Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

A Conjectura de Goldbach e a intuição matemática

Carolina da Silva Bitencourt

Salvador - Bahia
Fevereiro de 2018

A Conjectura de Goldbach e a intuição matemática

Carolina da Silva Bitencourt

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey.

Salvador - Bahia

Fevereiro de 2018

Dedico este trabalho a minha família, em especial, a minha filha, Laura

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA), com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Bitencourt, Carolina da Silva
A Conjectura de Goldbach e a intuição matemática / Carolina da Silva Bitencourt. -- Salvador, 2018.
41 f. : il

Orientador: Joseph Nee Anyah Yartey.
Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, 2018.

1. Conjectura de Goldbach. 2. Intuição matemática. 3. Números primos. I. Yartey, Joseph Nee Anyah. II. Título.

A CONJECTURA DE GOLDBACH E A INTUIÇÃO MATEMÁTICA

CAROLINA DA SILVA BITENCOURT

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 23/02/2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello
UFBA

Prof. Dr. Darllan Conceição Pinto
UFBA

Agradecimentos

Agradeço a Deus, em primeiro lugar.

A meu marido Erisvaldo pelo amor, incentivo e cumplicidade ao longo dessa jornada, na qual tivemos a maior alegria de nossas vidas: o nascimento da nossa filha Laura.

A minha mãe, Maria das Graças, pelo apoio, amor e carinho; e a minhas irmãs, Catrina e Camila, pela torcida.

A meu pai (*in memorian*), que se estivesse aqui, estaria muito feliz e orgulhoso por este momento.

A turma do Profmat 2015. Em especial, a Evandro, Felipe e Raimundo, pelos dias e noites de estudo, presenciais e a distância, pela união, amizade e parceria.

A meus colegas de trabalho pelo incentivo.

A meus alunos e alunas pela colaboração e solicitude ao realizar a atividade proposta para o desenvolvimento deste trabalho.

A meu orientador, professor Joseph Nee, pela colaboração, paciência, compreensão e atenção, que muito contribuíram para meu crescimento pessoal e profissional.

A todos professores do curso, grandes mestres, pelas aulas e discussões que proporcionaram uma ampliação do conhecimento.

Ao coordenador do curso professor Marco Antonio.

A todos e todas que de maneira direta, ou indireta, contribuíram para conclusão deste trabalho.

"Um bom ensino da Matemática
forma melhores hábitos de pensamento
e habilita o indivíduo a usar melhor a
sua inteligência."
Irene de Albuquerque

Resumo

Por meio de cartas, o matemático Christian Goldbach (1690-1764) correspondia-se com o matemático Euler, discutindo resoluções de problemas. Em 1742, Goldbach, em sua carta a Euler, escreveu um dos problemas mais interessantes da Teoria dos Números: a Conjectura de Goldbach, cujo enunciado é "todo número par, maior que dois, é a soma de dois primos". Este problema permanece ainda sem solução, porém há várias tentativas de demonstrá-la. Neste trabalho são apresentadas duas dessas tentativas. Além disso, foi realizada uma atividade com alunos do Ensino Médio de uma escola pública para que os mesmos inferissem a conjectura utilizando um material manipulável auxiliar. O principal objetivo da aplicação desta atividade é o desenvolvimento da intuição matemática, importante na resolução de problemas.

Palavras-chave: Números Primos, Conjectura de Goldbach

Abstract

Through letters, the mathematician Christian Goldbach (1690-1764) corresponded with the mathematician Euler, discussing problem resolutions. In 1742, Goldbach, in his letter addressed Euler, wrote one of the most interesting problems of Number Theory arose: the Goldbach Conjecture, whose statement is "every even number, greater than two, is the sum of two primes".This problem remains unsolved, but there are several attempts to demonstrate it. In this paper two of these attempts are presented. In addition, an activity was carried out with high school students of a public school so that they infer the conjecture using an auxiliary manipulative material. The main objective of the application of this activity is the development of the mathematical intuition, important in the resolution of problems.

Key words: Prime Numbers, Goldbach's Conjecture

Conteúdo

Introdução

A Teoria dos Números é a parte da Matemática cujo principal objetivo é o estudo dos números inteiros e suas propriedades. Há registros que indicam que os gregos, por volta de 500 a.C., já estudavam esses números. Mesmo com uma longa história, originada nas antigas civilizações da humanidade, ainda hoje, a Teoria dos Números continua a despertar o interesse de pesquisadores.

Um dos problemas mais antigos em Teoria dos Números, que permanece como não resolvido, é a Conjectura de Goldbach. O matemático prussiano Christian Goldbach (1690-1764) deve sua fama à elaboração de um dos mais interessantes desafios para a atual geração de matemáticos que, apesar de ter um enunciado simples, de fácil entendimento e que pode ser testado para uma grande quantidade de números naturais, ainda não foi demonstrado.

Em 1742, a partir de uma carta enviada ao matemático Leonhard Euler, Goldbach trouxe o seguinte problema:

"Se n é par e $n \geqslant 4$, então n é a soma de dois números primos."

Esta assertiva ficou conhecida como a Conjectura de Goldbach. Ainda não há demonstração para esta conjectura, porém já existem resultados importantes e significativos nesse sentido. Os esforços para comprovação desta afirmação resultaram em vários teoremas.

Este trabalho tem por finalidade estimular a intuição matemática no Ensino Básico para inferir a Conjectura de Goldbach por meio de uma atividade escrita e o uso de um material manipulável auxiliar. Para uma melhor organização, foi dividido em etapas: pesquisa bibliográfica e revisão da literatura, elaboração da proposta de atividade e material manipulável a ser utilizado, aplicação da atividade e análise das informações obtidas.

Na primeira etapa, foi feita uma pesquisa sobre a Conjectura de Goldbach, seu enunciado, parte histórica e algumas das várias tentativas de demonstração desta afirmação. Foi feita também uma breve revisão de definições, proposições e teoremas relativos a Teoria dos Números, necessária para um melhor entendimento da assertiva em questão.

Na segunda etapa, foi realizada a elaboração da atividade a ser aplicada em sala de aula. Inicialmente, a proposta era utilizar um jogo *online* sobre a Conjectura de Goldbach, disponível em http://nautilus.fis.uc.pt/mn/goldbach/index.html, porém devido a falta de estrutura, foi inviável. A atividade alternativa foi a confecção de um material, no estilo do jogo, para facilitar a conclusão dos estudantes sobre o que era proposto.

Na terceira etapa, a atividade foi aplicada em duas turmas distintas do 2º ano do Ensino Médio de um colégio público da rede estadual de ensino. Por fim, na quarta etapa, foi feita uma análise diante das informações obtidas, tanto das relativas aos dados disponíveis na atividade como em relação as opiniões manifestadas durante e após a aplicação da atividade.

A dissertação está estruturada e organizada de maneira a tornar a leitura fluente. Sendo assim, no capítulo 1, serão abordados algumas definições e resultados sobre Divisibilidade e Números Primos. No capítulo 2, será feita uma abordagem histórica da Conjectura de Goldbach bem como algumas tentativas de demonstração desta. No capítulo 3, será relatada uma atividade proposta em sala de aula, em uma escola de Ensino Médio, como tentativa de estimular o raciocínio indutivo para se inferir a Conjectura de Goldbach.

Capítulo 1

Um pouco de Teoria dos Números

Um dos conceitos mais importantes da Matemática é o de número primo. Muitos problemas famosos estão associados a esses números, alguns deles ainda sem solução, como a conjectura de Goldbach. Neste capítulo, são abordados algumas definições, proposições e teoremas da Teoria dos Números, relativos à divisibilidade, máximo divisor comum, números primos e congruências, que fundamentam este trabalho [8].

1.1 Divisibilidade: definição e propriedades

Definição 1.1.1. *Sejam a, b números inteiros. Dizemos que a divide b, denotado por $a|b$, se existe um número inteiro c tal que $b = ac$. A notação $a \nmid b$ significa que a não divide b.*

O número inteiro c é único se $a \neq 0$, pois, se c' é um número tal que $b = ac'$, então $ac - ac' = 0 \Rightarrow a(c - c') = 0 \Rightarrow c = c'$.

Proposição 1.1.1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Então,*

(i) $1|c, a|a$ *e* $a|0$*;*

(ii) $0|a \iff a = 0$*;*

(iii) *se* $a|b$ *e* $b|c$*, então* $a|c$*.*

Demonstração. (i) $1|c$ pois $c = 1.c$, $a|a$ pois $a = a.1$ e $a|0$ pois $0 = a.0$.

(ii) Suponhamos que $0|a$. Logo, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = c.0$. Isto é, $a = 0$. Reciprocamente, se $a = 0$, então $0 = c.0$, para todo $c \in \mathbb{Z}$.

(iii) Se $a|b$ e $b|c$, então, por definição, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $b = am$ e $c = bn$. Assim, $c = (am)n = a(mn)$. Logo, $a|c$.

