UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

LETSA FABÍOLA BARBOSA ALVES SILVEIRA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINERARES: UM OLHAR SOB AS TEORIAS DE APRENDIZAGEM NA REALIDADE DA ESCOLA CONTEMPORÂNEA

Vitória da Conquista/BA
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL – PROFMAT

LETSA FABÍOLA BARBOSA ALVES SILVEIRA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINERARES: UM OLHAR SOB AS TEORIAS DE APRENDIZAGEM NA REALIDADE DA ESCOLA CONTEMPORÂNEA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Orientadora: Profª. Drª Alexsandra Oliveira Andrade.

Vitória da Conquista/BA
2018

S589r Silveira, Letsa Fabíola Barbosa Alves

Resolução de problemas no ensino de sistemas de equações linerares: um olhar sob as teorias de aprendizagem na realidade da escola contemporânea. / Letsa Fabíola Barbosa Alves Silveira, 2018.

102f. il.

Orientador (a): Dra. Alexsandra Oliveira Andrade.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2018.

Inclui referências. 85-90.

1. Sistemas de Equações Lineares. 2. Método de resolução – Eliminação de Gauss. 3. Software GeoGebra. 4. Matemática – Estudo e Ensino. I. Andrade, Alexsandra Oliveira. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 510.7

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção- CRB 5/1890

UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

LETSA FABÍOLA BARBOSA ALVES SILVEIRA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINERARES: UM OLHAR SOB AS TEORIAS DE APRENDIZAGEM NA REALIDADE DA ESCOLA CONTEMPORÂNEA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Professora Drª. Alexsándra Oliveira Andrade (Orientadora)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

____
Professor Dr. Roque Mendes Prado Trindade
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

____
Professor Drª. Selma Rozane Vieira
Instituto Federal da Bahia - IFBA

Vitória da Conquista/BA

2018

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha mãe Adeir que desde cedo me enveredou pelos caminhos do amor ao conhecimento, ensinando-me que educação é o maior instrumento de mudança social. Com ela aprendi a lutar, a acreditar, a dedicar e persistir, mesmo quando o objetivo se mostra inalcançável.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela saúde, força e proteção durante inúmeras viagens.

Agradeço ao meu esposo Rodrigo pela paciência, colaboração, apoio e incentivo quando pensava que não conseguiria mais.

Agradeço imensamente a minha família, em especial as minhas irmãs Leniétsa e Letsilane, sem elas não seria possível concluir esse trabalho.

Agradeço aos meus colegas Mauricio, Rita, Lindomar, Marcelo (*in memorian*) pelos momentos de estudos, em especial, a Paulo e Neiva, que além dos estudos, proporcionaram-me uma bela amizade marcada por muitas horas de parceria e cuidados mútuos durante as viagens e estadias.

Agradeço a minha orientadora Professora Drª. Alexsandra Oliveira Andrade pela boa vontade, alegria, agilidade e disposição ao me receber e orientar.

E finalmente, a SBM, CAPES e UESB, pois essa parceria e patrocínio possibilitou a realização de um sonho. Espero retribuir contribuindo para melhoria da aprendizagem de quem eu tiver o prazer de encontrar nessa jornada pela Educação.

EPÍGRAFE

De que valeria a obstinação do saber se ele assegurasse apenas a aquisição dos conhecimentos e não, de certa maneira, e tanto quanto possível, o descaminho daquele que conhece? Existem momentos na vida onde a questão de saber se se pode pensar diferentemente do que se pensa, e perceber diferentemente do que se vê, é indispensável para continuar a olhar ou a refletir (FOUCAULT, 2003, p.13).

RESUMO

O presente trabalho aborda Sistemas de Equações Lineares, o método de resolução pela Eliminação de Gauss, bem como a interpretação geométrica do conjunto solução de sistemas lineares em duas variáveis, com fulcro nas teorias de aprendizagem, o uso das Tecnologias de Informação, especificamente o *software* GeoGebra e o uso de resolução de problemas para ensino-aprendizagem de matemática. Por fim, descreve um relato de uma experiência com alunos do ensino médio na qual se investiga a eficiência na melhoria da aprendizagem do método da Eliminação de Gauss com auxílio do *software* GeoGebra e a resolução de problemas.

Palavras-chaves: Sistemas de Equações Lineares. Eliminação de Gauss. Teoria de aprendizagem. Resolução de Problemas. *Software* GeoGebra.

ABSTRACT

The present work deals with Systems of Linear Equations, the method of resolution by the Gauss Elimination, as well as the geometric interpretation of the solution set of linear systems in two variables, with fulcrum in the theories of learning, the use of information and communication technologies, specifically the GeoGebra software and the use of problem solving for teaching-learning mathematics. Finally, it describes an experience with high school students that investigates the efficiency in improving the learning of the Gauss Elimination method with the help of GeoGebra software and the problem solving.

Keywords: Systems of Linear Equations. Elimination of Gauss. Theory of learning. Troubleshooting. GeoGebra Software

LISTA DE ABREVIATURAS

AIM	Association of Teachers of Mathematics
ANA	Avaliação Nacional da Alfabetização
ANEB	Avaliação Nacional da Educação Básica
ANRESC	Avaliação Nacional do Rendimento Escolar
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CBC	Currículo Básico Comum
CONAE	Conferência Nacional de Educação
CRPE	Centros Regionais de Pesquisas Educacionais
ENADE	Exame Nacional de Desempenho de Estudantes
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
NCIM	National Council of Teatchers of Mathematics
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SI	Sistema Impossível ou Incompatível
SIC	Sociedade Independente de Comunicação
SPD	Sistema Possível e Determinado
SPI	Sistema Possível e Indeterminado
TICs	Tecnologia de Informação e Comunicação
UESB	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Já se tornou senso comum que a matemática é umas das matérias da Educação Básica que desperta maior repulsa nos alunos. As avaliações que averiguam a qualidade da educação pública no país demonstram que há um número significativo de reprovações e déficit de aprendizagem nesta disciplina.

Em sentido paradoxal, todavia, o saber matemático está entre os mais exigidos no cotidiano das pessoas. Desde a Revolução Industrial, os conhecimentos nesta área deixaram de ser preocupação de uma pequena parcela da população agrária que administrava os negócios entre si para ser de utilidade pública.

Este confronto entre dificuldade de aprender matemática versus necessidade de conhecimentos matemáticos no dia a dia do indivíduo denota que há um problema sério a ser investigado quanto aos métodos de ensinos empregados até então.

É indiscutível que as invenções tecnológicas “invadiram” o ambiente escolar dando origem a novos paradigmas educacionais, dentre estas, destacam-se o computador e o celular que possuem uma gama de programas e aplicativos que podem auxiliar os docentes no processo de construção de conhecimento.

Desta forma, o presente estudo mostra-se justificável, posto que almeja pesquisar como a tecnologia pode ser utilizada como método auxiliar no ensino da resolução de problemas dentro do conteúdo de sistemas lineares. O objetivo é despertar no aluno o gosto pelo aprendizado, para que ele seja capaz de entender o que lhe está sendo proposto e, não somente, memorizar técnicas resolutivas.

Sistemas de equações lineares não foi uma escolha aleatória, mas sim devido a sua relevância para resolução de assuntos da vida em sociedade que vão desde questões de tráfego de veículos em ruas movimentadas a balanceamento de equações químicas.

Ademais, sistemas de equações lineares consistem numa importante ferramenta para trabalhar outros conteúdos de matemática como matrizes, determinantes e modelagem.

Para o desenvolvimento deste trabalho, utilizou-se da pesquisa bibliográfica nos ramos da Matemática e das Teorias de Aprendizagem, além de pesquisa de campo com alunos do Ensino Médio pertencente a rede Estadual de Ensino do Estado de Minas Gerais.

No capítulo 2, faz-se um paralelo entre as teorias de aprendizagem e a melhoria de qualidade do ensino público no país. De forma sucinta, aborda as teorias de Vygotsky, Piaget, Paulo Freire e qual a importância de cada uma no processo de ensino-aprendizagem.

O capítulo 3 trata da adoção da metodologia de Resolução de Problemas no ensino da matemática no país bem como da inserção da tecnologia entre os recursos didáticos para subsidiar a implementação desta técnica dentro da sala de aula.

No capítulo 4 apresenta-se a parte teórica de sistemas lineares. Discute-se as formas de resolução, com enfoque especial ao método de Escalonamento por Eliminação de Gauss, finalizando com uma abordagem geométrica de sistemas 2x2.

No capítulo 5 é relatado todo o processo de pesquisa realizada "*in locco*" que investigou a aplicabilidade prática da teoria a realidade dos alunos investigados a partir de três momentos, a saber: a formulação do diagnóstico, a intervenção e o acompanhamento final. Por meio da utilização do *software* GeoGebra discutiu-se a eficiência do método da Resolução de Problemas no conteúdo de Sistemas Lineares.

Por fim, para explicitar os resultados da pesquisa a que esta Dissertação se propôs, têm-se as considerações finais.

2. UM PARALELO ENTRE AS TEORIAS DE APRENDIZAGEM E A MELHORIA DA QUALIDADE DE ENSINO PÚBLICO NO PAÍS

2.1 Notas sobre a qualidade da educação básica no Brasil, com enfoque especial na disciplina de matemática ofertada na etapa do Ensino Médio

Analisando a história da educação básica no Brasil, constata-se que a mesma já enfrentou diversos desafios, desde o acesso até a qualidade do ensino oferecido.

Atualmente, o maior desafio encontrado é oferecer uma educação de qualidade, que realmente ofereça aos alunos instrumentos básicos para que possam viver dignamente na sociedade.

Na tentativa de acompanhar e zelar pela qualidade de ensino na Educação Básica, diversos instrumentos avaliativos foram implantados em todo Brasil, dentre eles destaca-se o SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica, cuja implantação data de 1990, e trata de um conjunto de avaliações externas realizadas em todo o país.

No portal do INEP- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, é possível acompanhar todo processo bem como as mudanças ocorridas no SAEB desde 1990. Hoje o SAEB é composto por três avaliações externas em larga escala, nos termos do organograma que pode ser vista na Figura 1, extraído do sítio eletrônico deste Instituto:

Figura 1: Avaliações externas que compõem o SAEB

Fonte: http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb

Das três modalidades que compõem o SAEB: ANEB - Avaliação Nacional da Educação Básica, ANRESC - Avaliação Nacional do Rendimento Escolar e ANA - Avaliação Nacional da Alfabetização, a que mais repercute na sociedade e nas unidades de ensino é a ANRESC/Prova Brasil.

A Avaliação Nacional do Rendimento Escolar, conhecida popularmente como Prova Brasil, é uma avaliação censitária bianual envolvendo os alunos do 5º ano (4ª série), 9º ano (8ª série) do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio das escolas públicas que possuem, no mínimo, 20 alunos matriculados nas séries/anos avaliados. Nesses últimos anos, os alunos foram avaliados nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática.

As provas de Matemática e de Língua Portuguesa da ANRESC/ Prova Brasil são avaliações elaboradas a partir de matrizes de referência aplicadas por meio de questões de múltipla escolha aos estudantes de todas as séries avaliadas.

As matrizes da ANRESC não englobam todo o currículo escolar e não devem ser confundidas com procedimentos, estratégias de ensino ou orientações metodológicas, já que o recorte da avaliação só pode ser feito com base em métricas aferíveis.

Outro fator interessante que a ANRESC/Prova Brasil considera são os fatores contextuais em que cada instituição está inserida. Para elencar informações contextuais sobre os aspectos da vida escolar como a formação dos profissionais, modelo de gestão e práticas pedagógica que norteiam o trabalho de cada escola, do nível socioeconômico, do capital social e cultural dos alunos são aplicados questionários para alunos, professores e diretores.

Segundo cartilha do SAEB 2017, um documento que foi elaborado para capacitar os gestores das escolas, o Sistema de Avaliação da Educação Básica avalia as disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática, tendo a seguinte finalidade:

> Diagnosticar a educação básica no País e contribuir para a melhoria de sua qualidade, oferecendo subsídios concretos para a formulação, a reformulação e o monitoramento das políticas públicas voltadas para a educação básica. (Cartilha do Saeb 2017, p. 5)

Na devolutiva dos resultados para sociedade em geral, esta prova é apresentada pelo IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica, numa escala de 0 a 10. Frisa-se que o desempenho de Língua Portuguesa e

Matemática e os fatores contextuais são levados em consideração e totalizados num resultado único. Cada instituição tem sua meta projetiva até 2021.

Neste sentido, faz-se interessante analisar algumas publicações em revistas ou sites sobre educação a respeito do resultado do IDEB no ano de 2015.

A Agência Brasil, por exemplo, publicou no dia 08/09/2015, a reportagem: “Desempenho de estudantes do Ensino Médio é menor que o de 20 anos atrás” por Mariana Tokarnia.

Segundo a reportagem mencionada, o resultado do IDEB em 2015 mostra que os alunos do Ensino Médio têm dificuldades em interpretações de texto e operações matemáticas simples como soma, subtração, multiplicação e divisão, habilidades dos anos iniciais, no caso, antiga 4ª série ou 5º ano. Afirmando ainda que a educação precisa de mudanças, principalmente a última etapa da Educação Básica, o Ensino Médio.

A revista Época, por sua vez, divulgou uma matéria em 08/09/16, por Flávia Yuri Oshima, cuja manchete era “Ensino Médio, mais uma vez, tem pior resultado do IDEB”.

As duas reportagens chamam a atenção para os resultados da prova que afere a qualidade da Educação no Brasil. Ambas reforçam que é necessário uma política que valorize e repense a estrutura da educação como um todo.

Os resultados da Prova Brasil, são públicos, e amplamente divulgados nos jornais orais e escritos, além de ficarem disponíveis em meio eletrônico, no site do INEP, para consulta. Alguns estados, como Minas Gerais, por exemplo, preocupados com a real divulgação dos resultados para a comunidade local, enviou uma placa para cada unidade de ensino com resultado do seu IDEB em 2015.

Fazendo-se uma análise geral do desempenho das escolas públicas brasileiras, nota-se que é preciso intervenção urgente. O problema é que o impacto inicial causado na população, por meio da divulgação dos resultados, logo, vai diminuindo a força, e na prática, poucas mudanças acontecem na educação.

Neste sentido, o Prof. Celso Vasconcelos em um texto elaborado para a CONAE – Conferência Nacional de Educação (Vasconcelos, 2012, p.1) intitulado “O Desafio da Qualidade da Educação” assevera o seguinte:

> A divulgação de resultados de avaliações (SAEB, IDEB, PISA, ENEM, ENADE) tem trazido dados preocupantes sobre a qualidade do ensino no país. Comumente, quando são divulgados estes índices, há algumas reações, mais ou menos inflamadas, mas são apenas espasmos: logo depois, tudo parece voltar ao “normal”. (VASCONCELOS, 2012, p.1)

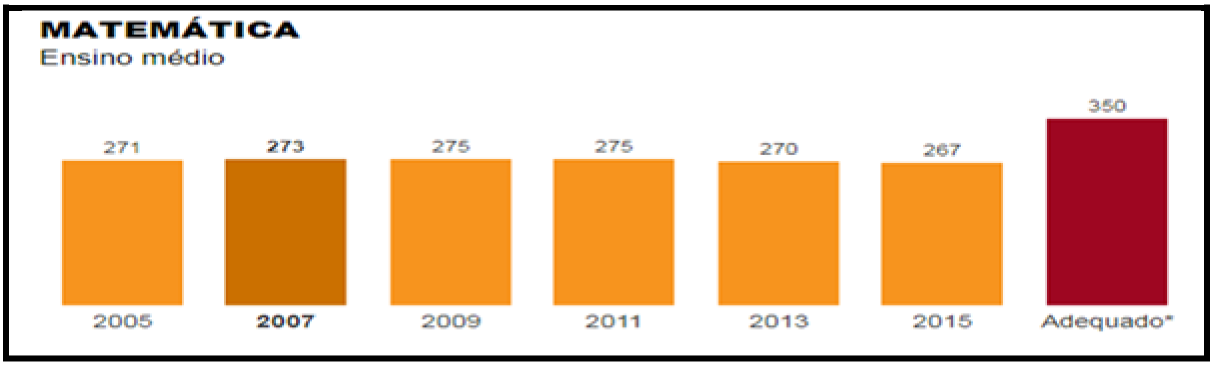
Desta forma, é notável que preocupação com a qualidade da educação precisa fazer parte do cotidiano das escolas e demais instituições e redes responsáveis pelo cumprimento do oferecimento da educação. O desafio atual é oferecer uma educação com qualidade para os atendidos. Retomando o texto “O Desafio da Qualidade da Educação”, cita-se:

> A não-aprendizagem dos alunos nos angustia profundamente, pois significa a negação do direito fundamental do ser humano de acesso a determinados elementos da cultura, saberes elaborados, categoriais, que dificilmente terá acesso fora da escola, pelo menos não de forma intencional, sistemática, crítica, coletiva e mediada, como acontece —ou deveria acontecer— na escola. O fracasso escolar é uma outra forma de exclusão: a exclusão dos incluídos, já que formalmente os alunos estão no sistema, mas não estão aprendendo, tendo portanto boa parte de seu desenvolvimento comprometido. (VASCONCELOS, 2012, p.1)

A qualidade da educação pública brasileira, como um todo, precisa ser repensada, mas é notório que a disciplina de matemática no Ensino Médio, necessita de uma intervenção maior, pois os dados dos resultados externos e a realidade das escolas evidenciam isso.

O gráfico representado na Figura 2, demonstrando a evolução negativa do desempenho dos estudantes brasileiros em 2015 na disciplina de matemática no Ensino Médio, comprova isso:

Figura 2: Desempenho do ensino da matemática, segundo o SAEB:



Fonte: http://www1.folha.uol.com.br/educacao/2016/09/1811210-desempenho-do-ensino-medio-em-matematica-e-o-pior-desde-2005.shtml

De acordo com o critério estabelecido pelo movimento “Todos pela Educação”, o adequado seria os estudantes atingirem no mínimo 350 pontos na escala de proficiência da avaliação do SAEB.

O Todos pela Educação é um movimento da sociedade brasileira que tem como missão engajar o poder público e a sociedade brasileira do compromisso pela efetivação do direito das crianças e jovens à uma Educação Básica de Qualidade.

Nota-se que após a divulgação do SAEB/IDEB em setembro de 2016, apareceram diversas discussões e alertas nos meios de comunicação sobre a qualidade da educação no Brasil. “Os debates nos meios de comunicação sobre a qualidade da educação parecem sofrer da “síndrome do cobertor curto”: quando se puxa a reflexão para um lado, esquece-se outros lados do problema.” (VASCONCELOS, 2012, p. 2).

Oferecer um ensino de qualidade tem sido um eterno desafio. Existem diversas propostas para melhoria da qualidade da educação, no entanto, na prática, constatam-se poucos avanços. Surgem diversos questionamentos: o que está acontecendo? É falta de articulação ou planejamento? Ou de fato, não há interesse em melhorar a educação brasileira?

No âmbito do planejamento, formulação e reformulação de políticas pública para a melhoria da qualidade da educação, Vasconcelos (2012, p.2) faz uma excelente analogia:

> Parece uma casa em reforma em que se acredita que o problema está apenas no encanamento: troca-se o encanamento, mas o chuveiro continua não funcionando direito. Então, coloca-se de novo o encanamento antigo e troca-se a fiação elétrica. De novo, o chuveiro não funciona. Volta-se a fiação antiga, e vai se consertar o telhado, etc. Depois, alguém dá o veredicto de que a casa não tem jeito, que resiste às mudanças... (VASCONCELOS, 2012, p. 2)

A realidade da educação brasileira é crítica, a ponto de causar desestímulos, mas é preciso crer que “mudar é difícil, mas é possível” (FREIRE, 1994, p. 40). É preciso acreditar e lutar pela mudança dos rumos da educação brasileira, que os resultados externos e internos das escolas possam de fato sensibilizar todos os envolvidos e responsáveis pela educação do Brasil, no sentido de criarem estratégias para melhoria do Ensino, em especial, o ensino da Matemática no Ensino Médio.

2.2 As teorias da aprendizagem e a busca pela qualidade do ensino

A questão de como o ser humano aprende e se desenvolve é um objeto de estudo antigo. Há muitos anos, discute, realiza-se pesquisas e produz conhecimento sobre como se dá a aprendizagem e ou desenvolvimento da mente humana. E desses estudos nasceram princípios, métodos e até teorias da aprendizagem.

Ensinar e aprender são processos relacionados, mas não um único processo. Para Moreira e Massoni (2015, p. 5): “A aprendizagem não é uma consequência natural do ensino. O objetivo do ensino é a aprendizagem, mas se esta não ocorre não pode dizer que houve ensino”. Afirmando ainda que “só há ensino quando há aprendizagem” (MOREIRA e MASSONI, 2015, p. 5).

Se o objetivo do ensino é a aprendizagem, é necessário que os responsáveis pelo ato de ensinar busquem meios para garantir a efetivação de tal aprendizagem. Um caminho é o estudo das teorias de aprendizagens e de princípios que alguns estudiosos elencaram como significativos no processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com Moreira e Massoni (2015, p. 5), em tais teorias, encontram-se pontos comuns e algumas controvérsias. No emaranhado das teorias de aprendizagem, descobrem pistas sobre como a aprendizagem se constrói, currículo e até mesmo sugestões e orientações metodológicas. O processo de ensino precisa ser algo sistemático, bem organizado e estruturado em bases sólidas e só é possível através da pesquisa. “Ensino sem base teórica é ensinar por acaso” (MOREIRA e MASSONI, 2015, p. 5).

Fala-se muito hoje sobre a importância da pesquisa, da teoria no campo educacional. Tornou-se evidente que as entidades formadoras devem priorizar uma proposta que articule bem a relação teoria e prática, assim evita-se que a teoria vire utopia, algo sem sentido e antipatizado pelos professores e demais agentes que estão na base da educação.

Freire (1996, p.13) adverte que “A reflexão crítica sobre a prática se torna uma exigência da relação Teoria/Prática sem a qual a teoria pode ir virando blablablá e a prática, ativismo” FREIRE (1996, p.13).

2.2.1 Vygotsky e o Sócio-interacionismo

Lev Semenovich Vygotsky, foi um psicólogo bielo-russo, nascido no ano de 1896 e falecido em 1934. Morreu jovem, mas mesmo tendo vivido pouco deixou um legado muito grande para a educação no que se refere ao desenvolvimento intelectual dos seres humanos.

Dos estudos Vygotskyano, nasceu a corrente pedagógica conhecida como sócio-interacionismo. Serão abordados dois pontos da teoria de Vygotsky que repercutem muito na literatura educacional atual, sendo: interação/mediação e zona de desenvolvimento proximal.

O primeiro ponto a ser abordado será a interação/mediação. Para esse teórico não há aprendizagem sem interação do ser humano com outro ser humano. Mesmo tendo a predisposição genética, não há aprendizagem ou evolução se não tiver a interação. Há uma frase dele muito conhecida no meio acadêmico que resume a importância do outro no processo de aprendizagem. “Na ausência do outro o homem não se constrói homem" (VYGOTSKY, 1991)

Do processo de interação nascem as mediações que pode ser liderada por um adulto, no caso da escola, pelo professor. Nesse sentido, valoriza-se o papel do professor, este deve ter formação para promover as mediações entre os sujeitos envolvidos, além de providenciar instrumentos, atividades que também podem facilitar essa mediação.

Na revista Nova Escola de outubro de 2017, publicou-se uma reportagem intitulada “Vygotsky e o conceito de aprendizagem mediada**”** em que se destaca a importância do papel do professor. Reconhece-se o valor do papel do professor no processo de ensino e aprendizagem, no entanto, é conveniente reforçar que a ação deste profissional está atrelada a uma politica maior da educação.

O segundo e último ponto a ser mencionado refere-se a ZDP - Zona de Desenvolvimento Proximal. Moreira e Massoni (2015, p.15) definem a ZDP como:

> A distância entre o nível de desenvolvimento cognitivo real do individuo, percebido por sua capacidade de resolver situações-problema independentemente, e o seu nível de desenvolvimento potencial, percebido por meio da solução de situações- problema sob orientação de um adulto, no caso de uma criança; de um professor, no caso de ensino-

> aprendizagem ou em colaboração com companheiros mais capazes. (MOREIRA E MASSONI, 2015, p.15)

Assim, entende-se que a aprendizagem é uma caminhada, e nessa caminhada existe um momento de transição, a ZDP, momento esse, que os aprendizes precisam de um apoio, seja ele um objeto, uma pessoa ou uma situação.

O conceito Vygostkyano da ZDP notabiliza também a importância do diagnóstico na proposta de ensino-aprendizagem. É totalmente sem significado planejar e lecionar aulas sem se fazer um levantamento de quais conhecimentos prévios os alunos possuem sobre um determinado assunto. Nessa mesma linha de pensamento, cita-se: “Não tem sentido começar ensinar sem fazer um levantamento, por menor que seja, do conhecimento prévio dos alunos”. Um grande erro didático, mas muito comum (MOREIRA e MASSONI, 2015, p.20).

2.2.2 Piaget e o Cognitivismo

Jean Piaget (1896-1980) teve uma formação vasta, biólogo, psicólogo e filósofo. Piaget ficou muito conhecido por seu trabalho pioneiro no campo da inteligência humana. Seus estudos impactaram e ainda impactam os rumos da Psicologia e Pedagogia. “Embora possam existir propostas cognitivistas anteriores as de Jean Piaget (1896-1980), as suas foram, sem dúvida, pioneiras no enfoque construtivista à cognição humana”. (MOREIRA e MASSONI, 2015, p.10).

Dos estudos de teóricos como Piaget nasce o cognitivismo e também abre as portas para a teoria construtivista. As maiores contribuições da teoria Piagetiana encontram-se no campo do desenvolvimento humano e as suas implicações para o processo de ensino e aprendizagem. Sua obra é bem conhecida pelos quatro estágios que o ser humano passa até atingir a capacidade lógica.

Piaget afirma que todo ser humano passa pelos quatro estágios, na sequência que se apresenta e nas possíveis idades mencionadas: sensório motor (do nascimento até cerca de dois anos de idade), pré-operacional (dos dois anos aos seis ou sete anos), operacional-concreto (dos 11 aos 12 anos de idade) e por último o operacional formal (da adolescência até a idade adulta). (MOREIRA e MASSONI, 2015, p.10-11).

A lógica dos estágios de aprendizagem alerta os educadores e os responsáveis pela elaboração das propostas curriculares de ensino que o processo de ensino e aprendizagem precisa ser sistematizado de forma que atenda as capacidades de cada etapa do ser humano, em especial das crianças.

