pontos, *A* e *B*, e uma reta, *r*.

Figura 1 - Pontos A e B, e a reta r

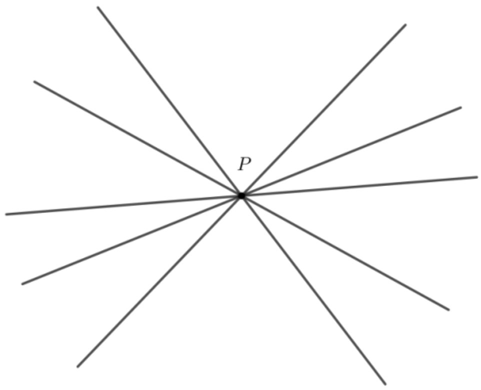


Fonte: A autora, 2018.

Conforme a definição acima, uma reta é um conjunto de pontos. Então, um ponto pode pertencer ou não a uma determinada reta. Na figura anterior, é possível perceber que o ponto *A* não pertence à reta *r*, enquanto que o ponto *B* pertence. Fazendo uso de linguagem simbólica, escreve-se $A \notin r$ e $B \in r$.

Neste caso, como o ponto *B* pertence à reta *r*, pode-se dizer que *r* passa por *B*. É possível concluir também que por um único ponto *P* podem passar infinitas retas, conforme mostra a Figura 2.

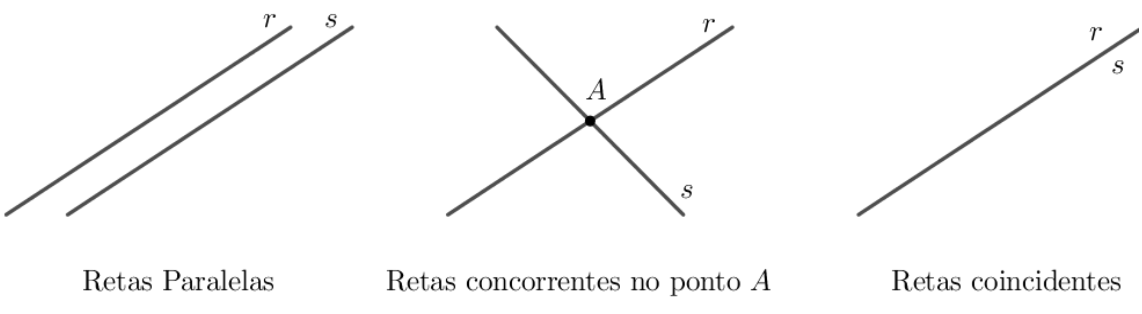
Figura 2 - Retas passando pelo ponto P



Fonte: A autora, 2018.

Tomando duas retas distintas, *r* e *s*, num determinado plano, o que se pode afirmar com relação à posição relativa entre elas é que ou não apresentam nenhum ponto em comum, ou apresentam um único ponto em comum ou ainda, apresentam todos os pontos em comum. Elas são chamadas de paralelas, concorrentes e coincidentes, respectivamente.

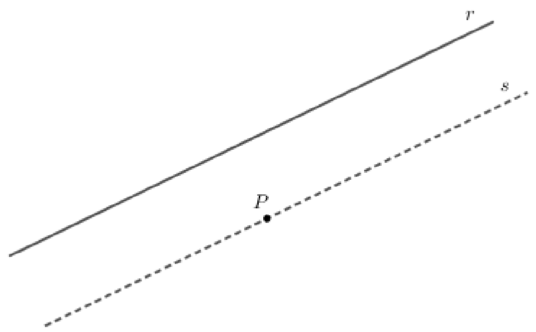
Figura 3 – Possíveis posições entre duas retas



Fonte: A autora, 2018.

Considerando uma reta *r* e um ponto *P* não pertencente à reta, pode-se afirmar que por este ponto *P* passa uma única reta *s* paralela a *r*.

Figura 4 - Reta s, paralela a reta r e passando pelo ponto P



Fonte: A autora, 2018.

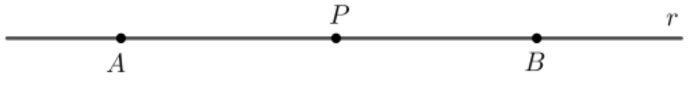
Dados dois pontos, A e B, distintos, existe uma única reta r que os contém. Na Figura 5, r é a reta que passa pelos pontos A e B ao mesmo tempo e diz-se que $\mathrm{r} = \overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$. Ao pedaço $\overline{AB}$ dá-se o nome de segmento de reta.

Figura 5 - Reta r passado pelos pontos A e B

Fonte: A autora, 2018.

Se um ponto P pertence a uma reta r, então ele a divide em duas semirretas com origem P. Para se distinguir as duas semirretas formadas pelo ponto P, é necessário destacar um ponto em cada uma delas, conforme a Figura 6:

Figura 6 - Semirretas opostas,$\overrightarrow{\boldsymbol{PA}}$e $\overrightarrow{\boldsymbol{PB}}$,de origem P



Fonte: A autora, 2018.

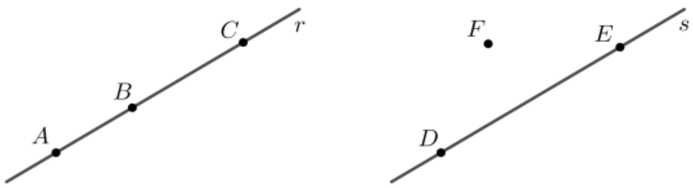
Na Figura 6, as semirretas, com origem no ponto P, são representadas por $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$.

Note que em uma reta existem, no mínimo, dois pontos distintos. Por este motivo, pode-se garantir que uma reta não é um conjunto unitário nem mesmo um conjunto vazio de pontos.Os pontos pertencentes a uma mesma reta são chamados de pontos colineares.

Contudo, ao considerar três pontos distintos num determinado plano, nada se pode afirmar a respeito deles, pois estes podem ser colineares ou não.

Como exemplo, observe a Figura 7 que mostra os pontos A, B e C colineares (à esquerda) e os pontos D, E e F não colineares (à direita). Na imagem à esquerda, é possível afirmar que o ponto B está entre os pontos A e C.

Figura 7 - Pontos A, B e C colineares e pontos D, E e F não colineares



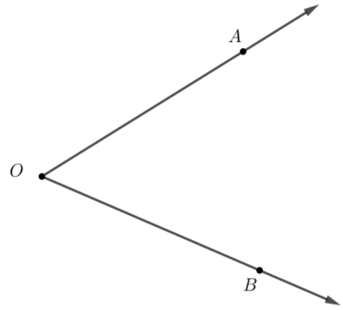
Fonte: A autora, 2018.

A todo par de pontos A e B é possível associar um único número real não negativo, denominado distância, representada por $\overline{AB}$ ou por *d(A, B)*. Na Figura 7, como os pontos A, B e C pertencem à mesma reta r,é possível concluir que a distância de A até C é a mesma que a distância de A até B mais a distância de B até C, ou seja, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

Note que a distância entre dois pontos só será nula se os pontos em questão forem coincidentes.

A abertura formada por duas semirretas de mesma origem é chamada de ângulo. As semirretas são chamadas de lados do ângulo e a origem, que é o ponto em comum às duas semirretas, é chamada de vértice. Na Figura 8, pode-se observar o ângulo $A\hat{O}B$, que é formado pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, e pelo vértice O.

Figura 8 - Ângulo AÔB



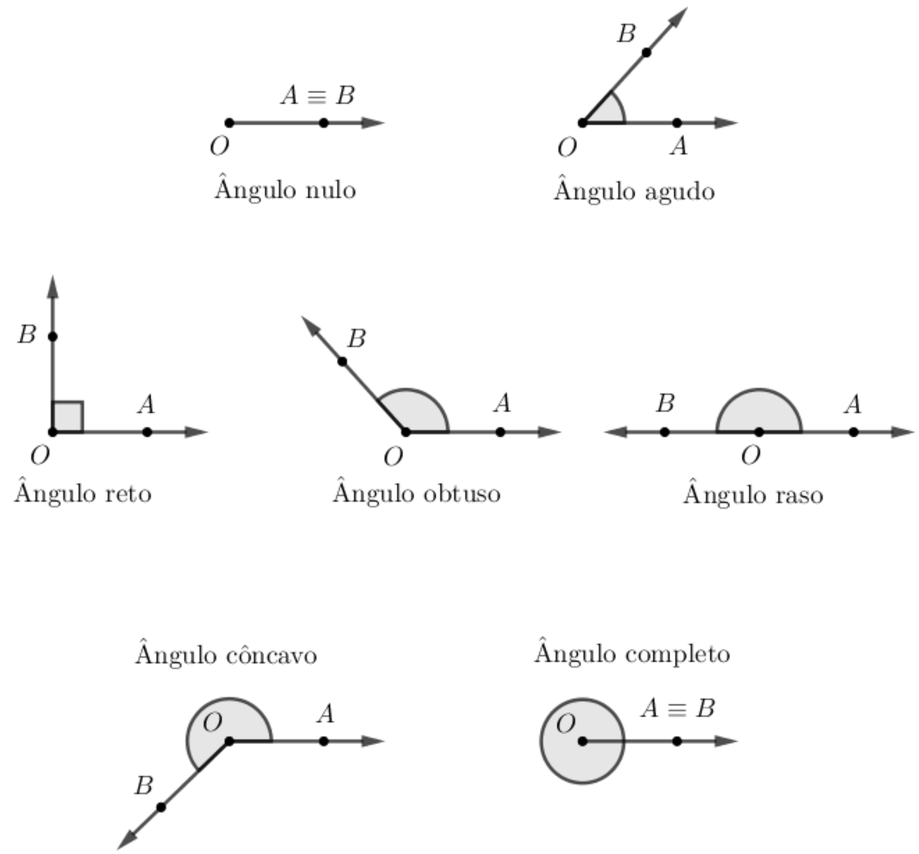
Fonte: A autora, 2018.

Os ângulos são normalmente medidos em graus e seu valor serve para indicar a abertura de um determinado ângulo. Indica-se o ângulo de 1 grau por 1°.

A nomenclatura dos ângulos com relação às suas medidas (Figura 9) é a seguinte:

- Nulo - é o ângulo que mede 0°;
- Agudo - é o ângulo que apresenta medida maior que 0° e menor que 90°;
- Reto - é o ângulo de medida igual a 90°;
- Obtuso - é o ângulo que tem medida maior que 90°e menor que 180°;
- Raso - é o ângulo de medida igual a 180°. Ele também é conhecido como ângulo de meia volta;
- Côncavo - é o ângulo de medida maior que 180° e menor 360°;
- Completo - é o ângulo de medida igual a 360°. Ele também é conhecido como ângulo de uma volta.

Figura 9 – Nomenclatura dos ângulos com relação às suas medidas



Fonte: A autora, 2018.

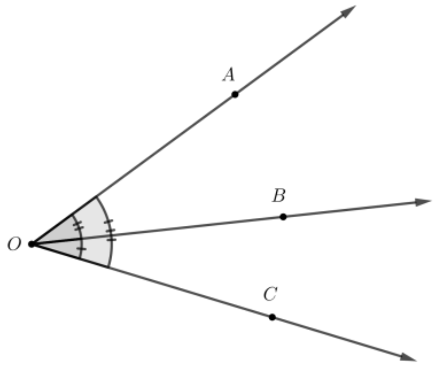
Agora que já se sabe o que é um ângulo reto, define-se:

- Duas retas são ditas perpendiculares quando formam entre si quatro ângulos retos;

Outras definições envolvendo ângulos também se fazem necessárias:

- Ângulos congruentes são aqueles que apresentam a mesma medida;
- Dois ângulos consecutivos apresentam o mesmo vértice,além de apresentarem um dos lados em comum.E são ditos adjacentes quando, além de serem consecutivos, não apresentam nenhum ponto interno em comum.

Figura 10 – Ângulos AÔB, AÔC e BÔC



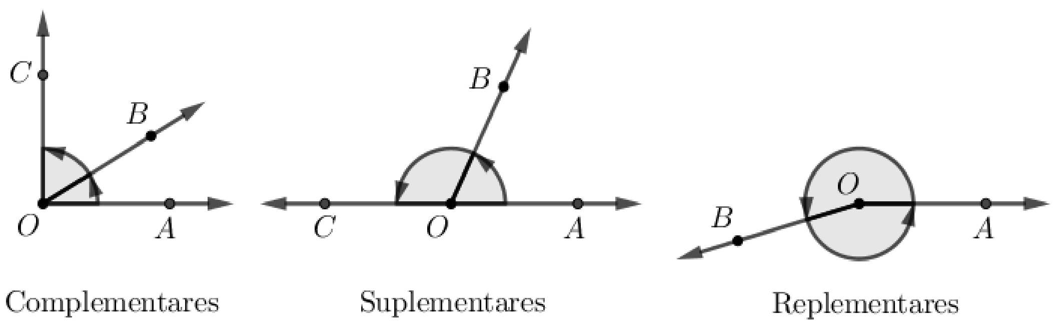
Fonte: A autora, 2018.

Note que Figura 10, os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são consecutivos e adjacentes, enquanto os ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ são consecutivos e não adjacentes, o que leva a concluir que todo ângulo adjacente é consecutivo, mas nem todo ângulo consecutivo é adjacente.

Pode-se ainda classificar os ângulos quanto a sua complementação. Desta forma, dois ângulos cuja soma é igual a noventa graus são chamados de complementares, enquanto dois ângulos cuja soma é igual a cento e oitenta graus são chamados de suplementares, e aqueles que somam trezentos e sessenta graus são chamados de replementares.

A Figura 11 mostra os ângulos AÔB e BÔC e as possíveis nomenclaturas que recebem de acordo com a sua complementação.

Figura 11–Nomenclatura dos ângulos com relação à sua complementação



Fonte: A autora, 2018.

Agora que as definições geométricas básicas necessárias àleitura deste trabalho já foram apresentadas, no capítulo seguinte introduzir-se-á o importante conceito de simetrias e isometrias.

3 SIMETRIAS E ISOMETRIAS

Comumente a simetria é associada ao ideal de beleza e de perfeição. Ela pode ser encontrada em toda a parte, nos seres vivos e também nos inanimados, mostrando harmonia e proporção. Ela é objeto de estudo de muitas áreas como Biologia, Física, Arquitetura, Artes, Geometria, entre outras.

Segundo Stewart (2013) uma simetria de uma estrutura matemática de um tipo específico é uma transformação desta estrutura que deixa invariantes as propriedades específicas da mesma. A transformação empregada deve ser obrigatoriamente invertível.

> Quando algo pode ser dividido em duas partes exatamente iguais ele é simétrico; quando um objeto é girado em torno de um de seus eixos imaginários sem que sua “forma” se altere, esse objeto é simétrico em relação a este eixo/movimento; quando um objeto é deslocado de um ponto a outro sem que se altere, ele é simétrico em relação àquele deslocamento. (WEBARTIGOS, 2018, p. 1).

Para figuras no plano (ou no espaço) as transformações mais simples para definir simetrias são os movimentos rígidos, também chamados de isometrias - que preservam a distância entre dois pontos quaisquer.

Informalmente, pode-se dizer que uma figura no plano é simétrica ou tem simetria, se existir uma isometria, diferente da igualdade, que transforme essa figura nela própria. Nesse caso, diz-se que a isometria que deixa uma figura F invariante é uma simetria da figura F (CLUBES,2017).

As simetrias no plano podem ser classificadas como axial (translação e reflexão) ou central (rotação). Quando está relacionada a um eixo de simetria (uma reta), pode-se dizer que esta é uma simetria axial, e quando a simetria apresenta apenas um ponto fixo, chamado centro de simetria, então ela é chamada de simetria central ou ainda de simetria rotacional.

Elas se classificam ainda como indiretas, quando há a necessidade de sair do plano, ou como diretas, quando sair do plano não é necessário, pois as figuras apenas se deslocam sobre o mesmo.

As simetrias se relacionam não apenas com igualdades, mas também com semelhanças - que são as chamadas homotetias, estas, preservam formas e ângulos, mas alteram as medidas das figuras (gerando figuras semelhantes). Contudo, este trabalho se limita ao estudo das igualdades que são as simetrias obtidas através de isometrias.

Isometria é uma palavra de origem grega formada pela seguinte união: *Isos*,que significa igual e *metron*, que significa medida.

Segundo Oliveira (1972), todas as transformações que conservam as medidas e a forma de uma figura podem ser chamadas de isometrias.

Na linguagem matemática, isometrias são funções bijetoras de R^2 em R^2 que a cada ponto P do plano faz corresponder um único ponto P', preservando sempre as distâncias de tal modo que a partir de uma figura geométrica dada se forma outra figura geometricamente igual, ou seja, congruente à anterior.

Para que sejam congruentes, duas figuras, quando sobrepostas, ficam de tal forma que haja uma correspondência ponto a ponto sem que se faça necessário distorcê-las para que isso ocorra. Logo, pode-se dizer que elas coincidem perfeitamente.

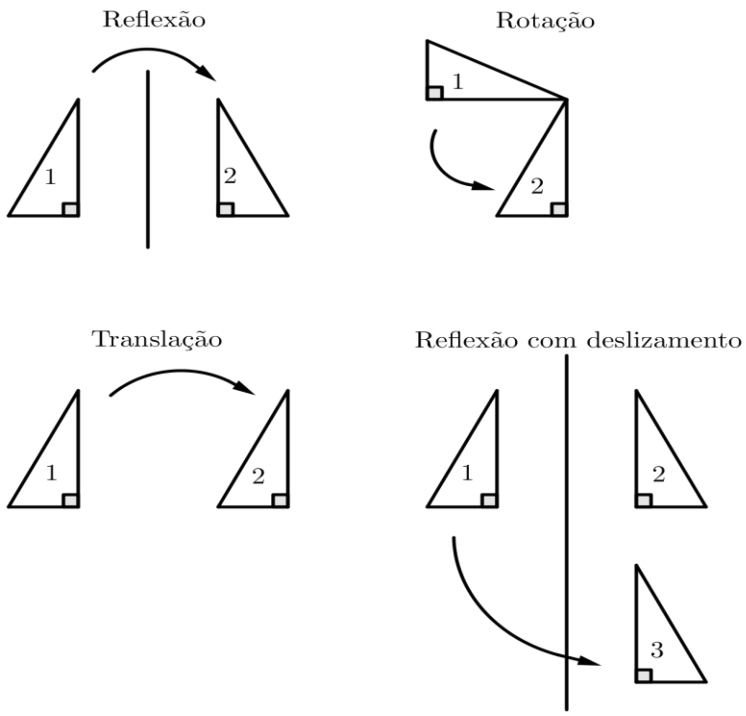
Considerando uma isometria $T: \beta \rightarrow \beta'$, pode-se então dizer que para quaisquer dois pontos, A e B, pertencentes a um determinado plano β, temos $T(A) = A'$ e $T(B) = B'$, com A' e B' pertencentes a β'. E ainda, que a distância de A até B é igual à distância de A' até B', ou seja, $d(A,B) = d(A',B')$.