□

Proposição 1.1.2. *Se $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, então*

$$a|b \quad e \quad c|d \Rightarrow a.c|b.d$$

Demonstração. Se $a|b$ e $c|d$, então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $b = am$ e $d = cn$. Então, $bd = (am).(cn) = (ac).(mn)$. Portanto, $ac|bd$. □

Proposição 1.1.3. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tais que $a|(b \pm c)$. Então, $a|b \Leftrightarrow a|c$.*

Demonstração. Como $a|(b+c)$, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $b + c = am$. Se $a|b$, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $b = an$. Então, $an + c = am \Rightarrow c = a(m - n)$. Logo, $a|c$. Agora, se $a|(b - c)$ e $a|b$, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $b - c = am$ e $b = a.n$. Assim, $c = a.(n - m)$. Analogamente, mostra-se que $a|c \Rightarrow a|b$. □

Proposição 1.1.4. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tais que $a|b$ e $a|c$, então para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, $a|(xb + yc)$*

Demonstração. Se $a|b$ e $a|c$, então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $b = a.m$ e $c = a.n$. Então, $xb + yc = xam + yan = a.(xm + yn)$. Logo, $a|(xb + yc)$. □

Teorema 1.1.1 (Divisão Euclidiana)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Existem dois únicos inteiros q e r tais que $a = bq + r, 0 \leq r < |b|$.*

Demonstração. Seja $S = \{x = a - by; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\})$. Pela Propriedade Arquimediana, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(-b) > -a$. Logo, $a - nb > 0$ e assim, $S \neq \varnothing$. Pelo Princípio da Boa Ordenação, S possui um menor elemento $r, r \geq 0$. Suponhamos que $r = a - bq$. Para mostrar que $r < |b|$, suponhamos, por absurdo, que $r \geq |b|$. Portanto, existe $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $r = |b| + s$, logo $0 \leq s < r$, isto é, $s = a - (q \pm 1)b \in S$, com $r < s$. Contradição, pois r é o menor elemento de S. Agora, suponha que $a = bq + r = bq' + r'$, com $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r' < |b|$. De $bq + r = bq' + r'$, obtem-se que $b(q - q') = r' - r$, o que imolica que $|b||q - q'| = |r' - r| < |b|$ e assim, $q = q'$ e, portanto, $r = r'$. □

1.2 Máximo Divisor Comum

Definição 1.2.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, não simultaneamente nulos. O número inteiro $d, d \neq 0$ é um divisor comum de a e b se $d \mid a$ e $d \mid b$.*

Definição 1.2.2. *O número inteiro $d, d \geq 0$, é um máximo divisor comum (mdc) de a e b se:*

(i) $d \mid a$ e $d \mid b$;

(ii) Se $d' \mid a$ e $d' \mid b$, então $d' \mid d$.

O mdc de a e b será denotado por (a, b).

Lema 1.2.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a < na < b$. Se existe $(a, b - na)$, então (a, b) existe e*

$$(a, b) = (a, b - na).$$

Demonstração. Seja $d = (a, b - na)$. Como $d \mid a$ e $d \mid (b - na)$, pela Proposição 1.1.4, $d \mid b$, já que $b = b - na + na$. Assim, $d \mid a$ e $d \mid b$. Suponha que $d' \mid a$ e $d' \mid b$. Logo, $d' \mid a$ e $d' \mid b - na$. Portanto, $d' \mid d$ e assim, $d = (a, b)$. □

Teorema 1.2.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos, $I(a, b) = \{xa + yb; x, y \in \mathbb{Z}\}$ e $d\mathbb{Z} = \{ld; l \in \mathbb{Z}\}$. Se $d = min[I(a, b) \cap \mathbb{N}]$, então,*

(i) $d = (a, b)$;

(ii) $I(a, b) = d\mathbb{Z}$.

Corolário 1.2.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, ambos não nulos, e $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $(na, nb) = n(a, b)$.*

Corolário 1.2.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, ambos não nulos, tem-se que $\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = 1$.*

1.3 Números Primos

Definição 1.3.1. *Um número inteiro maior do que 1 e que só é divisível por 1 e por ele próprio é chamado de número primo.*

Dados dois números primos p e q e um número natural a qualquer, decorrem da definição os seguintes fatos:

(i) Se $p \mid q$, então $p = q$.
De fato, pois, já que $p \mid q$ e q é primo, então $p = 1$ ou $p = q$. Como p é primo, $p = q$.

(ii) Se $p \nmid a$, então $(p, a) = 1$.
De fato, se $(p, a) = d$, então $d \mid a$ e $d \mid p$. Assim, $d = p$ ou $d = 1$. Porém, $d \neq p$, pois $p \nmid a$. Portanto, $d = 1$.

Um número maior do que 1 e não primo é um *número composto.*

Proposição 1.3.1. *Dois números inteiros a e b são primos entre si, isto é, $(a, b) = 1$ se, e somente se, existem números inteiros m e n tais que $ma + nb = 1$.*

Demonstração. Suponha que a e b sejam primos entre si. Logo, $(a, b) = 1$. Seja $d = min[I(a, b) \cap \mathbb{N}]$. Por *(ii)* do Teorema 1.2.1, $d \in d\mathbb{Z} = I(a, b)$. Logo, existem números inteiros m e n tais que $d = ma + nb$; por *(i)*, $d = (a, b)$ isto é, $ma + nb = (a, b) = 1$. Reciprocamente, suponha que existam números inteiros m e n tais que $ma+nb = 1$. Seja $d = (a, b)$. Então, como $d|a$ e $d|b$, tem-se $d|(ma + nb)$, ou seja, $d|1$ e portanto, $d = 1$. □

Lema 1.3.1 (Lema de Gauss). *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $a|bc$ e $(a, b) = 1$, então $a|c$.*

Demonstração. Se $a|bc$, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = ak$. Pela Proposição 1.3.1, como $(a, b) = 1$, $ma + nb = 1$. Então, multiplicando por c ambos os lados da igualdade,

$$mac + nbc = c \Longrightarrow mac + nak = c \Longrightarrow (mc + nk)a = c \Longrightarrow a|c$$

□

Proposição 1.3.2 (Lema de Euclides). *Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$, com p primo. Se $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.*

Demonstração. Por hipótese, $p \mid ab$. Suponha que $p \nmid a$. Assim, $(p, a) = 1$. Daí, como $p \mid ab$ e $(p, a) = 1$, pelo Lema de Gauss, $p \mid b$. □

Exemplo 1.3.1. $7|154$ *e* $154 = 11.14$*. Tem-se que* $7 \nmid 11$ *e* $7|14$*.*

Corolário 1.3.1. *Se $p, p_1, ..., p_n$ são números primos e, se $p \mid p_1...p_n$, então $p = p_i$, para algum $i = 1, ..., n$.*

Teorema 1.3.1 (Teorema Fundamental da Aritmética). *Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.*

Demonstração. Para demonstrar o Teorema Fundamental da Aritmética, será utilizado o Princípio de Indução. Se $n = 2$, então n é primo. Suponhamos o resultado válido para todo número natural menor que n, vamos mostrar que vale para n. Se n é primo, nada a mostrar. Se n é composto, então existem números naturais n_1, n_2 tais que $n = n_1n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Assim, pela hipótese de indução, existem números primos $p_1, p_2..., p_r$ e $q_1, q_2..., q_s$ tais que $n_1 = p_1p_2...p_r$ e $n_2 = q_1q_2...q_s$. Logo, $n = p_1p_2...p_rq_1q_2...q_s$. Agora, suponhamos que $n = p_1p_2...p_r = q_1q_2...q_s$, em que p_i e q_j são números primos, para $i = 1, ..., r$ e $j = 1, ..., s$. Pelo corolário, $p_1 = q_j$, para algum j, pois $p_1 \mid q_1...q_s$. Vamos supor que $p_1 = q_1$. Assim, $p_2...p_r = q_2...q_s$. Como $p_2...p_r < n$, a hipótese de indução implica que $r = s$ e $p_i = q_j$. □

Teorema 1.3.2. *Dado um número inteiro $n \neq 0, 1, -1$, existem primos $p_1 < ... < p_r$ e $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{N}$, univocamente determinados, tais que $n = \pm(p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r})$.*

Proposição 1.3.3. *Seja* $n = p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$ *um número natural. Se* $n' \mid n$*, então* $n' = p_1^{\beta_1}...p_r^{\beta_r}$*, em que* $0 < \beta_i \leq \alpha_i, i = 1, ..., r$.

Seja $d(n)$ o número de divisores positivos do número natural n. Então, tem-se que se $n = p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$, em que $p_1, ..., p_r$ são primos e $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \mathbb{N}$, então $d(n) = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 1) + ... + (\alpha_r + 1)$.

Teorema 1.3.3. *Se* n *não é primo, então* n *possui um fator primo menor ou igual a* $\sqrt{n}$.

Demonstração. Se n não é primo, ele é, por definição, composto. Então, pode ser escrito como $n = n_1 n_2$. Suponha, sem perda de generalidade, que $n_1 < n_2$. Então, $n_1 \leq \sqrt{n}$. Caso contrário, $n = n_1 n_2 > \sqrt{n}.\sqrt{n} = n$, o que é absurdo. Logo, $n_1 \leq \sqrt{n}$. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, n_1 possui pelo menos um fator primo p. Assim, $p < n_1$ e, portanto, $p < \sqrt{n}$. □

No livro IX dos *Elementos*, Euclides mostrou, por absurdo, que o conjunto dos números primos é infinito [8].

Teorema 1.3.4. *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. Suponha que exista apenas um número finito de números primos $p_1, p_2, ..., p_r$. Seja $n = p_1 p_2 ... p_r + 1$ um número natural. Pelo Teorema 1.3.1, o número n possui um fator primo que deve ser um dos $p_1, p_2, ..., p_r$. Logo, $p | p_1 p_2 ... p_r$. Como $p | n$, pela Proposição *1.3.1*, tem-se que $p | 1$, o que é um absurdo, pois p é primo. □

Lema 1.3.2. *Se um número natural* $n > 1$ *não é divisível por nenhum primo* p *tal que* $p^2 \leq n$*, então ele é primo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que n não seja divisível por nenhum primo p tal que $p^2 \leq n$ e que n não seja primo. Seja q o menor primo que divide n. Logo, existe um número k tal que $n = kq$, com $q \leq k$. Daí, $q^2 \leq kq$, isto é $q^2 \leq n$. Assim, n é divisível por um número primo q tal que $q^2 \leq n$, o que é um absurdo. □

Euclides mostrou que existem infinitos primos. A partir daí, começou uma procura para se determinar uma fórmula geral para a sequência de primos. Surgiram alguns testes de primalidade, muitas vezes, pouco eficientes para números muito grandes. Para se obter uma lista de números primos até uma dado número, será apresentado um dos métodos mais antigos para elaborar tabelas de números primos: o Crivo de Eratóstenes. O método de Eratóstenes para listar os primos menores que um certo inteiro positivo $n > 1$, consiste do seguinte:

(i) Escrever uma lista com todos os inteiros entre 2 e n;

(ii) Para cada primo $p \leq \sqrt{n}$, elimina-se da lista todos os múltiplos de p, exceto p;

(iii) Os que restam são os números primos menores do que n.