O conceito "conflito cognitivo" da teoria de Piaget também é importante para o ensino. A aprendizagem precisa de desafios, sem desafios não há progressão na aprendizagem. Esses desafios têm que estar dentro das possibilidades cognitivas dos alunos, cabendo à intervenção do professor, de ir gradativamente incluindo desafios próximos da capacidade da turma. Caso extrapole e proponha desafios fora do campo de potencialidade da turma, em vez de ajudar, os desafios tornarão empecilhos no processo de ensino.

2.2.3 Paulo Freire e o Humanismo

A abordagem humanista tem como representantes vários nomes de estudiosos que contribuíram muito para a educação, como**:** Carl Rogers, George Kelly e Paulo Freire. Nesse trabalho, contudo, serão abordados os princípios da pedagogia freireana.

Paulo Freire (1921-1997) foi um dos mais importantes educadores brasileiro, atuou e foi reconhecido internacionalmente. Pelos seus estudos e obras foi classificado como um pesquisador da teoria humanista. Vários aspectos foram marcantes e são mencionados até hoje como fruto do seu trabalho, como a importância e a luta pela alfabetização no Brasil, também desenvolveu uma linha pedagógica totalmente política.

Dos estudos de Freire serão mencionados aqui alguns pontos muito discutidos nas literaturas educacionais, sendo: o poder da educação, a importância do professor e o papel ativo do aluno no processo de ensino e aprendizagem.

Para Freire (1994, p. 57) a educação é um ato político, tendo um grande poder, seja este de manutenção ou de transformação social. Vejam:

> Se a educação não pode tudo, alguma coisa fundamental a educação pode. Se a educação não é a chave das transformações sociais, não é também simplesmente reprodutora da ideologia dominante. O que quero dizer é que a educação nem é uma força imbatível a serviço da transformação da sociedade, porque assim eu queira, nem tampouco é a perpetuação do "status quo” porque o dominante o decrete. (FREIRE, 1994, p. 57)

Os profissionais envolvidos na educação precisam ter consciência do poder da educação, e não deixar que a mesma seja usada para manutenção, reprodução da classe dominante.

> O educador e a educadora críticos não podem pensar que, a partir do curso que coordenam ou do seminário que lideram, podem transformar o país. Mas podem demonstrar que é possível mudar. E isto reforça nele ou nela a importância de sua tarefa político-pedagógica (FREIRE, 1994, p. 57);

Mas e os professores têm consciência, sabem da importância do seu trabalho e tem condições de exercê-lo a favor da educação transformadora? Entra aí, o segundo ponto: a importância do professor. Para Freire (1994, p.60) o professor exerce um papel fundamental no processo educacional transformador. Tendo que ter uma gama de habilidades e saberes necessários para usarem no dia a dia da escola. Ensinar exige:

> Reconhecer que a educação é ideológica.
> Compreender que a educação é uma forma de intervenção no mundo.
> Querer bem aos educandos.
> Rigorosidade metódica, pesquisa e criticidade, inclusive da sua prática.
> Risco, aceitação do novo e rejeição a discriminação.
> Entender que ensinar não é transferir conhecimento;
> Humildade, tolerância e luta em defesa dos direitos dos educadores.
> Ensinar exige segurança, competência profissional e generosidade.
> Ensinar exige comprometimento. (FREIRE,1994, p.60).

Após elencar algumas habilidades necessárias à prática educacional na visão freireana, fica mais nítido o quanto a ação dos profissionais da educação é importante. No entanto, a educação, não se faz, só por profissionais, está atrelado a uma política pública. Surgindo outros questionamentos, pois discutir a questão qualidade da educação é complexo.

> A prática das escolas que fazem diferença deixa muito clara a necessidade de se mudar as estruturas e as pessoas, as pessoas e as estruturas. Esta ideia, aparentemente tão simples, é de difícil assimilação

> em função da tradição do pensar dicotômico, onde se valoriza um aspecto ou (exclusivo) outro. (VASCONCELOS, 2012, p.8).

O terceiro ponto a ser abordado refere-se ao papel do aluno no processo de ensino e aprendizagem, para a pedagogia freriana, o educando deve exercer um papel ativo, pois ensinar não é depositar conhecimento, o aluno não é um banco para depósito de informações. Neste sentido, Moreira e Massoni (2015, p.27) afirmam que "estudar requer a apropriação da significação dos conteúdos, a busca de relações entre os conteúdos e entre eles e aspectos históricos, sociais e culturais do conhecimento".

O aluno para exercer o seu papel ativo precisará de muita disciplina e consciência de seu papel. Entra aí mais um aspecto importante da literatura de Freire (1994, p.53), a saber: "ensinar exige liberdade e autoridade". Assunto de extrema urgência e necessidade de ser discutido nos dias atuais nas escolas.

De acordo com Freire (1994, p.54) ainda se confunde muito liberdade e autoritarismo, na tentativa de superar a prática autoritária é possível exercer ações de pura libertinagem. "Inclinados a superar a tradição autoritária, tão presente entre nós resvalamos para formas licenciosas de comportamento e descobrimos autoritarismo onde só houve o exercício legítimo da autoridade." (FREIRE, 1994, p.54)

O professor, da modalidade infantil ao Ensino Médio, precisa exercer sua autoridade, caso contrário, as salas viram uma "bagunça", lugar impróprio para processo de ensino e aprendizagem. Para ilustrar essa confusão entre a prática com autoridade e autoritarismo será citada na íntegra um exemplo dado por Freire (1994, p.54):

> "Recentemente, jovem professor universitário, de opção democrática, comentava comigo o que lhe parecia ter sido um desvio seu no uso de sua autoridade. Disse, constrangido, ter se oposto a que aluno de outra classe continuasse na porta entreaberta de sua sala, a manter uma conversa gesticulada com uma das alunas. Ele tivera inclusive que parar sua fala em face do descompasso que a situação provocava. Para ele, sua decisão, com que devolvera ao espaço pedagógico o necessário clima para continuar sua atividade específica e com a qual restaurara o direito dos estudantes e o seu de prosseguir a prática docente, fora autoritária. Na verdade, não. Licencioso teria sido se tivesse permitido que a indisciplina de uma liberdade mal centrada desequilibrasse o contexto pedagógico, prejudicando assim o seu funcionamento" (FREIRE, 1994, p.54).

Após analisar estas teorias de aprendizagem, fica evidente que as mesmas abordam pontos importantes para o processo de ensino e aprendizagem.

3. DA ADOÇÃO DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

3.1 Breves apontamentos históricos sobre o ensino da matemática

Ensinar matemática tornou-se um desafio cada vez mais evidente. O docente desta área deve estar atento ao fato de que trabalha com uma ciência, ou seja, um conjunto de conhecimentos organizado de maneira lógica e explicitado em uma linguagem própria, devendo transmiti-los aos alunos de forma clara e objetiva.

Percebe-se assim que a prática de ensinar está intrinsecamente relacionada a conhecer e ao modo pelo qual o professor ensina, bem como avalia o que foi elaborado pelo aluno a partir do ensinado.

Neste sentido, Bicudo (1999, p.51) faz os seguintes questionamentos:

> Quando se focaliza a questão do conhecimento, aparecem perguntas tais quais: Como o ser humano conhece? Como consegue aproximar daquilo que quer conhecer? Ele e o objeto que quer conhecer estão separados ou unidos na relação do conhecimento? Existe um conhecimento objetivo? Existe um conhecimento subjetivo? Como o ser cognoscente explica o conhecido? Como o outro com quem convive pode chegar a entender aquilo que expressa através da linguagem? Como o ser humano conhece o objeto específico estudado pela área do conhecimento com o qual o professor trabalha na situação de ensino? (BICUDO, 1999, p.51)

Todavia, esta não é uma preocupação recente, há um panorama histórico evidenciando que os estudiosos da área, tanto no Brasil quanto no exterior, engajam-se há tempos em busca de desenvolvimento de teorias e metodologias para otimizar o ensino da Matemática.

Adotando como referência as escolas americanas, as autoras Lambdin e Walcott (2007, p. 3, apud ONNUCHIC, 1999, p.200) destacam que, durante o século XX e até atualmente, o ensino de matemática "experienciou seis fases identificáveis com diferentes ênfases: (1) Exercício e prática; (2) Aritmética significativa; (3) Matemática Moderna; (4) Volta às bases; (5) Resolução de problemas; e, atualmente, (6) Padrões e responsabilidade".

Segundo as referidas autoras, a primeira fase do exercício e prática de Thorndike, que perdurou de 1920 a 1930, defendeu a teoria do

Conneccionismo e Associacionismo cujo foco principal era desenvolver a facilidade com cálculo, por meio de memorização de fatos e algoritmos, além de fracionar todo o trabalho em séries de pequenos passos.

Acreditava-se que o método da repetição era eficaz, bastando o professor transmitir a informação, o aluno recebê-la, anotá-la, memorizar e repetir. Os testes averiguavam a capacidade do discente reproduzir fielmente o que o professor trabalhou dentro de sala.

A segunda fase denominada aritmética significativa, cujos maiores expoentes foram Brownell, Wertheimer, van Engen, Fehr, ocorreu por volta de 1930 a 1950 e seu cerne é a compreensão de ideias e habilidades aritméticas por meio da abordagem de atividade orientada e aprendizagem incidental.

Nesta fase, o aluno devia entender o que fazia, mas a partir da fala do professor. Ele escutava e repetia, não participando da construção do conhecimento. E ao docente, cabia executar seu trabalho de forma automática, empregando as técnicas operatórias que seriam utilizadas na resolução de questões padrão.

A terceira fase intitulada Matemática Moderna, dos renomados Piaget, Dienes e Brunner, divulgada na década de sessenta até meados da de setenta, defende a Psicologia do desenvolvimento, ou Teoria Sociocultural, cujo alvo é a compreensão da estrutura da disciplina, a partir do estudo das estruturas matemáticas, do currículo espiral e da aprendizagem por descoberta.

Tratou-se de um movimento de renovação, apresentando uma matemática estruturada apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem e enfatizava a teoria de conjuntos. A pesquisadora Onuchic (1999, p.202-203) afirma que esta teoria:

> Realçava muitas propriedades, tinha preocupações excessivas com abstrações matemáticas e apresentava uma linguagem matemática universal, concisa e precisa. Entretanto, acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado.
> Nesta reforma o Professor falava, porém muitas vezes não seguro daquilo que dizia. O aluno não percebia a ligação que todas aquelas propriedades enunciadas tinham a ver com a matemática dos problemas e, principalmente, com a matemática usada fora da escola. Embora procurasse usá-las em exercícios de aplicação, repetindo o que havia sido feito em classe e dizendo o nome daqueles novos símbolos matemáticos que lhes eram apresentados, com frequência não conseguia lhes dar significado. Esse ensino passou a ter preocupações excessivas com formalização, distanciando-se das questões práticas. (ONUCHIC, 1999, p. 202-203)

A quarta fase que vigorou nos finais dos anos setenta é marcada pela volta às bases, ou seja, um retorno ao coneccionismo, à preocupação com a aprendizagem de fatos por exercício e prática.

A quinta fase conhecida como resolução de problemas, de Vygotsky, adotou a teoria do Sócio-Interacionismo. Despontada em torno de 1980, centra-se na resolução dos problemas e processos de pensamento matemático, a partir da aprendizagem por descoberta.

A sexta fase, surgiu em meados dos anos de 1990 e questiona a Psicologia cognitiva e teoria sociocultural versus a renovada ênfase na psicologia experimental.

Conhecer essas fases é importante porque cada uma delas corresponde a um período em que a educação, em geral, estava caminhando através de mudanças fundamentais e cada uma introduzia práticas inovadoras para a Educação Matemática.

Registra-se que essa divisão cronológica, contudo, é apenas do ponto de vista didático e de forma aproximada, pois muitos estudos de uma fase podem ter se originado de forma singular ou de menor expressão bem antes, mas como as fases “atingiram o auge” nos períodos informados acima, as autoras optaram por delimitar assim.

3.2 Nuances da Teoria da Resolução de Problemas

De acordo com Onuchic (1999, p.199) os problemas matemáticos têm ocupado um lugar central no currículo de matemática escolar desde a Antiguidade. “Registros de problemas matemáticos são encontrados na história egípcia, chinesa e grega, e são, ainda encontrados em livros-texto de matemática dos séculos XIX e XX” (ONUCHIC, 1999, p.199).

Se inicialmente, ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, para solucionar problemas de ordem prática de uma sociedade de caráter eminentemente rural (divisão de terras, cálculos de créditos), em que poucos sabiam matemática, com a

Revolução Industrial tornou-se necessários que mais pessoas a dominasse, promovendo uma verdadeira mudança na forma como se ensina esta matéria.

Lamentavelmente, apenas nas últimas décadas é que se valorizou a ideia de que instigar a capacidade de resolver problemas seria um importante instrumento de construir o saber matemático. Atualmente, constitui tendência aceitar os alunos como participantes ativos no processo de aprendizado.

A Teoria do Sócio-Interacionismo ou de Resolução de Problemas, cujo maior expoente foi Vygotsky, focava os processos de pensamento matemático e de aprendizagem por descoberta, no contexto da resolução de problemas.

Ao consultar a obra "Pensamento e Linguagem", percebe-se que Vygotsky exteriorizou divergências em relação aos esquemas propostos pelos behavioristas e por Piaget. Neste diapasão, cita-se:

> Assim, o nosso esquema de desenvolvimento — primeiro, o discurso social, depois o discurso egocêntrico, depois o discurso interior — diverge profundamente não só do esquema behaviourista tradicional, — discurso oral, murmúrio, discurso interior — mas também da seqüência (sic) de Piaget — que passa do pensamento autístico para o discurso socializado e o pensamento lógico através do discurso e do pensamento egocêntrico. <u>Na nossa concepção a verdadeira trajetória de desenvolvimento do pensamento não vai no sentido do pensamento individual para o socializado, mas do pensamento socializado para o individual</u>. (Grifos nossos) (VYGOTSKY, 1991, p.31)

Tal constatação permitiu a Vygotsky compreender que o pensamento não é formado com autonomia e independência, mas sob condições determinadas, sob a mediação dos signos e dos instrumentos culturais que se apresentam histórica e socialmente disponíveis.

Oliveira (2010, p.33) explica que o processo de mediação, por meio de instrumentos e signos, é fundamental para o desenvolvimento das funções psicológicas superiores, distinguindo o homem dos outros animais. Por outras palavras: "A mediação é um processo essencial para tornar possível atividades psicológicas voluntárias, intencionais, controladas pelo próprio indivíduo" (OLIVEIRA, 2010, p. 33).

Mas, a teoria da Resolução de Problemas não se limitou aos ensinamentos de Vygotsky, com o decorrer do tempo ela foi aprimorada, questionada e reinventada, gerando várias orientações e abordagens didáticas.

Todavia, esta evolução, não foi espontânea, segundo Branca (1997, p.4-12), até a década de 90, a resolução de problemas era apresentada dentro de três concepções: como meta, processo ou habilidade básica. Essas não se excluem, mas apresentam diferentes momentos das pesquisas e por conseguinte reflexo nos currículos, nos materiais didáticos e nas orientações de ensino. A partir dos anos 90, é que a resolução de problemas ganha uma nova dimensão, como metodologia para o ensino da matemática, passando a ser um conjunto de estratégias para o ensino e o desenvolvimento da aprendizagem desta ciência.

Antes de falar destas concepções, merece destaque o trabalho de Polya, sua obra *How to love it*, cuja primeira edição data de 1945, trata-se de um manifesto precursor sobre o assunto. Não que não haja relatos de estudos anteriores, sabe-se das experiências de Dewey desenvolvidas entre 1896 e 1904. A respeito destas experiências, o douto Andrade destaca que: “Nessas experiências, as crianças estudavam através de projetos que reproduziam as situações socioeconômicas estudo/resolução de problemas de interesse da comunidade”. (ANDRADE, 1998, p. 38)

Mas, o ensino de Resolução de Problemas, enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática, começou a ser investigado de forma sistemática sob a influência de Polya, nos Estados Unidos, nos anos sessenta.

De acordo com Andrade (1998, p.39):

> Em nível mundial, as investigações sistemáticas sobre Resolução de Problemas e suas implicações curriculares têm início na década de 1970. Embora grande parte da literatura hoje conhecida em Resolução de Problemas tenha sido desenvolvida a partir dos anos 70, os trabalhos de George Polya datam de 1944. A partir do final da década de 1960, a metodologia de investigação, utilizando sessões de resolução de problemas em grupo e com os alunos se manifestando em voz alta, se tornou prática comum. O período de 1962 a 1972 marcou a transição de uma metodologia de investigação de natureza quantitativa para uma qualitativa. (ANDRADE, 1998, p. 39)

Mas, somente no final da década de 70, é que a Resolução de Problemas passou a ser discutida de forma ampla e fundamentada no mundo inteiro, formando-se um verdadeiro movimento em prol da resolução de problemas.

Nos Estados Unidos, por exemplo, em 1980, foi editada uma publicação do NCIM - *National Council of Teatchers of Mathematics – An Agenda* *for Action: Recommendations for school Mathematics of the 1980's*, convocando os interessados, pessoas e grupos, para em um esforço conjunto buscar uma melhor educação para todos.

Consoante os ensinamentos de Onuchic (1999, p.204), o documento trazia uma séria de recomendações e a primeira delas asseverava que resolver problemas deveria ser o foco da matemática escolar para os anos 80, destacando que o "desenvolvimento de problemas deveria dirigir os esforços dos educadores matemáticos por toda essa década que o desempenho em saber resolver problemas mediria a eficiência de um domínio pessoal e nacional da competência matemática". (ONUCHIC, 1999, p. 204).

Este documento estabelecia ainda que a resolução de problemas abarca uma grande quantidade de rotinas e lugares comuns, assim como funções não rotineiras consideradas essenciais na vida cotidiana dos cidadãos. Afinal, Resolução de Problemas resulta em aplicar a matemática a situações reais, às circunstâncias de suas próprias vidas, a atender a teoria e a prática de ciências atuais e emergentes e solucionar quesitos que amplificam as fronteiras da ciência matemática.

Frisa-se a eficácia da resolução de problemas requer um amplo repertório de conhecimento, não se restringindo às particularidades técnicas e aos conceitos, mas estendendo-se às relações entre eles e os princípios fundamentais que os unifica.

A matemática carece ser ensinada como matemática e não como um apetrecho a mercê dos seus campos de aplicação. É necessário uma atenção constante a sua essência, a seus usos e aplicações.

Nessa perspectiva, faz-se necessário citar as sábias copilações feitas por Onuchic (1999, p.205) a respeito das principais recomendações expressas no NCIM:

> O currículo matemático deveria ser organizado ao redor de resolução de problemas;
> A definição e a linguagem de resolução de problemas em matemática deveria ser desenvolvida e expandida de modo a incluir uma ampla gama de estratégias, processos e modos de apresentação que encerrassem o pleno potencial de aplicações matemáticas;
> Os professores de matemática deveriam criar ambientes de sala de aula onde a resolução de problemas pudesse prosperar;
> Materiais curriculares adequados ao ensino de resolução de problemas deveriam ser desenvolvidos para todos os níveis de escolaridade;

> Os programas de matemática nos anos 80 deveriam envolver os estudantes com resolução de problemas, apresentando aplicação em todos os níveis;
> Pesquisadores e agências de fomento à pesquisa deveriam priorizar nos anos 80, investigações em resoluções de problemas. (ONUCHIC, 1999, p. 205).

Na Inglaterra, também nos anos 80, a AIM - Association of Teachers of Mathematics, determinou que a habilidade em resolução de problemas fosse o alvo do ensino da matemática e que deveria substituir a aritmética elementar como tema principal nas classes elementares.

Segundo Fiorentino (1994, p. 189), no Brasil, “os ensinos relativos ao ensino da resolução de problemas só seriam iniciados de modo mais efetivo a partir da década de 80, esses estudos restringem-se, quase que absolutamente a trabalhos traduzidos em dissertações de Mestrado e teses de Doutorado”.

Schoeder e Lester (1989, p.31-34 apud ONUCHIC, 1999, p.204) demonstram três modos diferentes de abordar a resolução de problemas, a saber: ensinar sobre a resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas.

O docente que ensina sobre resolução de problemas procura ressaltar o modelo de resolução de problemas de Polya ou alguma variação dele. De acordo com a pesquisadora Redling (2011, p.28-29):

> Esse modelo descreve um conjunto de quatro fases interdependentes, que se propõe a resolver problemas matemáticos: compreender o problema; elaborar um plano; executar o plano, e finalmente retornar ao problema original, para avaliar a validade da solução encontrada.
> Sintetizando essas quatro fases, podemos descrevê-las de acordo com as ideias de Polya (1986), a saber, a primeira etapa está ligada à compreensão do problema, onde é muito importante fazer questionamentos, identificar a incógnita do problema e verificar quais são os dados apresentados; a segunda etapa envolve a construção de uma estratégia de resolução e necessita do estabelecimento de conexões entre os dados e a incógnita; a terceira etapa relaciona-se à execução da estratégia; e, por fim, a quarta etapa envolve a validação da solução, onde é feito o exame da solução obtida e a verificação dos resultados e argumentos utilizados. (REDLING, 2011, p.28 -29):

Já o segundo modo, de ensinar a resolver problemas, o docente se concentra na maneira como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada na solução de problemas comuns ou não. A aquisição de conhecimento é importante, mas a proposta essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-la.

O professor que ensina para resolver problemas está muito preocupado com a habilidade dos alunos em saber transferir o que eles aprenderam no contexto de um problema para outros. Um grande risco do uso desse aspecto é que ele pode levar a ver a Resolução de Problemas apenas como uma atividade que os alunos só podem realizar depois da introdução de um novo conceito ou depois de praticar certas habilidades.

E muitos a trataram como um ensino por repetição, em que o aluno era submetido a listas de problemas, semelhantes uns aos outros, através dos quais treinava uma determinada técnica ou estratégia de resolução. Se o aluno repetisse, nas avaliações, o que o professor havia feito, concluía-se que o aluno tinha aprendido.

Nos anos 90, a Resolução de problemas passa a ser vista como uma metodologia de ensino e torna-se tema das pesquisas e estudos. Tem-se então o terceiro modo de abordar a resolução de problemas de Schoeder e Lester, ou seja: ensinar matemática através da resolução de problemas.

Nessa concepção, os problemas servem para introduzir ou desenvolver conceitos de matemática. Eles são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática, mas também, como um primeiro passo para se fazer isso.

Assim, a Resolução de Problemas pode ser compreendida como uma metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação, que se inicia no momento em que o professor propõe ao aluno situações-problema, caracterizadas por investigação e exploração de novos conceitos. Redling (2011, p.32) enfatiza que ao utilizar essa metodologia, existe também a possibilidade de o aluno formular problemas tornando a matemática um conhecimento mais próximo desse educando. Nas palavras da autora:

> A expressão “ensino-aprendizagem” dentro dessa metodologia deve ter um significado muito importante, pois se espera que estes dois processos aconteçam simultaneamente, tendo o aluno como co-construtor do conhecimento e, a “avaliação” relaciona-se ao processo de ensino, visando à verificação da aprendizagem focada nos processos de Resolução de Problemas, e não nos resultados, mas sim na evolução dos alunos. (REDLING, 2011, p.33)

Onuchic (1999, p.207) observa que “embora na teoria as três concepções de ensinar resolução de problemas matemáticos possam ser separadas, na prática, elas se superpõem e acontecem em várias combinações e sequências".

3.3 Pesquisas em educação matemática no Brasil

Segundo Fiorentini (1994, p.8) um dos trabalhos pioneiros que discute e analisa a pesquisa educacional no Brasil é o de Aparecida Joly Gouveia, datado de 1971. Neste, ela afirma que a pesquisa neste país teria se iniciado por volta de 1938 com a criação do INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

De 1938 a 1971, Gouveia (1971, p.72) identificou três fases. A primeira, compreendida entre a década de 40 e o primeiro quinquênio de 50 foi caracterizada por trabalhos de temas psicopedagógicos como, por exemplo, estudos do desenvolvimento psicológico e processos de ensino. A segunda fase, iniciada por volta de 1956, foi marcada por pesquisas sob a ótica sociológica, tendo em vista a atenção dada às relações entre escola e sociedade. A partir de 1964, inicia-se a terceira fase marcada por temas econômicos, influenciada pela ascensão da Ditadura Militar.

No tocante aos estudos sobre a pesquisa brasileira em educação matemática, segundo Fiorentini (1994, p.79), os primeiros sinais de estudo e pesquisa surgem a partir de meados do século XX, quando se iniciou um processo de migração do campo para a cidade e sociedade foi se tornando cada vez mais urbana.

Ocorreu um movimento educacional na década de 20 que Nagle (1974, p.99) denominou de "entusiasmo pela educação e otimismo pedagógico". Segundo ele, o modelo de pedagógico adotado foi o da Escola Nova que ensejou as reformulações curriculares.

No âmbito da matemática, destacam-se os trabalhos de Euclides Roxo que em 1937 publicou sua principal obra "A matemática na educação secundária". Entretanto, não se pode assegurar que esse trabalho se originou de pesquisa em sentido estrito. Seu estudo apoiava-se mais em argumentos de autoridades ou trabalhos produzidos fora do país que em análise da realidade educacional brasileira. O seguinte trecho de sua obra confirma isso:

> O presente volume é a simples apresentação de muitas opiniões abalisadas (sic) sobre questões mais relevantes e de ordem mais geral, relativas ao ensino da matemática.
> (…)
> Não apresentamos nenhuma idéia (sic) original, nenhum ponto de vista pessoal.
> (…)
> Tratando-se de idéias (sic) fortemente inovadoras, quase diríamos revolucionárias, não nos julgamos com autoridade bastante para defendê-las com argumentos nossos e só ousamos apresentá-las sob o escudo de nomes de valor indiscutível". (Grifos nossos) (ROXO, 1937, p.6-7)

De acordo com Fiorentini (1994, p.82), autores como Ary Quintella, Manoel Jairo Bezerra, Munhoz Maheder, Irene Albuquerque, Malba, também publicaram na década de 40, livros didáticos e orientações metodológicas para o ensino da matemática secundária, mas não realizaram estudos sistemáticos sobre o processo de ensino/aprendizagem ou a prática escolar brasileira.

Percebe-se assim, que as pesquisas *stricto senso* antes de 1950 ficaram mais restritas ao nível da escola primária, investigando prioritariamente as habilidades cognitivas do aluno com aritmética e secundariamente, a utilidade social deste ensino.

Após 1950, os estudos relativos ao ensino e à aprendizagem da matemática no Brasil, recebeu um novo norte, e, decorrência, principalmente, das realizações dos Congressos Brasileiros de Ensino de Matemática, no período de 1955 a 1966, e a criação do CRPE - Centros Regionais de Pesquisas Educacionais.

Os ensaios apresentados em tais congressos, em sua maioria, tratavam da atualização curricular do ensino da matemática na escola primária e secundária ou de tópicos específicos da matemática escolar sob o olhar da matemática moderna.