Duas isometrias T_1 e T_2 podem ser aplicadas em sequência, o que corresponde à composição das mesmas, gerando uma nova isometria $T = T_2 \circ T_1$ chamada de composta ou produto das isometrias T_1 e T_2. Assim, pode-se escrever $A' = T_2(T_1(A)) = (T_2 \circ T_1)(A)$. Em outras palavras, pode-se dizer que um produto de isometrias é obtido a partir de aplicações sucessivas de transformações.

A função inversa de T é a função T^{-1} tal que $T^{-1}(A')$ é o único ponto A do plano para o qual $T(A) = A'$. Desta forma, a inversa de uma isometria $T^{-1}: R^2 \rightarrow R^2$ é ainda uma isometria.

Uma isometria pode se apresentar de quatro maneiras diferentes: reflexão, rotação, translação e reflexão com deslizamento, vide Figura 12.

Figura 12 – Tipos de isometrias



Fonte: A autora, 2018.

Desta forma, as isometrias geram figuras simétricas e a posição que essas figuras (ou suas partes) apresentam uma em relação às outras é que determinam o tipo de simetria que elas têm. Então, pode-se ter uma simetria de reflexão (quando as partes da figura se apresentam como se estivessem em um espelho), uma simetria de rotação (quando as partes da figura giram ao redor de um mesmo ponto) ou simetria de translação (quando as partes da figura apenas mudam de posição, se deslocando no plano).

A seguir, estão listadas algumas propriedades das isometrias, bem como suas demonstrações.

3.1 Propriedades das isometrias

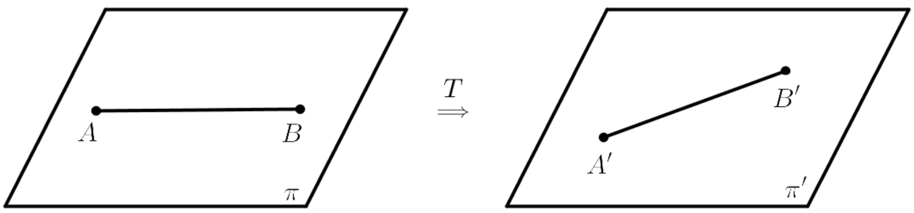
Já foi definido anteriormente o conceito de isometrias e já é sabido que elas são funções bijetivas, cabe agora provar que realmente o são.

Para ser bijetiva, uma função precisa ser injetiva e sobrejetiva, ao mesmo tempo. Contudo, a primeira proposição traz somente a demonstração de que estas funções são injetivas e, mais adiante, será visto que são também sobrejetivas uma vez que se faz necessário conhecer outras definições para realizar tal demonstração, concluindo a bijetividade das mesmas.

Proposição 1: *Toda isometria T é injetiva.*

Demonstração: Dados os pontos A e B, sendo $T(A) = A'$ e $T(B) = B'$, então se $A \neq B$ temos $d(A,B) > 0$. Como a isometria preserva distâncias, $d(A,B) = d(A',B') > 0$ e $A' \neq B'$. Desta forma, pode-se afirmar que T leva pontos distintos em pontos distintos.

Figura 13–Pontos A e B e a isometria T

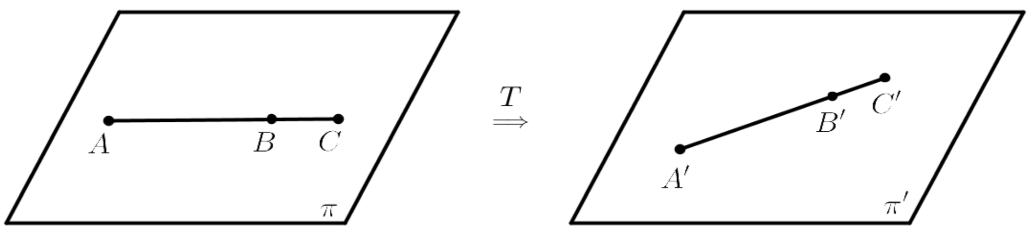


Fonte: A autora, 2018.

Proposição 2: *Uma isometria T leva pontos colineares em pontos colineares.*

Demonstração: Dados pontos colineares A, B e C, conforme a Figura 14, tem-se por definição que $d(A, C) = d(A,B) + d(B,C)$. Como T é uma isometria e considerando $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ e $T(C) = C'$, pode-se afirmar que $d(A',C') = d(A',B') + d(B',C')$, e também, garantir que, além de colineares, eles mantém a sequência original. Ou seja, se B está entre A e C, então, B' está entre A' e C'.

Figura 14 – Pontos colineares A, B e C e a isometria T



Fonte: A autora, 2018.

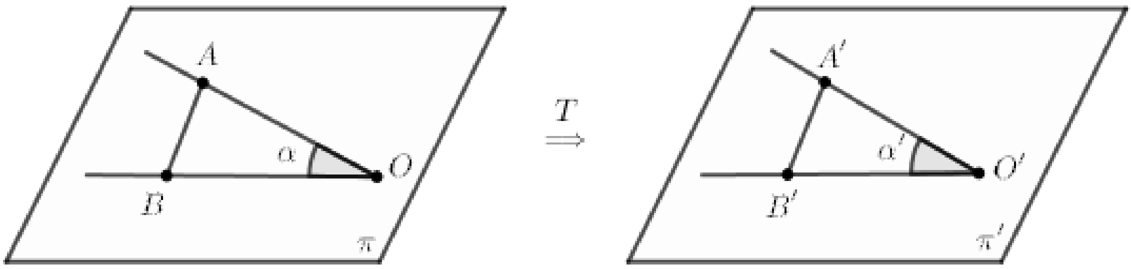
Como consequência, pode-se afirmar que uma isometria leva retas em retas e semirretas em semirretas.

Proposição 3: *Uma isometria preserva medida de ângulos.*

Demonstração: Considere um ângulo α de vértice *O*, sua imagem α’ de vértice *O’* e uma isometria *T*.

Ao marcar um ponto em cada um dos lados de α, *A* e *B*, de tal forma que se tenha *d(O,A) = d(O,B)* e aplicando sobre eles a isometria *T*, tem-se que *d(O’,A’) = d(O’,B’)* e também *d(A,B) = d(A’,B’)*, conforme mostra a Figura15.

Figura 15 – Ângulo α e a isometria T



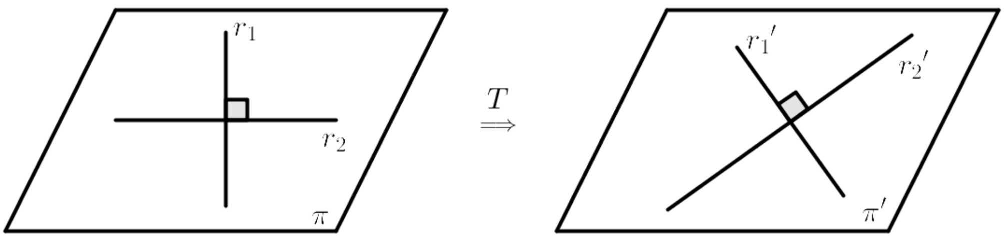
Fonte: A autora, 2018.

Então, pode-se concluir pela congruência de triângulos, caso LLL (lado, lado, lado), que os ângulos internos dos triângulos *ABO* e *A’B’O’* também são congruentes, ou seja, α = α'.

Proposição 4: *A isometria leva retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

Demonstração: Conforme visto nas propriedades 2 e 3, a isometria leva retas em retas além de conservar ângulos. Então, pode-se concluir facilmente que leva retas perpendiculares em retas perpendiculares. Vide Figura 16.

Figura 16 – Retas perpendiculares e a isometria T



Fonte: A autora, 2018.

Proposição 5: *Toda isometria é bijetora e a inversa de uma isometria é ainda uma isometria.*

Demonstração: Já foi demonstrado na proposição 1 que a isometria é uma função injetora, agora basta mostrar que ela é também sobrejetora.

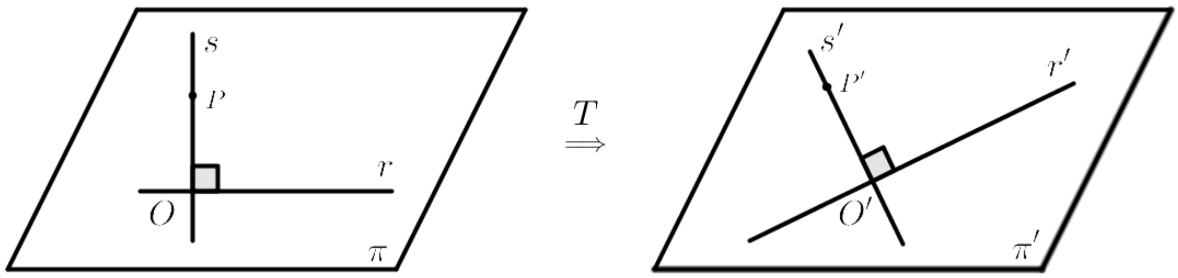
Para isto, é preciso provar que o conjunto imagem desta função coincide com o seu contradomínio. Ou seja, que para todo ponto $P' \in \pi'$, existe um ponto $P \in \pi$ tal que $T(P) = P'$.

Considere a reta $r \in \pi$, a reta $r' \in \pi'$ tal que $T(r) = r'$ e o ponto $P' \in \pi'$.

Já se sabe que a isometria leva retas em retas, então, se $P' \in r'$, tem-se que $P \in \pi$ e a demonstração está concluída. Caso contrário, trace uma reta s' perpendicular a r' passando por P' e chame de O' o ponto de interseção entre r' e s', conforme a Figura 17.

Desta forma, existe um ponto $O \in r$ tal que $T(O) = O'$. Ao traçar a perpendicular a r passando por O, obtém-se uma reta s tal que $T(s) = s'$. E, consequentemente, encontra-se um ponto $P \in$ s, tal que $d(O,P) = d(O',P')$, e então se pode afirmar que $T(P) = P'$.

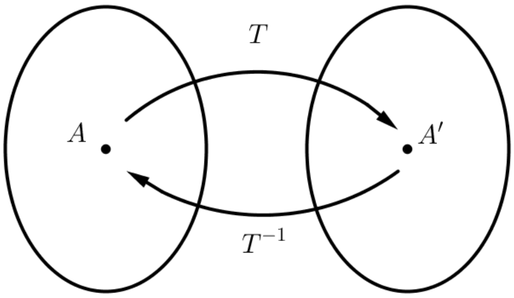
Figura 17 – Demonstração de que a isometria T é bijetiva



Fonte: A autora, 2018.

Por ser uma função bijetora, a isometria admite inversa, como já visto anteriormente, e a função inversa de T é a função T^{-1} no plano tal que $T^{-1}(A')$ é o único ponto A do plano para o qual tem-se$T(A)=A'$.

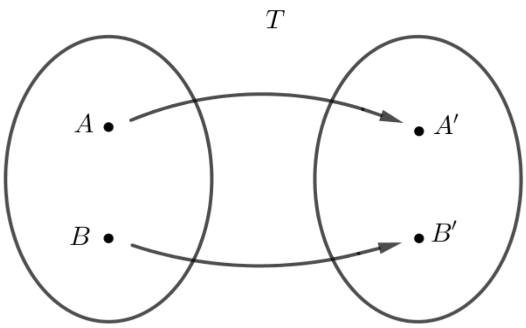
Figura 18 – Isometria T e sua inversa T^{-1}



Fonte: A autora, 2018.

Demonstração: Considere dois pontos, *A* e *B*, e *A′* e *B′*, suas respectivas imagens após uma isometria *T*, conforme Figura 19.

Figura 19 - Isometria T

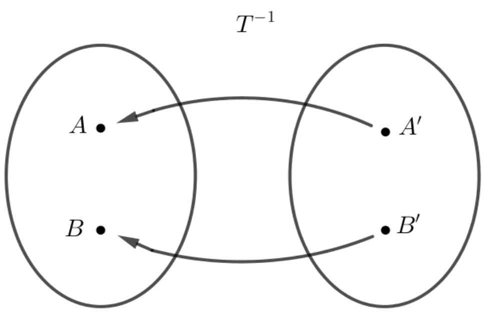


Fonte: A autora, 2018.

Como T é uma função bijetiva, então ela admite inversa.

Logo, $T^{-1}(A') = A$ e $T^{-1}(B') = B$ (vide Figura 20).

Figura 20 - Inversa de uma isometria T



Fonte: A autora, 2018.

Pode-se observar que $d(T^{-1}(A'), T^{-1}(B')) = d(A, B) = d(T(A), T(B)) = d(A', B')$.

Conclui-se, então, que a inversa de uma isometria $T^{-1}: R^2 \rightarrow R^2$ é ainda uma isometria pois preserva as distâncias.

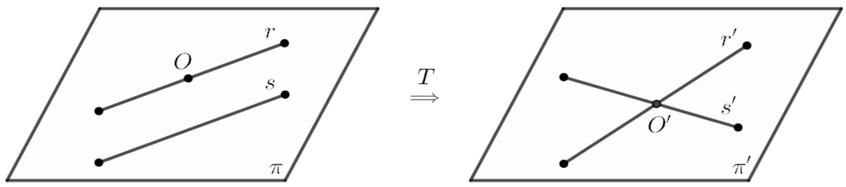
Proposição 6: *A isometria leva retas paralelas em retas paralelas.*

Demonstração: Considere as retas r e s paralelas entre si e r' e s' suas respectivas imagens após uma isometria T.

Seja O um ponto tal que $O \in r$, e $T(O) = O'$.

Suponha, por absurdo, que r' e s' sejam concorrentes no ponto O'. Conforme a Figura 21.

Figura 21 - Retas paralelas e a isometria T, prova por absurdo



Fonte: A autora, 2018.

Então, $O' \in r'$ e $O' \in s'$ e também, $O \in r$ e $O \in s$, o que é um absurdo, visto que as retas r e s são paralelas.

Logo, conclui-se que as retas *r'* e *s'* também são paralelas e preservam a distância existente entre *r* e *s*.

Proposição 7: *A isometria leva triângulos em triângulos (congruentes).*

Demonstração: Esta demonstração terá início de maneira parecida com a demonstração da proposição 3 (vide Figura 15). Considere um ângulo α de vértice *O*, sua imagem α' de vértice *O'* e uma isometria *T*.

Será marcado um ponto em cada um dos lados, *A* e *B*. Aplicando a isometria *T*, temos $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ e $T(O) = O'$. Desta forma, $d(A',B') = d(A,B)$, $d(A',O') = d(A,O)$ e $d(B',O') = d(B,O)$. Logo, os triângulos ABO e A'B'O' são congruentes e assim, os ângulos correspondentes são iguais.

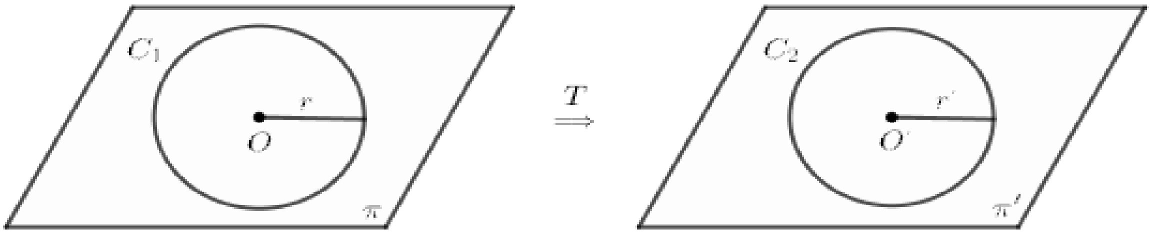
Proposição 8: *A isometria leva circunferência em circunferência.*

Como a isometria preserva distâncias e uma circunferência é o conjunto de pontos equidistantes do centro, tem-se que a imagem de C_1 é um conjunto de pontos que distam *r* de *O'*. Logo, a imagem de C_1 por *T* está contida na circunferência C_2 de centro *T(O)* e raio *r*.

Seja agora um ponto qualquer *Q'* de C_2. Como existe T^{-1}, seja $Q = T^{-1}(Q')$. Temos então que $d(O,Q) = d(T(O),Q') = r$. Assim, a imagem de C_1 é exatamente C_2.

A Figura 22 abaixo representa essa situação.

Figura 22 - Circunferência C_1 e a isometria T



Fonte: A autora, 2018.

Segundo Rezende (2008), estas propriedades levam a concluir que dadas duas figuras *F* e *G* no plano, pode-se dizer que elas são congruentes quando existe uma isometria tal que *G* é a imagem de *F* por essa isometria.

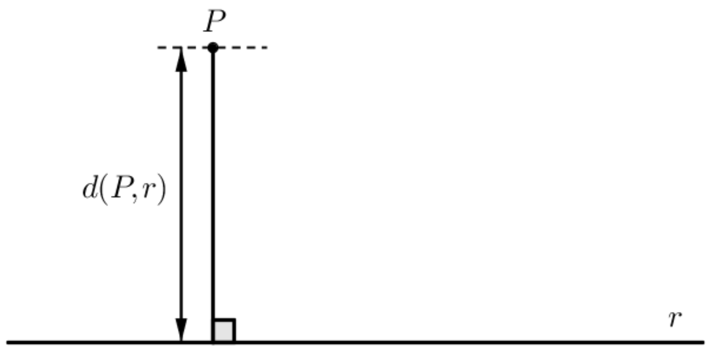
3.2 Tipos de isometrias

Será feito agora o estudo dos casos de isometria e suas características.

3.2.1 Reflexão e simetria axial

Antes de definir como se dá uma reflexão em relação a uma reta, deve-se observar que a distância entre um ponto *P* e uma reta *r* se dá através de um segmento de reta que una o ponto *P* à reta *r*, formando com a mesma um ângulo de 90º, conforme mostra a Figura 23.

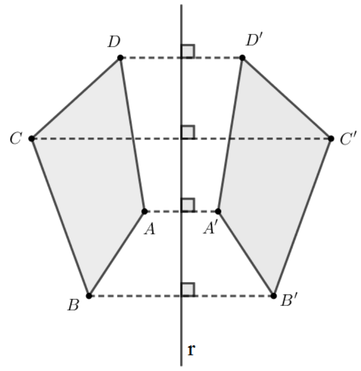
Figura 23 – Distância entre o ponto P e a reta r



Fonte: A autora, 2018.

Na reflexão, pode-se dizer que uma figura é a imagem espelhada da outra, em relação à reta considerada. A reflexão está representada pela Figura 24.

Figura 24 – Reflexão do quadrilátero ABCD



Observe que:

d(A, r) = d(A’, r)

d(B, r) = d(B’, r)

d(C, r) = d(C’, r)

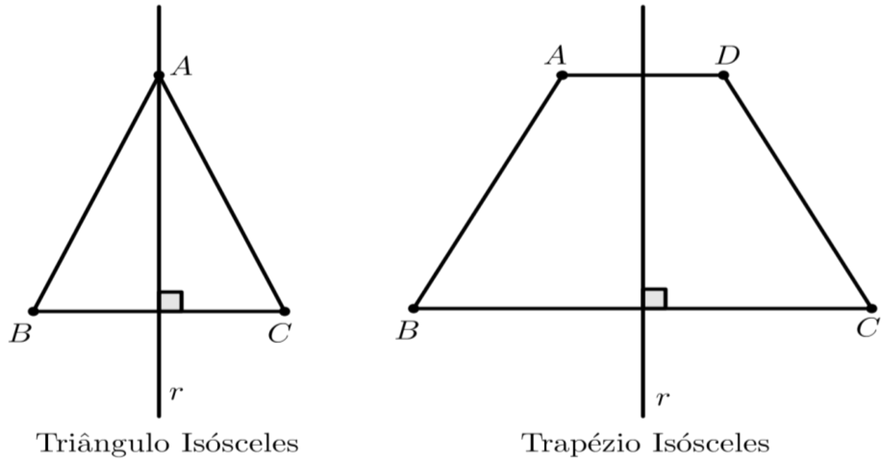
d(D, r) = d(D’, r)

Fonte: A autora, 2018.