Exemplo 1.3.2. *Para $n = 50$, tem-se:*

2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
13	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*
24	*25*	*26*	*27*	*28*	*29*	*30*	*31*	*32*	*33*	*34*
35	*36*	*37*	*38*	*39*	*40*	*41*	*42*	*43*	*44*	*45*
46	*47*	*48*	*49*	*50*						

Como $\sqrt{50} < 7$, os múltiplos de 2, 3 e 5 são eliminados da lista, com exceção deles próprios. Assim, obtem-se todos os números primos menores do que 50:

2	*3*	*5*	*7*	*11*	*13*	*17*	*19*
23	*29*	*31*	*37*	*41*	*43*	*47*	

Seja $x \in \mathbb{N}$. A função $\pi(x)$ é chamada de *função contagem dos primos* e determina a quantidade de números primos p tais que $p \leq x$.

Teorema 1.3.5 (Teorema dos Números Primos)**.**

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{ln(x)}} = 1$$

1.4 Congruências

Definição 1.4.1. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais.*

Quando a e b são congruentes módulo m, escreve-se $a \equiv b \, mod \, m$.

Exemplo 1.4.1. $13 \equiv 18 \, mod \, 5$

Quando a e b não são congruentes módulo m, dizemos que a e b são *incongruentes* e escreve-se $a \not\equiv b \, mod \, m$.

A congruência módulo m é uma relação de equivalência.

Proposição 1.4.1. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se:*

(i) $a \equiv a \, mod \, m$ (reflexiva)

(ii) se $a \equiv b \, mod \, m$, então $b \equiv a \, mod \, m$ (simétrica)

(iii) se $a \equiv b \bmod m$ e $b \equiv c \bmod m$, então $a \equiv c \bmod m$ (transitiva)

Proposição 1.4.2. *Suponha que $a, b, m \in \mathbb{Z}, m > 1$. Tem-se que $a \equiv b \bmod m$ se, e somente se, $m|b-a$.*

Demonstração. Sejam $a = mq + r, 0 \leq r < m$ e $b = mq' + r', 0 \leq r < m$ as divisões euclidianas de a e b por m. Logo, $b - a = m(q' - q) + (r' - r)$. Por definição, $a \equiv b \bmod m$ se, e somente se, $r = r'$, o que equivale a dizer que $m|b-a$, já que $|r - r'| < m$. □

Definição 1.4.2. *Um sistema completo de resíduos módulo m é todo conjunto de números inteiros cujos restos pela divisão por m são os números $0, 1, 2, ..., m-1$, sem repetições e numa ordem qualquer.*

Proposição 1.4.3. *Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}, m > 1$.*

(i) Se $a \equiv b \bmod m$ e $c \equiv d \bmod m$, então $a + c \equiv b + d \bmod m$;

(ii) Se $a \equiv b \bmod m$ e $c \equiv d \bmod m$, então $ac \equiv bd \bmod m$.

Demonstração. Suponhamos que $a \equiv b \bmod m$ e $c \equiv d \bmod m$. Pela Proposição 1.4.2, $m|b-a$ e $m|d-c$.

(i) Pela Proposição 1.1.4, $m|(b-a)+(d-c)$ e, portanto, $m|(b+d)-(a+c)$ e assim, $a + c \equiv b + d \bmod m$.

(ii) Tem-se que $bd - ac = bd - ad + ad - ac = d(b-a) + a(d-c)$. Como $m|b-a$ e $m|d-c$, pela Proposição 1.1.4, $m|d(b-a)+a(d-c)$ e, portanto, $m|bd-ac$. Logo, $ac \equiv bd \bmod m$.

□

Corolário 1.4.1. *Para todos $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b \bmod m$, então $a^n \equiv b^n \bmod m$.*

Proposição 1.4.4. *Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que $a + c \equiv b + c \bmod m \iff a \equiv b \bmod m$*

Demonstração. Se $a + c \equiv b + c \bmod m$, então $m|(b+c)-(a+c)$, isto é, $m|b-a$. A recíproca decorre da Proposição 1.4.3. □

Proposição 1.4.5. *Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}, m > 1$. Então, $ac \equiv bc \bmod m \iff a \equiv b \bmod \frac{m}{(c,m)}$.*

Demonstração. Tem-se que: $ac \equiv bc \bmod m \iff m|(b-a)c \iff \frac{m}{(c,m)}|(b-a)\frac{c}{(c,m)} \iff \frac{m}{(c,m)}|b-a \iff a \equiv b \bmod \frac{m}{(c,m)}$, já que $(\frac{m}{(c,m)}, \frac{c}{(c,m)}) = 1$. □

Corolário 1.4.2. *Sejam* $a, b, c, m \in \mathbb{Z}, m > 1$ *e* $(c, m) = 1$*. Tem-se que:* $ac \equiv bcmodm \iff a \equiv b \, mod \, m$*.*

Definição 1.4.3. *Congruência linear em uma variável é a congruência da forma* $ax \equiv b \, mod \, m$*, em que* x *é a incógnita.*

Proposição 1.4.6. *Dados* $a, b, m \in \mathbb{Z}, m > 1$*, a congruência* $ax \equiv bmodm$ *possui solução se, e somente se,* $(a, m)|b$*.*

Demonstração. Seja x_1 uma solução da congruência $ax \equiv bmodm$. Logo, $m|(ax_1 - b)$, isto é, existe y_1 tal que $ax_1 - b = my_1$. Assim, a equação $ax - my = b$ admite solução. Como $(a, m)|a$ e $(a, m)|m$, então $(a, m)|(ax - my)$, isto é, $(a, m)|b$. Reciprocamente, suponhamos que $(a, m)|b$. Então, a equação diofantina $ax - my = b$ admite solução x_1, y_1. Portanto, $ax_1 = b + my_1$. logo, x_1 é solução da congruência, já que $ax_1 \equiv b \, mod \, m$. □

Definição 1.4.4. *Um sistema completo de soluções incongruentes da congruência* $ax \equiv b \, mod \, m$ *é uma coleção completa de soluções duas a duas incongruentes módulo m.*

Teorema 1.4.1. *Sejam* $a, b, m \in \mathbb{Z}, m > 1$ *e* $(a, m)|b$*. Se* x_0 *é uma solução da congruência* $ax \equiv b \, mod \, m$*, então*

$$x_0, x_0 + \tfrac{m}{d}, x_0 + 2\tfrac{m}{d} + ... + x_0 + (d - 1)\tfrac{m}{d},$$

em que $d = (a, m)$*, formam um sistema completo de soluções da congruência, duas a duas incongruentes módulo m.*

Exemplo 1.4.2. *A congruência* $6x \equiv 3 \, mod \, 15$ *tem solução, pois* $(6, 15) = 3$ *e como* $b = 3, (6, 15)|3$*. Temos que* $15|6x - 3 \iff 6x_0 - 15y_0 = 3 \implies 2x0 - 5y0 = 1$*. Uma solução particular é* $x_1 = 3$*. E assim, as soluções são:*

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3 \\
x_2 &= x_1 + \frac{m}{d} = 3 + \frac{15}{3} = 8 \\
x_3 &= x_1 + 2\frac{m}{d} = 3 + \frac{15}{3} = 13
\end{aligned}$$

Portanto, $S = \{3, 8, 13\}$

Corolário 1.4.3. *Se* $(a, m) = 1$*, então a congruência* $ax \equiv b \, mod \, m$ *possui uma única solução módulo m.*

Uma congruência $ax \equiv bmodm$ que possui solução é equivalente a uma congruência da forma $x \equiv cmodm$. Para resolver sistemas de congruências do tipo $a_i x \equiv b_i modn_i, i = 1, ..., r$, será utilizado o teorema abaixo. Para que tal sistema possua solução, é necessário que $(a_i, n_i)|b_i$ e observar que o sistema é equivalente a $x \equiv c_i \, mod \, m_i, i = 1, ..., r$. [8]

Teorema 1.4.2 (Teorema Chinês do Resto)**.** *Se* $(m_i, m_j) = 1$*, para todo* $m_i, mj, i \neq j$*, então o sistema* $X \equiv c_i \, mod \, m_i, i = 1, ..., r$ *possui uma única solução módulo* $M = m_1 m_2 ... m_r$*. As soluções são* $x = M_1 y_1 c_1 + ... + M_r y_r c_r + tM$*, em que* $t \in \mathbb{Z}, M_i = M/m_i$ *e* y_i *é solução de* $M_i Y \equiv 1 \, mod \, m_i, i = 1, ..., r$*.*

Demonstração. Como $m_i | M_j$, se $i \neq j$, e $M_i yi] \equiv \; mod \, m_i$, então

$$x = M_1 y_1 c_1 + ... + M_r y_r c_r + tM \equiv \; M_i y_i c_i \equiv c_i \, mod \, m_i.$$

Logo, x é uma solução do sistema de congruências. Por outro lado, se x' é outra solução de $X \equiv c_i \, mod \, m_i, i = 1, ..., r$, então

$$x \equiv x' \, mod \, m, \forall i, i = 1, ..., r$$

. Como $(m_i, m_j) = 1, i \neq j$, tem-se $[m_1 m_2 ... m_r] = m_1 m_2 ... m_r = M$, sendo $[m_1 m_2 ... m_r]$ o menor múltiplo comum entre $m_1 m_2 ... m_r$ (mmc). Se $x \equiv x' \, mod \, m, i = 1, ..., r$, então $m_i | x' - x, \forall i$. Sendo $x' - x$ um múltiplo de cada m_i, segue-se que $[m_1 m_2 ... m_r] | x' - x$, isto é, $M | x' - x$. Logo, $x \equiv x' \, mod \, M, \forall i, i = 1, ..., r$ e portanto, x é a única solução. □

Exemplo 1.4.3. *Dado o sistema*

$$\begin{aligned} X &\equiv 1 \, mod \, 5 \\ X &\equiv 3 \, mod \, 7 \\ X &\equiv 5 \, mod \, 9, \end{aligned}$$

vamos resolvê-lo utilizando o Teorema Chinês do Resto. Assim, sejam $m_1 = 5, m_2 = 7, m_3 = 9$*. Como* $(5, 7) = (5, 9) = (7, 9) = 1$*, o sistema possui única solução. Então*

$$\begin{aligned} M &= 5.7.9 = 315 \\ M_1 &= \tfrac{M}{m_1} = \tfrac{315}{5} = 63 \\ M_2 &= \tfrac{M}{m_2} = \tfrac{315}{7} = 45 \\ M_3 &= \tfrac{M}{m_3} = \tfrac{315}{9} = 35 \end{aligned}$$