Infere-se que havia uma discussão restrita sobre questão. Não que não houvesse uma produção nacional nesse sentido, mas era pequena e normalmente, restrita a grupos pequenos. Faltava um amplo debate sobre o assunto.

Ademais, a Matemática não era visto como um campo próprio e diferenciado de estudo dentro da Educação Brasileira. O ramo de pesquisa não possuía uma existência claramente configurada.

Entretanto, a realização dos congressos, o intercâmbio com educadores matemáticos internacionais contribuiu para que na década de 70, os trabalhos proliferassem nessa área.

A implantação dos programas de pós-graduação no país fomentou as atividades de pesquisa.

3.4 Panorama Brasileiro do ensino da matemática por intermédio da Resolução de Problemas

Segundo o PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (1999, p.40) quanto mais se implementa o processo de globalização, mais a Educação deve se preocupar com o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, e trabalhar cooperativamente. Assim cita-se:

> Ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. (Brasil, 1999, p.40)

O PCN preocupa ainda com a relação entre Matemática e tecnologia, ressaltando que embora seja comum, quando há referência às tecnologias ligadas à Matemática, tomar por base a informática e o uso de calculadoras, estes instrumentos, não obstante sua importância, de maneira alguma constituem o centro da questão.

Afinal, o impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do operar máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional.

O impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento.

Desta forma, nas palavras do supracitado documento aprender Matemática deve ser:

> (...) mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.
> Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (Brasil, 1998, p.41-42)

Para Rodrigues e Magalhães (2011, p.3) “a atividade de resolver problemas está presente na vida das pessoas, exigindo soluções que muitas vezes requerem estratégias de enfrentamento. O aprendizado de estratégias auxilia o aluno a enfrentar novas situações em outras áreas do conhecimento”.

Desta maneira, é imprescindível que os professores compreendam como trabalhar esta metodologia, com o intuito de desenvolver no discente a capacidade de resolver situações desafiadoras, interagir entre os pares, desenvolver a comunicação, a criatividade e o senso crítico.

Dante (1998, p.22), afirma que embora tão valorizada, a resolução de problemas é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados na sala de aula. É muito comum os alunos saberem efetuar os algoritmos e não conseguirem resolver um problema que envolva um ou mais desses algoritmos. Isso se deve à maneira com que os problemas matemáticos são trabalhados na sala de aula e apresentados nos livros didáticos, muitas vezes apenas como exercícios de fixação dos conteúdos trabalhados.

Rodrigues e Magalhães (2011, p.3) destaca que um problema pode envolver muito mais do que a simples resolução das operações. Deve, sim, possibilitar ao aluno desenvolver estratégias, buscar vários caminhos para solucioná-lo à sua maneira, de acordo com sua realidade e raciocínio.

Dante defende que um bom problema deve ser capaz de instigar o aluno a resolvê-lo. Deve ser interessante, criativo, desenvolver seu pensamento e desafiá-lo constantemente, pois ao contrário ele ficará desmotivado.

Ele acredita que há uma diferenciação entre exercício e problema. Exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo e problema é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não temos previamente nenhum algoritmo que garanta a solução. A resolução de um problema exige certa dose de iniciativa e criatividade, aliada ao conhecimento de algumas estratégias.

De acordo com Soares e Pinto (2001), tanto os exercícios quantos os problemas têm seu valor, cabe ao professor manter um equilíbrio dos mesmos durante o ano letivo.

Dante (1998, p.22) acredita que os objetivos da resolução de problemas são:

> Fazer o aluno pensar produtivamente;
> Desenvolver o raciocínio do aluno;
> Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
> Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática;
> Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras;
> Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
> Dar uma boa base matemática às pessoas. (DANTE, 1998, p.22)

Implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula.

Segundo Onuchic e Allevato (2011, p.82) o docente tem que preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir.

Copilando as pesquisas já registradas segundo Onuchic e Allevato (2011, p.82), é possível destacar:

> Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido.
> Resolução de problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
> Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam.
> Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
> Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
> A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos. ONUCHIC e ALLEVATO (2011, p.82)

Estas mesmas autoras advertem que não há formas rígidas de se trabalhar através da resolução de problemas em sala de aula de Matemática. Porém, visando a uma forma de ajudar os professores a empregar essa metodologia em suas aulas, apresenta-se um roteiro para implementação de um trabalho através da resolução de problemas. (ONUCHIC e ALLEVATO (2011, p.83)

O roteiro basicamente consiste em:

Fase da preparação do problema: Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. Segundo Onuchic e Allevato (2011, p.83) o recomendável é que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

A segunda fase será da leitura: Cada aluno receberá uma cópia do problema e deverá fazer sua leitura.

Posteriormente, passa-se a fase da leitura em conjunto, na qual serão formados grupos e realizada nova leitura do problema, agora nos grupos.

Caso haja dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.

Passa-se então a fase da Resolução do problema: A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo.

Onuchic e Allevato (2011, p.84) destaca que considerando os alunos como co-construtores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

Registra-se, que segundo este roteiro, o professor deve observar e incentivar e, ainda, como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. Neste sentido, cita-se:

> O Professor deve incentivar os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p.84)

A próxima fase é o do registro das resoluções na lousa: Alguns representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

Faz-se então a fase da Plenária: Todos os alunos são convidados a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos.

Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

Por fim, passa-se a fase da formalização do conteúdo: o professor registra na lousa uma apresentação formal, em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Frisa-se que, nesta metodologia, os problemas são propostos aos discentes antes de lhes ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é almejado pelo docente.

O objetivo central do ensino é tornar o aluno capaz de compreender. A resolução de problemas concede ao aluno um instrumento poderoso de gerar o conhecimento, em vez de, simplesmente, recebê-lo de forma imposta.

Entretanto, é preciso preocupar com os meios, técnicas e instrumentos a serem utilizados para despertar o interesse do aluno. Em um era que se vive sendo bombardeados de informações por todos os meios tecnológicos, é preciso utilizar esta tecnologia a favor do ensino.

3.5 TECNOLOGIA E APRENDIZAGEM

A palavra tecnologia provém da junção dos termos gregos t*echne* (arte/técnica) + *logos* (tratado/ofício). Seu equivalente em latim mais próximo é *ars* ou *artis*, ambos significando “arte”, ou seja, a habilidade adquirida a partir de um estudo ou prática.

Pinto (2005, p.209), afirma que existem, pelo menos, quatro acepções para o termo tecnologia. O primeiro desse sentido diz respeito as habilidades do fazer, as artes, as profissões, os modos de produzir alguma. Destaca-se o papel do ser humano nesse processo, a técnica é definida como ato humano.

O segundo significado do termo remete à simples técnica, sinônimo do saber fazer, ou ainda, “know how” (p. 219) é o mais frequente e usual, essa equivalência provoca perigosos enganos, contudo nada de ingenuidade ao contrário disso, está carregada de nocividade social e política. A terceira significação equivale à união de todas, ou seja, o conjunto das tecnologias. Já a quarta trata da tecnologia como ideologização da tecnologia o que se aproxima do que é conhecido como tecnocentrismo, neste conceito, fica estabelecida certa relação entre o estado de desenvolvimento das técnicas e a elevação delas à ideologia social.

Apesar desta discussão léxica acerca da definição de tecnologia e da palavra, no senso comum, está fortemente atrelada a aparelhos eletrônicos ela se refere a qualquer ferramenta elaborada pelo homem. Segundo Kenski (2007, p.23):

> Existem outras tecnologias que não estão ligadas diretamente a equipamentos e que são muito utilizadas pela raça humana desde o início da civilização. A linguagem, por exemplo, é um tipo específico de tecnologia que não necessariamente se apresenta através de máquinas e equipamentos. (KENSKI, 2007, p.23).

Desta forma, percebe-se que sociedade já faz o uso das tecnologias há séculos, destacando a invenção da escrita, a descoberta da imprensa, a fotografia, o cinema, o rádio, a televisão, o vídeo e o computador.

Mas somente no século XXI é que a sociedade pôde ser caracterizada pelo uso maçante da presença das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) em diversos setores, inclusive no campo da educação. É valido dizer que desde o final do século XX com o movimento da globalização e os avanços nas áreas de informática e telecomunicações já se havia uma disseminação das TICs, mas a sua consolidação se deu mesmo no século seguinte.

Segundo Demo (1994, p.23). Este entrosamento entre tecnologia e educação é fundamental. “pois a educação constitui-se na mais eficaz instrumentalização para a cidadania”. Tanto que, atualmente, a falta de acesso às tecnologias gera um fator de discriminação e exclusão social que se conceitua como um “analfabetismo” tecnológico.

Neste sentido, Censi e Santinello (2015, p.2) afirmam que é necessária a inclusão digital e a desmistificação na escola pública para garantir a apropriação dessas tecnologias, permitindo à escola a autonomia para formar cidadãos críticos, com igualdade de oportunidades. Mas, alertam que:

> A implementação dos equipamentos de informática por si só não contribui automaticamente para que essa igualdade de oportunidades seja efetivada. São necessárias condições para que as escolas públicas avancem no sentido de promover uma educação de qualidade, em que as TICs contribuam com este desafio. O primeiro passo é a capacitação dos profissionais da educação e, sobretudo, a formação do professor como condição essencial de contribuição para a qualidade do processo ensino-aprendizagem, subsidiando metodologias significativas em sala de aula (CENSI e SANTINELLO, 2015, p.2).

Percebe-se assim que a inserção das novas tecnologias nas escolas é um grande desafio para mudanças educativas, entretanto, a mera presença de tecnologias nas escolas e salas de aula não significa, por si mesma, nenhuma mudança pedagógica, o computador, por exemplo, não trouxe mudanças radicais para o ensino, como, outrora, se chegou a cogitar.

Moran (2005, p. 12) afirma que a apropriação das tecnologias pelas escolas passa por três etapas, a saber:

> Na primeira, as tecnologias são utilizadas para melhorar o que já se vinha fazendo (melhorar o desempenho e a gestão, automatizar processos, diminuir custos). Na segunda etapa, a escola insere parcialmente as tecnologias no projeto educacional.
> (…)
> Desenvolve alguns projetos, há atividades no laboratório de informática, mas mantém intocados estrutura de aulas, disciplinas e horários. Na terceira, que começa atualmente, como o amadurecimento de sua implantação e o avanço da integração das tecnologias, as universidades e escolas repensam seu projeto pedagógico, seu plano estratégico, e introduzem mudanças significativas. (MORAN, 2005, p. 12)

Assim, a utilizações das TICs na sala de aula só serão úteis quando o professor tiver condições de interpretar, refletir e dominar criticamente a tecnologia. Seguindo esta linha de pensamento, Bettega (2004, p.14) explica que:

> Para formar esse indivíduo, o professor é a figura mais importante no processo ensino-aprendizagem. Além de especialista em uma área do conhecimento, o professor precisa ter uma visão de conjunto da sociedade e, também noção de como se desenvolvem os processos mentais vivenciados pelo estudante. Por isso, ter o domínio de técnicas inovadoras e fazer a atualização contínua de conhecimentos deveria fazer parte de sua rotina de trabalho (BETTEGA, 2004, p.14).

Moran (2005, p.2) explica que o uso das TICs nas instituições de ensino exige do docente um novo perfil, novas características, baseado no conhecimento, manuseio e aplicabilidade destas no processo de ensino-aprendizagem. É preciso “um educador como mediador e organizador de processos e não como repetidor de informações, que seja capaz de transformar o espaço escolar, modificar e inovar o processo ensino-aprendizagem” (MORAN, 2005, p.2)

O professor precisa ter consciência que deve basear sua prática em uma teoria, para melhor poder intervir no processo educativo, é necessário analisar a sua prática e de outros professores, participar de encontros para refletir e discutir as diversas teorias, e buscar soluções para os problemas postos pela educação, usando de todos os recursos disponíveis para implementá-las.

3.6 DO USO DAS TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Deixou-se claro que as TICs, se empregadas de maneira criativa e interativa pelos professores no processo de ensino e aprendizagem, tornam-se ferramentas/recursos indispensáveis, contribuindo para a construção do conhecimento.

Para existir possibilidade de mudança na prática pedagógica, o professor necessita abdicar de paradigmas, nos quais sempre se apoiou, rompendo com concepções obsoletas, buscando materiais inovadores, com a finalidade de organizar e planejar aulas mais atrativas e criativas.

Ademais, o processo de ensino e aprendizagem deve manter relação direta com o contexto social em que os educandos estão inseridos. Rörig e Backes enfatizam que:

> Ao estruturar sua proposta pedagógica, utilizando tecnologia digital, o professor precisa estabelecer vínculos com os alunos, conhecer seus interesses, saber o que o aluno já sabe, o que o aluno não sabe e o que ele gostaria de saber. Motivar o aluno a fazer parte da proposta pedagógica, colocando-o "a par" sobre o que será abordado e convidando-o a contribuir (RÖRIG e BACKES, 2011, p. 45).

Todo professor deve apresentar a capacidade de reinvenção, que veja os desafios como uma oportunidade de crescimento e de mudança, em vez de simplesmente aceitá-los como a determinação de um fracasso no exercício da profissão.

Mas o docente da área de matemática deve redobrar seus esforços, tendo em vista que esta disciplina, por si só, já causa uma estranheza ou repulsa em boa parte dos alunos, que a vêem como um conhecimento inacessível.

Sabe-se que as instituições de ensino superior do país nem sempre valoriza a parte didática dos cursos de matemática no país. É preciso assim que haja uma reorganização estrutural do sistema educacional. As TICs devem ser conhecidas, estudadas, analisadas e pesquisadas constantemente para que possam assumir seu papel de apoio nas atividades educacionais, e assim maximizar suas possibilidades deste campo.

Segundo Debald (2007, p. 87), o docente, por sua vez, tem que ter claros seus objetivos e metas de ensino para que possa utilizar as ferramentas disponíveis na implementação de um ambiente de aprendizagem não apenas rico e agradável, mas que seja cooperativo, que favoreça o desenvolvimento da autonomia, interatividade, cooperação entre todos os atores do processo de aprendizagem.

Araújo e Yoshida (2010, p.3) complementam que:

> O educador do século XXI deve ser um profissional da educação que elabora com criatividade os conhecimentos teóricos e críticos sobre a realidade, tendo o mesmo que centrar-se numa prática pedagógica de êxito, com uma aprendizagem satisfatória e significativa, pois as constantes mudanças ocorridas na sociedade exigem uma nova postura do professor, bem como um repensar crítico sobre a educação. Portanto, torna-se necessário buscar novos caminhos, novos projetos, emergentes das necessidades e interesses dos principais responsáveis pela educação, é necessário transformar a realidade escolar, utilizando as novas TICs como recursos para aprimorar e motivar a busca do conhecimento (ARAÚJO e YOSHIDA, 2010, p. 3).

Se por um lado, há uma rejeição por parte dos alunos quanto ao aprendizado matemático devido ao grande número de reprovações e as baixas notas nas avaliações que analisam o sistema público no país, por outro lado, há que se observar que a sociedade atual, exige cada dia mais que o conhecimento da matemática seja amplamente difundido.

Como bem lembra Miguel (2008, p. 375):

> Uma análise atenta do fazer pedagógico cotidiano revelará que as crianças que chegam à escola normalmente gostam de Matemática. Entretanto, não será difícil constatar também que esse gosto pela Matemática decresce proporcionalmente ao avanço dos alunos e dos diversos ciclos do sistema de ensino, processo que culmina com o desenvolvimento de um sentimento de aversão, apatia e incapacidade diante da Matemática (MIGUEL, 2008, p.375).

Muitos alunos da Educação Básica já trabalham como vendedores, feirantes, comerciantes, técnicos em geral, mas vivem às voltas com a disciplina quando trabalhada na escola. Infelizmente, há diversos fatores que distanciam a escola da vida. Miguel (2008, p.375) explica que:

> As diversas tentativas de explicação do problema transitam pelas ideias (SIC) de formação inadequada do professor, condições inadequadas de trabalho no magistério, dificuldades de aprendizagem dos alunos, desvalorização da escola, currículos e programas de ensino obsoletos, etc., e, via de regra, cada aspecto dessa problemática merece a devida consideração e cumpre um papel determinante para o desempenho das crianças nessa área do conhecimento (MIGUEL, 2008, p.375).

É inegável a existência de algumas problemáticas constantes na educação matemática atual, uma delas consiste na falta de qualidade na formação dos professores, no que diz respeito ao uso das mídias matemáticas. A necessidade de profissionais gabaritados nesse sentido dentro das escolas da Educação Básica tem levado o processo de ensino da matemática ao retrocesso.

O desconhecimento das mídias matemáticas por parte do professor e do aluno configura-se como um prejuízo enorme para a escola, bem como para o próprio trabalho do professor em sala de aula.

Alvarenga (2011, p.3) argumenta que:

> De posse dos recursos tecnológicos, os estudantes argumentam e conjecturam sobre as atividades com as quais se envolvem na experimentação. Atualmente os dispositivos de mídias presentes na maioria das escolas, possibilitam ao educador inovar em certos aspectos a prática docente, e ainda oferecem novas ferramentas para o ensino, por exemplo, aulas em slides, filmes, softwares matemáticos, etc. O computador ao ser utilizado durante as aulas se torna uma ferramenta de mediação pedagógica, pois além de motivar o aluno, este se depara com situações que o desafia a envidar esforços na busca de uma solução, permitindo também a melhor visualização dos problemas e possibilitando análises e críticas durante sua resolução (ALVARENGA 2011, p. 354).

Sabe-se que o computador, bem como o aparelho celular, são dispositivos que oferecem inúmeros *softwares* que podem auxiliar no ensino de matemática, dando ao aluno e professor, maiores possibilidades na construção do conhecimento. BORBA (2010, p. 3) afirma que:

> Os softwares educacionais têm a capacidade de realçar o componente visual a matemática atribuindo um papel importante à visualização na educação matemática, pois ela alcança uma nova dimensão se for considerado o ambiente de aprendizagem com computadores como um particular coletivo pensante, onde professores, alunos, mídia e conteúdos matemáticos residem juntos e, mais que isso, pensam juntos. Neste coletivo a mídia adquire outro status, isto é, vai além de mostrar uma imagem. Mais especificamente, é possível dizer que o software torna-se ator no processo de fazer matemática (BORBA 2010, p. 3).

O desenvolvimento de um processo onde se utilizam softwares matemáticos em sala de aula, possibilita aos alunos a criarem conjecturas, validá-las e levantar subsídios para a elaboração de uma demonstração matemática. Ademais os softwares matemáticos, estabelecem inúmeras vantagens para o aprendizado do aluno, provocando nele interesse para o seu aprendizado.

4. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Neste capítulo será abordada a parte teórica de Sistemas Lineares e para sua construção foram usadas as seguintes referências: Callioli, Domingues e Costa (1990); Barroso, Barroso, Campos, Carvalho e Maia (1987); Lipschutz e Lipson (2004) e Poole (2004).

4.1 Equações lineares e soluções

Uma equação linear nas incógnitas, x_2, x_3, ..., x_n é uma equação que pode ser escrita na seguinte forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ em que a_1, a_2, ... , a_n e b são constantes. Dizemos que a constante, a_k é o coeficiente de x_k e b é o termo constante da equação.

Uma solução da equação linear é uma lista de valores, s_1, s_2,... , s_n tais que quando substituímos $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, $x_3 = s_3$, ..., $x_n = s_n$ tal que seja verdadeira a afirmação seguinte: $a_1s_1 + a_2s_2 + ... + a_ns_n = b$. Dizemos nesse caso, que a equação é satisfeita.

Nota-se que implicitamente estamos supondo que há uma ordenação nas incógnitas. Para evitar o uso de índices, sem perca de generalidade, costumamos usar x, y para duas incógnitas, x, y, z para três incógnitas e x, y, z, t para quatro incógnitas, que sempre ordenamos dessa forma. Exemplo: Considere a equação linear com quatro incógnitas x, y, z, t a seguir: $x + 2y - 3z + t = 8$, vemos que $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ e $t = 6$ é uma solução da equação, isto é, $1 + 2(2) - 3(1) + 6 = 8$ ou $1 + 4 - 3 + 6 = 8$ ou $8 = 8$.

No entanto, $x = 2$, $y = 1$, $z = -3$ e $t = -4$ não é uma solução, pois, quando substituímos esses valores, não obtemos uma afirmativa verdadeira. Observe: $2 + 2(1) - 3(-3) + (-4) = 8$ ou $2 + 2 + 9 - 4 = 8$ ou $9 = 8$

4.1.1 Equações lineares degeneradas

Uma equação linear é degenerada se todos seus coeficientes são nulos, $0x_1 + \ 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$;

A solução de uma dessas equações depende apenas do valor da constante b; Especificamente:

a) Se $b \ \neq \ 0$ então a equação não possui solução.

b) Se $b = \ 0$ então infinitos valores é solução.

4.2 Sistemas de equações lineares

Um sistema de equações lineares é uma lista de equações com as mesmas incógnitas. Em particular, um sistema de m equações lineares e n incógnitas pode ser escrito na seguinte forma:

$$S_k \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots + \ a_{1n}x_n \ = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots + \ a_{2n}x_n \ = b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots + \ a_{mn}x_n \ = b_m \end{cases}$$

onde os a_{ij} e os b_{i} são constantes.

Sob a forma matricial o sistema pode ser escrito usando os coeficientes e termos independentes, Na forma $AX = \ B$ Neste caso, A é chamada matriz aumentada ou matriz completa do sistema.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}; \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } B \ = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

O sistema é chamado de sistema m x n (lê-se m por n). Ele é chamado de sistema quadrado se $m \ = \ n,$ ou seja, se a quantidade m de equações é igual a quantidade n de incógnitas.

Nesse trabalho foram usados problemas que podem ser representados por sistemas quadrados do tipo 2 x 2 e 3 x 3.

Uma solução (ou solução particular) do sistema é uma lista de valores para as incógnitas de modo que é solução de cada equação do sistema.

O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado de conjunto solução ou solução geral do sistema.

Um sistema linear possui obrigatoriamente (I) uma solução, (II) nenhuma solução, (III) infinitas soluções. São classificados respectivamente como: Sistema Possível e Determinado (SPD); Sistema Impossível ou Incompatível (SI); Sistema Possível e Indeterminado (SPI).

Para discutir um sistema linear, ou seja, efetuar um estudo visando classificá-lo segundo a definição anterior é necessário resolver o sistema, isto é, determinar o conjunto dessas soluções.

Quando consideramos métodos para resolver sistemas de equações lineares, é importante distinguir entre sistemas grandes, que precisam ser resolvidos por computador, e sistemas pequenos, que podem ser resolvidos a mão. Por exemplo, há muitas aplicações que levam a sistemas em milhares e até milhões de incógnitas.

Os sistemas grandes requerem técnicas especiais para tratar de problemas de tamanho de memória, erros de arredondamento, tempo de solução e assim por diante. Tais técnicas são estudadas na área de análise numérica e serão apenas mencionadas neste trabalho. São também conhecidos pelos termos: métodos diretos e métodos iterativos, contudo não se pode garantir que método é o mais eficiente. É necessário o estabelecimento de certos critérios.

Dado o caráter introdutório desse trabalho e usando critérios bem gerais, optaremos pelo método direto de escalonamento conhecido como Eliminação de Gauss, pois esses resolvem satisfatoriamente os sistemas apresentados nesse trabalho.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado um dos três maiores matemáticos de todos os tempos, juntamente com Arquimedes e Newton. É frequentemente chamado de “príncipe dos matemáticos”. Conta-se que com três anos de idade ele corrigiu um erro de cálculo feito por seu pai para a folha de pagamento da companhia. Fez contribuições em praticamente todos os ramos da matemática, bem como a estatística, física, astronomia e agrimensura.

O método de eliminação de Gauss era conhecido pelos chineses no terceiro século a.C., mas devido sua redescoberta em um artigo no qual ele resolveu um sistema de equações lineares para descrever a orbita de um asteroide ficou assim conhecido.

4.2.1 Sistemas Escalonados

A palavra escalonar origina-se da palavra latina "*scala*", que significa "escada" ou "degraus". Escalonar um sistema, ou uma matriz, é dar a ela o formato de escada.

Considere um sistema linear de m equações com n incógnitas que tem o seguinte aspecto:

$$S_k = \begin{cases} a_{11}x_1 \; + \; a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \; b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{mn}x_n = \; b_n \end{cases}$$

Este é um sistema escalonado, onde o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação é maior do que na precedente. Observe um exemplo de um sistema escalonado:

$$S = \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ \quad -2y - z = \; -7 \\ \qquad\quad 5z = 15 \end{cases}$$

Com as substituições retroativas, tem-se (1, 2, 3) sua única solução.

Alguns autores consideram como sistemas escalonados um sistema um pouco diferente do apresentado acima, exigindo que os pivôs sejam iguais ao número 1. Entretanto, neste trabalho usaremos a definição de sistema escalonado S_k apresentado acima.

4.2.2 Operações elementares e sistemas equivalentes

Denominam-se operações elementares as seguintes operações sobre as equações de um sistema linear:

a) Trocar a ordem de duas equações do sistema;

b) Multiplicar uma equação do sistema por uma constante não nula;

c) Adicionar duas equações do sistema.

Essas operações podem ser aplicadas na forma matricial, correspondem as seguintes operações nas linhas da matriz aumentada.

a) Trocar a ordem de duas linhas da matriz.

b) Multiplicar uma linha da matriz por uma constante não nula.

c) Adicionar duas linhas da matriz.

Dois sistemas S_1 e S_2 serão **equivalentes** se S_2 puder ser obtido de S_1 através de operações elementares. Convém frisar que toda solução e S_2 é solução de S_1; Em particular, se S_2 é incompatível (SI) o mesmo acontece com S_1.

4.3 Escalonamento de Sistemas Lineares pela Eliminação de Gauss

A solução de um sistema pode ser obtida pelo processo de escalonamento no qual reduziremos o sistema de equações não degeneradas a um sistema equivalente no qual o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação é maior do que na precedente.

O processo de escalonamento em sistemas genéricos é conhecido como **Eliminação de Gauss.** Ele se divide em duas partes, a saber:

Eliminação direta: Uma redução passo a passo do sistema levando ou a uma equação degenerada sem solução, isto é, indica que o sistema não tem solução ou a um sistema equivalente mais simples na forma escalonada.

Substituição retroativa: Usa substituições para determinar a solução do sistema mais simples. Neste caso, é preciso isolar uma incógnita de forma que a equação resultante deste processo possa ser substituída nas equações anteriores e assim solucionar o sistema.

Para aplicar a parte da eliminação direta de um sistema de equações lineares do tipo m x n, determine a primeira incógnita do sistema com coeficientes não nulo (que agora obrigatoriamente é x_1).