A reta *r* é chamada de eixo de reflexão. Ela é a mediatriz dos segmentos que unem os pontos correspondentes. Ou seja, é com base nela que se faz corresponder cada ponto a seu simétrico.

Uma figura é simétrica em relação a uma reta r quando coincide com sua imagem pela reflexão em relação a esta reta. Observe alguns exemplos na Figura 25:

Figura 25 – Exemplos de figuras com apenas um eixo de simetria

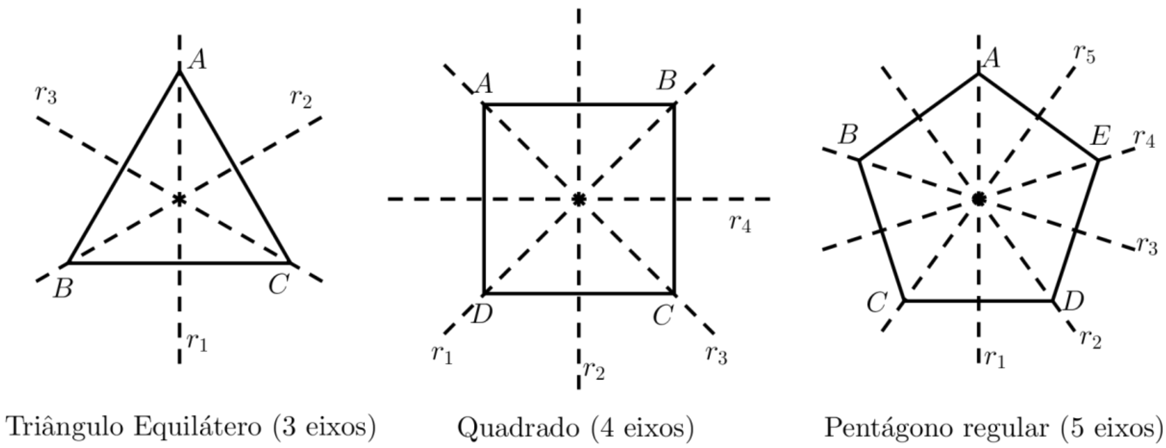


Fonte: A autora, 2018.

De acordo com Lopes (1997), o eixo de simetria divide a figura em duas partes que coincidem exatamente por superposição.

Algumas figuras apresentam mais que um eixo de simetria, conforme ilustração abaixo (Figura 26):

Figura 26 – Exemplos de figuras com mais de um eixo de simetria



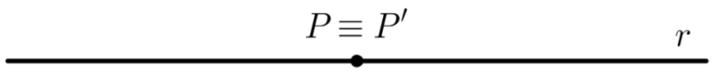
Fonte: A autora, 2018.

De maneira geral, pode-se afirmar que qualquer polígono regular de *n* lados apresenta *n* eixos de simetria.

3.2.1.1 Propriedades da reflexão com relação a uma reta

- A reflexão de um ponto *P* será ele mesmo se, e somente se, *P* pertencer ao eixo de reflexão. Logo, todo ponto que pertence ao eixo de reflexão coincide com a sua imagem.

Figura 27 - Reflexão de P, pertencente ao eixo de simetria r

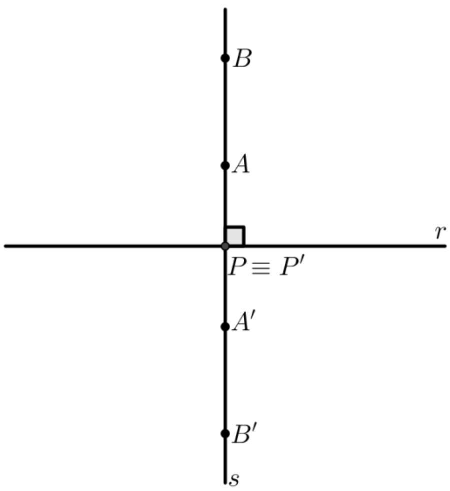


Fonte: A autora, 2018.

- A reflexão de uma reta *s*, perpendicular a *r*, é a própria reta *s*.

Na Figura28, seja T: $R^2 \to R^2$ a reflexão em relação a *r* e considere *T(A) = A'*, *T(B) = B'*,*T(A') = A*, *T(B') = B* e *T(P) = P' = P*.

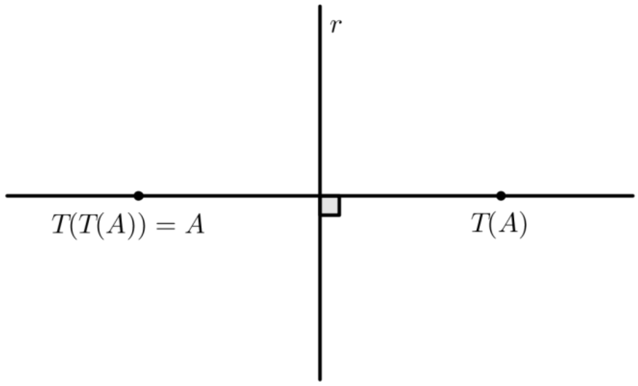
Figura 28 – Reflexão da reta s, perpendicular a reta r



Fonte: A autora, 2018.

- *T(T(A)) = A*, para todo ponto *A* do plano.

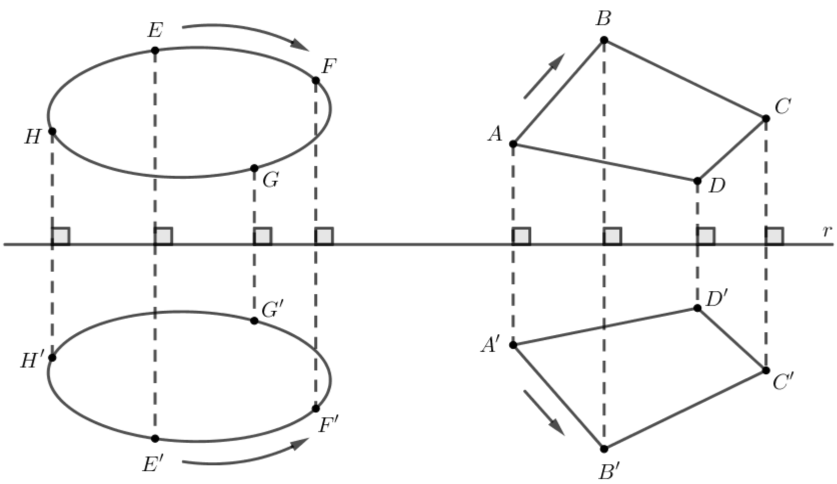
Figura 29 – Reflexão da imagem de A após a isometria T



Fonte: A autora, 2018.

A reflexão com relação a uma reta r não conserva as orientações de curvas fechadas nem de polígonos.Quando se fala em orientação, na verdade se fala em sentido horário ou sentido anti-horário. Vide Figura30.

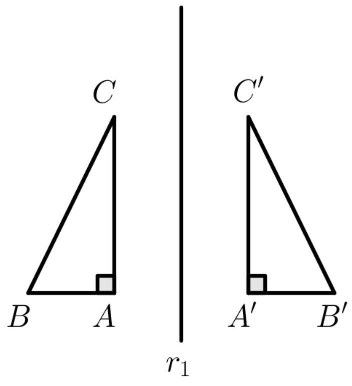
Figura 30 – Reflexão e orientação de curvas fechadas e polígonos



Fonte: A autora, 2018.

Embora a reflexão feita com relação a uma única reta não conserve a orientação da figura tomada inicialmente, se for feito um produto de reflexões é possível ou não conservar a orientação inicial e isto dependerá do número de reflexões feitas ao final. Considere os exemplos abaixo (Figuras 31, 32 e 33):

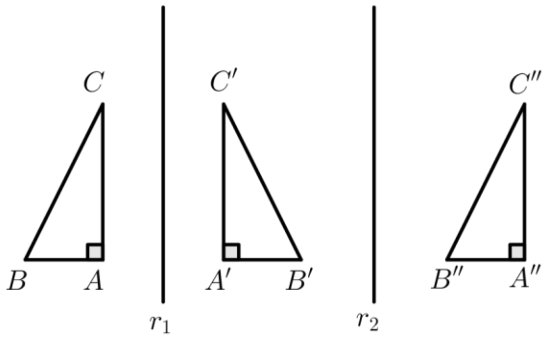
Figura 31 – Reflexão do triângulo ABC



um eixo de reflexão

Fonte: A autora, 2018.

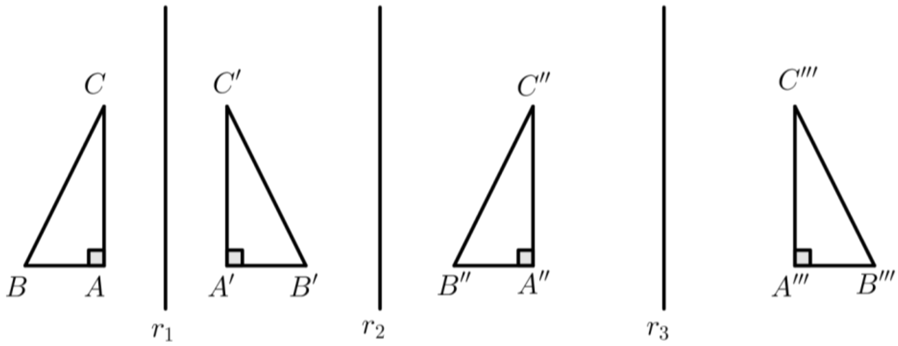
Figura 32 – Produto de duas reflexões do triângulo ABC



dois eixos de reflexão

Fonte: A autora, 2018.

Figura 33 – Produto de três reflexões do triângulo ABC



três eixos de reflexão

Fonte: A autora, 2018.

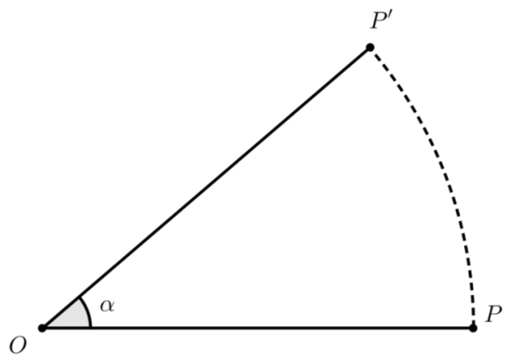
Note que, sempre que for feito um número par de reflexões, a orientação da figura será mantida e ela será chamada de “isometria direta”, caso contrário, se for feito um número ímpar de reflexões, a orientação será alterada e esta será chamada de “isometria oposta”.

3.2.2 Rotação e simetria rotacional

Será definido agora outro tipo de isometria, a rotação.

Considerando *O* um ponto fixo do plano e α um número real tal que $-180° < \alpha < 180°$, se chama rotação de centro *O* e ângulo α à transformação R_α que associa a cada ponto *P* do plano um outro ponto *P’* de modo que *d(O,P) = d(O,P’)* e o ângulo formado entre *OP* e *OP’* seja igual a α, ou seja, $P\hat{O}P' = \alpha$ conforme mostra a Figura 34:

Figura 34 – Rotação do ponto P sob um ângulo α

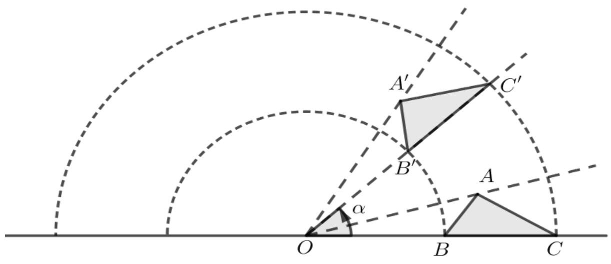


Fonte: A autora, 2018.

Diz-se que *P*’ é a imagem de *P* após este ter sofrido uma rotação de ângulo α em torno de *O* e simboliza-se esta situação por $R_\alpha(P) = P'$.

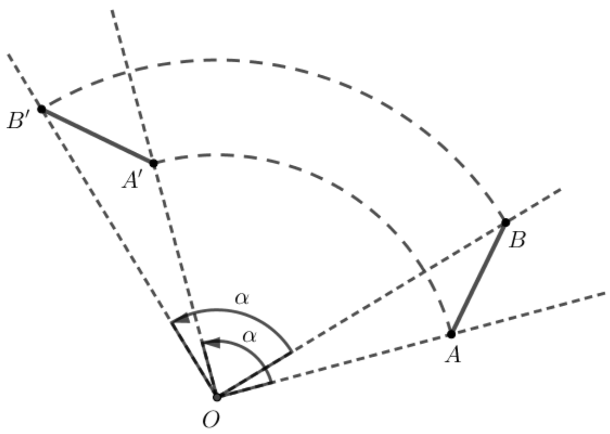
Observe alguns exemplos de rotação (Figuras 35 e 36):

Figura 35 – Rotação do triângulo ABC sob um ângulo α



Fonte: A autora, 2018.

Figura 36 Rotação do segmento de reta AB sob um ângulo α



Fonte: A autora, 2018.

Note que (Figura 35) os pontos correspondentes sempre fazem parte de uma mesma circunferência.

A seguir é feita a demonstração de que uma rotação também é uma isometria.

Observe os pontos A e B da Figura 36 e considere $T(A) = A'$ e $T(B) = B'$.

Como os pontos A e A' fazem parte de uma mesma circunferência, bem como os pontos B e B', se pode afirmar que $d(O, A) = d\ (O, A')$ e $d(O, B) = d\ (o, B')$.

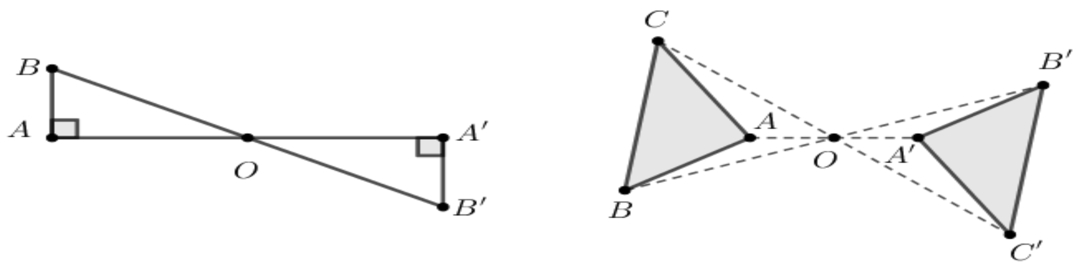
Temos ainda que $A\hat{O}A'=\alpha$ e $B\hat{O}B'=\alpha$.

Considere $A\hat{O}B' = \alpha + \beta$. Desta forma, tem-se que $A\hat{O}B = \beta$ e $A'\hat{O}B' = \beta$.

Pelo caso de congruência LAL (lado, ângulo, lado), pode-se afirmar que os triângulos AOB e $A'OB'$ são congruentes, e então, $AB=A'B'$. Assim, preserva distâncias e é também uma isometria.

Quando a rotação é feita sob um ângulo de 180° em torno de um ponto fixo O, ela é chamada de meio-giro. Neste caso, o centro de rotação (ponto O) é o ponto médio de cada um dos segmentos que liga cada ponto da figura ao seu ponto correspondente, conforme mostra a Figura 37:

Figura 37 – Rotação de 180° em torno do ponto fixo O



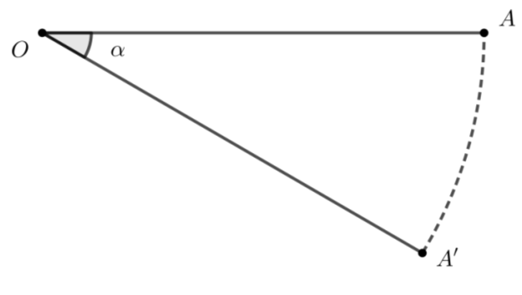
Fonte: A autora, 2018.

Em ambos os casos, tem-se que *O* é o ponto médio do segmento *AA'* e do segmento *BB'*, e no segundo caso tem-se ainda que *O* também é o ponto médio do segmento *CC'*.

3.2.2.1 Propriedades da rotação

- O centro de rotação é um ponto fixo desta transformação.

Figura 38 – Ponto O como ponto fixo da rotação

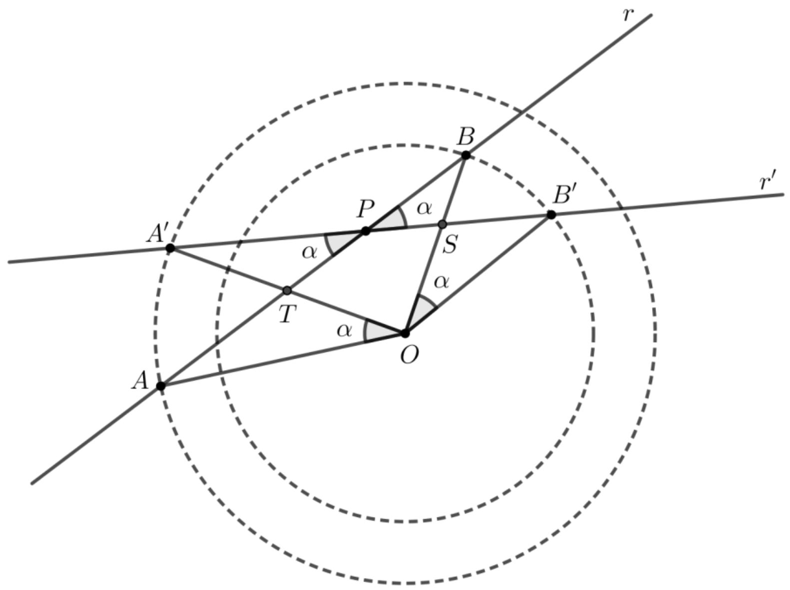


Fonte: A autora, 2018.

O ponto *O* é chamado de centro de rotação e *A'* é a imagem de *A* após uma rotação de ângulo α.

- Dadas duas retas *r* e *r'*, com $R_\alpha(r) = r'$, o ângulo formado entre *r* e *r'* será o mesmo ângulo α de rotação.

Figura 39 – Rotação da reta r sob um ângulo α



Fonte: A autora, 2018.

Demonstração: Primeiramente, deve-se observar (Figura 39) que os triângulos AOB e $A'OB'$ são congruentes pelo caso LLL (lado, lado, lado) pois $d(O, A) = d(O, A')$, $d(O, B) = d(O, B')$ e $d(A, B) = d(A', B')$. Devido à congruência destes triângulos, e também ao fato de a isometria preservar ângulos, pode-se afirmar que $A = A'$ e $B = B'$.