Daí, encontrando $y_i, i = 1, 2, 3$*, solução de* $M_i Y \equiv 1 \, mod \, m_i$

$$\begin{aligned} 63Y &\equiv 1 \, mod \, 5 \Longrightarrow y_1 = 2 \\ 45Y &\equiv 1 \, mod \, 7 \Longrightarrow y_2 = 5 \\ 35Y &\equiv 1 \, mod \, 9 \Longrightarrow y_3 = 8 \end{aligned}$$

Portanto, como $c_1 = 1, c_2 = 3, c_3 = 5$*, a solução é dada por:*

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{3} M_i y_i c_i = 63.2.1 + 45.5.3 + 35.8.5 = 2201 \\ x &= 2201 \equiv 311 \, mod \, 315 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{311\}$*.*

Capítulo 2

A Conjectura de Goldbach

2.1 Christian Goldbach

Christian Goldbach nasceu em 1690 na cidade de Königsberg, antiga Prússia (atualmente, Kalingrado, na Rússia). Conheceu diversos matemáticos como Leibniz (1646 - 1716), Leonhard Euler (1707 - 1783) e Bernoulli (1695 - 1726) [2]. Tornou-se professor na Academia de Ciências de São Petersburgo, Rússia, em 1725, destacando-se principalmente por seus estudos sobre teoria das curvas, teoria das equações e somas infinitas [6].

Por meio de cartas, Goldbach correspondia-se com o matemático Euler, discutindo resoluções de problemas e solicitando que Euler verificasse seus resultados. Em uma dessas correspondências, em 1742, foi enunciado o que ficou conhecido como a Conjectura de Goldbach.

Goldbach faleceu em Moscou, no dia 20 de novembro de 1764, deixando parte de sua obra incompleta [12].

2.2 A Conjectura de Goldbach

Em uma das cartas de Goldbach enviadas ao matemático Euler, surgiu um dos mais interessantes problemas da Teoria dos Números: a Conjectura de Goldbach. Esta correspondência,*Carta XLIII* (Figura 2.1), datada de 7 de julho de 1742, escrita por Goldbach e enviada a Euler trazia o seguinte problema: "qualquer número inteiro maior do que seis parecia ser a soma de três números primos"[2]. Euler inferiu a veracidade desta afirmação, mesmo sem demonstrá-la, e que poderia ser decomposta em duas outras assertivas: "todo número par, maior que dois, é a soma de dois primos"e "todo número ímpar é a soma de três primos". Em respeito ao colega, Euler batizou a primeira assertiva de Conjectura de Goldbach [2].

Sendo assim, a Conjectura afirma que qualquer número par maior ou igual a 4

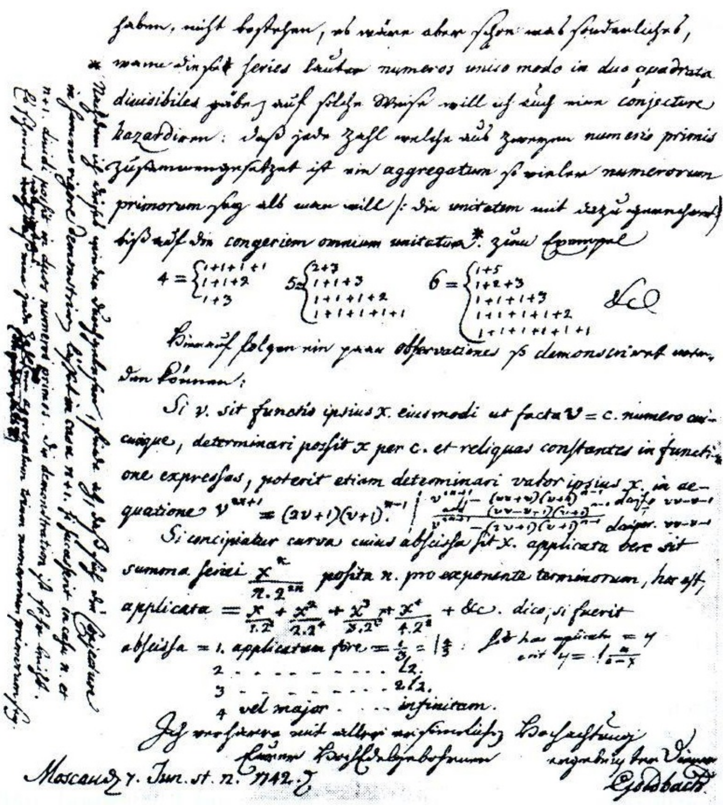

Figura 2.1: Carta XLIII

pode ser escrito como a soma de dois números primos. Por exemplo:

$$4 = 2 + 2$$
$$6 = 3 + 3$$
$$8 = 3 + 5$$
$$10 = 3 + 7 \text{ ou } 5 + 5$$
$$12 = 5 + 7$$
$$30 = 7 + 23;\ 13 + 17 \text{ ou } 11 + 19$$

A Conjectura de Goldbach foi verificada para muitos números pares. Em 1894, Georg Cantor listou possíveis decomposições de todos os números pares menores do que 1000 como a soma de dois números primos. A. Aubry ampliou estas decomposições para valores até 2000. Em 1897, R. Haussner expandiu esta lista para pares até 5000 [2].

Verificar a Conjectura de Goldbach manualmente exige muito tempo e concentração. Os computadores têm sido usados para verificações que confirmaram essa afirmação para números da magnitude de pelo menos 3.10^7 [11].

2.3 Tentativas de demonstração da Conjectura de Goldbach

Conjectura é uma afirmação admitida como verdadeira sem que haja comprovação formal; é a ação ou efeito de deduzir ou fazer inferências, baseando-se em palpites, intuições, provas inconclusas ou suposições. Em Matemática, um teorema é uma proposição que é garantida por uma prova [17]. Assim, para que uma conjectura se torne um teorema, é necessário que seja encontrada uma prova que assegure que a afirmação é verdadeira.

A Conjectura de Goldbach é considerada um dos problemas mais difíceis de provar, devido a sofisticação e riqueza da teoria dos primos, já que não há uma fórmula para representar números primos. Essa assertiva foi um dos 23 grandes problemas sem solução listados pelo matemático Hilbert, no Congresso Internacional dos Matemáticos de 1900, realizado em Paris. A conjectura está entre os problemas que ainda não foram resolvidos, mas, durante esses quase 300 anos, muitos matemáticos e alguns amadores, de vários lugares do mundo, continuam tentando demonstrá-la.

O matemático russo Lev Genrikhovich Shnirelman, em 1930, conseguiu provar que todo número natural pode ser expresso como a soma de até 20 números primos; outro matemático russo Ivan Matveyevich Vinogradov, em 1937, provou que todo número ímpar suficientemente grande pode ser representado como a soma de até 3 números primos. Mesmo não sabendo a partir de que número ímpar esta última é verdadeira, é importante ressaltar a relevância dessa afirmação. Em 1973, o matemático chinês Chen Jing Run afirmou que todo número par suficientemente grande corresponde a soma de um número primo com outro número que pode ser obtido através do produto de no máximo dois primos.

Em 2015, o matemático peruano Harald Andrés Helfgott tornou-se o primeiro latino-americano e também o cientista mais jovem a ganhar o Prêmio de Pesquisa Humboldt, concedido pela Fundação Alexander von Humboldt, da Alemanha, por ter respondido uma pergunta que vinha desafiando matemáticos do mundo inteiro há quase trezentos anos: todo número ímpar maior do que cinco pode ser expresso como uma soma de três números primos, a chamada Conjectura "fraca"de Goldbach [13].

Desde 2005, Helfgott começou a estudar o trabalho de outros cientistas que haviam provado a conjectura "fraca"para determinados números. O enunciado de Goldbach soava simples, porém prová-la para todos os números ímpares não era algo fácil. Helfgott começou a buscar uma prova em 2006. Em junho de 2013, sete anos depois de ter iniciado a busca, o peruano finalmente encontrou a resposta [13].

Em um trabalho acadêmico cujo título é *Major Arcs for Goldbach's Problem*, o matemático apresentou aperfeiçoamentos nas estimações dos arcos maiores e menores, o suficiente para provar definitivamente a conjectura "fraca"de Goldbach "todo número ímpar é a soma de três primos"[2], que deriva da "versão forte", no qual todo número par maior que 2 é a soma de dois primos. Para prová-la, Helfgott lembrou que Vinogradov mostrou que todo número ímpar, maior que uma constante C, é a soma de até 3 números primos [9]. Esta prova não será apresentada neste trabalho.

Para Harald Andrés Helfgott, a prova da conjectura não sirva para nada, mas as ferramentas e ideias usadas para tal demonstração são um grande legado para Teoria dos Números. Para provar que a soma de dois primos é um número par, a Conjectura "forte"de Goldbach, Helfgott explica que seria necessário desenvolver ferramentas e ideias para que isso ocorra [13].

A Conjectura de Goldbach permanece como um problema secular não resolvido. Ainda não há demonstração para esta afirmação, porém existem resultados importantes e significativos nesse sentido. Alguns trabalhos foram feitos na tentativa de demonstrar ou confirmar a validade da mesma para determinados intervalos. Para muitos números pares verificados até agora, constatou-se que os mesmos podem sempre ser decompostos como a soma de dois números primos. Nesta seção, serão listadas duas dessas tentativas.

2.3.1 Uma afirmação equivalente a Conjectura de Goldbach

Farley (2005), em seu artigo *Two Approaches to Proving Goldbach's Conjecture*, afirmou que dizer que para todo número inteiro $n \geq 2$, existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $n + j$ e $n - j$ são números primos é equivalente a Conjectura de Goldbach. Nesta seção, será tratada apenas uma das afirmações feitas por Farley neste artigo.