Se necessário, troque as equações de posição para que tenhamos $a_{11} \neq 0$. Em seguida use a_{11} como pivô para eliminar x_1 de todas as equações abaixo da primeira. Repita o processo para cada novo sistema "menor" formado pelas novas equações, retirando-se a primeira equação.

Ressalta-se que se alguma das novas equações tem a forma $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$ com $b \neq 0$ então o sistema é impossível. Pode parar. No caso $b = 0$ então retire a linha do sistema.

Vamos entender esse processo usando o exemplo do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = 6 & L_1 \\ 2x - 4y - 3z = 8 & L_2 \\ -3x + 6y + 8z = -5 & L_3 \end{cases}$$

Primeiro, usaremos o coeficiente 1 de x na primeira equação, L_1, como pivô para eliminarmos x da segunda e terceira equações, L_2 e L_3. Isso é feito assim:

a) Multiplique L_1, por -2 e some esse resultado a L_2. Isto é, "Substitua L_2 por $-2L_1 + L_2$".

b) Multiplique L_1, por 3 e some esse resultado a L_3. Isto é, "Substitua L_3 por $3L_1 + L_3$".

Assim o sistema original é substituído pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = 6 & L_1 \\ 2y + z = -4 & L'_2 \\ -3y + 2z = 13 & L'_3 \end{cases}$$

Agora usaremos o coeficiente 2 de y na nova equação, que notaremos como L'_2, como pivô para eliminar y da L'_3. Isso é feito assim:

c) Multiplique L'_2 por $\frac{3}{2}$ e some esse resultado a L'_3; ou substitua L'_3 por $3L'_2 + 2L'_3$ para evitar o uso de frações. Assim, o sistema original é substituído pelo sistema abaixo:

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = 6 & L_1 \\ 2y + z = -4 & L'_2 \\ 7z = 14 & L''_3 \end{cases}$$

Com o uso das substituições retroativas a solução do sistema escalonado e, consequentemente, do sistema original é:

$x = 1,\ y = -3,\ z = 2$ ou denotamos $s = \{(1, -3, 2)\}$.

Esse processo pode ser utilizado de forma análoga, quando o mesmo estiver escrito na forma matricial.

Outros processos diretos como a eliminação de Gauss-Jordan que é um refinamento do método de Eliminação de Gauss servem para simplificar bastante a fase de substituições retroativas e é particularmente útil, quando os cálculos estão sendo feitos a mão em um sistema com infinitas soluções.

Normalmente, os processos acima mencionados levam a soluções exatas em muitos casos, mas estão sujeitos a erros devidos aos arredondamentos e outros fatores. Para solucionar melhor esse problema existem os processos Iterativos como, por exemplo, o Método de Jacobi e Gauss-Seidel que são uteis para sistemas grandes ou que contém muitos elementos nulos e muitos arredondamentos, porém, não serão aprofundados nesse trabalho, pois usaremos Sistemas de Equações Lineares "pequenos" conforme mencionado anteriormente.

Outro método muito apresentado nos livros de Ensino Médio para solucionar sistemas quadrados, possíveis e "pequenos" é a regra de Cramer. Contudo, ele só pode ser usado nos sistemas lineares quadrados (nxn) cuja matriz dos coeficientes é inversível. Contudo, convém notar que esse método quase sempre é inviável em função do tempo de computação.

4.4 Interpretação Geométrica de um Sistema Linear 2x2

Considere um sistema de duas equações lineares não degeneradas e duas incógnitas que pode ser colocado na forma padrão, a seguir descrita:

$$S_k = \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Como as equações não são degeneradas então a_1 e b_1 não são nulos, nem a_2 b_2. Num referencial cartesiano essas representam retas. Assim, em termos gráficos, resolver um sistema linear de duas equações e duas variáveis equivale a encontrar as posições relativas das retas que representam essas equações. Então deverá ocorrer exatamente uma das seguintes situações:

a) As retas são concorrentes.

b) As retas são paralelas distintas.

c) As retas são coincidentes

Como visto anteriormente, um sistema linear pode ser classificado em: Possível Determinado; Impossível ou Possível Indeterminado. E os três casos podem ser interpretados geometricamente como:

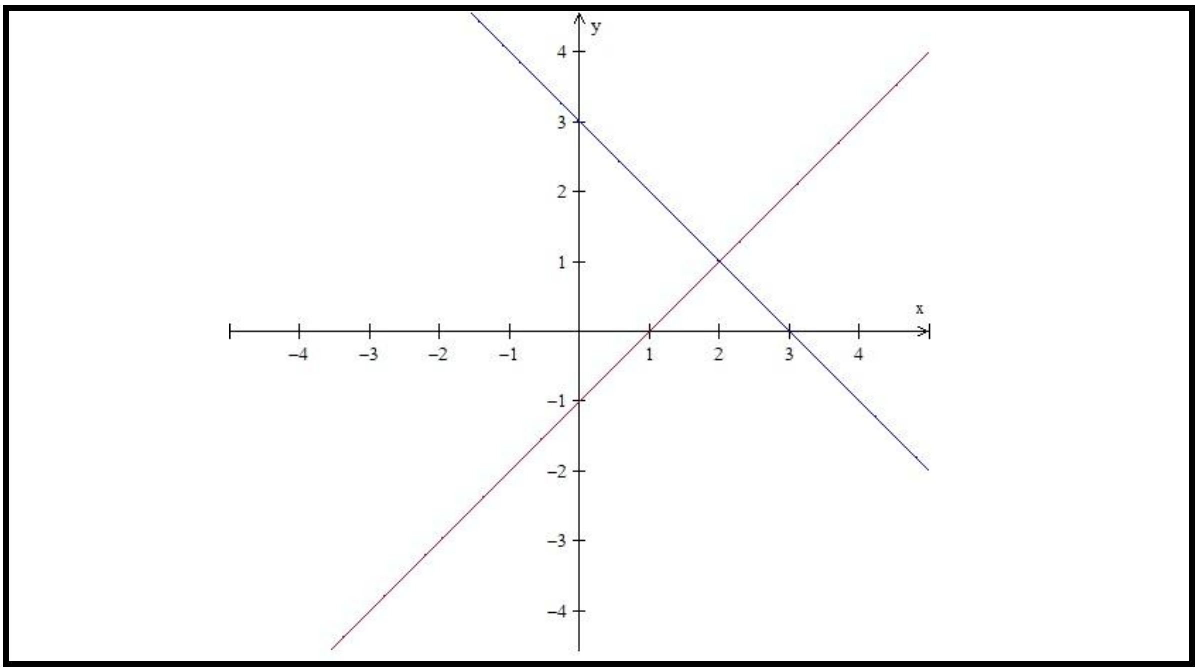
Sistema possível e determinado: Nesse caso as duas retas se intersectam em um único ponto, ou seja, as retas são concorrentes. Isso ocorre se as retas possuem inclinações distintas ou, de mesma forma, se os coeficientes de x e y não são proporcionais.

Exemplo: a) Interprete geometricamente o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Usando o método de escalonamento concluímos rapidamente que $x = 2$ e $y = 1$ é a única solução desse sistema. O fato de ser a única solução pode ser confirmado observando a Figura 3 :

Figura 3: Interpretação Geométrica do Sistema Possível e Determinado



Fonte: Próprio autor (2018)

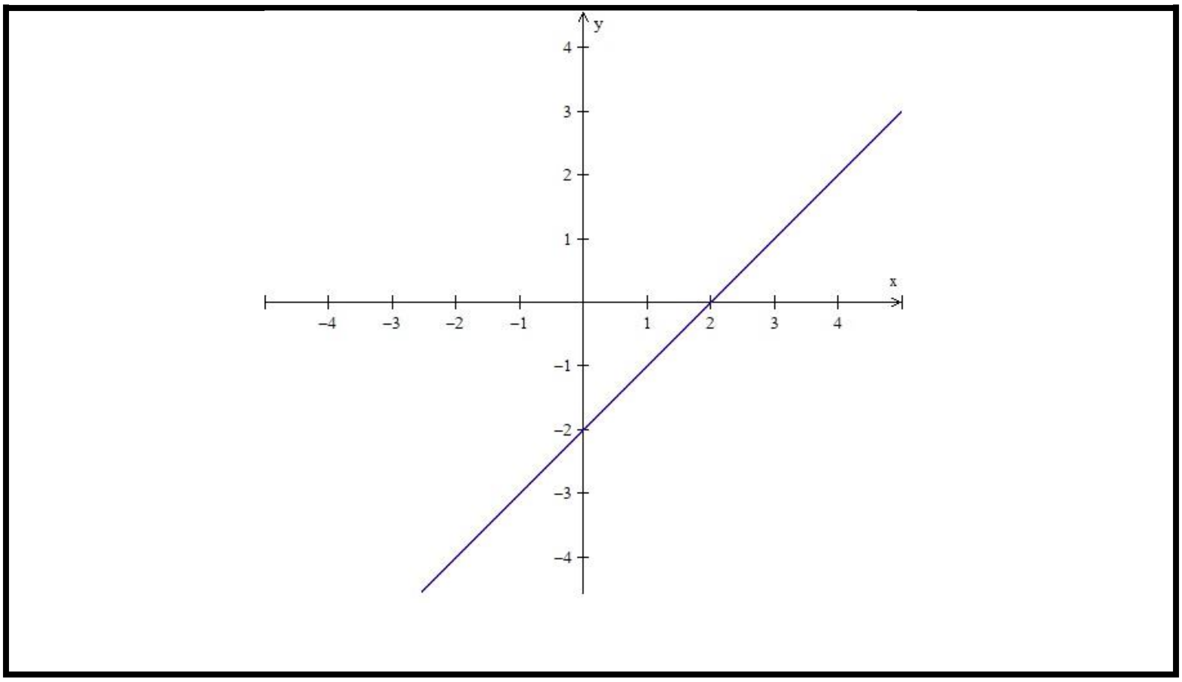
Sistema possível e indeterminado: Nesse caso as duas retas se intersectam em todos os pontos, ou seja, as retas são coincidentes. Isso ocorre se as retas possuem a mesma inclinação e cruzam o eixo y no mesmo ponto ou, de modo equivalente, se os coeficientes e constantes são proporcionais.

Exemplo: b) Interprete geometricamente o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

Usando o método de escalonamento concluímos rapidamente que geramos uma equação degenerada com $b = 0$. Como vimos anteriormente essa equação possui infinitas soluções, consequentemente o sistema terá infinitas soluções. Geometricamente esse fato pode ser confirmado observando a Figura 4:

Figura 4: Interpretação Geométrica do Sistema Possível e Indeterminado



Fonte: Próprio autor (2018)

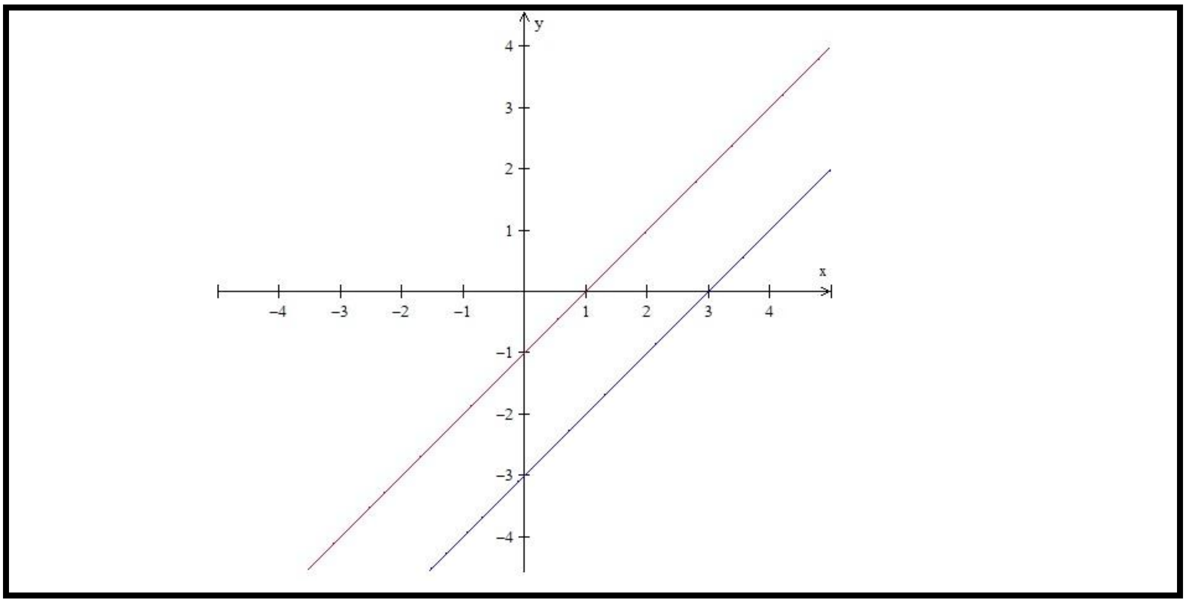
Sistema impossível: Nesse caso as duas retas são paralelas e distintas. Isso ocorre se as retas possuem a mesma inclinação, mas cruzam o eixo y em pontos distintos, ou seja, se os coeficientes são proporcionais e as constantes não são proporcionais.

Exemplo: c) Interprete geometricamente o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Usando o método de escalonamento concluímos rapidamente que geramos uma equação degenerada com $b \neq 0$. Como vimos anteriormente essa equação não possui solução, consequentemente o sistema não terá solução. Geometricamente esse fato pode ser confirmado observando a Figura 5:

Figura 5: Interpretação Geométrica do Sistema Impossível



Fonte: Próprio autor (2018)

5. DO RELATO DA PESQUISA: UM SALTO DA TEORIA PARA APLICAÇÃO PRÁTICA A PARTIR DE TRÊS MOMENTOS

Tendo em vista a dificuldade que os alunos apresentam na disciplina de Matemática, em especial na etapa do Ensino Médio, o presente trabalho almeja averiguar se o software GeoGebra potencializa a aprendizagem no conteúdo de sistemas lineares na perspectiva da resolução de problemas.

A presente pesquisa foi realizada com 10 dez alunos das turmas do primeiro ano do ensino médio com oito encontros no contra turno com duração em média de 60 (sessenta) minutos cada encontro.

Como a pesquisadora estava atuando em turmas do ensino fundamental, os mesmos foram convidados, de forma aleatória. Após a aceitação dos alunos e das famílias através dos termos de assentimento e consentimento iniciaram-se os encontros.

A escolha do tema foi influenciada por vivências de sala de aula, na qual a pesquisadora percebia a grande dificuldade que os alunos apresentavam na resolução de sistemas lineares com erros de cálculo, apresentando-se inseguros em relação à compreensão do método de resolução.

5.1 Primeiro momento: A Formulação do Diagnóstico

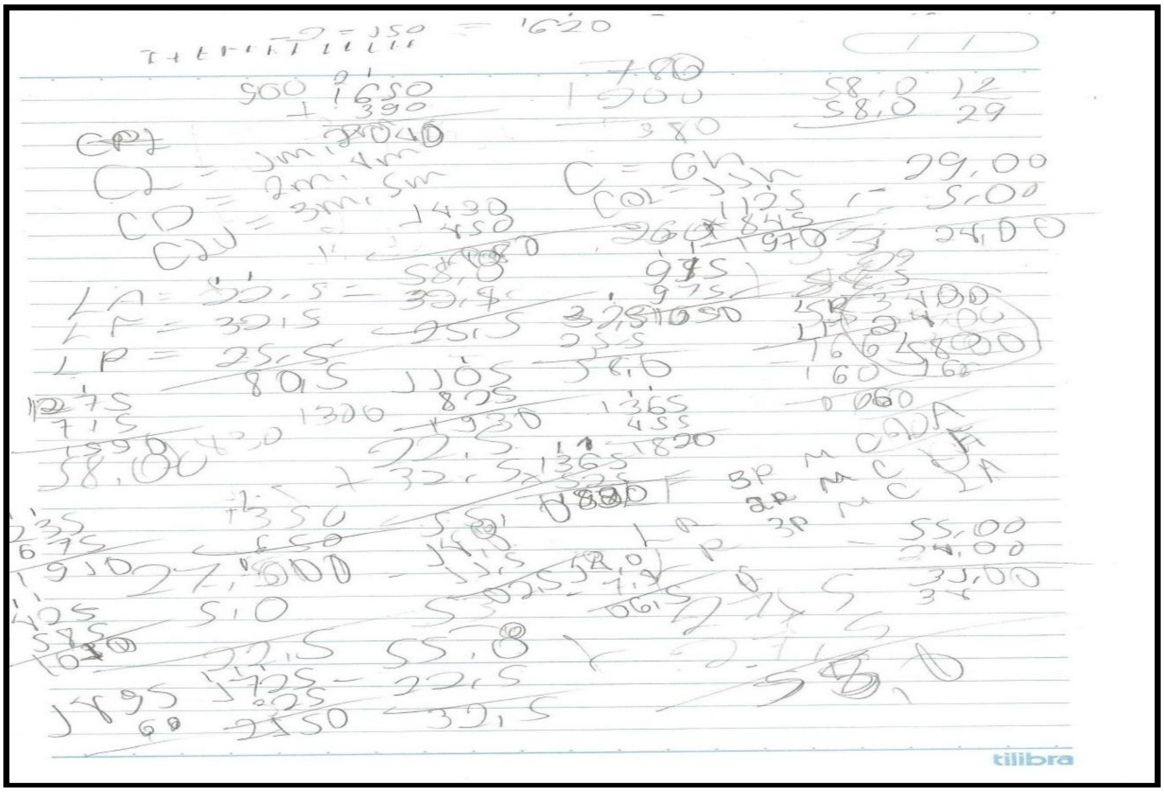
Nos anos finais do Ensino Fundamental, o conteúdo sistemas lineares é introduzido aos alunos, com objetivo de averiguar quais conhecimentos prévios os alunos têm sobre o conteúdo a ser estudado. Com este intuito, a pesquisadora aplicou uma atividade diagnóstica. Essa atividade foi composta por quatro situações problemas.

Portanto, o primeiro encontro foi usado para diagnosticar o que os alunos sabiam sobre sistemas lineares, nos termos descritos abaixo.

Durante a aplicação da atividade diagnóstica, os alunos demonstraram muito interesse, lançando mão de diversas estratégias para solucionar os problemas. O que chamou a atenção ao analisar as resoluções foi que nenhum aluno relacionou as situações problemas a um sistema de equações lineares, no entanto este fato, não impediu de alguns alunos resolveram algumas das questões com êxito através de muitas tentativas.

Na Figura 6, é possível perceber o registro das diversas tentativas usadas para resolver as situações apresentadas na atividade diagnóstica por um dos alunos pesquisados.

Figura 6: Rascunho de um dos alunos pesquisados que tentou utilizar várias estratégias para solucionar as questões apresentadas



Fonte: Próprio autor (2018)

A atitude dos alunos diante da atividade evidencia um ponto importante e necessário a ser trabalhado na disciplina de matemática: a “resolução de problemas”.

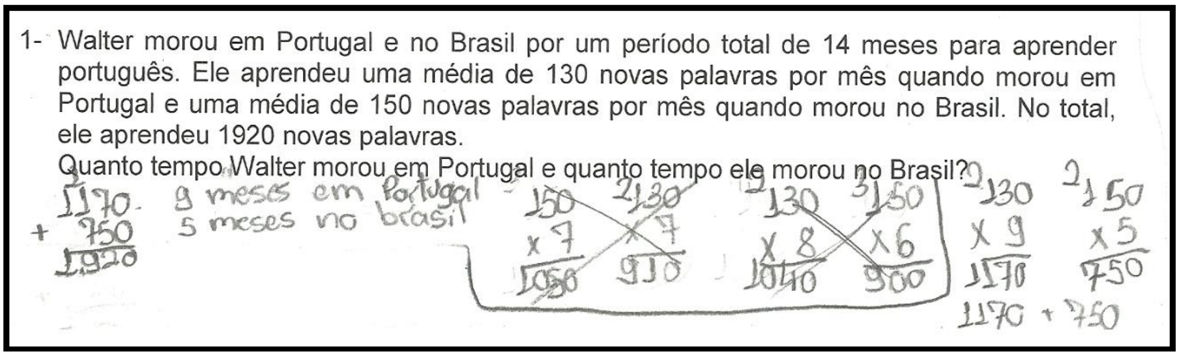
Segundo o Currículo Básico Comum – CBC, o desenvolvimento de resolução de problemas deve ser capaz de preparar o aluno para:

> • Expressar oralmente ou por escrito, com suas próprias palavras, propriedades matemáticas, atribuindo significado aos conceitos abstratos e formulando por meio do uso da linguagem simbólica, questões expressas verbalmente.
> • Estudar casos especiais mais simples usando-os para elaborar estratégias de resolução de casos mais complexos ou gerais.
> • Fazer uso do método de tentativa e erro, elaborando novas estratégias de solução a partir da análise crítica dos erros.

• Usar a analogia como ferramenta de trabalho, recorrendo a métodos já utilizados e adaptando-os para a resolução de novos problemas.
• Trabalhar de trás para diante, supondo conhecida a solução de um problema e deduzir suas propriedades para obter um caminho para encontrá-la. (BRASIL - CBC, 2007, p. 38)

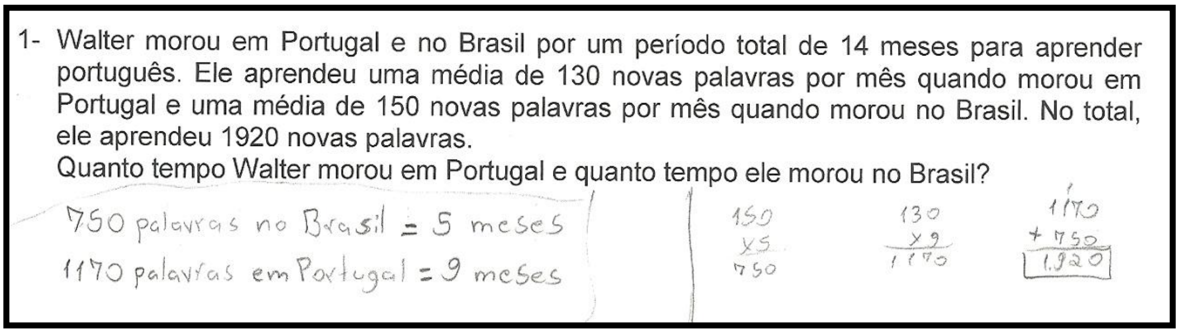
A questão 01 do diagnóstico apresenta dois valores desconhecidos e duas informações sobre eles, para que solucionem a incógnita. Alguns alunos encontraram a solução por tentativas. Observem algumas resoluções conforme as Figuras 7 e 8:

Figura 7: Demonstração de aluno que solucionou a questão pelo método da tentativa


1- Walter morou em Portugal e no Brasil por um período total de 14 meses para aprender português. Ele aprendeu uma média de 130 novas palavras por mês quando morou em Portugal e uma média de 150 novas palavras por mês quando morou no Brasil. No total, ele aprendeu 1920 novas palavras.
Quanto tempo Walter morou em Portugal e quanto tempo ele morou no Brasil?

Fonte: Próprio autor (2018)

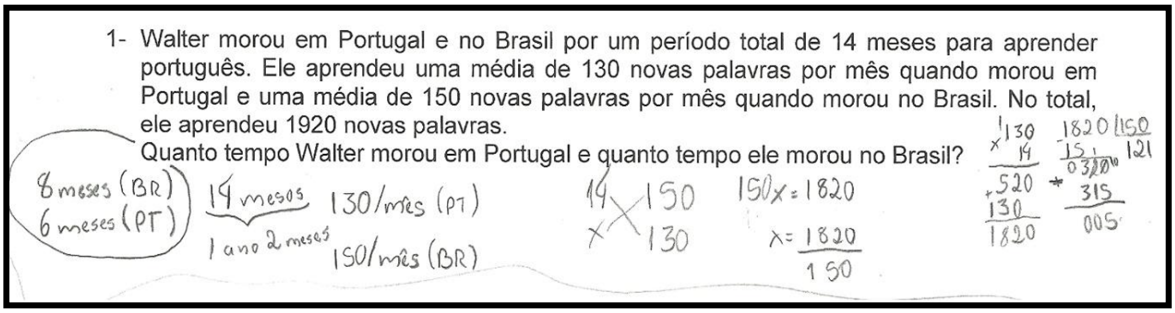
Figura 8: Estratégia utilizada por um dos alunos para solucionar a questão apresentada


1- Walter morou em Portugal e no Brasil por um período total de 14 meses para aprender português. Ele aprendeu uma média de 130 novas palavras por mês quando morou em Portugal e uma média de 150 novas palavras por mês quando morou no Brasil. No total, ele aprendeu 1920 novas palavras.
Quanto tempo Walter morou em Portugal e quanto tempo ele morou no Brasil?

Fonte: Próprio autor (2018)

Outro aluno tentou relacionar conteúdos já estudados. A partir da regra de três simples, ele tentou resolver o problema. Observe a Figura 9:

Figura 9: Estratégia utilizada por um dos alunos para solucionar a questão apresentada

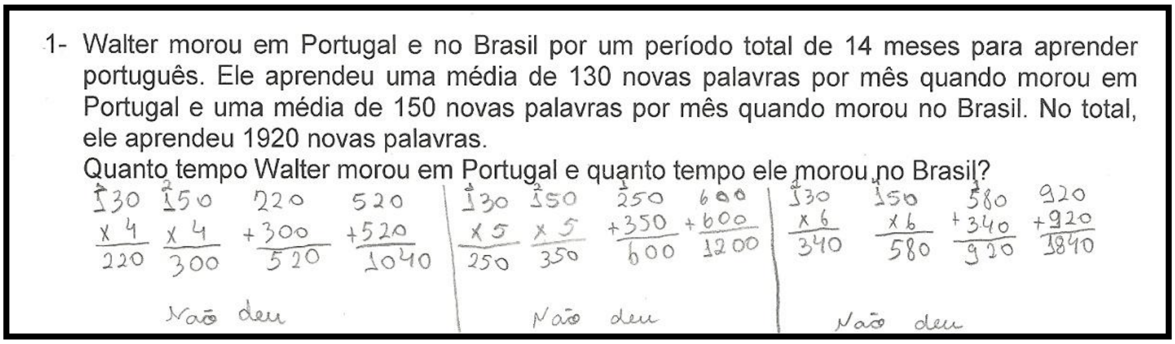

1- Walter morou em Portugal e no Brasil por um período total de 14 meses para aprender português. Ele aprendeu uma média de 130 novas palavras por mês quando morou em Portugal e uma média de 150 novas palavras por mês quando morou no Brasil. No total, ele aprendeu 1920 novas palavras.
Quanto tempo Walter morou em Portugal e quanto tempo ele morou no Brasil?