Considere agora os triângulos AOT e $AP'T$.

Neles, tem-se $A = A'$ e $A\hat{T}O = A'\hat{T}P$ pois são opostos pelo vértice (OPV).

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°, tem-se que $A\hat{O}T = T\hat{P}A' = \alpha$.

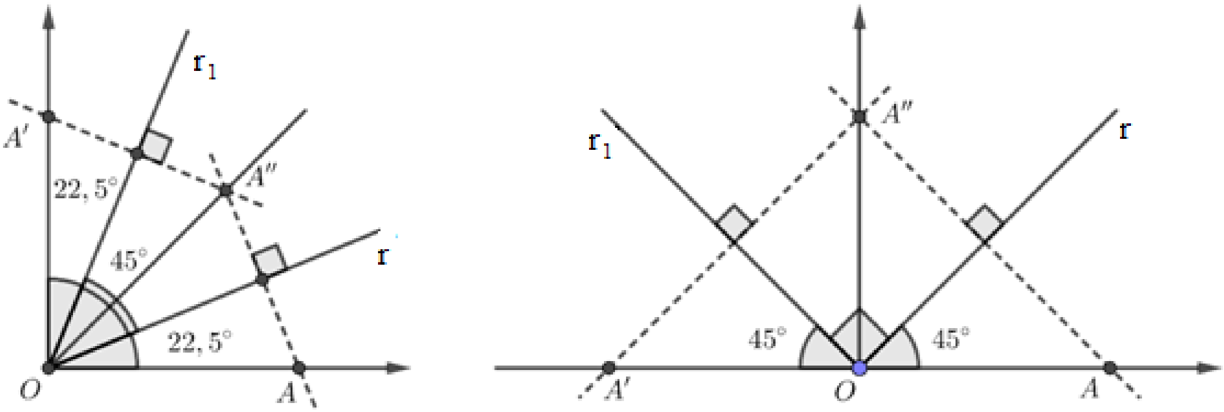
Os ângulos $A\hat{P}A'$ e $B\hat{P}B'$ também são opostos pelo vértice e, por isso, apresentam a mesma medida.

Logo, conclui-se que o ângulo formado entre as retas r e r' é o mesmo ângulo α de rotação.

- Quando a rotação é feita sob um ângulo múltiplo de 360° (360°, 720°, 1080°,...), a figura formada coincidirá com a figura inicialmente apresentada no plano. A esta transformação, dá-se o nome de transformação idêntica e é representada por $R_{k\times360°}=R_{0°}$, sendo k um número inteiro.
- Toda rotação de centro O e ângulo α pode ser reescrita como um produto de duas reflexões de forma que os eixos de simetria passem pelo ponto O e formem entre si um ângulo β tal que β = α/2.

Isso é possível pelo fato de que ambas são isometrias diretas, ou seja, conservam a orientação da figura. Vide os exemplos da Figura40.

Figura 40 – Reescrevendo a rotação como um produto de duas reflexões



Fonte: A autora, 2018.

No exemplo à esquerda, pode-se observar que *A'* é a imagem de *A* através de uma rotação de 90°, ou seja, $R_{90°}(A)=A'$. Logo, o ângulo formado entre os dois eixos de simetria (do produto de reflexões), *r* e r_1 é de 90°/2 = 45°. Note também que *A''* é a reflexão de *A* e de *A'*, através dos eixos de reflexão *r* e r_1, respectivamente.

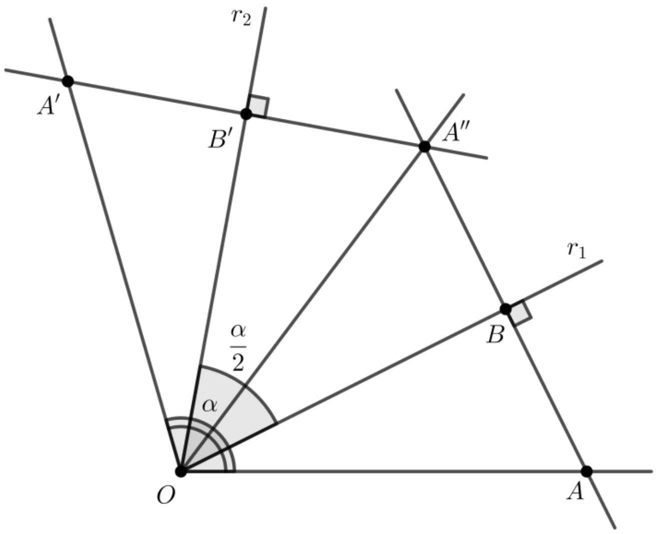
O exemplo à direita é análogo, porém neste caso o ângulo considerado é de 180°.

Demonstração: Considere o ponto A e sua respectiva imagem, A', após uma rotação de α graus.

Considere ainda A" a reflexão de A por r_1 e A' a reflexão de A" por r_2. Tome os pontos B e B', interseções de AA" com r_1 e A"A' com r_2, respectivamente.

Observe a Figura 41:

Figura 41 - Demonstração da rotação como um produto de reflexões



Fonte: A autora, 2018.

Tem-se então que d(O, A) = d(O, A") = d(OA'), e que d(A, B) = d(B, A") = d(A", B') = d(B', A') e, ainda, que d(A, A") = d(A", A').

Então, os triângulos AOA" e A"OA' são congruentes pelo caso LLL (lado, lado, lado).

Logo, AÔA" = A"ÔA'.

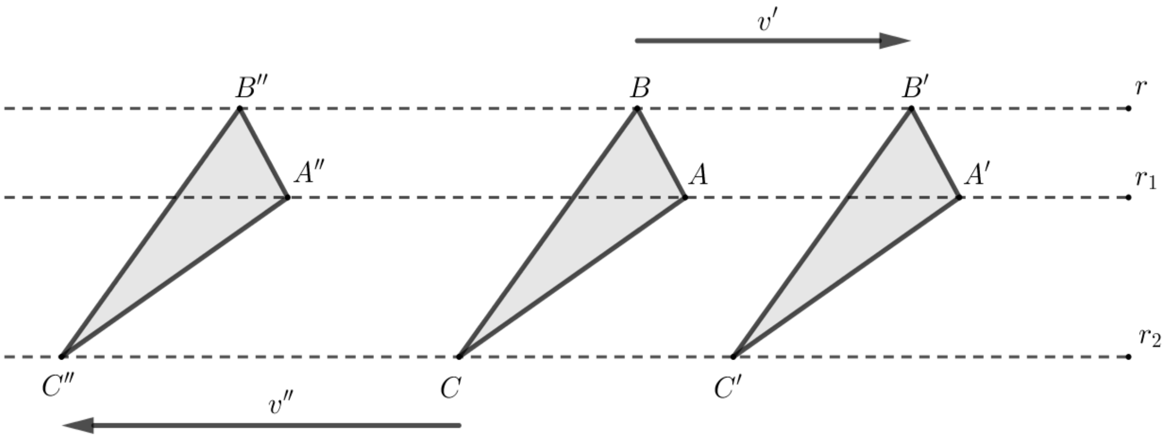
Como as isometrias preservam ângulos, tem-se AÔB = BÔA" = A"ÔB' = B'ÔA' = $\frac{\alpha}{4}$.

Daí, o ângulo formado entre r_1 e r_2 é $\frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} = \frac{2\alpha}{4} = \frac{\alpha}{2}$.

3.2.3 Translação

A translação é também um tipo de isometria e pode ser definida como uma transformação na qual a figura tomada se desloca paralelamente a uma reta, ou seja, todos os pontos da figura se deslocam a uma mesma distância, direção e sentido.Quem determina este deslocamento é o chamado vetor de translação.

Figura 42 – Translação do triângulo ABC



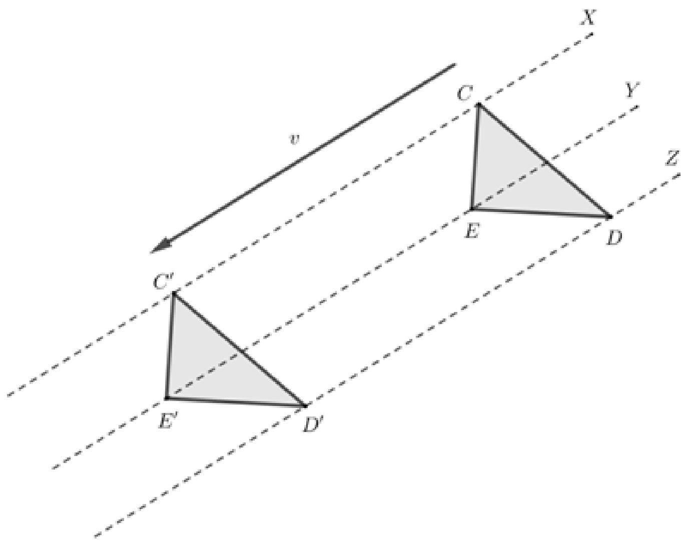
Fonte: A autora, 2018.

Observe que, ao mudar o tamanho, a direção ou o sentido do vetor dado, é possível encontrar novas imagens, todas elas de mesmo formato e tamanho.

A translação também pode ser descrita como um produto de reflexões que preservem a orientação da figura original.

Considere agora o vetor $\vec{v}$ e o triângulo *CDE*, da figura seguinte. Para determinar a translação do triângulo dado, deve-se transportá-lo segundo o vetor $\vec{v}$ sobre as retas *x*, *y* e *z*, paralelas a ele, passando por C, D e E.

Figura 43 – Translação do triângulo CDE



Fonte: A autora, 2018.

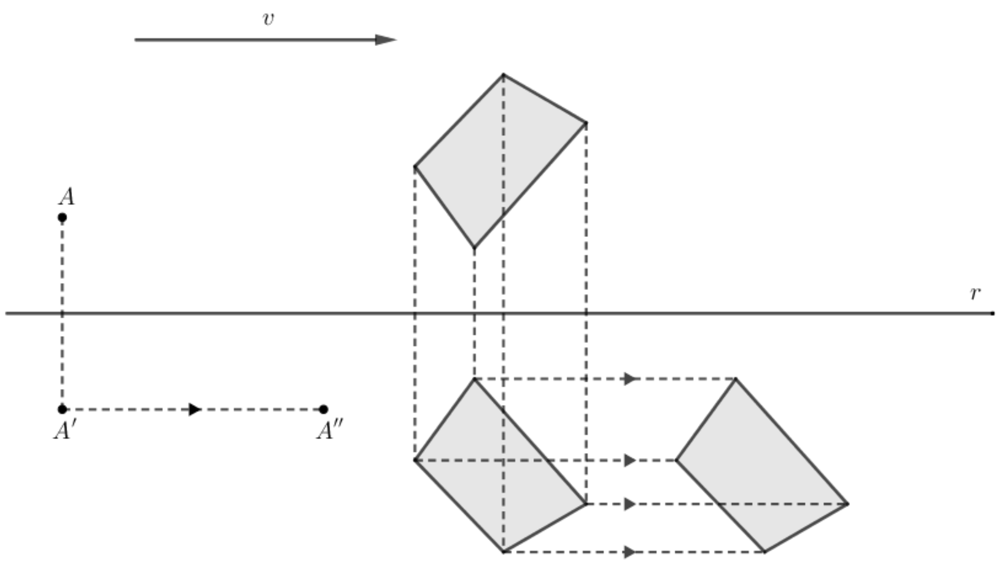
Desta forma, */v/ = d(C,C') = d(D, D') = d(E, E')*.

3.2.4 Reflexão com deslizamento

Seja T_v uma translação a partir do vetor $\overrightarrow{v}$ e R_r uma reflexão em relação à reta r. Considere um vetor $\overrightarrow{v}$ e uma reta r, paralela a ele, ambos contidos no plano π.

A reflexão com deslizamento, determinada pelo vetor $\overrightarrow{v}$ e pela reta r, é a isometria $T = T_v \circ R_r : \pi \rightarrow \pi$. Ou seja, esta é uma função composta obtida fazendo a reflexão da figura tomada com relação à reta r, e em seguida, fazendo sua translação a partir do vetor $\vec{v}$. Em outras palavras, a reflexão com deslizamento é o resultado da combinação de uma reflexão com uma translação.

Figura 44 – Reflexão com deslizamento de um ponto A e de um trapézio



Fonte: A autora, 2018.

Como o vetor $\vec{v}$ é paralelo a reta r, é fácil concluir que $T_v \circ R_r = R_r \circ T_v$. Ou seja, é indiferente fazer a reflexão seguida da translação ou vice-e-versa.

4 ESPELHOS E SIMETRIAS

É possível fazer uso de espelhos para o ensino e aprendizagem de geometria e, dependendo do tema abordado, opta-se entre fazer uso de apenas um ou de muitos espelhos que podem se apresentar unidos ou separados. A dois ou mais espelhos unidos pelas extremidades, a fim de se tornarem uma peça única, dá-se o nome de caleidoscópio.

Nas atividades que serão realizadas em sala de aula, serão utilizados de um a dois espelhos de superfície plana.

Mas o que seria um espelho?

Espelho é um objeto formado por uma lâmina de vidro, na qual, uma de suas faces apresenta uma camada metálica que é usada para refletir o que é posto à sua frente. Esta camada geralmente é formada por prata ou alumínio e o vidro é usado apenas como suporte.

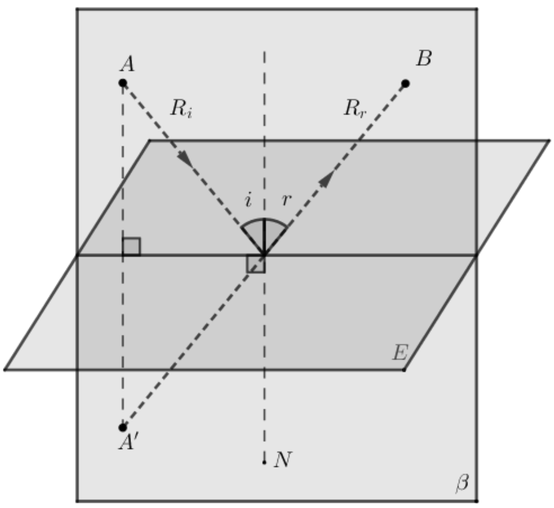
Existem duas leis que regem a reflexão. São elas:

i. O raio de luz incidente (que atinge a superfície do espelho), o raio de luz refletido (que a superfície do espelho consegue refletir) e a reta normal (perpendicular à superfície do espelho) no ponto de incidência são coplanares, ou seja, pertencem ao mesmo plano;

ii. O ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.

De acordo com Murari (2012, p.27), "[...] a imagem de um ponto, obtida através do espelho, é o encontro dos raios refletidos ou dos prolongamentos destes, sendo chamada de imagem virtual [...]".Observe a figura abaixo (Figura 45):

Figura 45 – Imagem do ponto A através do espelho E



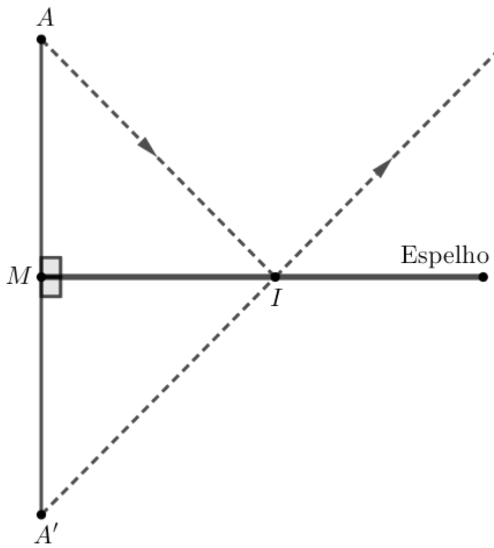
Fonte: A autora, 2018.

Onde, *E* é o espelho, β é o plano, *N* é a reta normal à superfície do espelho, R_i é o raio incidente, R_r é o raio refletido, *i* é o ângulo de incidência,*r* é o ângulo de reflexão, *A* é um ponto dado, *A'* é o ponto refletido e *B* é o observador.Note também que R_i, R_r *e N* pertencem ao mesmo plano.

O esquema acima (Figura 42) mostra o ponto *A'* que é o reflexo de *A* através do espelho *E* visto pelo observador *B*. Ao ser observado por *B*, a impressão causada ao mesmo é que *A'* encontra-se atrás do espelho, à mesma distância que o ponto *A* encontra-se à frente deste.

Acompanhe na Figura 46 o porquê de isso ser possível:

Figura 46 – Um ponto e sua imagem no espelho



Fonte: A autora, 2018.

Na Figura 46 acima, considere *B* o observador, *A* o ponto dado, *A'* o ponto refletido e *I* o ponto de incidência, todos coplanares. O triângulo *AIA '* é isósceles, então, *M* é o ponto médio do segmento *AA'*. É fácil concluir aqui que os triângulos *AMI* e *A'MI* são congruentes, pois *AM* = *MA'*, *AMI* = *A'MI* = 90° e *MI* é um lado comum aos dois triângulos, então, os triângulos são congruentes pelo caso LAL.

Conforme mencionado anteriormente, *A'* é o simétrico de *A* com relação à reta que representa o espelho.

Segundo Murari (2012, p.28), "[...] colocando uma figura qualquer num plano, à frente e perpendicularmente a um espelho plano, obteremos o simétrico dessa figura em relação ao espelho, devido ao fenômeno da reflexão, que obedece às leis da reflexão da ótica geométrica [...]”.

O parágrafo anterior justifica o fato de as atividades trabalhadas com os alunos serem feitas utilizando-se os espelhos sempre perpendicularmente ao plano (à mesa).

Na fase da construção das atividades que seriam aplicadas em sala de aula, optou-se pelo uso dos espelhos a fim de tornar o ensino mais interessante e um pouco diferente do tradicional, onde tal conteúdo se tornaria algo muito abstrato.

Além disso, o uso de espelhos permite ao aluno descobrir as propriedades de algumas Figuras geométricas através da observação de padrões.

No capítulo a seguir, serão apresentadas as atividades trabalhadas em sala de aula, o objetivo de cada uma delas, o que se espera como resposta por parte dos alunos e algumas das respostas apresentadas por eles. Ao final desta dissertação, serão anexadas as folhas prontas para impressão.

5 ORGANIZAÇÃO E APLICAÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa foi aplicada a um grupo de 11 alunos da rede municipal de ensino. O grupo era pequeno, pois a maior parte da turma já estava de férias e os alunos presentes eram os que se encontravam em segunda época na data de aplicação da mesma.

É importante ressaltar que as atividades foram aplicadas fora do horário destinado às aulas de recuperação, não causando, portanto nenhum tipo de prejuízo ao conteúdo que deveria ser lecionado durante esse período e que somente os alunos que aceitaram participar estavam presentes. E ainda, os que ali estavam sabiam que não ganhariam nenhum ponto ou qualquer outro benefício em troca de sua participação, a não ser os conhecimentos adquiridos na ocasião.