Teorema 2.3.1. *Para $n \geq 2$, pode-se escrever $2n = p + q$, em que p e q são números primos se, e somente se, existe j_0 inteiro tal que $n + j_0$ e $n - j_0$ são números primos.*

Demonstração. Suponha que $2n = p + q$, em que p e q são números primos. Tem-se $p = 2n - q = n - (q - n)$ e $q = n + (q - n)$. Como p e q são números primos, $n - (q - n)$ e $n + (q - n)$ também o são. Então, existe j_0 inteiro, $j_0 = q - n$, tal que $n - j_0$ e $n + j_0$ são primos. Reciprocamente, se existe j inteiro tal que $n - j_0$ e $n + j_0$ são primos, somando $n - j_0$ e $n + j_0$, obtém-se $(n - j_0) + (n + j_0) = 2n$. Isto é, $2n$ é igual a soma de dois números primos. □

Vamos provar a existência de j_0 do Teorema 2.3.1.

Para um inteiro $n \geq 2$, seja $k = \pi(\sqrt{2n})$, lembrando que $\pi(x)$ é a quantidade de números primos menores ou iguais a x. O Teorema Chinês do Resto, garante que existe um inteiro j_0 tal que $n+j_0$ e $n-j_0$ não são divisíveis pelos primos $2,\ 3, \cdots, p_k$. Resumindo:

Teorema 2.3.2. *Para todo $n \geq 2$, existe j_0 inteiro tal que $n+j_0$ e $n-j_0$ não são divisíveis pelos primos $2,\ 3, \cdots, p_k$. Em particular, $n+j_0$ e $n-j_0$ são primos.*

Demonstração. Inicialmente vamos escolher a_i tal que $a_i \not\equiv \pm n\,(mod\,p_i)$, para $1 \leq i \leq k$. Vamos considerar o sistema:

$$(*)\begin{cases} j_0 \equiv a_1\,(mod\,2) \\ j_0 \equiv a_2\,(mod\,3) \\ j_0 \equiv a_3\,(mod\,5) \\ \cdots \\ j_0 \equiv a_k\,(mod\,p_k) \end{cases}$$

Pelo Teorema Chinês do Resto, existe único j_0 solução módulo α_k, em que $\alpha_k = 2{\cdot}3{\cdot}5\cdots p_k$. Assim, $j_0 \equiv a_i\ mod\,p_i, 1 \leq i \leq k$. Porém, $a_i \not\equiv \pm n\ mod\,p_i$ e então, $j_0 \not\equiv \pm n\ mod\,p_i$. Isto é, $n \pm j_0 \not\equiv 0\ mod\,p_i, 1 \leq i \leq k$. Portanto, $n+j_0$ e $n-j_0$ não são divisíveis por $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, ..., p_k$.

Se $n \pm j_0 \leq 2n$, então $n \pm j_0$ é primo, pois $\sqrt{n \pm j_0} \leq \sqrt{2n}$ e $n \pm j_0$ não é divisível por nenhum primo menor ou igual a $\sqrt{2n}$, pelo crivo de Eratóstenes. Porém, sendo j_0 uma solução módulo α_k, pode ser que $n \pm j_0$ seja muito maior do que $2n$. O valor de j_0 depende como escolhemos $a_i, 1 \leq i \leq k$. Entretanto, se o valor de j_0 está num intervalo conveniente, em particular, se $|j_0| \leq n-2$, então $n+j_0$ e $n-j_0$ são primos. Portanto, se, para todo $n \geq 2$, existe esse j, então a conjectura de Goldbach é verdadeira. [5] □

Exemplo 2.3.1. *Seja $n = 52$. Então, como $k = \pi(\sqrt{2.52})$, $k = 4$, sendo $p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5$ e $p_4 = 7$ os números primos menores ou iguais a $\sqrt{2 \cdot 52}$. Como*

$$\begin{cases} 52 \equiv 0\,(mod\,2) \\ -52 \equiv 0\,(mod\,2) \\ 52 \equiv 1\,(mod\,3) \\ -52 \equiv 2\,(mod\,3) \\ 52 \equiv 2\,(mod\,5) \\ -52 \equiv 3\,(mod\,5) \\ 52 \equiv 3\,(mod\,7) \\ -52 \equiv 4\,(mod\,7) \end{cases}$$

e queremos $a_i \not\equiv \pm n\ mod\,p_i$, podemos tomar $a_1 = 1, a_2 = a_3 = a_4 = 0$. E assim, utilizando o Teorema Chinês do Resto para resolver o sistema:

$$\begin{cases} j \equiv 1\,(mod\,2) \\ j \equiv 0\,(mod\,3) \\ j \equiv 0\,(mod\,5) \\ j \equiv 0\,(mod\,7) \end{cases}$$

obtemos como solução $j_0 = 105$ $(mod\ 210)$*. Mas,* $j_0 = 105$ *é muito maior do que* $52 - 2 = 50$*. Sendo assim, devemos escolher valores convenientes para* a_i*. Sejam* $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 4, a_4 = 2$*. Obtemos o sistema:*

$$\begin{cases} j \equiv 1\ (mod\ 2) \\ j \equiv 0\ (mod\ 3) \\ j \equiv 4\ (mod\ 5) \\ j \equiv 2\ (mod\ 7) \end{cases}$$

Utilizando novamente o Teoerema Chinês do Resto, encontramos $j_0 = 9$ $(mod\ 210)$ *e portanto,* $n + j_0 = 52 + 9 = 61$ *e* $n - j_0 = 52 - 9 = 43$ *são primos.*

Farley (2005) utiliza métodos de contagem para tentar mostrar a existência de $j_0 \leq n - 2$. Seja $G(n)$ a quantidade de maneiras distintas que $2n$ pode ser escrito como a soma de dois de números primos. Por exemplo, se $2n = 22$, então $G(11) = 3$, pois $22 = 3 + 19, 22 = 5 + 17, 22 = 11 + 11$.

Seja c_i^n definida por:

$$c_i^n = \begin{cases} 1, se\ p_i | n\ ou\ i = 1 \\ 2, se\ p_i \nmid n \end{cases}$$

Seja $H(n) = (n-1) - \lceil \frac{n-1}{2} \rceil - \sum_{i=2}^{k} \lceil \frac{c_i^n.(n-1).\prod_{j=1}^{i-1}(p_j - c_j^n)}{\alpha_i} \rceil$. Então, $H(n) \leq G(n)$.

Nas tabelas, são calculados $G(n)$ e $H(n)$, para $2 \leq n \leq 300$ (Figura 2.2) e para $10000 \leq n \leq 11000$ (Figura 2.3).

{2,0,1}	{42,5,8}	{82,2,5}	{122,2,9}	{162,11,20}	{202,5,11}	{242,6,14}	{282,15,24}
{3,1,1}	{43,2,5}	{83,2,6}	{123,9,16}	{163,5,7}	{203,5,13}	{243,15,23}	{283,7,13}
{4,1,1}	{44,1,4}	{84,9,13}	{124,3,6}	{164,4,10}	{204,13,20}	{244,5,9}	{284,6,13}
{5,0,2}	{45,7,9}	{85,3,9}	{125,5,9}	{165,19,24}	{205,8,13}	{245,11,19}	{285,26,31}
{6,1,1}	{46,2,4}	{86,1,6}	{126,13,16}	{166,5,6}	{206,5,11}	{246,16,22}	{286,8,11}
{7,1,2}	{47,1,5}	{87,6,11}	{127,4,9}	{167,4,11}	{207,13,21}	{247,7,13}	{287,7,16}
{8,0,2}	{48,5,7}	{88,3,7}	{128,3,8}	{168,14,19}	{208,6,10}	{248,4,13}	{288,16,26}
{9,2,2}	{49,3,3}	{89,2,7}	{129,9,14}	{169,5,9}	{209,6,11}	{249,15,23}	{289,7,12}
{10,1,2}	{50,3,6}	{90,9,14}	{130,7,10}	{170,7,13}	{210,23,30}	{250,10,13}	{290,8,19}
{11,1,3}	{51,6,8}	{91,4,6}	{131,4,9}	{171,12,17}	{211,7,11}	{251,5,15}	{291,17,25}
{12,3,3}	{52,2,5}	{92,1,8}	{132,12,16}	{172,5,10}	{212,4,12}	{252,20,27}	{292,7,12}
{13,1,3}	{53,2,6}	{93,6,13}	{133,6,8}	{173,4,9}	{213,13,21}	{253,8,15}	{293,7,13}
{14,0,2}	{54,5,8}	{94,2,5}	{134,4,9}	{174,11,16}	{214,5,9}	{254,5,14}	{294,19,29}
{15,3,3}	{55,4,6}	{95,3,8}	{135,15,19}	{175,10,13}	{215,7,14}	{255,25,32}	{295,10,16}
{16,1,2}	{56,3,7}	{96,7,11}	{136,5,7}	{176,5,10}	{216,14,19}	{256,6,11}	{296,6,15}
{17,0,4}	{57,6,10}	{97,3,7}	{137,4,11}	{177,11,20}	{217,6,13}	{257,5,14}	{297,20,27}
{18,2,4}	{58,3,6}	{98,2,9}	{138,11,16}	{178,4,9}	{218,5,11}	{258,17,23}	{298,7,12}
{19,1,2}	{59,3,6}	{99,8,13}	{139,5,7}	{179,4,10}	{219,13,21}	{259,9,11}	{299,9,15}
{20,1,3}	{60,10,12}	{100,4,8}	{140,9,14}	{180,18,22}	{220,10,14}	{260,11,17}	{300,25,32}
{21,3,4}	{61,3,4}	{101,3,9}	{141,12,16}	{181,4,8}	{221,7,13}	{261,17,24}	
{22,1,3}	{62,1,5}	{102,8,14}	{142,4,8}	{182,5,14}	{222,14,21}	{262,6,11}	
{23,1,4}	{63,7,10}	{103,4,7}	{143,6,12}	{183,10,18}	{223,6,12}	{263,6,15}	
{24,3,5}	{64,2,3}	{104,3,7}	{144,11,17}	{184,3,8}	{224,6,13}	{264,18,25}	
{25,2,4}	{65,2,7}	{105,15,19}	{145,6,10}	{185,4,14}	{225,20,27}	{265,8,14}	
{26,0,3}	{66,7,9}	{106,4,6}	{146,3,8}	{186,11,18}	{226,5,12}	{266,8,17}	
{27,2,5}	{67,3,6}	{107,2,8}	{147,11,19}	{187,5,10}	{227,4,12}	{267,15,22}	
{28,1,3}	{68,2,5}	{108,8,13}	{148,4,8}	{188,3,11}	{228,15,24}	{268,6,13}	
{29,1,4}	{69,6,8}	{109,3,7}	{149,4,11}	{189,13,22}	{229,5,9}	{269,6,14}	
{30,4,6}	{70,4,7}	{110,5,9}	{150,14,21}	{190,6,13}	{230,9,16}	{270,21,30}	
{31,2,3}	{71,3,8}	{111,9,11}	{151,5,9}	{191,4,10}	{231,21,28}	{271,7,10}	
{32,0,5}	{72,6,11}	{112,4,7}	{152,3,10}	{192,12,19}	{232,5,12}	{272,6,13}	
{33,3,6}	{73,3,6}	{113,2,7}	{153,12,15}	{193,5,12}	{233,4,13}	{273,21,30}	
{34,1,2}	{74,2,5}	{114,8,12}	{154,5,8}	{194,4,9}	{234,15,24}	{274,6,11}	
{35,2,5}	{75,10,12}	{115,6,9}	{155,6,12}	{195,19,27}	{235,10,15}	{275,10,19}	
{36,4,6}	{76,3,4}	{116,2,7}	{156,12,17}	{196,5,11}	{236,4,13}	{276,17,23}	
{37,1,5}	{77,3,8}	{117,9,15}	{157,4,9}	{197,4,11}	{237,14,23}	{277,7,11}	
{38,0,5}	{78,7,11}	{118,3,9}	{158,3,10}	{198,13,21}	{238,9,14}	{278,6,11}	
{39,3,7}	{79,2,5}	{119,5,9}	{159,10,15}	{199,5,7}	{239,5,11}	{279,16,23}	
{40,2,4}	{80,3,8}	{120,13,18}	{160,6,11}	{200,6,14}	{240,22,29}	{280,11,18}	
{41,1,5}	{81,7,10}	{121,5,8}	{161,5,11}	{201,12,17}	{241,6,11}	{281,7,14}	