8 meses (BR)
6 meses (PT)
14 meses
1 ano 2 meses
130/mês (PT)
150/mês (BR)

Fonte: Próprio autor (2018)

Outros não conseguiram chegar ao resultado e deixou isso claro conforme a Figura 10. Mas, é possível perceber que este ao menos entendeu o problema.

Figura 10: Embora não se chegou ao resultado é possível notar que houve compreensão do problema.

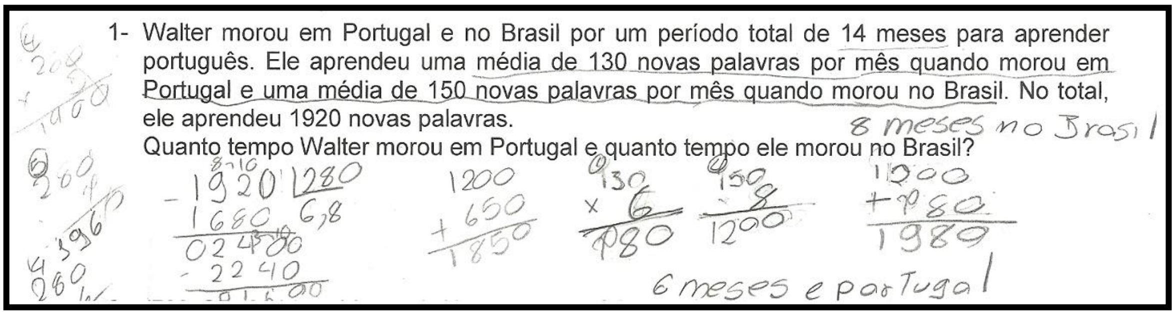

1- Walter morou em Portugal e no Brasil por um período total de 14 meses para aprender português. Ele aprendeu uma média de 130 novas palavras por mês quando morou em Portugal e uma média de 150 novas palavras por mês quando morou no Brasil. No total, ele aprendeu 1920 novas palavras.
Quanto tempo Walter morou em Portugal e quanto tempo ele morou no Brasil?

Não deu
Não deu
Não deu

Fonte: Próprio autor (2018)

Contudo houve quem além de não conseguir chegar ao resultado, também não entendeu o problema, conforme Figura 11.

Figura 11: Não compreendeu o problema, nem chegou ao resultado.

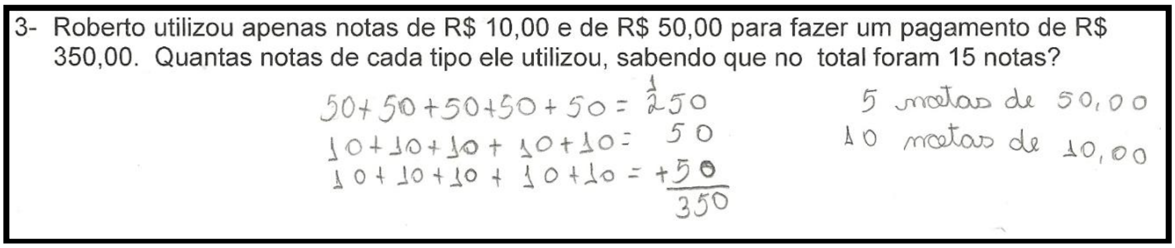

1- Walter morou em Portugal e no Brasil por um período total de 14 meses para aprender português. Ele aprendeu uma média de 130 novas palavras por mês quando morou em Portugal e uma média de 150 novas palavras por mês quando morou no Brasil. No total, ele aprendeu 1920 novas palavras.
Quanto tempo Walter morou em Portugal e quanto tempo ele morou no Brasil?

8 meses no Brasil
6 meses e portugal

Fonte: Próprio autor (2018)

O problema número três era semelhante ao problema de número um, contudo, os alunos não apresentaram o mesmo grau de dificuldade, todos os alunos conseguiram chegar ao resultado. Vejam algumas soluções conforme Figuras 12 e 13:

Figura 12: Independentemente da estratégia utilizada, os alunos chegaram ao resultado.



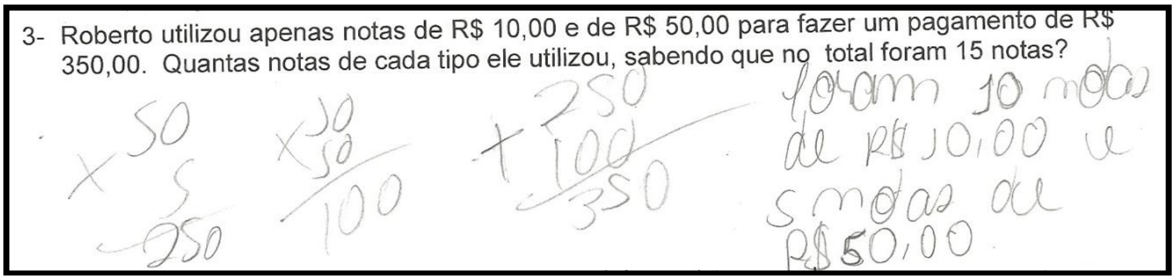
3- Roberto utilizou apenas notas de R$ 10,00 e de R$ 50,00 para fazer um pagamento de R$ 350,00. Quantas notas de cada tipo ele utilizou, sabendo que no total foram 15 notas?

50+50+50+50+50 = 250
10+10+10+10+10 = 50
10+10+10+10+10 = +50
350

5 notas de 50,00
10 notas de 10,00

Fonte: Próprio autor (2018)

Figura 13: Independentemente da estratégia utilizada, os alunos chegaram ao resultado.



3- Roberto utilizou apenas notas de R$ 10,00 e de R$ 50,00 para fazer um pagamento de R$ 350,00. Quantas notas de cada tipo ele utilizou, sabendo que no total foram 15 notas?

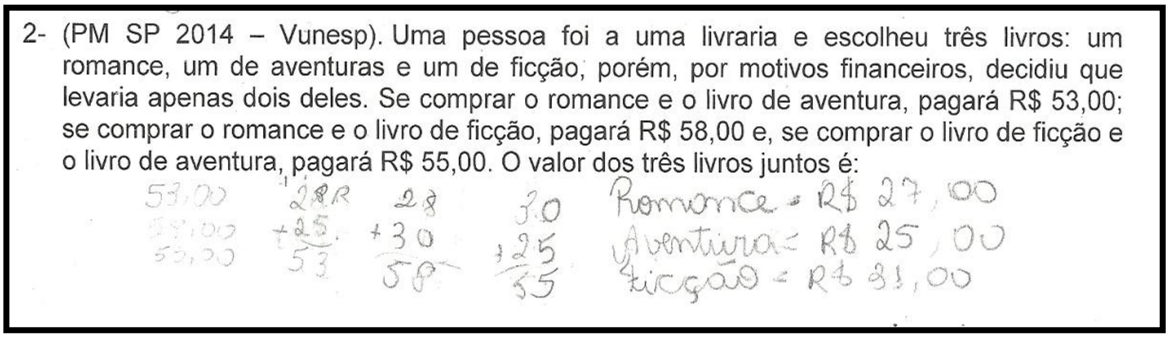
50 × 5 = 250
10 × 10 = 100
250 + 100 = 350

foram 10 notas de R$ 10,00 e 5 notas de R$ 50,00

Fonte: Próprio autor (2018)

O problema de número dois envolvia três valores desconhecidos, para se chegar a solução da incógnita. Nesse caso, 90% (noventa por cento) dos alunos não conseguiram chegar ao resultado, mesmo utilizando várias tentativas. De acordo com as Figuras 14 e 15.

Figura 14: Tentativa, sem êxito, de um dos pesquisados para solucionar a questão apresentada:



2- (PM SP 2014 – Vunesp). Uma pessoa foi a uma livraria e escolheu três livros: um romance, um de aventuras e um de ficção, porém, por motivos financeiros, decidiu que levaria apenas dois deles. Se comprar o romance e o livro de aventura, pagará R$ 53,00; se comprar o romance e o livro de ficção, pagará R$ 58,00 e, se comprar o livro de ficção e o livro de aventura, pagará R$ 55,00. O valor dos três livros juntos é:

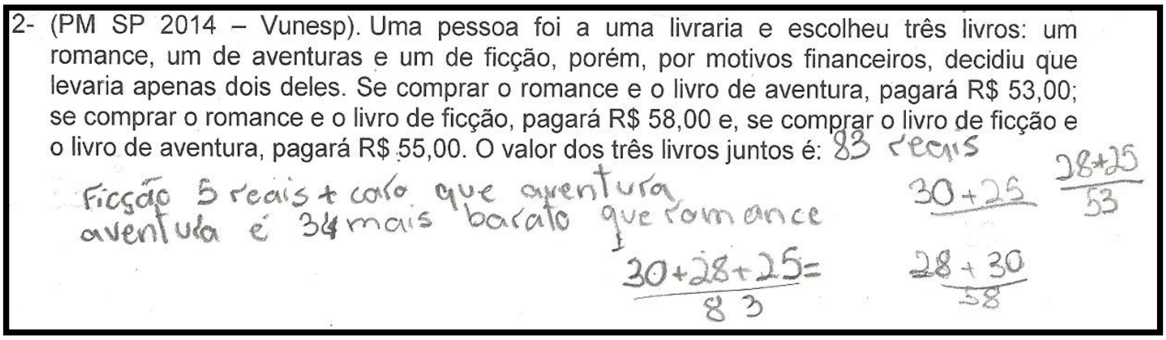
53,00 58,00 55,00 28R +25 53 28 +30 58 30 +25 55

Romance = R$ 27,00
Aventura = R$ 25,00
Ficção = R$ 31,00

Fonte: Próprio autor (2018)

Dos dez alunos que participaram da pesquisa, apenas um dos alunos conseguiu chegar à solução do problema, nos termos da Figura 15 abaixo:

Figura 15: Apenas um aluno resolveu com êxito a questão:



2- (PM SP 2014 – Vunesp). Uma pessoa foi a uma livraria e escolheu três livros: um romance, um de aventuras e um de ficção, porém, por motivos financeiros, decidiu que levaria apenas dois deles. Se comprar o romance e o livro de aventura, pagará R$ 53,00; se comprar o romance e o livro de ficção, pagará R$ 58,00 e, se comprar o livro de ficção e o livro de aventura, pagará R$ 55,00. O valor dos três livros juntos é: 83 reais

Ficção 5 reais + caro que aventura
aventura é 3 reais mais barato que romance

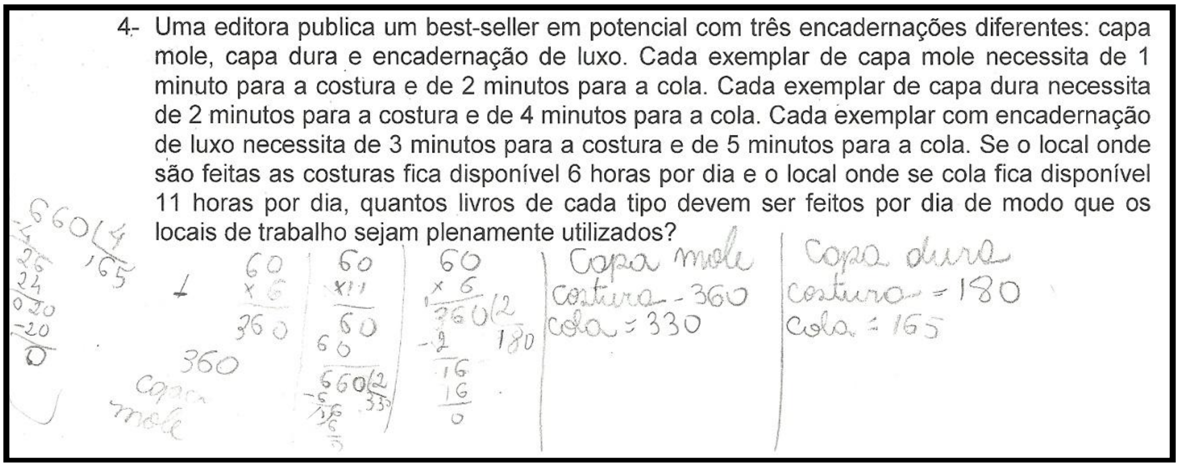
30+28+25= 83

30+25 28+25 53 28+30 58

Fonte: Próprio autor (2018)

O problema de número quatro tratava de uma situação com infinitas soluções. No entanto, ninguém conseguiu chegar ao resultado. A maioria não conseguiu nem compreender o problema para usar o método das tentativas. Como pode ser observado nas Figuras 16 e 17.

Figura 16: Tentativa, sem êxito, de resolução da questão nº 04.



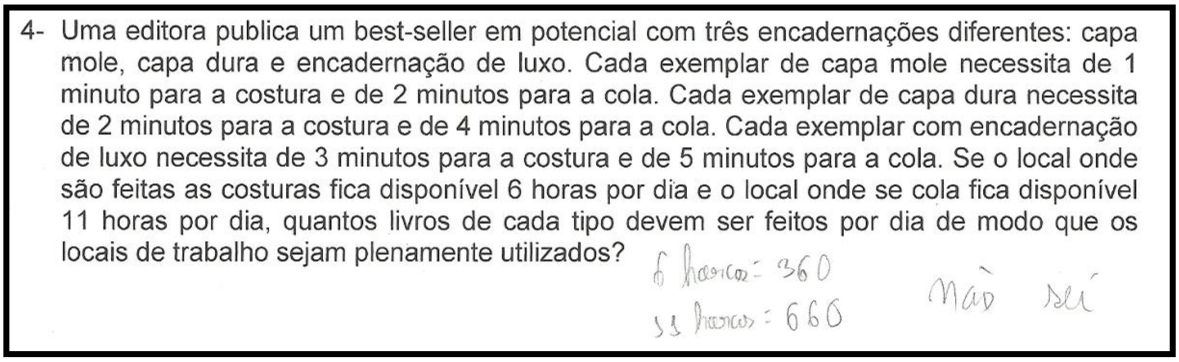
4- Uma editora publica um best-seller em potencial com três encadernações diferentes: capa mole, capa dura e encadernação de luxo. Cada exemplar de capa mole necessita de 1 minuto para a costura e de 2 minutos para a cola. Cada exemplar de capa dura necessita de 2 minutos para a costura e de 4 minutos para a cola. Cada exemplar com encadernação de luxo necessita de 3 minutos para a costura e de 5 minutos para a cola. Se o local onde são feitas as costuras fica disponível 6 horas por dia e o local onde se cola fica disponível 11 horas por dia, quantos livros de cada tipo devem ser feitos por dia de modo que os locais de trabalho sejam plenamente utilizados?

Capa mole
costura - 360
cola = 330

Capa dura
costura = 180
cola = 165

Fonte: Próprio autor (2018)

Figura 17: Outra tentativa de resolução da questão nº 04:



4- Uma editora publica um best-seller em potencial com três encadernações diferentes: capa mole, capa dura e encadernação de luxo. Cada exemplar de capa mole necessita de 1 minuto para a costura e de 2 minutos para a cola. Cada exemplar de capa dura necessita de 2 minutos para a costura e de 4 minutos para a cola. Cada exemplar com encadernação de luxo necessita de 3 minutos para a costura e de 5 minutos para a cola. Se o local onde são feitas as costuras fica disponível 6 horas por dia e o local onde se cola fica disponível 11 horas por dia, quantos livros de cada tipo devem ser feitos por dia de modo que os locais de trabalho sejam plenamente utilizados?

6 horas = 360
11 horas = 660

Não sei

Fonte: Próprio autor (2018)

5.2 Segundo momento: A Intervenção

A intervenção foi realizada em seis encontros por meio das oficinas, abaixo especificadas:

Oficina 1 - Intervenção: Escrevendo uma situação-problema em forma de equações lineares;

Oficina 2 - Intervenção: Formalizando o conteúdo Sistemas de Equações Lineares;

Oficina 3 - Intervenção: Apresentando o software GeoGebra;

Oficina 4 - Intervenção: Solução de um sistema de equações lineares através de escalonamento usando o GeoGebra – Introdução;

Oficina 5 - Intervenção: Solução de um sistema de equações lineares através de escalonamento usando o GeoGebra – Aprofundamento;

Oficina 6 - Intervenção: Discussão das soluções de um sistema de Equações Lineares no aspecto da Interpretação Geométrica dos sistemas 2x2;

No primeiro encontro da intervenção, em conversa com o grupo sobre o conteúdo que a ser estudado, os alunos afirmaram que nunca tiveram contato com o mesmo antes. Diante disso, a intervenção teve que ser reprogramada, pois seria necessário fazer uma apresentação prévia do tema.

O primeiro passo foi devolver a atividade diagnóstica aos alunos que participaram da pesquisa, dividi-los em grupos e disponibilizar um tempo para trocarem ideias de como chegaram a solução dos problemas.

Logo depois, foram convidados a discutir em plenária esses resultados finalizando com a escrita de uma situação-problema na forma matemática de sistemas de equações lineares.

Começando pelas questões de número 01 e 03 da atividade diagnóstica com sugestões de como chegaram aos resultados.

Os alunos relataram que testaram valores, “eu deixei os espaços e fui testando e alguns problemas foi muito difícil, pois tinham muitos valores possíveis”.

A pesquisadora então, no seu papel de mediadora, esclareceu que os “espaços”, a que faziam referência, são valores desconhecidos e, em matemática, podem ser representados por letras que são chamadas de incógnitas.

Informou ainda que algumas daquelas informações podem ser escritas como equações. E quando um conjunto dessas equações com as mesmas incógnitas relacionam-se em um mesmo problema elas são chamadas de Sistemas de Equações Lineares.

Então, na plenária, foram instigados a representaram os quatro problemas através de sistemas de equações lineares.

Registra-se que no tocante ao problema de número 04 foi apresentada muita dificuldade o que demonstra talvez não ser um problema ideal para o diagnóstico. Afinal, não se atingiu o objetivo que era discutir as infinitas soluções que o problema possui.

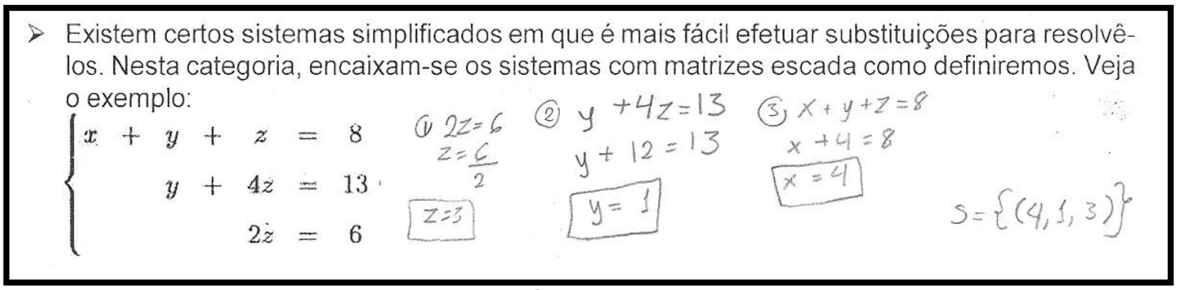
Todavia, seguindo o planejado, com os quatro problemas escritos na forma de sistemas lineares, os alunos participantes da pesquisa testaram as soluções discutidas anteriormente na plenária. Finalizando o primeiro encontro com uma a seguinte indagação: “ficar testando é ruim demora muito, não tem um jeito certo de resolver esses problemas?”.

Antes de apresentar “um jeito certo de resolver” sistemas lineares foi então necessário apresentar o conteúdo de maneira formal, no segundo encontro.

Então, por meio de material impresso e aula expositiva dialogada a matéria foi apresentada aos alunos, passando-se a um novo momento da intervenção.

Discutiu-se sobre algumas propriedades, os sistemas equivalentes e a possibilidade de escrevê-lo na forma matricial. Também foram apresentados aos alunos sistemas lineares na forma de escada e como usar o método de substituições sucessivas para encontrar soluções. Alguns sistemas foram apresentados nesse formato e um tempo foi dado para resolverem. A Figura 18 representa este momento:

Figura 18: Momento da intervenção após apresentação formal da matéria



- Existem certos sistemas simplificados em que é mais fácil efetuar substituições para resolvê-los. Nesta categoria, encaixam-se os sistemas com matrizes escada como definiremos. Veja o exemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 8 \\ \quad\;\; y + 4z = 13 \\ \qquad\quad 2z = 6 \end{cases}$$

① $2z=6$ $z=\frac{6}{2}$ $\boxed{z=3}$ ② $y+4z=13$ $y+12=13$ $\boxed{y=1}$ ③ $x+y+z=8$ $x+4=8$ $\boxed{x=4}$ $S=\{(4,1,3)\}$

Fonte: Próprio Autor (2018)

Nesta ocasião, um aluno questionou: “E quando os sistemas não estão fáceis desse jeito, como os da prova?” Então foi informado que usando as propriedades apresentadas era possível resolver até os problemas mais difíceis.

Um terceiro encontro foi reservado para apresentar e familiarizar com o software GeoGebra, uma vez que os alunos não o conheciam.

Primeiramente, foi relatado um pouco da história do GeoGebra que é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. Por ser um escrito em linguagem Java e ser de distribuição livre, pode ser encontrado em várias plataformas.

Posto isso, os alunos foram convidados a explorarem as funções básicas. Foram apresentadas a janela algébrica que serve para armazenar a lei das funções, que devem ser inseridas na entrada de comandos e as equações das figuras geométricas inseridas na janela gráfica ou coordenadas de localização; a janela de visualização que tem por padrão, o plano cartesiano; a janela CAS que possui uma barra de ferramentas diferenciada das demais e serve para fazer cálculos e, por último, a planilha que seria usada para aprenderem o método de escalonamento.

O quarto encontro foi dedicado para expor o método de solucionar um sistema de equações lineares através de escalonamento por Eliminação de Gauss usando o GeoGebra. Os alunos foram organizados em duplas e apresentado o seguinte exemplo:

As moedas de um determinado país são de três tipos:

• De 3g que vale \$ 10;

• De 5g que vale \$ 20;

• De 9g que vale \$ 50.

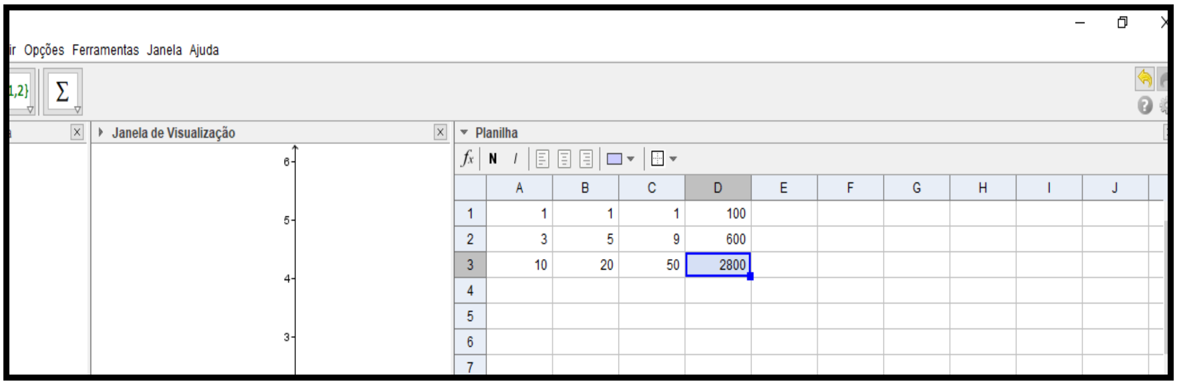
Uma pessoa tem 100 moedas, num total de 600g, somando \$ 2800. Quantas moedas de cada tipo essa pessoa possui?

O primeiro passo então foi escrever o problema como um sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + 5y + 9z = 600 \\ 10x + 20y + 50z = 2800 \end{cases}$$

O segundo passo, consistiu em abrir a planilha no GeoGebra e escrever como uma matriz estendida. Como pode ser observado na Figura 19.

Figura 19: Escrevendo o problema como uma matriz estendida

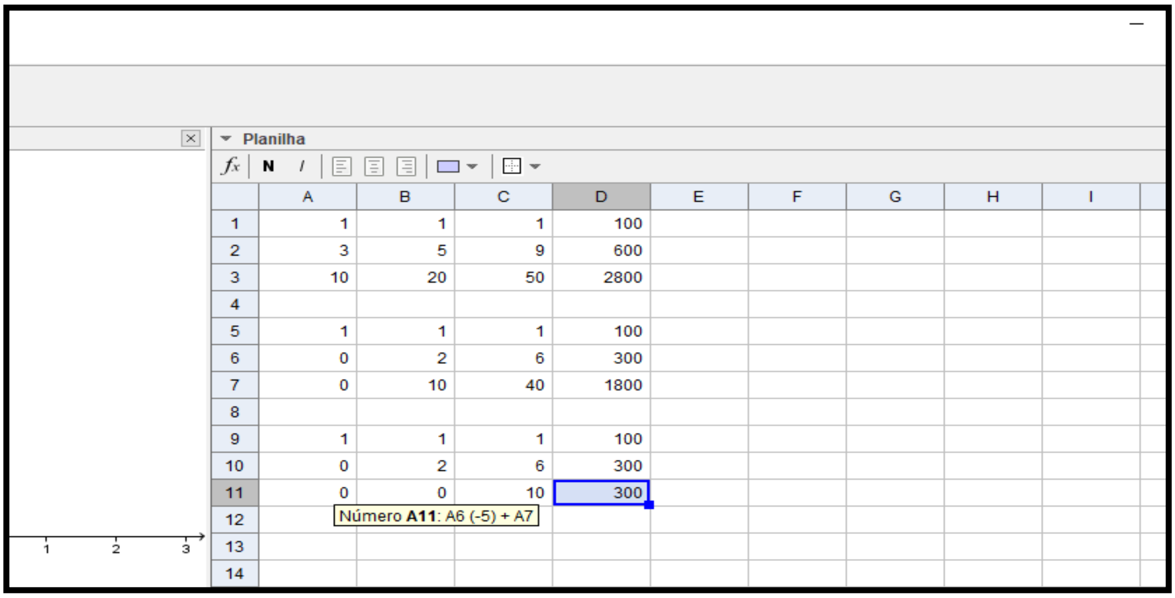


	A	B	C	D
1	1	1	1	100
2	3	5	9	600
3	10	20	50	2800

Fonte: Próprio autor (GeoGebra 2018)

O terceiro passo foi transformar o sistema inicial para a forma escalonada, pelo método eliminação de Gauss. De acordo com a Figura 20.

Figura 20: Matriz estendida escalonada



	A	B	C	D
1	1	1	1	100
2	3	5	9	600
3	10	20	50	2800
4				
5	1	1	1	100
6	0	2	6	300
7	0	10	40	1800
8				
9	1	1	1	100
10	0	2	6	300
11	0	0	10	300

Fonte: Próprio autor (GeoGebra 2018)

Logo após, escreveram o sistema na forma escalonada e usaram as substituições retroativas para encontrarem a solução: $x = 10,\ y = 60\ e\ z = 30$

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2y + 6z = 300 \\ 10z = 300 \end{cases}$$

O mesmo procedimento foi feito com mais dois exemplos pelas duplas e depois discutido em plenária. Quando surgiam as dúvidas, a pesquisadora atendia individualmente cada dupla.