Também é válido dizer que não houve conversa prévia a respeito do conteúdo a ser trabalhado, afinal, um dos objetivos desta pesquisa era justamente que eles construíssem os conceitos apresentados através de suas próprias observações.

A este grupo foram aplicadas cinco folhas de atividades distribuídas em quatro aulas de cinquenta minutos cada, onde lhes foram apresentados, com o auxílio de espelhos, os conceitos de simetria no plano (reflexão, translação e rotação), bem como suas propriedades.

Vale ressaltar que durante a aplicação em sala de aula, foram trabalhadas a reflexão, translação e rotação, excluindo-se a reflexão com deslizamento.

Durante as aulas, foram entregues aos alunos algumas folhas contendo atividades previamente elaboradas – as quais se encontram em anexo, para possível reprodução. A cada atividade desenvolvida, o aluno recebia as instruções e resolvia as questões, uma a uma, de acordo com as suas observações.

A fim de comprovar que os alunos realmente absorveram os conhecimentos que lhes foram apresentados, ao final, eles foram convidados a confeccionar um cartaz com ilustrações recortadas de revistas, ainda em sala de aula, que os remetiam à ideia de simetria.

A pesquisa não ofereceu nenhum tipo de risco aos alunos envolvidos, já os benefícios trazidos a eles são os conhecimentos concretos acerca do tema.

As atividades propostas em sala de aula foram elaboradas tendo como referencial teórico o material contido em Fainguelernt e Nunes (2012), Lopes e Nasser (1996) e Murari e Barbosa (2012).

Todas as atividades foram feitas sob a orientação da professora de Matemática, que foi a mediadora durante todo o processo, ajudando-os a construir os conhecimentos necessários.

As atividades feitas em sala estão apresentadas abaixo, assim como algumas respostas dadas pelos alunos.

Nos espaços destinados às respostas, encontram-se algumas sugestões para as mesmas. Com exceção das atividades 3, da folha 1, e 4, da folha 4, onde não estão representadas as respostas as quais deveriam ser desenhadas pelos alunos.

- Folha de atividades 1

Objetivo: definir simetrias e suas propriedades.

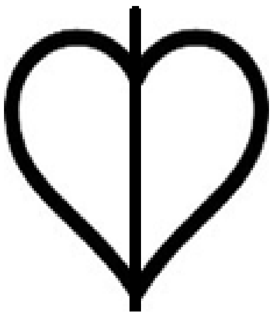
Pré-requisito: nenhum.

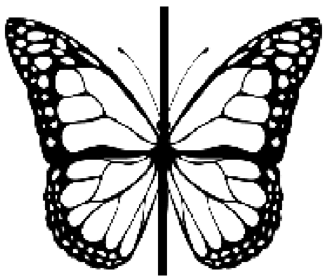
Material necessário: espelho, imagens e folhas de atividades.

Figura47 – Enunciado da questão 1 folha 1

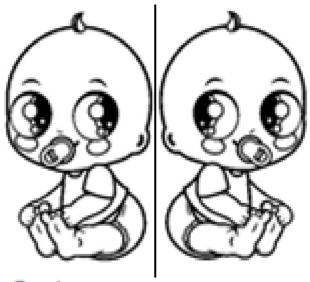
Enunciado da questão 1

1) Ponha o espelho sobre a reta apresentada em cada uma das figuras. O que se pode observar?





Fonte: http://blablalab.netuma-borboleta-na-ponte-de-babel



Fonte: http://familia.colorir.com/bebaes-gaemeos.html

Fonte: A autora

Possível resposta: É possível observar, ao utilizar o espelho sobre a reta, que todas as figuras apresentadas acima se completam perfeitamente.

Obs. Esta reta chama-se **eixo de simetria**.

Fonte: A autora, 2018.

Esta questão tem por objetivo apresentar aos alunos o eixo de simetria.

Na Figura 48,encontram-se as imagens vistas com o uso de um espelho colocado sobre o eixo de simetria, conforme mandava o enunciado.

Figura 48 – Imagens da questão 1 folha 1 vista com o auxílio de um espelho

Fonte: A autora, 2018.

Figura 49 – Resposta dada pelo aluno C à questão 1 folha 1

Resposta dada pelo aluno C

Vejo que as figuras se completam com o reflexo do espelho

Fonte: Dados da autora, 2018.

Todos responderam corretamente sem qualquer tipo de dúvida.

Figura 50 – Enunciado da questão 2 folha 1

Enunciado da questão 2

2) O que acontece se dobrarmos qualquer uma dessas figuras no eixo de simetria?

Possível resposta: Se dobrarmos qualquer uma das figuras apresentadas no eixo de simetria, as duas partes ficarão sobrepostas, ou seja, coincidirão perfeitamente.

Fonte: A autora, 2018.

Esta questão apresenta como meta mostrar a propriedade do eixo de simetria, ou seja, ela pretende mostrar que o eixo de simetria divide a imagens em partes geometricamente iguais e que por este motivo, podem ser perfeitamente sobrepostas.

Figura 51 – Resposta dada pelo aluno F à questão 2 folha 1

Resposta dada pelo aluno F


ficamos com duas partes iguais

Fonte: Dados da autora, 2018.

Na atividade a seguir (Figura52), espera-se que o aluno, já conhecendo o eixo de simetria, seja capaz de identificá-lo em uma figura qualquer, bem como dizer se uma figura possui ou não o mesmo.

É importante dizer que neste momento a professora emprestou aos alunos um pequeno espelho plano a fim de que verificassem se suas respostas estavam corretas ou não.

Foi possível notar que alguns alunos erraram algumas das questões,mas puderam perceber sozinhos seus próprios erros ao utilizarem o espelho para conferência. Uma das questões mais erradas foi a do clips, onde alguns respondiam inicialmente que o mesmo apresentava um eixo de simetria, mas perceberam o erro quando fizeram uso do espelho.

Figura 52 – Enunciado da questão 3 folha 1

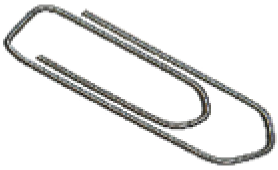
Enunciado da questão 3

3) Nas figuras apresentadas, trace os respectivos eixos de simetria (caso existam) e indique quantos deles cada figura possui:

a) Retângulo: 2

Fonte: A autora

b) Clips: 0



Fonte: https://www.multiprat-k.com.br/papelaria/clips-nr-2-galvanizado-com-50-unis.html

c) Letra H: 2

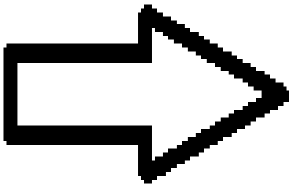
H

Fonte: A autora

d) Logotipo globo: 2

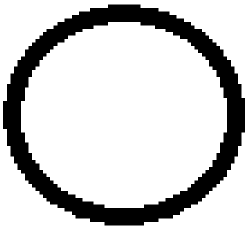
Fonte: https://wikipedia.org/wiki/Lista_de_emissoras_da_rede_Globo

e) Seta: 1



Fonte: A autora

f) Círculo: infinitos



Fonte: A autora

g) Letra f: 0

F

Fonte: A autora

h) A palavra ovo:1

OVO

Fonte: A autora

i) letra A: 1

A

Fonte: A autora

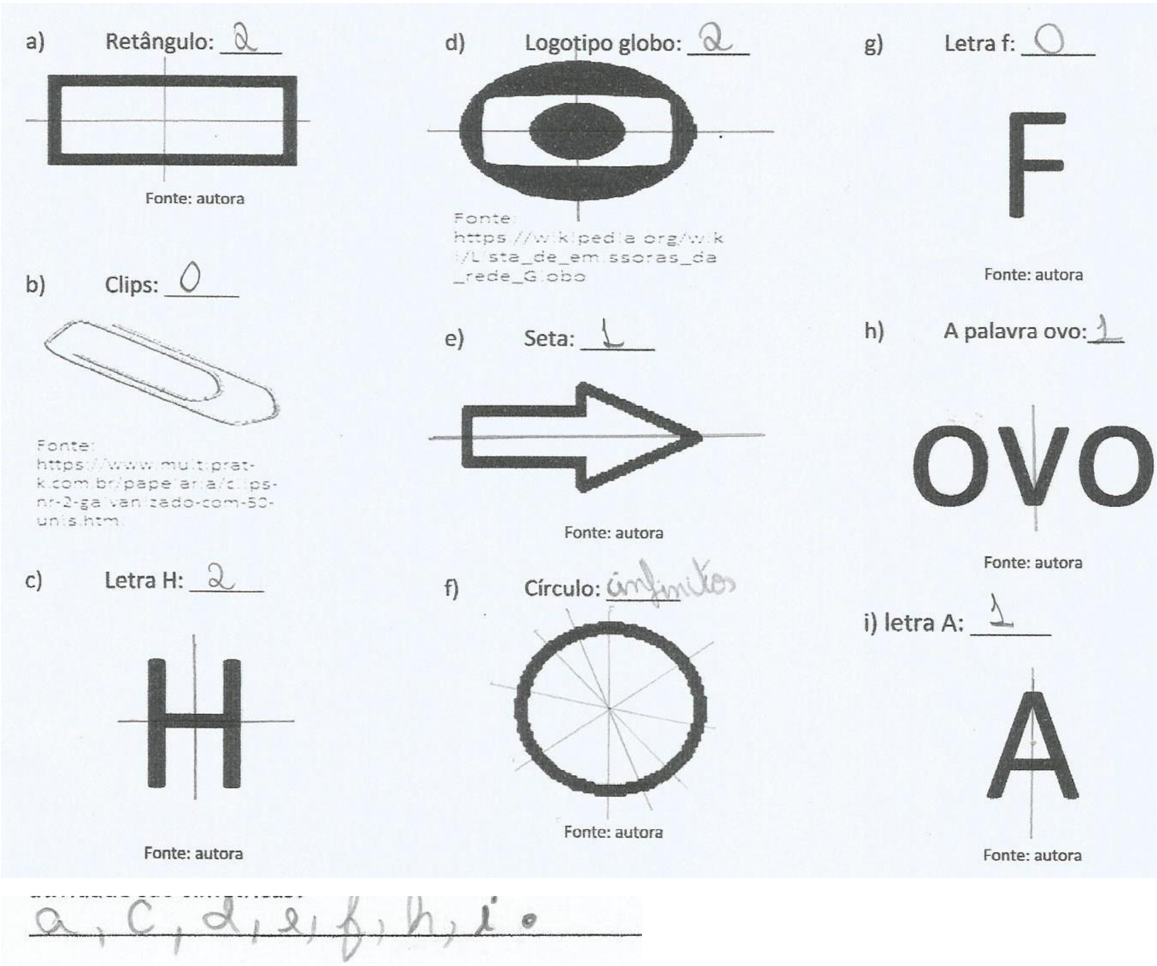
Se uma figura possui um ou mais eixos de simetria, então ela é chamada de simétrica. Quais das figuras desta atividade são simétricas?

Das figuras apresentadas, as que são simétricas são as figuras dadas nas letras a, c, d, e, f, h e i.

Fonte: A autora, 2018.

Figura 53 – Resposta dada pelo aluno J à questão 3 folha 1

Resposta dada pelo aluno J

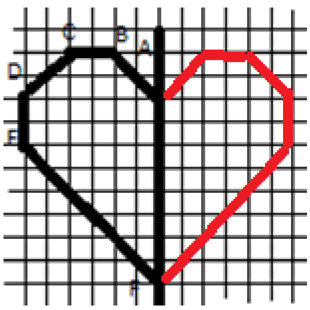


Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 54 – Enunciado da questão 4 folha 1

Enunciado da questão 4

4) Complete a figura abaixo, de modo que a reta AF seja um eixo de simetria desta figura.



Fonte: A autora, 2018.

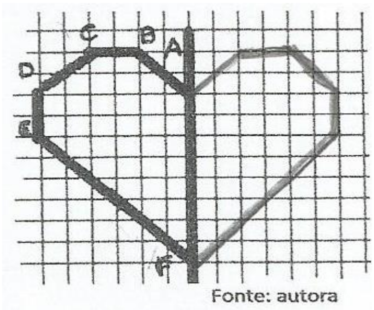
Aqui, se deseja que o aluno seja capaz de reproduzir a outra metade de uma figura dada, a partir de seu eixo de simetria.

Alguns alunos erraram essa questão porque leram o enunciado e então a responderam sem aguardar as instruções da professora. Alguns deles fizeram a resposta a caneta e não puderam consertá-la depois.

Após terminarem a figura de forma errônea, lhes fora perguntado se realmente achavam que sua figura estava feita de maneira correta e eles responderam prontamente que havia algo errado. Os que haviam feito a resposta a lápis consertaram-na neste momento.

Figura 55 – Resposta dada pelo aluno C à questão 4 folha 1

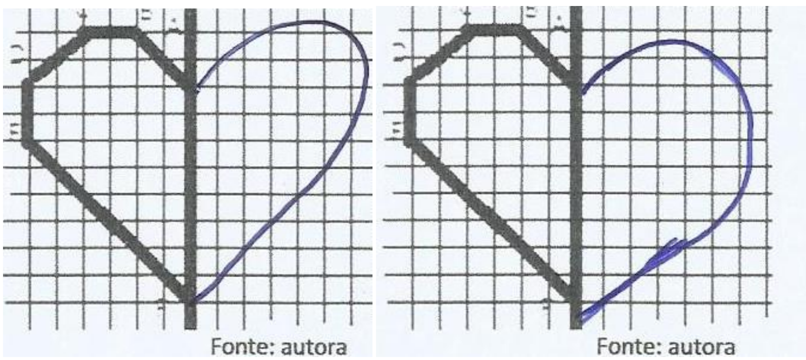
Resposta dada pelo aluno C



Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 56 – Respostas dadas erroneamente pelos alunos E e G à questão 4 folha 1

Respostas dadas pelos alunos E e G



Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 57 – Enunciado da questão 5 folha 1

Enunciado da questão 5
5) Conversa com a turma para as conclusões.

Fonte: A autora, 2018.

Neste momento houve uma conversa com os alunos com a finalidade de socializar as conclusões tiradas por todos.

De maneira geral, os resultados obtidos nesta primeira folha de atividades foram bastante positivos. Com exceção da afobação que mostraram ao querer responder algumas questões da forma como haviam entendido, sem aguardar as instruções a serem dadas.

Contudo, até isso foi positivo visto que aprenderam com o erro que haviam cometido anteriormente.

- Folha de atividades 2

Objetivo: definir reflexão e suas propriedades.

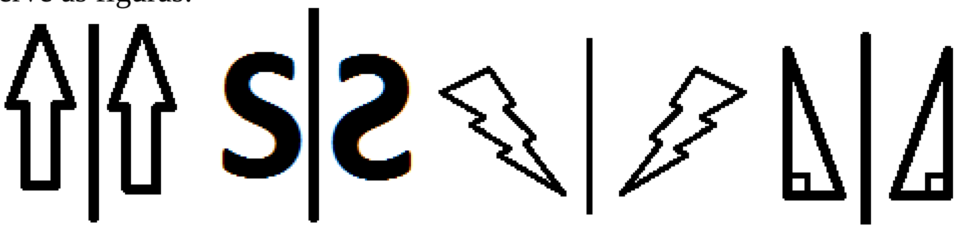
Pré-requisito: nenhum.

Material: espelho e folhas de atividades.

Figura 58 – Enunciado da questão 1 folha 2

Enunciado da questão 1

1) Observe as figuras:



Fonte: A autora

Que característica em comum elas apresentam?

Possível resposta: Todas as imagens dadas apresentam um eixo de simetria, ou seja, se forem dobradas no eixo, as duas partes coincidirão perfeitamente. Pode-se notar que um lado da figura é igual ao outro refletido.

Fonte: A autora, 2018.

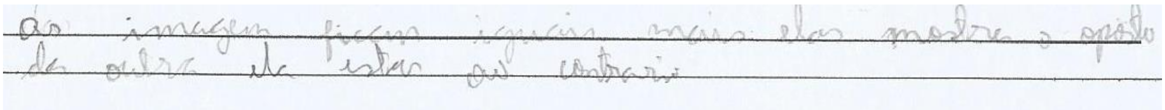
Nesta etapa espera-se que os alunos já sejam capazes de identificar um eixo de simetria.

Após lhes mostrar as figuras acima (Figura 58), todos falaram a respeito do eixo de simetria e entenderam o que a questão esperava deles e cada um usou suas próprias palavras para descrever o que pensavam. De maneira geral, todos disseram se tratar de figuras "ao contrário". Aqui é importante induzir os alunos a falarem a palavra reflexo. Dizer que um lado é o reflexo do outro.

Figura 59 – Resposta dada pelo aluno D à questão 1 folha 2

Resposta dada pelo aluno D

x



Resposta dada: "As imagens ficam iguais 'mais' elas 'mostra' o oposto da outra 'ela estar' ao contrário."

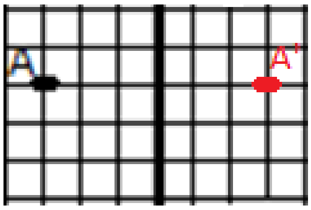
Fonte: Dados da autora, 2018.

Mesmo com os erros de concordância, é possível perceber que o conceito estava claro na cabeça desse aluno, que ele pôde notar que as figuras estavam ao contrário, ou seja, que elas estavam refletidas.

Figura 60 – Enunciado da questão 2 folha 2

Enunciado da questão 2

2) Ponha o espelho sobre a linha destacada, de maneira que formem um ângulo de 90° com o papel, e observe.



Fonte: A autora

a) Agora, tire o espelho e complete a figura com o que viu.

b) O que você pôde observar, com relação à distância, a respeito do eixo de simetria e os pontos A e A'?

Possível resposta: Pôde-se observar que a distância do eixo de simetria até o ponto A é a mesma distância do eixo de simetria até o ponto A'.

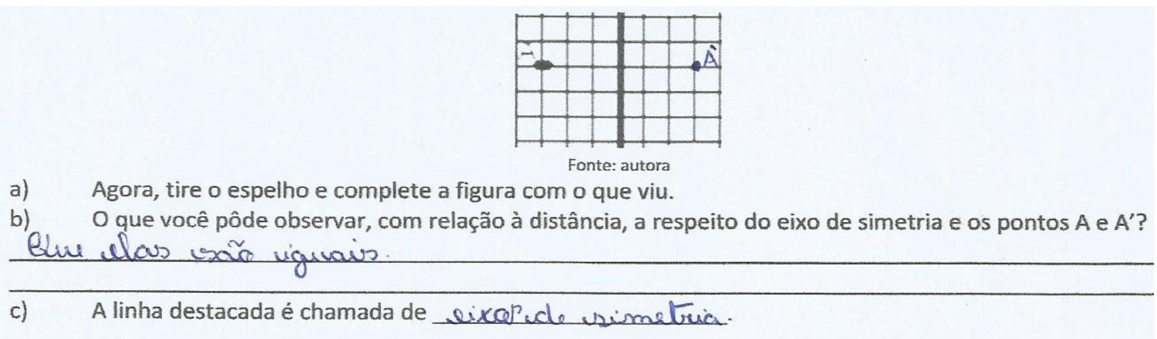
c) A linha destacada é chamada de eixo de simetria.