Figura 2.2: Tabela: $\{n, H(n), G(n)\}$, para $2 \leq n \leq 300$

Os valores em negrito na Figura *2.3* são os valores de n em que $H(n) = 0$. O último desses valores é $n = 38$. Além disso, $H(n)$ é um limite inferior bastante próximo de $G(n)$ que cresce à medida que $G(n)$ cresce. A partir disso, a seguinte conjectura é feita:

{10000,200,231}	{10150,258,283}	{10300,210,228}	{10450,250,272}	{10600,221,229}	{10750,223,239}	{10900,225,239}
{10010,301,329}	{10160,205,232}	{10310,208,232}	{10460,211,233}	{10610,216,223}	{10760,221,226}	{10910,224,248}
{10020,422,443}	{10170,432,467}	{10320,447,464}	{10470,443,456}	{10620,456,491}	{10770,455,478}	{10920,610,635}
{10030,223,239}	{10180,203,220}	{10330,209,219}	{10480,214,231}	{10630,216,237}	{10780,295,318}	{10930,223,232}
{10040,201,223}	{10190,202,239}	{10340,241,249}	{10490,213,235}	{10640,277,297}	{10790,242,266}	{10940,223,237}
{10050,430,460}	{10200,458,477}	{10350,459,480}	{10500,533,547}	{10650,457,475}	{10800,458,470}	{10950,469,473}
{10060,201,225}	{10210,205,225}	{10360,260,273}	{10510,214,234}	{10660,242,248}	{10810,237,254}	{10960,224,232}
{10070,222,237}	{10220,252,274}	{10370,228,247}	{10520,213,249}	{10670,245,266}	{10820,222,244}	{10970,222,237}
{10080,511,527}	{10230,498,524}	{10380,437,460}	{10530,485,490}	{10680,457,450}	{10830,483,502}	{10980,470,487}
{10090,203,219}	{10240,206,234}	{10390,211,231}	{10540,238,254}	{10690,217,232}	{10840,222,228}	{10990,271,300}
{10100,206,240}	{10250,215,233}	{10400,230,260}	{10550,216,233}	{10700,220,240}	{10850,279,289}	{11000,248,272}
{10110,426,455}	{10260,459,483}	{10410,438,453}	{10560,497,521}	{10710,581,605}	{10860,458,467}	
{10120,241,259}	{10270,233,255}	{10420,212,232}	{10570,257,279}	{10720,223,241}	{10870,221,249}	
{10130,204,221}	{10280,209,227}	{10430,257,276}	{10580,225,255}	{10730,235,255}	{10880,235,256}	
{10140,465,497}	{10290,524,554}	{10440,458,457}	{10590,449,481}	{10740,454,476}	{10890,510,527}	

Figura 2.3: Tabela: $\{n, H(n), G(n)\}$, para $10000 \leq n \leq 11000$

Para $n > 38, H(n) > 0$. *E assim, como* $G(n) \geq H(n)$, *isso implica que a Conjectura de Goldbach é verdadeira para* $n > 38$.

Neste artigo, Farley não demonstra a veracidade da afirmação acima. Esta afirmação é concluída numericamente.

2.3.2 Uma prova rigorosa da conjectura forte de Goldbach

Aouessare *et al* (2016), em seu artigo *A Rigorous Proof for the Strong Goldbach Conjecture*, afirma ter feito uma prova rigorosa da conjectura de Goldbach. Pode-se verificar que é possível encontrar pelo menos um par de números primos para qualquer número par maior ou igual a 6 satisfazendo a conjectura de Goldbach. Assim, pode-se reformular essa conjectura da seguinte maneira: "*Todo número par maior do que 2 tem pelo menos um par de primos de tal forma que é igual à sua soma*"[1]. Seja (p, q) o par de primos de modo que $p \leq q$ e o número par $2n = p + q$, onde n é um inteiro, $n > 1$.

Exemplo 2.3.2. *Os números 6, 10 e 24 podem ser escritos da seguinte maneira, de acordo com a conjectura de Goldbach:*

$$6 = 3 + 3$$
$$10 = 3 + 7;\ 10 = 5 + 5$$
$$24 = 5 + 19;\ 24 = 7 + 17;\ 24 = 11 + 13$$

Assim, 6 tem 1 par de primos satisfazendo a conjectura de Goldbach; 10 tem 2 pares e 24 tem 3 pares.

Para tentar demonstrar a conjectura, serão considerados os números pares da forma $(2n + 6)$, sendo n um inteiro não negativo. Nesse caso, uma afirmação equivalente a de Goldbach seria: "*Todo número par da forma* $(2n + 6)$ *pode ser escrito como a soma de dois primos da seguinte maneira:*

$$2n + 6 = (3 + 2i) + (2n + 3 - 2i), \tag{2.1}$$

em que $n \geq 0$ e existe um inteiro positivo i tal que $(3+2i)$ e $(2n+3-2i)$ são primos"[1].

Embora a expressão $(2n+6)$ comece com o número par 6, é possível generalizar a prova para o número par 4, pois $4 = 2 + 2$. É possível observar que, neste caso, de fato, existe i tal que $(3 + 2i)$ e $(2n + 3 - 2i)$ são primos, conforme Teorema 2.3.1 e, é sempre possível então encontrar valores de i e n tais que isso ocorra.

Exemplo 2.3.3. *Tem-se* $2n + 6 = (3 + 2i) + (2n + 3 - 2i)$*. Daí,*

$$n = 0; i = 0 : 6 = 3 + 3$$
$$n = 1; i = 0 : 8 = 3 + 5$$
$$n = 2; i = 0 : 10 = 3 + 7$$
$$n = 3; i = 0 : 12 = 3 + 9, \textit{ porém 9 não é primo. Para } n = 3; i = 1 : 12 = 5 + 7$$
$$n = 4; i = 0 : 14 = 3 + 11$$
$$n = 5; i = 0 : 16 = 3 + 13$$
$$n = 6; i = 0 : 18 = 3 + 15, \textit{ porém 15 não é primo. Se } n = 3; i = 1 : 12 = 5 + 13$$

O triângulo de pares de primos para um dado número par $N = 2n + 6$ é obtido a partir da Tabela 2.1, que é uma tabela onde a primeira linha é feita de números ímpares da forma $(2n+3)$ e a primeira coluna é feita de números pares da forma (2n + 6), onde n é positivo inteiro ($n \geq 0$). É possível observar que os elementos da linha i e coluna j desta tabela são obtidos subtraindo os elementos das posições $(1, j)$ das de $(i, 1)$, onde $i, j \geq 1$ e $i = j = 0$ indicam a linha dos elementos na forma $(2n + 3)$ e a coluna dos elementos na forma $(2n + 6)$. Por exemplo, o elemento 6 ocupa a posição $(1, 0)$ e o elemento 3 ocupa a posição $(0, 1)$; daí, $6 - 3 = 3$ ocupa a posição $(1, 1)$.

Os elementos em negrito são números primos resultantes da diferença entre os elementos das posições $(1, j)$ das de $(i, 1)$ cujas somas com os números primos da linha 0 resultam no número par $(2n + 6)$ correspondente, conforme Tabela 2.1, ilustrando o triângulo de conjectura de Goldbach. Este triângulo indica os pares de primos verificando a conjectura de Goldbach, para um número par maior ou igual a 6. A última coluna desta tabela fornece a quantidade de pares de números primos correspondentes aos números pares da primeira coluna. Isto é, $8 = 3 + 5$ possui apenas um par de primos satisfazendo a conjectura, portanto $N_p = 1$; $22 = 3 + 19, 22 = 5 + 17, 22 = 11 + 11$ possui três pares de primos satisfazendo esta assertiva e assim, $N_p = 3$. Com esta tabela, pode-se observar que um número par maior ou igual a 6 é a soma de pelo menos um par de primos.