No quinto encontro, com material impresso, contendo quatro problemas, os alunos sentaram-se de forma livre. Alguns em dupla, trio e individualmente. Nesses problemas os três primeiros possuía uma única solução SPD e o quarto possuía infinitas soluções (SPI)

No momento da plenária, alguns alunos questionaram que o último problema não tinha solução. Então, com a situação-problema escrita como um sistema de equações lineares foi sugerido que encontrassem algum resultado possível através de tentativas. E algumas sugestões foram apresentadas.

No sexto e último encontro antes do acompanhamento final, a partir do uso de slides, no primeiro momento discutiu-se as soluções de um sistema de Equações Lineares e o que acontece algebricamente quando escalonado logo em seguida a Interpretação Geométrica dos sistemas lineares 2x2. Para consolidar o conteúdo, foi apresentado um vídeo retirado da internet sobre o assunto: ***http://slideplayer.com.br/slide/10476230/.***

O foco desta pesquisa era a parte algébrica, especialmente o escalonamento, e não a Geométrica, portanto esse momento foi disponibilizado apenas para melhorar a compreensão dos casos que os sistemas possuem infinitas ou não tem solução.

Após relembrar as possibilidades de solução de um sistema de equações lineares o GeoGebra foi usado para escalonar o sistema de três situações, comparando com a representação geométrica.

Como visto anteriormente, um sistema linear pode ser classificado em: Possível Determinado; Possível Indeterminado ou Impossível. Agora cada caso foi analisado geometricamente e exemplificado usando o *software* GeoGebra. Como sabemos, as posições relativas de duas retas no plano são: Concorrentes. Coincidentes e paralelas.

Apresentou-se a seguinte questão:

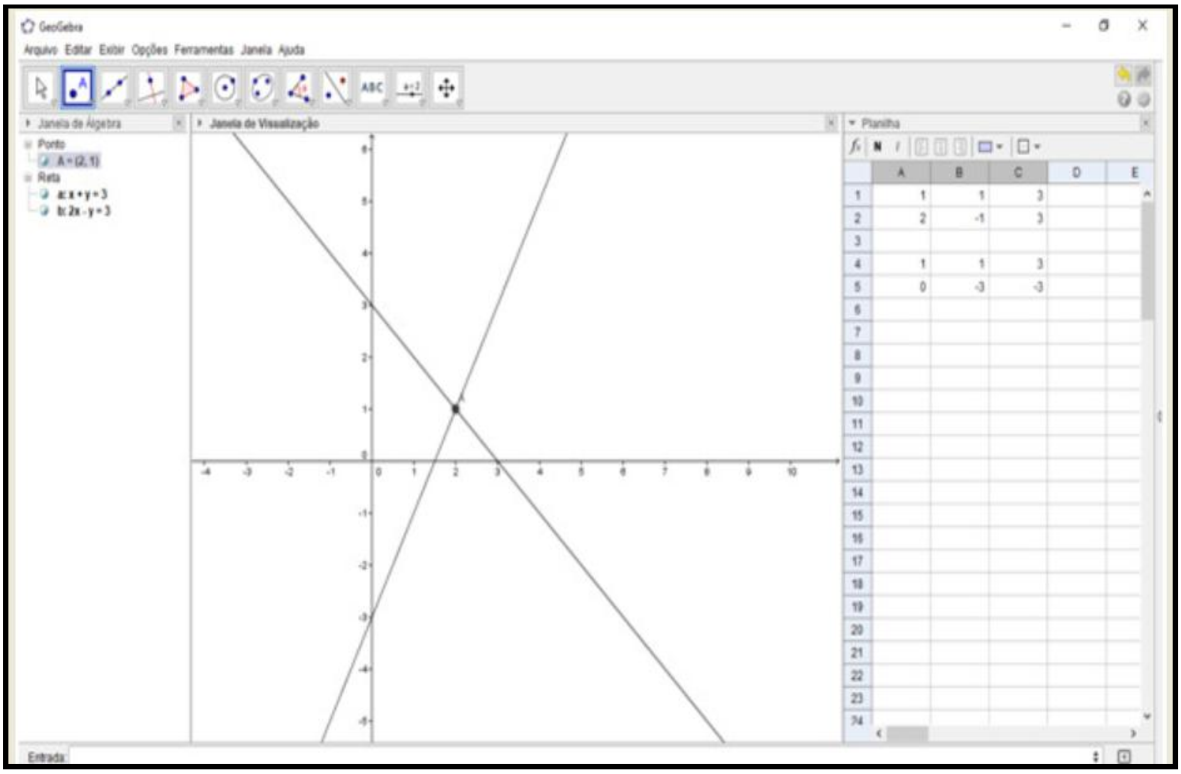
Exemplo 01: Determine, se existir, a solução do sistema a seguir e classifique-o.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

A partir do uso do GeoGebra e da participação do grupo, o escalonamento foi realizado. Com as substituições, temos $x = 2$ e $y = 1$.

Posteriormente, inserindo as equações do sistema inicial foi observado o comportamento das retas. Que pode ser visto na Figura 21.

Figura 21: Comportamento das retas



Fonte: Próprio autor (GeoGebra 2018)

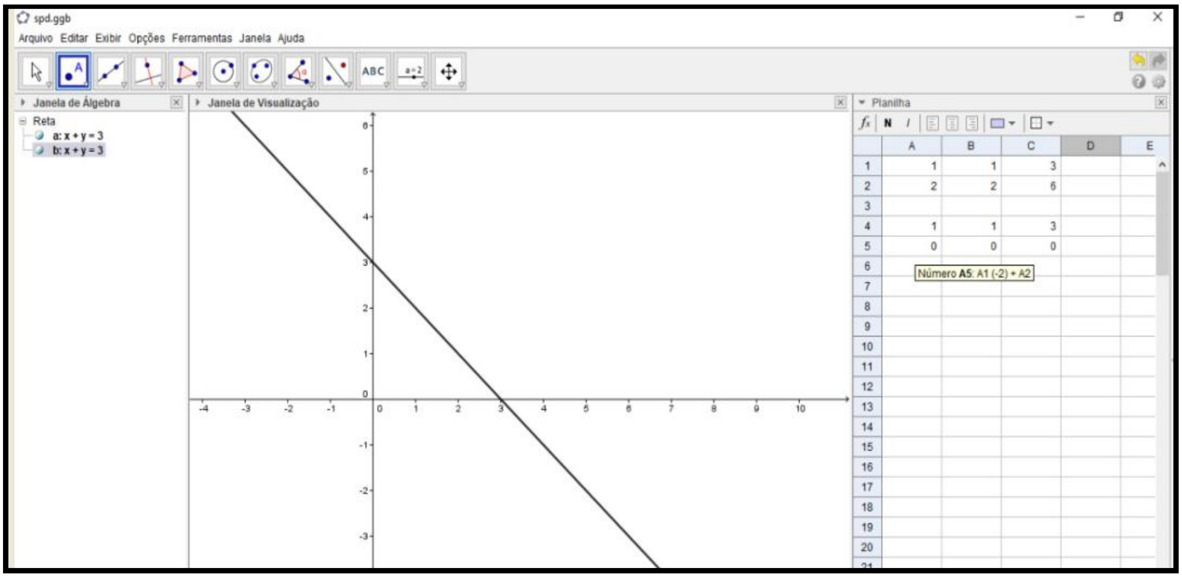
Concluiu-se que o sistema é possível e determinado apresentando retas concorrentes, sendo a solução a coordenada do ponto de interseção.

Exemplo 02: Determine, se existir, a solução do sistema a seguir e classifique-o.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

Após escalonamento, chega-se a uma equação degenerada. Observem o comportamento das retas na Figura 22:

Figura 22: Comportamento das retas na segunda questão apresentada



Fonte: Próprio autor (GeoGebra 2018)

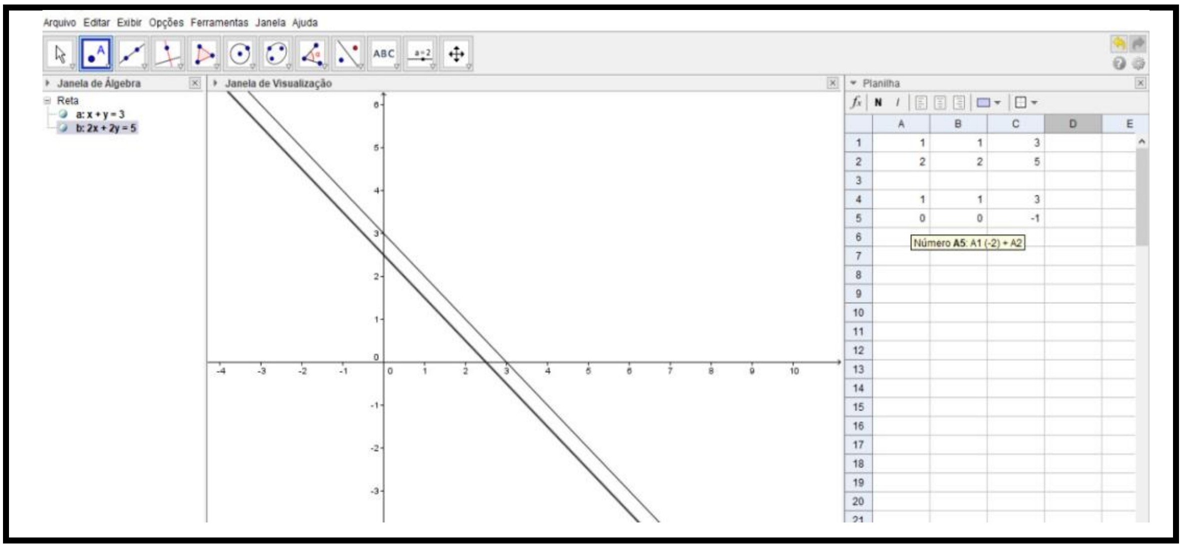
Neste caso, concluiu-se que o sistema é possível e indeterminado apresentando retas coincidentes, ou seja, infinitas soluções.

Exemplo 03: Determine, se existir, a solução do sistema a seguir e classifique-o.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$$

Diferente do caso anterior, a equação degenerada encontrada neste escalonamento tem $b \neq 0$. Logo, não há solução, que pode ser observado na Figura 23.

Figura 23: Comportamento das retas na terceira questão apresentada



Fonte: Próprio autor (GeoGebra 2018)

Neste último exemplo, concluiu-se que o sistema é impossível apresentando retas paralelas, ou seja, não há solução.

Depois dos exemplos citados acima, algumas questões em material impresso foram distribuídas e solicitado aos alunos que resolvessem as questões e classificassem os sistemas.

5.3 Terceiro momento – Acompanhamento final

O último encontro foi destinado para uma atividade diagnóstica para verificar se houve melhora na aprendizagem dos alunos. Uma atividade contendo quatro problemas foi entregue para cada aluno resolver individualmente e sem o uso do GeoGebra ou máquinas de calcular.

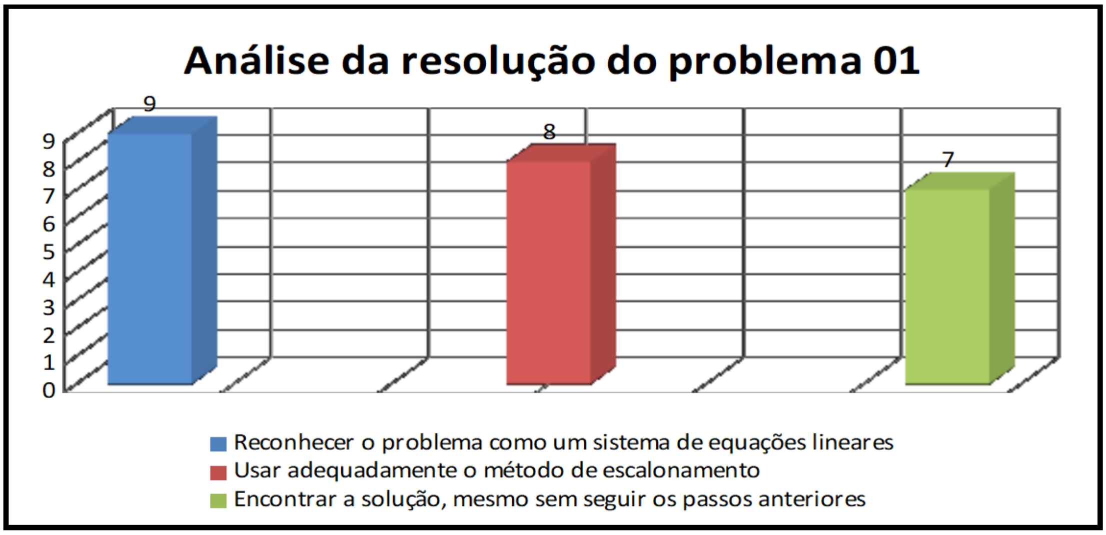
Uma melhora significativa foi verificada no geral. Especificamente no aspecto de escrever o problema como um sistema de equações lineares, em algum momento do teste todos usaram esse recurso, no entanto, não se limitaram a isso, alguns alunos resolveram os problemas através de "tentativas".

Na análise dos problemas foi observada três itens:

- Reconhecer o problema como um sistema de equações lineares;
- Aplicar o método de Escalonamento da Eliminação por Gauss
- Encontrar a solução, mesmo sem obedecer aos passos anteriores;

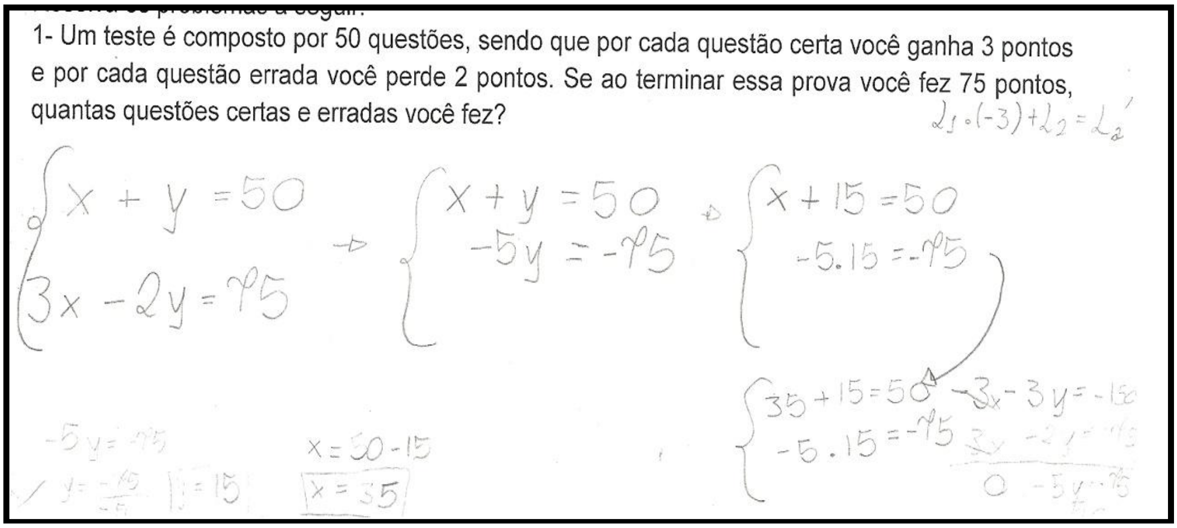
No problema de número 01, como apresentado no Gráfico 1, muitos alunos evoluíram comparando com a avaliação diagnóstica. Muitos chegaram a solução correta do problema e os que não conseguiram foram motivos distintos conforme pode ser visto em algumas resoluções a seguir: Que podem ser vistos nas Figuras 24 e 25.

Gráfico 1: Análise da resolução do problema 01



Fonte: Próprio autor (2018)

Figura 24: Evolução dos alunos após avaliação diagnóstica



1- Um teste é composto por 50 questões, sendo que por cada questão certa você ganha 3 pontos e por cada questão errada você perde 2 pontos. Se ao terminar essa prova você fez 75 pontos, quantas questões certas e erradas você fez?

$L_1 \cdot (-3) + L_2 = L_2'$

$\begin{cases} x + y = 50 \\ 3x - 2y = 75 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ -5y = -75 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 15 = 50 \\ -5 \cdot 15 = -75 \end{cases}$

$\begin{cases} 35 + 15 = 50 \\ -5 \cdot 15 = -75 \end{cases}$

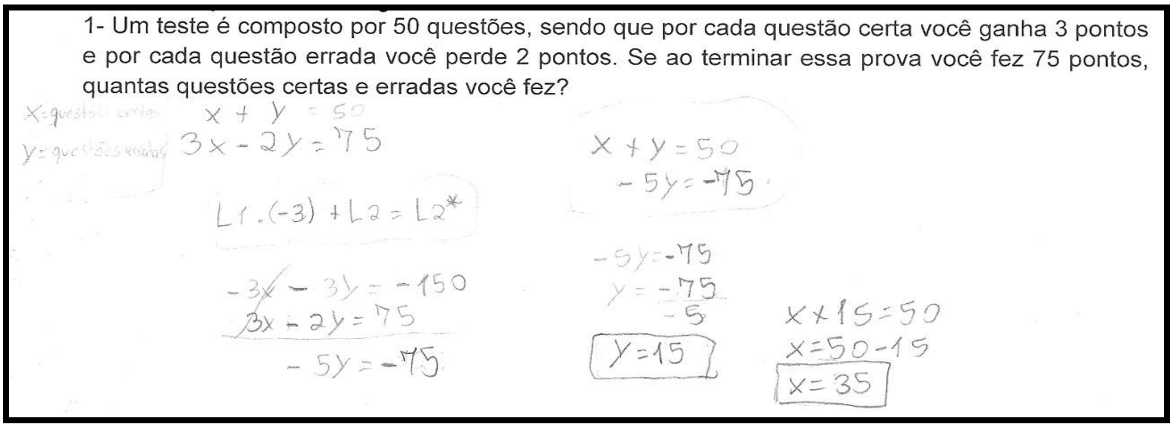
$-3x - 3y = -150$
$3x - 2y = 75$
$0 \quad -5y = -75$

$-5y = -75$
$y = \frac{-75}{-5}$ $y = 15$

$x = 50 - 15$
$\boxed{x = 35}$

Fonte: Próprio autor (2018)

Figura 25: Evolução dos alunos após avaliação diagnóstica



1- Um teste é composto por 50 questões, sendo que por cada questão certa você ganha 3 pontos e por cada questão errada você perde 2 pontos. Se ao terminar essa prova você fez 75 pontos, quantas questões certas e erradas você fez?

x = questões certas
y = questões erradas

$x + y = 50$
$3x - 2y = 75$

$L_1 \cdot (-3) + L_2 = L_2^*$

$-3x - 3y = -150$
$3x + 2y = 75$
$-5y = -75$

$x + y = 50$
$-5y = -75$

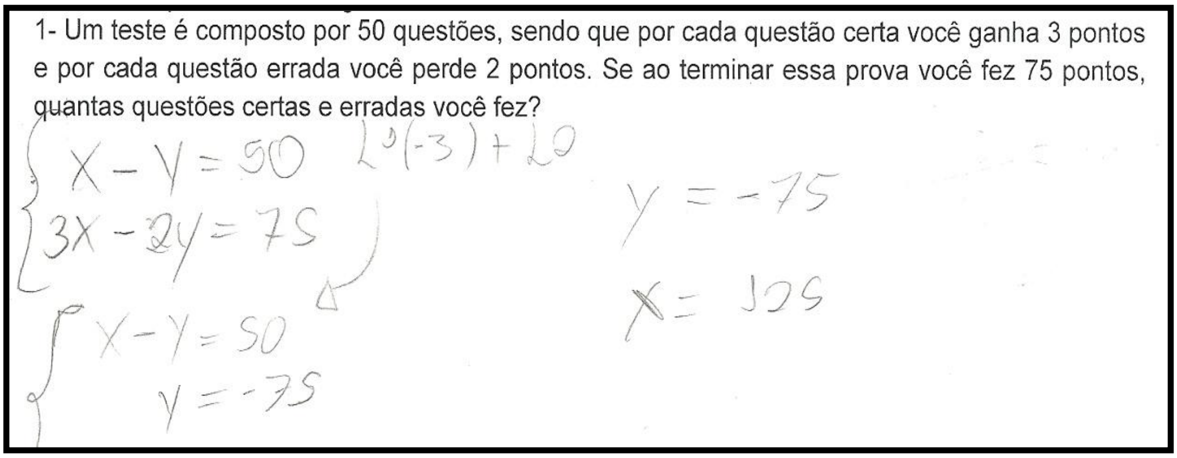
$-5y = -75$
$y = \frac{-75}{-5}$
$\boxed{y = 15}$

$x + 15 = 50$
$x = 50 - 15$
$\boxed{x = 35}$

Fonte: Próprio autor (2018)

Mesmo após a realização das oficinas de intervenção, alguns alunos não conseguiram chegar ao resultado, conforme se evidencia nas Figuras 26 e 27:

Figura 26: Resolução sem êxito devido a erro de cálculo


1- Um teste é composto por 50 questões, sendo que por cada questão certa você ganha 3 pontos e por cada questão errada você perde 2 pontos. Se ao terminar essa prova você fez 75 pontos, quantas questões certas e erradas você fez?

$$\begin{cases} X - Y = 50 \\ 3X - 2Y = 75 \end{cases}$$

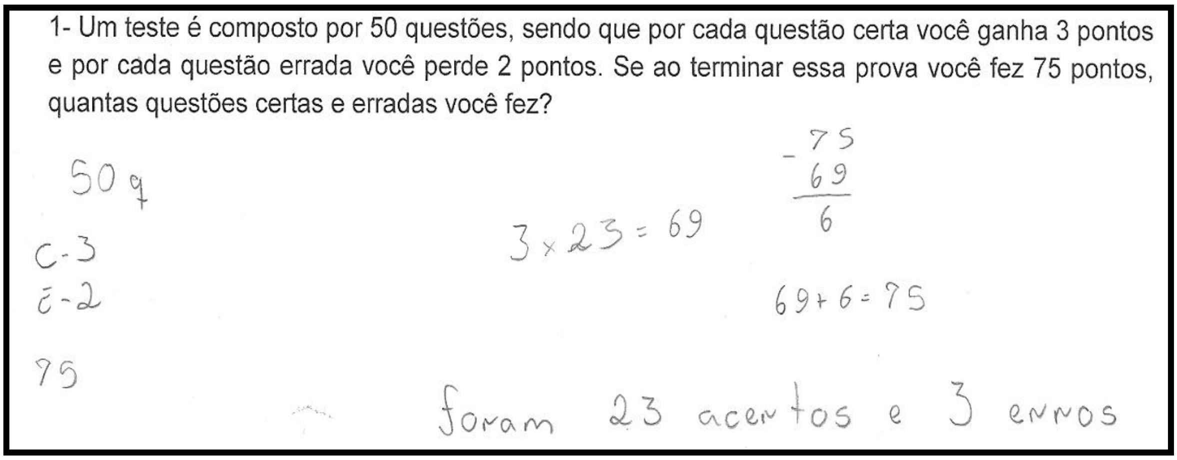
$$\begin{cases} X - Y = 50 \\ Y = -75 \end{cases}$$

$Y = -75$

$X = 125$

Fonte: Próprio autor (2018)

Figura 27: Resolução sem êxito por meio do método da tentativa


1- Um teste é composto por 50 questões, sendo que por cada questão certa você ganha 3 pontos e por cada questão errada você perde 2 pontos. Se ao terminar essa prova você fez 75 pontos, quantas questões certas e erradas você fez?

50 q

c-3

e-2

75

$3 \times 23 = 69$

$75 - 69 = 6$

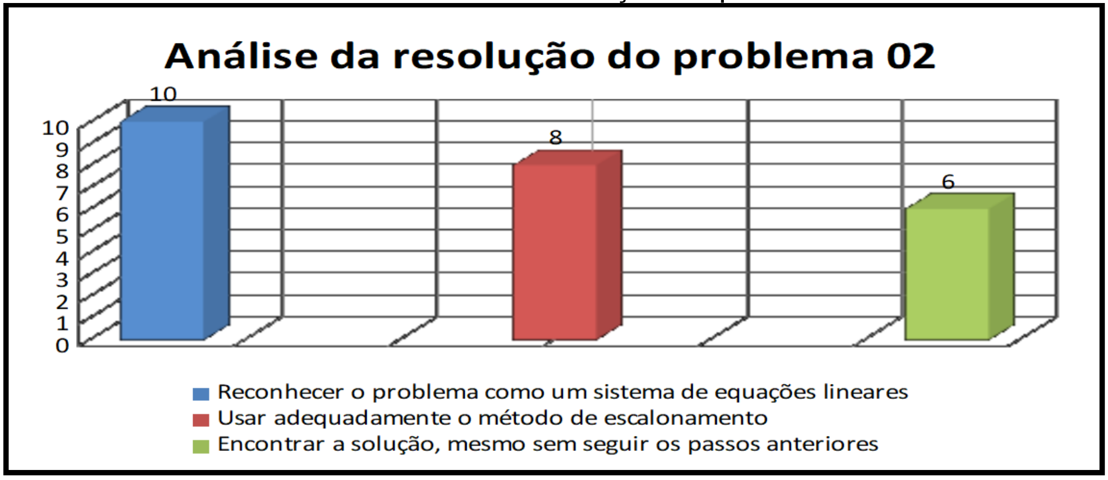
$69 + 6 = 75$

foram 23 acertos e 3 erros

Fonte: Próprio autor (2018)

Quanto ao problema de número dois, contendo três valores desconhecidos, todos os alunos representaram o problema através de um sistema de equações lineares. O que pode ser verificado no Gráfico 2.

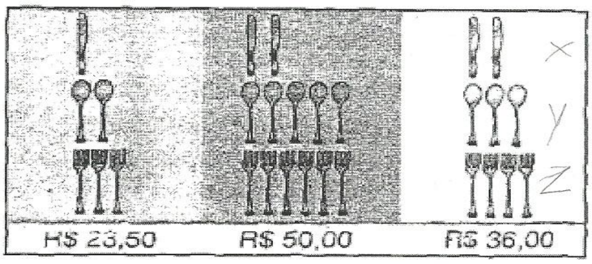
Gráfico 2: Análise da resolução do problema 02



Fonte: Próprio autor (2018)

Porém, para encontrar a solução, um aluno usou o método de "testes". Outros não conseguiram aplicar corretamente o método do escalonamento. Alguns por dificuldade em realizar cálculos, pois apesar da "ideia" está certa não conseguiram chegar ao resultado final, outros erram cálculos nas resoluções das equações através das substituições. Conforme Figuras 28 e 29.