Fonte: A autora, 2018.

A intenção aqui é de mostrar ao aluno que um ponto e seu simétrico são equidistantes ao eixo de simetria, ou seja, que o eixo de simetria é o ponto médio do segmento que liga um ponto ao seu simétrico.

Figura 61 – Resposta dada pelo aluno K à questão 2 folha 2

Resposta dada pelo aluno K



Fonte: autora

a) Agora, tire o espelho e complete a figura com o que viu.

b) O que você pôde observar, com relação à distância, a respeito do eixo de simetria e os pontos A e A'?

Que elas são iguais.

c) A linha destacada é chamada de eixo de simetria.

Fonte: Dados da autora, 2018.

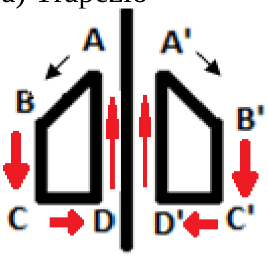
Não houve problemas com essas respostas.

Figura 62 – enunciado da questão 3 folha 2

Enunciado da questão 3

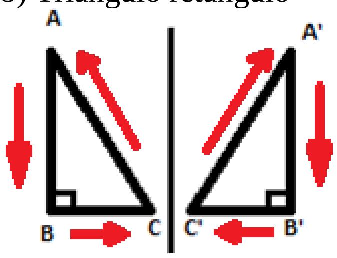
3) Ponha o espelho sobre o eixo de simetria de cada figura a seguir:

a) Trapézio



Fonte: A autora

b) Triângulo retângulo



Fonte: A autora

Agora, faça setas indicando a ordem alfabética (como, por exemplo, de A para B, de B para C, etc.) O que pode ser concluído a respeito da orientação das figuras após sofrerem uma reflexão?

Possível resposta: Pode-se concluir, a respeito das orientações das figuras após sofrerem uma reflexão, que a sua orientação fica invertida, levando em conta a orientação da figura inicial.

Fonte: A autora, 2018.

O propósito buscado agora é que o aluno seja capaz de observar uma das características da reflexão, a qual garante que a orientação de uma figura é invertida após a mesma ter sido refletida. Ou seja, se uma figura tem sentido horário, o seu reflexo obrigatoriamente terá sentido anti-horário.

Claramente, todos chegaram a essa conclusão.

Figura 63 – Resposta dada pelo aluno A à questão 3 folha 2

Resposta dada pelo aluno A

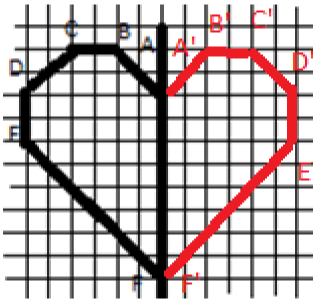
uma é ao contrario da outra.

Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 64 – Enunciado da questão 4 folha 2

Enunciado da questão 4

4) Na malha quadriculada a seguir, desenhe a reflexão da figura em torno da reta AS, nomeando os pontos simétricos (ex. simétrico de A é A', de B é B', e assim, sucessivamente):



Fonte: A autora

Compare cada ponto ao seu simétrico. O que se pode concluir a respeito dos pontos A e F com seus simétricos?

Possível resposta: O que se pode concluir a respeito dos pontos A e F e seus simétricos, A' e F', é que são congruentes, ou seja, ocupam a mesma posição no plano.

Em outras palavras, quando um ponto se encontra sobre o eixo de simetria, o seu simétrico também se encontra no mesmo lugar.

Fonte: A autora, 2018.

O esperado é que o aluno seja capaz de notar que sempre que um ponto se encontra sobre o eixo de simetria, seu simétrico encontra-se no mesmo lugar que ele.

Os alunos chegaram rapidamente a essa conclusão.

Figura 65 – Resposta dada pelo aluno F à questão 4 folha 2

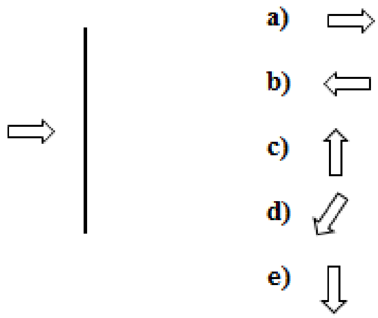
Resposta dada pelo aluno F

Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 66 – Enunciado da questão 5 folha 2

Enunciado da questão 5

5) Qual é a imagem refletida da figura a seguir?



Resposta: letra b

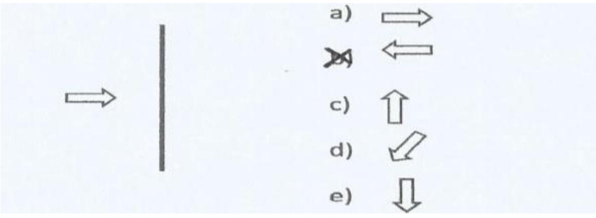
Fonte: A autora, 2018.

Esta questão foi desenvolvida com o intuito de verificar se o aluno já é capaz de encontrar o simétrico de qualquer figura dada.

As respostas foram unânimes.

Figura 67 – Resposta dada pelo aluno E à questão 5 folha 2

Resposta dada pelo aluno E

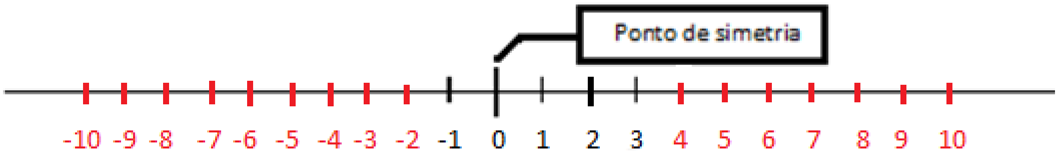


Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 68 – Enunciado da questão 6 folha 2

Enunciado da questão 6

6) Agora que já conhecemos a reflexão e suas propriedades, observe que a reta numérica também possui uma simetria de reflexão, de forma que o número zero é o ponto de simetria.Considere o simétrico de 1, como sendo -1, o simétrico de 2, como -2, e assim sucessivamente, e complete a reta com os números inteiros que faltam até o número 10 e seu simétrico.



Fonte: A autora

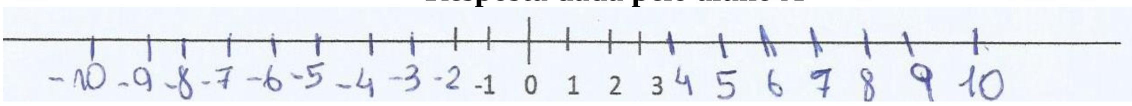
Fonte: A autora, 2018.

Aproveita-se aqui para fazer uma breve ligação entre esse conteúdo e o de reta numérica, trabalhando apenas com números inteiros e mostrando ao aluno que a reta numérica também é simétrica em relação ao ponto de origem (zero). Conteúdo com o qual o aluno já está familiarizado nesse segmento.

Todos conseguiram completar a reta numérica facilmente, pois desde o início do ano, os alunos do sétimo ano trabalham com o conteúdo de números inteiros e desde então aprendem a construir a reta numérica.

Figura 69 – Resposta dada pelo aluno A à questão 6 folha 2

Resposta dada pelo aluno A



Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 70 – Enunciado da questão 7 folha 2

Enunciado da questão 7

7) Conversa a respeito das conclusões.

Fonte: A autora, 2018.

Neste momento é feita uma pausa nas atividades e então há uma conversa com a turma com a finalidade de "amarrar" os conceitos trabalhados a respeito das reflexões.

- Folha de atividades 3

Objetivo: Definir translação e suas propriedades.

Pré-requisitos: nenhum.

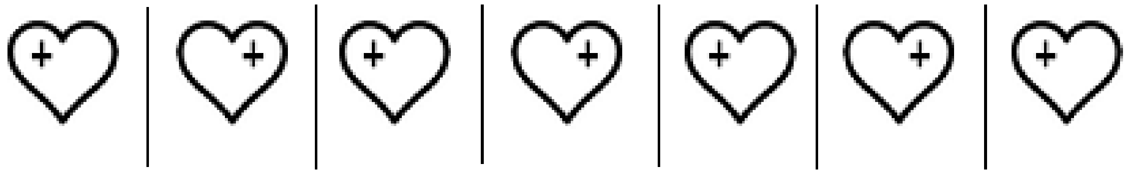
Material: espelhos, imagens e folha de atividades.

Figura 71 – Enunciado da questão 1 folha 3

Enunciado da questão 1

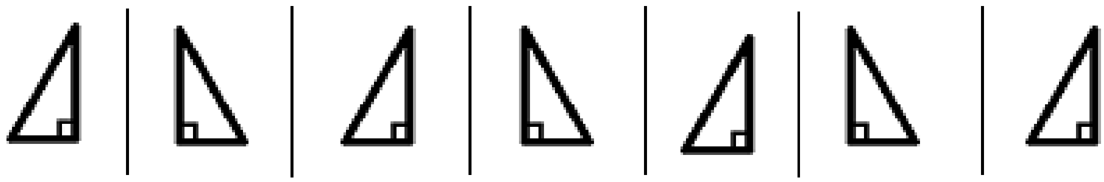
1) Ponha os dois espelhos paralelamente, de maneira que formem com a mesa um ângulo de 90°. Ponha a figura no meio deles e complete com o que vê.

a) Um coração simétrico



Fonte: A autora

a) Um triângulo retângulo



Fonte: A autora

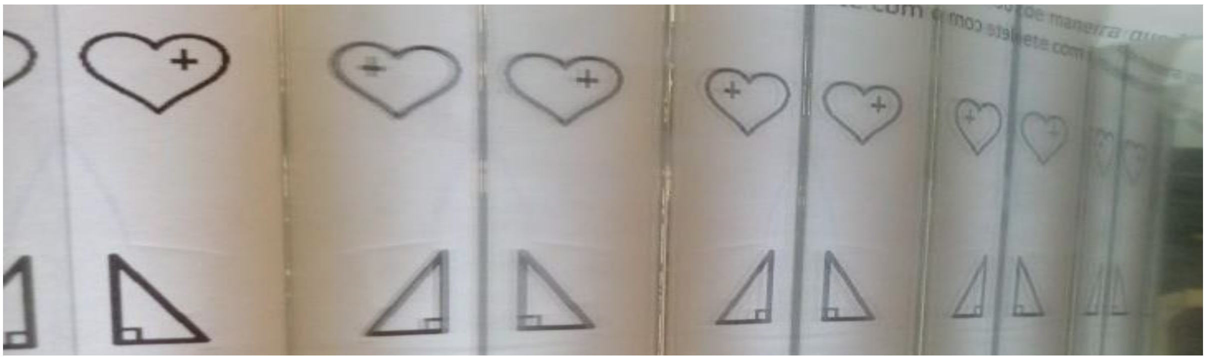
Fonte: A autora, 2018.

Nesta questão os alunos devem completar a imagem com os reflexos que podem visualizar através dos espelhos.

Aqui, o obstáculo encontrado pelos alunos foi o fato de não estarem familiarizados com as figuras geométricas. Mesmo as conhecendo, não se sentem à vontade em trabalhar com elas.

Observe na fotografia a seguir (Figura72), a imagem formada no momento em que se faz uso dos espelhos.

Figura 72 - Imagem formada na questão 1 folha 3 com o uso de espelhos



Fonte: A autora, 2018.

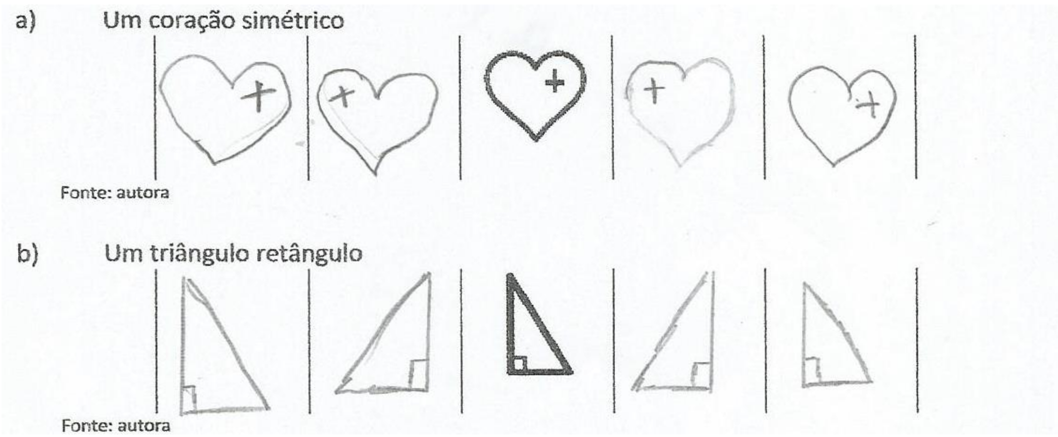
A próxima fotografia (Figura 73) foi feita com os espelhos na mesma posição, porém com as figuras recortadas em folhas de EVA.

Figura 73 – imagem formada na questão 1 folha 3 com recortes em folhas de EVA

Fonte: A autora, 2018.

Figura 74 – Resposta dada pelo aluno B à questão 1 folha 3

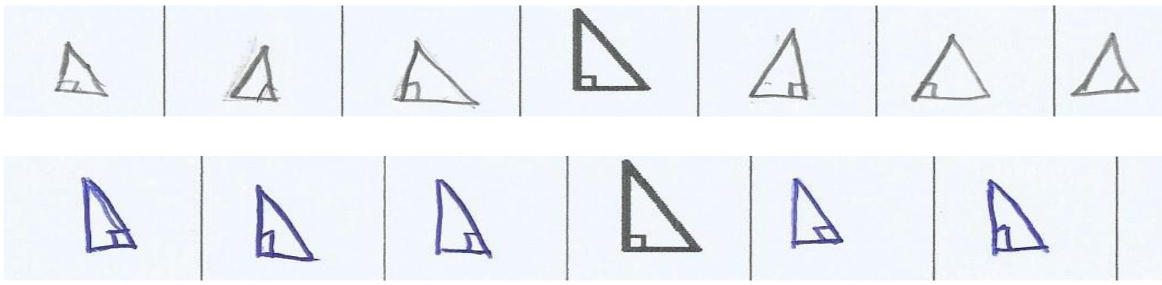
Resposta dada pelo aluno B



Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 75 – Respostas dadas erroneamente pelos alunos E e G à questão 1 folha 3

Respostas dadas pelos alunos E e G, respectivamente



Fonte: Dados da autora, 2018.

Ambos os alunos citados acima acertaram a letra a, onde deveriam refletir o coração, mas erraram a letra b que se tratava de refletir um triângulo retângulo.

Conforme é possível observar, o aluno E se confundiu completamente com os triângulos, já o aluno G, mesmo não acertando a posição dos triângulos, tomou o cuidado de observar a disposição do ângulo reto e refleti-lo de maneira correta.

Esse bloqueio apresentado por eles com relação às figuras geométricas ficará claro no decorrer das questões.

Figura 76 – Enunciado da questão 2 folha 3

Enunciado da questão 2

2) Já sabemos que, uma figura quando é refletida uma única vez, ela tem a sua orientação invertida. É necessário inverter a orientação quantas vezes para que a figura refletida seja igual a original?

Possível resposta: É necessário inverter a orientação duas vezes para que a figura refletida seja igual a original.

Fonte: A autora, 2018.

O objetivo desta questão é que o aluno observe que sempre que inverter a orientação de uma figura um número par de vezes, ela volta a ter a mesma orientação da figura inicial.

Como alguns alunos erraram a questão anterior (Figura 75), foi feito com eles a montagem da mesma cena com as imagens recortadas em EVA e os espelhos,a cena é representada pela última fotografia mostrada anteriormente(Figura 73). Ao fazer junto deles, eles puderam perceber qual foi o erro cometido e ainda olhando para a imagem formada, todos responderam corretamente que ao inverter a orientação por duas vezes ela retornaria a posição inicial.

Figura 77 – Resposta dada pelo aluno I à questão 2 folha 3

Resposta dada pelo aluno I

É necessário inverter 2 vezes.

Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 78 – Enunciado da questão 3 folha 3

Enunciado da questão 3

3) Quando fazemos a reflexão repetidas vezes, chamamos de produto de reflexões. O produto de duas reflexões preserva (preserva/muda) a orientação da figura.

Obs.: Quando fazemos o produto de duas reflexões, é como se a figura tivesse sido "arrastada" pelo plano e, por este motivo, ela mantém a orientação inicial. A esse movimento, chamamos de movimento de **translação**.

Fonte: A autora, 2018.

Neste momento no qual o aluno já percebeu que ao mudar a orientação de uma figura duas vezes ela volta a ter a orientação original, já se pode definir a translação.

Essa propriedade da translação foi facilmente reconhecida.

Figura 79 – Resposta dada pelo aluno D à questão 3 folha 3

Resposta dada pelo aluno D

3) Quando fazemos a reflexão repetidas vezes, chamamos de produto de reflexões. O produto de duas reflexões preserva (preserva/muda) a orientação da figura.

Fonte: Dados da autora, 2018.

- Folha de atividades 4

Objetivo: Definir rotação e suas propriedades.

Pré-requisito: Nenhum.

Material: livro de espelhos (dois espelhos planos unidos pela extremidade), objetos e imagens, transferidor impresso em papel e folha de atividades.

Esta questão tinha como propósito mostrar ao aluno que ele pode formar polígonos específicos de acordo com o ângulo de abertura pedido. Contudo, antes de trabalhar essa questão com eles, é relevante lembrar-lhes que a volta completa no plano é representada por um ângulo de 360°.

Figura 80 – Enunciado da questão 1 folha 4

Enunciado da questão 1

1) Abra o livro de espelhos conforme os ângulos indicados e com o auxílio de um canudo, verifique que polígonos são formados:

a) 30° - um polígono de doze lados (dodecágono).

b) 45° - um polígono de oito lados (octógono).

c) 60° - um polígono de seis lados (hexágono).

d) 90° - um polígono de quatro lados (quadrado).

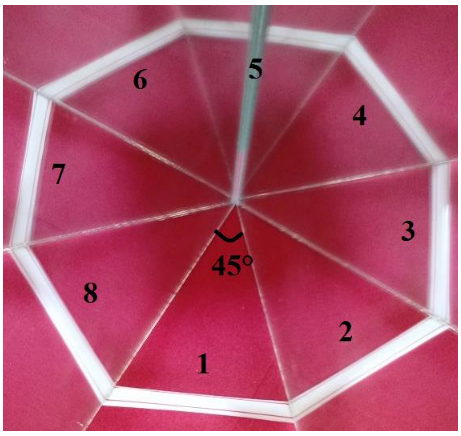
Fonte: A autora, 2018.

Abaixo, pode-se ver os polígonos formados ao utilizar o canudo.