Para encontrar o número de pares de primos correspondente a um número par, considere a função $\pi(N)$, que fornece a quantidade de números primos menores ou iguais a N. Como, pelo Teorema 1.3.5, $\lim_{N\to\infty} \frac{\pi(N)}{N/ln(N)} = 1$, à medida que $N \to \infty$, tem-se que:

$$\pi(N) \approx N/ln(N) \tag{2.2}$$

	3	**5**	**7**	9	**11**	**13**	15	**17**	**19**	21	**23**	...	$2n+3$	Número de pares de primos
6	**3**													1
8	**5**	3												1
10	**7**	**5**	3											2
12	9	**7**	5	3										1
14	**11**	9	**7**	5	3									2
16	**13**	**11**	9	7	5	3								2
18	15	**13**	**11**	9	7	5	3							2
20	**17**	15	**13**	11	9	7	5	3						2
22	**19**	**17**	15	13	**11**	9	7	5	3					3
24	21	**19**	**17**	15	**13**	11	9	7	5	3				3
26	**23**	21	**19**	17	15	**13**	11	9	7	5	3			3
⋮														1
2n+6	2n+3	2n+1	2n-1	2n-3	2n-5	2n-7	2n-9	2n-11	2n-13	2n-15	2n-17	⋮	3	N_p

Tabela 2.1: Tabela Conjectura de Goldbach

O número total de pares de primos verificando a conjectura de Goldbach para um número par $N = 2n+6$ pode ser obtido da mesma maneira. Para isso, é necessário analisar o comportamento desse número na Tabela 2.2, que é igual a pelo menos 1, isto é, existe pelo menos um par de primos cuja soma é um número par. Além disso, apenas metade do intervalo (3, 2n + 3) contribui para o número total de pares de primos correspondente aos números pares menores do que o número par N, conforme Tabela 2.1. Portanto, este número pode ser expresso como:

$$L(N) = \pi\left(\frac{N}{2}\right).\frac{\pi(N)}{2} \tag{2.3}$$

Substituindo $\pi(N)$, dada em 2.2:

$$L(N) = \frac{N/2}{ln(N)}.\frac{N}{2ln(N)} \Longrightarrow L(N) = \left(\frac{N}{2}\right)^2.\frac{1}{ln(N/2)ln(N)} \tag{2.4}$$

Por exemplo, para $N = 26$, usando 2.4, obtem-se $L(26) = 20,31$, que é diferente do número exato (Tabela 2.1). Na Tabela 2.1, tem-se que o número total de pares de primos correspondente aos números pares menores que 26 é 22.

A Tabela 2.2 mostra a evolução do número cumulativo de pares de primos para os números pares $10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$. À medida que N cresce, a discrepância entre o número exato e estimado usando 2.4 diminui, por causa da precisão do Teorema dos Números Primos. Usando 2.4 para $N = 10^i, i = 2, ..., 6$, obtem-se:

Número par	**Nº cumulativo de pares de primos**
10^2	139
10^3	5840
10^4	319 677
10^5	20 128 819
10^6	1 382 894 773

Tabela 2.2: Número cumulativo de pares de primos para $N = 10^i, i = 2, ..., 6$

O número de pares de primos verificando a conjectura de Goldbach correspondente a um único número par N_1 é obtido da seguinte maneira:

$$N_p = L(N_1) - L(N_2), \tag{2.5}$$

em que N_2 é um número par tal que $N_1 - N_2 = 2$.

Exemplo 2.3.4. *Seja* $N_1 = 26$. *Tem-se então* $N_2 = 24$. *Usando 2.4, obtemos:*

$$L(24) = \frac{12^2}{ln(12).ln(24)} \approx 18,23$$
$$L(26) = \frac{13^2}{ln(13).ln(26)} \approx 20,23$$

Assim, $N_p = L(26) - L(24) \approx 2$. *Porém, ao olhar a Tabela 2.1, vê-se que, para* $N = 26, N_p = 3$.

Para $N = 10^i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e fazendo $N_p = L(N_1) - L(N_2)$:

N_1	N_p	$N_p(exato)$
10^1	$1,2$	2
10^2	$4,23$	6
10^3	$19,72$	28
10^4	$127,42$	127
10^5	$802,95$	-
10^6	$5519,06$	-

Dos exemplos apresentados acima, pode-se perceber que 2.5 é uma boa aproximação do número de pares de primos correspondentes a um número par determinado à medida que N cresce, especialmente, para números pares maiores ou iguais a 10^4. Para cada número par, há pelo menos um par de primeiras confirmações de Goldbach. Assim, segundo Aouessare *et al* (2016), pode-se confirmar que a Conjectura de Goldbach é verdadeira e que ela deve ser reformulada como segue: "Há pelo menos um par de primos de modo que um mesmo inteiro positivo maior ou igual a 4 pode ser expresso como sua soma"[1].

Pode-se concluir que, neste artigo, faltou demonstrar que $N_p = L(N_1) - L(N_2)$ fornece a quantidade de número de pares de primos satisfazendo a Conjectura de Goldbach, para qualquer número par N_1. Então, a prova da conjectura continua em aberto.

2.3.3 Sobre essas tentativas

A Conjectura de Goldbach ainda é um dos problemas sem solução em Matemática. No entanto, as tentativas de prova desta afirmação continuam trazendo resultados importantes. Rav (2000) faz uma reflexão sobre isso [2]:

> *"Reparem no tesouro produzido pelas tentativas de demonstração da conjectura de Goldbach, e vejam como é tão pouco significativa, comparativamente, a questão da descoberta do seu valor lógico absoluto! Suponhamos que um dia alguém aparece com um contra-exemplo para a conjectura de Goldbach, ou com uma demonstração de que existem números pares que não se podem representar como soma de dois primos. Será que isso tornaria falsas ou tiraria algum valor a todas as teorias magníficas, conceitos e técnicas que foram desenvolvidos para demonstrar a conjectura que estamos agora a supor que é incorrecta? Nada disso. Uma demonstração da falsidade da conjectura de Goldbach apenas serviria como catalizador de novos desenvolvimentos, sem nenhum efeito nos métodos desenvolvidos até aqui na tentativa de demonstrar a conjectura. Porque começaríamos imediatamente a colocar novas questões, como por exemplo acerca da quantidade de números pares 'não-goldbachianos': serão em número finito? infinitos?... Novos tesouros viriam juntar-se aos primeiros, a par deles e não em vez deles – e é assim o percurso das demonstrações em matemática!"*

Capítulo 3

A Conjectura de Goldbach em sala de aula

O ensino de Matemática é justificado por vários motivos, dentre eles, a transcrição da realidade quantitativa dos fatos e o desenvolvimento ao raciocínio lógico. Porém, a análise breve da história mostra que a intuição também estimula o pensamento matemático.

A palavra intuição vem do latim *intueri*, que significa considerar, ver internamente ou contemplar [16]. É definida como a capacidade para entender, identificar ou pressupor coisas que não dependem de um conhecimento empírico, de conceitos racionais ou de uma avaliação mais específica; conhecimento claro, direto, imediato da verdade sem o auxílio do raciocínio. Na linguagem popular, significa pressentimento.

A intuição matemática pode ser estimulada por experiências, atividades e manipulações de objetos. Geralmente, os matemáticos se referem a algo como "intuitivo"quando a veracidade do fato é facilmente reconhecível. No entanto, dizer que algo é intuitivo nem sempre é o mesmo que dizer que é fácil.

O uso do material didático nas aulas de Matemática influencia positivamente na aprendizagem, favorecendo o fortalecimento da intuição, o desenvolvimento do raciocínio lógico, a agilidade e a organização no pensar, a compreensão e a resolução de problemas matemáticos. Todo instrumento pedagógico mediador da relação professor-aluno-saber é um material didático pedagógico [10]. O termo Material Didático é identificado "em todo e qualquer acessório usado pelo professor para realizar a aprendizagem. São pois, materiais didáticos: o quadro-negro, o giz, o apagador, os livros, instrumentos, os aparelhos e todo o meio áudio-visual usado pelo professor ou pelo aluno, durante a aprendizagem"[10].

Neste sentido, foi elaborada uma atividade, com o uso de material concreto, para se inferir a Conjectura de Goldbach. Assim, serão apresentadas a proposta de trabalho e a metodologia utilizadas no desenvolvimento da pesquisa.

3.1 Descrição da atividade

A atividade foi elaborada com o intuito de estimular o raciocínio indutivo dos estudantes. Para tal, foi utilizada a Conjectura de Goldbach, afirmação feita há quase três séculos que permanece ainda sem demonstração, como tema motivador. Inicialmente, a proposta era utilizar um jogo *online*, disponível em http://nautilus.fis.uc.pt/mn/goldbach/index.html. Porém, em virtude da dificuldade com o acesso a internet e disponibilidade de computadores, a aplicação da atividade foi adaptada. Como forma alternativa, foram confeccionadas, com papel duplex nas cores verde e vermelha, fichas numeradas. As fichas vermelhas continham números pares de 4 a 30; as verdes números primos de 2 a 29. Além disso, foi elaborada uma atividade escrita dividida em três partes, sendo a primeira parte questionamentos relativos as definições de números pares e primos; a segunda, era sobre o material que seria utilizado para auxiliar aos alunos a obter algumas conclusões; e a terceira, continha questionamentos sobre a execução da segunda parte. A atividade aplicada encontra-se no Apêndice.

3.2 Sequência didática

A atividade foi proposta em um colégio público da rede estadual, Colégio Estadual Duque de Caxias, em duas turmas de 2º ano do Ensino Médio, com 12 estudantes cada uma, e aplicada em 3 horas/aula em cada turma. O principal objetivo da atividade era desenvolver a intuição matemática.

Nas duas primeiras aulas, em uma das turmas (turma 1), foi feita uma explicação breve do que é a atividade, sem relembrar o conteúdo em questão (números, pares, primos e ímpares). A atividade escrita foi distribuída aos estudantes e lida. Os alunos começaram a responder a primeira parte, porém com um pouco de dificuldade, pois alguns não se recordavam das definições de números pares e números primos, sendo necessário intervir em alguns momentos, quando os estudantes solicitavam. Em seguida, foi esclarecida a segunda parte e entregue o material com as fichas vermelhas e verdes, enfatizando o que deveria ser feito com o material recebido. Em relação a essa parte, alguns estudantes não compreenderam que era para tentar escrever os números da ficha vermelha como a soma de dois, e apenas dois, números da ficha verde, fazendo o contrário ou ainda, escrevendo os números da ficha vermelha como a soma de mais de dois números da ficha verde. Assim, foi necessário intervir novamente para sanar esta dificuldade. Posteriormente, os estudantes responderam os questionamentos baseados na segunda parte da atividade.