Figura 28: Resolução acertada da questão, embora representando o sistema, chegou-se ao resultado pelo método da tentativa.



2- Examinando os anúncios abaixo, conclua qual é o preço de cada faca, garfo e colher. 0 Preço de cada faca, colher e garfo é respectivamente:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 23,50 \\ 2x + 5y + 6z = 50,00 \\ 2x + 3y + 9z = 36,00 \end{cases}$$

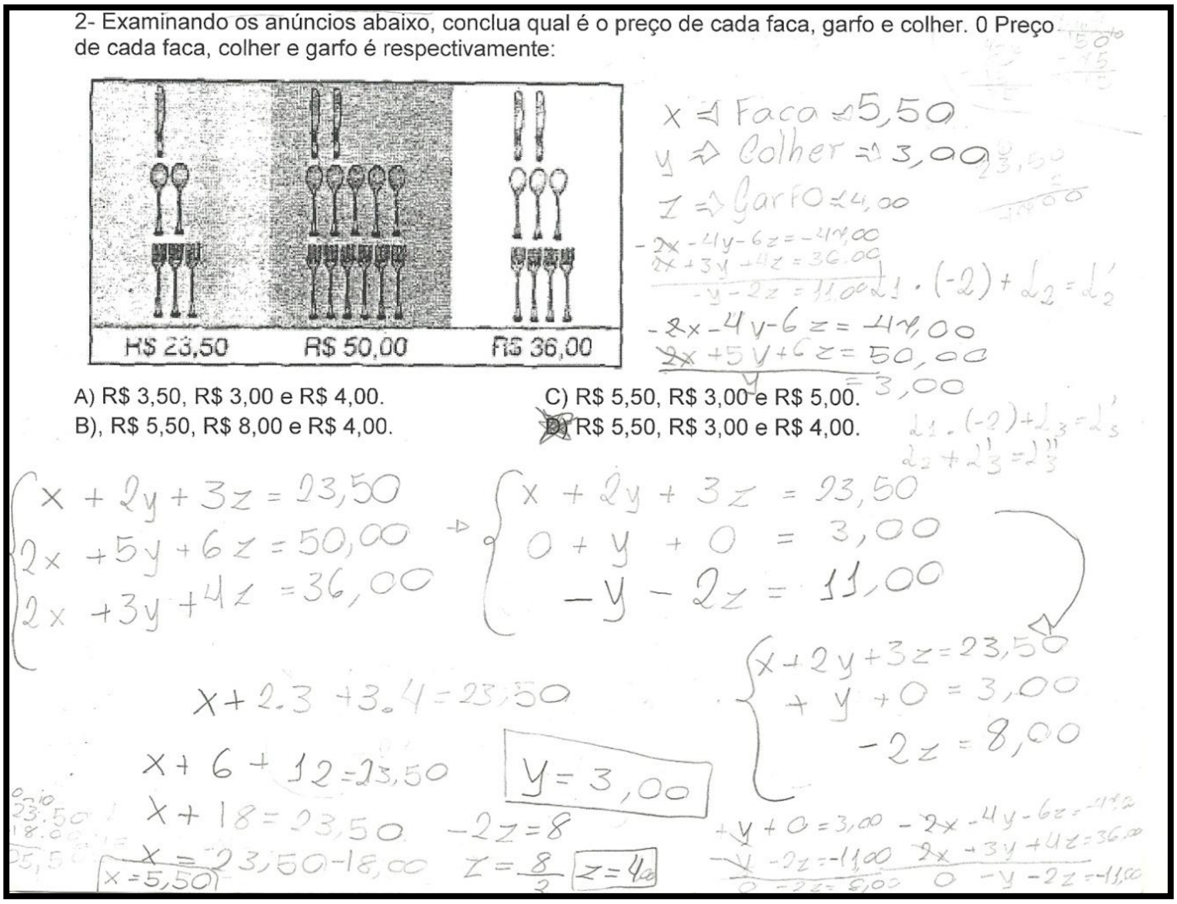
$x = 5,50$
$y = 3,00$
$z = 4,00$

A) R$ 3,50, R$ 3,00 e R$ 4,00.
B), R$ 5,50, R$ 8,00 e R$ 4,00.
C) R$ 5,50, R$ 3,00 e R$ 5,00.
~~D)~~ R$ 5,50, R$ 3,00 e R$ 4,00.

$$\begin{array}{r} 5,50 \\ +\ 6,00 \\ +\ 15,00 \\ \hline 26,50 \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{r} 5,50 \\ +\ 6,00 \\ +\ 12,00 \\ \hline 23,50 \end{array}}$$

Fonte: Próprio autor (2018)

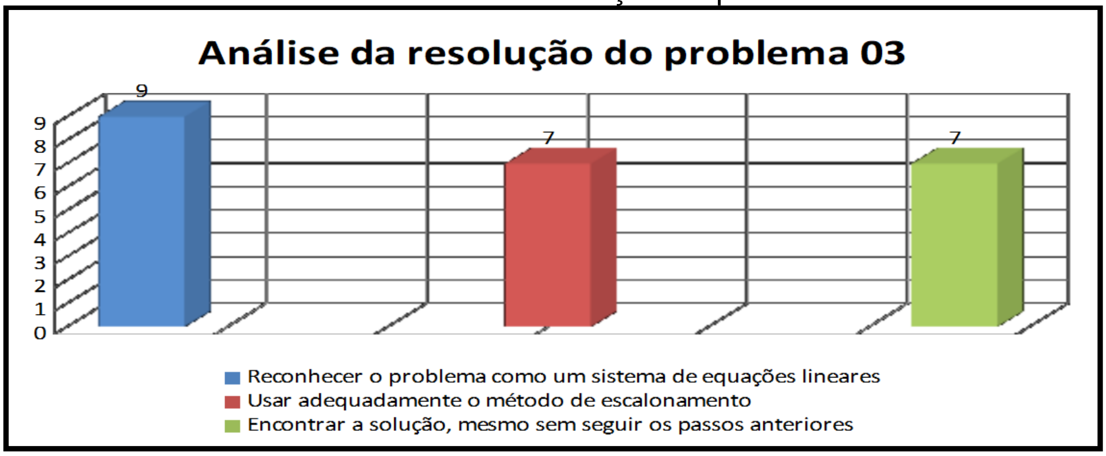
Figura 29: Resolução da questão usando o escalonamento



Fonte: Próprio autor (2018)

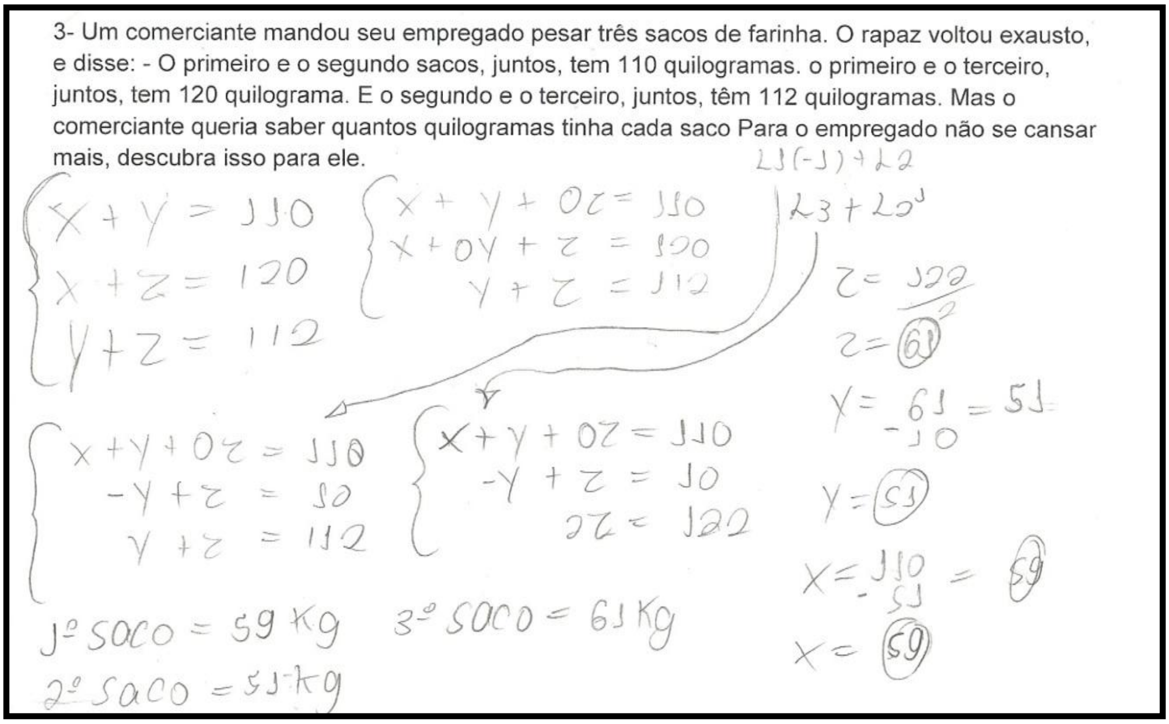
Na resolução do problema nº 3, a maioria dos alunos escreveram na forma de um sistema de equações lineares, o que pode ser observado no Gráfico 3. E todos que conseguiram chegar à solução foram através do escalonamento como mostram as Figuras 30 e 31.

Gráfico 3: Análise da resolução do problema 03



Fonte: Próprio autor (2018)

Figura 30: Resolução da questão de nº 03



3- Um comerciante mandou seu empregado pesar três sacos de farinha. O rapaz voltou exausto, e disse: - O primeiro e o segundo sacos, juntos, tem 110 quilogramas. o primeiro e o terceiro, juntos, tem 120 quilograma. E o segundo e o terceiro, juntos, têm 112 quilogramas. Mas o comerciante queria saber quantos quilogramas tinha cada saco Para o empregado não se cansar mais, descubra isso para ele.

$$\begin{cases} x+y=110 \\ x+z=120 \\ y+z=112 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+0z=110 \\ x+0y+z=120 \\ y+z=112 \end{cases}$$

$L_1(-1)+L_2$

L_3+L_2'

$$\begin{cases} x+y+0z=110 \\ -y+z=10 \\ y+z=112 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+0z=110 \\ -y+z=10 \\ 2z=122 \end{cases}$$

$z=\frac{122}{2}$

$z=61$

$y=61-10=51$

$y=51$

$x=110-51=59$

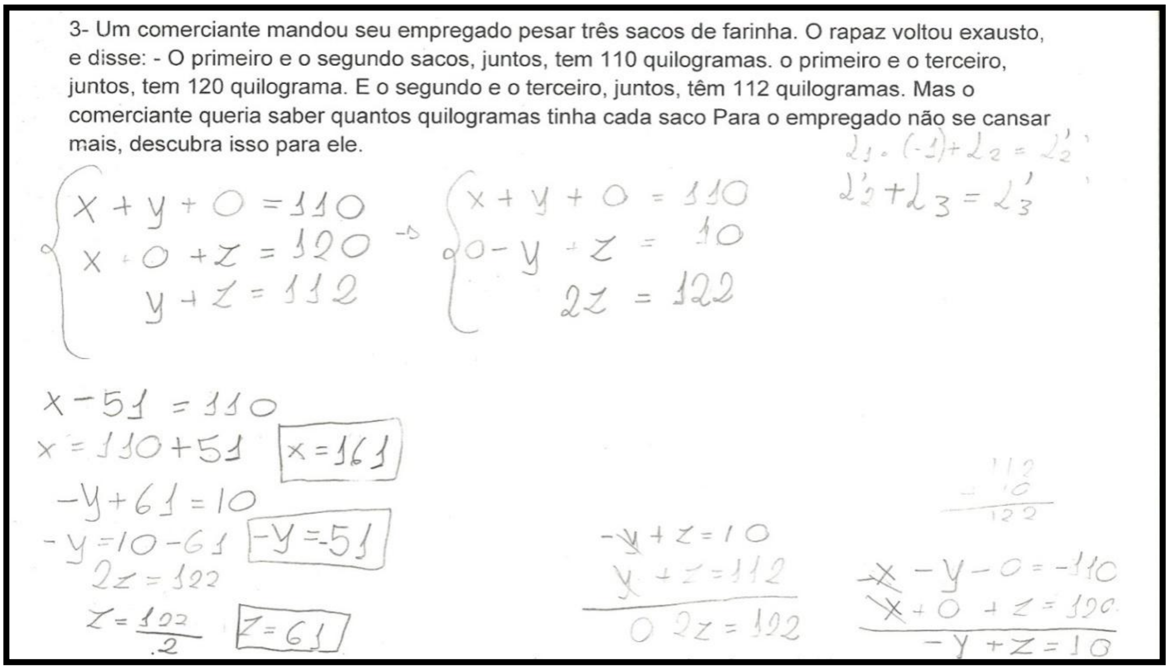
$x=59$

1º saco = 59 kg 3º saco = 61 kg

2º saco = 51 kg

Fonte: Próprio autor (2018)

Figura 31: Houve aluno que não concluiu a solução, no entanto foi tabulada como correta:



3- Um comerciante mandou seu empregado pesar três sacos de farinha. O rapaz voltou exausto, e disse: - O primeiro e o segundo sacos, juntos, tem 110 quilogramas. o primeiro e o terceiro, juntos, tem 120 quilograma. E o segundo e o terceiro, juntos, têm 112 quilogramas. Mas o comerciante queria saber quantos quilogramas tinha cada saco Para o empregado não se cansar mais, descubra isso para ele.

$L_1 \cdot (-1) + L_2 = L_2'$

$L_2' + L_3 = L_3'$

$$\begin{cases} x+y+0=110 \\ x+0+z=120 \\ y+z=112 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y+0=110 \\ 0-y+z=10 \\ 2z=122 \end{cases}$$

$x-51=110$

$x=110+51$ $\boxed{x=161}$

$-y+61=10$

$-y=10-61$ $\boxed{-y=-51}$

$2z=122$

$z=\frac{122}{2}$ $\boxed{z=61}$

$-y+z=10$

$y+z=112$

$0 \; 2z=122$

$-x-y-0=-110$

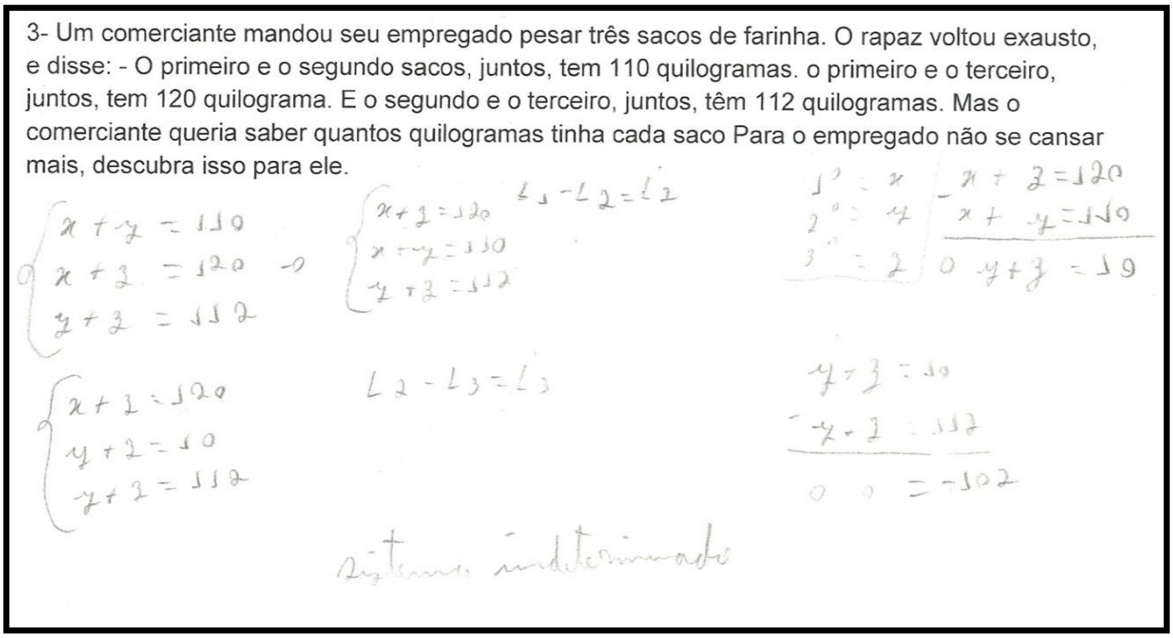
$x+0+z=120$

$-y+z=10$

Fonte: Próprio autor (2018)

Porém, houve um caso em que além do erro no escalonamento ainda existe erro na classificação do sistema. O que demonstra que são necessárias mais aulas sobre o assunto. Veja Figura 32:

Figura 32: Demonstração de erro no escalonamento e na classificação do sistema



3- Um comerciante mandou seu empregado pesar três sacos de farinha. O rapaz voltou exausto, e disse: - O primeiro e o segundo sacos, juntos, tem 110 quilogramas. o primeiro e o terceiro, juntos, tem 120 quilograma. E o segundo e o terceiro, juntos, têm 112 quilogramas. Mas o comerciante queria saber quantos quilogramas tinha cada saco Para o empregado não se cansar mais, descubra isso para ele.

$$\begin{cases} x+y=110 \\ x+z=120 \\ y+z=112 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+z=120 \\ x+y=110 \\ y+z=112 \end{cases} \quad L_1 - L_2 = L_2$$

$1^o = x$, $2^o = y$, $3^o = z$

$$\begin{array}{r} x+z=120 \\ -\ x+y=110 \\ \hline 0 \quad y+z=10 \end{array}$$

$$\begin{cases} x+z=120 \\ y+z=10 \\ y+z=112 \end{cases} \quad L_2 - L_3 = L_3$$

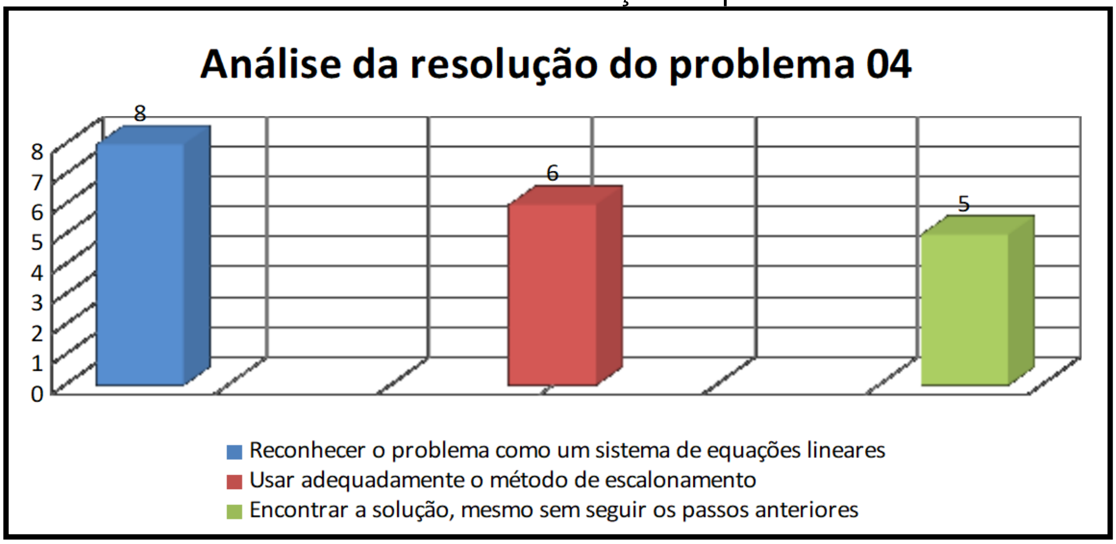
$$\begin{array}{r} y+z=10 \\ -\ y+z=112 \\ \hline 0 \quad 0 = -102 \end{array}$$

sistema indeterminado

Fonte: Próprio autor (2018)

No quarto problema, apenas cinco alunos chegaram a solução. Apesar de oito representarem corretamente através de um sistema de equações lineares conforme apresentado no Gráfico 4.

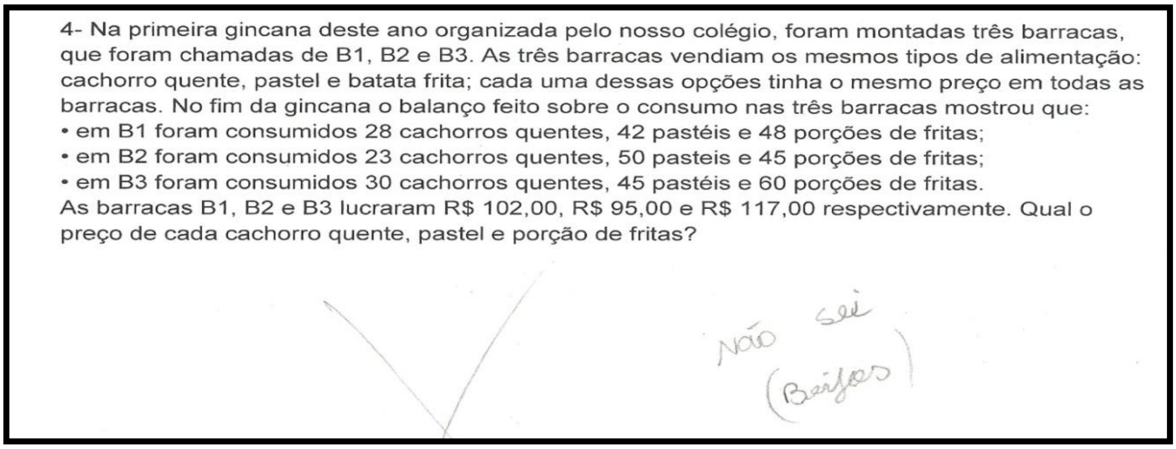
Gráfico 4: Análise da resolução do problema 04



Fonte: Próprio autor (2018)

No entanto, muitos desistiram de resolver. Vejam um exemplo na Figura 33.

Figura 33: Desistência pelo aluno de resolução da questão



4- Na primeira gincana deste ano organizada pelo nosso colégio, foram montadas três barracas, que foram chamadas de B1, B2 e B3. As três barracas vendiam os mesmos tipos de alimentação: cachorro quente, pastel e batata frita; cada uma dessas opções tinha o mesmo preço em todas as barracas. No fim da gincana o balanço feito sobre o consumo nas três barracas mostrou que:

- em B1 foram consumidos 28 cachorros quentes, 42 pastéis e 48 porções de fritas;
- em B2 foram consumidos 23 cachorros quentes, 50 pasteis e 45 porções de fritas;
- em B3 foram consumidos 30 cachorros quentes, 45 pastéis e 60 porções de fritas.

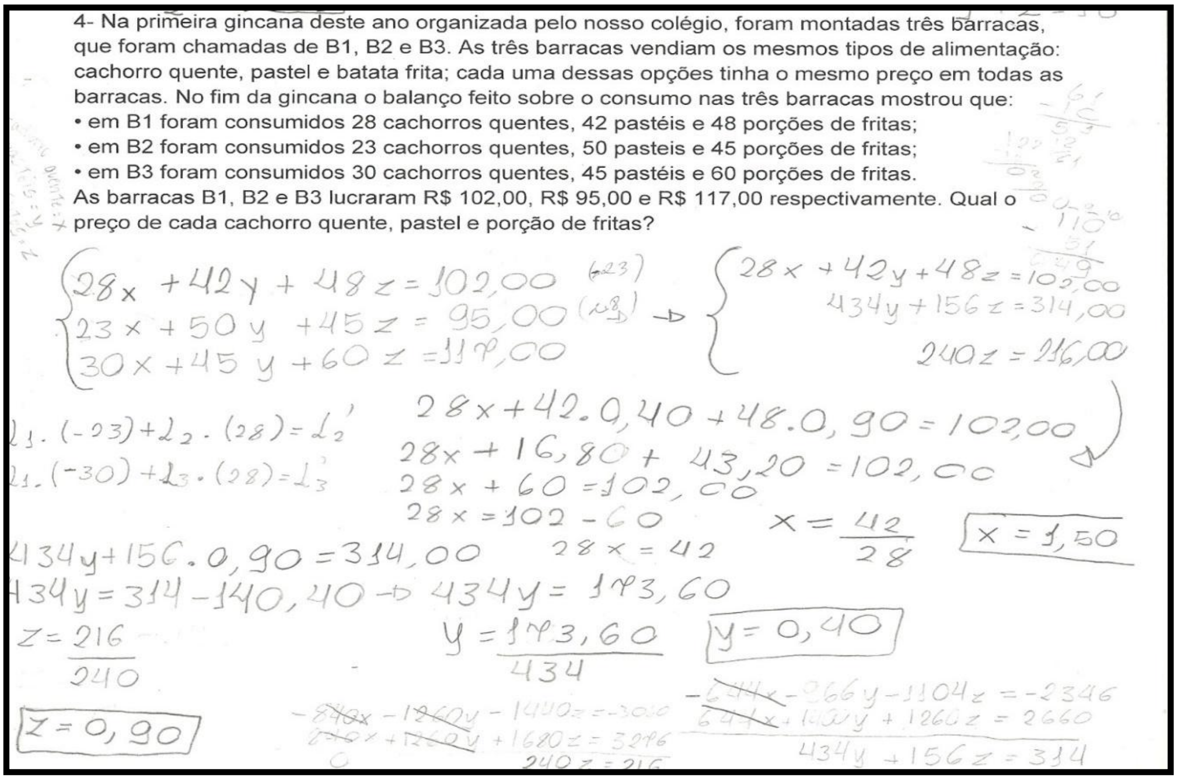
As barracas B1, B2 e B3 lucraram R$ 102,00, R$ 95,00 e R$ 117,00 respectivamente. Qual o preço de cada cachorro quente, pastel e porção de fritas?

Não sei (Beijos)

Fonte: Próprio autor (2018)

Alguns alunos conseguiram resolver a questão usando o escalonamento como mostra a Figura 34.

Figura 34: Resolução da questão utilizando o método de escalonamento



4- Na primeira gincana deste ano organizada pelo nosso colégio, foram montadas três barracas, que foram chamadas de B1, B2 e B3. As três barracas vendiam os mesmos tipos de alimentação: cachorro quente, pastel e batata frita; cada uma dessas opções tinha o mesmo preço em todas as barracas. No fim da gincana o balanço feito sobre o consumo nas três barracas mostrou que:

- em B1 foram consumidos 28 cachorros quentes, 42 pastéis e 48 porções de fritas;
- em B2 foram consumidos 23 cachorros quentes, 50 pasteis e 45 porções de fritas;
- em B3 foram consumidos 30 cachorros quentes, 45 pastéis e 60 porções de fritas.