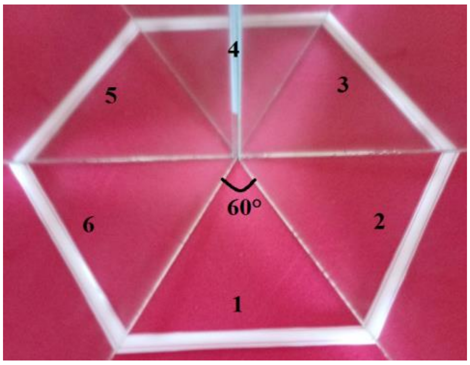
Figura 81 – Polígonos formados com o uso do livro de espelhos e um canudo

<table>
<tr>
<td>Livro de espelhos com uma abertura de 30°. Note que é possível formar um polígono de 12 lados.

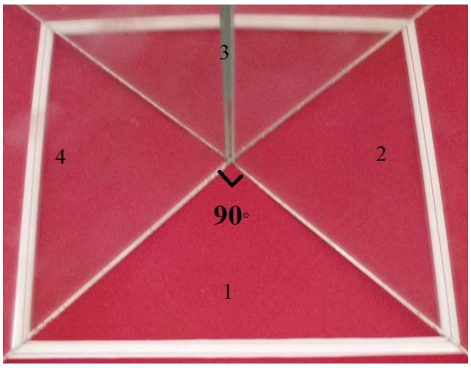
</td>
<td>Livro de espelhos com uma abertura de 45°. Note que é possível formar um polígono de 8 lados.



</td>
</tr>
<tr>
<td>Livro de espelhos com uma abertura de 60°. Note que é possível formar um polígono de 6 lados.



</td>
<td>Livro de espelhos com uma abertura de 90°. Note que é possível formar um polígono de 4 lados.



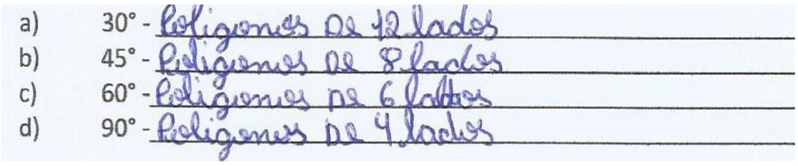
</td>
</tr>
</table>

Fonte: A autora, 2018.

Essa questão foi realizada por todos facilmente. Alguns alunos perderam as contas e refizeram-na apenas quando trabalharam com o ângulo de 30°, porém não houve nenhuma dúvida.

Figura 82 – resposta dada pelo aluno G à questão 1 folha 4

Resposta dada pelo aluno G


a) 30° - Polígonos de 12 lados
b) 45° - Polígonos de 8 lados
c) 60° - Polígonos de 6 lados
d) 90° - Polígonos de 4 lados

Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 83 – Enunciado da questão 2 folha 4

Enunciado da questão 2

2) Posicione o ponto de encontro dos espelhos sobre o ponto O do transferidor e abra-o conforme os ângulos indicados a seguir (utilize o triângulo retângulo para auxiliá-lo nessa atividade). Registre a quantidade de figuras que consegue observar quando os espelhos estão abertos sob um ângulo de:

a) 30° - Pode-se observar um total de 12 figuras.

b) 45° - Pode-se observar um total de 8 figuras.

c) 60° -Pode-se observar um total de 6 figuras.

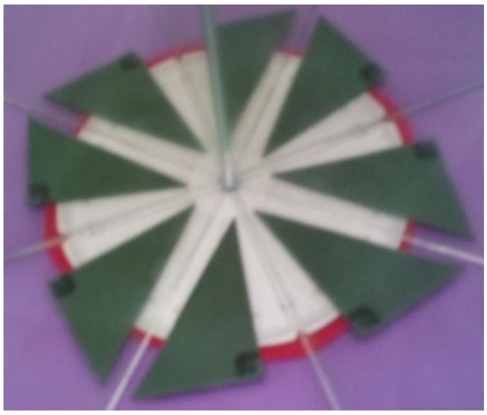
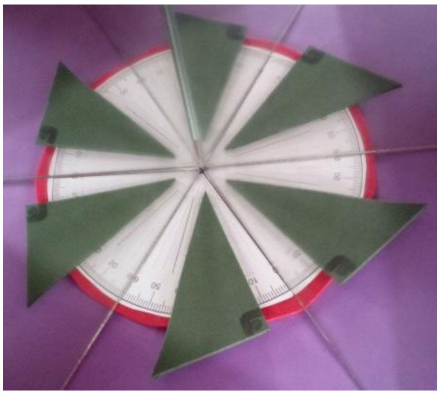
d) 90° -Pode-se observar um total de 4 figuras.

Qual relação lhe chama a atenção com relação ao ângulo de abertura e o total de imagens formadas?

Possível resposta: A relação existente entre o ângulo de abertura e o total de imagens formadas que aqui chama a atenção é que quanto maior o ângulo de abertura, menor a quantidade de imagens formadas.

Fonte: A autora, 2018.

Figura 84 – Atividade 2 folha 4 - livro de espelhos e recortes em folhas de EVA

Livro de espelhos sob uma abertura de 30°	Livro de espelhos sob uma abertura de 45°
	
Livro de espelhos sob uma abertura de 60°	Livro de espelhos sob uma abertura de 90°
	

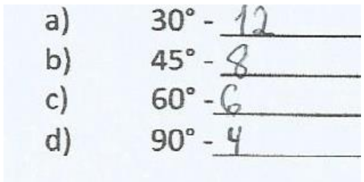
Fonte: A autora, 2018.

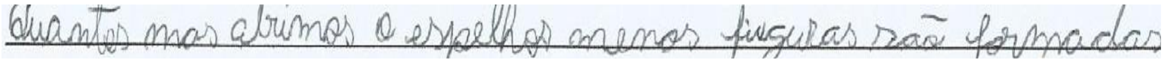
Ao realizar esta questão, intenciona-se chegar à conclusão de que quanto maior o ângulo utilizado como abertura, menor o número de imagens formadas.

Da mesma maneira que a questão anterior, não houve nenhum tipo de dúvida aqui.

Figura 85 – Resposta dada pelo aluno H à questão 2 folha 4

Resposta dada pelo aluno H


a) 30° - 12
b) 45° - 8
c) 60° - 6
d) 90° - 4


Quantos mas abrimos o espelhos menos figuras são formadas

Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 86 – Enunciado da questão 3 folha 4

Enunciado da questão 3

3) Todas as imagens apresentam a mesma orientação?

Possível resposta: Não, duas figuras consecutivas apresentam orientações contrárias.

Fonte: A autora, 2018.

Deseja-se com esta atividade, lembrar-lhes que figuras consecutivas apresentam orientações opostas, pois se tratam de reflexões.

Todos responderam prontamente de maneira correta.

Figura 87 - Resposta dada pelo aluno G à questão 3 folha 4

Resposta dada pelo aluno G

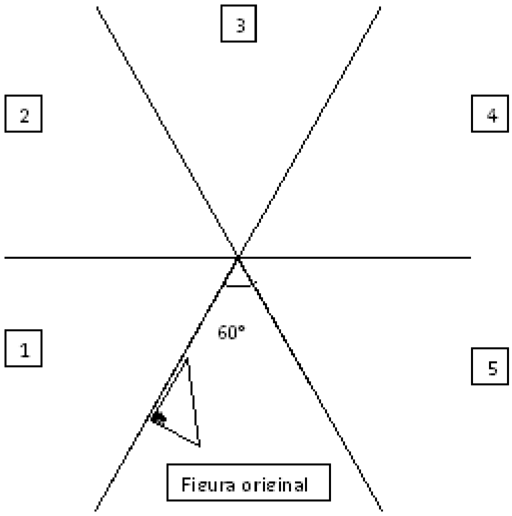

não

Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 88 – Enunciado da questão 4 folha 4

Enunciado da questão 4

4) Complete a imagem abaixo com o que pode ver no livro de espelhos, quando aberto sob um ângulo de 60°.



Fonte: A autora

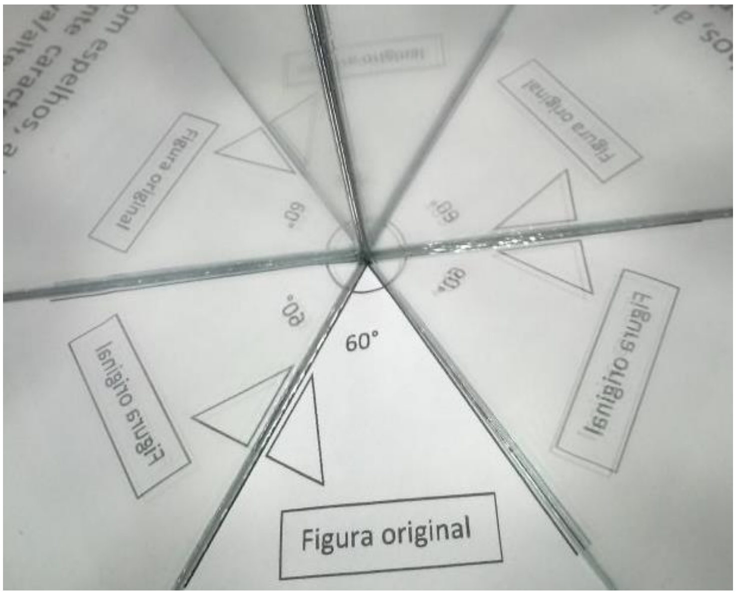
Como estamos trabalhando com espelhos, a imagem imediatamente ao lado da figura inicial é uma reflexão, porém a seguinte caracteriza uma rotação. Pode-se concluir que a rotação preserva (preserva/altera) a orientação.

Fonte: A autora, 2018.

O intuito aqui é mostrar que a rotação preserva a orientação da figura original, além de caracterizar a rotação através de um ponto fixo, enquanto a questão 5 exige que o aluno saiba reconhecer a rotação em meio a figuras refletidas. Uma vez que o aluno já conhece as características de cada uma, essa questão torna-se fácil de ser resolvida.

A seguir, encontra-se a fotografia (Figura 89) da atividade realizada com o uso de espelhos.

Figura 89 – Fotografia da realização da atividade 4 folha 4

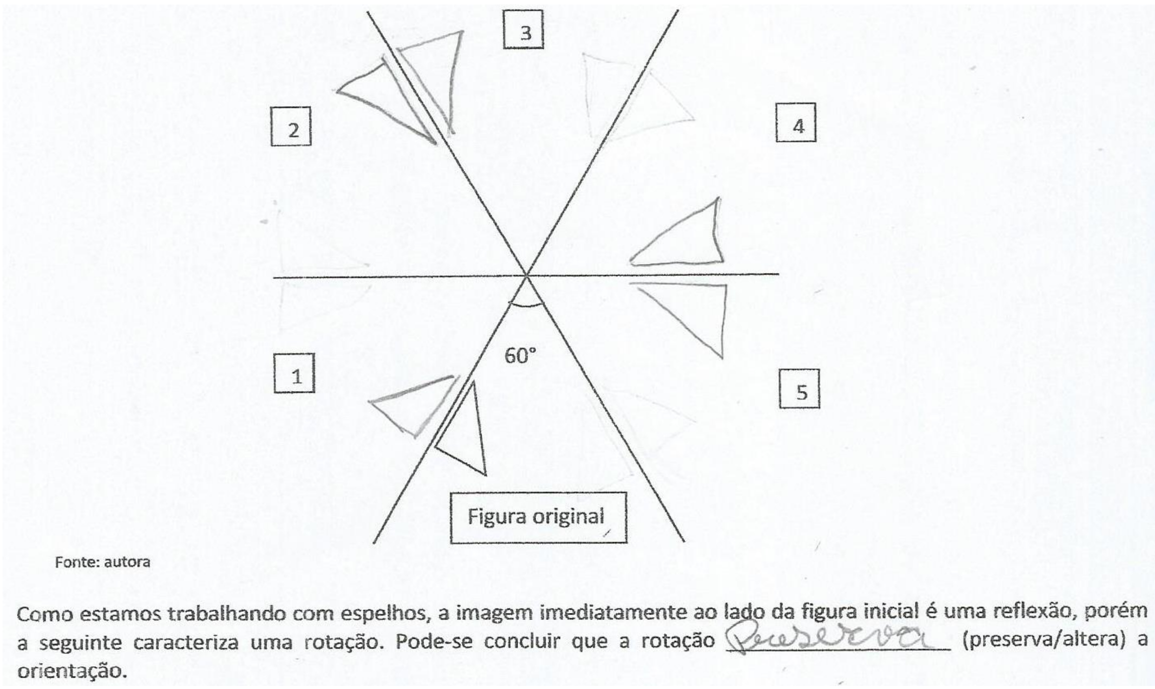


Fonte: A autora, 2018.

Essa atividade deseja concluir que a rotação preserva a orientação da figura inicial. Mais uma vez todos alcançaram a meta, porém, cometeram os mesmos erros outrora cometidos ao desenhar as figuras. Sempre alegam que seu problema é o desenho.

Figura 90 – Resposta dada pelo aluno B à questão 4 folha 4

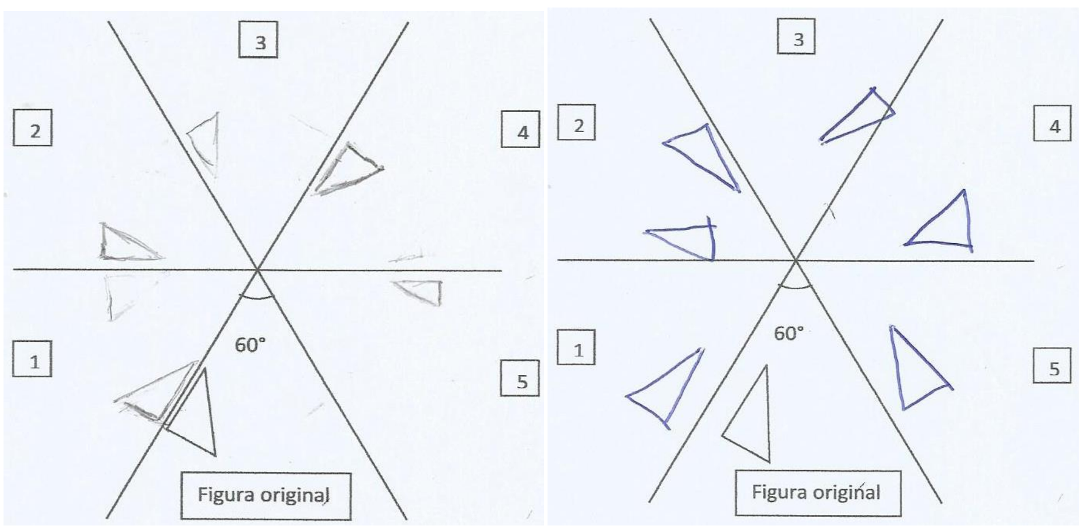
Resposta dada pelo aluno B



Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 91 – Respostas dadas erroneamente pelos alunos D e G à questão 4 folha 4

Respostas dadas pelos alunos D e G, respectivamente



Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 92 – Enunciado da questão 5 folha 4

Enunciado da questão 5

5) Indique agora, quais das imagens acima caracterizam:

a) Rotação da figura original 2 e 4

b) Reflexão da figura original 1, 3 e 5

Fonte: A autora, 2018.

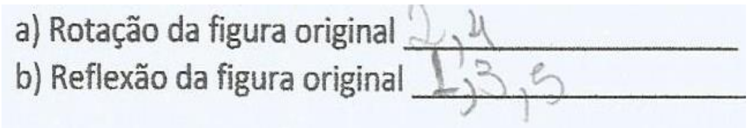
Neste momento, subtende-se que todos tenham absorvido bem os conceitos de reflexão e de rotação. Tem-se como meta agora verificar se o aluno é capaz de distinguir as duas ao aparecerem numa mesma imagem.

Devido ao fato de alguns alunos apresentarem dificuldades na hora do desenho e isso ter gerado algumas dúvidas na hora da realização desta atividade, lhes foi mostrado, com o auxílio do livro de espelhos (Figura 89), como deveria realmente estar a figura, e após terem visto a imagem formada, os mesmos foram capazes de responder à questão.

Todos responderam de maneira correta à questão.

Figura 93 – Resposta dada pelo aluno J à questão 5 folha 4

Resposta dada pelo aluno J


a) Rotação da figura original 2, 4
b) Reflexão da figura original 1, 3, 5

Fonte: Dados da autora, 2018.

- Folha de atividades 5

Objetivo: verificar os conhecimentos adquiridos.

Pré-requisitos: ter participado das atividades 1, 2, 3 e 4.

Material: folha de atividades, revistas, tesoura, cola e cartolina.

Depois de terem participado da realização das atividades a respeito das simetrias (reflexão, translação e rotação), faz-se importante verificar se realmente absorveram os conteúdos a eles apresentados. As atividades desta folha foram desenvolvidas unicamente com esta finalidade.

Todos os alunos que participaram, conseguiram fazer de maneira correta esta última folha.

Figura 94 – Enunciado da questão 1 folha 5

Enunciado da questão 1

1) Que tipo de simetria (reflexão, rotação, translação) pode ser associada a:

a) Uma criança num balanço? rotação

b) Uma criança no escorrega? translação

c) Uma criança ao se olhar num espelho? reflexão

d) Uma criança na roda gigante? rotação

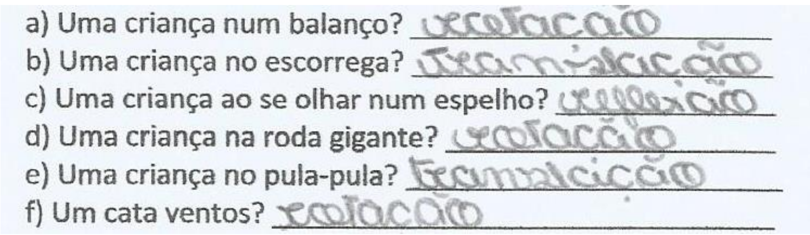
e) Uma criança no pula-pula? translação

1) f) Um cata-vento? rotação

Fonte: A autora, 2018.

Figura 95 – Resposta dada pelo aluno I à questão 1 folha 5

Resposta dada pelo aluno I


a) Uma criança num balanço? [illegible]
b) Uma criança no escorrega? [illegible]
c) Uma criança ao se olhar num espelho? [illegible]
d) Uma criança na roda gigante? [illegible]
e) Uma criança no pula-pula? [illegible]
f) Um cata ventos? [illegible]

Fonte: Dados da autora, 2018.

Figura 96 – Enunciado da questão 2 folha 5

Enunciado da questão 2

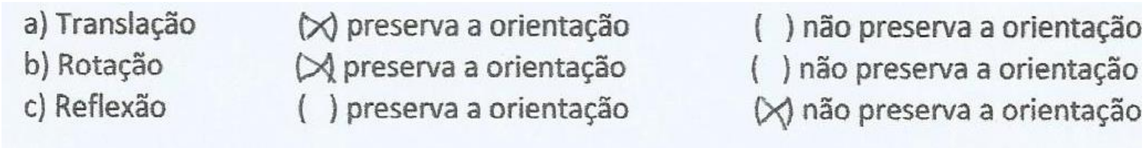
2) Marque a alternativa correta:

a) Translação	(X) preserva a orientação	( ) não preserva a orientação
b) Rotação	(X) preserva a orientação	( ) não preserva a orientação
c) Reflexão	( ) preserva a orientação	(X) não preserva a orientação

Fonte: A autora, 2018.