Na segunda turma (turma 2), por conta das dificuldades enfrentadas na primeira turma em relação as definições e ao entendimento da atividade e por perceber que os estudantes dessa turma também não se recordavam das definições necessárias para respondê-la, relembramos, de maneira bem breve, as definições de paridade e de números primos. Após isso, foram entregues a atividade escrita e as fichas verdes e vermelhas e assim, foi explicado o que deveria ser feito em cada uma das etapas. Foram feitas menos intervenções do que na outra turma. A percepção era que houve um maior entendimento nesta.

Em ambas as turmas, foi solicitado que as somas encontradas fossem escritas no verso da atividade. Na terceira aula, foi feito um detalhamento das definições utilizadas e discussões sobre a atividade. Os discentes tiveram ciência de que eles haviam trabalhado com a conjectura de Goldbach, um problema secular ainda sem solução. Muitos deles ficaram maravilhados com essa informação!

Figura 3.1: Aplicação da atividade A Conjectura de Goldbach

3.3 Análise dos dados obtidos

Após a aplicação, as atividades escritas foram entregues respondidas. Analisando as respostas, foi observado que, em geral, as definições de números par, ímpar e primo, apesar de serem elementares, não estão claras para os estudantes. Este deve ter sido um dos motivos para a dificuldade nas outras etapas da atividade.

Em relação a Parte I, $41,7\%$ dos estudantes da turma 1 e $83,3\%$ da turma 2 responderam, de maneira aceitável, a definição de número primo. Em relação a Parte II, alguns alunos não compreenderam muito bem a proposta da atividade, que era, *a* *priori*, escrever os números da ficha vermelha como a soma de dois números da ficha verde. Uns escreveram os números da ficha verde como a soma de dois números da ficha vermelha; outros escreveram os números da ficha vermelha como a soma de três números da ficha verde. Porém, com as intervenções, estes conseguiram entender o que estava sendo proposto.

Na Parte III, ao analisar as respostas, é possível perceber que, na turma 1, 25% concluíram que um número par é obtido como a soma de dois números primos e, $58,3\%$ dos estudantes da turma mostrariam esta afirmação realizando somas. Na turma 2, $33,3\%$ dos alunos responderam que os números da ficha verde são ímpares, mesmo o número 2 estando escrito nesta ficha. Três estudantes disseram não ter conseguido escrever os números 29; 6 e 4; 2 e 3 como soma de dois números da ficha verde, sendo que 2, 3 e 29 eram fichas dessa cor. Um discente respondeu que não era possível escrever sempre um número da ficha vermelha como a soma de dois números da ficha verde; outro disse que essa possibilidade dependerá da "quantia em que for aumentada", isto é, de números cada vez maiores. 25% concluíram que um número par é escrito como a soma de dois ímpares e 25% como a a soma de dois primos. Para mostrar que esta conclusão é verdadeira, 50% dos alunos da turma disseram que seria necessário apenas observar as somas realizadas.

Capítulo 4

Considerações Finais

A Conjectura de Goldbach afirma que todo número par maior do que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos, e permanece como um problema sem solução na Matemática. Vários matemáticos, em momentos diferentes da história, tentaram demonstrá-la, sem sucesso. Essas tentativas, no entanto, produziram resultados importantes e significativos, que resultaram em vários teoremas. Duas dessas tentativas foram expostas neste trabalho. Nos dois artigos analisados, os autores Farley (2005) e Aouessare *et al* (2016) concluíram a afirmação equivalente a conjectura por meio de exemplos.

O legado das tentativas de demonstração tem uma grande contribuição na Matemática. As demonstrações são fundamentais para a consolidação e desenvolvimento do conhecimento matemático, porém sua importância é muito maior do que provar a veracidade de afirmações.

Neste trabalho, a conjectura de Goldbach foi levada para a sala de aula como uma maneira de despertar a intuição matemática. Para isso, foi aplicada uma atividade em duas turmas distintas do 2º ano do Ensino Médio de um colégio público da rede estadual de ensino com o intuito de, diante das questões propostas, fazer com que os estudantes inferissem essa conjectura. Porém, o resultado não foi o esperado. Poucos alunos conseguiram responder de maneira satisfatória aos questionamentos e chegar a conclusão desta afirmação.

Uma sugestão seria aplicar a atividade proposta em escolas públicas (municipal, estadual e federal) e particulares. Posteriormente, ao analisar os resultados obtidos, poderia ser feita uma comparação para verificar a consolidação da definição de número primo e o desenvolvimento da intuição matemática.

A intuição matemática precisa ser mais estimulada em sala de aula. Assim, além de auxiliar na resolução de problemas, poderia despertar um maior interesse dos estudantes na disciplina.

Os números primos são trabalhados no 6º ano do Ensino Fundamental e depois, praticamente, não reaparecem em outros anos do Ensino Básico. Possivelmente, esse foi um fatores para o não entendimento da proposta, além de problemas com interpretação de texto. Com isso, a inferência da conjectura de Goldbach, que era o principal objetivo da atividade, em geral, não foi alcançado.

Há a possibilidade de aliar números primos a outros conteúdos, o que poderia despertar um maior interesse em resolver problemas envolvendo Teoria dos Números. Trazer a história como aliada no estudo dos primos também consolidaria esse tema tão importante na Matemática. Hoje em dia, estes números são usados em criptografia, na codificação de mensagens para vários fins, principalmente os financeiros, tornando-se um recurso criptográfico muito eficaz e seguro.

Bibliografia

[1] AOUESSARE, A. *et al*, **A Rigorous Proof for the Strong Goldbach Conjeture**. International Journal of Computer Applications (0975 - 8887). Volume 141, 2016.

[2] CHAVES, M.S., **A Linguagem dos números primos: uma abordagem epistemológica sobre a Conjectura de Goldbach**. Atlante. Cuadernos de Educación y Desarrollo, 2014. Disponível em http://atlante.eumed.net/linguagem-numeros-primos/.

[3] DIAS, C.H.B.B., **Números Primos e Divisibilidade: Estudo de Propriedades**. Dissertação Profmat, 2013. Disponível em *http : //www.rc.unesp.br/igce/pos/profmat/arquivos/dissertacoes/N%C3%BAmeros%20Primos%*

[4] DOXIADIS, A., **Tio Petros e conjectura de Goldbach**. Editora 34, 2001.

[5] FARLEY, B., **Two Approaches to Proving Goldbach's Conjecture**, 2005. Disponível em http://www.math.vt.edu/people/linnell/Ugresearch/farley.pdf.

[6] FILHO, D.C.M., **A conjectura de Goldbach e mais uma tentativa de demonstrá-la**. In: Programa de Educação Tutorial. Centro de Ciências e Tecnologia/UFCG - 2013.

[7] GARIBALDI, E., **Aproximações ao Problema de Goldbach**. Matemática Universitária, (34):19–33, 2003.

[8] HEFEZ, A., **Elementos de Aritmética**. Coleção Textos Universitários. Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

[9] HELFGOTT, H.A., The ternary Goldbach problem. Snapshots of modern mathematics from Oberwolfach, 2014.

[10] JANUARIO, G., **Materiais manipuláveis: Mediadores na (Re)Construção de significados matemáticos**. Monografia (Especialização) – CEPPE – Universidade Guarulhos, Guarulhos, 2008.

[11] NASCIMENTO, M.C.; FEITOSA, H.A., **Elementos de Teoria dos Números**, 2013.Disponível em http://wwwp.fc.unesp.br/ mauri/TN/TN.pdf.

[12] PEREIRA, A. L., **Números primos e a Conjectura de Goldbach**. Dissertação Profmat, 2017. Disponível em $https : //sca.profmat - sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id = 94141$.

[13] PIGHI, P., **O matemático peruano que resolveu um problema de quase 300 anos**. BBC Mundo, 2015. Disponível em http://www.bbc.com/portuguese/noticias/2015/10/151004_matematico_peruano_helfgott_m Acesso em 20 de fevereiro de 2018, às 18:40.

[14] SANTOS, J. P. O., **Introdução à Teoria dos Números**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[15] SIDK, S., **Introdução à Teoria dos Números**. Décimo Colóquio Brasileiro de Matemática.

[16] MARCHINI, V., **O que é intuição?**. Da Redação, Revista Superinteressante, 2006. Disponível em <http://super.abril.com.br/comportamento/o-que-e-intuicao/>. Acesso em 15 de novembro de 2016, às 11h54.

[17] https://www.dicio.com.br/conjectura/. Acesso em 22 de setembro de 2016 às 09h15 https://www.dicio.com.br/intuicao/. Acesso em 15 de novembro de 2016 às 12h05

[18] BARROS, Carlos A. T. de., **A importância da intuição na atividade investigativa** . Disponível em: http://trabalhosdematematica.blogspot.com.br/2013/06/intuicao-matematica.html. Acesso em 15 de novembro de 2016 às 14h42)

Apêndice

ATIVIDADE: A CONJECTURA DE GOLDBACH

PARTE I

1. Como você define:
a) número par?

b) número primo?

PARTE II

Atividade Conjectura de Goldbach

1. Você recebeu um kit com fichas de cores diferentes: vermelhas e verdes. As fichas contêm números entre 2 e 30. A atividade consiste em escrever um número da ficha vermelha como a soma de dois números da ficha verde.

2. Liste os números escritos e suas respectivas somas.

PARTE III

1. Os números da ficha vermelha são números:

2. Os números da ficha verde são números:

3. Você conseguiu escrever os números da ficha vermelha como a soma de dois números da ficha verde? Sentiu alguma dificuldade?

4. Algum número da ficha vermelha não pode ser escrito como a soma de dois números da ficha verde? Qual?

5. Será que escrever um número da ficha vermelha como a soma de dois números da ficha verde é sempre possível? Por que?

6. O que você consegue concluir com esta atividade?

7. Como mostrar que a sua conclusão é verdadeira?