As barracas B1, B2 e B3 lucraram R$ 102,00, R$ 95,00 e R$ 117,00 respectivamente. Qual o preço de cada cachorro quente, pastel e porção de fritas?

$$\begin{cases} 28x + 42y + 48z = 102,00 \\ 23x + 50y + 45z = 95,00 \\ 30x + 45y + 60z = 117,00 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 28x + 42y + 48z = 102,00 \\ 434y + 156z = 314,00 \\ 240z = 216,00 \end{cases}$$

$L_1 \cdot (-23) + L_2 \cdot (28) = L_2'$

$L_1 \cdot (-30) + L_3 \cdot (28) = L_3'$

$28x + 42 \cdot 0,40 + 48 \cdot 0,90 = 102,00$

$28x + 16,80 + 43,20 = 102,00$

$28x + 60 = 102,00$

$28x = 102 - 60$

$28x = 42$

$x = \frac{42}{28}$

$\boxed{x = 1,50}$

$434y + 156 \cdot 0,90 = 314,00$

$434y = 314 - 140,40 \rightarrow 434y = 173,60$

$y = \frac{173,60}{434}$

$\boxed{y = 0,40}$

$z = \frac{216}{240}$

$\boxed{z = 0,90}$

Fonte: Próprio autor (2018)

Percebeu-se que na maioria dos casos, a dificuldade nesta questão foi devida aos altos valores dos coeficientes e a falta do uso de uma máquina de calcular ou do uso do programa GeoGebra.

6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho foi relevante em vários aspectos. Mas, pode-se afirmar, com maior propriedade, a importância para o crescimento profissional.

A pesquisa ofereceu possibilidades de rever paradigmas, aprender e refletir de forma aprofundada sobre a teoria dos Sistemas de Equações Lineares, o uso de problemas e o benefício do uso das TICs no ensino-aprendizagem da matemática.

Em relação à aprendizagem dos alunos, a pesquisa evidenciou a melhora significativa da compreensão do conteúdo. Prova disso foi que os próprios alunos descreveram suas dificuldades apontando e reconhecendo o problema ora com cálculos ora com a interpretação dos problemas.

O aprender é dinâmico, necessita de estímulos externos e internos como a motivação e a necessidade. No desenvolvimento do trabalho ambos estímulos foram atingidos. Foi possível perceber que o uso do *software* GeoGebra nos laboratórios, inicialmente, motivou a participar da pesquisa. Durante as oficinas essa “paixão” inicial foi trocada pela utilidade e facilidade que o mesmo oferecia. No caso da “necessidade” o uso da resolução de problemas conseguiu ser um elo mostrando aos alunos que situações muito próximas da realidade poderiam ser resolvidas usando uma teoria matemática.

Todavia, esse trabalho não tem pretensão de servir como um “algoritmo de aprendizagem”. Nem tampouco questiona metodologias já fortemente utilizadas. Apenas acredita-se que se uma das funções da escola é construir conhecimento, faz-se necessário levantar e testar hipóteses que venham verificar se o aluno aprendeu ou ainda diagnosticar quando o aluno não aprende.

Em suma, os objetivos foram atingidos, pois a pesquisadora pode perceber que além da significativa melhora na compreensão do conteúdo o interesse e a dedicação dos alunos também foram atingidos.

REFERÊNCIAS

ALVARENGA, Dayana Cristina Bocarlth de. **O uso da mídias matemáticas na educação matemática.** Anais. X Congresso Nacional de Educação, Curitiba, novembro de 2011.

ANDRADE, Silvânio de**. Ensino-aprendizagem de matemática via exploração, codificação e decodificação de problemas**. Dissertação (Universidade Estadual Paulista), Rio Claro: 1998.

__________. **A pesquisa em educação matemática, os pesquisadores e a sala de aula: um fenômeno complexo, múltiplos olhares, um tecer de fios**. Tese de Doutorado, FE-USP, São Paulo: 2008.

ANTHON, Howard; RORRES, Chris**. Álgebra Linear com aplicações**. Tradução: Claus Ivo Doering. 10ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

ARAÚJO, Paullyanne Leal de. YOSHIDA, Sônia Maria Pinheiro Ferro. Professor: **Desafios da prática pedagógica na atualidade**. Disponível em: http://ice.edu.br/TNX/storage/webdisco/2009/11/03/outros/608f3503025bdeb70200a86b2b89185a.pdf. Acesso em 08 de janeiro de 2018.

BETTEGA, Maria Helena. **Educação continuada na era digital.** São Paulo: Cortez, 2004.

BARROSO, Leônidas Conceição; BARROSO, Magali Maria de Araújo; CAMPOS FILHO, Frederico Ferreira; CARVALHO, Márcio Luiz Bunte de; MAIA, Mirian Lourenço. Cálculo numérico com aplicações. 2ª ed. São Paulo: Harbra ltda, 1987.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org.). **Pesquisas em educação matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: UNESP, 1999. (Seminários & Debates).

__________. **Filosofia da Educação Matemática**. São Paulo: Editora Autêntica, 2011.

__________. **O Professor de Matemática nas Escolas de 1º e de 2º graus**. São Paulo: UNESP, 1999.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Softwares e Internet em sala de aula de Matemática. Anais. X Encontro Nacional de Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA, 7 a 9 de Julho de 2010.

BRANCA, Nicholas. **A resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica**. In: A resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo: Atual, 1997.

BRASIL. **Cartilha SAEB**. – 18. ed. – Brasília: INEP, 2017.

__________. **Resultados das avaliações. SAEB**. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb. Acesso em 02 de janeiro de 2018.

__________. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1999.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica – Tradução da 8ª edição norte americana.** Tradução All Tasks; São Paulo: Cenage Learning, 2013.

CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H. COSTA, Roberto. C.F**. Álgebra Linear e aplicações**. 6ª ed.rev. São Paulo: Atual, 1990.

CASTRO FILHO, José Aires et al. **Identificação de Dificuldades para a Aprendizagem de conceitos Matemáticos nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental (SPAECE-MAT)**. Relatório final de pesquisa. Fortaleza: Secretaria de Educação do Ceará, 2002.

CENCI, Simone Pellin; SANTINELLI, Jamile. **O uso das Tecnologias da Informação e da Comunicação na formação docente**. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1628-8.pdf. 2015. Acesso em 03 de fevereiro de 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática na Resolução de Problemas de Matemática**. 12ª ed. São Paulo: Ática, 2007.

DEBALD, Fátima Regina Bergonsi. **A Formação dos Professores e sua relação com a Tecnologia da Informação**. Foz do Iguaçú: Revista Pleiade, v.3, nº6, 2007.

DEMO, Pedro. **Formação permanente e tecnologias educacionais**. Rio de Janeiro: Vozes, 1994.

FIORENTINI, Dário. Rumos da Educação. **Rumos da Pesquisa Brasileira em Educação Matemática: o caso da produção científica em cursos de Pós-graduação**. Tese (Doutorado em Educação: Metodologia de Ensino) – FE, UNICAMP, Campinas(SP), 1994.

_________ **Em Busca de Novos Caminhos e de outros Olhares na Formação de Professores de Matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2003.
FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**. 31. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

__________. **Pedagogia da indignação: cartas pedagógicas e outros escritos**. São Paulo: Editora Paz Terra, 1994.

GOUVEIA, Aparecida Joly. **As ciências sociais e a pesquisa sobre educação.** São Paulo: Revista Sociologia – USP, 1989.

KOLL, Marta de Oliveira**. Vygotsky: Aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico**. São Paulo: Scipione, 2010.

KOLMAN, Bernard; HILL, David R. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. Tradução: Alessandra Bosquilha. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

LIPSHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc Lars. **Álgebra Linear**. Tradução Claus Ivo Doering. 4ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

MIGUEL, José Carlos. **O ensino da matemática na perspectiva da Formação de Conceitos: Implicações Teórico-metodológicas**. Marília: UNESP, 2008. Disponível em: http://www.gradadm.ifsc.usp.br/dados/20121/SLC0630-1/Ensino-Matematica-Enfoque-Conceitos.pdf. Acesso em 25 de janeiro de 2018.

MORAN, José Manuel. **As múltiplas formas do aprender. Atividades & Experiências**. São Paulo, julho 2005. Disponível em: <http://www.eca.usp.br/prof/moran/positivo.pdf>. Acesso em: 03 de fevereiro de 2018.

MORAN, José Manuel; MASETTO, Marcos T; BEHRES, Maria Aparecida. **Novas tecnologias e mediação pedagógica.** São Paulo: Papirus, 2000.

MOREIRA, Marco Antônio; MASSONI, Neusa Terezinha. **Interfaces entre teorias de aprendizagem e ensino de ciências/física.** Porto Alegre, Instituto de Física/UFRGS, v.26, n.6, 2015.

NAGLE, Jorge. **Educação e Sociedade na Primeira República**. São Paulo: EPU/ MEC, 1974.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. **PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

__________. **A Resolução de Problemas na Educação Matemática: Onde estamos? E para onde iremos?** Espaço Pedagógico, v.20, n.1, Passo Fundo, p. 88-104, jan./jun. 2013.
ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. ALEVATTO, Norma Suely Gomes. **Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas**. Rio Claro: Boletim de Educação Matemática, vol. 25, núm. 41, 2011.

OSHIMA, Flávia Yuri. **Ensino Médio mais uma vez tem pior resultado do IDEB**. Revista Época *on line*. Disponível em: http://epoca.globo.com/vida/noticia/2016/09/ensino-medio-mais-uma-vez-tem-pior-resultado-do-ideb.html. Acesso em 05 de janeiro de 2018.

POLYA, George. **A arte de Resolver Problemas.** Tradução: Heitor Lisboa de Araújo, Interciência, 1978.

POOLE, David. **Álgebra Linear**. Tradução Martha Salerno Monteiro, Fernanda Soares Pinto Cadorna, Iole de Freitas Druck, Leila Maria Vasconcelos Figueiredo, Maria Lúcia Sobral Singer, Zara Issa Abud. São Paulo: Thomson Learning, 2006.

REDLING, Julyette Priscila; CAMPOS, Luciana Maria Lunardi; MENEGHETTIi, Renata Cristina Geromel. **Uma investigação a respeito da metodologia de resolução de problemas: concepções e práticas pedagógicas de professores de matemática**. CONGRESSO NACIONAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES. São Paulo: UNESP; PROGRAD, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/141598>.

RODRIGUES, Adriano. MAGALHÃES, Shirley Cristina. **A Resolução de Problemas nas aulas de Matemática: diagnosticando a prática pedagógica**. Minas Gerais: UNIS, 2011.

RODRIGUES, Maria Cleide Oliveira Rodrigues. SANTOS, Sandra da Silva. DE SOUZA, Thais Maia Galvão. **Metodologia da Resolução de Problemas: Uma prática viável para o ensino da Matemática**. João Pessoa: III CONEDU, 2016.

RORIG, Cristina; BACKES, Luciana. O professor e a tecnologia digital na sua prática educativa. Disponível em: www.pgie.ufrgs.br/alunos espie//luciana/public.../mara.doc. Acesso em 12 de jan. 2018.

ROXO, Euclides. **A matemática na educação secundaria**. Rio de Janeiro: Companhia Editora Nacional, 1937.

SAMPAIO, Marisa Narciso; LEITE, Lígia Silva. **Alfabetização tecnológica do professor**. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

SANCHO, Juana Maria; HERNÁNDEZ, Fernando. **Tecnologias para transformar a educação**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

SILVA, Francisca Lúcia Quitéria da; CASTRO FILHO, José Aires. **Resolução de Problemas como metodologia para aprender Matemática.** Anais do VIII ENEM – Comunicação Científica GT 1. Recife: UFP, 2004.

SOARES, Maria Teresa Carneiro, PINTO, Neuza Bertoni. **Metodologia da resolução de problemas**. In: 24ª Reunião ANPEd, 2001, Caxambu. Disponível em: http://www.anped.org.br/reunioes/24/tp1.htm#gt19 . Acesso em: 16 de janeiro 2018.

TOKARNIA, Mariana. **Desempenho dos Estudantes é menor que o de 20 anos atrás**. Agência Brasil. Publicado em 08/09/2016. Disponível em: https://www.opovo.com.br/noticias/brasil/2016/09/desempenho-de-estudantes-do-ensino-medio-e-menor-que-o-de-ha-20-anos.html. Acesso em 05 de janeiro de 2018.

VALENTE, José Armando. **Computadores e conhecimento: repensando a educação**. Campinas: Gráfica da Unicamp, 1993.

VASCONCELOS, Celso. **O desafio da qualidade da educação**. Brasília: CONAE, 2012.

VYGOTSKY, Lev Semynovich. Tradução: CIPOLLA NETO, José; BARRETO, Luis Silveira Menna; AFECHE, Solange Castro. **A Formação Social da Mente**. 4ª ed. Brasileira, São Paulo: Livraria Martins FontesEditora Ltda, 1991.

__________. Tradução: BEZERRA, Paulo. A Formação Social da Mente. São Paulo: Livraria Martins FontesEditora Ltda, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A - ATIVIDADE DIAGNÓSTICA

PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática
UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Escola Estadual Mauricio Augusto de Azevedo
Pesquisadora: Letsa Fabíola Barbosa Alves Silveira

Aluno (a): ____

1ª oficina - Diagnóstico Inicial

Resolva os problemas a seguir:

1- Walter morou em Portugal e no Brasil por um período total de 14 meses para aprender português. Ele aprendeu uma média de 130 novas palavras por mês quando morou em Portugal e uma média de 150 novas palavras por mês quando morou no Brasil. No total, ele aprendeu 1920 novas palavras.
Quanto tempo Walter morou em Portugal e quanto tempo ele morou no Brasil?

2- (PM SP 2014 – Vunesp). Uma pessoa foi a uma livraria e escolheu três livros: um romance, um de aventuras e um de ficção, porém, por motivos financeiros, decidiu que levaria apenas dois deles. Se comprar o romance e o livro de aventura, pagará R$ 53,00; se comprar o romance e o livro de ficção, pagará R$ 58,00 e, se comprar o livro de ficção e o livro de aventura, pagará R$ 55,00. O valor dos três livros juntos é:

3- Roberto utilizou apenas notas de R$ 10,00 e de R$ 50,00 para fazer um pagamento de R$ 350,00. Quantas notas de cada tipo ele utilizou, sabendo que no total foram 15 notas?

4- Uma editora publica um best-seller em potencial com três encadernações diferentes: capa mole, capa dura e encadernação de luxo. Cada exemplar de capa mole necessita de 1 minuto para a costura e de 2 minutos para a cola. Cada exemplar de capa dura necessita de 2 minutos para a costura e de 4 minutos para a cola. Cada exemplar com encadernação de luxo necessita de 3 minutos para a costura e de 5 minutos para a cola. Se o local onde são feitas as costuras fica disponível 6 horas por dia e o local onde se cola fica disponível 11 horas por dia, quantos livros de cada tipo devem ser feitos por dia de modo que os locais de trabalho sejam plenamente utilizados?

APÊNDICE B - ATIVIDADE DE INTERVENÇÃO

PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática
UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Escola Estadual Mauricio Augusto de Azevedo
Pesquisadora: Letsa Fabíola Barbosa Alves Silveira

PROFMAT

Aluno (a): ____

5ª oficina – Intervenção

Resolva os problemas a seguir:

1- Em uma competição escolar, todos os alunos da torcida da turma 32 tinham o número de sua turma estampado na camiseta e todos os alunos da torcida da turma 34 também tinham o número de sua turma estampado na camiseta. Pedro somou os números de todas as camisetas das duas torcidas, e obteve 2752 como resposta. Qual é o número de alunos na torcida da turma 32, se o número total de alunos nas duas torcidas é 84?

2- Num escritório há 3 impressoras: A, B e C . Em um período de 1 hora:
A e B juntas imprimem 150 folhas;
A e C juntas imprimem 160 folhas;
B e C juntas imprimem 170 folhas.
Em 1 hora, quanto cada impressora imprime sozinha?

3- Perguntado sobre a idade de seu filho Júnior, José respondeu o seguinte: “Minha idade quando somada a idade de Junior é igual a 47 anos; e quando somada a idade de Maria é igual a 78 anos. As idades de Maria e Junior somam 39 anos.” Qual a idade de Junior?

a) 2 anos b) 3 anos c) 4 anos d) 5 anos

4- Um negociante trabalha com as mercadorias A, B e C, se vender cada unidade de A por R$ 2,00, cada unidade de B por R$ 3,00 e cada unidade de C, por R$ 4,00, obtem-se uma receita de R$ 50,00. Mas, se vender cada unidade, respectivamente por R$ 2,0 R$6, R$3,00, a receita será de R$ 60,00; Calcule o número de unidades que ele possui de cada mercadoria.

APÊNDICE C - DIAGNÓSTICO FINAL

PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática
UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Escola Estadual Mauricio Augusto de Azevedo
Pesquisadora: Letsa Fabíola Barbosa Alves Silveira

PROFMAT

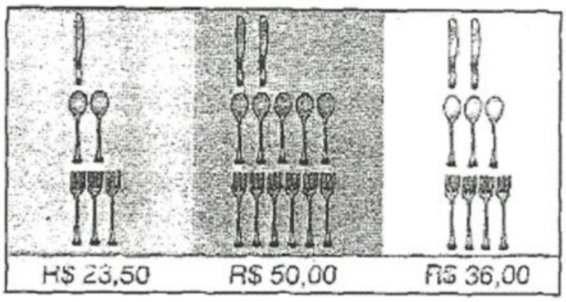
Aluno (a): ____

Oficina - Diagnóstico Final

Resolva os problemas a seguir:

1- Um teste é composto por 50 questões, sendo que por cada questão certa você ganha 3 pontos e por cada questão errada você perde 2 pontos. Se ao terminar essa prova você fez 75 pontos, quantas questões certas e erradas você fez?

2- Examinando os anúncios abaixo, conclua qual é o preço de cada faca, garfo e colher. O preço de cada faca, colher e garfo é respectivamente:



A) R$ 3,50; R$ 3,00; R$ 4,00.
B) R$ 5,50; R$ 8,00; R$ 4,00.
C) R$ 5,50; R$ 3,00; R$ 5,00.
D) R$ 5,50; R$ 3,00. R$ 4,00;

3- Um comerciante mandou seu empregado pesar três sacos de farinha. O rapaz voltou exausto e disse: “_ O primeiro e o segundo sacos, juntos, têm 110 quilogramas; O primeiro e o terceiro, juntos, têm 120 quilogramas; E o segundo e o terceiro têm 112 quilogramas.” Mas o comerciante queria saber quantos quilogramas tinha cada saco. Para o empregado não se cansar mais, descubra isso para ele.

4- (Adaptado) Na primeira gincana deste ano organizada pelo nosso colégio, foram montadas três barracas, que foram chamadas de B1, B2 e B3. As três barracas vendiam os mesmos tipos de alimentação: cachorro quente, pastel e batata frita. Cada uma dessas opções tinha o mesmo preço em todas as barracas. No fim da gincana o balanço feito sobre o consumo nas três barracas mostrou que:

- em B1 foram consumidos 28 cachorros quentes, 42 pastéis e 48 porções de fritas;
- em B2 foram consumidos 23 cachorros quentes, 50 pastéis e 45 porções de fritas;
- em B3 foram consumidos 30 cachorros quentes, 45 pastéis e 60 porções de fritas.

As barracas B1, B2 e B3 venderam R$ 102,00, R$ 95,00 e R$ 117,00, respectivamente. Qual o preço de cada cachorro quente, pastel e porção de fritas?

ANEXOS

ANEXO A – TERMO DE ASSENTIMENTO

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Autorizada pelo Decreto Estadual nº 7344 de 27.05.98

TERMO DE ASSENTIMENTO

Resolução 510/16 do Conselho Nacional de Saúde.

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa de mestrado intitulada "**O uso do GEOGEBRA para resolução de problemas com escalonamento de sistemas lineares**". Neste estudo pretendemos identificar as contribuições que a resolução de situações problemas proporcionam aos alunos do ensino médio, em especial ao conceito básico do método do escalonamento, para isso usaremos o aplicativo GEOGEBRA.

O motivo que nos leva a estudar esse assunto justifica-se através da importância de conhecermos as contribuições que a resolução de problemas proporciona aos alunos do Ensino Médio. Partindo disso, esse projeto nos possibilitará a apropriação de conhecimentos e técnicas que proporcionem melhores resultados no âmbito do ensino-aprendizagem no método de escalonamento de sistemas lineares no ensino médio.

Este estudo será realizado em três etapas: Diagnóstico inicial, Intervenção e Diagnóstico final.

O Diagnóstico inicial consiste na aplicação de umas situações problemas com o objetivo de coletar informações que permitam conhecer seus conhecimentos prévios sobre o método de escalonamento de sistemas lineares.

A Intervenção consiste na realização de oficinas envolvendo resolução de problemas usando escalonamento de sistemas com o auxílio do GEOGEBRA.

O Diagnóstico Final consiste na aplicação de situações problemas semelhantes ao Diagnóstico Inicial com o intuito de coletar informações acerca do aprendizado nas oficinas e também registrar as impressões dos alunos em relação ao estudo realizado.

Para participar do estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um termo de consentimento. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Você será esclarecido(a) em todas as formas que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não causará qualquer punição ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador que tratará a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação.

Este estudo não apresenta risco à saúde mental ou física, danos ou maleficência de qualquer natureza relacionada a sua participação. Os benefícios deste estudo são as possibilidades de aumento do conhecimento científico para área de educação, em especial da Matemática.

Os resultados estarão à sua disposição quando finalizados. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você. Os dados e instrumentos utilizados na pesquisa ficarão arquivados com o pesquisador responsável por um período de 5 anos, e após esse tempo serão destruídos. Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias, sendo que uma cópia será arquivada pelo pesquisador responsável, e a outra será fornecida a você.

Eu, ____
fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações, e o meu responsável poderá modificar a decisão de participar se assim o desejar. Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo assentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Janaúba, ____ de ______________ de 2017.

____

Assinatura do(a) menor

____

Assinatura do(a) pesquisador(a)

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, você poderá consultar:

PESQUISADOR(A) RESPONSÁVEL: LETSA FABÍOLA B. ALVES SILVEIRA
ENDEREÇO: RUA MADRE PIEDADE,719,ISAIAS PEREIRA
JANAÚBA/MG – CEP: 39440-000
FONE: (38) 9 91514091 / E-MAIL: .letsa_jba@yahoo.com.br

COORDENAÇÃO DO PROFMAT / UESB
ESTRADA DO BEM-QUERER, KM 04. CAIXA POSTAL 95.
VITÓRIA DA CONQUISTA (BA) - CEP 45083-900
FONE: (77) 3424-8731 / E-MAIL: profmat@uesb.edu.br

ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Autorizada pelo Decreto Estadual nº 7344 de 27.05.98

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Resolução nº 510, de 07 de Abril de 2016 do Conselho Nacional de Saúde.

O presente termo em atendimento à Resolução 510/16, destina-se a esclarecer ao participante da pesquisa intitulada "**O uso do GEOGEBRA para resolução de problemas com escalonamento de sistemas lineares**", sob responsabilidade da pesquisadora **Letsa Fabíola Barbosa Alves Silveira**, do curso de **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT** do **Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas**, os seguintes aspectos:

Objetivo: Identificar as contribuições que a resolução de situações problemas proporcionam aos alunos do ensino médio, em especial ao conceito básico do método do escalonamento, para isso usaremos o aplicativo GEOGEBRA.

Metodologia: Este estudo será realizado em três etapas: Diagnóstico inicial, Intervenção e Diagnóstico final.

O Diagnóstico inicial consiste na aplicação de algumas situações problemas com o objetivo de coletar informações que permitam conhecer seus conhecimentos prévios sobre o método de escalonamento de sistemas lineares.

A Intervenção consiste na realização de oficinas envolvendo resolução de problemas usando escalonamento de sistemas com o auxílio do GEOGEBRA. Nessa etapa, o participante deverá estar presente na realização de 2 oficinas, que serão ministradas no mesmo turno que o aluno frequenta a escola, e 4 oficinas no contra turno.

O Diagnóstico Final consiste na aplicação de situações problemas semelhantes ao Diagnóstico Inicial com o intuito de coletar informações acerca do aprendizado nas oficinas e também registrar as impressões dos alunos em relação ao estudo realizado.

Justificativa e Relevância: Estudar esse assunto justifica-se através da importância de conhecermos as contribuições que a resolução de problemas proporciona aos alunos do Ensino Médio. Partindo disso, esse projeto nos possibilitará a apropriação de conhecimentos e técnicas que proporcionem melhores resultados no âmbito do ensino-aprendizagem do método de escalonamento de sistemas no ensino médio.

Desconfortos e riscos: Este estudo não apresenta risco a saúde mental ou física, danos ou maleficência de qualquer natureza relacionada a sua participação.

Confidencialidade do estudo: A pesquisadora tratará a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Você não será identificado em nenhuma publicação. Seu nome ou o material que indique sua participação não será liberado sem a permissão do responsável por você.

Benefícios: Os benefícios deste estudo são as possibilidades de aumento do conhecimento científico para área de educação, em especial da Matemática.

Garantia de esclarecimento: Você será esclarecido(a) em todas as formas que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. O responsável por você poderá retirar o consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento.

Participação Voluntária: A sua participação é voluntária e a recusa em participar não causará qualquer punição ou modificação na forma em que é atendido(a) pelo pesquisador. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira.

Consentimento para participação: Eu estou de acordo com a participação no estudo descrito acima. Eu fui devidamente esclarecido quanto os objetivos da pesquisa, aos procedimentos aos quais serei submetido e os possíveis riscos envolvidos na minha participação. Os pesquisadores me garantiram disponibilizar qualquer esclarecimento adicional que eu venha solicitar durante o curso da pesquisa e o direito de desistir da participação em qualquer momento, sem que a minha desistência implique em qualquer prejuízo à minha pessoa ou à minha família, sendo garantido anonimato e o sigilo dos dados referentes a minha identificação, bem como de que a minha participação neste estudo não me trará nenhum benefício econômico.

Eu, ____, aceito livremente participar do estudo intitulado "**O uso do GEOGEBRA para resolução de problemas com escalonamento de sistemas lineares**" desenvolvido pela acadêmica **Letsa Fabíola Barbosa Alves Silveira**, sob a orientação da Professora **Drª. Alexsandra Oliveira Andrade** da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB).

Nome do (a) participante

____

Nome do (a) responsável legal

____

COMPROMISSO DO PESQUISADOR
Eu discuti as questões acima apresentadas com cada participante do estudo. É minha opinião que cada indivíduo entenda os riscos, benefícios e obrigações relacionadas a esta pesquisa.

Janaúba-MG, ____ de ______________ de 2017.

Assinatura do responsável

Assinatura do Pesquisador

Para mais informações, pode entrar em contato com:

Letsa F. B. Alves Silveira - Fone: (38) 9 9151-4091.
Coordenação do PROFMAT / UESB – Fone: (77) 3424-8731