Figura 97 – Resposta dada pelo aluno H à questão 2 folha 5

Resposta dada pelo aluno H



a) Translação	(X) preserva a orientação	( ) não preserva a orientação
b) Rotação	(X) preserva a orientação	( ) não preserva a orientação
c) Reflexão	( ) preserva a orientação	(X) não preserva a orientação

Fonte: A autora, 2018.

Figura 98 – Enunciado da questão 3 folha 5

Enunciado da questão 3

3) Recortar de revistas, figuras que apresentem algum tipo de simetria para a confecção de um cartaz.

Fonte: A autora, 2018.

A seguir, o cartaz da questão 3 (Figura 99).

Figura 99 – Cartaz ornamentado com os recortes de revistas feitos pelos alunos

Fonte: A autora, 2018.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho consistiu em apresentar a um grupo de alunos de sétimo ano da rede municipal de ensino o tema 'simetrias' e as suas propriedades, de maneira pouco diferente de uma aula tradicional. Além de mostrar-lhes, o quanto a matemática se faz presente no cotidiano.

Para isso, foram utilizados como suporte espelhos planos unidos ou separados, dependendo da atividade proposta, folhas de atividades e revistas para recorte, um material acessível a qualquer escola.

Durante as aulas, foram distribuídas algumas folhas de atividades para que os alunos as resolvessem de acordo com as instruções que recebiam e foi possível notar a importância de o trabalho ser feito com o auxílio do professor durante todo o tempo. O resultado obtido não seria o mesmo se os alunos resolvessem as questões sem a orientação do professor e isso pôde ser comprovado através de algumas questões resolvidas de maneira precipitada por parte dos alunos.

Neste caso, algumas questões puderam ser consertadas, pois haviam sido feitas a lápis, as demais permaneceram erradas. Contudo, após receberem a orientação correta sobre a maneira como deveriam ter resolvido as questões, todos os alunos que haviam cometido algum tipo de erro, foram capazes de repará-los, ainda que verbalmente.

O tema 'simetrias' foi escolhido,devido ao tamanho de sua importância somado ao fato de ser pouco ou até mesmo nada trabalhado nos livros didáticos. Por toda a parte é possível deparar-se com as simetrias.

As dificuldades apresentadas pelos alunos no decorrer das atividades estavam todas relacionadas às figuras geométricas planas, mostrando não haver qualquer afinidade com as mesmas. Entretanto, mesmo mostrando tal bloqueio, todos puderam compreender os conceitos de simetrias e atingir os objetivos inicialmente propostos. Deve-se levar em conta que os alunos que participaram foram apenas aqueles que apresentam grandes dificuldades e limitações na Matemática, visto que eram alunos em segunda época na disciplina.

E desta forma, pode-se garantir que o trabalho funcionará bem quando for aplicado a uma turma regular.

Como reflexão pessoal, pode-se dizer que o resultado final foi bastante positivo e que ter participado dos momentos de construção do conhecimento acerca do tema escolhido junto aos alunos, foi um momento muito prazeroso e de crescimento para todos os envolvidos no processo.

É gratificante perceber a alegria e a vontade de participar da aula quando estão realmente entendendo alguma coisa. Até mesmo os alunos que não têm o hábito de fazer perguntas ou dar respostas, se mostraram interessados e participativos neste momento.

Fica aqui como sugestão a elaboração de uma atividade no formato de um jogo com comandos previamente estabelecidos. A mesma chegou a ser pensada,porém não aplicada pela falta de tempo, visto que se tratava da última semana de aula.

Para a realização da tarefa seriam necessárias folhas de cartolinas, placas de EVA, tesoura, régua e transferidor. A atividade consiste na confecção de um plano cartesiano em formato grande e em malha quadriculada, além de algumas figuras geométricas planas feitas por cada grupo de alunos. É importante que sejam produzidas duas figuras geometricamente iguais, porém de cores diferentes, pois uma representará a figura inicial e a outra, o resultado final após a aplicação da simetria.

Após a confecção do material, o professor deve distribuir os comandos aos grupos.Tais comandos poderiam ser, por exemplo, transladar a figura quatro unidades de medida para a direita, ou fazer a reflexão da figura sendo $y = 2$ o eixo de simetria, ou ainda fazer a rotação da figura sob um ângulo de 45°.

Cada grupo fica encarregado de realizar o que lhes for proposto a fim de fixar o conteúdo trabalhado anteriormente.

Para estudos futuros, deixo como sugestão a elaboração de um questionário a ser respondido pelos alunos envolvidos, de maneira que eles possam dar a sua opinião a respeito do que acharam de ter participado das atividades propostas e do sentimento deles após a conclusão das mesmas.

REFERÊNCIAS

CADAR, Luciana; DUTENHEFNER, Francisco. **Encontros de geometria:** parte I**.** Rio de Janeiro: IMPA,2015. Disponível em:<http://www.obmep.org.br/docs/Geometria.pdf>. Acesso em 15/12/2017.

CARNEIRO, Francisco de Assis Saraiva. **Isometrias e homotetias no plano**. 2015. 68 f. Dissertação (Mestrado profissional em matemática) – Universidade Estadual do Ceará,Centro de Ciências e Tecnologias, Ceará, 2015.

CERQUEIRA, Luciano de Souza. **Isometrias no plano:** uma proposta de atividades para a educação básica com o uso do geogebra. 2016. 56 f. Dissertação (Mestrado profissional em matemática) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia,Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Cruz das Almas, BA, 2016.

CLUBES de matemática da OBMEP: disseminando o estudo de matemática - sala de ajuda: isometrias. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-isometrias>. Acesso em: 29/12/2017.

COXETER, Harold Scott MacDonald. **Introduction to Geometry.** 2ed**.** EUA:IE-WILEY, 1969.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman; NUNES, Katia Regina Ashton. **Matemática:** práticas pedagógicas para o ensino médio. Porto Alegre: Penso, 2012.

JESUS, Ivanilton Sales. **Isometrias no plano:** Uma abordagem aplicável ao ensino básico. 2017. 62 f. Dissertação (Mestrado profissional em matemática) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2017.

LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Rio de Janeiro: SBM, 1995.

LOPES, Maria Laura M. Leite; NASSER, Lilian. **Geometria:** na era da imagem e do movimento. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

MURARI, Claudemir; BARBOSA, Ruy Madsen. **Conexões e educação matemática:** Belas formas em caleidoscópios, caleidosciclos e caleidostrótons. Volume 3. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012.

OLIVEIRA, Antônio Marmo de; SILVA, Agostinho. **Lisa – biblioteca da matemática moderna:** aritmética, teoria dos conjuntos e geometria plana. 5. ed. São Paulo: Lisa, 1972.

OLIVEIRA, Antônio Marmo de; SILVA, Agostinho. **Lisa – biblioteca da matemática moderna: álgebra elementar e estruturas matemáticas**. 5. ed. São Paulo: Lisa, 1972.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. 2. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

SILVA, Renato Oliveira. **Isometrias**. 2016. 104 f. Dissertação (Mestrado profissional em matemática) – Universidade Federal de Campina Grande,Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2016.

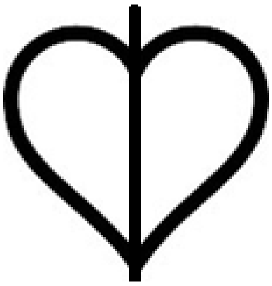
STEWART, Ian. **Uma história da simetria na matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

STEWART, Ian. **Symmetry: AVery Short Introduction**. Oxford: Oxford University Press, 2013.

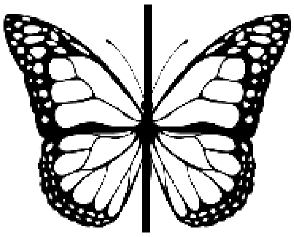
WEBARTIGOS: O que é simetria. Disponível em: <https://www.webartigos.com/artigos/o-que-e-simetria/132003>. Acesso em 10/03/2018.

APÊNDICE A: Folha de atividades 1 - Simetrias e suas propriedades

1) Ponha o espelho sobre a reta apresentada em cada uma das figuras. O que pôde observar?

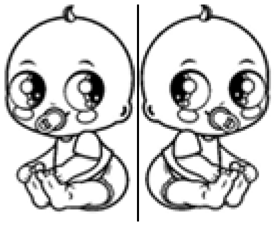


Fonte: A autora



Fonte: http://blablalab.netuma-borboleta-na-ponte-de-babel

Fonte: A autora



Fonte: http://familia.colorir.com/bebaes-gaemeos.html

____

____

Obs. Esta reta chama-se **eixo de simetria**.

2) O que acontece se dobrarmos qualquer uma dessas figuras no eixo de simetria?

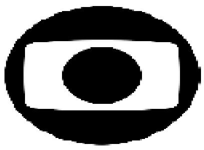
____

____

3) Nas figuras apresentadas, trace os respectivos eixos de simetria (caso existam) e indique quantos deles cada figura possui:

a) Retângulo: _____ d) Logotipo globo: ______ b) Letra f: ______

Fonte: A autora

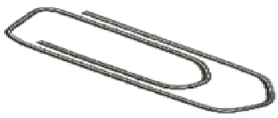


Fonte: https://wikipedia.org/wiki/Lista_de_emissoras_da_rede_Globo

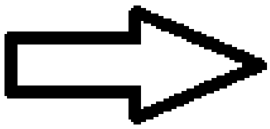
F

Fonte: A autora

c) Clips: ______ d) Seta: ______ e) A palavra ovo:___



Fonte: https://www.multiprat-k.com.br/papelaria/clips-nr-2-galvanizado-com-50-unis.html



Fonte: A autora

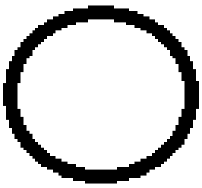
OVO

Fonte: A autora

f) Letra H: ______ g) Círculo: ______ i) letra A: ______

H

Fonte: A autora



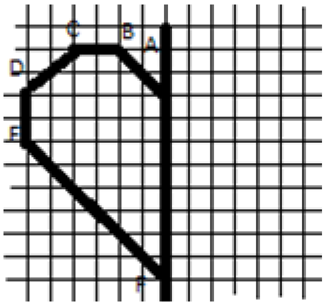
Fonte: A autora

A

Fonte: A autora

Se uma figura possui um ou mais eixos de simetria, então ela é chamada de simétrica. Quais das figuras desta atividade são simétricas?

4) Complete a figura abaixo, de modo que a reta AF seja um eixo de simetria desta figura.



Fonte: A autora

5) Conversa com a turma para as conclusões.

APÊNDICE B: Folha de atividades 2 – Reflexão e suas propriedades

1) Observe as figuras:

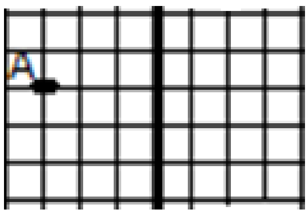
Fonte: A autoraFonte: A autora Fonte: A autora Fonte: A autora

Que característica em comum elas apresentam?

____

____

2) Ponha o espelho sobre a linha destacada, de maneira que formem um ângulo de 90° com o papel, e observe.



Fonte: A autora

a) Agora, tire o espelho e complete a figura com o que viu.

b) O que você pôde observar, com relação à distância, a respeito do eixo de simetria e os pontos A e A'?

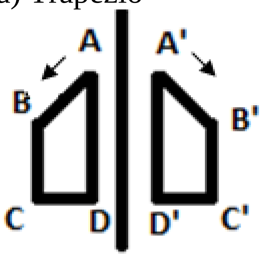
____

____

c) A linha destacada é chamada de ______________________.

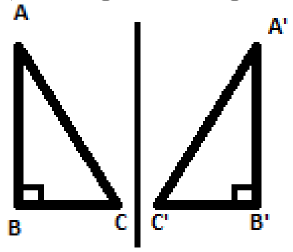
3) Ponha o espelho sobre o eixo de simetria de cada figura a seguir:

a) Trapézio



Fonte: A autora

b) Triângulo retângulo



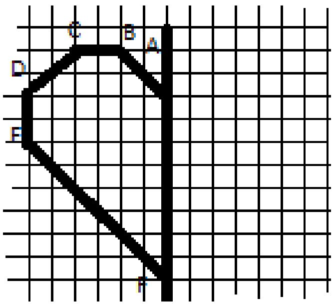
Fonte: A autora

Agora, faça setas indicando a ordem alfabética (como, por exemplo, de A para B, de B para C, etc). O que podemos concluir a respeito da orientação das figuras após sofrerem uma reflexão?

____

____

4) Na malha quadriculada a seguir, desenhe a reflexão da figura em torno da reta AS, nomeando os pontos simétricos (ex. simétrico de A é A’, de B é B’, e assim, sucessivamente):



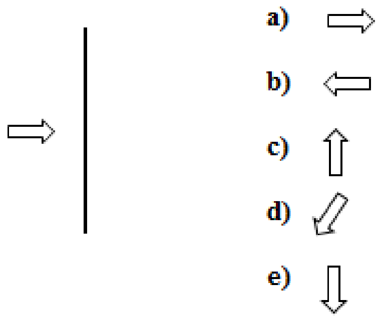
Fonte: A autora

Compare cada ponto ao seu simétrico. O que se pode concluir a respeito dos pontos A e F com seus simétricos?

____

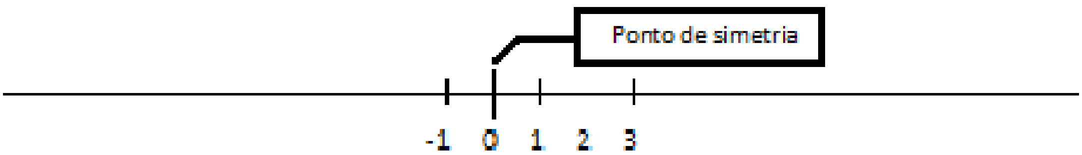
____

5) Qual é a imagem refletida da figura a seguir?



Fonte: A autora

6) Agora que já conhecemos a reflexão e suas propriedades, observe que a reta numérica também possui uma simetria de reflexão, de forma que o número zero é o ponto de simetria. .Considere o simétrico de 1, como sendo -1, o simétrico de 2, como -2, e assim sucessivamente, e complete a reta com os números inteiros que faltam até o número 10 e seu simétrico.



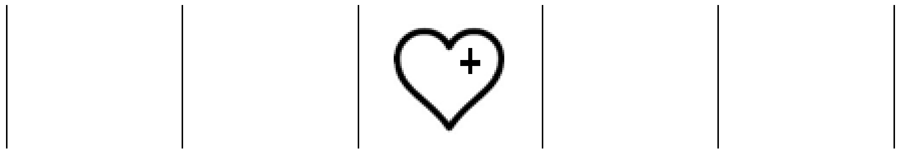
Fonte: A autora

7) Conversa a respeito das conclusões.

APÊNDICE C: Folha de atividades 3 - Translação e suas propriedades

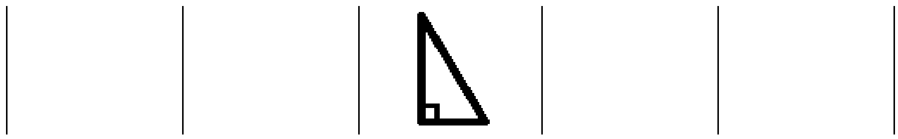
1) Ponha os dois espelhos paralelamente, de maneira que formem com a mesa um ângulo de 90°. Ponha a figura no meio deles e complete com o que vê.

a) Um coração simétrico



Fonte: A autora

b) Um triângulo retângulo



Fonte: A autora

2) Já sabemos que uma figura quando é refletida uma única vez, ela tem a sua orientação invertida. É necessário inverter a orientação quantas vezes para que a figura refletida seja igual a original?

____

____

3) Quando fazemos a reflexão repetidas vezes, chamamos de produto de reflexões. O produto de duas reflexões ______________ (preserva/muda) a orientação da figura.
Obs.: Quando fazemos o produto de duas reflexões, é como se a figura tivesse sido "arrastada" pelo plano. A esse movimento, chamamos de movimento de **translação**.

APÊNDICE D: Folha de atividades 4 - Rotação e suas propriedades

1) Abra o livro de espelhos conforme os ângulos indicados e com o auxílio de um canudo, verifique que polígonos são formados:

a) 30° - ____

b) 45° - ____

c) 60° -____

d) 90° -____

2) Posicione o ponto de encontro dos espelhos sobre o ponto O do transferidor e abra-o conforme os ângulos indicados a seguir (utilize o triângulo retângulo para auxiliá-lo nessa atividade). Registre a quantidade de figuras que consegue observar quando os espelhos estão abertos sob um ângulo de:

a) 30° - ____

b) 45° - ____

c) 60° -____

d) 90° -____

Qual relação lhe chama a atenção com relação ao ângulo de abertura e o total de imagens formadas?

____

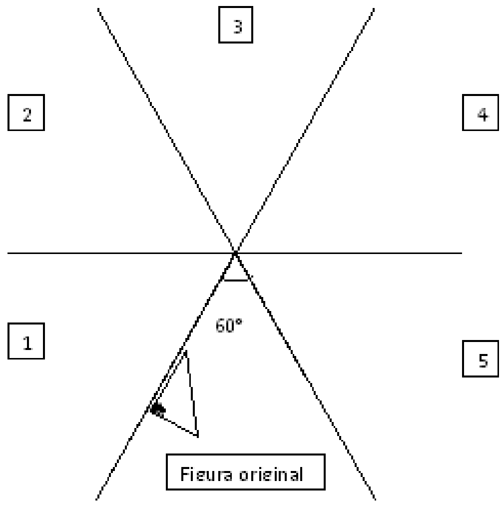
____

3) Todas as imagens apresentam a mesma orientação?

____

____

4) Complete a imagem abaixo com o que pode ver no livro de espelhos, quando aberto sob um ângulo de 60°.



Fonte: A autora

Como estamos trabalhando com espelhos, a imagem imediatamente ao lado da figura inicial é uma reflexão, porém a seguinte caracteriza uma rotação. Pode-se concluir que a rotação ____________________ (preserva/altera) a orientação.

5) Indique agora, quais das imagens acima caracterizam:

a) Rotação da figura original _____________________

b) Reflexão da figura original _____________________

Professora Glaucia da Silveira Possebom - Profmat - Rio de Janeiro - 2018

APÊNDICE E: Folha de atividades 5 - Verificar os conhecimentos adquiridos

1) Que tipo de simetria (reflexão, rotação, translação) pode ser associada a:

a) Uma criança num balanço? ________________________

b) Uma criança no escorrega? ________________________

c) Uma criança ao se olhar num espelho? _______________

d) Uma criança na roda gigante? ______________________

e) Uma criança no pula-pula? _________________________

f) Um cata-vento? _________________________________

2) Marque a alternativa correta:

a) Translação ( ) preserva a orientação ( ) não preserva a orientação

b) Rotação ( ) preserva a orientação ( ) não preserva a orientação

c) Reflexão ( ) preserva a orientação ( ) não preserva a orientação

3) Recortar de revistas, figuras que apresentem algum tipo de simetria para a confecção de um cartaz.